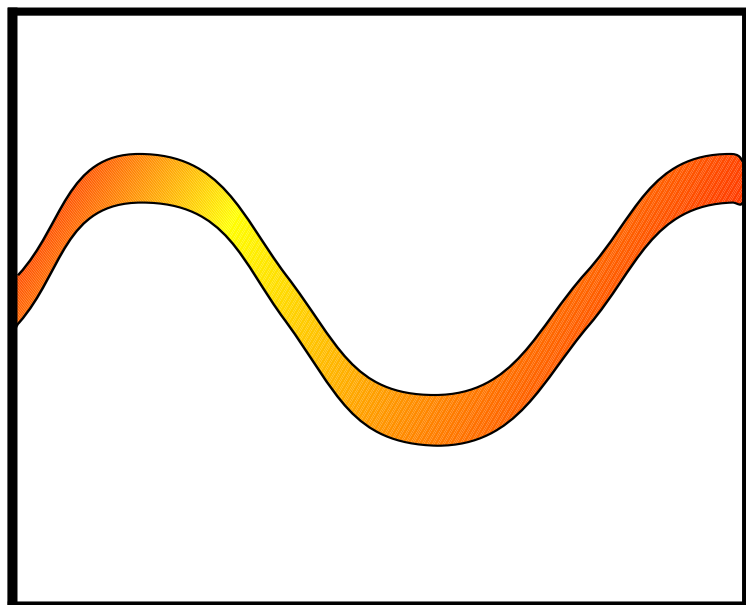


Université Paris-Sud Orsay

DEUG S3 SMR

CORDE VIBRANTE
&
ACOUSTIQUE



J.-J. LABARTHE

CORDE VIBRANTE

&

ACOUSTIQUE

Mise à jour de ce cours sur le site
<http://www.deugs3smr.u-psud.fr/DEUGS3SMR>

Début de rédaction : 20 juillet 2002
Première version : 11 octobre 2002
Cette version : 14 février 2005

Jean-Jacques LABARTHE

Laboratoire Aimé-Cotton

www.lac.u-psud.fr

Bât 505 CNRS II

91405 ORSAY Cedex

Tél. : 01 69 35 20 49

Fax : 01 69 35 21 00

labarthe@lac.u-psud.fr

Table des matières

1	La propagation des ondes	5
1.1	Caractéristiques des phénomènes ondulatoires	5
1.2	Ondes progressives	7
1.3	Changement de variables	8
1.4	Équation de d'Alembert	9
1.5	Principe de superposition	11
1.6	Réflexion à une extrémité fixe	11
1.7	Le problème de Cauchy	12
2	La corde vibrante	13
2.1	Étude de la corde vibrante	13
2.2	Considérations énergétiques	16
2.2.1	Courant d'énergie mécanique	16
2.2.2	Densité d'énergie mécanique	16
2.2.3	Conservation de l'énergie mécanique	17
2.2.4	Démonstration de la conservation de l'énergie mécanique	18
2.2.5	Vitesse de l'énergie	19
2.2.6	Impédance	19
3	Électromagnétisme : conservation de la charge	21
3.1	Densités de charge et de courant	21
3.2	Équation de continuité (cas particulier 1D)	22
3.3	Comparaison avec la conservation de l'énergie	23
3.4	Équation de continuité (cas général)	23
4	Ondes sinusoïdales	25
4.1	Ondes progressives sinusoïdales	25
4.2	Représentation complexe	27
4.3	Interférences	27
4.4	Moyenne temporelle	28
4.5	Considérations énergétiques	28
4.6	Calculs d'énergie et représentation complexe	30
4.7	Vitesse de phase	30
4.8	Dispersion, vitesse de groupe	30
4.9	Ondes stationnaires	32
4.10	Modes de vibration d'une corde fixée	34
4.11	Considérations énergétiques (mode propre)	36
4.12	Analyse de Fourier	37

4.13	Considérations énergétiques	40
4.14	Applications de l'analyse de Fourier	41
4.14.1	Cas d'une note émise par une corde vibrante	42
4.14.2	Cas d'un son composé de deux fréquences pures	43
4.14.3	Cas de deux notes	43
4.14.4	La gamme tempérée	43
4.15	Résonance et résonateur	44
4.16	Réflexion et transmission	45
4.17	Note historique	48
5	Ondes acoustiques	51
5.1	Propriétés élémentaires du son	51
5.2	Équation de d'Alembert à trois dimensions	52
5.3	La vitesse du son	53
5.4	Onde plane progressive harmonique	54
5.5	Considérations énergétiques	56
5.5.1	Conservation de l'énergie acoustique	56
5.5.2	Le vecteur intensité acoustique moyenne	56
5.5.3	Décibels	57
5.5.4	Niveau d'intensité sonore physiologique	58
5.6	Ondes sphériques	59
5.7	Surfaces d'ondes	61
5.8	Effet Doppler	62
5.8.1	Déplacement de la source	63
5.8.2	Déplacement du récepteur	64
5.8.3	Deuxième méthode	65
5.8.4	Applications de l'effet Doppler	65
6	Ondes acoustiques : compléments	66
6.1	Champs décrivant un fluide	66
6.2	Transformation adiabatique	69
6.3	Mécanisme de la propagation du son	70
6.4	Équation de d'Alembert à trois dimensions	73
6.5	La vitesse du son	74
6.6	Considérations énergétiques	74
6.6.1	Le vecteur intensité acoustique	74
6.6.2	Conservation de l'énergie acoustique	76
A	Module et argument d'une somme	77
B	Petite différence de deux longueurs	79
C	Index des principaux symboles	81
	Alphabet grec	83
D	Index des noms propres	85

1

La propagation des ondes

1.1 Caractéristiques des phénomènes ondulatoires

Nous considérons un milieu **continu** au repos dans un état d'équilibre. *Exemples* : une corde (de guitare) tendue (milieu 1D) ; une peau de tambour ou la surface immobile d'un lac (milieux 2D) ; un solide, un fluide ou un gaz au repos (milieux 3D) ; le vide. Le mot continu signifie qu'on ignore la nature microscopique (atomes, molécules, ...) du milieu.

Rappels : un milieu est dit **homogène** si la nature du milieu est la même en tous ses points et **isotrope** s'il présente les mêmes propriétés dans toutes les directions. Un milieu infini, homogène et isotrope est invariant par translation et rotation.

Ondes

Une **onde** est une perturbation (oscillation, déformation) qui se propage dans le milieu ou bien une perturbation qui se maintient dans le milieu (onde stationnaire). La perturbation peut être une vibration de la matière du milieu par rapport à l'équilibre ou de nature plus abstraite (champ électromagnétique pour la lumière, fonction d'onde en mécanique quantique).

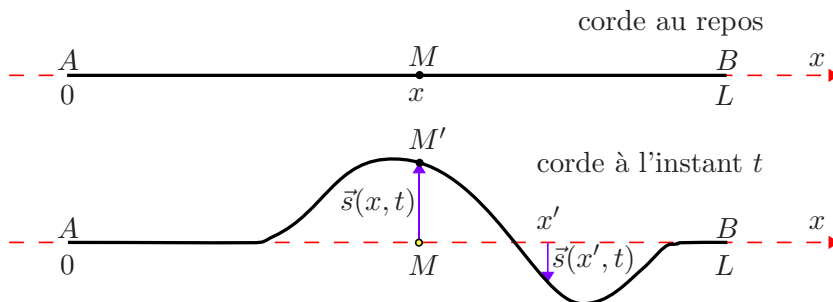
Il n'y a pas de déplacement de la matière du milieu sur de grandes distances. Après la disparition de la perturbation, le milieu revient dans son état d'équilibre initial. Ainsi l'écoulement d'une masse d'eau dans un tuyau d'arrosage n'est pas une onde, mais cet écoulement peut être accompagné d'ondes (mouvements du tuyau, ondes sonores).

Description des ondes

La corde tendue AB (figure 1.1) de longueur L forme à l'équilibre un segment de droite (le poids de la corde est négligeable devant la tension \vec{T}).

On choisit un système de coordonnées cartésiennes¹ où la corde au repos coïncide avec le segment $[0, L]$ de l'axe Ox . Le point matériel M , situé en x lorsque la corde est au repos, se déplace en M' à l'instant t . L'onde est décrite par la fonction vectorielle $\vec{s}(x, t)$ (le **signal**) qui donne le **déplacement** $\overrightarrow{MM'}$ de chaque point à chaque instant.

FIG. 1.1 – Corde vibrante.



Pour une onde mécanique dans un milieu 3D, le point matériel M , situé en \vec{r} à l'équilibre se déplace en M' en présence de l'onde. Cela définit un signal vectoriel $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ égal à ce déplacement $\overrightarrow{MM'}$.

Dans un gaz homogène, en présence d'une onde sonore, la pression en M devient $P(\vec{r}, t) = P_0 + p(\vec{r}, t)$ où $p(\vec{r}, t)$ est la **surpression** et P_0 la pression en absence de son. On verra que l'onde sonore peut être décrite par le déplacement $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ ou par la surpression $p(\vec{r}, t)$. Par définition, le signal (le déplacement, la surpression, ...) est nul en absence d'onde.

Les ondes électromagnétiques dans le vide seront décrites par les champs électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et magnétiques $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

Onde transverse, onde longitudinale, polarisation

Expérimentalement, pour la corde de guitare, le signal $\vec{s}(x, t)$ est perpendiculaire à Ox . Il se propage parallèlement à Ox (il n'y a pas d'autre possibilité à 1D). Le signal est un vecteur perpendiculaire à sa direction de propagation : on dit que l'onde est **transverse**.

Pour une onde transverse de la corde qui reste dans le plan Oxy , le signal $\vec{s}(x, t) = s(x, t)\vec{e}_y$ est parallèle à la direction Oy : on dit que l'onde est **polarisée rectilignement** suivant Oy .

La figure 1.2 représente une section contenant l'axe d'un tuyau sonore cylindrique (parallèle à Ox) et trois tranches de gaz. Le déplacement $\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \xi(x, t)\vec{e}_x$ ne dépend pas de y et z et a lieu parallèlement à l'axe du tuyau. La position qu'occupaient les tranches de gaz dans le système au repos est schématisée par \square . Remarquer que l'épaisseur des tranches varie (compression ou dilatation du gaz).

1. René du Perron Descartes (1596-1650)

Pour cette onde dans un tuyau sonore, le signal $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ est parallèle à la direction de propagation (l'axe Ox) : on dit que l'onde est **longitudinale**.

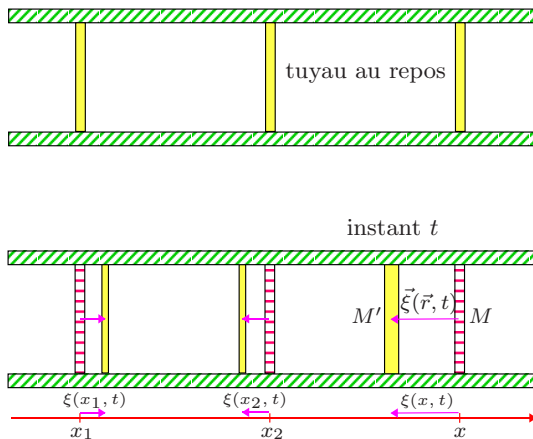


FIG. 1.2 – Tuyau sonore.

1.2 Ondes progressives

La figure 1.3 représente la corde à trois instants, avec une onde qui se propage dans un seul sens à vitesse constante sans déformation ni atténuation (**onde progressive**). La **vitesse de propagation** ou **vitesse de l'onde** ou **célérité de l'onde** est le rapport

$$c = \left| \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right| = \left| \frac{x_3 - x_1}{t_3 - t_1} \right|. \quad (1.1)$$

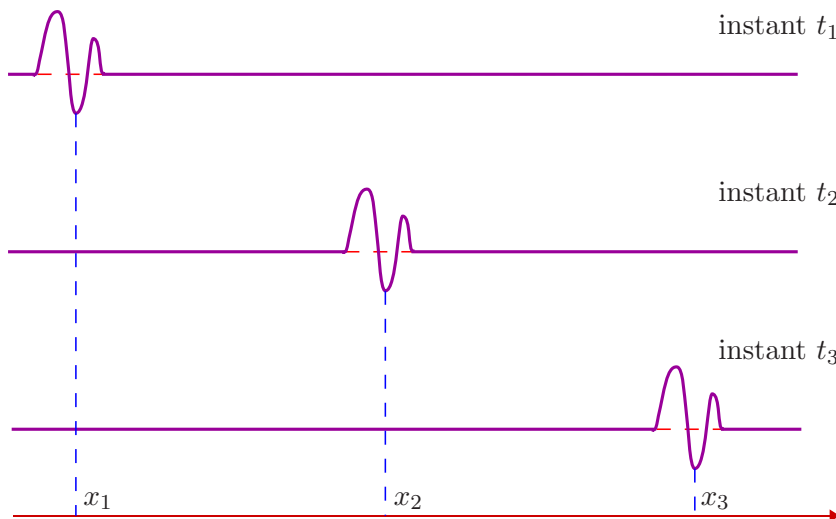


FIG. 1.3 – Onde progressive.

Théorème 1.1 (onde progressive \rightarrow). *Pour une propagation dans le*

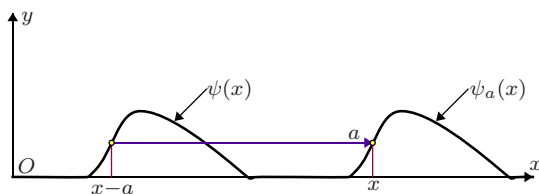
sens de x croissant, le signal est

$$s(x, t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (1.2)$$

Démonstration. Soit une fonction $\psi(x)$. Déterminons la fonction $\psi_a(x)$ dont le graphe est le translaté de a parallèlement à Ox du graphe de $\psi(x)$. La figure 1.4 montre que la valeur de ψ_a en x est la valeur de ψ en $x - a$:

$$\psi_a(x) = \psi(x - a). \quad (1.3)$$

FIG. 1.4 – Translation de a .



Considérons une propagation dans le sens de x croissant et désignons par $\psi(x)$ le signal à l'instant $t = 0$. Le graphe du signal à l'instant t est le translaté de $a = ct$ du graphe de $\psi(x)$:

$$s(x, t) = \psi_{ct}(x) = \psi(x - ct) \quad (1.4)$$

ce qui s'écrit aussi (1.2) en posant $F(u) = \psi(-cu)$. \square

Théorème 1.2 (onde progressive \leftarrow). Pour une propagation dans le sens de x décroissant, le signal est

$$s(x, t) = G\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (1.5)$$



Remarque. Ne pas confondre la vitesse de l'onde c et la vitesse des points matériels de la corde : la vitesse du point situé en x est $\frac{\partial s}{\partial t}(x, t)$ à l'instant t .

1.3 Changement de variables

Nous utiliserons le changement de variables

$$\begin{cases} v = t + \frac{x}{c} \\ u = t - \frac{x}{c} \end{cases} \quad \text{qui s'inverse en} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2}(v + u) \\ x = \frac{c}{2}(v - u). \end{cases} \quad (1.6)$$

Le signal s est une fonction de x et t , $s = s(x, t)$. On peut aussi le considérer comme une fonction $\Phi(u, v)$ de u et v :

$$s = s(x, t) = s\left(\frac{c(v - u)}{2}, \frac{v + u}{2}\right) = \Phi(u, v) \quad (1.7)$$

où le changement de variables est donné par l'équation (1.6). Pour simplifier les notations, on écrira $\frac{\partial s}{\partial u}$ pour $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ et $\frac{\partial s}{\partial v}$ pour $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ comme dans

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{c}{2} \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (1.8)$$

Le changement de variables pour les dérivées partielles s'écrit sous forme d'opérateur :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned} \quad (1.9)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial u} &= \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Exemple : $s(x, t) = t^2 - x^2/c^2$ correspond à $\Phi(u, v) = uv$. Vérifier que

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 2t, \quad \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{2x}{c^2}, \quad \frac{\partial s}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = u \quad (1.11)$$

et qu'on obtient bien des identités en appliquant les opérateurs (1.9) et (1.10) à s , c'est-à-dire que $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\partial s}{\partial u}$ (pour la première relation), ...

1.4 Équation de d'Alembert

Si la fonction $s(x, t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right)$ est différentiable on peut calculer ses dérivées partielles. On obtient, en désignant par $F'(u)$ la dérivée de la fonction $F(u)$,

$$\frac{\partial s}{\partial t} = F'\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{c} F'\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (1.12)$$

Le signal $s(x, t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right)$ vérifie donc

$$\frac{1}{c} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) s = 0. \quad (1.13)$$

Réciproquement, cherchons les solutions de (1.13). Dans les variables (u, v) l'équation (1.13) devient en utilisant (1.10)

$$\frac{2}{c} \frac{\partial s}{\partial v} = 0 \quad (1.14)$$

qui s'intègre immédiatement en

$$s = F(u) = F\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (1.15)$$

En conclusion, les ondes progressives se propageant dans le sens de x croissant sont caractérisées soit par la forme (1.2), soit par l'équation (1.13) qui est une **équation d'onde**. De façon analogue, les ondes progressives se propageant dans le sens de x décroissant sont caractérisées soit par la forme (1.5), soit par une nouvelle équation d'onde

$$\frac{1}{c} \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{c\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) s = 0. \quad (1.16)$$

Ce dernier résultat s'obtient sans nouveaux calculs en changeant c en $-c$ dans (1.2) et (1.13).

Nous préférierions que les ondes progressives dans les deux sens soient solutions de la même équation d'onde. Une telle équation d'onde est l'équation de d'Alembert²

$$\left(\frac{\partial}{c\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) s = \left(\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{c\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) s =$$

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0.} \quad (1.17)$$

En effet, d'après (1.13) et (1.16) les ondes progressives (1.2) et (1.5) sont des solutions de l'équation (1.17).

Théorème 1.3 (théorème de d'Alembert, 1747). *La solution générale de (1.17) est la superposition de deux ondes progressives arbitraires allant en sens opposés*

$$\boxed{s(x, t) = F\left(t - \frac{x}{c}\right) + G\left(t + \frac{x}{c}\right).} \quad (1.18)$$

Démonstration. L'équation (1.17) étant linéaire et homogène, il est immédiat que (1.18) est une solution pour tout F et G différentiables. Pour montrer la réciproque, nous effectuons le changement de variables (1.6–1.10). L'équation (1.17) devient

$$\frac{4}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} = 0, \quad (1.19)$$

ce résultat s'obtenant simplement en formant le produit des équations (1.10). En intégrant par rapport à v on obtient

$$\frac{\partial s}{\partial u} = f(u) \quad (1.20)$$

qui s'intègre en $s = F(u) + G(v) = F\left(t - \frac{x}{c}\right) + G\left(t + \frac{x}{c}\right)$. \square

2. Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

1.5 Principe de superposition

Soient $\vec{s}_1(x, t)$ et $\vec{s}_2(x, t)$ deux ondes solutions de l'équation de d'Alembert

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial x^2} = 0 \quad (1.21)$$

qui diffère de (1.17) par l'utilisation du signal vectoriel \vec{s} au lieu du signal scalaire s . La fonction $\vec{s}(x, t) = \lambda_1 \vec{s}_1(x, t) + \lambda_2 \vec{s}_2(x, t)$ est aussi une solution de (1.21) (**principe de superposition**). Ce principe résulte de ce que l'équation (1.21) est linéaire et homogène. Physiquement, il est bien vérifié expérimentalement pour des « petites perturbations » d'une corde vibrante. Le sens de « petites perturbations » sera expliqué plus bas (conditions (2.1)).

1.6 Réflexion à une extrémité fixe

Les ondes (1.2) et (1.5) correspondent à une **corde infinie**. Pour la corde fixée en A et B (cf. figure 1.1), le déplacement $s(x, t)$ doit vérifier les **conditions aux limites**

$$s(0, t) = 0 \quad \forall t, \quad s(L, t) = 0 \quad \forall t \quad (1.22)$$

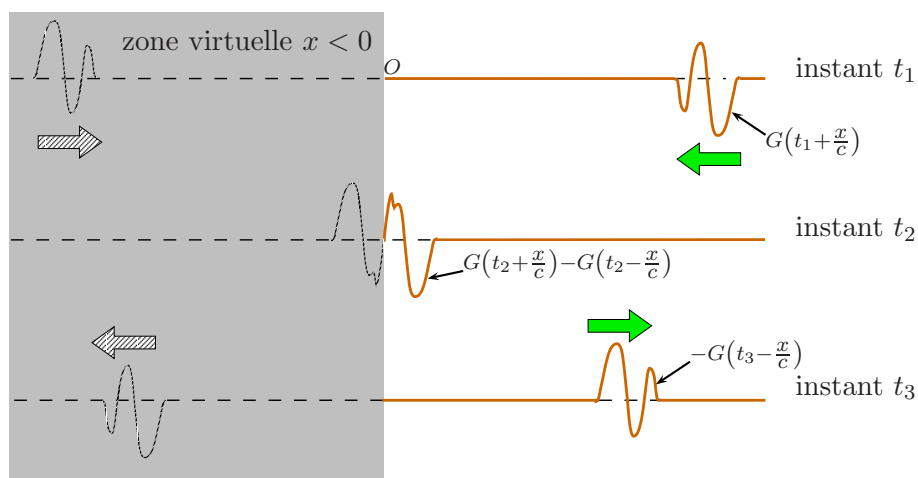
qui expriment que les points A et B restent immobiles. Considérons une corde s'étendant de $x = 0$ à $x = \infty$ et fixée en O ($x = 0$). L'onde (1.18) doit vérifier $s(0, t) = 0 \quad \forall t$ ce qui impose la condition $F(t) + G(t) = 0 \quad \forall t$. On a donc $F(u) = -G(u)$ et l'onde est de la forme

$$s(x, t) = -G\left(t - \frac{x}{c}\right) + G\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (1.23)$$

La figure 1.5 représente $s(x, t)$ à divers instants $t_1 < t_2 < t_3$ et pour des x positifs et négatifs. Seule la partie $x \geq 0$ correspond à l'onde observée. Remarquer que les courbes sont symétriques par rapport à l'origine $s(x, t) = -s(-x, t)$.

À l'instant t_1 , on observe seulement l'**onde incidente** $G\left(t + \frac{x}{c}\right)$ qui s'approche de l'extrémité O de la corde. À l'instant t_3 , on observe seulement l'**onde réfléchie** $-G\left(t - \frac{x}{c}\right)$ qui s'éloigne de l'extrémité O de la corde. À l'instant t_2 l'onde est en train de se réfléchir en O . La forme de l'onde réfléchie s'obtient à partir de l'onde incidente par une symétrie par rapport à Ox (on parle de **réflexion avec changement de signe**) suivie d'une symétrie par rapport à Oy (le front d'onde de l'onde incidente est à gauche et celui de l'onde réfléchie est à droite).

FIG. 1.5 – Réflexion à une extrémité fixe.



1.7 Le problème de Cauchy

Le problème de Cauchy³ est le suivant : trouver une solution de l'équation de d'Alembert correspondant à des **conditions initiales** données :

$$\begin{cases} s(x, 0) = f(x) & \text{forme de la corde à l'instant } t = 0 ; \\ \frac{\partial s}{\partial t}(x, 0) = g(x) & \text{vitesse de chaque point de la corde à l'instant } t = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

On peut imposer de plus, dans le problème de Cauchy, divers types de conditions aux limites. Pour la corde fixée en $x = 0$ et $x = L$ les conditions aux limites sont

$$s(0, t) = 0 \quad \forall t, \quad s(L, t) = 0 \quad \forall t. \quad (1.25)$$

Pour le tuyau sonore ouvert à une extrémité et fermé à l'autre, les conditions aux limites sont

$$s(0, t) = 0 \quad \forall t, \quad \frac{\partial s}{\partial t}(L, t) = 0 \quad \forall t. \quad (1.26)$$

On peut aussi traiter le problème sans conditions aux limites, ce qui correspond à un milieu infini. Du point de vue de la dynamique, les données du problème de Cauchy déterminent complètement le mouvement de la corde et il y a **une et une seule solution** à ce problème. Du point de vue mathématique, on arrive à la même conclusion.

3. Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

2

La corde vibrante

2.1 Étude de la corde vibrante

Nous allons étudier les vibrations transverses d'une corde homogène AB tendue de longueur L (cf. figures 1.1 et 2.1 qui représente un petit morceau MM' de la corde). Nous négligeons la pesanteur. À l'équilibre, la corde forme le segment $[0, L]$ de l'axe Ox . Nous supposons que le déplacement $\vec{s}(x, t) = y(x, t)\vec{e}_y$ du point matériel M d'abscisse x au repos est parallèle à Oy . Le mouvement de la corde est transverse et a lieu dans le plan Oxy

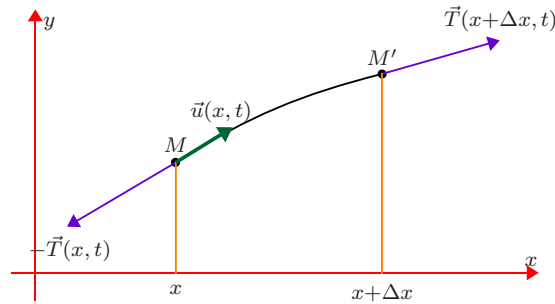


FIG. 2.1 – Mouvement du fragment MM' .

Nous traitons le cas des *petites perturbations*, lorsque la corde est peu déformée. Plus précisément nous supposons que

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \leq \epsilon \ll 1. \quad (2.1)$$

Comme $y(X, t) = \int_0^X \frac{\partial y}{\partial x} dx$ on a $|y(X, t)| \leq \int_0^X \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| dx \leq \epsilon X \leq \epsilon L$ et le déplacement est très petit devant la longueur de la corde :

$$\frac{|y|}{L} \leq \epsilon \ll 1. \quad (2.2)$$

Nous ne cherchons qu'une solution approximative du problème, c'est-à-dire que nous négligerons les termes du deuxième ordre en ϵ en présence de termes

du premier ordre. Si nous ne faisons pas cette simplification, on obtiendrait une équation très compliquée. Donnons un exemple d'approximation. Le vecteur

$$\vec{U}(x, t) = \vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

est un vecteur tangent à la corde en M à l'instant t . Sa longueur est

$$U(x, t) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \dots \approx 1 \quad (2.4)$$

en négligeant des termes plus petits que ϵ^2 . Le vecteur unitaire $\vec{u}(x, t) = \frac{\vec{U}(x, t)}{U(x, t)}$ est égal à $\vec{U}(x, t)$ dans cette approximation.

La masse Δm de la portion de corde MM' entre les abscisses x et $x + \Delta x$ est donnée par

$$\Delta m = \mu \Delta x \quad (2.5)$$

où μ (kg m^{-1}) est une constante indépendante de x et t (corde homogène). C'est la **masse linéique** (ou **masse par unité de longueur**) de la corde à l'équilibre. On a

$$\Delta m = \rho \mathcal{A} \Delta x \quad \text{et} \quad \mu = \rho \mathcal{A} \quad (2.6)$$

où ρ (kg m^{-3}) est la masse volumique de la corde et \mathcal{A} (m^2) la section de la corde.

Pour une corde parfaitement souple, le brin de corde AM exerce des forces sur le brin de corde MB que l'on peut représenter par une force unique $\vec{F}(x, t) = -T(x, t)\vec{u}(x, t)$, où $T(x, t)$ est la **tension** en M à l'instant t . En utilisant (2.3) pour $\vec{u} \approx \vec{U}$, la force $\vec{F}(x, t)$ est

$$\vec{F}(x, t) = \begin{pmatrix} F_x(x, t) \\ F_y(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T(x, t) \\ -\left[T \frac{\partial y}{\partial x}\right](x, t) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

D'après le principe de l'action et de la réaction (ou troisième loi de Newton¹), le brin MB exerce la force opposée $-\vec{F}(x, t) = T(x, t)\vec{u}(x, t)$ sur le brin AM . À l'équilibre, la tension $T(x, t) = T_0$ est la même en tout point et égale aux forces fixant la corde en A et B .

L'équation satisfaite par $y(x, t)$ s'obtient en écrivant l'équation fondamentale de la dynamique $\overline{\Delta \vec{F}} = \Delta m \vec{\gamma}$ (deuxième loi de Newton) pour chaque petit segment MM' , considéré comme un point matériel dans la limite $\Delta x \rightarrow 0$. En utilisant (2.7), la force $\overline{\Delta \vec{F}}$ agissant sur le petit segment

1. Sir Isaac Newton (1642-1727)

MM' est

$$\overrightarrow{\Delta F} = \vec{F}(x, t) - \vec{F}(x + \Delta x, t) = \begin{pmatrix} T(x + \Delta x, t) - T(x, t) \\ \left[T \frac{\partial y}{\partial x} \right] (x + \Delta x, t) - \left[T \frac{\partial y}{\partial x} \right] (x, t) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

à des termes en ϵ^2 près. Dans la limite $\Delta x \rightarrow 0$, on a

$$\overrightarrow{\Delta F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \Delta x \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial y}{\partial x} \right) (x, t) \Delta x \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Comme nous supposons le mouvement transverse, l'accélération $\vec{\gamma}$ du point M est parallèle à Oy :

$$\Delta m \vec{\gamma} = \Delta m \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Écrivons l'égalité des deux vecteurs (2.9) et (2.10). Pour la composante suivant Ox , on a

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) = 0 \quad (2.11)$$

qui implique que T ne dépend pas de x . Nous supposons qu'on applique en A la tension constante T_0 ; on a donc, à des termes en ϵ^2 près,

$$T(x, t) = T_0. \quad (2.12)$$

Pour la composante suivant Oy , on a, avec (2.5) et (2.12),

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \right) \Delta x = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Delta m = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \mu \Delta x. \quad (2.13)$$

Posons

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho \mathcal{A}}} \quad (2.14)$$

qui a la dimension d'une vitesse. L'équation (2.13) s'écrit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.15)$$

qui est l'équation de d'Alembert (1.17), appelée aussi **équation des cordes vibrantes**.

Remarque. Pour une onde transverse $\vec{s}(x, t) = y(x, t)\vec{e}_y + z(x, t)\vec{e}_z$, on obtient en généralisant la méthode ci-dessus que $y(x, t)$ et $z(x, t)$ vérifient chacune l'équation de d'Alembert. Il en résulte que le déplacement transverse $\vec{s}(x, t)$ vérifie l'équation de d'Alembert vectorielle (1.21).

2.2 Considérations énergétiques

2.2.1 Courant d'énergie mécanique

Considérons un point M de la corde. Le brin AM exerce sur le brin MB la force $\vec{F}(x, t)$ donnée par (2.7) avec $T = T_0$:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T_0 \\ -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

La vitesse particulière du point M est

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

La **puissance instantanée** en x de la force \vec{F} est donc

$$\boxed{P(x, t) = \vec{F} \cdot \vec{v} = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} = -\mu c^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t}}. \quad (2.18)$$

La puissance instantanée P peut aussi être interprétée comme un courant d'énergie. Par analogie avec le courant électrique, qui est la charge électrique qui passe à travers une section S d'un conducteur par unité de temps, le courant d'énergie en x est l'énergie qui passe en x par unité de temps. Une valeur positive de P correspond à un courant d'énergie vers les x croissant. Nous appellerons $\vec{P}(x, t) = P(x, t)\vec{e}_x$ le **vecteur courant d'énergie** (homogène à une puissance).

2.2.2 Densité d'énergie mécanique

L'énergie cinétique de l'élément de corde MM' de masse $\Delta m = \mu \Delta x$ est

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \mu \Delta x \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \mathcal{K} \Delta x \quad (2.19)$$

où

$$\boxed{\mathcal{K} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2} \quad (2.20)$$

est la **densité (linéique) d'énergie cinétique** : l'énergie cinétique totale de la corde est la somme des énergies cinétiques de tous ses éléments $E_c = \int_0^L \mathcal{K} dx$.

Pour la corde idéale que nous considérons, la tension $T = T_0$ est indépendante de l'allongement de la corde (cf. équation (2.12)). Nous définissons l'énergie potentielle E_p de la corde de longueur l comme égale à l'énergie

que l'on doit fournir pour faire passer très lentement sa longueur de L à l . Cette énergie est le travail $T_0(l - L)$ d'une force T_0 se déplaçant de $l - L$. Or l'allongement $l - L$ de la corde AB est

$$l - L = \left(\int_A^B dl \right) - L = \int_0^L \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) dx \approx \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2.21)$$

L'énergie potentielle est donc $E_p = \int_0^L \mathcal{U} dx$ où

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu c^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (2.22)$$

est la **densité (linéique) d'énergie potentielle**. La somme

$$\mathcal{H} = \mathcal{K} + \mathcal{U} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (2.23)$$

est la **densité (linéique) d'énergie mécanique**.



Remarque. L'énergie mécanique de la superposition $y = y_1 + y_2$ de deux ondes $y_1(x, t)$ et $y_2(x, t)$ n'est en général pas égale à la somme des énergies mécaniques de chacune des ondes (examiner les cas $y_2(x, t) = \pm y_1(x, t)$).

2.2.3 Conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique de toute la corde

$$E = E_c + E_p = \int_0^L \mathcal{H}(x, t) dx \quad (2.24)$$

est **conservée** si E est indépendant du temps t . Il est intéressant de considérer un tronçon CD ($x \in [c, d]$) de la corde². L'énergie mécanique de ce tronçon est

$$E_{CD}(t) = \int_c^d \mathcal{H} dx. \quad (2.25)$$

Cette énergie varie de $dE_{CD} = E_{CD}(t + dt) - E_{CD}(t)$ entre les instants t et $t + dt$. Entre les mêmes instants t et $t + dt$, le brin AC fournit au tronçon CD l'énergie $\delta E_C = P(c, t) dt$ et le tronçon CD fournit au brin DB l'énergie $\delta E_D = P(d, t) dt$. S'il y a conservation de l'énergie mécanique, la variation d'énergie dE_{CD} du tronçon CD égale l'énergie δE_C qui y pénètre à l'abscisse c diminuée de l'énergie δE_D qui en sort à l'abscisse d :

$$dE_{CD} = \delta E_C - \delta E_D \quad (2.26)$$

2. Dans cette section, c désigne l'abscisse du point C et non la vitesse des ondes.

soit, en divisant par dt ,

$$\frac{dE_{CD}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\int_c^d \mathcal{H} dx \right] = P(c, t) - P(d, t) \quad (2.27)$$

(la dérivée par rapport au temps de $E_{CD}(t)$ est égale au courant d'énergie $P(c, t)$ entrant en C diminué du courant d'énergie $P(d, t)$ sortant en D). Comme

$$\frac{d}{dt} \left[\int_c^d \mathcal{H} dx \right] = \int_c^d \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dx \quad \text{et} \quad P(c, t) - P(d, t) = - \int_c^d \frac{\partial P}{\partial x} dx \quad (2.28)$$

on a

$$\int_c^d \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx = 0. \quad (2.29)$$

Cette équation étant valable pour tout c et d , on en déduit que l'intégrand doit être nul. On obtient ainsi une **équation de continuité** équivalente à la conservation de l'énergie mécanique :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0}. \quad (2.30)$$

Cette équation de continuité, qui est la forme locale de la conservation de l'énergie, exprime que la somme de la dérivée temporelle de la densité d'énergie et de la divergence du vecteur courant d'énergie est nulle.

2.2.4 Démonstration de la conservation de l'énergie mécanique

Comme nous avons négligé les causes d'amortissement (frottements, rayonnement sonore, couplage avec le support, ...), nous nous attendons à la conservation de l'énergie mécanique. Pour la démontrer, il suffit de montrer que l'équation de continuité (2.30) est satisfaite pour les solutions de l'équation de d'Alembert (1.17).

Nous calculons donc, avec (2.20),

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = \mu \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (2.31)$$

puis, avec (2.22),

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \mu c^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \quad (2.32)$$

et, avec (2.18),

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\mu c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial t} - \mu c^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}. \quad (2.33)$$

La somme des équations (2.31–2.33) donne

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial y}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2.34)$$

L'équation de continuité (2.30) est donc vérifiée : l'énergie mécanique est bien conservée.

2.2.5 Vitesse de l'énergie

Considérons l'onde progressive

$$y(x, t) = f \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (2.35)$$

Les densités d'énergie cinétique et d'énergie potentielle,

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu f'^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \mu c^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu f'^2, \quad (2.36)$$

sont égales. Posant $\psi(u) = \mu f'^2(u)$, la densité d'énergie mécanique dépend de x et de t suivant la loi $\mathcal{H} = \psi \left(t - \frac{x}{c} \right)$. Il y a donc propagation de l'énergie vers x croissant à la vitesse c . Le courant d'énergie vaut

$$P = -\mu c^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} = \mu c f'^2 = c\mathcal{H}. \quad (2.37)$$

L'énergie qui passe en x pendant le temps Δt est $\Delta W = P\Delta t$. Puisque l'énergie se déplace à la vitesse c , on peut considérer que cette énergie ΔW était localisée, sous forme d'énergie mécanique, dans le segment de corde de longueur $\Delta x = c\Delta t$ situé à gauche de x : $\Delta W = P\Delta t = \mathcal{H}\Delta x = \mathcal{H}c\Delta t$. On retrouve l'égalité $\boxed{P = c\mathcal{H}}$ de la relation (2.37).

2.2.6 Impédance

Pour l'onde progressive (2.35), la composante F_y de la force (2.16) est $F_y = \frac{T_0}{c} f'$ et la vitesse particulière (2.17) est $\vec{v} = v_y \vec{e}_y$ avec $v_y = f'$. Le rapport constant $Z = \frac{F_y}{v_y}$ qui vaut

$$\boxed{Z = \frac{T_0}{c} = \sqrt{T_0 \mu} = \mu c} \quad (2.38)$$

est appelé l'**impédance caractéristique** de la corde (unité : N m⁻¹ s). La table 2.1 met en parallèle les grandeurs de l'onde progressive (2.35) et les grandeurs électriques (potentiel U , intensité I , puissance P et impédance électrique Z).

onde progressive	circuit électrique
F_y	U
v_y	I
$P = F_y v_y$	$P = UI$
$Z = \frac{F_y}{v_y}$	$Z = \frac{U}{I}$

TAB. 2.1 – L'analogie entre onde progressive et circuit électrique.

3

Électromagnétisme : Conservation de la charge

Nous avons exprimé la loi de conservation de l'énergie mécanique de la corde sous la forme d'une équation de continuité vérifiée par la densité et le courant d'énergie (cf. section 2.2.3). La loi de conservation de la charge électrique s'exprime sous la forme d'une équation de continuité vérifiée par les densités de charge et de courant. Nous traitons ici ce chapitre de l'électromagnétisme pour mettre en parallèle ces équations de continuité.

Le principe de la conservation de la charge affirme que la somme algébrique des charges électriques d'un système isolé est constante. À l'échelle des particules élémentaires, ce principe se traduit par :

- une particule élémentaire (électron, quark, ...) porte une charge q constante et invariante (c'est-à-dire indépendante du référentiel) : pour l'électron $q = -e$ avec $e = 1,602\,177\,10^{-19}$ C ; pour le quark u , $q = \frac{2}{3}e$; pour le quark d , $q = -\frac{1}{3}e$;
- lors d'une désintégration ou d'une collision, il peut y avoir création et annihilation de particules, mais la somme des charges électriques des particules reste inchangée.

Nous voulons traduire cette loi de conservation sous la forme d'une équation locale (au point \vec{r} et à l'instant t) vérifiée par les densités de charge et de courant.

3.1 Densités de charge et de courant

La charge électrique dQ contenue à l'instant t dans le volume infinitésimal dV autour du point \vec{r} est

$$dQ = \rho(\vec{r}, t) dV \quad (3.1)$$

où $\rho(\vec{r}, t)$ (C m^{-3}) est la **densité de charge** (ou **charge volumique**). La charge qui traverse la surface S (ouverte ou fermée, orientée selon le vecteur unitaire \vec{n} normal à S) entre les instants t et $t + dt$ est

$$\delta Q_S = I_S dt \quad \text{avec} \quad I_S = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS \quad (3.2)$$

où I_S (A) est l'intensité algébrique du courant à travers S et $\vec{j}(\vec{r}, t) = j_x \vec{e}_x + j_y \vec{e}_y + j_z \vec{e}_z$ (A m^{-2}) est le vecteur **densité de courant** (ou le vecteur **courant volumique**).

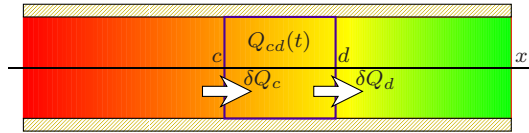
On associe à chaque type de particules chargées (électron, ions, ...) une charge volumique $\rho_i(\vec{r}, t)$ ($i = 1, 2, \dots$) et un champ de vitesse $\vec{v}_i(\vec{r}, t)$ (leur vitesse moyenne). Les densités de charge et de courant sont alors

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \rho_1(\vec{r}, t) + \rho_2(\vec{r}, t) + \dots \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \rho_1(\vec{r}, t) \vec{v}_1(\vec{r}, t) + \rho_2(\vec{r}, t) \vec{v}_2(\vec{r}, t) + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.2 Équation de continuité (cas particulier 1D)

Un cylindre d'axe Ox de section droite S contient des charges et courants électriques décrits par les densités de charge et de courant $\rho(x, t)$ et $\vec{j}(x, t) = j(x, t) \vec{e}_x$ ne dépendant que de l'abscisse x et du temps t (cf. figure 3.1).

FIG. 3.1 – Cylindre chargé.



La charge contenue dans le tronçon du cylindre entre les abscisses c et d est

$$Q_{cd}(t) = \int_c^d S \rho(x, t) dx. \quad (3.4)$$

Cette charge varie de $dQ_{cd} = Q_{cd}(t + dt) - Q_{cd}(t)$ entre les instants t et $t + dt$. La charge électrique qui traverse, entre les mêmes instants t et $t + dt$, la section droite du cylindre d'abscisse c (resp. d) est $\delta Q_c = I_c dt$ avec $I_c = S j(c, t)$ (resp. $\delta Q_d = I_d dt$ avec $I_d = S j(d, t)$). La conservation de la charge implique que la variation dQ_{cd} de la charge dans le tronçon est égale à la charge δQ_c qui pénètre dans le tronçon à l'abscisse c diminuée de la charge δQ_d qui en sort à l'abscisse d :

$$dQ_{cd} = \delta Q_c - \delta Q_d \quad (3.5)$$

soit, en divisant par dt

$$\frac{dQ_{cd}}{dt} = I_c - I_d. \quad (3.6)$$

En écrivant

$$\frac{dQ_{cd}}{dt} = \int_c^d S \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} dx \quad (3.7)$$

et

$$I_c - I_d = Sj(c,t) - Sj(d,t) = - \int_c^d S \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} dx \quad (3.8)$$

l'équation (3.6) se transforme en

$$\int_c^d \left(S \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + S \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} \right) dx = 0. \quad (3.9)$$

Les points c et d étant arbitraires, l'intégrand doit être nul. On obtient ainsi l'équation de continuité associée à la conservation de la charge :

$$\boxed{\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = 0.} \quad (3.10)$$

3.3 Comparaison avec la conservation de l'énergie

La table 3.1 met en parallèle la conservation de la charge électrique dans le cas 1D (cf. section 3.2) et la conservation de l'énergie mécanique de la corde (cf. section 2.2.3).

conservation de la charge	conservation de l'énergie
$S\rho(x,t)$	$\mathcal{H}(x,t)$
$Sj(x,t)$	$P(x,t)$
$Q_{cd}(t)$	$E_{CD}(t)$
$\delta Q_c = I_c dt$	$\delta E_C = P(c,t) dt$
$\delta Q_d = I_d dt$	$\delta E_D = P(d,t) dt$
$\frac{dQ_{cd}}{dt} = I_c - I_d$	$\frac{dE_{CD}}{dt} = P(c,t) - P(d,t)$
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0$

TAB. 3.1 – Mise en parallèle des sections 3.2 et 2.2.3.

3.4 Équation de continuité (cas général)

Soit

$$Q_V = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV \quad (3.11)$$

la charge contenue dans le volume V limité par la surface S (cf. figure 3.2). Le vecteur unitaire \vec{n} normal à S est orienté vers l'extérieur du volume V . Entre les instants t et $t + dt$, la charge Q_V varie de $dQ_V = Q_V(t + dt) - Q_V(t)$ et il

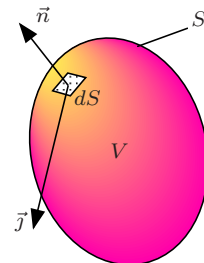


FIG. 3.2 – V et S .

sort du volume V la charge δQ_S donnée par l'équation (3.2). La conservation de la charge implique que $dQ_V = -\delta Q_S$ soit

$$\frac{dQ_V}{dt} = -I_S. \quad (3.12)$$

On a, S étant fixe,

$$\frac{dQ_V}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV \quad (3.13)$$

et, en utilisant le théorème d'Ostrogradski¹,

$$I_S = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV. \quad (3.14)$$

L'équation (3.12) s'écrit

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right) dV = 0. \quad (3.15)$$

Le volume V étant arbitraire, l'intégrand doit être nul. On obtient ainsi l'**équation de continuité** qui exprime la conservation de la charge :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.} \quad (3.16)$$

Il est plus facile de retenir cette relation sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \quad (3.17)$$

où apparaît la généralisation à 4 dimensions de l'opérateur divergence.

Remarque. On obtient une relation analogue à (3.16) pour toute grandeur conservative. Nous l'avons vu pour la conservation de l'énergie mécanique de la corde (cf. section 2.2.3). En mécanique des fluides, la conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.18)$$

où $\rho(\vec{r}, t)$ est la masse volumique (kg m^{-3}) et $\vec{v}(\vec{r}, t)$ le champ de vitesse.

1. Mikhail Vasilevich Ostrogradski (1801-1862)

4

Ondes sinusoïdales (ou harmoniques)

Nous étudions la corde vibrante et l'équation de d'Alembert (1.17), mais la plupart des propriétés décrites dans ce chapitre s'appliquent aussi à toutes sortes d'ondes (ondes sonores, lumière, ...). Une **onde sinusoïdale** (ou **onde harmonique**) est une onde où le signal vibre sinusoïdalement avec la même fréquence en tout point du milieu. Une telle onde est aussi dite **monochromatique** (lumière). La fréquence peut prendre une valeur arbitraire pour une corde de longueur infinie (section 4.1), mais pour une corde de longueur finie, seulement certaines fréquences discrètes sont possibles (section 4.10). Une onde quelconque de la corde vibrante peut s'obtenir par superposition d'ondes harmoniques (section 4.12) et son énergie est la somme des énergies de ses composantes harmoniques (section 4.13). L'importance des ondes sinusoïdales vient de ce qu'il existe des appareils simples (résonateurs, spectrographes, ...) qui permettent d'effectuer l'analyse spectrale d'une onde quelconque.

4.1 Ondes progressives sinusoïdales (ou harmoniques, ou monochromatiques)

L'onde de la corde vibrante, cas particulier de l'onde (1.2) pour $F(u) = A \cos(\omega u + \phi_0)$,

$$\boxed{s(x, t) = A \cos \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \phi_0 \right\} = A \cos(\omega t - kx + \phi_0)} \quad (4.1)$$

est appelée onde **sinusoïdale** (ou **harmonique**, ou **monochromatique**) progressive vers les x croissants. On l'appelle aussi **onde plane progressive harmonique** (OPPH). Dans l'expression (4.1) :

- A est l'**amplitude** de l'onde et ϕ_0 est la **phase à l'origine** (rad) ;

- ω est la **pulsation** ou **fréquence angulaire** de l'onde (s^{-1} ou rad s^{-1});
- $k = \frac{\omega}{c}$ est le **module du vecteur d'onde** ou le **nombre d'ondes angulaire** (m^{-1} ou rad m^{-1}).

FIG. 4.1 – Périodicité temporelle. Le signal s en fonction de t à x donné.

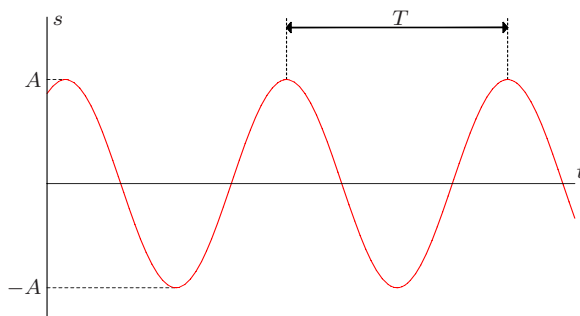
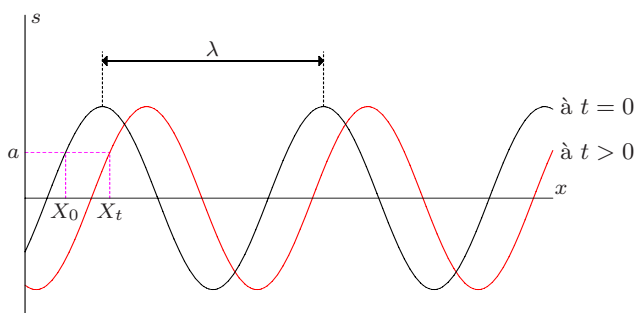


FIG. 4.2 – Périodicité spatiale et vitesse de phase. Le signal s en fonction de x à deux instants donnés.



Le signal (4.1) est doublement périodique (cf. figures 4.1 et 4.2)

$$s(x, t + T) = s(x, t) \quad \text{et} \quad s(x + \lambda, t) = s(x, t) \quad (4.2)$$

de **période** temporelle $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (s) et de période spatiale $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. On appelle λ la **longueur d'onde** (m). L'inverse de la période temporelle est la **fréquence** de l'onde $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ (Hz [Hertz¹] ou s^{-1}). L'inverse de la longueur d'onde est le **nombre d'ondes** $\sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi}$ (m^{-1}).

Le signal (4.1) peut s'écrire de diverses façons :

$$\begin{aligned} s(x, t) &= A \cos(\omega t - kx + \phi_0) = A \cos \{2\pi(\nu t - \sigma x) + \phi_0\} \\ &= A \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \phi_0 \right\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

1. Heinrich Rudolph Hertz (1857-1894)

L'argument des cosinus y est le même que dans (4.1), ce qui permet de retrouver les relations entre ω , ν , T , k , σ , λ et la vitesse de l'onde c . On a par exemple

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{\nu}{\sigma} = \lambda\nu. \quad (4.4)$$

Une onde réelle n'est jamais une onde sinusoïdale (qui doit exister pour les temps t de $-\infty$ à $+\infty$ et pour x de $-\infty$ à $+\infty$ [corde infinie]), mais la superposition d'ondes sinusoïdales de diverses fréquences. Lorsque la bande de fréquences est étroite devant ω , l'onde est dite **quasimonochromatique**.

4.2 Représentation complexe

Nous appelons l'expression

$$\boxed{\hat{s}(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx + \phi_0)} = \hat{A}e^{i(\omega t - kx)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\hat{A} = Ae^{i\phi_0}} \quad (4.5)$$

la **représentation complexe** de l'onde (4.1). Le signal (4.1) s'obtient en prenant la partie réelle de (4.5) :

$$s(x, t) = \text{Re} [\hat{s}(x, t)]. \quad (4.6)$$

La grandeur \hat{A} est l'**amplitude complexe**.

4.3 Interférences

Comme application de la représentation complexe, déterminons la superposition $s(x, t)$ de deux ondes harmoniques progressives s_1 et s_2 de même fréquence et de même sens de propagation :

$$s_1(x, t) = A_1 \cos(\omega t - kx + \phi_1), \quad s_2(x, t) = A_2 \cos(\omega t - kx + \phi_2). \quad (4.7)$$

Calculons

$$\hat{s}_1 + \hat{s}_2 = (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) e^{i(\omega t - kx)} = Ae^{i\phi} e^{i(\omega t - kx)} \quad (4.8)$$

où A et ϕ sont déterminés dans l'annexe A page 77. On a, en prenant la partie réelle de (4.8),

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi) \quad (4.9)$$

qui montre que la superposition de deux ondes harmoniques progressives de même fréquence et de même sens de propagation est une autre onde harmonique de même fréquence.

Si les ondes (4.7) sont **en phase** ($\phi_1 = \phi_2$, en supposant A_1 et A_2 positifs), l'amplitude A est $A = A_1 + A_2$ et on parle d'**interférences constructives**. Si les ondes sont **en opposition de phase** ($\phi_1 = \phi_2 + \pi$), l'amplitude est $A = |A_1 - A_2|$ et les interférences sont **destructives**.

4.4 Moyenne temporelle

Soit $g(t)$ une fonction de période T ($g(t)$ peut dépendre d'autres variables x, y, \dots). On s'intéresse souvent à la **moyenne temporelle** de $g(t)$, c'est-à-dire la moyenne sur une période

$$\langle g(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} g(t) dt. \quad (4.10)$$

Par suite de la périodicité de $g(t)$, $\langle g(t) \rangle$ ne dépend pas de t_0 (ni non plus de t).

Voici quelques propriétés utiles de la moyenne temporelle (pendant le temps T).

- Moyenne temporelle d'une constante C (fonction de x, y, \dots indépendante de t):

$$\langle C \rangle = C. \quad (4.11)$$

- Linéarité (C_1 et C_2 sont des constantes):

$$\langle C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) \rangle = C_1 \langle g_1(t) \rangle + C_2 \langle g_2(t) \rangle. \quad (4.12)$$

- La moyenne d'une fonction sinusoïdale de période T/n , où $n \in \mathbb{Z}^+$, est nulle. En effet pour $\sin(\omega_n t + \phi)$, avec $\omega_n = 2\pi n/T$, on a:

$$\langle \sin(\omega_n t + \phi) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega_n t + \phi) dt = \left[-\frac{1}{T\omega_n} \cos(\omega_n t + \phi) \right]_0^T = 0. \quad (4.13)$$

- La moyenne de $\sin^2(\omega_n t)$ (avec $\omega_n = 2\pi n/T$, $n \in \mathbb{Z}^+$) est $\frac{1}{2}$:

$$\langle \sin^2(\omega_n t) \rangle = \left\langle \frac{1 - \cos(2\omega_n t)}{2} \right\rangle = \frac{1 - \langle \cos(2\omega_n t) \rangle}{2} = \frac{1}{2} \quad (4.14)$$

en utilisant les équations (4.11–4.13).

- Si $g(t)$ est une fonction de période T , la moyenne de $\frac{dg}{dt}$ est nulle:

$$\left\langle \frac{dg}{dt}(t) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dg}{dt} dt = \frac{g(T) - g(0)}{T} = 0. \quad (4.15)$$

4.5 Considérations énergétiques (onde progressive sinusoïdale)

Pour l'onde progressive harmonique d'une corde vibrante

$$s(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi_0) \quad (4.16)$$

la densité d'énergie cinétique (2.20) est

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2}\mu A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \phi_0). \quad (4.17)$$

Les densités d'énergie cinétique \mathcal{K} et d'énergie potentielle \mathcal{U} sont égales (cf. section 2.2.5) et la densité d'énergie mécanique (2.23) est

$$\mathcal{H}(x, t) = \mathcal{K}(x, t) + \mathcal{U}(x, t) = 2\mathcal{K}(x, t) = \mu A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \phi_0). \quad (4.18)$$

La moyenne temporelle de la densité d'énergie mécanique est d'après (4.14)

$$\langle \mathcal{H}(x, t) \rangle = \frac{\mu A^2 \omega^2}{2}. \quad (4.19)$$

Le courant d'énergie (ou puissance instantanée) est (cf. équation (2.37))

$$P(x, t) = c\mathcal{H} = ZA^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \phi_0). \quad (4.20)$$

où $Z = \mu c$ est l'impédance caractéristique de la corde (cf. section 2.2.6). La moyenne temporelle du courant d'énergie (ou puissance moyenne) est

$$\langle P(x, t) \rangle = \frac{ZA^2\omega^2}{2}. \quad (4.21)$$

De façon générale, et pas seulement pour la corde vibrante, les grandeurs énergétiques moyennes de l'onde progressive harmonique (4.16) sont proportionnelles au carré A^2 de l'amplitude. On peut le montrer de la façon suivante. Soit $W(A)$ une grandeur énergétique moyenne de l'onde (densité moyenne d'énergie, puissance moyenne, ...). C'est une fonction de l'amplitude du signal (4.16) et d'autres variables (ω, T_0, \dots). Mais $W(A)$ ne dépend pas de la phase à l'origine ϕ_0 du signal qui disparaît dans les moyennes. Elle ne dépend pas non plus du signe de A (qui correspond au changement $\phi_0 \rightarrow \phi_0 + \pi$). La fonction $W(A)$ est donc paire : $W(-A) = W(A)$. Nous supposons que A est suffisamment petit ($|A| \ll L$ pour la corde, cf. équation (2.2)) pour pouvoir écrire un développement en série autour de $A = 0$:

$$W(A) = a_0 + a_2 A^2 + a_4 A^4 + \dots \quad (4.22)$$

Ce développement ne comporte que des termes pairs puisque $W(-A) = W(A)$. Lorsque l'amplitude $A = 0$ est nulle, il n'y a pas d'onde et $W(A)$ doit être nul. On a donc $a_0 = 0$. En négligeant les termes d'ordres supérieurs (on suppose A petit), on a bien $W(A) \propto A^2$.

4.6 Calculs d'énergie et représentation complexe



Dans ce cours, nous n'utiliserons jamais la représentation complexe pour des grandeurs qui font intervenir le carré du signal. Ainsi l'expression de la densité d'énergie cinétique (4.17) donne un résultat faux si on y porte le signal *complexe* (4.5).

La raison est que lorsque on calcule le produit $P = AB$ de deux quantités réelles A et B données par leurs représentations complexes \hat{A} et \hat{B} on forme $P = (\text{Re} [\hat{A}])(\text{Re} [\hat{B}])$ qui en général n'est pas égal à $\text{Re} [\hat{A}\hat{B}]$. Il est donc **faux** d'écrire $P = \text{Re} [\hat{A}\hat{B}]$.

4.7 Vitesse de phase

Examinons pour l'onde (4.1) le mouvement d'un point géométrique M_a de l'axe Ox tel que le signal garde en M_a la même valeur a . Pour $a = A$ (respectivement $a = -A$) un tel point se trouve sur une crête (respectivement un creux) de l'onde. L'abscisse X_t du point M_a à l'instant t (cf. figure 4.2) vérifie l'équation $a = A \cos(\omega t - kX_t + \phi_0)$. Cela implique que l'argument (la *phase*) du cosinus est constant, d'où

$$X_t = \frac{\omega}{k}t + X_0 \quad (4.23)$$

où X_0 est la position du point à l'instant $t = 0$. Le point M_a se déplace à la vitesse

$$\boxed{v_\phi = \frac{\omega}{k}} \quad (4.24)$$

appelée **vitesse de phase** de l'onde. Pour une solution de l'équation de d'Alembert (1.17) on a $\boxed{v_\phi = c}$.

Remarque 1. Le fait que le point M_a se déplace à la vitesse (4.24) résulte aussi du théorème 1 de la section 1.2. En effet l'onde (4.1) est une onde progressive dont la vitesse de propagation est (4.24).



Remarque 2. Le point M_a est un point *géométrique* : il se déplace dans le sens de propagation de l'onde suivant Ox tandis que les points matériels de la corde se déplacent perpendiculairement à Ox (cf la remarque de la section 1.2).

4.8 Dispersion, vitesse de groupe

Nous avons vu que si l'équation d'onde est l'équation de d'Alembert

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0 \quad (4.25)$$

les ondes progressives de forme arbitraire se propagent à la vitesse c sans se déformer. En pratique, la propagation d'une onde dans un milieu se

fait souvent avec déformation de l'onde. Seulement les ondes sinusoïdales $\hat{s}(x, t) = \hat{A}e^{i(\omega t - kx)}$ se propagent sans se déformer, mais leur vitesse de phase

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \quad (4.26)$$

(cf. section 4.7) dépend de la fréquence: on dit qu'il y a **dispersion**. La dispersion de la lumière par un prisme est due à la variation de la vitesse de phase (ou de l'indice du prisme) avec la fréquence (couleur). Lorsque v_ϕ est une fonction décroissante de la fréquence on dit que la dispersion est **normale** (c'est le cas du verre pour la lumière). Lorsque v_ϕ est une fonction croissante de la fréquence on dit que la dispersion est **anormale**. Suivant le domaine de fréquence, un même matériau peut présenter les deux types de dispersion.

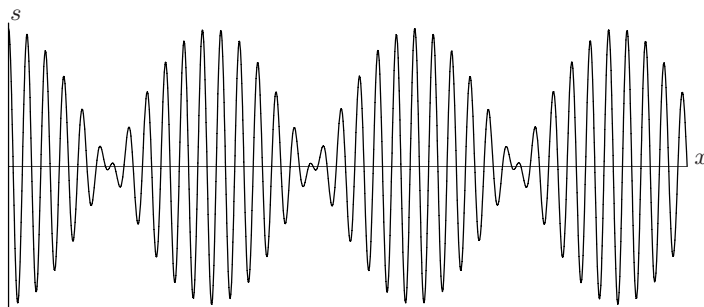


FIG. 4.3 – Battements. Le signal s est la superposition de deux ondes sinusoïdales de même amplitude mais de fréquences légèrement différentes. La courbe représente s en fonction de x à t donné. La courbe de s en fonction de t à x donné a la même allure.

On peut mettre en évidence la déformation de l'onde lorsque l'onde est une superposition de deux ondes sinusoïdales de même amplitude mais de fréquences légèrement différentes. La figure 4.3 représente, à un instant donné, le signal de cette superposition. Les longueurs d'ondes des deux ondes diffèrent peu. Il y a des endroits où les deux ondes sont en phase et d'autres où elles sont en opposition de phase: on a des **battements**.

Si le milieu est dispersif les deux ondes se propagent à des vitesses légèrement différentes et la figure des battements se propage avec déformation. Superposons les deux ondes sinusoïdales de même amplitude

$$\hat{s}_1(x, t) = Ae^{i(\omega_1 t - k_1 x)} \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \omega + \frac{1}{2}\Delta\omega, \quad k_1 = k + \frac{1}{2}\Delta k \quad (4.27)$$

et

$$\hat{s}_2(x, t) = Ae^{i(\omega_2 t - k_2 x)} \quad \text{avec} \quad \omega_2 = \omega - \frac{1}{2}\Delta\omega, \quad k_2 = k - \frac{1}{2}\Delta k. \quad (4.28)$$

Le signal complexe est

$$\begin{aligned} \hat{s}(x, t) &= \hat{s}_1(x, t) + \hat{s}_2(x, t) = A \left[e^{i(\Delta\omega t - \Delta k x)/2} + e^{-i(\Delta\omega t - \Delta k x)/2} \right] e^{i(\omega t - kx)} \\ &= 2A \cos \frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2} e^{i(\omega t - kx)}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Le signal est sa partie réelle

$$s(x, t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2} \cos(\omega t - kx) \quad (4.30)$$

qui est représentée sur la figure 4.3. Le signal s en fonction de x pour t donné ou le signal s en fonction de t pour x donné présente le phénomène des battements (on suppose $|\Delta\omega| \ll \omega$ et $|\Delta k| \ll k$). Le facteur $\cos(\omega t - kx)$ correspond à la modulation fine de la figure et le facteur $2A \cos \frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2}$ correspond à l'enveloppe des battements. On remarquera que, pour x fixé, la période temporelle du facteur $2A \cos \frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2}$ est $\left| \frac{4\pi}{\Delta\omega} \right|$, mais la période temporelle des battements est $\left| \frac{2\pi}{\Delta\omega} \right|$. Autrement dit, *la fréquence des battements est la différence $|\nu_1 - \nu_2|$ des fréquences des deux ondes*. De même, pour t fixé, la séparation spatiale entre deux battements successifs est $\left| \frac{2\pi}{\Delta k} \right|$ qui est la moitié de la période spatiale du facteur $2A \cos \frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2}$.

Chacun des facteurs $2A \cos \frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2}$ et $\cos(\omega t - kx)$ du signal (4.30) à la forme d'une onde progressive $f(x - ct)$ mais leurs vitesses ne sont pas les mêmes s'il y a de la dispersion. Le facteur $\cos(\omega t - kx)$ se propage à la vitesse de phase v_ϕ , équation (4.26). Le facteur $2A \cos \frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2}$ se propage à la **vitesse de groupe**

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad \text{ou} \quad \boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}} \quad (4.31)$$

dans la limite $\Delta\omega \rightarrow 0$. La vitesse de groupe est également celle avec laquelle se propage l'énergie (admis). Si on connaît la **relation de dispersion**, c'est-à-dire l'équation qui relie ω et k , on peut calculer la vitesse de phase (4.26) et la vitesse de groupe (4.31). Par exemple, si la relation de dispersion est

$$\omega = \alpha k^2 \quad (4.32)$$

on a $v_\phi = \alpha k$ et

$$v_g = 2\alpha k = 2v_\phi. \quad (4.33)$$

Si la relation de dispersion est $\omega = kc$ (c constant), il n'y a pas de dispersion ($v_g = v_\phi = c$).

4.9 Ondes stationnaires

Déterminons la superposition $s(x, t)$ de deux ondes harmoniques progressives s_1 et s_2 de même fréquence, même amplitude $A = A_1 = A_2$, de

phases à l'origine nulles $\phi_1 = \phi_2 = 0$, et de sens de propagation opposés :

$$s_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx), \quad s_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx). \quad (4.34)$$

Calculons

$$\hat{s} = \hat{s}_1 + \hat{s}_2 = A \left(e^{-ikx} + e^{ikx} \right) e^{i\omega t} = 2A \cos(kx) e^{i\omega t}, \quad (4.35)$$

et, en prenant la partie réelle,

$$s(x, t) = 2A \cos(kx) \cos(\omega t). \quad (4.36)$$

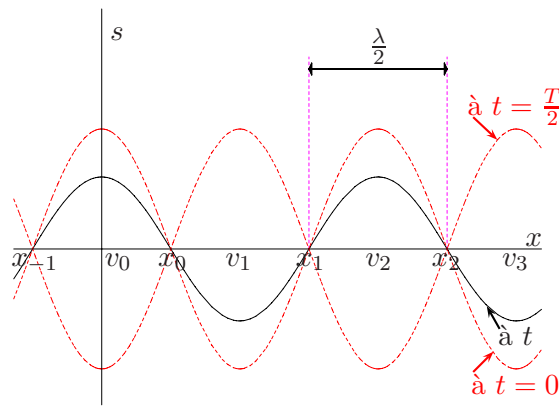


FIG. 4.4 – Onde stationnaire.

Dans ce mode de vibration, tous les points vibrent en phase ou en opposition de phase: le point d'abscisse x vibre avec l'amplitude $2A|\cos(kx)|$. On dit que l'onde est **stationnaire**. Aux points

$$x_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{k} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}, \quad (4.37)$$

avec $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$, l'amplitude de vibration est nulle: ces points sont les **nœuds** de l'onde (cf. figure 4.4). L'intervalle séparant deux nœuds

voisins a pour longueur $\frac{\lambda}{2}$. Au milieu de chacun de ces intervalles se trouvent les **ventres** de l'onde

$$v_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2}, \quad n = \dots, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.38)$$

où l'amplitude de vibration est maximale.

Remarque 1. On peut obtenir une onde stationnaire de forme plus générale

$$s(x, t) = 2A \cos [k(x - a)] \cos [\omega(t - t_0)], \quad (4.39)$$

avec un ventre en un point a arbitraire, en superposant les ondes

$$s_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi_1) \quad \text{et} \quad s_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx + \phi_2) \quad (4.40)$$

avec $\phi_1 = ka - \omega t_0$ et $\phi_2 = -ka - \omega t_0$.

Remarque 2. Une onde stationnaire est la superposition de deux ondes progressives harmoniques de même amplitude et de sens de propagation opposés. Inversement, une onde progressive harmonique est la superposition de deux ondes stationnaires de même amplitude. Par exemple

$$A \cos(\omega t - kx) = A \cos(\omega t) \cos(kx) + A \sin(\omega t) \sin(kx). \quad (4.41)$$

Définition 4.1 (onde stationnaire). Une onde est **stationnaire** lorsque le signal *réel* $s(\vec{r}, t) = f(\vec{r})g(t)$ est le produit d'une fonction spatiale $f(\vec{r})$ et d'une fonction temporelle $g(t)$.

Le mot *réel* est souligné parce que l'onde (4.5) $\hat{s}(x, t) = \hat{A}e^{-ikx} e^{i\omega t}$ est un tel produit, mais n'est pas stationnaire. Pour une onde stationnaire solution de l'équation de d'Alembert (1.17), les facteurs $f(x)$ et $g(t)$ ne peuvent être que sinusoidaux et l'onde est nécessairement de la forme (4.39) (cf. exercice de T.D.).

4.10 Modes de vibration d'une corde fixée aux extrémités

Nous supposons que la corde est fixée en $x = 0$ et $x = L$. Les ondes de la corde sont les solutions $s(x, t)$ de l'équation de d'Alembert

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0 \quad (4.42)$$

qui vérifient les conditions aux limites

$$s(0, t) = 0 \quad \forall t, \quad s(L, t) = 0 \quad \forall t. \quad (4.43)$$

Les ondes stationnaires qui ont des nœuds en $x = 0$ et $x = L$ vérifient ces conditions aux limites. L'onde (4.39) a un nœud en $x = 0$ pour $ka = \pi/2$. Prenons donc, en changeant de notations,

$$s(x, t) = A \sin(kx) \sin(\omega t + \phi). \quad (4.44)$$

L'onde (4.44) a un nœud en $x = 0$. Elle en a un autre en $x = L$ seulement pour certaines valeurs λ_n de la longueur d'onde, à savoir lorsque

$$\boxed{L = n \frac{\lambda_n}{2}} \quad \text{où} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.45)$$

La condition (4.45) exprime que la longueur de la corde L est égale à n intervalles entre nœuds. Les valeurs correspondantes k_n de k sont

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L} \quad \text{où} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.46)$$

Une autre façon de trouver ces valeurs consiste à écrire que (4.44) vérifie $s(L, t) = 0$ pour tout t . Cela donne $A \sin(kL) \sin(\omega t + \phi) = 0$ qui n'est vérifiée pour tout t que si $\sin(kL) = 0$, c'est à dire pour les valeurs (4.46) puisque $k > 0$.

Posons $\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{L}$. Les fréquences $\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}$ sont dites **fréquences propres**. On appelle **modes propres** de vibration de la corde les solutions

$$\boxed{s_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \phi_n)} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.47)$$

des équations (4.42) et (4.43) que nous venons d'obtenir. Les constantes A_n, ϕ_n peuvent prendre des valeurs quelconques. Le mode de plus basse fréquence, s_1 , est le **mode fondamental** de fréquence donnée par la loi de Mersenne² (1625) :

$$\boxed{\nu_1 = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho \mathcal{A}}}} \quad (\text{fréquence fondamentale}). \quad (4.48)$$

La fréquence $n\nu$, multiple entier de la fréquence ν , est appelée **harmonique** [d'ordre] $n = 1, 2, 3, \dots$ de la fréquence ν (on dit aussi n -ième (premier, deuxième, troisième, ...) harmonique). Les fréquences propres de la corde vibrante sont les harmoniques

$$\boxed{\nu_n = n\nu_1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)} \quad (4.49)$$

de la fréquence fondamentale ν_1 . Le mode propre s_n correspondant est aussi appelé harmonique n du fondamental.

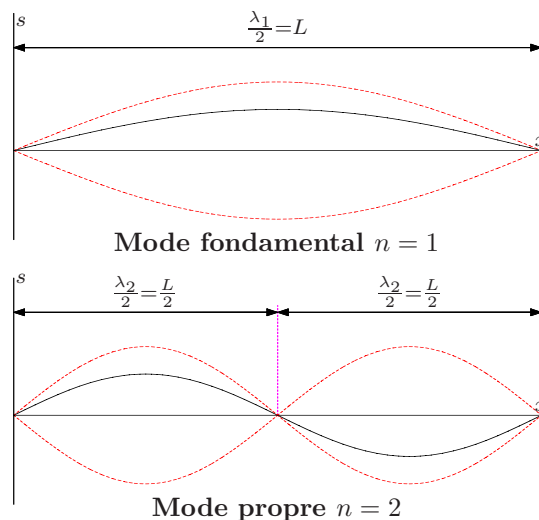


FIG. 4.5 – Le mode fondamental et l'harmonique 2.

2. Marin Mersenne (1588-1648)

La figure 4.5 représente la forme de la corde à un instant donné. Lorsque la fréquence fondamentale est suffisamment élevée ($\gtrsim 20$ Hz), par suite de la persistance des images rétinienne, la corde prend l'aspect d'un **fuseau** (mode fondamental) ou de deux fuseaux (mode propre $n = 2$). Ces fuseaux remplissent la surface limitée par les courbes $y = \pm A_n \sin(k_n x)$, représentées en pointillés sur les figures, qui correspondent aux positions extrêmes de la corde. La longueur d'un fuseau est $\frac{\lambda}{2}$.

Remarque. De façon générale, on appelle **modes propres** de vibration d'un système, lorsque les causes d'amortissement sont négligeables, les ondes sinusoïdales du système. Lorsque le système est fini, la famille des modes et des fréquences propres est *dénombrable* (on peut numéroter les fréquences propres par ordre croissant ν_1, ν_2, \dots). En général, le mode propre n n'est pas un harmonique du fondamental (sa fréquence n'est pas un multiple entier de ν_1 , par exemple $\nu_2 = 2,934\nu_1$). En musique, un tel mode est appelé **partiel**.

Pour le **tuyau sonore** fermé à une extrémité, ouvert à l'autre, on obtient la suite des fréquences propres

$$\nu_n = (2n - 1)\nu_1 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.50)$$

formée du fondamental et de ses **harmoniques impairs** (le mode n est l'harmonique $2n - 1$ du fondamental).

4.11 Considérations énergétiques (mode propre)

Pour le mode propre (4.47), calculons la densité d'énergie cinétique \mathcal{K}_n en utilisant (2.20) :

$$\mathcal{K}_n(x, t) = \frac{1}{2}\mu A_n^2 \omega_n^2 \sin^2(k_n x) \cos^2(\omega_n t + \phi_n) \quad (4.51)$$

et la densité d'énergie potentielle \mathcal{U}_n en utilisant (2.22) :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_n(x, t) &= \frac{1}{2}T_0 A_n^2 k_n^2 \cos^2(k_n x) \sin^2(\omega_n t + \phi_n) \\ &= \frac{1}{2}\mu A_n^2 \omega_n^2 \cos^2(k_n x) \sin^2(\omega_n t + \phi_n). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Ces deux densités ne sont plus égales comme dans l'onde progressive harmonique (cf. section 4.5) mais en quadrature tant en x qu'en t . L'énergie mécanique de toute la corde

$$\begin{aligned} E_n &= \int_0^L (\mathcal{K}_n + \mathcal{U}_n) dx = \frac{1}{4}\mu A_n^2 \omega_n^2 L [\cos^2(\omega_n t + \phi_n) + \sin^2(\omega_n t + \phi_n)] \\ &= \frac{1}{4}\mu A_n^2 \omega_n^2 L \quad (4.53) \end{aligned}$$

est conservée.

En utilisant (2.18), on obtient le courant d'énergie

$$\begin{aligned} P_n(x, t) &= -T_0 \frac{\partial s_n}{\partial x} \frac{\partial s_n}{\partial t} \\ &= -T_0 A_n^2 k_n \omega_n \cos(k_n x) \sin(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n) \\ &= -\frac{T_0 A_n^2 k_n \omega_n}{4} \sin(2k_n x) \sin(2\omega_n t + 2\phi_n). \end{aligned} \quad (4.54)$$

La moyenne temporelle du courant d'énergie est nulle $\langle P_n(x, t) \rangle = 0$: en moyenne, il n'y a pas de propagation d'énergie dans une onde stationnaire.

4.12 Analyse de Fourier

Nous continuons l'étude des ondes libres de la corde fixée en $x = 0$ et $x = L$ et considérons le problème de Cauchy. Nous cherchons dans cette section la solution de ce problème, c'est-à-dire l'onde $s(x, t)$ de la corde, solution de l'équation (4.42), vérifiant les conditions aux limites (4.43) et déterminée par les conditions initiales

$$s(x, t = 0) = f(x), \quad \frac{\partial s}{\partial t}(x, t = 0) = g(x). \quad (4.55)$$

Ces conditions reviennent à donner la position et la vitesse initiale (à l'instant $t = 0$) de chaque élément de la corde. Nous avons déjà indiqué, section 1.7, qu'il y a une et une seule onde vérifiant le système d'équations (4.42), (4.43) et (4.55). Nous allons trouver une solution du problème de Cauchy sous la forme d'une superposition des modes propres (4.47) de la corde. Nous posons donc

$$s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \phi_n) \quad (4.56)$$

que nous écrivons

$$\boxed{s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + b_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)]} \quad (4.57)$$

en posant $a_n = A_n \sin \phi_n$ et $b_n = A_n \cos \phi_n$. Nous supposons que l'on peut dériver terme à terme la série (4.57) et écrire par exemple

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial s_n}{\partial t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n \omega_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t) + b_n \omega_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

L'expression (4.56) vérifie alors l'équation d'onde (4.42) :

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) s_n = 0. \quad (4.59)$$

Autrement dit, le principe de superposition s'applique à une infinité d'ondes. Les conditions aux limites (4.43) sont également vérifiées. Nous devons déterminer des constantes a_n et b_n telles que les conditions initiales (4.55) soient satisfaites. Les conditions initiales s'écrivent

$$\begin{aligned} s(x, t=0) &= f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x) \\ \frac{\partial s}{\partial t}(x, t=0) &= g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin(k_n x). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Les séries dans (4.60) sont des **séries de Fourier**³. Du point de vue mathématique, $\Psi_n(x) = \sin(k_n x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ est une fonction impaire périodique de période $2L$: $\Psi_n(-x) = -\Psi_n(x)$ et $\Psi_n(x+2L) = \Psi_n(x)$. Les théorèmes sur les séries de Fourier nous disent qu'une fonction $h(x)$ impaire, périodique de période $2L$ et suffisamment régulière peut se mettre sous la forme d'un **développement en série de Fourier**

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (4.61)$$

Ce développement est unique et l'**analyse de Fourier** consiste à déterminer les coefficients c_n en fonction de $h(x)$. On utilise les **relations d'orthogonalité**

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L\delta_{mn}}{2} \quad (4.62)$$

où

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \quad (4.63)$$

est le **symbole de Kronecker**⁴. Démontrons ces relations d'orthogonalité. En utilisant

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \quad (4.64)$$

on a

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = I_{m-n} - I_{m+n} \quad (4.65)$$

3. Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

4. Leopold Kronecker (1823-1891)

avec

$$I_p = \frac{1}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{p\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^L \underbrace{\cos(0)}_1 dx = L/2 & \text{si } p = 0 \\ \left[\frac{L}{p\pi} \sin\left(\frac{p\pi x}{L}\right) \right]_0^L = 0 & \text{si } p \neq 0 \end{cases} \quad (4.66)$$

d'où (4.62). On multiplie (4.61) par $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ et on admet qu'on peut intégrer la série terme à terme. On obtient ainsi c_m :

$$\begin{aligned} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n \delta_{mn} L}{2} = \frac{c_m L}{2}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Nous devons inverser les équations (4.60). Les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont données pour $x \in [0, L]$ et vérifient les conditions aux limites $f(0) = f(L) = 0$ et $g(0) = g(L) = 0$, d'après les conditions aux limites (4.43) et leurs dérivées temporelles. On peut donc considérer ces fonctions comme les restrictions de fonctions impaires et périodiques de période $2L$ définies pour tout x . L'analyse de Fourier ci-dessus s'applique donc et (4.67) donne

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,} \quad \boxed{b_n = \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.} \quad (4.68)$$

Remarque 1. Nous avons montré (en admettant des résultats de la théorie des séries de Fourier) qu'on pouvait trouver une solution du problème de Cauchy sous la forme d'une superposition des modes propres de la corde. Mais une onde arbitraire est la solution d'un problème de Cauchy. Il en résulte que *toute onde de la corde peut être obtenue par superposition de modes propres (4.47) de la corde.*

Remarque 2. On peut remarquer que les séries (4.56) et (4.57), considérées comme fonctions du temps t pour chaque valeur x donnée, sont des développements en série de Fourier temporelle d'une fonction périodique de période $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2L}{c}$. Le mouvement de la corde est donc périodique de période T_1 : $s(x, t + T_1) = s(x, t)$.

Remarque 3. Si les conditions initiales correspondent à une perturbation se propageant dans un seul sens, on peut aussi déterminer l'onde comme dans la section 1.6.

La figure 4.6) représente la perturbation à divers instants.

- (1) Elle se propage vers la gauche à l'instant $t = 0$.
- (2) Elle se réfléchit sur l'extrémité A .

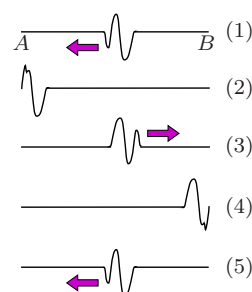


FIG. 4.6 – Corde à divers instants.

- (3) Elle se propage vers la droite.
- (4) Elle se réfléchit sur l'extrémité B .
- (5) À l'instant $t = T_1 = 2L/c$, on retrouve l'état du temps $t = 0$: le signal est bien périodique de période T_1 . Pendant le temps T_1 , le signal a parcouru deux fois la longueur L à la vitesse c .

4.13 Considérations énergétiques (analyse de Fourier)

Nous avons vu (cf. Remarque de la section 2.2.2) que l'énergie mécanique d'une superposition de deux ondes n'est en général pas égale à la somme des énergies mécaniques de chacune des ondes. Toutefois, dans le cas d'une superposition de modes propres, on a la propriété suivante.

Théorème 4.1 (énergie). *L'énergie mécanique E de l'onde*

$$s(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \phi_n) \quad (4.69)$$

est la somme

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \mu A_n^2 \omega_n^2 L \quad (4.70)$$

où E_n (cf. équation (4.53)) est l'énergie mécanique du mode propre $s_n(x, t)$. *Identités de Parseval.* Pour prouver ce théorème nous avons besoin de quelques propriétés des séries de Fourier. Les séries de Fourier sur $0 \leq x \leq L$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.71)$$

vérifient les **identités de Parseval**⁵ :

$$\int_0^L [h(x)]^2 dx = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \quad \text{et} \quad \int_0^L [g(x)]^2 dx = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2. \quad (4.72)$$

La première de ces identités se montre de la façon suivante :

$$\int_0^L [h(x)]^2 dx = \int_0^L dx \left[\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \quad (4.73)$$

où on utilise deux variables de sommation m et n pour faciliter les calculs. On suppose qu'on peut échanger l'ordre de l'intégration de 0 à L et des sommations sur m et n :

$$\int_0^L [h(x)]^2 dx = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m c_n \left[\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]. \quad (4.74)$$

5. Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836)

L'intégrale de droite est donnée par les relations d'orthogonalité (4.62). On en déduit la première identité (4.72) :

$$\int_0^L [h(x)]^2 dx = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_m c_n \frac{L \delta_{mn}}{2} = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2. \quad (4.75)$$

La deuxième identité s'obtient de façon analogue en utilisant les relations d'orthogonalité

$$\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L \delta_{mn}}{2} \quad (4.76)$$

que je vous laisse démontrer en exercice (la démonstration est analogue à celle des relations (4.62)).

Démonstration du théorème.

Calculons l'énergie mécanique E de l'onde (4.69) en intégrant la densité d'énergie (2.23) :

$$E = \int_0^L \mathcal{H} dx = \frac{1}{2} \mu \int_0^L \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \mu c^2 \int_0^L \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 dx. \quad (4.77)$$

Les dérivées

$$h = \frac{\partial s}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.78)$$

et

$$g = \frac{\partial s}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n k_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.79)$$

sont des séries de Fourier de la forme (4.71) avec $c_n = A_n \omega_n \cos(\omega_n t + \phi_n)$ et $d_n = A_n k_n \sin(\omega_n t + \phi_n)$. Les intégrales dans (4.77) s'obtiennent avec les identités de Parseval (4.72) :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{2} c_n^2 + \frac{1}{2} \mu c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{2} d_n^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu A_n^2 \omega_n^2 L}{4} [\cos^2(\omega_n t + \phi_n) + \sin^2(\omega_n t + \phi_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \mu A_n^2 \omega_n^2 L \end{aligned} \quad (4.80)$$

ce qui montre (4.70). \square

4.14 Applications de l'analyse de Fourier

L'onde sonore produite en un point donné par une corde vibrante est décrite par la **décomposition spectrale** de la surpression :

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B(\nu_n) \sin[2\pi\nu_n t + \phi(\nu_n)]. \quad (4.81)$$

Les grandeurs ν_n , $B(\nu_n)$ et $\phi(\nu_n)$ peuvent être mesurées (microphone et analyseur spectral). Le fonctionnement de l'oreille s'apparente en partie à un analyseur spectral.

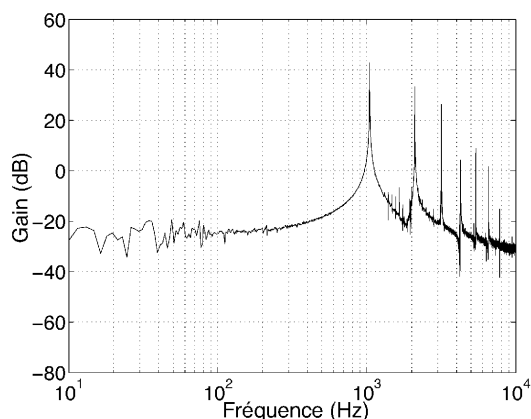
Pour la corde vibrante, le spectre de fréquences $\nu_n = n\nu_1$ est formé des harmoniques de ν_1 . Plus généralement, un son peut avoir un spectre de fréquences ν_n de valeurs arbitraires. Lorsque le spectre devient continu, la somme (4.81) doit être remplacé par une intégrale.

4.14.1 Cas d'une note émise par une corde vibrante

La **hauteur** de la note correspond à la fréquence ν_1 . Le **timbre** correspond à la composition en harmoniques (les valeurs relatives des $B(\nu_n)$). Les valeurs des phases ϕ_n n'ont aucun effet sur la sensation auditive.

La figure 4.7 représente, en fonction de la fréquence ν , le gain $G(\nu) = 10 \log \frac{B(\nu)^2}{B_0^2}$, où $B(\nu)$ est l'amplitude de la composante de fréquence ν (cf. équation (4.81)) et B_0 est une amplitude de référence. $G(\nu)$ est proportionnel à l'intensité sonore N (cf. équation (5.30), section 5.5.3). Le spectre est continu, mais seules des fréquences très voisines des fréquences propres ν_n ont une amplitude importante (l'échelle est logarithmique : un gain de 20 dB correspond à un facteur 10 en amplitude). On peut observer que les fréquences ν_n s'écartent de la série harmonique $n\nu_1$ ($\nu_1 = 1046$ Hz).

FIG. 4.7 – Spectre engendré par un do (1046 Hz) joué fortissimo (*ff*) sur un grand piano.



Source : F. Avanzini, B. Bank, G. Borin, G. De Poli, F. Fontana et D. Rocchesso, *Musical instrument modeling: the case of the piano*, Proc. Workshop on Current Research Directions in Computer Music (Barcelona, 2001)

<http://www.mit.bme.hu/~bank/publicat/mosa01pi.pdf>

4.14.2 Cas d'un son composé de deux fréquences pures

Si ces fréquences, ν_1 et ν_2 , sont très différentes, on entend deux notes distinctes. Si $|\nu_1 - \nu_2|$ vaut quelques Hz, on entend des battements d'une seule note (mais si on envoie le son de fréquence ν_1 dans une oreille et celui de fréquence ν_2 dans l'autre, on perçoit distinctement deux notes sans battements). Si $\nu_1 = 2\nu_0$ et $\nu_2 = 3\nu_0$, l'oreille peut percevoir la note de hauteur correspondant à la fréquence ν_0 .

4.14.3 Cas de deux notes

Le spectre comporte les harmoniques $n\nu_1$ et $n\nu'_1$ pour $n = 1, 2, \dots$ de deux fréquences ν_1 et ν'_1 . On appelle **intervalle** le rapport $i = \frac{\nu_1}{\nu'_1}$. L'octave correspond à $i = 2$, la quinte à $i = \frac{3}{2}$ et la quarte à $i = \frac{4}{3}$. Pour ces intervalles, certains harmoniques des deux notes ont la même fréquence : les notes forment un accord (sens musical).

4.14.4 La gamme tempérée

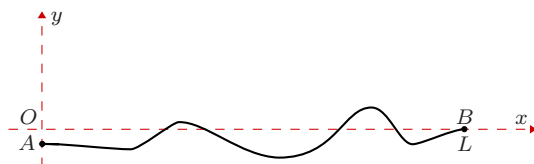
Note	n	$(\sqrt[12]{2})^n$	fréquence (Hz)
do	0	1	261,6
do ♯, ré ♭	1	1,059	277,2
ré	2	1,122	293,7
ré ♯, mi ♭	3	1,189	311,1
mi	4	1,260	329,6
fa	5	1,335	349,2
fa ♯, sol ♭	6	1,414	370,0
sol	7	1,498	392,0
sol ♯, la ♭	8	1,587	415,3
la	9	1,682	440
la ♯, si ♭	10	1,782	466,2
si	11	1,888	493,9
do	12	2	523,3

TAB. 4.1 – La gamme tempérée.

Dans la gamme tempérée, une octave est divisée en 12 intervalles égaux $i = \sqrt[12]{2}$. Les octaves sont numérotées $\dots, 2, 3, 4, \dots$. La table 4.1 donne les notes de l'octave do₃–do₄. L'intervalle i entre une note et do₃ est donné dans la colonne $(\sqrt[12]{2})^n$. La fréquence du la₃ est fixée à 440 Hz par convention. Dans la gamme tempérée, les accords autres que l'octave ne sont pas exacts : la quinte do–sol correspond à l'intervalle $(\sqrt[12]{2})^7 = 1,498$ au lieu de $\frac{3}{2}$. L'harmonique 3 de do est voisin de sol de l'octave supérieure.

4.15 Résonance et résonateur

FIG. 4.8 – Corde de Melde.



Dans l'expérience de la **corde de Melde**⁶ nous imposons à l'extrémité A de la corde un mouvement sinusoïdal de pulsation ω suivant l'axe Oy (cf. figure 4.8). L'ordonnée de A est

$$y(t) = a \sin(\omega t). \quad (4.82)$$

L'extrémité B de la corde est fixée en $x = L$. L'onde $s(x, t)$ qui s'établit dans la corde est solution de l'équation de d'Alembert

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0 \quad (4.83)$$

et vérifie les conditions aux limites

$$s(0, t) = y(t) \quad \forall t, \quad s(L, t) = 0 \quad \forall t. \quad (4.84)$$

La solution générale du système d'équations (4.83, 4.84) est la somme d'une solution particulière du système (4.83, 4.84) et de la solution générale du système homogène associé (4.42, 4.43) qui correspond à la corde fixée en $x = 0$ et $x = L$. La solution générale du système homogène est donnée par (4.56) ou (4.57). Reste à trouver une solution particulière du système (4.83, 4.84) que nous chercherons sous la forme d'une onde stationnaire de pulsation ω

$$s(x, t) = A \sin(\omega t) \sin(kx + \phi) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (4.85)$$

Cette onde vérifie (4.83). Les conditions aux limites (4.84) donnent

$$s(0, t) = a \sin(\omega t) = A \sin(\omega t) \sin \phi \quad (4.86)$$

et

$$s(L, t) = 0 = A \sin(\omega t) \sin(kL + \phi). \quad (4.87)$$

D'où une solution particulière $\phi = -kL$, $A = -\frac{a}{\sin(kL)}$, soit

$$s(x, t) = -\frac{a \sin(\omega t) \sin [k(x - L)]}{\sin(kL)}. \quad (4.88)$$

6. Franz Melde (1832-1901)

Pour une corde réelle, après un régime transitoire où se superposent les ondes libres (4.56) et l'onde forcée (4.88), seul le régime forcé (4.88) subsiste.

L'amplitude de vibration des ventres de l'onde stationnaire (4.88) est $\left| \frac{a}{\sin(kL)} \right|$. Cette amplitude est maximale (infinie) pour $kL = n\pi$ (n entier naturel), c'est-à-dire quand la fréquence d'excitation coïncide avec une fréquence propre de la corde (cf. équation (4.46)). C'est le phénomène de **résonance** et la corde forme un **résonateur**. Bien sûr, l'amplitude maximale de l'onde n'est pas infinie par suite de phénomènes négligés (non linéarités, amortissements) lorsqu'on écrit l'équation (4.83), mais il arrive parfois que le système soit détruit par le phénomène de résonance.

4.16 Réflexion et transmission à un changement de milieu

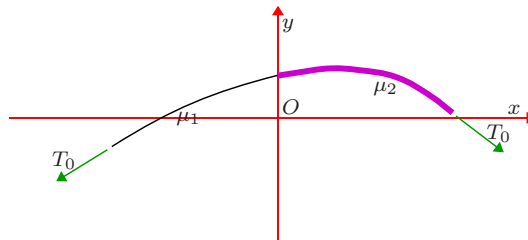


FIG. 4.9 – Changement de milieu en $x = 0$.

Considérons une corde infinie formée de deux moitiés de masses linéiques différentes μ_1 pour $-\infty < x < 0$ et μ_2 pour $0 < x < \infty$ (cf. figure 4.9). Au point $x = 0$ il existe un **changement de milieu**. Écrivons le déplacement $\vec{s}(x, t) = y(x, t)\vec{e}_y$ dans chaque milieu sous la forme

$$y(x, t) = \begin{cases} y_1(x, t) & \text{si } x \leq 0; \\ y_2(x, t) & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (4.89)$$

Recherchons les conditions aux limites en $x = 0$. Une première condition exprime que la corde est continue en $x = 0$:

$$y_1(0, t) = y_2(0, t). \quad (4.90)$$

Une deuxième condition est la continuité de la force \vec{F} (cf. équation (2.16)). On peut justifier cette condition à partir de la deuxième loi de Newton appliquée à un segment de corde MM' à cheval sur la discontinuité : la force $\Delta\vec{F}$ appliquée à ce segment de corde, donnée par (2.8), doit tendre vers 0 quand $\Delta x \rightarrow 0$ sans quoi le segment subirait une accélération infinie. La

continuité de la composante longitudinale F_x implique que la tension garde la même valeur T_0 sur les deux moitiés de la corde. La continuité de la composante transverse F_y donne

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial y_2}{\partial x}(0, t). \quad (4.91)$$

Nous savons que y_α ($\alpha = 1, 2$) est solution de l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x^2} - \frac{1}{c_\alpha^2} \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial t^2} = 0 \quad \text{où} \quad c_\alpha = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_\alpha}} \quad (4.92)$$

est la vitesse des ondes dans le milieu α . Comme l'équation d'onde est du deuxième ordre, on a besoin de deux conditions aux limites en $x = 0$ pour les fonctions y_1 et y_2 : ce sont les conditions (4.90) et (4.91) qui expriment que les graphes de y_1 et y_2 en fonction de x à un instant donné (cf. figure 4.9) sont continus et ont même tangente en $x = 0$ (il y a **raccordement**).

Le système d'équations (4.90–4.92) est linéaire et invariant par changement de l'origine du temps. La solution générale d'un tel système est la superposition d'ondes complexes sinusoidales $y(x, t) = e^{i\omega t} f(x)$ (admis). Nous allons chercher une de ces ondes $y(x, t) = e^{i\omega t} f(x)$. Supposons qu'une source sinusoidale de pulsation ω située sur l'axe négatif envoie une onde vers la discontinuité. Prenons cette onde (**onde incidente**) de la forme

$$\hat{s}_i(x, t) = \hat{A}_i e^{i(\omega t - k_1 x)} \quad -\infty < x \leq 0 \quad \text{avec} \quad k_1 = \frac{\omega}{c_1}. \quad (4.93)$$

Dans le milieu 2, il apparaît une onde progressive s'éloignant de la discontinuité (**onde transmise**) de la forme

$$\hat{s}_t(x, t) = \hat{A}_t e^{i(\omega t - k_2 x)} \quad 0 \leq x < \infty \quad \text{avec} \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2} \quad (4.94)$$

où on doit encore déterminer l'amplitude complexe \hat{A}_t . Si on pose $y_1 = \hat{s}_i$ et $y_2 = \hat{s}_t$, les conditions aux limites (4.90) et (4.91) donnent $\hat{A}_i = \hat{A}_t$ et $k_1 \hat{A}_i = k_2 \hat{A}_t$ qui ne peuvent être satisfaites que pour $\hat{A}_i = \hat{A}_t = 0$ (on a supposé $\mu_1 \neq \mu_2$, ce qui implique $k_1 \neq k_2$).

Il existe donc nécessairement une troisième onde qui est réfléchiée par la discontinuité. Nous écrivons cette **onde réfléchiée** sous la forme

$$\hat{s}_r(x, t) = \hat{A}_r e^{i(\omega t + k_1 x)} \quad -\infty < x \leq 0 \quad (4.95)$$

et nous posons

$$y(x, t) = \begin{cases} y_1(x, t) = \hat{s}_i(x, t) + \hat{s}_r(x, t) & \text{si } x \leq 0; \\ y_2(x, t) = \hat{s}_t(x, t) & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (4.96)$$

L'équation (4.92) est satisfaite et les conditions aux limites (4.90) et (4.91) nous donnent

$$\hat{A}_i + \hat{A}_r = \hat{A}_t \quad (4.97)$$

$$k_1 \hat{A}_i - k_1 \hat{A}_r = k_2 \hat{A}_t \quad (4.98)$$

qui suffisent pour déterminer \hat{A}_r et \hat{A}_t en fonction de l'amplitude \hat{A}_i de l'onde incidente. On obtient pour $r = \frac{\hat{A}_r}{\hat{A}_i}$ (**coefficient (complexe) de réflexion en amplitude**) et $t = \frac{\hat{A}_t}{\hat{A}_i}$ (**coefficient (complexe) de transmission en amplitude**):

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (4.99)$$

$$t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (4.100)$$

où nous avons aussi écrit la solution en fonction des impédances caractéristiques $Z_\alpha = \sqrt{T_0 \mu_\alpha} = \frac{T_0}{c_\alpha} = \frac{T_0 k_\alpha}{\omega}$ des deux moitiés ($\alpha = 1, 2$) de la corde (cf. section 2.2.6). Le fait que le coefficient de transmission t soit réel et positif indique que, en $x = 0$, l'onde transmise est en phase avec l'onde incidente. Si $\mu_1 < \mu_2$, le coefficient r est réel négatif et la réflexion se fait avec changement de signe (les ondes réfléchie et incidente sont en opposition de phase en $x = 0$) tandis que si $\mu_1 > \mu_2$, le coefficient r est réel positif et la réflexion se fait sans changement de signe.

La moyenne temporelle du courant d'énergie pour l'onde incidente (resp. réfléchie, transmise) est d'après (4.21) $\langle P_i \rangle = \frac{1}{2} Z_1 \omega^2 |\hat{A}_i|^2$ (resp. $\langle P_r \rangle = -\frac{1}{2} Z_1 \omega^2 |\hat{A}_r|^2$, $\langle P_t \rangle = \frac{1}{2} Z_2 \omega^2 |\hat{A}_t|^2$). Le signe négatif de $\langle P_r \rangle$ correspond à un courant d'énergie vers x décroissant, dans le sens de l'onde réfléchie. On définit le **coefficient de réflexion en puissance**

$$R = \left| \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} \right| = \frac{Z_1 \omega^2 |\hat{A}_r|^2}{Z_1 \omega^2 |\hat{A}_i|^2} = |r|^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad (4.101)$$

et le **coefficient de transmission en puissance**

$$T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{Z_2 \omega^2 |\hat{A}_t|^2}{Z_1 \omega^2 |\hat{A}_i|^2} = \frac{Z_2}{Z_1} |t|^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}. \quad (4.102)$$

Le fait que la puissance moyenne (de l'onde) incidente soit égale à la somme des valeurs absolues des puissances moyennes (des ondes) réfléchies et transmises s'exprime par la relation

$$\boxed{R + T = 1.} \quad (4.103)$$

4.17 Note historique

Les indications qui suivent sur l'histoire de la **corde vibrante** sont tirées de

J. Stillwell, *Mathematics and Its History* (Springer, 1989).

En 1625, Mersenne a découvert expérimentalement que la fréquence du mode fondamental de la corde vibrante était

$$\nu_1 \propto \frac{1}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\mathcal{A}}} \quad (4.104)$$

avec les mêmes notations que dans l'équation (4.48).

La première démonstration de la loi de Mersenne est due à Taylor⁷ dans un article datant de 1713 qui marque le début de la théorie moderne de la corde vibrante. Il découvre que la forme de la corde peut être donnée par

$$y = a \sin \frac{\pi x}{L}. \quad (4.105)$$

C'est en effet la forme du mode fondamental (cf. équation (4.47) avec $n = 1$ et $k_1 = \frac{\pi}{L}$).

En 1747, d'Alembert démontre l'équation d'onde (1.17). Il écrit ainsi la première équation différentielle aux dérivées partielles de l'histoire de la corde vibrante. De plus il obtient la forme générale (1.18) de ses solutions.

En 1753, Daniel Bernoulli⁸ affirme que la solution générale de l'équation de d'Alembert doit être une superposition de modes propres, ce qu'il considère évident, et doit être donnée par la série trigonométrique (4.57). Daniel Bernoulli ne donne aucune méthode pour calculer les a_n et b_n . Nous savons aujourd'hui que son intuition était bonne, mais les démonstrations mathématiques n'ont été obtenues qu'au XIX^e siècle.

Voici quelques indications sur les débuts de l'**analyse de Fourier** tirées de

T. W. Körner, *Fourier Analysis* (Cambridge U. P., 1988).

Fourier commença à s'intéresser à la propagation de la chaleur en 1804. En trois années remarquables, il trouva l'équation de la chaleur et développa de nouvelles méthodes (les séries de Fourier) pour la résoudre. Il soumit un mémoire de son travail à l'Académie des Sciences en 1807. Le mémoire fut examiné par une commission composée de Lagrange⁹, Laplace, Monge¹⁰ et Lacroix¹¹.

Au lieu de soulever l'enthousiasme que Fourier devait espérer, son mémoire fut violemment attaqué. Laplace et Lagrange n'acceptaient pas son

7. Brook Taylor (1685-1731)

8. Daniel Bernoulli (1700-1782)

9. Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

10. Gaspard Monge (1746-1818)

11. Sylvestre François Lacroix (1765-1843)

utilisation des séries de Fourier. En fait Laplace et Lagrange ne mettaient pas seulement en doute les démonstrations de Fourier, mais aussi l'utilité de ces séries comparées aux séries de puissances.

L'Académie des Sciences donna à Fourier une nouvelle possibilité de présenter son travail en 1811 en offrant un prix sur la théorie de la conduction de la chaleur. Fourier soumit de nouveau son travail avec quelques résultats supplémentaires. Fourier gagna le prix (il n'y avait qu'un autre concurrent), mais le rapport contenait toujours des critiques de Laplace et Lagrange. Ces travaux de Fourier ne furent publiés qu'en 1822. Fourier était membre de l'Académie depuis 1817 et sa théorie de la décomposition des fonctions périodiques en séries trigonométriques était plus largement acceptée.

5

Ondes acoustiques

Dans ce chapitre nous allons étudier les ondes sonores dans un fluide homogène isotrope (plus particulièrement dans l'air).

5.1 Propriétés élémentaires du son

Gaz à $T_0 = 273$ K	M g mol ⁻¹	c m s ⁻¹	ρ_0 kg m ⁻³	γ	
Hydrogène	H ₂	2	1270	0,0899	1,41
Hélium	He	4	970	0,1785	1,66
Azote	N ₂	28	337	1,251	1,40
Air		29	331	1,293	1,40
Air à $T_0 = 288$ K		29	341	1,225	1,40
Oxygène	O ₂	32	317	1,429	1,40
Gaz carbonique	CO ₂	44	258	1,977	1,30
Liquides à $T_0 = 293$ K					
Benzène	C ₆ H ₆		1318	879	
Eau pure	H ₂ O		1483	998	
Eau pure à $T_0 = 313$ K	H ₂ O		1528	992	
Eau de mer (salinité 0,035)			1522	1025	
Mercure	Hg		1451	13550	

TAB. 5.1 – Propriétés de quelques substances à $P_0 = 1$ atm. = $1,01325 \cdot 10^5$ Pa.

M : masse molaire ;
 c : vitesse du son ;
 ρ_0 : masse volumique ;
 $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$: rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant.

Considérons un gaz (l'air) homogène immobile de masse volumique ρ_0 et en équilibre à la pression P_0 et température T_0 constantes et uniformes. Un corps en mouvement vibratoire (réveil, instrument de musique, ...) communique son mouvement à l'air. La perturbation se propage dans l'air en formant une onde sonore.

Les sons ne se propagent pas dans le vide. Cela fut montré par Boyle¹ en 1660 dans une expérience où il enferma une petite horloge dans une cloche

1. Robert Boyle (1627-1691)

de verre où il fit un vide partiel.

La table 5.1 donne la vitesse du son dans divers fluides. On peut retenir que dans l'air le son parcourt environ 1 km en 3 s. La vitesse du son dans un gaz est bien interprétée par la formule théorique $c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$ (voir plus loin, équation (5.7)). Par contre il n'y a pas de formule théorique simple donnant c en fonction de P_0 , ρ_0 et T_0 pour les liquides.

Le principe de superposition (cf. section 1.5). est bien vérifié.

Dans l'air, la vitesse du son ne dépend pas de sa fréquence (la dispersion est négligeable). Les fréquences audibles vont de 20 Hz (grave) à 20 000 Hz (aigu) environ. Les chats et les chiens entendent les **ultrasons** jusqu'à 50 000 Hz. Les longueurs d'onde dans l'air $\lambda = \frac{c}{\nu}$ correspondant à la bande 20–20 000 Hz vont de 1,7 cm (pour la fréquence $\nu = 20\,000$ Hz) à 17 m (pour $\nu = 20$ Hz).

5.2 Équation de d'Alembert à trois dimensions

En présence d'onde sonore, nous écrivons le champ de pression

$$P(\vec{r}, t) = P_0 + p(\vec{r}, t) \quad (5.1)$$

où $p(\vec{r}, t)$ est la **surpression** (déjà introduite à la section 1.1). On peut la mesurer avec un microphone qui convertit la pression en signal électrique. Pour les sons qui nous entourent usuellement, même les plus intenses, la surpression mesurée est très petite comparée à la pression atmosphérique. Ainsi pour un son d'intensité 60 dB (cf. section 5.5.3 : c'est l'ordre de grandeur du niveau sonore d'une conversation) la surpression p , de l'ordre de 10^{-2} Pa est très petite devant $P_0 \approx 10^5$ Pa.

Le champ de vecteur **déplacement**

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \xi_x \vec{e}_x + \xi_y \vec{e}_y + \xi_z \vec{e}_z \quad (5.2)$$

décrit la déformation du milieu ($\vec{\xi}(\vec{r}, t) = 0$ pour le fluide au repos). En dérivant par rapport à t , on obtient le **champ de vitesse** :

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}(\vec{r}, t). \quad (5.3)$$

Dans le chapitre 6, il est montré que la surpression p satisfait à l'**équation d'onde de d'Alembert** à trois dimensions

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0} \quad (5.4)$$

où c est une constante dépendant du fluide. L'équation est souvent écrite sous forme abrégée,

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\square p = 0}. \quad (5.5)$$

L'opérateur Δ est le laplacien² et l'opérateur

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.6)$$

est le **d'Alembertien**.

5.3 La vitesse du son

On peut remarquer que $p = F(x - ct)$ est solution de (5.4). Cela justifie, comme pour les ondes à une dimension, que c est la **vitesse du son** (ou **célérité des ondes sonores**).

Pour un gaz parfait, la théorie (cf. chapitre 6) prédit que la vitesse du son est

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T_0}{m}}} \quad (5.7)$$

où

- P_0 : pression du gaz ;
- T_0 : température absolue du gaz ;
- ρ_0 : masse volumique du gaz ;
- $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$: rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant ;
- $M = N_A m$: masse molaire du gaz ;
- $N_A = 6,022\,137\,10^{23} \text{ mol}^{-1}$: nombre d'Avogadro³ ;
- m : masse moyenne d'une molécule ;
- $k_B = 1,380\,658\,10^{-23} \text{ J K}^{-1}$: constante de Boltzmann⁴ ;
- $R = k_B N_A = 8,314\,150 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$: constante molaire des gaz parfaits.

Pour l'air à la température $T_0 = 273 \text{ K}$ et à la pression d'une atmosphère ($P_0 = 1,013\,10^5 \text{ Pa}$), on a $\rho_0 = 1,293 \text{ kg m}^{-3}$ et $\gamma = 1,40$. Cette formule donne $c = 331 \text{ m s}^{-1}$ en très bon accord avec la valeur expérimentale.

2. Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749-1827)

3. Amedeo Avogadro (1776-1856)

4. Ludwig Boltzmann (1844-1906)

La vitesse quadratique moyenne des molécules d'un gaz parfait est donnée par

$$u_q = \sqrt{\frac{3k_B T_0}{m}} = \sqrt{\frac{3}{\gamma}} c. \quad (5.8)$$

Les deux vitesses c et u_q sont du même ordre de grandeur ($c = 0,68 u_q$ pour l'air).

5.4 Onde plane progressive et onde plane progressive harmonique (OPPH)

Les solutions $p = F\left(t \mp \frac{x}{c}\right)$ de l'équation de d'Alembert à 3 dimensions sont indépendantes de y et z et décrivent des ondes se propageant suivant Ox . Généralisons les à une direction quelconque de propagation, parallèle à un vecteur unitaire \vec{u} . L'**onde plane progressive**

$$p(\vec{r}, t) = F\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c}\right) \quad (5.9)$$

généralise $p = F\left(t \mp \frac{x}{c}\right)$ qui correspondent à $\vec{u} = \pm \vec{e}_x$.

L'onde tri-dimensionnelle (représentation complexe ou réelle)

$$\boxed{\hat{p}(\vec{r}, t) = \hat{A} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}} \quad \text{ou} \quad \boxed{p(\vec{r}, t) = A \cos[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0]} \quad (5.10)$$

est dite **onde plane progressive harmonique (OPPH)** (ou **onde plane progressive sinusoïdale**). En plus des grandeurs définies sections 4.1 et 4.2 on a introduit le **vecteur d'onde** $\vec{k} = k\vec{u}$ (mesuré en m^{-1} ou rad m^{-1}). Par définition, le signal $s(\vec{r}, t)$ (surpression p , déplacement ξ , vitesse \vec{v} , variation de masse volumique $\rho - \rho_0$ ou variation de température $T - T_0$ pour une onde acoustique) d'une onde sinusoïdale a une représentation complexe de la forme $\hat{s} = e^{i\omega t} S(\vec{r})$. La moyenne temporelle $\langle s(\vec{r}, t) \rangle$ du signal est nulle en tout point. Pour une onde sonore sinusoïdale $\langle p \rangle = 0$, $\langle P \rangle = P_0$, $\langle \xi \rangle = 0$, $\langle \vec{v} \rangle = 0$, $\langle T \rangle = T_0$ et $\langle \rho \rangle = \rho_0$.

Déterminons le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ correspondant à l'onde (5.10). Dans le chapitre 6, il est montré que

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p} \quad (5.11)$$

(cf. équation (6.26) ou (6.27)). Cette équation s'écrit, en utilisant que $\hat{v} = e^{i\omega t} \hat{V}(\vec{r})$, $\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = i\omega \hat{v}$ et $\vec{\nabla} \hat{p} = -i\vec{k} \hat{p}$,

$$i\omega \hat{v} = \frac{i\vec{k} \hat{p}}{\rho_0}. \quad (5.12)$$

Il vient, en prenant la partie réelle,

$$\vec{v} = \frac{\vec{k}p}{\rho_0\omega} = \frac{\vec{u}kp}{\rho_0\omega} = \frac{p\vec{u}}{\rho_0c} = \frac{A\vec{u}}{\rho_0c} \cos \left[\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0 \right], \quad (5.13)$$

soit

$$\boxed{\vec{v} = \frac{p\vec{u}}{Z}} \quad (5.14)$$

où

$$\boxed{Z = \rho_0c} \quad (5.15)$$

est l'**impédance acoustique caractéristique du fluide**. Le déplacement s'obtient en utilisant l'équation (5.3). Elle donne en représentation complexe

$$i\omega\hat{\xi} = \hat{v}, \quad \hat{\xi} = \frac{-i\hat{p}\vec{u}}{\rho_0c\omega}$$

et en représentation réelle

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \frac{A\vec{u}}{\rho_0c\omega} \cos \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0 - \frac{\pi}{2} \right). \quad (5.16)$$

Ces résultats montrent que dans une *onde acoustique plane progressive sinusoïdale* :

- la vitesse \vec{v} et le déplacement $\vec{\xi}$ des particules du fluide sont dans la direction du vecteur d'onde \vec{k} : les ondes acoustiques sont **longitudinales** ;
- la vitesse \vec{v} est en phase avec la surpression et le déplacement $\vec{\xi}$ est en quadrature retard par rapport à la surpression.

L'onde sonore dans le tuyau de la figure 1.2 est telle que le signal (le déplacement, la surpression, ...) est le même, à un instant donné, en tout point des plans $x = \text{Cte}$. Ces plans sont appelés **plans d'ondes** et les droites perpendiculaires aux plans d'ondes sont les **rayons** de l'onde.

Soit $Z'OZ$ l'axe parallèle à \vec{u} passant par O (cf. figure 5.1). Pour les ondes (5.9) et (5.10) une surface d'onde est le lieu des points M tels que $\vec{r} \cdot \vec{u} = h = \text{Cte}$ où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Ce lieu est le plan perpendiculaire à \vec{u} passant par le point H de l'axe $Z'OZ$ tel que $\overrightarrow{OH} = h$. Le signal, à un instant t donné, prend la même valeur en tout point d'un tel plan. L'axe $Z'OZ$ est un des rayons de l'onde. Examinons pour l'onde (5.10) le mouvement d'un plan d'onde Π_a sur lequel le signal garde la même valeur a au cours du temps. De façon analogue à (4.23), on trouve que l'abscisse h de H est

$$h = \frac{\omega}{k}t + h_0 \quad (5.17)$$

où h_0 est l'abscisse à l'instant $t = 0$. La vitesse de déplacement du plan d'onde Π_a , mesurée sur l'axe $Z'OZ$, est la **vitesse de phase** de l'onde

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c \quad (5.18)$$

qui généralise (4.24).

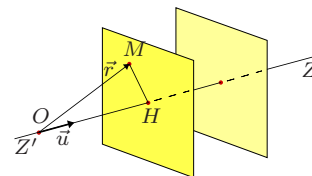


FIG. 5.1 – Plans d'ondes.

5.5 Considérations énergétiques

5.5.1 Conservation de l'énergie acoustique

La conservation de l'énergie acoustique, dans une partie du fluide où il n'y a ni production ni absorption d'ondes sonores, s'exprime par une équation de continuité de la forme

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{I} = 0.} \quad (5.19)$$

La fonction \mathcal{H} est la densité d'énergie acoustique et \vec{I} est le **vecteur intensité acoustique**. L'expression théorique de \vec{I} est

$$\boxed{\vec{I}(\vec{r}, t) = p\vec{v}} \quad (\text{intensité acoustique, unité: W m}^{-2}) \quad (5.20)$$

(cf. sections 6.6.1 et 6.6.2). L'intégrale

$$E_V(t) = \iiint_V \mathcal{H}(\vec{r}, t) dV \quad (5.21)$$

représente l'énergie acoustique contenue dans le volume V limité par la surface S (cf. figure 5.2). Le vecteur unitaire \vec{n} normal à S est orienté vers l'extérieur du volume V . On suppose qu'il n'y a ni production ni absorption d'ondes sonores dans le volume V . La dérivée de E_V par rapport au temps s'écrit en utilisant (5.19) et le théorème d'Ostrogradski

$$\frac{dE_V}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dV = - \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{I} dV = - \iint_S \vec{I} \cdot \vec{n} dS = -\Phi_S. \quad (5.22)$$

La variation dE_V entre les instants t et $t+dt$ de l'énergie acoustique contenue dans le volume V est donc égale à $-\Phi_S dt$ où Φ_S est le flux sortant de S du vecteur intensité acoustique \vec{I} . Le flux de \vec{I} à travers une surface s'interprète donc comme la puissance acoustique qui traverse cette surface. L'intensité acoustique \vec{I} est donc la **densité du courant d'énergie acoustique**.

5.5.2 Le vecteur intensité acoustique moyenne

Considérons une source sonore E créant une onde sinusoïdale. Nous noterons

$$\vec{I}_m(\vec{r}) = \langle \vec{I}(\vec{r}, t) \rangle \quad (5.23)$$

l'**intensité acoustique moyenne** et désignons par P_m la puissance acoustique moyenne émise par la source E . L'énergie acoustique $E_V(t)$, comme toutes les grandeurs de l'onde, est périodique de période T . On obtient en prenant la moyenne temporelle de (5.22)

$$\iint_S \vec{I}_m \cdot \vec{n} dS = - \left\langle \frac{dE_V}{dt} \right\rangle = - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE_V}{dt} dt = - \frac{E_V(T) - E_V(0)}{T} = 0. \quad (5.24)$$

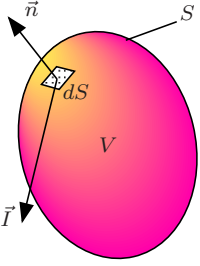


FIG. 5.2 – V et S .

Le flux sortant du volume V du vecteur \vec{I}_m est nul (rappel : V ne contient pas la source E).

Soit maintenant une surface Σ de forme arbitraire entourant complètement la source E (cf. figure 5.3). Le flux de \vec{I}_m sortant de la surface Σ donne la puissance acoustique moyenne qui traverse Σ . La conservation de l'énergie acoustique exige que cette puissance soit égale à la puissance moyenne émise par la source E . On a donc

$$P_m = \iint_{\Sigma} \vec{I}_m \cdot \vec{n} dS. \quad (5.25)$$

Exercice : On suppose que la source E est placée en O et que l'émission est isotrope. Déterminer \vec{I}_m en fonction de P_m .

Réponse :

$$\vec{I}_m = \frac{P_m}{4\pi r^2} \vec{e}_r. \quad (5.26)$$

Indications : utiliser les symétries du système pour montrer que $\vec{I}_m = f(r)\vec{e}_r$; appliquer (5.25) à une sphère centrée en O .

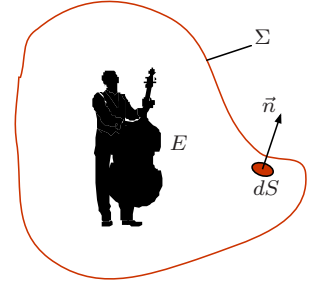


FIG. 5.3 – Surface entourant la source.

5.5.3 Décibels

L'unité d'intensité acoustique est le W m^{-2} . Pour un son de fréquence voisine de 1000 Hz les intensités I_m des sons audibles varient du **seuil d'audibilité** $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ au **seuil de douleur** $I_1 = 1 \text{ W m}^{-2}$. L'oreille humaine suit la loi psycho-physique de Weber⁵-Fechner⁶ selon laquelle *la sensation croît comme le logarithme de l'excitation*. Cette loi n'a qu'un caractère indicatif : les sensations ne sont pas mesurables. Pour tenir compte de cette loi et surtout pour représenter commodément les intensités qui varient sur la grande échelle de valeurs de I_0 à I_1 on définit une échelle logarithmique d'intensité. On pose

$$N = 10 \log \frac{I_m}{I_0} \quad \text{avec} \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2} \quad (5.27)$$

où \log est logarithme décimal, I_m est l'intensité acoustique moyenne exprimée en W m^{-2} . L'unité de N est le **décibel** (dB), nommé d'après l'inventeur du téléphone⁷. L'intensité de référence I_0 a été choisie de telle sorte qu'un son d'intensité $N = 0$ dB, c'est-à-dire d'intensité $I_m = I_0$, corresponde au seuil d'audibilité d'un son de fréquence 1000 Hz. L'intensité acoustique de l'onde plane progressive harmonique (5.10) s'écrit d'après (5.14, 5.15)

$$\vec{I} = p\vec{v} = \frac{p^2 \vec{u}}{\rho_0 c} = \frac{A^2}{\rho_0 c} \cos^2 [\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0] \vec{u} \quad (5.28)$$

5. Ernst-Heinrich Weber (1795-1878)

6. Gustav Theodor Fechner (1801-1887)

7. Alexander Graham Bell (1847-1922)

où \vec{u} est le vecteur unitaire dans la direction de \vec{k} . L'intensité acoustique moyenne est égale à

$$\vec{I}_m = \langle \vec{I} \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c} \vec{u} = \frac{A^2}{2\rho_0 c} \vec{u} = \frac{A^2}{2Z} \vec{u} \quad (5.29)$$

qui est proportionnel au carré de l'amplitude de la surpression. Comme $\frac{I_m}{I_0} = \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho_0 c I_0} = \frac{\langle p^2 \rangle}{p_0^2}$, avec $p_0 = \sqrt{\rho_0 c I_0}$, l'intensité en décibels de l'onde plane progressive est aussi donnée, pour l'air dans les conditions usuelles, par

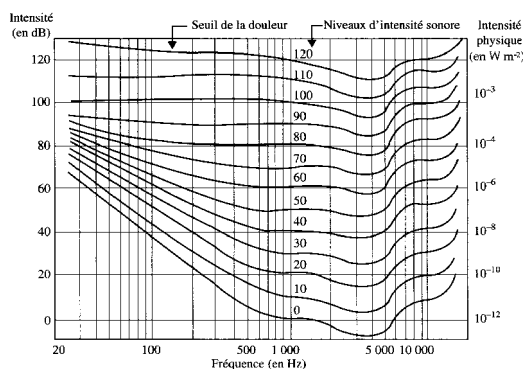
$$N = 10 \log \frac{\langle p^2 \rangle}{p_0^2} \quad \text{avec} \quad p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.} \quad (5.30)$$

TAB. 5.2 – Ordres de grandeurs des niveaux sonores (à 1 m de la source sonore)

situation	intensité (dB)
seuil d'audition	0
orchestre symphonique (<i>ppp</i>)	30
conversation	60–70
orchestre symphonique (<i>fff</i>)	90
klaxon, seuil de douleur	120
avion à réaction	150

Une onde plane progressive harmonique sonore de 0 dB et de fréquence 1000 Hz correspond à une surpression d'amplitude $A = \sqrt{2}p_0 = 2,8 \cdot 10^{-5}$ Pa. Son déplacement (5.16), d'amplitude $\frac{A}{\rho_0 c \omega} = 10^{-11}$ m, est seulement une fraction de la taille d'une molécule.

FIG. 5.4 – Niveau d'intensité sonore physiologique. Source de la figure : P. Bailhache, *Une histoire de l'acoustique musicale*, Éditions du CNRS, 2001.



5.5.4 Niveau d'intensité sonore physiologique

La sensibilité de l'audition dépend de la fréquence. On définit un niveau d'intensité sonore physiologique exprimé en *phones* (cf. figure 5.4). Un son de

L phones est supposé produire la même sensation d'intensité quelque soit sa fréquence. Un son de 0 phone correspond au seuil d'audibilité. Son intensité physique (W m^{-2} ou dB) est minimum (-6 dB) pour une fréquence de 3500 Hz et augmente dans les graves et les aigus (50 dB à 60 Hz).

5.6 Ondes sphériques

Un caillou jeté dans l'eau engendre une onde de forme circulaire à la surface de l'eau. Une source sonore localisée en O crée de même une **onde sphérique**.

Les coordonnées sphériques r, θ, ϕ sont définies par (cf. figure 5.5)

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (5.31)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (5.32)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (5.33)$$

Le laplacien de la fonction $f(r, \theta, \phi, t)$ est

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \quad (5.34)$$

Envisageons une source idéale isotrope qui crée une onde douée de symétrie sphérique. Le champ de pression ne dépend que de la distance r . Le laplacien d'une fonction $f(r, t)$ indépendante de θ et ϕ se simplifie en

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf). \quad (5.35)$$

Nous écrivons l'équation d'onde de d'Alembert (5.5) pour la surpression $p(r, t)$:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp) = 0. \quad (5.36)$$

Nous cherchons la solution sous la forme

$$p(r, t) = \frac{\Psi(r, t)}{r}. \quad (5.37)$$

La substitution dans (5.36) donne l'équation suivante

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = 0. \quad (5.38)$$

Nous reconnaissons l'équation d'onde de d'Alembert à une dimension (1.17) dont on sait que la solution s'écrit sous la forme (cf. équation (1.18)):

$$\Psi(r, t) = \psi(r - ct) + \chi(r + ct). \quad (5.39)$$

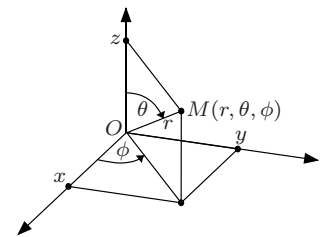


FIG. 5.5 – Coordonnées sphériques.

La surpression est

$$p(r, t) = \frac{\psi(r - ct)}{r} + \frac{\chi(r + ct)}{r}. \quad (5.40)$$

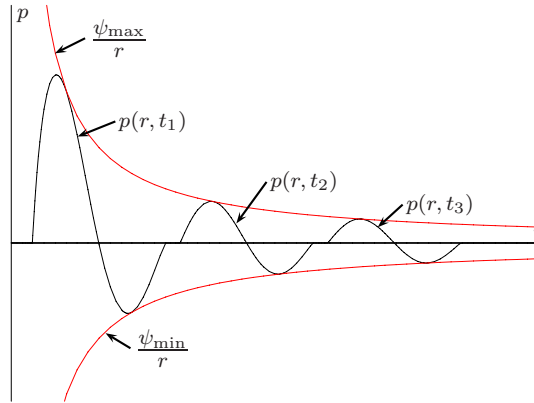
Le premier terme représente une **onde divergente** se propageant dans toutes les directions en s'éloignant de l'origine. Le deuxième terme représente une **onde convergente** qui s'approche de l'origine.

Supposons que seule l'onde divergente soit présente :

$$p(r, t) = \frac{\psi(r - ct)}{r}. \quad (5.41)$$

Notons ψ_{\max} (resp. ψ_{\min}) le maximum (resp. minimum) de $\psi(u)$. Le signal est compris entre les courbes ψ_{\max}/r et ψ_{\min}/r . La figure 5.6 représente le signal à 3 instants $t_1 < t_2 < t_3$. Le signal s'éloigne du centre à la vitesse de propagation c , mais, contrairement à une onde plane, son amplitude diminue.

FIG. 5.6 – Onde divergente.



Pour $\psi(u) = A \cos(-ku + \phi_0)$ on a une **onde sphérique harmonique** de pulsation $\omega = kc$:

$$p(r, t) = \frac{A \cos(\omega t - kr + \phi_0)}{r} \quad \text{ou} \quad \hat{p}(r, t) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr + \phi_0)}. \quad (5.42)$$

À un instant t donné, le signal (5.42) prend la même valeur en tout point de la sphère $r = Cte$. Sur cette sphère, l'argument (la phase) du cosinus dans (5.42) prend également la même valeur. Les sphères $r = Cte$ sont appelés **surfaces d'ondes** ou **surfaces équiphasées** et les demi-droites issues de O sont les rayons de l'onde. Une sphère équiphasée donnée ($\omega t - kr + \phi_0 = Cte$) voit son rayon augmenter à la vitesse c au cours du temps.

Dans un volume V de dimensions petites devant sa distance au centre r_0 , les surfaces d'onde sont approximativement des plans et l'onde est approximativement l'onde plane

$$p(\vec{r}, t) = a_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0) \quad (5.43)$$

où $\vec{k} = k\vec{u}$, $\vec{u} = \frac{\vec{r}_0}{r_0}$ étant un vecteur unitaire pointant de O vers le volume V (cf. figure 5.7). Pour obtenir (5.43) on a fait, dans V , les approximations

$$\frac{A}{r} \approx \frac{A}{r_0} = a_0 \quad \text{et} \quad r \approx \vec{u} \cdot \vec{r}. \quad (5.44)$$

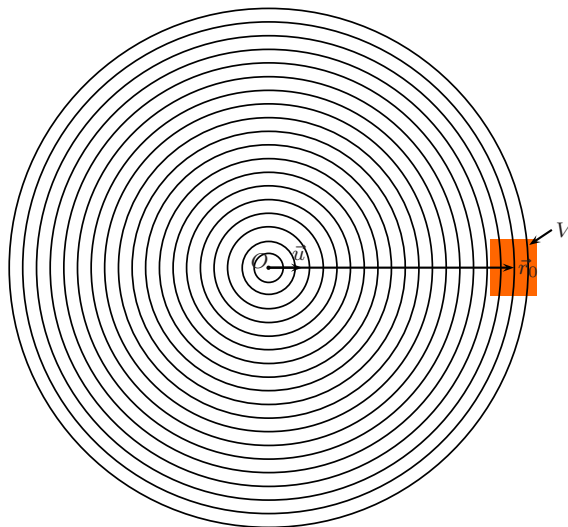


FIG. 5.7 – Onde sphérique harmonique.

En un point donné, le signal est une vibration sinusoïdale d'amplitude

$$a(r) = \frac{A}{r} \quad (5.45)$$

inversement proportionnelle à la distance r . On peut expliquer cette loi de décroissance par des considérations énergétiques. Assimilant l'onde dans le volume V à l'onde plane (5.43), le vecteur intensité acoustique moyenne de l'onde sphérique à la distance r_0 est d'après (5.29) $\vec{I}_m = \frac{a_0^2 \vec{u}}{2Z}$. Le flux de l'intensité acoustique moyenne qui sort de la sphère centrée en O de rayon r_0 est donc $\Phi(r_0) = 4\pi r_0^2 I_m = \frac{2\pi r_0^2 a_0^2}{Z}$. D'après (5.25) $\Phi(r_0) = P_m$ ne dépend pas du rayon r_0 . On a donc $r_0^2 a_0^2 = \text{Cte}$ et l'amplitude a_0 doit être proportionnelle à r_0^{-1} . On retrouve ainsi la loi de décroissance (5.45).

5.7 Surfaces d'ondes

La propagation d'une onde plane ou sphérique est visualisée par le mouvement des surfaces d'ondes (plans ou sphères). Nous cherchons une visualisation analogue pour une onde à trois dimensions quelconque. Considérons d'abord une onde décrite par un signal scalaire $s(\vec{r}, t)$.

On appelle **surfaces d'ondes (définition 1)** à un instant donné t les surfaces où le signal prend la même valeur. On peut utiliser cette définition pour étudier les ondes sonores (en prenant la surpression comme signal). Malheureusement, la définition n'a plus de sens quand le signal est de nature vectorielle : la condition *vectorielle* $\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{Cte}$ correspond à trois équations scalaires et ne définit pas une surface en général.

Nous introduisons donc une autre définition pour certaines ondes sinusoïdales. L'importance de cette autre définition vient de ce qu'elle s'applique aux ondes électromagnétiques décrivant la lumière (cf. optique ondulatoire, section 1.2.2).

La représentation complexe

$$\hat{s}(\vec{r}, t) = A(\vec{r})e^{i(\omega t + \phi(\vec{r}))} \quad (5.46)$$

décrit une onde sinusoïdale de pulsation ω .

L'onde plane (5.10) est de cette forme avec $A(\vec{r}) = A = \text{Cte}$ et $\phi(\vec{r}) = \phi_0 - \vec{k} \cdot \vec{r}$. L'onde sphérique (5.42) est également de cette forme avec $A(\vec{r}) = \frac{A}{r}$ et $\phi(\vec{r}) = \phi_0 - kr$. Dans ces deux cas la fonction $A(\vec{r})$ varie peu sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde λ (si on se place suffisamment loin du centre de l'onde sphérique) alors que la fonction $\phi(\vec{r})$ varie de façon importante sur la distance λ .

Nous considérons des situations semblables à ces deux cas où le signal est de la forme (5.46), avec une **amplitude** $A(\vec{r})$ qui peut être une fonction complexe mais qui varie très peu sur la distance λ et avec une **phase** $\phi(\vec{r})$ qui varie beaucoup sur la distance λ .

Les **surfaces d'ondes (définition 2)** sont les **surfaces équiphasés** $\phi(\vec{r}) = \text{Cte}$. Pour l'onde plane (5.10), les surfaces équiphasés sont bien les plans d'ondes introduits précédemment.

L'amplitude $A(\vec{r})$ peut varier sur une surface d'onde. On dit que l'onde est **homogène** lorsque $A(\vec{r})$ prend la même valeur sur chaque surface d'onde et **inhomogène** dans le cas contraire.

L'onde (5.10) est ainsi une onde plane homogène et l'onde (5.42) est une onde sphérique homogène. Par contre l'onde de la figure 1.2 est une **onde plane inhomogène** (l'onde est nulle en dehors du tuyau).

5.8 Effet Doppler

Lorsque la source I d'une onde sonore périodique et le récepteur M sont immobiles dans le milieu où l'onde se propage, la fréquence reçue ν est égale à la fréquence émise ν_0 . Si la source et/ou le récepteur se déplacent, il n'en est plus de même : c'est l'**effet Doppler**⁸.

8. Christian Andreas Doppler (1803-1853)

5.8.1 Déplacement de la source

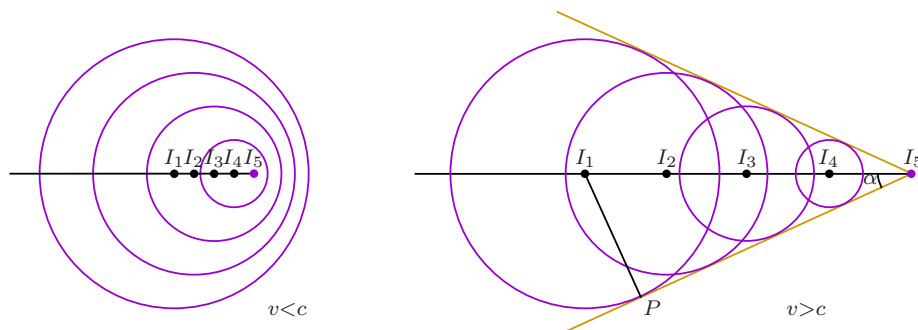


FIG. 5.8 – Source en mouvement.

Considérons le cas où la source sonore se déplace à la vitesse \vec{v} constante. Soit I_n la position de la source à l'instant $t_n = n\tau$ (τ étant une durée arbitraire). La figure 5.8 représente les points I_1, I_2, \dots, I_5 ainsi que l'aspect de l'onde à l'instant $t = t_5$. L'onde émise à l'instant t_n ($n = 1, 2, \dots, 5$) est localisée sur la sphère S_n de centre I_n et de rayon $c(t_5 - t_n)$.

Cas $v > c$

Lorsque la vitesse de la source est supersonique ($v > c$), l'onde reste à l'intérieur d'un cône de demi-angle au sommet α . Il y a accumulation d'énergie acoustique (onde de choc) sur ce cône qui est aussi l'enveloppe des sphères S_n . On a

$$\sin \alpha = \frac{I_1 P}{I_1 I_5} = \frac{c(t_5 - t_1)}{v(t_5 - t_1)} = \frac{c}{v}. \quad (5.47)$$

Cette onde est analogue au sillage d'un bateau lorsque sa vitesse v est plus grande que la vitesse de propagation c des ondes de surface.

Cas $v < c$

Soit M un récepteur immobile dans le milieu. Supposons que la source émette avec la période T_0 des impulsions très brèves. L'impulsion émise au temps t_1 en I_1 arrive en M à l'instant $t'_1 = t_1 + \frac{r_1}{c}$ et l'impulsion émise au temps $t_2 = t_1 + T_0$ en I_2 arrive en M à l'instant $t'_2 = t_1 + T_0 + \frac{r_2}{c}$ (cf. figure 5.9). L'observateur en M mesure la période

$$T_M = t'_2 - t'_1 = T_0 + \frac{r_2 - r_1}{c}. \quad (5.48)$$

Soit \vec{u} un vecteur unitaire dirigé de la source vers le récepteur, θ l'angle que fait ce vecteur avec la vitesse \vec{v} de la source et $v_r = \vec{v} \cdot \vec{u} = v \cos \theta$ la vitesse radiale d'approche de la source vers le récepteur. Si les distances r_1

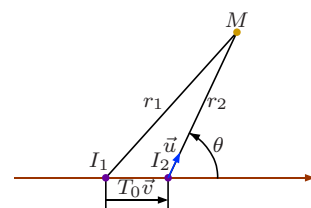


FIG. 5.9 – Source en mouvement.

et r_2 sont grandes devant vT_0 , on peut faire l'approximation (cf. annexe B page 79)

$$r_1 - r_2 \approx \overrightarrow{I_1 I_2} \cdot \vec{u} = T_0 \vec{v} \cdot \vec{u} = vT_0 \cos \theta. \quad (5.49)$$

On a alors

$$T_M = T_0 - \frac{vT_0 \cos \theta}{c} = T_0 \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right) = T_0 \left(1 - \frac{v_r}{c}\right) \quad (5.50)$$

et la fréquence reçue est

$$\boxed{\nu_M = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v_r}{c}}.} \quad (5.51)$$

Cette formule de l'**effet Doppler** s'applique à toute onde périodique (pas uniquement impulsionnelle). La fréquence perçue par un observateur qui voit s'approcher la source sonore est plus élevée ($v_r > 0$) que s'il voit la source s'éloigner ($v_r < 0$).

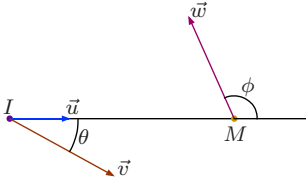


FIG. 5.10 – Vitesses de la source et du récepteur.

5.8.2 Déplacement du récepteur

Soit \vec{w} la vitesse supposée constante du récepteur, ϕ l'angle entre \vec{u} et \vec{w} et $w_r = \vec{w} \cdot \vec{u} = w \cos \phi$ la vitesse radiale du récepteur (cf. figure 5.10). L'onde dans un petit voisinage du récepteur peut être assimilée à l'onde plane (d'après le résultat (5.43) avec $\vec{k} = 2\pi\nu_M\vec{u}/c$)

$$p(\vec{r}, t) = a_0 \cos \left[2\pi\nu_M \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c} \right) + \phi_0 \right]. \quad (5.52)$$

La position $\vec{R}(t)$ du récepteur est $\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + t\vec{w}$ (mouvement rectiligne uniforme). Le récepteur reçoit le signal

$$\begin{aligned} s(t) = p(\vec{R}(t), t) &= a_0 \cos \left[2\pi\nu_M \left(t - \frac{\vec{u} \cdot (\vec{R}_0 + t\vec{w})}{c} \right) + \phi_0 \right] = \\ &= a_0 \cos \left[2\pi\nu_M \left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{c} \right) t + \phi_0 - 2\pi\nu_M \frac{\vec{u} \cdot \vec{R}_0}{c} \right] \end{aligned} \quad (5.53)$$

de fréquence apparente

$$\nu = \nu_M \left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{c} \right) = \nu_M \left(1 - \frac{w_r}{c} \right). \quad (5.54)$$

soit

$$\boxed{\nu = \nu_0 \frac{1 - \frac{w \cos \phi}{c}}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} = \nu_0 \frac{1 - \frac{w_r}{c}}{1 - \frac{v_r}{c}}} \quad (\text{effet Doppler}). \quad (5.55)$$

Lorsque les vitesses v et w sont très petites par rapport à c , cette équation se simplifie en

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_r - w_r}{c} \right) \quad (5.56)$$

qui ne dépend que de la composante radiale (suivant \vec{u}) de la vitesse relative $\vec{v} - \vec{w}$ de la source par rapport au récepteur.

5.8.3 Deuxième méthode

Le résultat de la section précédente peut aussi être obtenu par la méthode qui nous a donné (5.51) dans le cas $v < c$ du récepteur immobile. L'impulsion émise au temps t_1 en I_1 arrive en M_1 à l'instant $t'_1 = t_1 + \frac{r_1}{c}$ et l'impulsion émise au temps $t_2 = t_1 + T_0$ en I_2 arrive en M_2 , qui est la nouvelle position du récepteur, à l'instant $t'_2 = t_1 + T_0 + \frac{r_2}{c}$ (cf. figure 5.11). Le récepteur mesure la période

$$T = t'_2 - t'_1 = T_0 + \frac{r_2 - r_1}{c}. \quad (5.57)$$

En supposant que les distances r_1 et r_2 sont grandes devant vT_0 et wT , on peut faire l'approximation (cf. annexe B page 79)

$$r_2 - r_1 \approx (T\vec{w} - T_0\vec{v}) \cdot \vec{u} = Tw_r - T_0v_r. \quad (5.58)$$

En portant cette expression dans l'équation (5.57), on a

$$T = T_0 + T\frac{w_r}{c} - T_0\frac{v_r}{c} \quad \text{soit} \quad T = \frac{1 - v_r/c}{1 - w_r/c} T_0 \quad (5.59)$$

et la fréquence reçue est

$$\nu = \frac{1 - w_r/c}{1 - v_r/c} \nu_0 \quad (5.60)$$

qui est identique à l'équation (5.55).

5.8.4 Applications de l'effet Doppler

- Le décalage vers le rouge de la lumière provenant des galaxies lointaines est un effet Doppler (ondes lumineuses) lié à l'expansion de l'univers.
- Dans une lampe spectrale les molécules ont des vitesses différentes par suite de l'agitation thermique. Même si toutes les molécules émettent de la lumière à la même fréquence, l'effet Doppler produit un étalement spectral : on observe un élargissement des raies.
- L'effet Doppler est utilisé pour mesurer la vitesse des hématies dans les vaisseaux sanguins (ondes ultrasonores).
- L'effet Doppler est utilisé pour mesurer la vitesse des automobiles par la police (ondes radar ou lasers infra-rouge).

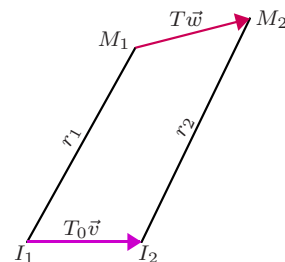


FIG. 5.11 – Source et récepteur en mouvement.

6

Ondes acoustiques : compléments

Dans ce chapitre nous établissons l'équation d'onde des ondes sonores dans un fluide homogène isotrope.

6.1 Champs décrivant un fluide traversé par une onde sonore

À l'échelle moléculaire, la propagation du son a lieu par collisions entre molécules. L'échelle caractéristique de ces collisions est le **libre parcours moyen** ℓ des molécules du fluide, c'est-à-dire la distance parcourue en moyenne par une molécule entre deux collisions. Pour les gaz dans les conditions standard de température et de pression ($P = 1,013 \cdot 10^5$ Pa, $T = 273$ K), ℓ est de l'ordre de 10^{-7} m. Pour un liquide, ℓ est de l'ordre de la distance moyenne qui sépare les molécules soit quelques 10^{-10} m.

La longueur d'onde λ d'une onde sonore sinusoïdale est très grande par rapport à ℓ . Cela permet d'utiliser le concept de milieu continu. Les grandeurs en un point du milieu correspondent à des moyennes sur un petit volume (nous utilisons un cube de côté d_1) tel que

$$\lambda \gg d_1 \gg \ell. \quad (6.1)$$

Un tel volume peut être considéré comme un fluide pratiquement homogène ($\lambda \gg d_1$) et, comme il contient un très grand nombre de particules ($d_1 \gg \ell$), c'est un système macroscopique en équilibre thermodynamique caractérisé par sa masse volumique, sa pression et sa température.

Pour définir la masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$ en un point $\vec{r}(x, y, z)$ du fluide et à l'instant t , on considère un cube de fluide de côté d , de volume $\delta V = d^3$, centré en \vec{r} et de masse δm . La grandeur $\frac{\delta m}{\delta V}$ est représentée, figure 6.1, en fonction de d . Elle fluctue aléatoirement pour d de l'ordre de ℓ , lorsque il y

a peu de particules dans le cube. Elle peut être considérée comme constante lorsque $\lambda \gg d \gg \ell$. Le volume δV contient alors un fluide pratiquement homogène avec un très grand nombre de particules. Pour d de l'ordre de λ , le volume n'est plus homogène et $\frac{\delta m}{\delta V}$ dépend de nouveau de d .

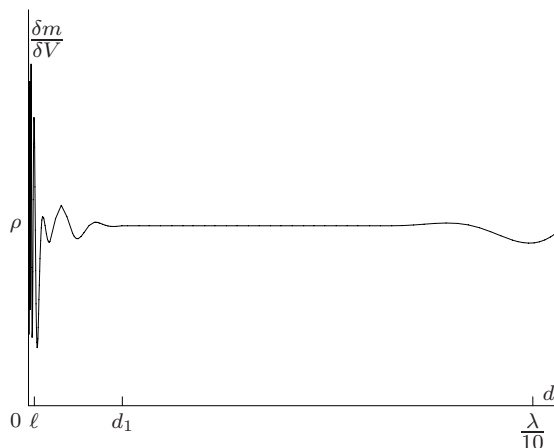


FIG. 6.1 – Variation de $\frac{\delta m}{\delta V}$ en fonction de d .

Les champs de masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$, de pression $P(\vec{r}, t)$ et de température $T(\vec{r}, t)$ du fluide sont définis comme les grandeurs thermodynamiques d'un cube de fluide de côté d_1 centré en \vec{r} à l'instant t . La courbe de la figure 6.1 présente un palier qui justifie, pour le champ de masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$, que la valeur ainsi définie ne dépend pas de d_1 tant que la condition (6.1) reste satisfaite. La définition de $\rho(\vec{r}, t)$ ne dépend pas non plus de l'orientation du cube (système isotrope), ni même du fait qu'on a utilisé un cube (on peut utiliser une sphère ou d'autres formes). Pour l'étude des ondes sonores, le milieu est équivalent à un milieu continu.

En présence d'onde sonore, la surpression $p(\vec{r}, t)$ est liée à la pression P par l'équation (5.1) :

$$P(\vec{r}, t) = P_0 + p(\vec{r}, t). \quad (6.2)$$

Nous avons déjà noté que, même pour les sons les plus intenses, la surpression mesurée est très petite comparée à la pression atmosphérique P_0 . Nous supposons donc toujours que

$$\frac{p}{P_0} \sim \epsilon, \quad \text{où } \epsilon \ll 1, \quad (6.3)$$

excluant par là les ondes de choc (explosions) où la surpression est du même ordre que la pression atmosphérique ($p \sim P_0$). La notation $x \sim a$ employée ci-dessus veut dire que $|x|$ est de l'ordre ou inférieur à $|a|$. Ainsi $p = 2\pi\epsilon P_0 \cos(\omega t - kx)$ satisfait à (6.3). Nous nous autoriserons à négliger toute quantité de l'ordre de ϵ devant une quantité de l'ordre de 1.

Pour une onde de longueur d'onde λ et de fréquence ν , on verra plus

loin, équation (6.16), que l'ordre de grandeur du déplacement (5.2) vérifie

$$\frac{\xi}{\lambda} \sim \epsilon. \quad (6.4)$$

Par hypothèse $\hat{\xi}$ varie en $e^{i2\pi\nu t}$. On a donc pour le champ de vitesse (5.3) $v \sim \nu\xi$ et, en utilisant $c = \nu\lambda$,

$$\frac{v}{c} \sim \epsilon. \quad (6.5)$$

Pour un son de fréquence 3000 Hz ($\lambda \sim 0,1$ m) et d'intensité 60 dB ($\epsilon \sim 10^{-7}$), $\xi \sim 10^{-8}$ m et $v \sim 10^{-4}$ m s $^{-1}$.

La description du fluide utilisée ici, s'appelle la **représentation lagrangienne**. En mécanique des fluides, on utilise habituellement la **représentation eulérienne**¹ basée sur le champ de vitesse $\vec{V}(\vec{r}, t)$ qui donne la vitesse moyenne des molécules qui se trouvent autour de \vec{r} à l'instant t . En fait $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{V}(\vec{r} + \vec{\xi}(\vec{r}, t), t)$.

Pour une onde de longueur d'onde λ et de fréquence ν , considérons un champ $f(\vec{r}, t)$ associé à l'onde. La fonction $f(\vec{r}, t)$ varie de façon significative sur la distance λ . L'ordre de grandeur de son gradient est

$$|\vec{\nabla}f(\vec{r}, t)| \sim \frac{f}{\lambda}. \quad (6.6)$$

Par exemple si $f(\vec{r}, t) = F \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos(\omega t)$, son gradient

$$\vec{\nabla}f = -\frac{2\pi F}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

est bien de l'ordre de $\frac{f}{\lambda}$. Dans le développement en série

$$f(\vec{r} + \vec{\xi}(\vec{r}, t), t) = \underbrace{f(\vec{r}, t)}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\vec{\xi}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}f(\vec{r}, t)}_{\mathbf{B}} + \dots, \quad (6.7)$$

l'ordre de grandeur du terme **B** est $\frac{\xi f}{\lambda} \sim \epsilon f$ d'après (6.4) et (6.6). Nous négligeons tous les termes sauf le terme **A** :

$$f(\vec{r} + \vec{\xi}(\vec{r}, t), t) \approx f(\vec{r}, t). \quad (6.8)$$

En particulier, les champs de vitesses des deux approches de la mécanique des fluides, lagrangienne et eulérienne, sont identiques pour les ondes sonores considérées : on a $\vec{v}(\vec{r}, t) \approx \vec{V}(\vec{r}, t)$.

1. Leonhard Euler (1707-1783)

6.2 Transformation adiabatique

L'état du fluide est complètement déterminé par les champs $P(\vec{r}, t)$, $T(\vec{r}, t)$, $\rho(\vec{r}, t)$ et $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$. Nous allons montrer que l'état du fluide est en fait déterminé par les deux champs $p(\vec{r}, t)$ et $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$, les champs $T(\vec{r}, t)$ et $\rho(\vec{r}, t)$ étant reliées à la surpression par des relations thermodynamiques.

Soit \mathcal{G} une gouttelette de fluide (ou une petite bulle pour un gaz) qui, quand le fluide est au repos, occupe le volume V_0 de petites dimensions par rapport à λ et centré en \vec{r} . Lors du passage de l'onde sonore la gouttelette \mathcal{G} se déforme (compressions et dilatations) et son centre se déplace en $\vec{r} + \vec{\xi}(\vec{r}, t)$. Elle reste homogène et dans un état d'équilibre thermodynamique décrit par les variables d'état V , T_g et P_g (volume, température et pression de la gouttelette). La température T_g est la valeur du champ de température en $\vec{r} + \vec{\xi}(\vec{r}, t)$ au centre de la gouttelette, mais d'après (6.8), on a $T_g = T(\vec{r}, t)$ et de même $P_g = P(\vec{r}, t)$. Nous écrirons simplement T (resp. P) au lieu de T_g (resp. P_g), sans préciser les arguments \vec{r} et t . La conservation de la masse m_g de la gouttelette donne $m_g = \rho V = \rho_0 V_0$. La donnée de V équivaut donc à la donnée de ρ .

La gouttelette \mathcal{G} subit une **transformation adiabatique**. Ses compressions et dilatations sont si rapides (au moins 20 Hz pour les ondes audibles) qu'il n'y a pas d'échange de chaleur avec le reste du fluide.

Les variables d'état V , T et P de la gouttelette \mathcal{G} sont liées par deux équations : l'équation d'état du fluide et l'équation qui caractérise la transformation adiabatique. L'état thermodynamique est alors décrit par une seule des variables V , T ou P . Il en résulte que les champs T et ρ s'expriment en fonction du seul champ P (ou du champ de surpression p).

Comme la variation de pression $P - P_0 = p$ de la gouttelette est très petite par rapport à P_0 ($|p| \ll P_0$) d'après (6.3), la variation de volume $\Delta V = V - V_0$ de la gouttelette est linéaire en p . Nous écrirons

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V_0} = -\chi_s p} \quad (6.9)$$

où la constante χ_s est le **coefficient de compressibilité adiabatique**. Ce coefficient dépend de P_0 , T_0 . Noter le signe négatif dans (6.9) qui correspond au fait que le volume diminue quand la pression augmente ($\chi_s > 0$).

Pour un gaz parfait, l'équation d'état est l'équation de Boyle-Mariotte²

$$\boxed{\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} = \frac{k_B T}{m}} \quad (6.10)$$

Les notations sont définies dans la section 5.3. L'équation qui caractérise la transformation adiabatique peut s'écrire

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma. \quad (6.11)$$

2. Edmé Mariotte (vers 1620-1684)

En la différentiant logarithmiquement on obtient $\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$. En posant $P \rightarrow P_0$, $V \rightarrow V_0$, $dP \rightarrow p$ et $dV \rightarrow \Delta V$, il vient $\frac{p}{P_0} + \gamma \frac{\Delta V}{V_0} = 0$, d'où $\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{p}{\gamma P_0}$. Pour un gaz parfait on a donc

$$\boxed{\chi_s = \frac{1}{\gamma P_0}}. \quad (6.12)$$

Exercice : Exprimer la variation de masse volumique $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ en fonction de p .

Réponse : $\Delta\rho = \chi_s \rho_0 p$.

6.3 Mécanisme de la propagation du son

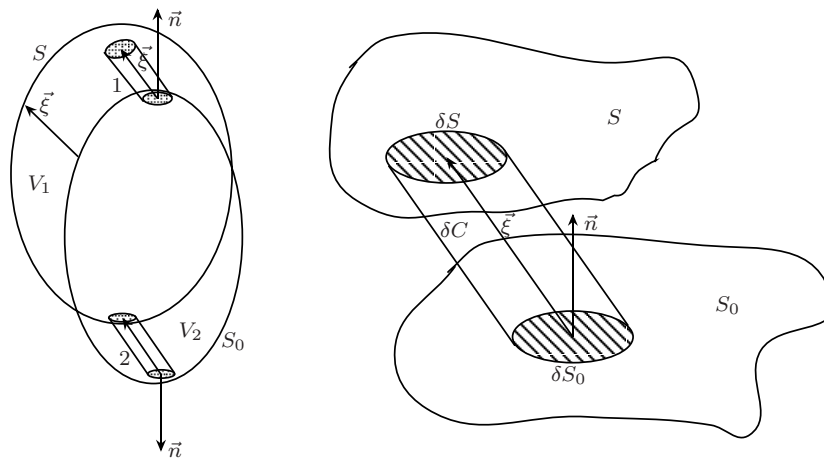
Nous savons complètement déterminer l'état du fluide connaissant les deux champs $p(\vec{r}, t)$ et $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$. Mais ces deux champs ne sont pas indépendants. Si l'un varie en un point il fait varier l'autre qui à son tour fait varier le premier aux points voisins. C'est le mécanisme de la propagation du son. Nous le décomposons en deux étapes qui se répètent indéfiniment :

1. Les mouvements du fluide en un point font varier la pression en ce point.
2. La variation de pression crée des forces qui mettent en mouvement les points voisins.

En reprenant la gouttelette \mathcal{G} nous allons traduire chacune de ces étapes en équations entre les champs du fluide.

Étape 1

FIG. 6.2 – Calcul de la variation de volume ΔV .



Nous allons calculer la variation de volume $\Delta V = V - V_0$ de la gouttelette en termes du déplacement $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ (cf. figure 6.2). Nous désignons par S_0 le bord du volume V_0 initial et par S le bord du volume V à l'instant t . Soit V_1 la partie de V à l'extérieur de V_0 et V_2 la partie de V_0 à l'extérieur de V . La variation de volume est $\Delta V = V_1 - V_2$.

Considérons un élément différentiel δS_0 de la surface S_0 . L'élément différentiel δS_0 se déplace en δS en balayant un volume δC . Si le déplacement $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ est suffisamment petit, δC est un cylindre de volume algébrique $\delta V = \vec{n} \cdot \vec{\xi}(\vec{r}, t) \delta S_0$, où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à S_0 orienté vers l'extérieur du volume V_0 . Le volume δV est positif lorsque il se trouve dans V_1 comme en 1 sur la figure et négatif lorsqu'il se trouve dans V_2 comme en 2. La variation de volume ΔV est donc la somme de tous les volumes algébriques δV :

$$\Delta V = \iint_{S_0} \vec{n} \cdot \vec{\xi} dS = \iiint_{V_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} dV \quad (6.13)$$

où on utilise le théorème d'Ostrogradski pour écrire la dernière égalité. Cette équation est en fait valable pour une goutte de fluide de taille quelconque, mais le déplacement $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ doit être infiniment petit (sinon le volume δC n'est pas cylindrique). Pour la gouttelette \mathcal{G} le volume V_0 est très petit par rapport à λ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}$ est uniforme dans le volume d'intégration V_0 , à des termes d'ordres en ϵ plus élevés près. La dernière intégrale vaut donc $V_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}$ et

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}. \quad (6.14)$$

Éliminant $\frac{\Delta V}{V_0}$ entre les équations (6.9) et (6.14) il vient :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = -\chi_s p.} \quad (6.15)$$

Cette équation, qui correspond à l'étape 1 du mécanisme de propagation du son, nous apprend que ce sont les mouvements du fluides tels que la divergence de $\vec{\xi}$ ne soit pas nulle (compression ou dilatation) qui font varier la pression (cf. les exemples 1 et 2 ci-après).

Les équations (6.14) et (6.15) donnent en ordre de grandeur $\frac{\Delta V}{V_0} \sim \frac{\xi}{\lambda} \sim \chi_s p \sim \chi_s P_0 \epsilon$. Pour un gaz parfait $\chi_s P_0 = \frac{1}{\gamma} < 1$ et pour un liquide $\chi_s P_0 \ll 1$. On a donc

$$\frac{\Delta V}{V_0} \sim \frac{\xi}{\lambda} \sim \epsilon \quad (6.16)$$

ce qui justifie l'ordre de grandeur (6.4).

Exemple 1. Supposons que dans un voisinage de l'origine le champ de

déplacement s'écrit

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{r} = \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon x \\ \epsilon y \\ \epsilon z \end{pmatrix} \quad (1 \gg \epsilon > 0). \quad (6.17)$$

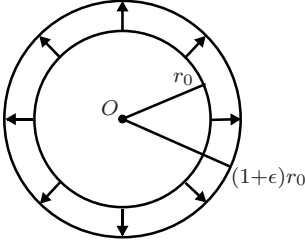


FIG. 6.3 – $\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{r}$.

Dans ce voisinage de l'origine le fluide subit une dilatation (figure 6.3) et la divergence $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}$ vaut

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} = 3\epsilon. \quad (6.18)$$

Si la gouttelette au repos est la boule de rayon r_0 centrée en O et de volume $V_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3$, cette dilatation la transforme en boule de rayon $(1 + \epsilon)r_0$ de même centre et de volume $V = \frac{4}{3}\pi(1 + \epsilon)^3 r_0^3$. Un calcul direct de

$$\Delta V = V - V_0 = [(1 + \epsilon)^3 - 1] V_0 \approx 3\epsilon V_0 \quad (6.19)$$

permet de vérifier la formule (6.14) dans ce cas particulier.

Exemple 2. Le champ de déplacement

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{e}_z \wedge \vec{r} = \epsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon y \\ \epsilon x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

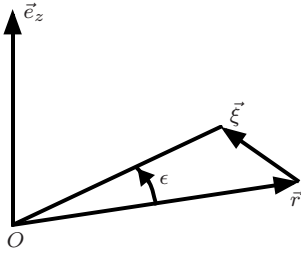


FIG. 6.4 – $\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{e}_z \wedge \vec{r}$.

correspond à une rotation d'angle $\epsilon \ll 1$ autour de Oz (figure 6.4). Sa divergence est

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} = 0. \quad (6.21)$$

La formule (6.14) est également vérifiée dans ce cas particulier, puisque le volume de la gouttelette n'est pas modifié dans cette rotation.

Étape 2

Le fluide à l'extérieur du volume V exerce des forces sur la gouttelette \mathcal{G} qui se transmettent à travers sa surface S (cf. figure 6.5). La force $\vec{\delta f}$ agissant sur l'élément de surface δS est la force de pression

$$\vec{\delta f} = -P(\vec{r}, t) \delta S \vec{n}. \quad (6.22)$$

La force de pression \vec{F} agissant sur la gouttelette \mathcal{G} se calcule alors par

$$\vec{F} = \iint_S -P dS \vec{n} = \iiint_V -\vec{\nabla} P dV. \quad (6.23)$$

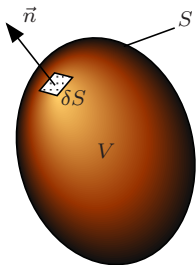


FIG. 6.5 – Forces de pression agissant sur la gouttelette \mathcal{G} .

La dernière égalité peut se démontrer comme suit. Soit \vec{e} un vecteur arbitraire. D'après le théorème d'Ostrogradski et $\vec{\nabla} \cdot (P\vec{e}) = \vec{e} \cdot \vec{\nabla} P$

$$\vec{e} \cdot \vec{F} = \iint_S -P\vec{e} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V -\vec{\nabla} \cdot (P\vec{e}) dV = \vec{e} \cdot \left[\iiint_V -\vec{\nabla} P dV \right]. \quad (6.24)$$

Le vecteur \vec{e} étant arbitraire, on obtient l'égalité recherchée. Le volume V étant très petit par rapport à λ , on peut considérer $\vec{\nabla} P$ comme uniforme dans le volume d'intégration V et égal à sa valeur $\vec{\nabla} P(\vec{r} + \vec{\xi}(\vec{r}, t), t)$ au centre de V . On posera $\vec{\nabla} P(\vec{r} + \vec{\xi}(\vec{r}, t), t) \approx \vec{\nabla} P(\vec{r}, t)$ en utilisant l'approximation (6.8). L'équation (6.23) donne alors avec $\vec{\nabla} P_0 = 0$

$$\vec{F} = -V \vec{\nabla} P(\vec{r}, t) = -V \vec{\nabla} p(\vec{r}, t). \quad (6.25)$$

Nous écrivons maintenant l'équation fondamentale de la dynamique pour la gouttelette \mathcal{G} de masse $m_g = \rho V = \rho_0 V_0$. Nous ne tenons compte que de la force de pression \vec{F} , en négligeant le poids du fluide et les forces de viscosité. On a

$$\rho_0 V_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F} = -V \vec{\nabla} p = -V_0 \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0} \right) \vec{\nabla} p$$

D'après (6.16), $\frac{\Delta V}{V_0} \sim \epsilon$. Nous avons donc en négligeant des termes d'ordre supérieur en ϵ :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p.} \quad (6.26)$$

Cette équation correspond à l'étape 2 du mécanisme de propagation du son : un gradient de pression met le fluide en mouvement. Son membre de gauche est l'accélération d'une masse unité du fluide et son membre de droite la force agissant sur cette masse unité.³

6.4 Équation de d'Alembert à trois dimensions

Récrivons les équations (6.26) et (6.15) en fonction de $\vec{v} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}$ (on dérive (6.15) par rapport à t):

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p \quad (6.27)$$

$$\chi_s \frac{\partial p}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v}. \quad (6.28)$$

3. En mécanique des fluides, l'équation (6.26) correspond à l'**approximation acoustique** de l'équation d'Euler.

Éliminons la vitesse \vec{v} entre ces équations. Pour cela, on dérive (6.28) par rapport à t :

$$\chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

On y porte l'expression de $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ donnée par (6.27) :

$$\chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p = \frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p.$$

Posant

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}} \quad (6.29)$$

nous obtenons l'équation d'onde de d'Alembert à trois dimensions

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (6.30)$$

6.5 La vitesse du son

Nous avons déjà justifié, section 5.3, que c est la vitesse du son. En utilisant le coefficient de compressibilité adiabatique (6.12) et l'équation d'état (6.10) on obtient pour la vitesse du son d'un gaz parfait

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T_0}{m}}. \quad (6.31)$$

Note historique

Newton a obtenu, en 1689 une expression de la vitesse du son dans l'air en supposant que la température de l'air restait constante. Il a utilisé $PV = P_0 V_0$ au lieu de $PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma$ (cf. section 6.2), ce qui lui donnait la formule (6.31) avec $\gamma = 1$. Pour l'air, il obtenait une valeur 15% plus petite que la valeur exacte. Le désaccord avec l'expérience est resté mystérieux jusqu'à ce que Laplace découvre, vers 1807, qu'il fallait utiliser l'hypothèse d'adiabaticité.

6.6 Considérations énergétiques

6.6.1 Le vecteur intensité acoustique

Considérons un cylindre de section S , d'axe Ox dans lequel coulisse un piston (cf. figure 6.6). Le piston est initialement placé en $x = 0$, la partie $x > 0$ du cylindre étant occupée par un gaz et la partie $x < 0$ étant vide.

Une onde sonore plane est émise dans le gaz par les vibrations du piston. L'onde sonore est décrite par le déplacement $\xi(x, t) = \xi(x, t)\vec{e}_x$, la vitesse $\vec{v}(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = v(x, t)\vec{e}_x$ et la surpression $p(x, t)$ qui ne dépendent que de x et t dans le cylindre. Nous supposons que pendant les instants de t_1 à t_2 un moteur impose au piston un déplacement $X(t)$ tel que $-X_m \leq X(t) \leq 0$, avec X_m très petit ($X_m \ll \lambda$ pour une onde de longueur d'onde λ). Le piston retrouve sa position initiale au temps t_2 :

$$X(t_2) = X(t_1) = 0. \quad (6.32)$$

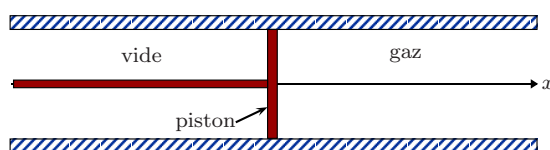


FIG. 6.6 – Émission sonore d'un piston.

La couche de gaz en contact avec le cylindre a le même mouvement que le cylindre. On a donc

$$\xi(0, t) = X(t), \quad v(0, t) = \frac{dX}{dt}(t). \quad (6.33)$$

La pression du gaz en contact avec le piston est (on utilise $|X(t)| \ll \lambda$)

$$P = P_0 + p(X(t), t) \approx P_0 + p(0, t). \quad (6.34)$$

Le piston exerce la force $\vec{F} = SP\vec{e}_x$ sur le gaz et développe la puissance

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = S[P_0 + p(0, t)]v(0, t). \quad (6.35)$$

Entre les instants t_1 et t_2 le piston effectue le travail

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt &= \int_{t_1}^{t_2} SP_0 \underbrace{v(0, t) dt}_{dX} + \int_{t_1}^{t_2} Sp(0, t)v(0, t) dt \\ &= SP_0 \underbrace{[X(t_2) - X(t_1)]}_0 + \int_{t_1}^{t_2} Sp(0, t)v(0, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} Sp(0, t)v(0, t) dt. \end{aligned} \quad (6.36)$$

La quantité $Sp(0, t)v(0, t) dt$ s'interprète comme l'énergie acoustique produite entre les temps t et $t + dt$. La puissance acoustique $Sp(0, t)v(0, t)$ correspondante s'obtient en calculant le flux du vecteur

$$\boxed{\vec{I}(\vec{r}, t) = p\vec{v}} \quad (\text{intensité acoustique, unité: W m}^{-2}) \quad (6.37)$$

à travers la section droite du cylindre en $x = 0$:

$$\iint_S \vec{I} \cdot \vec{e}_x dS = \iint_S p\vec{v} \cdot \vec{e}_x dS = Sp(0, t)v(0, t). \quad (6.38)$$

6.6.2 Conservation de l'énergie acoustique

On obtient une équation de continuité de la façon suivante. Formons le produit scalaire de (6.27) et \vec{v} :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_0 v^2 \right) = \rho_0 \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p. \quad (6.39)$$

Multiplions (6.28) par p :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \chi_s p^2 \right) = \chi_s p \frac{\partial p}{\partial t} = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{v}. \quad (6.40)$$

Ajoutons (6.39) et (6.40) en utilisant l'identité

$$\operatorname{div}(f \vec{A}) = f \operatorname{div}(\vec{A}) + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \quad (6.41)$$

où $f(\vec{r})$ est un champ scalaire et $\vec{A}(\vec{r})$ un champ vectoriel. On obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \frac{1}{2} \chi_s p^2 \right) = -\vec{\nabla} \cdot (p \vec{v}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{I}. \quad (6.42)$$

Il apparaît la **densité d'énergie acoustique** (unité : J m^{-3})

$$\boxed{\mathcal{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \frac{1}{2} \chi_s p^2.} \quad (6.43)$$

Le terme $\frac{1}{2} \rho_0 v^2 \approx \frac{1}{2} \rho v^2$, moitié du produit de la masse volumique et du carré de la vitesse, est la **densité d'énergie cinétique**. Le terme $\frac{1}{2} \chi_s p^2$ est la **densité d'énergie potentielle acoustique** (admis). On a obtenu l'équation de continuité, valable dans une partie du fluide où il n'y a ni production ni absorption d'ondes sonores,

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{I} = 0} \quad (6.44)$$

qui correspond à la loi de **conservation de l'énergie acoustique** (cf. section 5.5.1).

Annexe A

Module et argument d'une somme

Calculons la somme $Ae^{i\phi} = A_1e^{i\phi_1} + A_2e^{i\phi_2}$ (cf. figure A.1). Pour les parties réelles et imaginaires on a

$$x + iy = A_1e^{i\phi_1} + A_2e^{i\phi_2} \quad (\text{A.1})$$

$$x = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2 \quad (\text{A.2})$$

$$y = A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2. \quad (\text{A.3})$$

Pour le module¹ A et l'argument ϕ on a

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} \quad (\text{A.4})$$

$$\phi = \text{Arctg} \left(\frac{y}{x} \right) = \text{Arctg} \left(\frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2} \right) \pmod{\pi} \quad (\text{A.5})$$

En général, on doit déterminer ϕ à 2π près. La fonction Arctg donne un angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On a, modulo 2π ,

$$\phi = \begin{cases} \text{Arctg}(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \text{Arctg}(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0 \\ \text{indéfini} & \text{si } x = y = 0. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

1. Voici une façon d'obtenir ce module. C'est aussi le module de $z = Ae^{i\phi} e^{-i\phi_2} = A_1e^{i(\phi_1-\phi_2)} + A_2$. On a donc

$$A^2 = z z^* = A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2 \left[e^{i(\phi_1-\phi_2)} + e^{-i(\phi_1-\phi_2)} \right]$$

d'où l'expression (A.4).

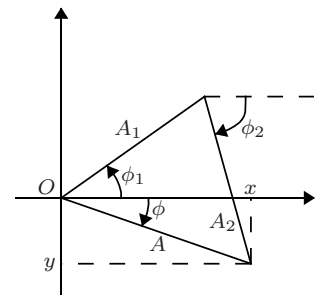


FIG. A.1 - $Ae^{i\phi}$.

Annexe B

Petite différence de deux longueurs

Soient r_1 et r_2 les longueurs des vecteurs $\overrightarrow{O_1M_1}$ et $\overrightarrow{O_2M_2}$ respectivement (cf. figure B.1). On suppose que les déplacements $\overrightarrow{O_1O_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont de l'ordre de ϵr_1 (ou ϵr_2) avec $\epsilon \ll 1$. On se propose de calculer $r_2 - r_1$ au 1^{er} ordre en ϵ .

Pour cela, posons $\vec{r} = \overrightarrow{O_1M_1}$ et $\vec{dr} = \overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{O_1O_2}$. On a $\overrightarrow{O_2M_2} = \vec{r} + \vec{dr}$ et, au 1^{er} ordre en ϵ , $dr = r_2 - r_1 = \vec{\nabla}r \cdot \vec{dr}$. Le gradient¹ $\vec{\nabla}r$ est le vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{O_1M_1}}{r_1}$. La différence des longueurs est donc

$$\boxed{r_2 - r_1 = \vec{u} \cdot (\overrightarrow{M_1M_2} - \overrightarrow{O_1O_2})}. \quad (\text{B.1})$$

La figure B.2 représente le cas particulier où les points M_1 et M_2 sont confondus en M . On a alors

$$\boxed{r_2 - r_1 = -\vec{u} \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = -\overrightarrow{O_1H}} \quad (\text{B.2})$$

où H est la projection orthogonale de O_2 sur O_1M . La différence des longueurs est donnée par la longueur de la projection orthogonale de $\overrightarrow{O_2O_1}$ sur \vec{u} , ce qui se voit géométriquement, les directions O_1M et O_2M étant presque parallèles.

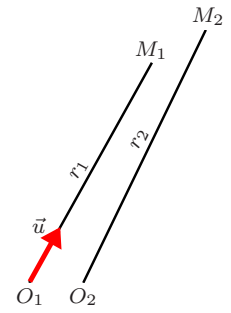


FIG. B.1 – Calcul de $r_2 - r_1$.

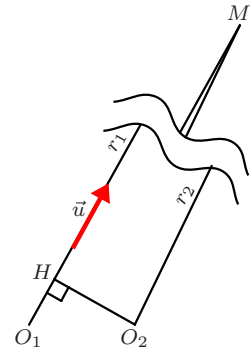


FIG. B.2 – Cas $M_1 = M_2 = M$.

1. Voici une façon d'obtenir ce gradient. Calculons la différentielle de $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$. On obtient

$$2r dr = 2\vec{r} \cdot \vec{dr} \quad \text{d'où} \quad dr = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{dr} = \vec{u} \cdot \vec{dr}$$

On en déduit le gradient en comparant à $dr = \vec{\nabla}r \cdot \vec{dr}$.

Annexe C

Index des principaux symboles

\sim	du même ordre que 67
$\hat{}$	représentation complexe 27
$\langle \rangle$	moyenne temporelle 28
$\vec{\nabla}$	(opérateur) nabla 24
Δ	laplacien en coordonnées cartésiennes 53, laplacien en coordonnées sphériques 59
\square	d'Alembertien 53
\mathcal{A}	section de la corde 14
A	amplitude 25
\hat{A}	amplitude complexe 27
c	vitesse de propagation (célérité de l'onde) 7, 15, vitesse du son 51
C_p	chaleur spécifique à pression constante 51
C_v	chaleur spécifique à volume constant 51
e	charge électrique élémentaire ($e = 1,602\,177\,10^{-19}$ C) 21
E	énergie mécanique 17
E_c	énergie cinétique 16
E_p	énergie potentielle 17
\mathcal{H}	densité (linéique) d'énergie mécanique 17, densité (volumique) d'énergie acoustique 76
\vec{j}	densité de courant (vecteur courant volumique) 22
i	intervalle 43
$\vec{I}(\vec{r}, t)$	intensité acoustique 56
I_0	intensité acoustique de référence ($I_0 = 10^{-12}$ W m ⁻²) 57
$\vec{I}_m(\vec{r})$	intensité acoustique moyenne 56
k	module du vecteur d'onde (nombre d'ondes angulaire) 25

\vec{k}	vecteur d'onde 54
k_B	constante de Boltzmann ($k_B = 1,380\,658\,10^{-23}$ J K ⁻¹) 53
\mathcal{K}	densité (linéique) d'énergie cinétique 16
ℓ	libre parcours moyen des molécules 66
m	masse d'une molécule 53
M	masse molaire 51, 53
N	intensité acoustique en décibels 57
N_A	nombre d'Avogadro ($N_A = 6,022\,137\,10^{23}$ mol ⁻¹) 53
$p(\vec{r}, t)$	surpression 52
p_0	surpression de référence ($p_0 = 2\,10^{-5}$ Pa) 58
P	puissance instantanée (courant d'énergie) 16, pression 69
\vec{P}	vecteur courant d'énergie 16
$P(\vec{r}, t)$	champ de pression 52
P_0	pression d'équilibre 52
P_m	puissance acoustique moyenne 57
r	coefficient de réflexion en amplitude 47
R	coefficient de réflexion en puissance 47, constante molaire des gaz parfaits ($R = 8,314\,150$ J mol ⁻¹ K ⁻¹) 53
$\vec{s}(x, t)$	signal 6, 25
$\hat{s}(x, t)$	représentation complexe du signal s 27
t	coefficient de transmission en amplitude 47
T	période (temporelle) 26, coefficient de transmission en puissance 47, température 69
$T(x, t)$	tension 14
$T(\vec{r}, t)$	champ de température 66
T_0	tension 15, température d'équilibre 51
u_q	vitesse quadratique moyenne 54
\mathcal{U}	densité (linéique) d'énergie potentielle 17
$\vec{v}(\vec{r}, t)$	champ de vitesse 52
v_g	vitesse de groupe 32
v_ϕ	vitesse de phase 30, 55
Z	impédance 19, 55
\mathbb{Z}	ensemble des entiers relatifs $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
\mathbb{Z}^-	ensemble des entiers strictement négatifs $\dots, -3, -2, -1$
\mathbb{Z}^+	ensemble des entiers strictement positifs $1, 2, 3, \dots$
\mathbb{Z}^*	ensemble des entiers non négatifs $0, 1, 2, 3, \dots$
γ	rapport C_p/C_v des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant 51, 69
δ_{mn}	symbole de Kronecker 38
Δ	laplacien en coordonnées cartésiennes 53, laplacien en coordonnées sphériques 59
λ	longueur d'onde 26

μ	masse linéique de la corde (masse par unité de longueur) 14
ν	fréquence 26, [effet Doppler équation (5.55)] 64
$\vec{\xi}(\vec{r}, t)$	déplacement 52
ρ	masse volumique 14, 69, densité de charge électrique 21
$\rho(\vec{r}, t)$	masse volumique 66
ρ_0	masse volumique d'équilibre 51
σ	nombre d'ondes 26
χ_s	coefficient de compressibilité adiabatique 69
ω	pulsation (fréquence angulaire) 25

Alphabet grec pour la physique

alpha	α	iota	ι	rô, rho	ρ, ϱ
bêta	β	kappa	κ	sigma	$\Sigma \sigma, \varsigma$
gamma	$\Gamma \gamma$	lambda	$\Lambda \lambda$	tau	τ
delta	$\Delta \delta$	mu	μ	upsilon	Υv
epsilon	ϵ, ε	nu	ν	phi	$\Phi \phi, \varphi$
dzêta, zêta	ζ	ksi, xi	$\Xi \xi$	khi	χ
êta	η	omicron		psi	$\Psi \psi$
thêta	$\Theta \theta, \vartheta$	pi	$\Pi \pi, \varpi$	oméga	$\Omega \omega$

Annexe D

Index des noms propres

d'Alembert.....	10	Kronecker.....	38
Avogadro.....	53	Lacroix.....	48
Bell.....	57	Lagrange.....	48
Bernoulli.....	48	Laplace.....	53
Boltzmann.....	53	Mariotte.....	69
Boyle.....	51	Melde.....	44
Cauchy.....	12	Mersenne.....	35
d'Alembert.....	10	Monge.....	48
Descartes.....	6	Newton.....	14
Doppler.....	62	Ostrogradski.....	24
Euler.....	68	Parseval.....	40
Fechner.....	57	Taylor.....	48
Fourier.....	38	Weber.....	57
Hertz.....	26		