

MESURES ET INCERTITUDES

Les sciences physiques sont des disciplines expérimentales par essence. De ce fait, toute valeur numérique associée à une grandeur physique est issue d'une mesure ou d'un calcul entre plusieurs valeurs mesurées. La précision de ces mesures dépendent de l'instrument de mesure et de l'expérimentateur lui même. Il est impossible d'effectuer des mesures rigoureusement exactes. Pour prendre conscience du degré de précision avec lequel on travaille, on fait l'estimation des erreurs qui peuvent avoir été commises dans les diverses mesures et on calcule leurs conséquences dans les résultats obtenus. Ceci constitue le calcul d'erreur, ou calcul d'incertitude.

1 Mesurer une grandeur

1.1 Définition

Faire une mesure consiste à rechercher la valeur numérique d'une grandeur, il est cependant impossible de connaître la valeur vraie de la grandeur à cause des erreurs de mesure.

1.2 Erreur de mesure

1.2.1 L'erreur systématique

Elle prend toujours la même valeur sur chaque mesure répétée (valeur inconnue). Souvent due à un appareil défectueux, mal étalonné ou utilisé incorrectement, elle affecte le résultat toujours dans le même sens.

1.2.2 L'erreur aléatoire

Elle apparaît quand on réalise un grand nombre de mesure de la même grandeur dans les mêmes conditions, réalisées avec des appareils différents. La justesse, la fidélité et la résolution d'un système d'acquisition déterminent l'incertitude finale sur la mesure.

2 Incertitude de la mesure

L'incertitude de mesure est une estimation de l'erreur de mesure. Lorsqu'on mesure une grandeur quelconque (longueur d'une table par exemple), on ne peut jamais obtenir une valeur exacte. On appelle erreur la différence entre la valeur mesurée et la valeur exacte. Mais comme on ignore la valeur exacte, on ne peut pas connaître l'erreur commise... Le résultat est donc toujours incertain. On parle des incertitudes de mesure.

La précision d'une mesure est limitée par

- la précision de l'appareil de mesure (sur une règle graduée en mm, il est impossible de lire les dixièmes de mm) ;
- la méthode de mesure utilisée ;
- l'habileté (les limites) de l'expérimentateur (exemple : temps de réaction pour enclencher ou déclencher un chronomètre).

2.1 Mesures multiples

Ce sont les mesures que l'on peut effectuer plusieurs fois, dans les mêmes conditions, et l'évaluation de ce type d'incertitude fait appel au calcul statistique. On dispose de N mesures indépendantes dont les résultats sont notés m_1, m_2, \dots, m_N . En statistique, un ensemble de p objets constitue une population. En prélevant N objets dans cette population, on constitue un échantillon de taille N ($N < p$). On peut donc considérer que les N mesures constituent un échantillon de taille N .

2.1.1 Ecart-type et incertitude-type

L'écart-type mesure la dispersion de la série autour de la valeur moyenne : la dispersion de la série est d'autant plus grande que l'écart-type est grand.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m})^2}{N}}$$

(la variance est $V = \sigma^2$) où \bar{m} est la moyenne de l'échantillon : $\bar{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i$ La

théorie statistique montre alors que la meilleure estimation de la dispersion est mesurée par l'écart-type expérimental défini :

$$s_{exp} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (m_i - \bar{m})^2}{N - 1}}$$

(s_{exp} est noté souvent σ_{n-1} par les calculatrices.) Le meilleur estimateur de cet écart-type est l'incertitude-type s donnée par :

$$s = \frac{s_{exp}}{\sqrt{N}}$$

2.1.2 Intervalle de confiance

L'intervalle de confiance à un taux de confiance choisi est un intervalle dans lequel la valeur cherchée a une certaine probabilité de se trouver. Dans les cas que nous rencontrerons, les bornes de l'intervalle de confiance dépendent du nombre de mesures N et du choix du niveau de confiance et sont égales à $[\bar{m} - ks; \bar{m} + ks]$. s est l'incertitude-type et k le facteur d'élargissement.

L'incertitude-type élargie de mesure est $\Delta m = ks$. Elle dépend du nombre n de mesures indépendantes réalisées, de l'écart type de la série de mesures et d'un coefficient k appelé facteur d'élargissement qui dépend du nombre de mesures réalisées et du niveau de confiance choisi. Sa valeur figure dans un tableau issu de la loi statistique dite « loi de Student ». Un extrait de ce tableau est donné ci-dessous pour un nombre de mesures compris entre 2 et 16, et pour des niveaux de confiance de 95 % et de 99 % :

- Pour un même nombre de mesures, plus le niveau de confiance est grand et plus k est grand.

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$k_{95\%}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23	2,20	2,18	2,16	2,15	2,13
$k_{99\%}$	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,17	3,11	3,06	3,01	2,98	2,95

- Pour un même niveau de confiance, plus le nombre n de mesures indépendantes est grand et plus k est petit.

En Terminale S, l'expression de l'incertitude et l'extrait de la table de Student correspondant à un(aux) niveau(x) de confiance choisi(s) seront donnés. La qualité de la mesure est d'autant meilleure que l'incertitude associée est petite.

2.2 Mesure unique

L'incertitude prend en compte les informations techniques de l'instrument de mesure et une information sur la façon dont la mesure est effectuée.

Pour un appareil de mesure gradué :

L'incertitude Δm sur la mesure est égale à la moitié de la plus petite graduation. On prendra comme incertitude-type une grandeur représentée par :

$$s = \frac{\text{graduation}}{\sqrt{12}}$$

Pour un appareil à affichage digital :

L'incertitude Δm sur la mesure est égale au plus petit écart possible entre deux valeurs mesurées (sur le dernier digit).

Pour un appareil avec indication du fabricant :

On prendra comme incertitude-type une grandeur représentée par :

$$s = \frac{\text{écart fabricant}}{\sqrt{3}}$$

Une expérience permet de déterminer les valeurs extrêmes d'une mesure. On pose :

$$a = \frac{1}{2}(m_{max} - m_{min})$$

On prendra comme incertitude-type une grandeur représentée par :

$$s = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

(On retrouve le premier cas de figure avec $a = 1/2$ graduation.)

2.3 Incertitude relative d'une mesure

L'incertitude relative d'une mesure est le quotient de l'incertitude de mesure Δm par la valeur mesurée m . Soit

$$\frac{\Delta m}{m}$$

Elle s'exprime en pourcentage. C'est un indicateur de la qualité de la mesure plus elle est petite et plus la mesure est précise.

2.4 Calcul d'incertitudes

Quand on calcule un produit ou une somme de deux mesures expérimentales, il est nécessaire d'en connaître l'incertitude. On utilise alors ce qu'on appelle la propagation des incertitudes. Soit les grandeurs mesurées a et b avec leurs incertitudes absolues Δa et Δb , et leurs incertitudes relatives et $\frac{\Delta a}{a}$, $\frac{\Delta b}{b}$. L'incertitude de $c = a + b$ ou $c = a - b$ est donnée par

$$\Delta c = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}$$

Autrement dit, l'incertitude absolue sur la somme ou la différence de 2 grandeurs est égale à la somme quadratique de leurs incertitudes absolues. L'incertitude de ou est donnée par

$$\frac{\Delta c}{c} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$$

L'incertitude relative sur un produit ou un rapport de 2 grandeurs est égale à la somme quadratique de leurs incertitudes relatives.

3 Expression du résultat

3.1 Convention d'écriture pour l'expression du résultat

Le résultat de la mesure d'une grandeur M est un intervalle de confiance associé à un niveau de confiance. L'intervalle de confiance est centré sur la valeur m (valeur mesurée lors d'une mesure unique ou valeur moyenne des mesures lors d'une série de mesures) et a pour demi-largeur l'incertitude de mesure Δm . Le résultat d'une mesure s'écrit

$$M = m \pm \Delta m$$

Si elle existe, l'unité est précisée. Par convention, l'incertitude sera arrondie à la valeur supérieure avec au plus deux chiffres significatifs et les derniers chiffres significatifs conservés pour la valeur mesurée m sont ceux sur lesquels porte l'incertitude Δm .

Ainsi, le dernier chiffre significatif de la valeur mesurée doit être à la même position décimale que le dernier chiffre significatif de l'incertitude. Pour la valeur mesurée m , on garde les chiffres exacts, le premier chiffre entaché d'erreur et le deuxième chiffre que l'on arrondit. Pour l'incertitude Δm , on garde le premier chiffre non nul et le chiffre suivant majoré. Quand le résultat de la mesure est au format scientifique, la puissance de 10 utilisée doit être la même pour la valeur mesurée m et pour l'incertitude associée Δm .

L'écriture de la mesure doit faire apparaître :

- la grandeur mesurée
- la valeur de la mesure, en utilisant préférentiellement l'écriture scientifique
- l'unité de la grandeur mesurée
- l'incertitude sur la mesure

3.2 Comparaison du résultat d'une mesure à une valeur de référence

Dans certains cas, la grandeur mesurée a une valeur déjà connue précisément, considérée comme une valeur de référence. La qualité du résultat de la mesure est obtenue par un

calcul d'incertitude relative. Si la grandeur mesurée a une valeur de référence ou une valeur théorique $m_{réf}$ et une valeur mesurée m_{mes} alors l'incertitude relative est

$$r = \frac{|m_{mes} - m_{réf}|}{m_{réf}}$$

3.3 Amélioration de la qualité d'une mesure

Quand l'incertitude relative est supérieure à 1 %, il faut chercher comment améliorer la qualité de la mesure effectuée :

- le matériel choisi doit présenter une tolérance suffisamment faible ;
- le matériel doit être utilisé correctement (lecture du niveau de liquide dans une burette par exemple) ;
- le nombre de mesures indépendantes doit être suffisant ;
- lors de calculs successifs, il faut garder les résultats intermédiaires dans la mémoire de la calculatrice.