Introduction à la relativité

La relativité restreinte est une théorie physique de l'espace et du temps. Celle-ci a été formalisée pour tirer les conséquences d'un postulat fondamental : le principe de relativité. Elle n'est que restreinte, dans le sens où elle s'inscrit elle-même dans le cadre plus complet de la relativité générale. Je traite tout d'abord de la relativité restreinte sous un angle cinématique, c'est-à-dire en m'intéressant au passage de référentiels à d'autres. Pas question de forces ici, on ne parle que de vitesses. Ensuite, j'esquisse à grands traits la dynamique relativiste, c'est-à-dire les mouvements et les forces.

1 Introduction

Albert Einstein, le premier a avoir formulé la théorie de la relativité restreinte [1], avait une vision très critique des concepts classiques de matière, d'espace et de temps. Dans son livre *Conceptions scientifiques*, il propose une ébauche de définition des concepts d'espace et de temps qui ne prendra entièrement sens que dans le cadre de sa théorie de la relativité.
Pour construire un espace objectif, il fait un raisonnement en plusieurs étapes :

1. Il existe un temps subjectif, propre à chaque individu, puisque nous avons conscience d'un ordre temporel.
2. On distingue deux types de changement pour un objet : les changements d'état (interne), et les changements de position, pour reprendre les mots de Poincaré. Ainsi, si une personne avance d'un pas vers moi, c'est un changement de position car je peux le corriger en reculant moi-même d'un pas. En revanche, si cette personne ferme les yeux, c'est un changement d'état, il m'est impossible de le corriger par un mouvement.
3. Un objet matériel est défini comme un objet ne subissant que des changements de position. C'est un objet rigide.
4. Une fois les objets matériels définis, on peut définir la notion de position relative entre objets, et la notion de contact.
5. Un prolongement quasi-rigide est un ensemble d'objets rigides en contact.
6. L'espace est l'ensemble infini des prolongements quasi-rigides. **On a ici défini un espace objectif.**
7. On définit alors des corps de référence (ou référentiels), et une géométrie sur cet espace (euclidienne pour le moment, mais qui sera bien plus complexe en relativité générale), posée de manière axiomatique.

De même pour construire un temps objectif :

1. La théorie de la mécanique quantique indique l'existence de phénomènes physiques périodiques de manière extrêmement fine (la désintégration radioactive). Nous nous en servons pour construire des horloges locales (instruments de mesure du temps en un point). Ce sont l'analogue temporel des corps rigides.
2. En synchronisant une série d'horloges locales qui recouvrent l'espace, on obtient un temps en tout point de l'espace : un temps absolu. **On a ici défini un temps objectif.**

Cependant, les deux derniers points de chaque raisonnement souffrent de graves erreurs, qui vont donner naissance à la théorie de la relativité restreinte. Dans la construction d'un espace objectif, nous avons posé la géométrie de l'espace de manière axiomatique : euclidienne, et sans aucun lien avec le temps. En procédant ainsi, nous oublions la base empirique de la géométrie euclidienne. Dans la construction d'un temps objectif, nous avons pensé pouvoir synchroniser facilement des horloges situés en des points différents. Cependant, nous n'avons pas pris en compte le décalage entre ce qui est vu simultanément et ce qui arrive simultanément [2].
Ces observations cruciales scellent le destin de l'espace et du temps absolu. À la fin de ce chapitre, il ne restera qu'un espace-temps relatif, propre à chaque observateur. Remarquons que nous avons déjà obtenu une réponse concernant l'objectivité de l'espace. Descartes était très réticent à accorder une réalité objective à l'espace, concept qui ne pouvait être accessible par l'expérience. Kant proposa une solution en niant toute objectivité à l'espace, mais cette idée fut balayée par Einstein. Celui-ci prend l'exemple d'une boîte close : des objets peuvent s'agencer dans cette boîte, jusqu'à ce qu'elle devienne pleine. La possibilité d'un tel agencement est une propriété de l'objet matériel « boîte » quelque chose qui est donné avec la boîte : l'« espace contenu » dans la boîte. Mais cet agencement ne dépend pas de l'épaisseur des parois de la boîte : ne pourrait-on pas la faire tendre vers zéro, et obtenir ainsi un fragment d'espace objectif ? Ainsi, selon Einstein, l'apparition du concept d'objet matériel (une boîte, une personne qui possède un ordre temporel subjectif...) doit précéder l'apparition du concept d'un espace et d'un temps objectif.
Une dernière remarque cruciale pour la suite. Définissons des fragments d'espace à l'aide de boîtes comme Einstein, et considérons une petite boîte vide (P) à l'intérieur d'une grande boîte vide (G). L'espace contenu dans (P) est une partie de celui contenu dans (G). Mais si (P) est en mouvement à l'intérieur de (G), peut-on dire la même chose ? Dirait-on que (P) contient toujours le même espace, mais qu'il devient une partie *variable* de l'espace contenu dans (G) ? Nous devons ainsi conférer à chaque boîte son propre espace, et considérer que ces deux espaces sont en mouvement l'un par rapport à l'autre. Le concept primitif d'espace est donc celui d'un milieu non borné dans lequel les objets matériels baignent. Mais nous venons de voir qu'il existe en fait une infinité d'espaces, les uns en mouvement par rapport aux autres.
Précisons ces idées philosophiques en entrant dans le vif du sujet.

1. Même s'il s'appuyait sur les travaux préliminaires de Lorentz et Poincaré.
2. À cause de la finitude de la vitesse de la lumière.

2 Les transformations de Lorentz

2.1 Quelques définitions

Un **référentiel** $\mathscr{R}$ est la donnée d'un couple (A,H) où A est un solide indéformable, et H un système de mesure des temps. H peut être par exemple un système d'horloges synchronisées en chaque point de l'espace. On peut modéliser A par un trièdre orthonormé avec une origine (O, x, y, z), qui est un repère associé à $\mathscr{R}$. Attention : il existe une infinité de repères possibles pour un référentiel. On le complète par la coordonnée temporelle t déduite de H. Par la suite, on confondra $\mathscr{R}$ et (O, x, y, z, t).
Un **événement** dans $\mathscr{R}$ est la donnée des quatre nombres (x, y, z, t) représentant de manière unique sa position dans l'espace et dans le temps.
Un référentiel $\mathscr{R}$ est **galiléen** ou *inertiel* si le mouvement de tous les corps libres (i.e. soumis à aucune force) dans $\mathscr{R}$ est rectiligne et uniforme [1]. Il existe une infinité de référentiels galiléens : tout référentiel $\mathscr{R}'$ en translation rectiligne et uniforme par rapport à $\mathscr{R}$ galiléen l'est aussi.
On s'intéresse alors à deux référentiels $\mathscr{R}(O, x, y, z, t)$ et $\mathscr{R}'(O', x', y', z', t')$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathscr{R}'$ a dans $\mathscr{R}$ une vitesse $\overrightarrow{v} = u\overrightarrow{u_x}$ où u est constante.
On voudrait connaître les formules qui transforment (x, y, z, t) en (x', y', z', t'). En mécanique classique, et dans la vie de tous les jours, on utilise les transformations de Galilée :

$$\begin{cases} x &= x' + ut' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{cases}$$

Nous allons montrer qu'elles sont en fait un peu plus compliquées, mais aussi pourquoi les transformations de Galilée (que vous avez sûrement constatées expérimentalement) conviennent parfaitement dans la vie de tous les jours.

2.2 Les postulats

L'intégralité de la relativité restreinte repose sur les deux postulats fondamentaux suivants.

Postulat 1 :
Les lois de la nature prennent la même forme dans tous les référentiels galiléens.

Postulat 2 :
La lumière se propage dans le vide à une vitesse finie, notée c.

Les physiciens savaient depuis l'expérience d'interférométrie de Michelson et Morley [2] que la rotation de la Terre n'affectait pas la vitesse de la lumière. Ainsi, la composition des vitesses classique ne s'appliquait pas pour la lumière : si un vaisseau spatial à la vitesse v envoie un rayon de lumière dans le sens de son mouvement, pour un observateur immobile la lumière ne se propagera pas à v+c, mais à c seulement. De nombreuses théories ont été élaborées, notamment la présence d'un *éther luminifère*, milieu dans lequel la lumière se propagerait. Albert Einstein a bien vu que les deux postulats ci-dessus, qui rendaient bien compte de nombreuses expériences, étaient incompatibles avec la cinématique newtonienne. Plutôt que de les modifier, il a choisi de les conserver et de bâtir une nouvelle cinématique à partir d'eux, comme nous allons le faire ici. Cela donne la cinématique relativiste.
Notons dès maintenant que $c = 299792458$ m/s par définition. En effet, on définit la seconde comme la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins $f = 3$ et $f = 4$ de l'état fondamental $^6S_{1/2}$ de l'atome de césium 133. Le mètre est alors défini comme la durée parcourue par la lumière en 1/299792458 seconde.

2.3 Le coup de génie d'Einstein

Albert Einstein a démontré que les transformations classiques de Galilée n'étaient pas consistantes avec ces deux postulats. Pour s'en convaincre, notons qu'en combinant les deux principes, la lumière doit se propager à c dans tous les réferentiels galiléens. Considérons une fusée qui se déplace à la vitesse constante $c/2$ par rapport à un référentiel galiléen immobile. Un phare située à l'avant de la fusée émet un rayon de lumière. Pour les observateurs de la fusée, qui sont dans un référentiel galiléen, le rayon lumineux se déplace à c puisqu'il se propage dans le vide. Donc pour un observateur immobile, il devrait se déplacer à $c + c/2 = 3/2\ c$ en appliquant l'additivité galiléenne des vitesses. Mais puisque nous sommes dans le vide, et encore dans un référentiel galiléen, il se déplace à c ! Il y a donc contradiction.

1. On inclut bien sûr l'immobilité dans cette catégorie.
2. Deux photons partent d'un point A, l'un dans le sens de rotation de la Terre et l'autre orthogonalement. Après avoir parcouru la même distance, ils sont détectés. Les deux photons arrivent dans les détecteurs simultanément !

Albert Einstein a démontré la formule de passage d'un référentiel à un autre consistante avec ces deux postulats : les **transformations spéciales de Lorentz**.

$$\begin{cases} x &= \gamma(x' + ut') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right) \end{cases}$$

Nous avons noté :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

On note aussi :

$$\beta = \frac{u}{c}$$

Admirons le couplage introduit entre l'espace et le temps ! Nous y reviendrons.
Remarquons que $\gamma \geq 1$ est défini pour $-c < u < c$ et d'autant plus grand que u s'approche de $\pm c$. Les transformations de Lorentz impliquent donc que $-c < u < c$. Lorsque $u \to c$, elles divergent : les seules particules qui peuvent avoir une vitesse égale à c sont en effet les particules de masse nulle, et celles-ci ne peuvent en toute rigueur définir un référentiel (il faut un objet matériel). Ainsi, nous constatons que c est une borne supérieure pour la vitesse atteignable par un objet matériel. Aucune technologie, aucune technique ne pourra jamais surmonter cet indépassable. En cela, le philosophe Ferdinand Gonseth dit que c définit un *horizon*, un horizon des vitesses accessibles.
De plus, lorsque $u \to 0$ nous retrouvons les transformations de Galilée. C'est pourquoi elles sont utilisées dès que $|u| << c$, c'est-à-dire très souvent au quotidien et dans la mécanique dite classique, étant donné la valeur de c.
Attention, dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, on gardera les notations $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$, qui désigneront les mêmes que ci-dessus. Le choix de ces simplifie les calculs, et, par isotropie de l'espace, ne nuit pas à la généralité du problème.

3 Conséquences

3.1 Référentiel tangent, temps propre, longueur propre

Considérons maintenant un référentiel galiléen $\mathscr{R}_0$ et une particule animée d'un mouvement $\overrightarrow{v(t)}$ dans $\mathscr{R}_0$. Son **référentiel tangent à la date t** et le référentiel galiléen en translation rectiligne et uniforme à $\overrightarrow{v(t)}$ par rapport à $\mathscr{R}_0$.
Le **temps propre** (resp. la **longueur propre**) est le temps mesuré (resp. la longueur mesurée) dans le référentiel galiléen où la particule est au repos, c'est-à-dire le référentiel tangent.

3.2 Dilatation des durées

Considérons deux événements situés en x = 0 dans $\mathscr{R}$, à $t_1 = 0$ et $t_2 = T$. Alice est dans $\mathscr{R}$: c'est un temps propre pour elle, elle mesure un intervalle $\Delta T = t_2 - t_1 = T$ entre ces événements. Bob est dans $\mathscr{R}'$, il applique les transformations de Lorentz pour trouver la date des événements :

$$(x_1, t_1) = (0, 0) = \left(\gamma(x'_1 + ut'_1), \gamma\left(t'_1 + \frac{ux'_1}{c^2}\right)\right)$$

et

$$(x_2, t_2) = (0, T) = \left(\gamma(x'_2 + ut'_2), \gamma\left(t'_2 + \frac{ux'_2}{c^2}\right)\right)$$

La subtilité est la suivante : si ces événements ont lieu au même endroit dans $\mathscr{R}$, ce n'est plus le cas dans $\mathscr{R}'$, d'où la nécessité d'introduire $x'_1 \neq x'_2$. On a

$$x'_2 - x'_1 = -u(t'_2 - t'_1) = -uT$$

Bob mesure donc un intervalle

$$\Delta T' = t'_2 - t'_1 = \frac{T}{\gamma} - \frac{ux'_2}{\gamma c^2} + \frac{ux'_1}{\gamma c^2} = \frac{T}{\gamma} + u\frac{x'_2 - x'_1}{\gamma c^2} = \frac{T}{\gamma} + \Delta T' \frac{u^2}{c^2}$$

Immédiatement, $\frac{\Delta T'}{\gamma^2} = \frac{T}{\gamma}$ et donc $\Delta T' = \gamma T$.
Comme $\gamma \geq 1$, on retient ce résultat : un observateur en mouvement voit *les durées se dilater*, d'autant plus que sa vitesse est grande. En d'autres termes, *le temps propre est toujours plus petit que tout temps impropre.*

Dilatation des durées
Si ΔT correspond à un temps propre, et $\Delta T'$ à un temps impropre associé au paramètre γ alors

$$\boxed{\Delta T' = \gamma \Delta T}$$

Notons également que cet effet est minuscule dans la vie de tous les jours : un voyage de dix heures dans un avion à 1000 km/h (ce qui est déjà beaucoup pour un avion) dure en fait un millionième de seconde de moins (environ) que dix heures. C'est-à-dire qu'un observateur au sol verra s'écouler dix heures, alors que vous verrez s'écouler dix heures moins un millionième de seconde.

3.3 Contraction des longueurs

Considérons une règle au repos dans $\mathscr{R}$, dont les extrémités sont en $x_1 = 0$ et $x_2 = L$. Alice est dans $\mathscr{R}$: c'est un longueur propre pour elle, elle mesure la taille de la règle $\Delta X = x_2 - x_1 = L$. Bob est dans $\mathscr{R}'$: nous allons voir que la simultanéité est une notion relative, il doit donc effectuer ses deux mesures simultanément, à $t'_1 = t'_2 = 0$. Il applique les transformations de Lorentz pour trouver la position des extrémités :

$$(x_1, t_1) = (0, t_1) = \left(\gamma(x'_1 + ut'_1), \gamma\left(t'_1 + \frac{ux'_1}{c^2}\right)\right) = \left(\gamma x'_1, \gamma\frac{ux'_1}{c^2}\right)$$

et

$$(x_2, t_2) = (L, t_2) = \left(\gamma(x'_2 + ut'_2), \gamma\left(t'_2 + \frac{ux'_2}{c^2}\right)\right) = \left(\gamma x'_2, \gamma\frac{ux'_2}{c^2}\right)$$

La subtilité est la suivante : si ces mesures sont simultanées dans $\mathscr{R}$, elles ne le sont plus dans $\mathscr{R}'$, d'où la nécessité d'introduire $t_1 \neq t_2$. Bob mesure donc un intervalle

$$\Delta X' = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\gamma} = \frac{L}{\gamma}$$

Comme $\gamma \geq 1$, on retient ce résultat : un observateur en mouvement voit *les longueurs se contracter*, d'autant plus que sa vitesse est grande. En d'autres termes, *la longueur propre est toujours plus grande que toute longueur impropre.*

Contraction des longueurs
Si ΔX correspond à une longueur propre, et $\Delta X'$ à une longueur impropre associé au paramètre γ alors

$$\boxed{\Delta X' = \Delta X/\gamma}$$

Attention ! Le choix particulier du référentiel ne doit pas nous faire oublier que la contraction des longueurs n'a lieu que *dans la direction du mouvement.* Les deux directions orthogonales, ici (Oy) et (Oz), ne sont pas affectées.
Encore une fois, cet effet est minuscule dans la vie de tous les jours : si vous êtes dans un avion à 1000 km/h et que vous observez une tour de hauteur 1 km (la tour la plus haute du monde fait un peu plus de 700 m), vous la verrez mesurer 1 km moins 72 milliardième de mètre.

3.4 Exemple important : les muons

Ils représentent une preuve expérimentale de la théorie de la relativité. Ce sont des particules provenant de la désintégration de mésons dans les rayons cosmiques. Le muon a une durée de vie mesurée en laboratoire de $\tau_0 = 2,197\ \mu s$, et se forme dans la haute atmosphère (H = quelques 10^4 m d'altitude). Pour simplifier, on prend une vitesse constante : en moyenne, elle est telle que $\gamma = 60$. En mécanique newtonienne, il parcourt $L_{Newt} = v\tau_0 = 660$ m. $<< H$. Un muon ne devrait jamais être détecté à la surface de la Terre !
En fait, du point de vue d'un observateur terrestre, la durée τ de vie du muon est un temps impropre. Donc pour l'observateur terrestre, le muon vit pendant $\tau = \gamma\tau_0$ [1] et parcourt une distance $L_{Relat} = v\tau = v\gamma\tau_0 = 39,5$ km $\approx H$. La détection de muon à la surface de la Terre confirme cette approche.
Du point de vue de l'observateur, la longueur est propre, mais le temps est impropre : le muon vit plus longtemps. Du point de vue du muon, le temps est propre, mais la longueur H (pour l'observateur) est impropre : elle se contracte en H/γ (pour le muon). On retrouve le même résultat quelque soit le référentiel galiléen où on se place (c'est évidemment un résultat très général).

1. Par application du théorème de dilatation des durées.

3.5 La relativité de la simultanéité

On va montrer que deux événements simultanés dans $\mathscr{R}$ ne le sont pas dans $\mathscr{R}'$, ce qui pourrait résoudre un paradoxe. Représentons deux événements A et B qui arrivent à $t' = t'_0$ dans $\mathscr{R}'$. En reportant (parallèlement aux axes de coordonnées) leurs temps dans $\mathscr{R}$, $t = t_A$ et $t = t_B$, on constate que $t_A \neq t_B$ (si $u \neq 0$) !
Deux événements simultanés dans un référentiel galiléen ne le sont plus dans tout autre référentiel galiléen.

3.6 Intervalle de genre espace, intervalle de genre temps

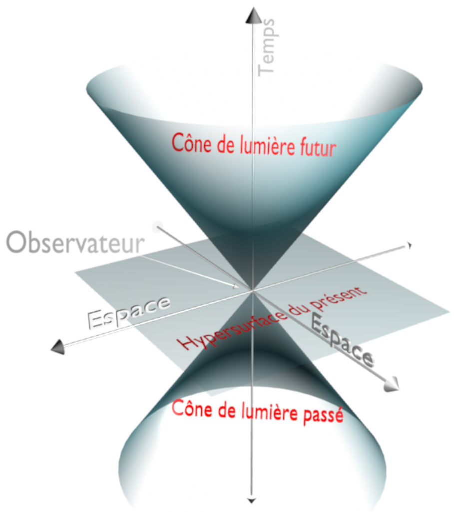
Pour conclure, considérons deux événements dans $\mathscr{R}$, $A(x_A, y_A, z_A, t_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B, t_B)$.
Notons

$$s_{AB} = c^2(t_B - t_A)^2 - AB^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2$$

C'est *l'intervalle d'espace-temps* qui sépare A et B.

Classification des intervalles
Si $s_{AB} > 0$ (intervalle de genre **temps**), il existe $\mathscr{R}'$ galiléen dans lequel A et B ont lieu au même endroit.
Si $s_{AB} = 0$ (intervalle de genre **lumière**), A et B appartiennent à un rayon lumineux.
Si $s_{AB} < 0$ (intervalle de genre **espace**), il existe $\mathscr{R}'$ galiléen dans lequel A et B sont simultanés.

L'ensemble des B séparés par un intervalle de genre lumière de A est le *cône*[1] *de lumière de A*. Tout événement situé à l'intérieur, dans le passé ($t < 0$) ou le futur ($t > 0$) de A, lui est relié par un intervalle de genre temps. Seuls les événements dans le cône de lumière de A peuvent être causalement reliés à A, par une particule ou un signal qui irait à vitesse inférieure ou égale à c. En revanche, tout événement situé à l'extérieur du cône de lumière de A lui est relié par un intervalle de genre espace. Si B est dans l'ailleurs de A, un signal reliant A à B devrait dépasser la vitesse de la lumière : A et B ne peuvent être causalement reliés.



Nous avons représenté le cône de lumière d'un observateur situé à l'origine à $t = 0$. Son futur est la moitié supérieure du cône, son passé la moitié inférieure, son présent l'espace orthogonal à l'axe (ct) passant par l'origine (il est de dimension 3, on n'a pas représenté la troisième dimension d'espace). Son ailleurs est le complémentaire du cône plein : aucun événement dans son ailleurs ne pourra jamais lui être causalement lié.

3.7 Un exemple surprenant

Considérons deux événements P et Q. (P) En 54, Néron prend le pouvoir sur Terre (à Rome, plus précisément). (Q) En 1054, les astronomes de l'époque observent un événement rare : l'explosion d'une supernova qui donnera naissance à la supernova du Crabe, située à 5000 années-lumière de la Terre. On calcule facilement qu'entre P et Q il y a un intervalle de genre lumière, et qu'il existe donc un référentiel (représenté ci-dessous) dans lequel P et Q sont simultanés. Ce référentiel va à $v \approx 5/6\ c$ par rapport à la Terre.
Ainsi, les particules cosmiques voyageant dans l'espace à $v \approx 5/6\ c$ « verront » simultanément la prise de pouvoir de Néron et la naissance de la supernova du Crabe, alors que plusieurs générations de Terriens les séparent !

1. On parle de cône car il faut voir cela dans l'espace à quatre dimensions.

4 Rudiments de dynamique relativiste

4.1 Le formalisme quadrivectoriel

Les transformations de Lorentz ont révolutionné notre façon d'appréhender la dynamique. Le couplage entre l'espace et le temps rend caduque l'hypothèse de décrire le mouvement d'une particule par trois fonctions $x(t), y(t), z(t)$, car il serait plus difficile d'écrire les nouvelles fonctions $x'(t'), y'(t'), z'(t')$ lors d'un changement de référentiel. Le formalisme qui a été adopté est le formalisme quadrivectoriel, qui ne décrit plus l'évolution des particules dans le temps, mais l'existence des particules dans l'espace-temps par une fonction $\phi(t, x, y, z)$. Á chaque particule est associé un quadrivecteur position $x^\mu = (ct, x, y, z)$, où $\mu = 0..3$ désigne les quatre coordonnées du vecteur. Le c est là pour renforcer la notion de couplage entre l'espace et le temps et obtenir un quadrivecteur homogène, c'est-à-dire dont chaque composante a la même unité.
Ce simple changement de point de vue est déjà une révolution dans la manière dont la physique voit le monde, comme Einstein le nota lui-même. *"It appears therefore more natural to think of physical reality as a four-dimensional existence, instead of, as hitherto, the evolution of a three-dimensional existence."*

Considérons maintenant une particule dans un référentiel (x, y, z, t). t est un temps impropre pour elle donc relié à son temps propre τ par $t = \gamma\tau$. On définit le quadrivecteur impulsion de la particule

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} = m\gamma\frac{dx^\mu}{dt} = m\gamma\left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (\gamma mc, \gamma mv_x, \gamma mv_y, \gamma mv_z)$$

Les trois dernières composantes représentent l'impulsion de la particule, c'est-à-dire le produit de sa masse par sa vitesse. Mais que représente donc la première composante ?

4.2 Formule d'Einstein

Des calculs établis à partir de ces nouvelles définitions et la mise en parallèle des équations du mouvement obtenues conduisent à établir le postulat suivant : *la première composante du quadrivecteur impulsion est l'énergie à une constante près.* Comme le quadrivecteur impulsion est homogène à une masse par une vitesse qui est aussi une énergie sur une vitesse, le facteur est supposé égal à $1/c$.

On a donc pour une particule massive :

$$\boxed{\mathrm{E} = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Si l'on fait le développement classique, c'est-à-dire lorsque $v << c$, on peut écrire une expression approchée de E :

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Cette approximation est valable pour la plupart des mouvements usuels étant donnée la taille de c, et c'est elle que nous allons interpréter. Le second facteur est déjà connu, c'est l'énergie cinétique de la particule, l'énergie qu'elle possède du fait de sa vitesse v. En mécanique classique, une particule au repos a une énergie nulle. Mais ici nous remarquons que $E(v = 0) = mc^2 \neq 0$! Une particule de masse non nulle, même au repos, possède une énergie dite *énergie de masse*. C'est la première facette de l'équivalence *masse-énergie* : à une masse est associée une énergie, et réciproquement [1].

Pour conclure, remarquons que l'énergie de masse est colossale. Pour un poulet standard de 1 kg. on trouve une énergie de masse de 10^{17} J, ce qui permettrait de faire fonctionner six millions d'ampoules usuelles de 60 W. (une par être humain) pendant 69 heures ! Cette théorie ne donne cependant pas le moyen d'extraire cette énergie de masse : ces effets sont principalement appréciables dans les accélérateurs lors de collisions entre particules. On ne pèse bien entendu par les particules élémentaires produites, mais on détermine l'énergie associée à une réaction, et donc la masse des produits. Cette équivalence est également au coeur des réactions nucléaires.

1. Le processus de conversion d'énergie en particules fait entrer en jeu une physique beaucoup plus complexe que celle développée ici.

5 Paradoxes et conclusion

Pour conclure, donnons quelques paradoxes issus de la relativité restreinte.

5.1 Paradoxe des jumeaux de Langevin

5.1.1. Énoncé

Alice et Bob sont deux (faux) jumeaux. Le jour de leur naissance, Bob part faire le tour de la galaxie à une vitesse telle que $\gamma = 2$. Il revient alors qu'Alice fête ses 20 ans. Montrer que Bob n'a que 10 ans. Considérer que le problème est symétrique, et qu'on peut très bien supposer Bob immobile et Alice se déplaçant à $\gamma = 2$, mais montrer alors qu'Alice n'a que 5 ans. Essayer de résoudre le paradoxe.

5.1.2. Solution

Pour Alice, $T_0 = 20$ ans se sont écoulés : c'est un temps propre pour elle, et impropre pour Bob, qui ne voit donc s'écouler que $T_1 = T_0/\gamma = 10$ ans. Bob revient donc à 10 ans. Mais on peut aussi considérer que la situation est symétrique : Bob immobile voit Alice s'éloigner de lui et revenir. T_1 est un temps propre pour lui, et impropre pour Alice qui ne voit donc s'écouler que $T_2 = T_1/\gamma = 5$ ans. Pour Alice, 5 ans seulement se sont donc écoulés !

L'erreur de raisonnement consiste à penser que les deux jumeaux vivent des situations symétriques. En fait, Bob subit une accélération qui le fait passer de $\gamma = 0$ à $\gamma = 2$, puis il fait demi-tour (des accélérations entrent encore en jeu), et subit enfin une accélération qui le fait passer de $\gamma = 2$ à $\gamma = 0$. En différenciant les relations de Lorentz deux fois pour obtenir les formules de changement de référentiel pour les accélérations, on trouve bien que Alice a 20 ans et Bob 10 ans : les 15 années manquantes (puisqu'on croyait que Bob allait rentrer à 10 ans pour les 5 ans d'Alice) s'écoulent pendant le demi-tour, qui n'est bien sûr pas ponctuel.

5.2 Paradoxe de la grange

5.2.1. Énoncé

Un fermier souhaite traverser sa grange de 10 m de long avec une échelle de 20 m de long. Pour cela, il va à une vitesse telle que $\gamma = 2$. Pour un observateur lié à la grange, l'échelle est contractée, mesure 10 m et rentre parfaitement dans la grange de 10m. Mais pour le fermier, la grange est contractée à 5 m et l'échelle reste à 20 m : elle ne rentre absolument pas ! Essayer de résoudre le paradoxe.

5.2.2. Solution

Le paradoxe se résoud si l'on sait répondre à la question : Que veut dire « rentrer dans la grange » ? Nous avons vu que la notion de simultanéité est toute relative... Nous dirons qu'à l'instant où la perche est toute entière dans la grange, l'observateur externe claque les deux portes de la grange et les réouvre instantanément. Pour lui c'est possible, car il enferme brièvement une perche de 10 m. dans une grange de 10 m. En revanche, le fermier voit effectivement sa perche de 20 m. et une grange de 10 m. Mais il verra la porte de devant se fermer et se rouvrir lorsqu'il l'atteindra, puis après qu'il a avancé de 10 m., la porte de derrière se fermer et se rouvrir. Il sera lui aussi rentré dans la grange !

On peut faire le calcul avec les transformations de Lorentz pour s'en convaincre : les deux portes claquent simultanément dans le référentiel de la grange, mais l'une après l'autre dans le référentiel du fermier !

5.3 Vers la relativité générale...

La théorie de la relativité restreinte a révolutionné notre vision de l'espace et du temps. Ceux-ci ne sont pas deux phénomènes distincts, mais sont intriqués l'un à l'autre pour former une structure complexe appelée espace-temps. De plus, cette structure n'est pas un absolu identique pour tous les observateurs, mais une structure dynamique, qui dépend intrinsèquement du mouvement de chaque observateur. De cette structure résultent des propriétés non intuitives, comme l'existence d'une borne supérieure aux vitesses atteignables, ou l'existence d'une forme d'énergie liée à la masse.

Cependant la théorie est loin d'être parfaite. On doit en effet faire intervenir la notion de référentiel galiléen, et nous n'en avons pas encore exhibé un. Le référentiel terrestre ne l'est pas, car il est en mouvement de rotation non uniforme par rapport au Soleil. Le référentiel héliocentrique, situé dans un bras spirale de la Voie Lactée, est en mouvement de rotation non uniforme par rapport au centre de notre galaxie. De même la Voie Lactée est en mouvement vers la galaxie d'Andromède (la collision est prévue dans quelques milliards d'années). Il semble donc très délicat de trouver un référentiel galiléen. Ce sont en partie ces problèmes, ainsi que la volonté d'inclure la gravitation dans le principe de relativité, qui ont été à l'origine du travail d'Einstein qui généralisa cette théorie en une théorie de la relativité générale.