Incertitudes sur les mesures

1 La précision d'une mesure

Chaque mesure réalise en TP comporte une certaine imprécision ou **incertitude**, qui dépend de la précision de l'instrument de mesure.
Il ne s'agit pas d'une erreur à proprement parler (si une erreur a été commise lors d'une mesure, il faut recommencer...), mais plutôt d'une limite de la technique de mesure, c'est-à-dire une erreur systématique qui ne peut pas être évitée, même avec le plus grand soin.
En première approche, l'incertitude de mesure correspond en général à la plus petite graduation lisible sur l'appareil, ou au plus petit chiffre que l'appareil affiche. On exige de vous que vous analysiez les causes d'erreurs avec un esprit critique, cette première approche est donc insuffisante au niveau Terminale S.

Pour toute mesure en TP, vous devez être capable d'estimer l'incertitude.

Exemples d'incertitudes de mesure avec différents instruments :
— Double décimètre ou mètre-ruban : $0,1$ cm ;
— Règle de maître d'école : 1 cm ;
— Pied à coulisse : $0,01$ cm ;
— Rapporteur d'angle : $1°$;
— pH-mètre : $0,1$ unités de pH ;
— Volume la verrerie graduée : $0,1$ mL ;
— Volume la verrerie jaugée : $0,01$ mL.

2 Mesurer une grandeur

2.1 Définition

Faire une mesure consiste à rechercher la valeur numérique d'une grandeur, il est cependant impossible de connaître la valeur vraie de la grandeur à cause des erreurs de mesure.

2.2 Erreur de mesure

2.2.1. L'erreur systématique

Elle prend toujours la même valeur sur chaque mesure répétée (valeur inconnue). Souvent due à un appareil défectueux, mal étalonné ou utilisé incorrectement, elle affecte le résultat toujours dans le même sens.

2.2.2. L'erreur aléatoire

Elle apparaît quand on réalise un grand nombre de mesure de la même grandeur dans les mêmes conditions, réalisées avec des appareils différents. La justesse, la fidélité et la résolution d'un système d'acquisition déterminent l'incertitude finale sur la mesure.

3 Incertitude de la mesure

L'incertitude de mesure est une estimation de l'erreur de mesure. Lorsqu'on mesure une grandeur quelconque (longueur d'une table par exemple), on ne peut jamais obtenir une valeur exacte. On appelle

erreur la différence entre la valeur mesurée et la valeur exacte. Mais comme on ignore la valeur exacte, on ne peut pas connaître l'erreur commise... Le résultat est donc toujours incertain. On parle des incertitudes de mesure.
La précision d'une mesure est limitée par
- la précision de l'appareil de mesure (sur une règle graduée en mm, il est impossible de lire les dixièmes de mm) ;
- la méthode de mesure utilisée ;
- l'habileté (les limites) de l'expérimentateur (exemple : temps de réaction pour enclencher ou déclencher un chronomètre).

3.1 Estimation de type A : mesures multiples

Ce sont les mesures que l'on peut effectuer plusieurs fois, dans les mêmes conditions, et l'évaluation de ce type d'incertitude fait appel au calcul statistique. On dispose de N mesures indépendantes dont les résultats sont notés $m_1, m_2, ..., m_N$. En statistique, un ensemble de p objets constitue une population. En prélevant N objets dans cette population, on constitue un échantillon de taille N ($N < p$). On peut donc considérer que les N mesures constituent un échantillon de taille N.

3.1.1. Ecart-type et incertitude-type

L'écart-type mesure la dispersion de la série autour de la valeur moyenne : la dispersion de la série est d'autant plus grande que l'écart-type est grand.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(m_i - \overline{m})^2}{N}}$$

(la variance est $V = \sigma^2$) où $\overline{m}$ est la moyenne de l'échantillon : $\overline{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i$ La théorie statistique montre alors que la meilleure estimation de la dispersion est mesurée par l'écart-type expérimental défini :

$$s_{exp} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(m_i - \overline{m})^2}{N-1}}$$

(s_{exp} est noté souvent σ_{n-1} par les calculatrices.) Le meilleur estimateur de cet écart-type est l'incertitude-type s donnée par :

$$s = \frac{s_{exp}}{\sqrt{N}}$$

3.1.2. Intervalle de confiance

L'intervalle de confiance à un taux de confiance choisi est un intervalle dans lequel la valeur cherchée a une certaine probabilité de se trouver. Dans les cas que nous rencontrerons, les bornes de l'intervalle de confiance dépendent du nombre de mesures N et du choix du niveau de confiance et sont égales à $[\overline{m} - ks; \overline{m} + ks]$. s est l'incertitude-type et k le facteur d'élargissement.
L'incertitude-type élargie de mesure est $\Delta m = ks$. Elle dépend du nombre n de mesures indépendantes réalisées, de l'écart type de la série de mesures et d'un coefficient k appelé facteur d'élargissement qui dépend du nombre de mesures réalisées et du niveau de confiance choisi. Sa valeur figure dans un tableau issu de la loi statistique dite « loi de Student ». Un extrait de ce tableau est donné ci-dessous pour un nombre de mesures compris entre 2 et 16, et pour des niveaux de confiance de 95 % et de 99 % :

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$k_{95\%}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23	2,20	2,18	2,16	2,15	2,13
$k_{99\%}$	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,17	3,11	3,06	3,01	2,98	2,95

- Pour un même nombre de mesures, plus le niveau de confiance est grand et plus k est grand.
- Pour un même niveau de confiance, plus le nombre n de mesures indépendantes est grand et plus k est petit.

En Terminale S, l'expression de l'incertitude et l'extrait de la table de Student correspondant à un(aux) niveau(x) de confiance choisi(s) seront donnés. La qualité de la mesure est d'autant meilleure que l'incertitude associée est petite.

3.2 Estimation de type B : mesure unique

L'incertitude prend en compte les informations techniques de l'instrument de mesure et une information sur la façon dont la mesure est effectuée.

Pour un appareil de mesure gradué :
L'incertitude Δm sur la mesure est égale à la moitié de la plus petite graduation. On prendra comme incertitude-type une grandeur représentée par :

$$s = \frac{\text{graduation}}{\sqrt{12}}$$

Pour un appareil à affichage digital :
L'incertitude Δm sur la mesure est égale au plus petit écart possible entre deux valeurs mesurées (sur le dernier digit).

Pour un appareil avec indication du fabricant :
On prendra comme incertitude-type une grandeur représentée par :

$$s = \frac{\text{écart fabricant}}{\sqrt{3}}$$

Une expérience permet de déterminer les valeurs extrêmes d'une mesure. On pose :

$$a = \frac{1}{2}(m_{max} - m_{min})$$

On prendra comme incertitude-type une grandeur représentée par :

$$s = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

(On retrouve le premier cas de figure avec a = 1/2 graduation.)

3.3 Calcul d'incertitudes

Quand on calcule un produit ou une somme de deux mesures expérimentales, il est nécessaire d'en connaître l'incertitude. On utilise alors ce qu'on appelle la propagation des incertitudes. Soit les grandeurs mesurées a et b avec leurs incertitudes absolues Δa et Δb, et leurs incertitudes relatives et $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$
L'incertitude de $c = a + b$ ou $c = a - b$ est donnée par

$$\Delta c = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}$$

Autrement dit, l'incertitude absolue sur la somme ou la différence de 2 grandeurs est égale à la somme quadratique de leurs incertitudes absolues. L'incertitude de ou est donnée par

$$\frac{\Delta c}{c} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$$

L'incertitude relative sur un produit ou un rapport de 2 grandeurs est égale à la somme quadratique de leurs incertitudes relatives.

1. **Sommes ou différences**
   Quand on a une somme de deux grandeurs a et$b$, d'incertitudes respectives $U(a)$ et $U(b)$, l'incertitude sur la somme des deux est :
   $$S = a + b \Rightarrow U(S) = \sqrt{(U(a))^2 + (U(b))^2}$$
   S'il s'agit d'une différence $D = a - b$, à nouveau les carrés des incertitudes s'additionnent sous la racine carrée (cas le plus défavorable, ou une incertitude sur un terme n'est pas compensée par une incertitude sur un deuxième terme).
   Remarque : en Terminale, cette formule sera toujours donnée.
2. **Produits ou fractions**
   Si l'on considère maintenant un produit $P = a \times b$, il faut considérer les incertitudes relatives :
   $$P = ab \Rightarrow \frac{u(P)}{P} = \sqrt{\left(\frac{U(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{U(b)}{b}\right)^2}$$
   S'il s'agit d'une fraction $Q = a/b$, à nouveau les carrés des incertitudes relatives s'additionnent sous la racine carrée (cas le plus défavorable).
   Remarque : en Terminale, cette formule sera toujours donnée.

4 Expression du résultat

4.1 Les chiffres significatifs

Les chiffres significatifs d'un nombre sont les chiffres écrits en partant de la gauche, à partir du premier chiffre différent de zéro.
Typiquement en physique-chimie quand on écrit 3 000 cela signifie quatre chiffres significatifs, ce n'est ni 3 001 ni 2 999.
Exemples de décomptes de chiffres significatifs :
- 3,14 a trois chiffres significatifs ;
- 0,00314 a trois chiffres significatifs ;
- 3,00 a trois chiffres significatifs ;
- 0,00300 a trois chiffres significatifs ;
- 0,003 a un chiffre significatif ;
- 3 000 000 a sept chiffres significatifs.

Le **résultat d'une mesure** doit être exprimé avec un nombre de chiffres significatifs correspondant aux chiffres réellement accessibles par la mesure. C'est-à-dire que le nombre de chiffres significatifs dépend donc de la précision de la mesure.
Le **résultat d'un calcul** doit être exprimé avec un nombre de chiffres significatifs correspondant au plus petit nombre de chiffres significatifs présents parmi les valeurs utilisées pour le calcul. Attention, les nombres mathématiques comme le 2 dans $P = 2\pi R$ sont censé être connus parfaitement, avec une précision infinie !
Le nombre de chiffres significatifs d'un résultat ne peut pas dépasser celui de la donnée de plus faible nombre de chiffres significatifs.

4.2 Convention d'écriture pour l'expression du résultat

Le résultat de la mesure d'une grandeur M est un intervalle de confiance associé à un niveau de confiance. L'intervalle de confiance est centré sur la valeur m (valeur mesurée lors d'une mesure unique ou valeur moyenne des mesures lors d'une série de mesures) et a pour demi-largeur l'incertitude de mesure Δm. Le résultat d'une mesure s'écrit

$$M = m \pm U(m)$$

Si elle existe, l'unité est précisée. Par convention, l'incertitude sera arrondie à la valeur supérieure avec au plus deux chiffres significatifs et les derniers chiffres significatifs conservés pour la valeur mesurée m sont ceux sur lesquels porte l'incertitude Δm.
Ainsi, le dernier chiffre significatif de la valeur mesurée doit être à la même position décimale que le dernier chiffre significatif de l'incertitude. Pour la valeur mesurée m, on garde les chiffres exacts, le premier chiffre entaché d'erreur et le deuxième chiffre que l'on arrondit Pour l'incertitude $U(m)$, on garde le premier chiffre non nul et le chiffre suivant majoré. Quand le résultat de la mesure est au format scientifique, la puissance de 10 utilisée doit être la même pour la valeur mesurée m et pour l'incertitude associée Δm.
L'écriture de la mesure doit faire apparaitre :
- la grandeur mesurée
- la valeur de la mesure, en utilisant préférentiellement l'écriture scientifique
- l'unité de la grandeur mesurée
- l'incertitude sur la mesure

Dans la majorité des cas, on conduit à une estimation de type B, et la forme de la loi de distribution est souvent assimilée à une gaussienne. Le coefficient retenu pour un niveau de confiance de 95 % est alors $k = 2$. Soit s l'incertitude-type, l'incertitude élargie (ou incertitude-type élargie, erreur maximale, erreur absolue, incertitude absolue) est alors : $U(M) = 2s$.

4.3 Comparaison du résultat d'une mesure à une valeur de référence

Dans certains cas, la grandeur mesurée a une valeur déjà connue précisément, considérée comme une valeur de référence. La qualité du résultat de la mesure est obtenue par un calcul d'incertitude relative. Si la grandeur mesurée a une valeur de référence ou une valeur théorique $m_{réf}$ et une valeur mesurée m_{mes} alors l'incertitude relative est

$$r = \frac{|m_{mes} - m_{réf}|}{m_{réf}}$$

En général, on exprime l'incertitude relative en pourcentage.
C'est un indicateur de la qualité de la mesure : plus elle est petite et plus la mesure est précise. Généralement, pour une mesure, on considère que :
Si l'incertitude relative $r \leqslant 1\,\%$, la mesure est de bonne qualité au regard de la valeur de référence.

4.4 Amélioration de la qualité d'une mesure

Quand l'incertitude relative est supérieure à 1 %, il faut chercher comment améliorer la qualité de la mesure effectuée :
- le matériel choisi doit présenter une tolérance suffisamment faible ;
- le matériel doit être utilisé correctement (lecture du niveau de liquide dans une burette par exemple) ;
- le nombre de mesures indépendantes doit être suffisant ;
- lors de calculs successifs, il faut garder les résultats intermédiaires dans la mémoire de la calculatrice.

5 Exemples

5.1 Résistance

Les quatre anneaux de couleur caractérisant la résistance sont Brun, Noir, Noir, Or. La résistance est donc égale à

$$R = 10\ \Omega \pm 5\%$$

L'incertitude-type vaut

$$s(R) = \frac{10 \times \frac{5}{100}}{\sqrt{3}} = 0,29\ \Omega$$

D'où en tenant compte du facteur d'élargissement, $U(R) = 2s(R) = 0,6\ \Omega$.

5.2 Thermomètre

Thermomètre : « Range -200 to +700°C, Temperature resolution below 700°C : 0,01°C ».
On considère que l'indication constructeur est l'incertitude élargie ou incertitude maximale liée à la résolution.
L'incertitude due à la résolution associée à une mesure de 18,545 °C est :

$$s(T) = \frac{0,01}{\sqrt{3}} = 0,0056\ °\mathrm{C}$$

D'où en tenant compte du facteur d'élargissement, $U(T) = 2s(T) = 0,01$ °C.

5.3 Voltmètre

Si le voltmètre est de classe 2, avec un calibre 100 V,

$$s(U) = \frac{100 \times \frac{2}{100}}{\sqrt{3}} = 0,29\ \mathrm{V}$$

D'où en tenant compte du facteur d'élargissement, $U(U) = 2s(U) = 0,6$ V.

5.4 Mesure d'une masse

On cherche à évaluer une incertitude-type de résolution lors d'une pesée. Une pesée est faite avec une balance numérique de résolution 1 g c'est-à-dire que lors de la pesée, le dispositif va arrondir le résultat au gramme prés. Alors

$$s = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0,3\ \mathrm{g}$$

D'où en tenant compte du facteur d'élargissement, $U(m) = 2s(m) = 0,6$ g.

5.5 Mesure d'une résistance

On mesure une résistance avec un voltmètre et un ampèremètre en utilisant la relation $R = \frac{U}{I}$. Le constructeur donne l'incertitude élargie de U et de I. On peut donc en déduire les incertitudes-types : $s(U) = \frac{U(U)}{\sqrt{3}}$ et $s(I) = \frac{U(I)}{\sqrt{3}}$. L'incertitude sur R est donnée par la relation :

$$s(R) = R \times \sqrt{\left(\frac{s(U)}{U}\right)^2 + \left(\frac{s(I)}{I}\right)^2} = R \times \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{U(U)}{U}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{U(I)}{I}\right)^2}$$

D'où en tenant compte du facteur d'élargissement, $U(R) = 2s(R)$.

5.6 Mesure d'un volume équivalent lors d'un dosage

Lors d'un dosage colorimétrique l'expérimentateur verse à l'équivalence 15,6 mL de la solution titrante. La détermination de l'équivalence s'effectue à la goutte près (0,04 mL) et la burette utilisée est de classe A (± 0,02 mL).
Alors $s_{\text{goutte}}(V_E) = \frac{0{,}04}{\sqrt{3}} = 0,023$ mL et $s_{\text{classe}}(V_E) = \frac{0{,}02}{\sqrt{3}} = 0,012$ mL.
Au final,

$$s(V_E) = \sqrt{(0,023)^2 + (0,012)^2} = 0,026 \text{ mL}$$

D'où en tenant compte du facteur d'élargissement, $U(R) = 2s(R) = 0,06$ mL.