

Leçons de physique

Hugo Roussille

25 juin 2019

Table des matières

1 Contact entre deux solides. Frottement.	4
2 Gravitation.	9
3 Caractère non galiléen du référentiel terrestre.	14
4 Précession dans les domaines macroscopique et microscopique.	18
5 Lois de conservation en dynamique.	23
6 Cinématique relativiste.	27
7 Dynamique relativiste.	31
8 Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.	35
9 Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide.	38
10 Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides.	41
11 Gaz réels, gaz parfait.	44
12 Premier principe de la thermodynamique.	48
13 Évolution et condition d'équilibre d'un système thermodynamique fermé.	51
14 Machines thermiques réelles.	54
15 Transitions de phase.	58
16 Facteur de Boltzmann.	61
17 Rayonnement d'équilibre thermique. Corps noir.	65
18 Phénomènes de transport.	69
19 Bilans thermiques : flux conductifs, convectifs et radiatifs.	73
20 Conversion de puissance électromécanique.	77
21 Induction électromagnétique.	83
22 Rétroaction et oscillations.	87
23 Aspects analogique et numérique du traitement d'un signal. Étude spectrale.	90
24 Ondes progressives, ondes stationnaires.	93
25 Ondes acoustiques.	97
26 Propagation avec dispersion.	102

27 Propagation guidée des ondes.	106
28 Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques.	110
29 Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs.	116
30 Rayonnement dipolaire électrique.	121
31 Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat	124
32 Microscopies optiques.	128
33 Interférences à deux ondes en optique.	134
34 Interférométrie à division d'amplitude.	137
35 Diffraction de Fraunhofer.	141
36 Diffraction par des structures périodiques.	144
37 Absorption et émission de la lumière.	148
38 Aspects corpusculaires du rayonnement. Notion de photon.	154
39 Aspects ondulatoires de la matière. Notion de fonction d'onde.	159
40 Confinement d'une particule et quantification de l'énergie.	164
41 Effet tunnel.	167
42 Fusion, fission.	170
43 Évolution temporelle d'un système quantique à deux niveaux.	175
44 Capacités thermiques : description, interprétations microscopiques.	179
45 Paramagnétisme, ferromagnétisme : approximation du champ moyen.	184
46 Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques.	189
47 Mécanismes de la conduction électrique dans les solides.	192
48 Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique.	196
49 Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités	200

Contact entre deux solides. Frottement.

Niveau CPGE

Prérequis

— Mécanique du point (dont changements de référentiel)

Message On peut décrire phénoménologiquement les actions de contact entre deux solides. Lors de la résolution des équations, les frottements sont des inconnues en plus : il faut faire des hypothèses sur la nature du mouvement afin de pouvoir résoudre.

Bibliographie

- [1] Bruno ANDREOTTI, Yoël FORTERRE et Olivier POULIQUEN. *Les milieux granulaires, entre fluide et solide*. EDP Sciences, 2011.
- [2] Lydéric BOCQUET, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Toute la mécanique*. Dunod, 2002.
- [3] Halson V. EAGLESON. « An Experimental Method for Determining Coefficients of Sliding Friction ». In : *American Journal of Physics* 13.1 (fév. 1945), p. 43-44. DOI : [10.1119/1.1990653](https://doi.org/10.1119/1.1990653). URL : <https://doi.org/10.1119/1.1990653>.
- [4] Hubert GIÉ et Jean-Pierre SARMANT. « Le portrait de phase des oscillateurs ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* 744 (1992).
- [5] Hubert GIÉ et al. *Physique Spé : MP*, MP et PT*, PT. Cours et exercices d'application*. Tec & Doc, 2000.
- [6] Marie-Noëlle SANZ, Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2004.

Introduction

- Jusqu'à présent, on a fait de la mécanique « idéale », avec des forces simples.
- Si on veut s'intéresser à des cas un peu plus physiques, on doit modéliser le contact entre deux solides : cela nous permettra de décrire des situations de la vie de tous les jours.
- Pour toute la leçon, on appliquera les théorèmes de la mécanique dans le référentiel du laboratoire noté \mathcal{R} , supposé galiléen. On notera « PFD » le principe fondamental de la dynamique.

1 Description des actions de contact entre deux solides

1.1 Modélisation du contact et cinématique

- Suivre [6] p 198.
- Deux solides S_1 et S_2 , contact entre eux supposé **ponctuel**.
- Définition du plan tangent, des points I_1 et I_2 . point I_g de contact à tout instant : c'est en fait un point coïncidant. Montrer le schéma sur slide.
- Vitesse de glissement de S_1 par rapport à S_2 :

$$\vec{v}_{g,12} = \vec{v}(I_g \in S_1 / \mathcal{R}) - \vec{v}(I_g \in S_2 / \mathcal{R})$$

1 Contact entre deux solides. Frottement.

- Bien expliquer que l'on lit $\vec{v}(I_g \in S_1/\mathcal{R})$ comme « vitesse de I_g lié au solide S_1 dans le référentiel \mathcal{R} ».
- La vitesse de glissement étant une différence de vitesses, elle ne dépend pas du référentiel.
- Condition de non-glissement : vitesse de glissement nulle.
- Application à la roue : on se place dans le référentiel où la roue est fixe, et (sans utiliser la formule de Varignon) $\vec{v}(I_g \in S_1/\mathcal{R}) = -R\omega\vec{e}_x$, et $\vec{v}(I_g \in S_2/\mathcal{R}) = -V\vec{e}_x$, donc la condition de non-glissement impose

[6] p 199

$$V = R\omega.$$

Écran

Points I_1 et I_2 en fonction du temps ; point coïncidant.

Remarques

Les frottements solides sont au programme de MP et de PCSI, avec pour seul cas considéré la translation. On ne décrit donc pas le pivotement des solides l'un sur l'autre, ni le roulement. Cependant, on utilise l'exemple de la roue car il est classique et peut être traité sans parler du roulement de la roue sur le sol.

Transition : On s'est donné les outils pour décrire le contact supposé ponctuel entre deux solides. On peut maintenant en étudier la dynamique, en posant des actions de contact.

1.2 Dynamique du contact

- Résultante des forces de S_2 sur S_1 $\vec{R}(S_2 \rightarrow S_1)$, moment en I_g $\vec{M}(S_2 \rightarrow S_1)$. Pour un contact ponctuel, on n'a pas de moment en le point de contact : il ne reste que la résultante des forces, et il n'y a pas de roulement ni de pivotement. On prend les forces de S_2 sur S_1 car S_2 est en-dessous sur les schémas utilisés. [6] p 265
- Composantes normale \vec{N}_{21} et tangentielle \vec{T}_{21} des frottements. La composante normale est répulsive. [6] p 265
- On a frottements pour $\vec{T}_{21} \neq \vec{0}$ et décollement dès que $\vec{N}_{21} = \vec{0}$.

Transition : On a décrit la cinématique et la dynamique des frottements : il ne nous manque plus qu'un moyen de les relier, afin de pouvoir résoudre des problèmes mécaniques concrets.

2 Lois d'Amontons-Coulomb du frottement

2.1 Constatation expérimentale et énoncé

Expérience

Glissement d'un pavé en bois sur une planche en bois (expérience de mesure de μ_s).

- Montrer que pour des angles trop petits, le mouvement se démarre pas.
 - Lorsque le mouvement se déclenche, il y a glissement, et le pavé ne s'arrête plus.
 - Le pavé ne roule pas et ne pivote pas : on a bien fait de ne pas prendre en compte les moments, et le contact peut être modélisé par un contact ponctuel.
- Cette expérience nous donne les clés pour comprendre les lois du frottement : on voit qu'il va falloir séparer le cas avec glissement du cas sans glissement.

1 Contact entre deux solides. Frottement.

- Lois *phénoménologiques* proposées par Amontons (1699) et Coulomb (1785), à partir des mêmes observations que ce que l'on vient de voir : [6] p 266
 - **Non-glissement** : $\vec{v}_{g,12} = \vec{0}$ et $\|\vec{T}_{21}\| \leq \mu_s \|\vec{N}_{21}\|$
 - **Glissement** : \vec{T}_{21} est parallèle et opposé à $\vec{v}_{g,12}$ et $\|\vec{T}_{21}\| = \mu_d \|\vec{N}_{21}\|$.
- Les coefficients μ_s et μ_d sont respectivement appelés coefficient de frottement statique et dynamique.
- Montrer que la surface de contact, la masse n'ont pas d'effet. C'est un résultat important.
- Interprétation de ces forces : au niveau microscopique, on n'a contact que sur les aspérités, qui s'écrasent. La surface réelle de contact S_r est donc bien plus faible que la surface apparente macroscopique S_a . [1] p 21
- Il est étonnant que les coefficients ne dépendent pas de la surface de contact. Ce modèle permet de l'expliquer. Tout d'abord, la surface réelle de contact est proportionnelle à la force normale : plus on appuie fort, plus on écrase les aspérités, plus on augmente la surface. Par ailleurs, la force tangentielle est aussi proportionnelle à la surface réelle de contact, car plus celle-ci est grande, plus il faut appliquer une force importante pour faire glisser les solides. On en déduit que N_{21} et T_{21} sont proportionnelles entre elles, reliées par des facteurs propres aux matériaux en jeu et non à la surface ou à la masse. Pour résumer, on a [1] p 22, [2] p 360

$$T_{21} \propto S_r \propto N_{21}.$$

Transition : On va directement utiliser ces lois pour expliquer l'expérience qui a été faite.

2.2 Résolution d'un problème avec frottements

- Cylindre S_1 posé sur un plan S_2 . Faire le schéma de [6] p 270, mais dans le cas de glissement : \vec{N}_{21} s'applique en C , et \vec{T}_{21} aussi, de sorte que la réaction tangentielle compense le moment créé par le poids et la réaction normale.
- Cas avec équilibre, cas avec glissement. Garder μ_s et μ_d différents. [6] p 271
- On a donc démarrage du mouvement pour $\tan \alpha = \mu_s$.
- Remarquer qu'ici les forces de frottement sont des inconnues, que l'on doit obtenir. Le PFD donne deux équations, mais on a trois inconnues : \ddot{x}_G , N_{21} et T_{21} . On ne peut résoudre entièrement le problème que dans le cas de glissement.
- Remonter à la valeur de μ_s de l'expérience, puis donner d'autres ordres de grandeur de μ_s et μ_d . On remarque que l'on a en général $\mu_s > \mu_d$. [6] p 268

Attention

Le point d'application des forces varie en fonction de la situation et peut se calculer avec le TMC.

Remarques

Pour les freins d'une voiture, on n'a pas $\mu_s > \mu_d$ à partir du moment où ω (vitesse de rotation des roues) est non nul. En effet, on veut à tout prix éviter le blocage des disques de freins sur les roues, sans quoi le freinage n'est pas du tout efficace.

Transition : On voit que les calculs réalisés ici peuvent assez vite devenir compliqués. Cependant, pour la plupart des applications il est suffisant d'utiliser des théorèmes énergétiques.

2.3 Caractère énergétique

Expérience

Mesure du coefficient μ_d d'une interface bois-bois.

- Montrer que pour des masses trop faibles, le mouvement ne s'amorce pas.
- Montrer les deux phases du mouvement.
- Ajouter un point sur la courbe, et montrer que la loi physique est vérifiée une fois le calcul fait (pas besoin de faire d'ajustement).

— Faire le calcul (voir [2] p 372 pour le schéma ou [3] pour l'article original) :

- **Phase 1** : les deux masses avancent à la même vitesse, et on a glissement de la masse 1. On applique le théorème de l'énergie mécanique au système {masse 1 + masse 2 + fil} entre le moment où on lâche la masse 1 et le moment où la masse 2 touche le sol. On a (en posant v_A la vitesse à la fin de cette phase)

$$\frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}m_2 v_A^2 - m_2 g h = W_{\text{int}} = -m_1 g h \mu_d + T_1 v_1 - T_2 v_2,$$

où v_i est la vitesse de la masse i , et T_i la tension du fil pour la masse i . On a \vec{T}_1 dans le sens de \vec{v}_1 et \vec{T}_2 opposé à \vec{v}_2 , donc les travaux sont bien opposés, et le fil étant inextensible $T_1 = T_2 = T$ et $v_1 = v_2$. Ainsi

$$\frac{1}{2}m_1 v_A^2 + \frac{1}{2}m_2 v_A^2 - m_2 g h = -m_1 g h \mu_d$$

- **Phase 2** : la masse 1 avance avec glissement. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'état initial et final : on a

$$-\frac{1}{2}m_1 v_A^2 = -\mu_d m_1 g h d$$

- On déduit, en éliminant v_A :

$$\mu_d = \frac{m_2 h}{m_1 h + (m_1 + m_2) d}$$

- Tracer $m_1 h + (m_1 + m_2) d$ en fonction de $m_1 h$; montrer que l'on a une droite. Cela valide la loi physique.
- Remarquer qu'obtenir le même résultat sans théorème énergétique aurait été bien plus douloureux...

On n'aura probablement pas le temps de traiter cette partie de cette façon. On propose donc une autre présentation :

- Puissance des actions de contact. Attention, pour un des solides la puissance peut être positive!
- Le frottement est parfois *moteur* : notamment pour la marche à pied.
- Deux cas où la puissance est nulle : roulement sans glissement (montrer le schéma des Assyriens), et lubrification (montrer les Égyptiens).

[6] p 292

Écran

Les Assyriens utilisaient des rondins pour déplacer leurs pierres, et les Égyptiens lubrifiaient le sol en répandant du liquide.

Transition : On peut imaginer le même type de dispositif mais avec un ressort au lieu d'une masse qui tombe. On peut voir que l'on aura des régimes avec glissement, et des moment où la vitesse s'annule et où il faudra vérifier la condition de non-glissement. Ce système est un oscillateur amorti par frottements solides.

3 Application à l'oscillateur amorti

Suivre en gros [5] p 264 pour les calculs.

— Faire un schéma au tableau : mobile de masse m , coefficient de frottement $\mu_s = \mu_d = \mu$. On pose $\omega_0^2 = k/m$.

— Donner le PFD projeté sur l'horizontale, qu'il y ait glissement ou non :

$$m\ddot{x} = -kx + T$$

— Sur la verticale, on a $N = mg$.

— Condition d'arrêt : $|x| < a = \mu mg/k$. On a donc une *plage d'équilibre* et non pas une position donnée.

— On se place dans le cas où il y a glissement. Si $\dot{x} < 0$, on a $T = +\mu mg$ et l'équation du mouvement est $\ddot{x} + \omega_0^2 x = a$. Si $\dot{x} > 0$, on a plutôt $T = -\mu mg$ et l'équation est $\ddot{x} + \omega_0^2 x = -a$.

— On a donc successivement deux équations d'oscillateurs harmoniques, dont la position centrale change.

— On part de $x_0 > a$: on a glissement car on ne se trouve pas dans la plage d'équilibre. La trajectoire est donc une arche de cosinus, et le premier minimum est tel que $x_0 - a = a - x_1$ soit $|x_1| = -x_1 = x_0 - 2a$. On a alors $v = 0$: il faut vérifier si l'on se trouve dans la plage d'équilibre ou non. Supposons que ce ne soit pas le cas ($x_0 > 3a$). On a ensuite une arche de cosinus dans le sens inverse, et $x_2 = |x_1| - 2a = x_0 - 4a$.

— Les amplitudes suivent donc une suite arithmétique de raison $-4a$, et on aura arrêt dès que $|x_n| < a$. À chaque maximum, on doit vérifier si l'on se trouve dans la plage d'équilibre. Si c'est le cas le mouvement s'arrête, sinon il reprend dans le sens opposé.

— Montrer le profil amorti avec une enveloppe linéaire : comparer à l'oscillateur amorti par frottements fluides, où les amplitudes suivent une loi géométrique et où on n'a jamais d'arrêt exact.

— Tracé du portrait de phase : demi-cercles successifs de centres $(a, 0)$ et $(-a, 0)$. C'est *la chose la plus importante à faire* dans cette partie. [4]

— Utilité du calcul : les aiguilles des appareils de mesure peuvent s'arrêter dans toute une plage autour de la valeur vraie, c'est une source d'erreurs.

Écran

Trajectoires de l'oscillateur amorti par frottements solides comparées à celles avec frottement fluide.

Conclusion

— Les frottements solides sont une source de recherche active, car ils sont bien plus complexes à comprendre que les frottements fluides.

— Important de remarquer que les frottements solides ne sont pas que limitants : c'est grâce à eux que l'on peut marcher, faire des nuds...

Attention

Lors de cette leçon, il faut prêter une attention particulière aux notations : on écrira toujours $\vec{v}_{g,12}$ pour bien préciser quel solide glisse sur l'autre, \vec{T}_{21} pour bien préciser quel solide exerce une force. Bien évidemment, inverser les solides revient à changer le signe de toutes ces grandeurs.

Niveau Licence

Prérequis

- Mécanique du point
- Électrostatique

Message

Bibliographie

- [1] Jean-Marie BRÉBEC et al. *Mécanique MPSI*. Hachette, 2003.
- [2] Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un PCSI*. Dunod, 2013.
- [3] Marie-Noëlle SANZ, Anne-Emmanuelle BADEL et François CLAUSSET. *Physique tout-en-un 1ère année*. Dunod, 2003.
- [4] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

Introduction

- Les scientifiques ont étudié le mouvement des étoiles depuis l'Antiquité
- 1604-1618 : lois de Kepler, basées sur les observations de Kepler et Tycho Brahé [1] p 152
- Présenter les trois lois tout en montrant les données qui les appuient :
 - **Loi des orbites** : montrer l'animation de la NASA
 - **Loi des aires** : discuter à l'oral
 - **Loi des périodes** : montrer les données pour les planètes du système solaire.
- Ces lois ont été retrouvées par Newton, une fois sa théorie de la gravitation universelle énoncée en 1687.

Écran

Données pour le système solaire, animation de la NASA (<https://solarsystem.nasa.gov/solar-system/our-solar-system/overview/>)

Transition : C'est ce que nous allons faire aujourd'hui : partir de l'expression de la force gravitationnelle, et retrouver ces trois lois.

1 Force gravitationnelle

1.1 Force de gravitation et énergie potentielle

- Expression de la force pour deux points matériels M_1 et M_2 :

[1] p 143

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{M}_1 M_2\|^2} e_{1 \rightarrow 2}$$

Schéma avec notations. Valeur de G : $G = 6.672 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$. Cette force est **centrale** et **toujours attractive**.

2 Gravitation.

- Dans la suite, on place l'origine O en M_1 , et on se place en coordonnées sphériques, de sorte que $\vec{F} = -Gm_1 m_2 / r^2 \vec{e}_r$.
- Énergie potentielle associée : $\Delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -d - G \frac{m_1 m_2}{r} = -dE_p$. Convention : énergie potentielle nulle lorsque $r \rightarrow +\infty$. [1] p 146
- Remarque : la masse qui apparaît est la même que celle qui est présente dans le PFD... C'est le *principe d'équivalence*.

1.2 Champ gravitationnel et analogie électrostatique

- Considérons un astre de masse M_1 . On ne peut pas toujours l'identifier à un point matériel. On définit donc le *champ gravitationnel* $\vec{\mathcal{G}}_1$, tel que la force perçue par un corps de masse M_2 soit $\vec{F} = M_2 \vec{\mathcal{G}}_1$. On remarque que ce champ est homogène à une accélération (encore le principe d'équivalence!)
- On peut donner l'expression du champ $\vec{\mathcal{G}}$ créé par une distribution quelconque de masse (en sommant les contributions de masses ponctuelles infinitésimales) : [1] p 143

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \iiint_{\text{astre}} -G\mu(P) \frac{\vec{PM}}{PM^3} dt au.$$

- On a une force d'expression déjà vue, existence d'un champ : on remarque une certaine analogie avec l'électrostatique.
- Écrire l'expression de la force électrostatique, montrer l'analogie entre q et m , $-G$ et $1/4\pi\epsilon_0$. [4] p 503
- Pour aller plus loin dans l'analogie : on peut faire correspondre la densité de charges ρ et la masse volumique μ . On parvient au théorème de Gauss gravitationnel : [4] p 504

$$\text{div} \vec{\mathcal{G}} = -4\pi G\mu(M).$$

- On peut alors utiliser les résultats connus en électrostatique :
 - On a en version intégrale $\oint_{\Sigma} \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$, vec M_{int} la masse contenue dans la surface fermée Σ .
 - Pour un astre à symétrie sphérique de masse totale M , le champ créé à l'extérieur de cet astre est identique au champ créé par une masse M ponctuelle placée au centre de l'astre (voir [4] p 526 pour le calcul en électrostatique). C'est très important, car dans toute la suite on pourra donc considérer des masses ponctuelles sans trop de perte de généralité.
- Limite de l'analogie : il n'existe pas de masse négative, la force gravitationnelle n'est qu'attractive. De plus, l'analogie n'est valable qu'en statique, il ne faut pas essayer de parler de champ magnétogravitationnel.

Remarques

En fait si, le champ magnétogravitationnel existe! Si on linéarise les équations d'Einstein en jauge transverse (comme pour les ondes gravitationnelles) avec comme source un fluide parfait, on peut faire apparaître des équations fortement semblables aux équations de Maxwell. Voir <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0311030> pour plus de précisions.

Transition : On va maintenant étudier le mouvement d'une particule massive dans un champ de gravitation.

2 Mouvement dans un potentiel newtonien attractif

2.1 Équation du mouvement

- Techniquement, les deux corps se meuvent. Faisons cependant un calcul d'ordre de grandeur : $M_{\text{Soleil}} = 2 \times 10^{30}$ kg et $M_{\text{Terre}} = 6 \times 10^{24}$ kg, donc on peut considérer le Soleil fixe lors de l'étude du mouvement de la Terre. De même, on peut considérer la Terre fixe lors de l'étude du mouvement d'un satellite (d'une tonne environ).
- Système {masse ponctuelle m } dans le champ gravitationnel de M à symétrie sphérique placé à l'origine. Force

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r.$$

Cette force est *centrale* et *newtonienne* (évolution en $1/r^2$).

- Conservation du moment cinétique, mouvement plan, constante des aires. Interprétation avec l'aire balayée. [3] p 710
- La vitesse aéroilaire est constante : c'est la **seconde loi de Kepler!**

Transition : La conservation de $r^2\dot{\theta}$ va nous permettre de simplifier le problème et de se ramener à un seul degré de liberté!

2.2 Étude qualitative du mouvement

- Conservation de l'énergie, énergie potentielle effective. [1] p 148
- Domaine accessible à la trajectoire. États de diffusion, états liés. [2] p 755
- Remarque : jusqu'ici, on n'a fait que des considérations générales sur les forces centrales. À partir de maintenant, on rentre dans les spécificités du potentiel newtonien.
- Montrer les trajectoires sur le programme Python.

Écran

Programme Python sur les trajectoires en fonction de l'énergie mécanique. On a utilisé les expressions adimensionnées de [2] p 765.

Transition : On cherche à obtenir les deux lois de Kepler manquantes.

2.3 Équation de la trajectoire

- Définition du vecteur de Runge-Lenz : [1] p 156

$$\vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{GMm} - \vec{e}_r$$

- Conservation de \vec{A} au cours du temps : on peut l'utiliser comme choix de l'axe des x . [1] p 158
- On a alors

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \frac{1}{GMm} (\vec{v} \wedge \vec{L}_O) \cdot \vec{e}_r - r = \frac{1}{GMm} \underbrace{(\vec{e}_r \wedge \vec{v})}_{r\dot{\theta}\vec{e}_z} \cdot \underbrace{\vec{L}_O}_{mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z} - r = \frac{C^2}{GM} - r = \|\vec{A}\| r \cos \theta.$$

- On a donc une conique d'excentricité $e = \|\vec{A}\|$ et de paramètre $p = C^2/GM$. On a démontré la **première loi de Kepler!**

- On peut faire le lien entre le signe de E_m et la trajectoire, car il est possible de démontrer $E_m = \frac{GM^2m}{2c^2}(e^2 - 1)$. Pour cela, il faut écrire $e^2 = \|\vec{A}\|^2$ et faire apparaître l'expression de E_m en fonction de $r, \dot{r}, \dot{\theta}$. Voir [1] p 157.

Transition : On a vu la solution générale, appliquons ceci à deux cas particuliers : une planète autour du Soleil, puis un satellite autour de la Terre.

3 Applications : planètes et satellites

3.1 Trajectoire des planètes dans le système solaire

- On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. On ne considère que les interactions gravitationnelles entre chaque planète et le Soleil.
- Propriétés des ellipses : $a = p/(1 - e^2)$ et $b = \sqrt{ap}$. La période est le rapport entre l'aire de l'ellipse et la vitesse aréolaire, et on obtient

[3] p 730

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = 2.97 \times 10^{-19} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}.$$

On a établi la **troisième loi de Kepler**.

- On en déduit aussi $E_m = -GMm/2a$.

[3] p 729

Écran

Propriétés des ellipses

3.2 Satellites autour de la Terre

- Référentiel géocentrique supposé galiléen.
- Première vitesse cosmique : vitesse en orbite circulaire rasante autour de la Terre. Elle est donc telle que

[2] p 761

$$R_T = p = \frac{C^2}{GM_T} = \frac{R_T^2 v_0^2}{GM} \quad \text{soit} \quad v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = 7.9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- Deuxième vitesse cosmique (vitesse de libération) : l'obtenir par conservation de l'énergie. Remarque que l'on a $v_1 = \sqrt{2}v_0$: la marge de vitesse pour lancer un satellite est assez restreinte.

[2] p 762

Remarques

En prenant $v_1 = c$, on retrouve le rayon de Schwarzschild d'un trou noir. En fait, ce n'est pas étonnant par analyse dimensionnelle... On ne le présente pas ici car cela dessert un peu le message disant qu'il existe une théorie plus complète (à quoi bon aller plus loin si la mécanique newtonienne permet d'expliquer les trous noirs?).

Conclusion

- Résumé des trois lois de Kepler et de ce qu'on a vu
- Préciser qu'on observe en réalité dans le Système Solaire beaucoup d'autres effets *perturbatifs*, issus de forces de marée... qui nous apprennent des choses sur le système solaire (ex découverte de Neptune par Le Verrier), et sont pris en compte pour le calcul précis de trajets.

2 Gravitation.

- Ouvrir sur la relativité générale : description actuelle bien plus subtile des forces de gravitation, reposant sur l'équivalence entre un champ gravitationnel et une accélération. La présence de masses affecte la géométrie de l'espace-temps, qui en retour affecte le mouvement des masses.

Caractère non galiléen du référentiel terrestre.

Niveau Licence 2

Prérequis

- Mécanique du point
- Cinématique en référentiel non galiléen (composition des accélérations)
- Équation de Navier-Stokes

Message Le caractère non galiléen du référentiel terrestre est difficile à mettre en valeur expérimentalement, mais il est lié à de nombreux phénomènes visibles à grande échelle.

Bibliographie

- [1] Pascal BRASSELET. *Mécanique MPSI-PCSI*. Presses Universitaires de France, 2000.
- [2] Jean-Marie BRÉBEC et al. *Mécanique MPSI*. Hachette, 2003.
- [3] Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Mécanique 1*. Dunod, 1996.
- [4] José-Philippe PÉREZ. *Mécanique, fondements et applications, 7ème édition*. Dunod, 2014.
- [5] Baptiste PORTELLI et Julien BARTHES. *La physique par la pratique*. H & K, 2005.
- [6] Marc RABAUD. *Notes de cours d'Hydrodynamique*. 2016. URL : http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/NotesCoursL3_FIP.pdf.
- [7] Jean SIVARDIÈRE. « Les preuves expérimentales des mouvements de la Terre ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* 850 (2003).

Introduction

- Mouvement de la Terre prévu depuis longtemps (Antiquité), mais source de débats : Aristote disait qu'elle ne pouvait pas tourner très vite sinon nous serions entraînés (notes historiques dans [7])
- Rotation propre observée dès le XVIIème siècle sur d'autres planètes
- Phénomène qui nécessite de bien comprendre la gravitation, les forces, le changement de référentiel et qui en plus est difficile à percevoir, puisque l'on ne peut pas quitter la Terre pour l'observer!
- Problème complexe : on a vu les marées et le fait que le vent soit selon les isobares (fait observé par des marins), mais il est difficile de relier ça à la théorie. On n'a donc pas de situation « déclenchante » pour les scientifiques, et les expériences que l'on peut faire sont difficiles, ce qui explique que la théorie soit arrivée relativement tardivement.

Transition : On va chercher tout d'abord un référentiel galiléen dans lequel on pourra écrire les lois de la mécanique

1 Choix d'un référentiel d'étude

- Première loi de Newton : postulat d'existence et définition d'un référentiel galiléen. [1] p 32
- Référentiels terrestre, géocentrique et Copernic (parler de Kepler rapidement). Bien donner le centre et les axes. [2] p 205

3 Caractère non galiléen du référentiel terrestre.

- Sources de « non-galiléanité » du référentiel terrestre : translation elliptique autour du Soleil et rotation propre.
- Donner la valeur de Ω pour la Terre : jour sidéral de 23 h 56 min 4 s donc $\Omega = 2\pi/86164\text{s} = 7.292 \times 10^{-5} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Bien garder cette valeur en tête pour la suite de la leçon!

[3] p 271

Remarques

Selon le rapport de la compo 2018 : Un référentiel correspond à la donnée d'un solide et d'une horloge. Dans un référentiel galiléen, le mouvement du centre d'inertie d'un corps isolé ou soumis à des forces qui se compensent est rectiligne uniforme.

Transition : On va procéder par étapes, en supposant tout d'abord le référentiel géocentrique galiléen.

2 Conséquences de la rotation propre de la Terre

2.1 Équation du mouvement

- PFD dans le référentiel terrestre, non galiléen car en rotation par rapport au référentiel géocentrique \mathcal{R}_G .
- On néglige la précession de l'axe de rotation de la Terre (période de 25000 ans environ selon Wikipédia)
- Il vient, pour un mouvement de rotation relative des deux référentiels :

[1] p 176

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_T} = m\vec{\mathcal{G}}_T(M) + m\Omega^2 \vec{HM} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}_T} + \vec{F}_{\text{autres}}.$$

Faire un schéma pour illustrer la position du projeté H .

2.2 Poids

- Définition du poids :

[1] p 176

$$\vec{g} = \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \Omega^2 \vec{HM}.$$

- ODG à l'équateur
- Intérêt de cette définition : on peut prendre en compte le caractère non galiléen à peu de frais. On peut aussi contrôler la sphéricité de la Terre en mesurant \vec{g} en plusieurs points. Voir [3] p 274.

[4] p 105

Remarques

On prend parfois en compte le terme de marées dans le poids. Cela n'a presque aucun effet sur la valeur numérique de g , et il s'agit simplement d'une convention.

Transition : Pour un corps en mouvement, on doit aussi prendre en compte la force de Coriolis.

2.3 Effets de la force de Coriolis

Déviations vers l'Est

- Faire qualitativement l'explication de la déviation vers l'Est. Le calcul complet est fait dans [4] p 113. Il faut faire un beau dessin pour pouvoir justifier facilement du sens des forces!
- Expériences très tardives (1831) car déviation extrêmement faible!
- Ce calcul illustre bien la façon dont on traite Coriolis généralement : avec une méthode perturbative.

Écoulements géostrophiques

- PFD avec les forces fictives. Ne pas mettre le terme d'inertie d'entraînement, il est compris dans \vec{g} ! [6] p 182
- Nombres d'Ekman et de Rossby, ODG pour pouvoir les négliger.
- Mouvements à grande échelle : approximation géostrophique. [5] p 98
- En stationnaire et linéaire : \vec{v} *colinéaire* aux isobares! [6] p 183
- Montrer la carte des vents et isobares.

Écran

Vent et isobares en temps réel (simulés) sur https://earth.nullschool.net/fr/#current/wind/surface/level/overlay=mean_sea_level_pressure/orthographic. Montrer une dépression dans l'hémisphère Nord, repérer le sens d'écoulement, et montrer qu'il est opposé pour une dépression dans l'hémisphère Sud. On peut aussi comprendre le sens de rotation en regardant la direction de la force (en prenant la composante de $\vec{\Omega}$ normale à la surface de la Terre en un point donné) : pour une dépression, on aurait tendance à aller vers le centre, ce qui décale vers le côté, etc.

Transition : Maintenant, regardons l'effet du mouvement de la Terre autour du Soleil : on ne suppose plus le référentiel géocentrique galiléen mais le référentiel de Copernic galiléen.

3 Mouvement orbital de la Terre autour du Soleil : les marées

3.1 Mouvement de la Terre dans \mathcal{R}_C

- Pour une Terre à symétrie sphérique, on a

$$\vec{a}_{\mathcal{R}_C} = \vec{\mathcal{G}}_A(T)$$

où $\vec{\mathcal{G}}_A(T)$ est le champ gravitationnel créé par tous les astres. Voir [5] p 21 ou [3] p 270. Cela est valable car les astres à symétrie sphériques se comportent gravitationnellement comme des masses ponctuelles.

3.2 Théorie statique des marées

- PFD dans le **référentiel géocentrique** pour un point lié à la Terre : [2] p 207

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_G} = m\vec{\mathcal{G}}_T(M) + m\left(\vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(T)\right).$$

- On reconnaît le terme de marée dû à un astre A : $\vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(T)$. Ce terme est *différentiel*.
- Calculer la contribution à l'ordre 1 : on a une force $2\mathcal{G}M_A d/D^3$. On a donc un terme qui [2] p 209 dépend du signe de d , et qui décroît en $1/D^3$.
- Montrer les ODG et le programme Python.
- En « égalisant les potentiels », on peut écrire

$$g\Delta h \simeq \frac{\mathcal{G}M_A d^2}{D^3},$$

ce qui donne $\Delta h \simeq 0.6$ m pour la Lune...

- En réalité, il faut faire de la dynamique des marées pour comprendre pourquoi elles n'ont pas la même amplitude partout, pourquoi elles ne sont pas en phase avec l'excitation...

Écran

- ODG du terme de marées pour la Lune, le Soleil...
- Programme Python qui montre l'influence de la Lune et du Soleil. Retrouver les échelles de temps.

Conclusion

Écran

PFD complet dans le référentiel terrestre.

- Le terme de marées nous permet d'avoir une idée d'à quel point un référentiel est galiléen : si le champ gravitationnel est homogène sur l'extension typique du mouvement considéré, on peut supposer le référentiel galiléen. Pour le référentiel géocentrique, ça fonctionne pour des corps près de la Terre ([1] p 164). Pour le référentiel de Copernic, l'approximation est très bonne : voir [1] p 161.
- De façon générale, les corrections à prendre en compte sont très faibles. C'est ce qui explique la grande difficulté qu'il y a eu à prouver la rotation de la Terre par rapport au Soleil. Cependant, pour les expériences de précisions, ces effets peuvent s'avérer critiques : cf masse du boson Z au LHC.

Remarques

- C'est une leçon où il est critique de faire de beaux schémas.
- Lire [7] pour la culture.
- Le contenu n'est plus vraiment au programme de CPGE : en PC, on ne parle des marées qu'en approche documentaire
- De façon générale, on peut étudier la « galiléanité » d'un référentiel en quantifiant à quel point il est en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre. Typiquement, on peut comparer la distance Terre-Soleil au rayon de courbure de la trajectoire de la Terre autour du Soleil.
- Tout le monde n'est pas d'accord sur un bon critère de « galiléanité » : certains disent qu'on doit pouvoir négliger toute l'accélération d'entraînement, mais il est en fait suffisant de négliger le terme différentiel de marées. Par ailleurs, il n'est pas clair en quoi l'échelle temporelle est importante.

Précession dans les domaines macroscopique et microscopique.

Niveau L3

Prérequis

- Mécanique du solide
- Couplage entre un moment magnétique et un champ
- Bases de mécanique quantique

Message Le mouvement de précession est caractérisé par une équation spécifique, qui entraîne des conséquences étonnantes. Il est présent à de nombreuses échelles.

Bibliographie

- [1] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Mécanique 2*. Dunod, 1985.
- [2] Christophe CAPPE. « À propos de la précession des équinoxes ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* 889 (2006).
- [3] Claude COHEN-TANNOUDJI, Bernard DIU et Franck LALOË. *Mécanique quantique, tome 1*. Hermann, 1997.
- [4] Jean HARE. *Abrégé de mécanique quantique à l'usage de la préparation à l'agrégation de physique*. 2018.
- [5] José-Philippe PÉREZ. *Mécanique, fondements et applications, 7ème édition*. Dunod, 2014.

Introduction

- Mouvement de précession observé dans la vie de tous les jours : toupie, cerceau lancé... On ne fait pas l'expérience tout de suite car il n'est pas évident de bien isoler le mouvement de précession.
- Pas très logique : poids vers le bas mais l'objet tourne!

1 Mouvement de précession

- Définition précise : un vecteur \vec{A} est en *précession* autour d'un axe \vec{e}_z à la vitesse angulaire de précession Ω si

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \Omega \vec{e}_z \wedge \vec{A}$$

[5] p 440

- On multiplie les deux membres de l'équation par \vec{A} : on montre que la norme $\|\vec{A}\|$ est constante.
- On fait de même avec \vec{e}_z : on montre que l'angle avec \vec{e}_z est constant.
- Mouvement : \vec{A} décrit un cône autour de $\vec{\Omega}$.
- On peut donc voir le mouvement de précession un peu différemment : il s'agit du changement d'orientation de l'axe de rotation propre d'un objet au cours du temps autour d'un axe donné.
- Exemples :
 - toupie (en faire tourner une)

4 Précession dans les domaines macroscopique et microscopique.

- axe de la Terre (voir [2] p 1555) : l'axe est la normale au plan de l'écliptique et la période est de 25700 ans. Cette précession est due aux moments exercés par le Soleil et la Lune (et quelques autres planètes) sur le bourrelet équatorial de la Terre.
- périhélie de Mercure (deux contributions : l'une due aux effets gravitationnels des astres voisins, l'autre due aux effets relativistes créés par l'étoile centrale)

Expérience

Faire tourner rapidement une toupie, observer le mouvement de l'axe de rotation.

Transition : On va étudier plus précisément ces exemples. On a déjà vu ce type de mouvement dans la vie de tous les jours : la toupie. Montrer le gyroscope et dire que ça fonctionne pareil, c'est juste plus quantitatif.

2 Approximation gyroscopique

Écran

Schéma avec définition des angles et des vecteurs

2.1 Simplification du problème

Expérience

Lancer le gyroscope.

- Justification : on a vu que la toupie semblait suivre un mouvement de précession, on utilise un dispositif un peu plus contrôlable pour le montrer.
 - On a bien les caractéristiques d'un mouvement de précession.
 - On observe que la vitesse de rotation propre est bien plus grande que celle de précession.
- Angles d'Euler pour paramétrer la rotation d'un solide : [5] p 275
 - **précession** : $\psi = (O_x, O_u)$
 - **nutation** : $\theta = (O_z, O_{z'})$
 - **rotation propre** : $\phi = (O_u, O_{x'})$
 - Bien les montrer sur le gyroscope, ainsi que les degrés de liberté de rotation.
 - Vecteur de rotation

$$\vec{\Omega} = \dot{\psi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_u + \dot{\phi} \vec{e}_{z'}$$

qu'il va falloir exprimer dans une base adaptée.

- On considère un solide qui possède une symétrie de révolution : au lieu de se placer dans une base qui tourne avec celui-ci ($\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}$), on utilise ($\vec{e}_u, \vec{e}_w, \vec{e}_{z'}$).
- Il suffit donc d'exprimer le vecteur \vec{e}_z dans cette base : on a $\vec{e}_z = \cos\theta \vec{e}_{z'} + \sin\theta \vec{e}_w$ donc [5] p 276

$$\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_u + \dot{\psi} \sin\theta \vec{e}_w + (\dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi}) \vec{e}_{z'}$$

- On va chercher à étudier le mouvement du gyroscope. Préciser le système : {gyroscope}, le référentiel : terrestre supposé galiléen.
- Calcul du moment cinétique en O : on a $\vec{L}_O = [J] \vec{\Omega}$ avec

$$[J] = \begin{pmatrix} I_u & 0 & 0 \\ 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{pmatrix}$$

- Expliciter l'approximation gyroscopique : le moment cinétique est uniquement selon $\vec{e}_{z'}$, on a $\vec{L}_O = J\dot{\phi}\vec{e}_{z'}$.
- Pour que l'approximation soit valable, il faut pouvoir négliger $\dot{\psi} \cos\theta$ devant $\dot{\phi}$ et $|\dot{\theta}|I_u, |\dot{\psi}|I_w$ devant $|\dot{\phi}|I_{z'}$. Faire des ordres de grandeur dans le cas du gyroscope : on peut dire $I_u = I_w = ml^2$, avec m la masse du disque et l la distance disque-centre de rotation. De plus, on peut utiliser la formule du moment d'inertie d'un cylindre pour $I_{z'}$. On peut mesurer les vitesses de rotation, on s'attend de toute façon à ce que l'approximation soit raisonnable. Les valeurs de moments d'inertie sont dans [5] p 299.

[1] p 144

Attention

Toutes les références consultées pensent qu'il est suffisant de supposer $|\dot{\phi}| \gg |\dot{\theta}|, |\dot{\psi}|$. Pour être rigoureux, il faut en fait avoir $|\Omega_{z'}|I_{z'} \gg |\Omega_u|I_u, |\Omega_w|I_w$.

Remarques

Dans cette partie, il n'est pas nécessaire de développer précisément la base de Resal. En fonction du temps, on peut aussi tout simplement dire que l'on approxime $\vec{L}_O = J\dot{\phi}\vec{e}_{z'}$ et donner les ODG des rapports de moment d'inertie et d'angle sans donner $\vec{\Omega}$ dans la base de Resal.

Transition : On a simplifié la description cinématique du gyroscope, on peut désormais étudier sa dynamique.

2.2 Mouvement d'un gyroscope déséquilibré

- Bilan des forces : poids et réaction du support, mais seul le poids a un moment (liaison parfaite), et celui-ci vaut $\vec{OC} \wedge m\vec{g}$, avec C le centre de masse du gyroscope. Attention, dans l'expérience O est le point au niveau de la liaison Cardan.
- Théorème du moment cinétique dans le référentiel du laboratoire :

[5] p 440

$$\left(\frac{\partial \vec{L}_O}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}} = \frac{mgl}{J\dot{\phi}} \vec{e}_z \wedge \vec{L}_O,$$

avec $l = \|\vec{OC}\|$.

- On a donc bien précession tant que le gyroscope est déséquilibré! Montrer l'influence de $\dot{\phi}$; celle de l est moins claire car changer l fait changer J .
- Situation dans laquelle la précession amène un mouvement totalement imprévu : roue de vélo accrochée par des fils. Montrer la vidéo.
- Interprétation : pendant dt , le moment du poids décale le moment cinétique. Or le moment cinétique est lié à l'axe de révolution de la roue, et ainsi c'est toute la roue qui tourne!

Expérience

Montrer qualitativement sur le gyroscope (déséquilibré, donc qui fonctionne comme une toupie) l'évolution de la période de rotation en fonction de plusieurs paramètres du système.

Écran

Vidéo de roue de vélo en précession : <https://www.youtube.com/watch?v=GEKtnlZfksI>

- Montrer le cône de précession
- Commentaire sur le sens lié au sens de rotation de la roue
- Slide avec un schéma fait directement sur la vidéo

Remarques

Le mouvement est plus difficile à interpréter en terme de forces. Je pense que c'est la réaction du support qui fait tourner l'axe de rotation.

Transition : On a étudié un mouvement de précession macroscopique, on va voir qu'il existe des situations microscopique (à l'échelle de l'atome) où on peut retrouver le même type de mouvement.

3 Précession dans le domaine magnétique**3.1 Moment magnétique dans un champ \vec{B}**

- Une particule (typiquement un électron) de charge q et de masse m avec un moment cinétique \vec{L} a un moment magnétique : la rotation crée une « spire de courant ». [5] p 444
- On obtient un moment $\vec{\mathcal{M}} = q/2m\vec{L}$.
- Pour certaines particules (électrons libres, atomes d'argent dans leur fondamental), le moment cinétique est le spin ($\vec{\mathcal{S}}$) donc la formule précédente devrait être valide avec $\vec{\mathcal{S}}$. En réalité, on ajoute un facteur g . On a donc pour un électron libre [3] p 387

$$\vec{\mathcal{M}} = \gamma\vec{\mathcal{S}} \quad \text{où} \quad \gamma = gq/2m.$$

- On aurait donc en physique classique, dans un champ \vec{B} extérieur qui crée un couple $\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$: [3] p 388

$$\frac{d\vec{\mathcal{S}}}{dt} = \gamma\vec{\mathcal{S}} \wedge \vec{B}$$

Transition : En réalité, pour des particules seules, ces quantités sont quantifiées, il faut un traitement quantique

3.2 Précession de Larmor

- Hamiltonien $\hat{H} = \omega_0\hat{S}_z$, états propres $|+\rangle$ et $|-\rangle$. [3] p 401
- On admet qu'on peut écrire que l'on part de la forme générale [3] p 393

$$|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\exp\left(-i\frac{\varphi}{2}\right)|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\exp\left(i\frac{\varphi}{2}\right)|-\rangle.$$

- État à tout temps t , direction où la composante du spin est $+\hbar/2$ avec probabilité 1. [3] p 402
- Théorème d'Ehrenfest pour les valeurs moyennes (on peut se référer à [3] p 449, qui fait le traitement avec un champ \vec{B} qui n'est pas uniquement selon \vec{e}_z) :
 - On a le théorème d'Ehrenfest [4] p 65

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A}, \hat{H}]\rangle + \frac{\partial\langle\hat{A}\rangle}{\partial t}$$

- On a $[\hat{S}_x, \hat{S}_z] = -i\hbar\hat{S}_y$ et $[\hat{S}_y, \hat{S}_z] = +i\hbar\hat{S}_x$. [4] p 91
- On en déduit que la valeur moyenne $\langle\hat{\mathcal{S}}\rangle$ vérifie l'équation

$$\frac{d\langle\hat{\mathcal{S}}\rangle}{dt} = -\gamma B_0\vec{e}_z \wedge \langle\hat{\mathcal{S}}\rangle,$$

ce qui correspond à l'équation vérifiée par $\vec{\mathcal{S}}$ en classique! On a donc un autre exemple de précession, à une échelle bien plus petite.

4 Précession dans les domaines macroscopique et microscopique.

- On utilise la précession des spins en RMN : en raison de la structure moléculaire, le champ \vec{B} vu par chaque partie de la molécule est un champ effectif, et on peut détecter des variations du nuage électronique en étudiant les fréquences de précession. On a plus d'informations dans [5] p 446 et [3] p 443.

Attention

On peut facilement avoir des erreurs de signe, car $\omega = -\gamma B_0 = +eqB_0/2m$ pour l'électron. En général on préfère garder le facteur γ pour que le raisonnement soit valable pour plusieurs particules.

Conclusion

- Résumé, universalité de la précession
- Utilité de la précession en RMN
- Puissance du gyroscope : couple gyroscopique, qui permet de compenser le roulis dans les bateaux par exemple. Voir [1] p 148-149.

Remarques

- Il faut être propre sur les ordres de grandeur
- En cas de manque de temps il est possible de sauter tout le traitement quantique de la RMN
- Il faut bien comprendre la RMN et sa réalisation expérimentale.
- Un gyroscope est un capteur qui mesure un angle par rapport à un référentiel inertiel et un gyromètre mesure une vitesse de rotation.

Niveau Licence

Prérequis

- Mécanique du point et du solide
- Référentiel barycentrique

Message Une loi de conservation permet d'obtenir de très nombreuses informations sur un système (jusqu'à parfois obtenir l'équation de la trajectoire) sans pour autant résoudre explicitement le PFD. À chaque quantité conservée correspond une invariance.

Bibliographie

- [1] Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Mécanique 1*. Dunod, 1996.
- [2] Hubert GIÉ et al. *Physique Spé : MP*, MP et PT*, PT. Cours et exercices d'application*. Tec & Doc, 2000.
- [3] Lev LANDAU et Evgeny LIFSHITZ. *Mécanique*. Pergamon Press, 1969.
- [4] José-Philippe PÉREZ. *Mécanique, fondements et applications, 7ème édition*. Dunod, 2014.
- [5] Marie-Noëlle SANZ, Anne-Emmanuelle BADEL, François CLAUSSET et al. *Physique tout-en-un MPSI-PCSI-PTSI, 3ème édition*. Dunod, 2008.
- [6] Marie-Noëlle SANZ, Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2004.
- [7] Jean SIVARDIÈRE. « Comparaison entre le mouvement de Képler et le mouvement elliptique harmonique ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* 751 (1993).

Introduction

- On connaît plusieurs théorèmes en mécanique qui relient les variations de grandeurs physiques à des « sources » : le théorème de la résultante cinétique relie la variation de quantité de mouvement aux forces, le théorème du moment cinétique la variation de moment cinétique aux moments...
- En absence de telles « sources », on aura donc conservation!
- On va voir que ces lois de conservation sont capitales en physique, et qu'elles permettent de résoudre des problèmes complexes : notamment le problème à deux corps que l'on traitera tout au long de cette leçon.

1 Conservation de la quantité de mouvement

1.1 Loi de conservation

- Système matériel Σ dans un référentiel galiléen \mathcal{R} . Théorème de la résultante cinétique dans le cas d'un système isolé (ou pseudo-isolé : résultante des forces nulle) :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}_{\text{ext}} = \vec{0},$$

où $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ ou $\vec{P} = \iiint \rho \vec{v} d\tau$. Alors $\vec{P} = \text{cste}$: il s'agit d'une intégrale première du mouvement.

[6] p 226

- Origine physique : homogénéité de l'espace. En effet, si l'énergie potentielle est $V(y, z)$, il n'y a pas de force selon \vec{e}_x .

1.2 Exemple

- Ours sur un morceau de banquise qui se détache. Poser proprement le système, montrer que la quantité de mouvement selon x est conservée. Obtenir la relation $D/d = m/(M + m)$. [6] p 256
- Message important à faire passer : le chemin parcouru par l'ours ne joue aucun rôle, seuls les états initial et final sont importants!

Remarques

En réalité, la quantité de mouvement est une grandeur *conservative* et pas constante : elle n'est « ni créée ni détruite ». Voir [2] p 305 pour plus de détails.

1.3 Application au problème à deux corps

- Notation, TRC pour le centre de gravité G . [1] p 137
- Passage dans le référentiel barycentrique, galiléen ici car $\vec{v}_G = \vec{cste}$.
- Mobile fictif et masse réduite.

Transition : On a parlé de résultantes de forces, on peut aussi s'intéresser aux moments. Les mouvements de rotation donnent un rôle majeur à une autre grandeur mécanique : le moment cinétique.

2 Conservation du moment cinétique

2.1 Loi de conservation

- Système matériel Σ dans un référentiel galiléen \mathcal{R} . Théorème du moment cinétique en un point fixe :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}},$$

où $\vec{L}_O = \sum_i m_i O\vec{M}_i \wedge \vec{p}_i$ (ou forme intégrale).

[6] p 227

- Conservation pour un système isolé ou une force centrale.
- Origine physique : isotropie de l'espace. Si le potentiel ne dépend pas de θ , les forces seront selon \vec{e}_r et \vec{e}_z et L_z sera alors conservé.

Remarques

Savoir que lorsque le point A en lequel on applique le TMC n'est pas fixe, on a un terme supplémentaire

$$m\vec{v}(G) \wedge \vec{v}(A_{\text{géom}}),$$

où le point $A_{\text{géom}}$ n'est pas lié au système.

2.2 Exemple

Écran

Vidéo YouTube : https://www.youtube.com/watch?v=20c-Ucx_4Ug (2 :23).

- Conservation de $L_z = I\omega$.
- Rapide calcul d'ODG à partir de [4] p 324 sur la danseuse.
- Deux systèmes emboîtés : vitesse de rotation finale $\omega_f/\omega_0 = I_2/I_1 + I_2$. [2] p 309

Transition : On revient sur le mobile fictif du problème à deux corps : il est soumis à une force centrale, ce qui va nous permettre d'appliquer des résultats obtenus dans cette section.

2.3 Problème à deux corps et force centrale

- Le moment cinétique $\vec{L}_G = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ du mobile fictif est une constante, donc \vec{r} est orthogonal à un vecteur constant et le mouvement est plan. [1] p 139
- En coordonnées polaires, on a $\vec{L}_G = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$, donc $r^2\dot{\theta}$ est une constante. [1] p 132

Transition : Il reste une grandeur mécanique qui peut grandement simplifier la résolution de certains problèmes : l'énergie. Cependant elle fait aussi apparaître des subtilités...

3 Conservation de l'énergie

3.1 Systèmes conservatifs

- Théorème de l'énergie cinétique. Bien remarquer que les forces **internes** apparaissent! [6] p 298
- Conservation de l'énergie mécanique pour un système conservatif. [6] p 308
- Pour un système à un seul degré de liberté, écrire la conservation de l'énergie mécanique suffit à résoudre entièrement le problème : on peut par exemple résoudre intégralement le pendule simple.
- Origine physique : invariance par translation temporelle. Cependant, on a montré que l'énergie mécanique n'était conservée que pour les systèmes conservatifs... Calcul avec l'énergie des deux systèmes emboîtés de [2] p 309 : il semblerait que l'énergie mécanique ne soit pas conservée. En réalité, il faut considérer l'énergie totale, qui contient l'énergie interne. C'est de la thermo et on ne développera pas ça lors de la leçon.

Transition : Retour aux problèmes conservatifs : on peut résoudre le problème à deux corps car la force est conservative.

3.2 Trajectoires dans le problème à deux corps

- On admet que l'énergie s'écrit bien

$$E = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + U(\|\vec{r}\|)$$

- où le potentiel $U(r)$ a été introduit car on a supposé la force conservative et centrale. [1] p 139
- Graphe d'énergie potentielle effective, trajectoire circulaire, trajectoires liées et états de diffusion. [1] p 132
- Remarquer qu'on n'a rien supposé sur la forme de $U(r)$! Les seules hypothèses réalisées sont que l'interaction est centrale et conservative.
- On a pour le problème à deux corps une quantité conservée (il s'agit d'une symétrie dynamique) : le vecteur de Runge-Lenz

$$\vec{\mathcal{A}} = \frac{1}{GMm} \vec{v} \wedge \vec{L}_O - \vec{e}_r.$$

- À l'aide de la conservation du vecteur de Runge-Lenz, on peut remonter à l'équation de la trajectoire. [7] [5] p 731

Conclusion

- Trois lois de conservation, trois occasions d'admirer leur puissance
- On peut traiter à l'aide des lois de conservation exprimées durant cette leçon la mécanique des chocs. C'est particulièrement intéressant, car on ne connaît rien à la physique du choc lui-même mais on peut tout de même appliquer des lois de conservation! On peut même généraliser à la physique relativiste...
- On a pu faire un premier lien entre les propriétés d'invariance du système et les quantités conservées. De manière fondamentale, à toute symétrie continue correspond une quantité conservée, il s'agit du théorème de Noether.

[1] p 201

Remarques

- Bilan de degrés de liberté pour le problème à deux corps : c'est un peu compliqué car tout dépend de ce que l'on appelle « degré de liberté ». Une façon de traiter le problème est :
 - deux particules en 3D donc 12 degrés de liberté
 - Barycentre : libre, entièrement décrit par x_0, y_0, z_0, \vec{v}_0 .
 - Particule réduite : conservation du moment cinétique et de Runge-Lenz donnent 5 équations (une équation redondante, et une autre contient l'énergie), ainsi il reste un degré de liberté qui se traduit dans la relation $r(\theta)$.De façon générale, le PFD est suffisant pour décrire intégralement l'évolution du système si on connaît les positions et vitesses à un instant donné (c'est ce qu'on fait lors de la résolution numérique du problème à N corps).
- On pourrait penser que l'homogénéité implique l'isotropie, cependant dans un cristal biaxe on a homogénéité mais pas isotropie.
- Voir [3] pour un peu de background niveau L3 sur les lois de conservation.

Niveau L3

Prérequis

- Mécanique classique
- Électromagnétisme
- Principe du Michelson

Message Afin de pouvoir expliquer les expériences de physique de la fin du XVIIIème siècle, il a fallu renoncer aux transformations galiléennes. Cela implique de lier profondément l'espace et le temps, entraînant des effets allant à l'encontre de l'intuition newtonienne.

Bibliographie

- [1] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Mécanique 1*. Dunod, 1984.
- [2] José-Philippe PÉREZ. *Relativité, fondements et applications*. Dunod, 1999.
- [3] Jean-Michel RAIMOND. *Électromagnétisme et Relativité*. 2000. URL : <http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/electromagnetisme.htm>.
- [4] Claude SEMAY et Bernard SILVESTRE-BRAC. *Relativité restreinte, bases et applications, 3ème édition*. Dunod, 2016.

Introduction

- Cinématique : étude des mouvements indépendamment de leurs causes.
- Fin du XIXème : difficile de réconcilier électromagnétisme et mécanique classique, c'est ce qu'on va voir.
- Début du XXème : Einstein propose une solution.

Transition : On va donc commencer par montrer les insuffisances de la mécanique classique pour expliquer certains phénomènes.

1 Fondements de la relativité restreinte

1.1 Insuffisances de la mécanique classique

- On considère deux observateurs dans deux référentiels galiléens \mathcal{R} et \mathcal{R}' , de vitesse relative \vec{v}_e . L'équation de d'Alembert pour le champ (\vec{E}, \vec{B}) , issue des équations de Maxwell, prévoit une vitesse de propagation c pour les deux référentiels, tandis que les lois de transformation galiléennes amèneraient à prévoir une différence de vitesse \vec{v}_e . Au début du XXème siècle, rien n'amenait à mettre les lois de transformation galiléennes en défaut; on en a déduit que les équations de Maxwell ne sont valables que dans un référentiel absolu, l'« éther », dans lequel la lumière se propage avec la célérité c . [1] p 215
- Expérience de Michelson et Morley, qui cherchent à vérifier l'existence de l'éther en mesurant la différence de vitesse de la lumière selon la direction. Présenter le dispositif, expliquer qu'on aura un temps τ_2 différent du temps τ_1 et que tourner l'interféromètre revient à inverser les miroirs. Donner un ordre de grandeur de v_e/c , montrer les résultats. [2] p 12, [1] p 216
- L'hypothèse de l'éther n'est pas validée : comment peut-on faire?

Écran

Expérience de Michelson et Morley

Transition : Façon de résoudre les problèmes : au lieu d'invalider les équations de Maxwell, Einstein propose des postulats par analogie avec la mécanique newtonienne.

1.2 Les postulats d'Einstein

- Postulat de relativité (Einstein 1905, mais présent dans les travaux de Poincaré en 1904) : les lois physiques sont invariantes par changement de référentiel galiléen. [1] p 219
- Ce postulat ne précise pas quelles sont les lois qui sont invariantes : typiquement les équations de Maxwell ne le sont clairement pas. Cependant la valeur de la vitesse de la lumière l'est.
- Autres postulats historiques : invariance de c et validité de la mécanique pour $v \ll c$. [1] p 219

Remarques

En fait, la vitesse c dont on parle tout le long de la leçon n'est pas nécessairement la vitesse de la lumière : il s'agit de la vitesse maximale de l'information dans l'Univers, ne pouvant être atteinte que par des particules de masse nulle. Le photon étant de masse nulle, il s'agit aussi de la vitesse de la lumière.

Transition : On a donc une vitesse de la lumière de même valeur quel que soit le référentiel : comment l'expliquer, comment régler le problème ?

1.3 Nécessité de la relativité du temps

- Horloge à photons avec seulement le calcul du temps de parcours avec Pythagore. Ne pas encore amener la notion d'événement. [4] p 16
- Nécessité de définir un temps t' dans le référentiel \mathcal{R}' . Il faut donc oublier l'objectivité du temps et l'inclure dans les transformations entre référentiels galiléens.
- Tracer la relation $\gamma(v/c)$. Remarquer qu'on tend vers 1 en 0.

ÉcranRelation $\gamma = f(v/c)$.

Transition : Voyons comment on peut écrire les nouvelles transformations entre référentiels qui prennent en compte le temps.

2 Changement de référentiel**2.1 Transformation de Lorentz**

- Définition d'événement : phénomène localisé dans l'espace et le temps, existant indépendamment d'un référentiel mais caractérisé par des coordonnées (t, x, y, z) dans chacun d'entre eux. [4] p 22
- La célérité de la lumière étant constante, on peut associer à un événement les coordonnées (ct, x, y, z) qui ont le mérite de toutes posséder la même dimension.
- Donner la transformation de Lorentz (avec Δx en fonction de $\Delta x'$, pour la suite des calculs) en définissant très proprement les référentiels, les axes, les coordonnées, etc. Définir β et γ . [1] p 221

- Lorentz inverse : il suffit de changer le signe de la vitesse
- Limite $v/c \rightarrow 0$: on retrouve les transformations de Galilée.

Remarques

- Il est plus naturel d'écrire les transformations de Lorentz avec les variations, car il n'y a pas d'origine absolue dans l'Univers.

On ne présente évidemment pas la démonstration de la transformation de Lorentz lors de cette leçon, mais il peut être bien de connaître les bases de celle-ci. On souhaite rendre l'intervalle $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ invariant par changement de référentiel, donc par transformation de Lorentz Λ : cela impose

$$\Lambda^\top \eta \Lambda = \eta$$

Attention

Il est crucial de bien définir les référentiels et de se tenir aux mêmes définitions ensuite, afin d'éviter de tout confondre.

2.2 Effets sur les mesures

- Dilatation des durées : définition d'une horloge, fixe dans \mathcal{R}' . Définition des événements : $A(t'_A, x')$ est le premier tick, $B(t'_B, x')$ est le second. Durée propre, expression de $\Delta t = t_B - t_A$ dans \mathcal{R} . [1] p 236
- Faire le lien avec l'horloge à photons étudiée précédemment.
- Longueur : mesure de Δx en un instant. On peut montrer que cela est équivalent à mesurer le temps pour passer en un point x : voir [3] p 94.
- Contraction des longueurs, avec une règle fixe dans \mathcal{R}' : on mesure la distance entre les extrémités de la règle au même instant dans \mathcal{R} . Pour rendre le calcul rapide, on utilise directement les coordonnées de \mathcal{R}' en fonction de \mathcal{R} : il s'agit de la transformation inverse de celle utilisée pour la dilatation des durées. [1] p 246

Remarques

Lors de la mesure de la longueur propre, la mesure des deux extrémités de l'objet n'a pas besoin d'être simultanée. En effet, l'objet étant immobile dans le référentiel de mesure, la position de ses extrémités est indépendante du temps : si on souhaite mesurer la longueur d'une règle, on peut regarder son côté droit 6 ans après son côté gauche sans que la longueur ne soit changée!

Transition : Lors d'une transformation de Galilée, les distances et durées sont conservées. Or dans cette nouvelle théorie, on semble n'avoir plus aucun invariant. Comment peut-on alors assurer la causalité entre deux événements? Peut-on contraindre les variations des durée et d'espace?

3 Relativité restreinte et causalité

3.1 Classification des événements

- Introduire l'intervalle, et démontrer son invariance pour une transformation 1D. On préférera la notation

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

- Intervalles de genre temps ($\Delta s^2 < 0$), ($\Delta s^2 > 0$) et de genre lumière ($\Delta s^2 = 0$). Attention, le signe dépend de la convention choisie.
- Pour un genre temps, **la causalité est conservée**. C'est un résultat très important, car il permet de « réparer » tous les potentiels problèmes que la relativité du temps avait pu faire apparaître. On peut donc séparer les événements passés et futurs, par rapport à un événement pris comme origine.

Remarques

Pour deux événements séparés par un intervalle de genre temps, il existe un référentiel tel que ces deux événements aient lieu au même endroit. De même, pour deux événements séparés par un intervalle de genre espace, on peut trouver un référentiel tel qu'ils aient lieu au même moment. Voir pour ces démonstrations [3] p 92.

Transition : Pour un événement donné, on peut regarder le genre de l'intervalle qu'il a avec les autres événements, et tracer des diagrammes espace-temps.

3.2 Diagrammes d'espace-temps

- Si on ne considère pas de variation en y et en z , on peut tracer un *cône de lumière*. On place l'événement initial en 0, ainsi on peut remplacer Δx par x , etc. [4] p 37
- Trajectoires des photons.
- Placer le passé, le futur et l'ailleurs (intervalles de genre espace).
- Ligne d'univers d'un observateur, différents cônes de lumière. Un événement dans l'ailleurs de A peut entrer dans son cône du passé au bout d'un certain temps. [4] p 37

Conclusion

- Ouvrir sur les diagrammes de Lorentz ([4] p 38) et de Penrose ([4] p 42, encore plus utiles en relativité générale)
- Parler de la loi de composition des vitesses, de l'effet Doppler
- Maintenant, on peut s'intéresser à la dynamique, en ajoutant des versions relativistes des théorèmes connus en mécanique classique.

7 Dynamique relativiste.

Niveau L3

Prérequis

- Cinématique relativiste
- Mécanique classique
- Mouvement de particules chargées

Message On a décrit les transformations de Lorentz : on cherche désormais une nouvelle façon d'écrire les lois de la dynamique respectant le principe de relativité.

Bibliographie

- [1] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Mécanique 1*. Dunod, 1984.
- [2] Jean-Michel RAIMOND. *Électromagnétisme et Relativité*. 2000. URL : <http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/electromagnetisme.htm>.
- [3] Claude SEMAY et Bernard SILVESTRE-BRAC. *Relativité restreinte, bases et applications, 3ème édition*. Dunod, 2016.

Introduction

1 Formalisme quadrivectoriel

1.1 Espace-temps de Minkowski

On fait essentiellement des rappels de cinématique, nécessaires afin de fixer les notations utilisées. Ne pas faire les démonstrations, et passer vite sur les résultats.

- Deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' ; \mathcal{R}' a dans \mathcal{R} une vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_x$. Définition de γ et de β , transformation de Lorentz (avec des x et non pas des Δx , pour être cohérent avec la définition de quadrivecteur ensuite). [1] p 221
- Intervalle entre deux événements $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$, et pour deux événements infiniment proches $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$.
- Temps propre : intervalle de temps s'écoulant entre deux « tics » d'une horloge dans \mathcal{R}' . Dans ce référentiel l'horloge est immobile, donc $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ et le temps propre est $d\tau$. Dans \mathcal{R} on a $ds^2 = -c^2 dt^2 + dl^2 = -c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ et ainsi

$$dt = \gamma d\tau.$$

[2] p 83

- Un point de l'espace-temps est caractérisé par ses coordonnées (ct, x, y, z) : cela définit le quadrivecteur position x^μ ou \tilde{x} .
- De façon générale, un quadrivecteur est un ensemble de quatre quantités qui se transforment comme x^μ . [1] p 230
- Pseudo-norme (attention aux conventions!). [1] p 230
- ds^2 est la pseudo-norme de dx^μ .
- Produit scalaire, qui est aussi un invariant relativiste. [1] p 230

Remarques

Je préfère la notation x^μ pour les quadrivecteurs, cependant pour ne pas rentrer dans des subtilités de contravariant et covariant il vaut mieux écrire \tilde{x} lorsqu'il y aurait des contractions d'indices.

1.2 Quadrivecteurs vitesse et énergie-impulsion

— On sait que dx^μ est un quadrivecteur et que $d\tau$ est un invariant. Ainsi on peut construire un quadrivecteur

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Interprétons sa signification.

— On a $dx^\mu/d\tau = dx^\mu/dt dt/d\tau = \gamma dx^\mu/dt$ puis

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

avec $\vec{v} = d\vec{r}/dt$.

— Pseudo-norme : $\tilde{u}^2 = -c^2$. [1] p 256

— Quadrivecteur impulsion-énergie $p^\mu = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$. [1] p 256

— Développement limité de p^0 en $v/c \approx 0$: reconnaître l'énergie de masse, l'énergie cinétique... ce qui nous fait dire que l'on a $p^0 = E/c$ où $E = \gamma mc^2$. [1] p 258

— L'énergie cinétique est $E_c = (\gamma - 1)mc^2$.

— Calcul de la pseudo-norme de p^μ , relation

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

[1] p 257

— Cas du photon. [1] p 258

[1] p 258

Attention

Pour l'écriture du quadrivecteur vitesse d'un mobile ponctuel, on ne considère qu'un seul référentiel. Soit dx^μ les composantes du quadrivecteur intervalle entre deux événements infiniment voisins sur la ligne d'univers du mobile. On peut définir le temps propre entre ces deux événements $d\tau = -ds^2/c^2$, et ainsi la quadrivitesse. On peut ensuite relier cette quadrivitesse à \vec{v} en l'exprimant en fonction de dt , ce qui fait apparaître un facteur γ où la vitesse est $\|\vec{v}\|$. Il faut bien différencier ce γ d'un facteur γ_e provenant d'un changement de référentiel à la vitesse \vec{v}_e !

Remarques

La vraie façon d'obtenir le quadrivecteur énergie-impulsion est de dériver l'action par rapport au point d'arrivée (cela revient à regarder le générateur des translations spatio-temporelles dans le lagrangien?). On voit ainsi apparaître directement les impulsions et le hamiltonien! On en déduit donc que l'on a bien un vecteur qui contient l'énergie et les impulsions.

1.3 Lois de conservation. Effet Compton.

- E et \vec{p} sont toujours conservés (mêmes propriétés d'invariance de l'espace-temps), donc p^μ est conservée.
- Effet Compton en mettant à profit cette loi de conservation.

[2] p 123

Écran

Notations et schéma

Transition : On a vu que les quadrivecteurs sont les bonnes quantités à observer car ils se transforment bien. On cherche donc à faire de la dynamique avec des quadrivecteurs et notamment à trouver un « PFD relativiste ». En fait, par principe de relativité les lois physiques doivent être les mêmes dans tous les référentiels, donc on cherche à écrire le PFD avec des quadrivecteurs.

2 Lois de la dynamique relativiste

2.1 Principe fondamental de la dynamique

- Étant donné le PFD en classique, on recherche une relation de la forme

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu,$$

- où f^μ est la quadriforce, que l'on va devoir relier à la force connue en classique.
- Limite non relativiste : on retrouve bien le PFD.

[3] p 167

2.2 Propriétés de la quadri-force

- Produit scalaire par u^μ : on a

$$\frac{1}{2}m \frac{d\tilde{u}^2}{d\tau} = \tilde{u} \cdot \tilde{f} \quad \text{or} \quad \tilde{u}^2 = -c^2 \quad \text{donc} \quad \tilde{u} \cdot \tilde{f} = 0.$$

- La partie spatiale de f^μ est $dp^\mu/d\tau = \gamma d\vec{p}/dt = \gamma \vec{f}$, avec \vec{f} la force.
- On a donc

$$\frac{d\gamma m \vec{v}}{dt} = \vec{f},$$

- ce qui est très différent du PFD, à cause du facteur γ !
- On utilise la condition $\tilde{u} \cdot \tilde{f} = 0$ pour obtenir $f^0 = \vec{f} \cdot \vec{v} \gamma / c$, soit

$$f^\mu = \left(\frac{\gamma}{c} \vec{f} \cdot \vec{v}, \gamma \vec{f} \right)$$

- La composante 0 du PFD donne $dE/dt = \vec{f} \cdot \vec{v}$: il s'agit du théorème de l'énergie cinétique!

[3] p 174

Remarques

Fondamentalement, rien ne nous dit que la force est toujours $d\vec{p}/dt$. Cependant, c'est ainsi qu'on la définit, et on peut s'attendre à ce que la définition coïncide au moins pour certaines forces comme celle de Lorentz.

Transition : Appliquons maintenant les lois de la dynamique relativiste à des cas particuliers. Comment atteindre des vitesses très élevées? On peut accélérer des électrons à l'aide d'un champ \vec{E} .

3 Application : mouvement dans un champ électromagnétique constant

3.1 Accélération par une différence de potentiel

Écran

Expérience de Bertozzi ([1] p 266)

— Classique : $\frac{1}{2}mv^2 = eU$ donc

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{2eU}{mc^2}$$

— Relativiste : $mc^2(\gamma - 1) = eU$ par théorème de l'énergie cinétique soit

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{eU}{mc^2}}\right)^2$$

[1] p 286

— Seul le cas relativiste correspond à l'expérience, et on a bien une vitesse limitée par c .

Remarques

La particule est accélérée mais le référentiel considéré est celui du laboratoire : la relativité restreinte est bien toujours applicable.

3.2 Champ magnétique uniforme et constant

Au lieu de cette partie, on peut décider d'illustrer le PFD relativiste par un cas où le facteur γ joue un rôle plus crucial : une particule chargée dans un champ \vec{E} .

— La force à mettre dans le PFD est la force de Lorentz

— La force ne travaille pas, donc l'énergie reste constante et le module de la vitesse v aussi.

[1] p 289

— Le PFD relativiste

$$\frac{d\gamma m \vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

donne la même équation qu'en classique (précession), où la masse m est remplacée par γm . On a donc une pulsation synchrotron $\omega_c = qB/\gamma m$. C'est important dans les accélérateurs de particules où l'on atteint des vitesses très élevées.

Conclusion

— Formulation covariante des lois de la dynamique

— On peut explorer la physique des hautes énergies, par exemple les collisions entre particules dans les accélérateurs!

Remarques

Bien qu'ils ne soient pas présentés lors de la leçon, revoir les chocs en dynamique relativiste. On pourra lire [3], chapitre 10 (et notamment la partie « Désintégrations et collisions ») et le chapitre 16 de [1].

Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.

Niveau CPGE

Prérequis

- Équation de diffusion
- Hydrostatique
- Description eulérienne d'un écoulement

Bibliographie

- [1] Étienne GUYON, Jean-Pierre HULIN et Luc PETIT. *Hydrodynamique physique*. CNRS éditions, 2012.
- [2] Stéphane OLIVIER, Hubert GIÉ et Jean-Pierre SARMANT. *Physique Spé : PC*, PC. Cours et exercices d'application*. Tec & Doc, 2000.
- [3] Marc RABAUD. *Notes de cours sur les fluides*. 2018. URL : http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/NotesCours_Agreg.pdf.
- [4] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

Introduction

Écran

Vidéo de l'écoulement Couette plan qui se met en marche : <https://www.youtube.com/watch?v=pqWwHxn6LNo>, vers 4 :00.

- On observe que les croix ne vont pas toutes à la même vitesse.
- Les croix du haut entraînent les croix du bas.
- On a des couches de fluides qui semblent indépendantes, mais en fait elles ne le sont pas!
- Il nous faut introduire une force de « cisaillement »
- On va vouloir comprendre la mise en mouvement et les conditions aux limites

1 Viscosité aux échelles macroscopique et microscopique

1.1 Contraintes tangentielles dans un fluide

- Écoulement laminaire : le fluide s'écoule en lames parallèles ([3] p 29). On prend un champ de vitesses $\vec{v} = v_x(y, t)\vec{e}_x$.
- Considération de deux couches qui ont une vitesse différente, introduction de la force $d\vec{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \vec{e}_x$ pour un fluide newtonien. Ce n'est valable que pour un écoulement incompressible! [4] p 291
- Ordres de grandeur et unité de η , la *viscosité dynamique*. [4] p 292
- On connaît l'équivalent volumique des forces de pression, obtenons l'équivalent volumique des forces de viscosité : [4] p 293

$$d\vec{F}_t = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) d\tau \vec{e}_x.$$

Transition : Explication de la première vidéo : la quantité de mouvement se « transmet » depuis la plaque à tout le fluide

1.2 Transports conductif et convectif de quantité de mouvement

- Bilan des forces, équation du mouvement projetée sur \vec{e}_x . [4] p 294
- On n'a pas de gradient de pression : parvenir à l'équation de diffusion pour $p_x = \rho v_x$. [4] p 295

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 p_x}{\partial y^2}.$$

On en déduit que la quantité de mouvement de *diffuse* dans la direction transverse. La longueur typique est $\sqrt{\nu t} = \sqrt{\nu L / \bar{U}} = L / \sqrt{Re}$. Cela nous amènerait à la notion de couche limite. [4] p 297

Remarques

Il peut être bon de relire le modèle microscopique de la viscosité ([2] p 427) pour cette leçon.

Transition : Comprendre l'effet de la viscosité sur le mouvement macroscopique des fluides.

2 Dynamique des écoulements visqueux

2.1 Équation de Navier-Stokes

- Écrire l'équation de Navier-Stokes avec forces volumiques *pour un écoulement incompressible*. Cela revient à faire un PFD sur une particule fluide. [4] p 297
- Comparer ODG du terme non linéaire et du terme de viscosité : retrouver le nombre de Reynolds $Re = UL/\nu$. [3] p 23
- Régimes $Re \ll 1$ et $Re \gg 1$. [4] p 299

Remarques

On peut aussi retrouver le nombre de Reynolds en comparant les transports diffusif et convectif. C'est ce que fait [4] p 299.

Transition : On a compris la dynamique des équations : mais on avait vu que les conditions aux limites étaient particulières

2.2 Conditions aux limites

- Suivre [3] p 25.
- Conditions cinématiques, conditions dynamiques pour un fluide visqueux.
- Tableau récapitulatif des conditions aux limites. [4] p 306

3 Applications

3.1 Écoulement de Stokes

- Obtenir l'équation de Stokes en prenant la limite $Re \rightarrow 0$ dans l'équation de Navier-Stokes. On prend aussi des variations temporelles lentes, ou carrément un régime stationnaire. [3] p 34
- Propriété de réversibilité : en l'absence de gravité, si $(\vec{v}, \text{grad } p)$ est solution, alors $(-\vec{v}, -\text{grad } p)$ l'est aussi, à condition de changer les conditions aux limites : il s'agit de *réversibilité cinématique*. [1] p 444
- Application à la nage en milieu microscopique, etc. [3] p 40

Écran

- Réversibilité : <https://www.youtube.com/watch?v=QcBpDVzBPMk>
- Nage : <https://www.youtube.com/watch?v=2kkfHj3LHeE> et https://www.youtube.com/watch?v=s_5ygWhcxKk

3.2 Écoulement de Couette

- Calcul de [3] p 30.
- Il est aussi envisageable de présenter le calcul pour l'écoulement de Poiseuille, et potentiellement de faire l'expérience. Cela dépend du temps disponible.

3.3 Force de traînée

Écran

Coefficient de traînée C_x en fonction du nombre de Reynolds

- Suivre [4] p 307.
- Analyse dimensionnelle : paramètres F , U , ρ , μ , η et D le diamètre de la sphère.
- Deux paramètres adimensionnés :

$$\frac{F}{\rho D^2 U^2} \quad \text{et} \quad \frac{UL\rho}{\eta} = Re$$

- On introduit donc le coefficient de traînée, de sorte que

$$F = \frac{1}{2} C_x(Re) \rho \frac{\pi D^2}{4} U^2$$

- Tracé de C_x en fonction de Re . Cas $Re < 1$: on retrouve $F \propto U$: c'est la formule des frottements visqueux déjà utilisée!

Écran

Tracé de $C_x(Re)$.

Conclusion

Ouverture sur les fluides non newtoniens (visco-élastiques : effet Weissenberg, <https://www.youtube.com/watch?v=npZzlgKjs0I>)

Niveau CPGE

Prérequis

- Statique et dynamique des fluides
- Viscosité, nombre de Reynolds

Message Hors des frontières avec des obstacles, on peut décrire le mouvement d'un fluide avec l'équation d'Euler, qui permet d'exprimer des quantités conservées.

Bibliographie

- [1] Étienne GUYON, Jean-Pierre HULIN et Luc PETIT. *Hydrodynamique physique*. CNRS éditions, 2012.
- [2] Stéphane OLIVIER, Hubert GIÉ et Jean-Pierre SARMANT. *Physique Spé : PC*, PC. Cours et exercices d'application*. Tec & Doc, 2000.
- [3] Marc RABAUD. *Notes de cours sur les fluides*. 2018. URL : http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/NotesCours_Agreg.pdf.
- [4] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

Introduction

- L'équation de Navier-Stokes est de façon générale très difficile à résoudre.
- On veut étudier les écoulements en négligeant les pertes afin de simplifier les équations.

1 Approximation de l'écoulement parfait

Définition de [2] p 432 : tous les phénomènes de transport diffusif, en particulier la viscosité, sont négligeables.

1.1 Équation d'Euler

- Faire un bilan des forces volumiques pour une particule fluide. [2] p 449
 - Si l'on ne prend pas en compte les forces de viscosité, on obtient l'équation d'Euler [3] p 23, p 50
- $$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\text{grad } p + \rho \vec{g}.$$
- Les forces de contact se réduisent à la pression. [2] p 432
 - Évolution adiabatique car pas de diffusion thermique. Évolution réversible car pas de causes d'irréversibilité, donc *écoulement isentropique*.

Remarques

Quelle est la différence entre un écoulement parfait et un écoulement turbulent ? Les deux ont un très grand nombre de Reynolds... Mais la turbulence est associée à une *cascade d'énergie* des grandes échelles vers les échelles les plus petites, où la viscosité joue un rôle important et permet de diffuser l'énergie. Le modèle de l'écoulement parfait, par contre, néglige l'influence

de la viscosité à *toutes les échelles*.

1.2 Conditions aux limites

- La nature de l'équation change beaucoup de Navier-Stokes : ordre 1 en espace. Il faut donc préciser les conditions aux limites. Donner les conditions de [3] p 30.
- Conditions cinématiques : aucune raison qu'il y ait de l'adhérence, on a seulement l'imperméabilité.
- Conditions dynamiques : la seule force est le gradient de pression.

Écran

Tableau comparatif des conditions pour un écoulement parfait et un écoulement visqueux

1.3 Domaine de validité

- En réalité, un fluide sans viscosité, un écoulement où on peut négliger la viscosité n'existent pas.
- La viscosité correspond aux contraintes tangentielles et aux forts gradients : elle joue un rôle prépondérant dans les zones d'obstacles. [2] p 433
- On décrit un écoulement loin de l'obstacle par le modèle de l'écoulement parfait et près de l'obstacle, dans une *couche limite*, on résout le problème complet.
- Définition de couche limite, formule [4] p 301

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

Dans les zones où l'on ne peut pas négliger la viscosité, on doit écrire l'équation de Navier-Stokes.

- ODG pour une voiture, un nageur. [4] p 302
- Régime $Re \gg 1$: écoulement parfait loin de la couche limite.

Attention

On a des écoulements à $Re \gg 1$ où ceci ne fonctionne pas, par exemple l'écoulement derrière une sphère à haut Reynolds

Transition : Nouvelle équation constitutive : on peut étudier les intégrales premières

2 Relations de Bernoulli et applications

2.1 Théorème de Bernoulli

- Démonstration au programme : écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.
- Preuve dans [3] p 51 : on écrit l'équation d'Euler, on réexprime l'accélération convective, puis on intègre le long d'une ligne de courant.

2.2 Effet Venturi

Il n'y a pas le temps de tout faire dans cette section, il faudra faire des choix en fonction du temps.

- La hauteur de l'eau dans chaque petit tube correspond à la pression (lignes de courant rectilignes et parallèles, voir [4] page 361)
- Calcul de [3] p 55
- Cavitation : utilisé pour les aérosols, dangereux dans le cas de l'artériosclérose

Écran

Schéma du dispositif

Attention

En fait ça fonctionne fondamentalement grâce à la viscosité (voir [1] page 274). Il est donc probablement plus sage de ne pas faire cette partie et de ne la présenter que si on a le temps...

2.3 Tube de Pitot

- Calcul de [4] p 365.
- On peut supposer l'écoulement parfait.
- Application de la relation de Bernoulli sur les lignes $A_\infty A$ et $S_\infty S'$, pour obtenir

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p_A - p_S)}{\rho}}$$

- Encore très utilisé dans les avions, givrage à l'origine du crash du Paris-Rio.

Écran

Schéma du dispositif

Expérience

Mesure de ρ_{air} à l'aide d'un tube de Pitot et d'un anémomètre à fil chaud (seulement si ça marche). Cette manip permet aussi de « prouver expérimentalement » la loi de Bernoulli puisqu'elle donne bien $p = f(v^2)$.

2.4 Portance d'une aile

- Calcul de [3] p 59.
- Schéma au tableau
- Savoir qu'en réalité c'est bien plus compliqué et on fait avec des potentiels
- À la fin : paradoxe de d'Alembert. On peut calculer une portance bien qu'il n'existe pas de forces de traînée... Celles-ci apparaissent en réalité avec l'existence de couches limites, éventuellement décollées, autour des ailes.

[3] p 60

Conclusion

- En fait toute la traînée est contenue dans la couche limite!
- Ouverture sur les écoulements potentiels, qui permettent de ramener les équations à de simples équations scalaires.
- On peut aussi parler du théorème de conservation de la circulation de Kelvin ([3] p 57).

Niveau L3

Prérequis

- Thermodynamique
- Statique des fluides

Message Former une interface entre deux fluides coûte de l'énergie : il faut prendre cela en compte lors de l'étude de phénomènes hydrodynamiques. La minimisation de la surface amènera alors des effets parfois stabilisants, parfois déstabilisants.

Bibliographie

- [1] François CHARRU. *Instabilités hydrodynamiques*. CNRS éditions, 2013.
- [2] Bernard DIU et al. *Thermodynamique*. Editions Hermann, 2007.
- [3] Pierre-Gilles de GENNES, Françoise BROCHARD-WYART et David QUÉRÉ. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2005.
- [4] Étienne GUYON, Jean-Pierre HULIN et Luc PETIT. *Hydrodynamique physique*. CNRS éditions, 2012.
- [5] Antonin MARCHAND et al. « Why is surface tension a force parallel to the interface? » In : *American Journal of Physics* 79.10 (oct. 2011), p. 999-1008. DOI : [10.1119/1.3619866](https://doi.org/10.1119/1.3619866). URL : <https://doi.org/10.1119/1.3619866>.
- [6] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

Introduction

- Créer des interfaces entre fluides coûte de l'énergie : exemple de battre les blancs en neige.
- On peut faire des bulles mais pas avec tous les liquides
- En hydrodynamique il faut prendre en compte les interfaces et cela permettra d'expliquer ce genre de phénomènes

Expérience

Montrer la formation d'interfaces avec des objets plongés dans de l'eau savonneuse.

1 Tension de surface

1.1 Définition et origine microscopique

- Définition avec le travail (réversible) que l'on doit fournir pour augmenter la surface : [3] p 13

$$\delta W = \gamma d\mathcal{A}.$$

- Unité de γ : $\text{J}^2 \cdot \text{m}^{-1}$ ou $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$.
- Ordres de grandeur de γ .
- Conséquence : il va falloir minimiser la surface. Cela explique les expériences vues.

- Cette minimisation n'est pas toujours un facteur de stabilité : instabilité de Rayleigh-Plateau [1] p 66
- Origine énergétique microscopique de γ : créer une interface. [6] p 327
- Facteurs importants : tensioactifs qui diminuent la tension superficielle, ce qui rend la formation de bulles plus facile. On a aussi la température (effet Marangoni). [4] p 31

Écran

Ordres de grandeur de γ .

1.2 Description mécanique

Expérience

- Film de savon avec fil, percer l'un des films et voir que la tension de surface minimise la surface
- Si on ne peut pas faire la manip : <https://www.youtube.com/watch?v=OymdZH1546w>.
- Description avec une force *parallèle à la surface* : travail $\delta W = 2\gamma l dx$ dans le cas de la tige tirée par le film d'eau savonneuse ([3] p 14). Interprétation avec la force de [6] p 326.
- Caractère horizontal : les forces répulsives sont isotropes, tandis que les forces attractives sont assez anisotropes. En créant une interface, on brise la symétrie verticale, mais pas la symétrie horizontale, donc rien ne dit que les forces parallèles à l'interface doivent se compenser. Voir [5] p 1002 pour plus de détails.

Écran

Remarque sur le caractère horizontal de la force.

Transition : On va utiliser cette modélisation pour étudier les équilibres d'interfaces entre fluides.

2 Interface statique

2.1 Forces de pression

Expérience

Mesure de γ par loi de Laplace.

- Projeter l'image sur un écran (ne pas oublier le grandissement!)
- Montrer qualitativement que la grosse bulle mange la petite.
- Une fois la formule donnée, mesurer le rayon, la pression et obtenir γ .
- Pour cette preuve, on peut utiliser [2] p 210 (démonstration par potentiel thermodynamique) ou [6] p 328 (démonstration avec les forces)
- Obtenir la surpression dans la bulle
- Remonter à γ à l'aide de la manip.

2.2 Mouillage

- Démonstration de la loi de Young-Dupré par les travaux. [3] p 25
- Mouillages total et partiel. [3] p 24, [6] p 331

2.3 Compétition entre capillarité et gravité

- Nombre de Bond, qui compare les importances de la gravité et de la capillarité sur une interface donnée [4] p 38
- Longueur caractéristique $l_c = \sqrt{\gamma/\Delta\rho g}$: c'est la *longueur capillaire*.
- Si on a le temps : loi de Jurin. [6] p 329

Écran

Différentes gouttes. Schéma pour la loi de Jurin.

Expérience

Loi de Jurin

Transition : Quel effet ont les forces capillaires sur la dynamique d'une interface?

3 Dynamique des interfaces

3.1 Instabilité de Rayleigh-Taylor

- Comparaison des deux termes de pression : l'un stabilise, l'autre déstabilise. Parvenir au nombre sans dimension L/l_c . [4] p 44
- Temps caractéristique de croissance de l'instabilité : $\tau = \sqrt{l_c/g}$. [1] p 55

Écran

Schéma des différentes forces

Transition : Cas où la tension de surface est déstabilisante

3.2 Instabilité de Rayleigh-Plateau

- Ici le cylindre n'est pas la surface la plus faible pour un volume donné [1] p 66
- Explication qualitative de l'instabilité avec les surpressions [1] p 67
- Analyse dimensionnelle pour trouver τ , qui va donner en gros l'échelle temporelle de croissance de l'instabilité.
- Si on a le temps, équation de croissance de la surpression.

Écran

Schéma des différentes pressions

Attention

Le rayon de courbure à considérer est celui du cylindre, pas celui de la perturbation sinusoidale!

Conclusion

- Ouvrir sur la modélisation d'une goutte avec Euler-Lagrange
- Parler de la relation de dispersion des ondes, qu'on a presque obtenue avec Rayleigh-Taylor
- Insister sur le fait qu'un raisonnement qualitatif donne encore une fois l'essentiel de la physique du problème

Niveau Licence**Prérequis**

- Mécanique classique
- Thermodynamique classique : principes et fonctions thermodynamiques

Message Le modèle du gaz parfait permet de décrire la limite avec peu d'interactions des gaz réels. La prise en compte des *interactions* permet de décrire les gaz réels.

Bibliographie

- [1] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Thermodynamique*. Dunod, 1984.
- [2] Bernard DIU et al. *Physique statistique*. Editions Hermann, 1989.
- [3] Bernard DIU et al. *Thermodynamique*. Editions Hermann, 2007.
- [4] Matthieu PIERCE. *Travaux dirigés de Thermodynamique*. 2018.
- [5] Patrick PUZO. *Thermodynamique classique*. URL : https://users.lal.in2p3.fr/puzo/thermo/cours_thermo.pdf.
- [6] Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un PCSI*. Dunod, 2013.
- [7] Marie-Noëlle SANZ, Anne-Emmanuelle BADEL et François CLAUSSET. *Physique tout-en-un 1ère année*. Dunod, 2003.

Introduction

- Au XVII^{ème} siècle, les scientifiques étudient les gaz et découvrent que les variables qui les décrivent obéissent à des lois. [5] p 48
- Ces lois constituent le modèle du *gaz parfait*, que l'on va décrire microscopiquement lors de cette leçon afin de comprendre ses conditions de validité. Nous verrons ensuite comment décrire les gaz réels au-delà du modèle du gaz parfait.

Écran

Lois historiques de comportement des gaz.

1 Le modèle du gaz parfait

1.1 Définition, domaine de validité.

Écran

Tracé de PV/nRT pour plusieurs gaz.

- On observe un comportement universel lorsque $P \rightarrow 0$, ce qui correspond à des *gaz dilués*.
- Ce comportement universel est associé au modèle du gaz parfait. Définition d'un gaz parfait : il s'agit d'un gaz qui vérifie l'équation d'état $PV = nRT$. [3] p 237

- A priori, ce modèle est valide tant que l'on peut considérer le gaz suffisamment dilué.
- À un gaz réel on associe un gaz parfait constitué des mêmes molécules, mais sans interactions entre celles-ci.

Transition : Une telle définition appelle un modèle microscopique, pour justifier l'universalité du comportement à faible pression.

1.2 Pression cinétique. Équation d'état.

- Définition microscopique : ensemble de particules identiques dont l'énergie cinétique moyenne est très grande devant l'énergie potentielle d'interaction. On va montrer que cette définition implique la première. [2] p 47
- On suppose donc que les molécules constituant le gaz sont des sphères dures quasi-ponctuelles de masse m , et que les seules interactions sont les chocs élastiques entre molécules et surtout avec la paroi. [5] p 42
- Calcul de la pression cinétique, en suivant un modèle tridimensionnel simplifié : [6] p 829

$$p = \frac{1}{3} n^* m u^2$$

- Par le théorème d'équipartition (admis), on a, en l'absence d'interactions :

$$U = \langle E_c \rangle = N \times \frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} N k_B T.$$

Cela revient à donner une « définition cinétique de la température ». On a en fait supposé le gaz monoatomique ici, car la seule énergie cinétique provient du mouvement du barycentre.

- On en déduit l'équation d'état $PV = nRT$. Cela fait coïncider les deux premières définitions.
- On peut mentionner une méthode plus rigoureuse : obtenir une distribution statistique des vitesses, et refaire tous les calculs avec cette distribution. Cela permet d'obtenir le même résultat, mais en justifiant plus proprement le facteur $\frac{1}{6}$. Voir [4].

Remarques

- En réalité, une autre limite doit être vérifiée : la description classique du gaz. On peut calculer la fonction de partition du gaz parfait et montrer que la description classique est valable dès que la taille caractéristique est grande devant la longueur d'onde thermique de de Broglie ([2] p 296), ou plus simplement retrouver cette relation par un raisonnement en ordre de grandeur ([2] p 48). En pratique, la description classique n'atteint ses limites qu'à très basse température et seul l'hélium est encore un gaz dans la zone où la description quantique est nécessaire.
- Voir [2] p 355 pour plus de détails concernant la modélisation des chocs avec la paroi : il n'est en réalité pas nécessaire d'étudier trop précisément comment ceux-ci ont lieu.
- L'équation d'état n'est pas suffisante pour caractériser intégralement un gaz : il faut en réalité une relation $U(V, S, n)$. Tant qu'on n'a que $PV = nRT$, on n'a aucune information sur les capacités thermiques (ce qui est une bonne nouvelle puisque celles-ci sont différentes pour les gaz monoatomiques et diatomiques).

Transition : On voit que U ne dépend que de T : peut-on mettre en évidence cette caractéristique expérimentalement ?

2 Du gaz parfait au gaz réel : les détente

2.1 Lois de Joule

— On a obtenu pour un gaz parfait monoatomique les relations

$$U = \frac{3}{2}Nk_B T \quad \text{et} \quad H = U + PV = \frac{5}{2}Nk_B T.$$

— Un gaz parfait vérifie les relations de Joule :

$$U(T) \quad \text{et} \quad H(T).$$

On pourrait démontrer l'équivalence de ces relations à la loi $PV = nRT$ ([4]).

Transition : En pratique, ces lois donnent un bon critère pour vérifier si un gaz est bien décrit par le modèle du gaz parfait. Comment peut-on tester ces lois ? Grâce à des détente !

2.2 Détente de Joule Gay-Lussac

- Système : {gaz}. On réalise une détente dans le vide, le tout dans un récipient aux parois rigides et adiabatiques : on a $\Delta U = W + Q = 0$, car $W = 0$ et $Q = 0$.
- Pour un gaz parfait, on s'attend donc à avoir $\Delta T = 0$.
- Observations expérimentales : pour une mole de CO_2 à 20°C sous 1 bar dont on fait doubler le volume par détente de Joule-Gay Lussac, on observe $\Delta T = -0.27^\circ\text{C}$. De façon générale, les gaz ont tendance à refroidir lors d'une détente de Joule-Gay Lussac. [1] p 216
- Voir [5] p 128 et [3] p 274 pour un traitement plus quantitatif avec un gaz réel.

2.3 Détente de Joule Thomson

Écran

Schémas pour la démonstration de Joule-Thomson

- Système fermé Σ^* : on démontre que la détente est isenthalpique. [5] p 131,
- Montrer les diagrammes des frigoristes et les températures d'inversion. Une étude quantitative est proposée dans [1] p 218 ou [3] p 277. [7] p 858

Écran

Température d'inversion dans le diagramme des frigoristes (remarquer le comportement en gaz parfait aux basses pression).

Transition : On peut tester expérimentalement la « perfection » des gaz en réalisant des détente. Mais comment décrire les gaz réels ?

3 Description des gaz réels

3.1 Prise en compte des interactions

Écran

Isothermes de gaz réels dans les diagrammes des frigoristes et de Clapeyron.

- Les transformations à $\Delta T = 0$ semblent mal prédites par le modèle du gaz parfait : en étudiant les isothermes de gaz réels, on aura sans doute plus d'informations sur ce qui manque au modèle du gaz parfait.
- Diagramme des frigoristes et Clapeyron : modèle correct pour un gaz dilué à haute température.
- Diagramme de Clapeyron : on observe un changement d'état si T n'est pas très élevée! Il va falloir prendre en compte les interactions...
- Potentiel de Lennard-Jones : forces attractives de Van der Waals à grande distance, forces répulsives entre électrons à courte distance (notamment à cause du principe de Pauli). [1] p 209,
- Justification qualitative de la diminution de la température lors d'une détente de Joule-Gay Lussac. [3] p 241
[3] p 274

Transition : Comment traduire ces interactions dans l'équation d'état?

3.2 Modèle de Van der Waals

- Équation d'état de Van der Waals, justification des différents termes à partir de l'énergie potentielle d'interaction. [1] p 210
- Écrire l'équation sous la forme

$$PV = nRT \left(1 + \underbrace{\left(b - \frac{a}{RT} \right)}_{B_2(T)} \frac{n}{V} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{n}{V} \right)^2 \right) \right).$$

On voit que l'on peut écrire les équations de gaz réels comme des corrections apportées à l'équation du gaz parfait.

Transition : Généralisons cette procédure

3.3 Développement du viriel

- Développement dit du « viriel », en puissances de la densité. [3] p 243
- On peut calculer ces coefficients en les reliant aux variations mesurées lors de détentes. Pour une détente de Joule-Gay Lussac, on montre [3] p 273

$$dT = \kappa dV \quad \text{et} \quad \kappa = -\frac{1}{C_V} \frac{n^2 RT^2}{V^2} B_2'(T).$$

Conclusion

- Ouvrir sur le viriel si on n'a pas pu le faire en conclusion.
- Utilisation des détentes pour refroidir les gaz à des températures très faibles.

Niveau CPGE**Prérequis**

- Transformations thermodynamiques (isochore, isobare, etc.)
- Énergie échangée par un système (travail, transfert thermique).

Message La conservation de l'énergie, à travers le premier principe, nous permet de résoudre de nombreux problèmes sans s'intéresser précisément aux échanges ayant lieu durant la transformation.

Bibliographie

- [1] Stéphane OLIVIER et Hubert GIÉ. *Thermodynamique 1ère et 2ème année*. Tec & Doc, 1996.
- [2] Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un PCSI*. Dunod, 2013.

TODO : références dans le Dunod de 2013.

Introduction

- Si l'on frotte nos mains l'une contre l'autre, on constate une élévation de température. Pour le système constitué des deux mains, on a une perte d'énergie par frottements : où va cette énergie ?
- En réalité, l'augmentation de température traduit l'existence d'une énergie cinétique microscopique, qui permet de rétablir la conservation de l'énergie aux échelles macroscopique et microscopique.

Remarques

Il peut être utile de se renseigner sur l'historique de la thermodynamique et de la mise en place des principes. L'article Wikipédia sur l'histoire de la thermodynamique classique est intéressant à ce propos.

1 Énergie interne et premier principe

1.1 Énoncé du premier principe

Remarques

Il existe deux formulations du premier principe dans la littérature. La version « traditionnelle » définit U comme la fonction d'état extensive qui vérifie l'équation de conservation. La version actuellement enseignée en prépa donne les propriétés de U , énergie interne déjà étudiée. Ici l'énoncé choisi cherche à marier ces deux versions.

12 Premier principe de la thermodynamique.

- Énoncé : l'énergie interne U est une fonction d'état des variables thermodynamiques, extensive et dont la variation au cours d'une transformation (pour un système fermé) est

$$\Delta(U + E_c + E_p) = W + Q$$

- où W est le travail des forces extérieures et Q le transfert thermique échangé avec l'extérieur.
- Différence fondamentale entre U , E_c , E_p et W et Q : ceux-là sont indépendants du chemin suivi lors de la transformation, tandis que ceux-ci dépendent du chemin suivi. [2] p 901
- Rappel de la convention de signes pour W et Q .
- Noter qu'en général, E_c et E_p ne varient pas.

1.2 Différentes transformations

- Variation de U avec la température, expression de ΔU sous forme d'intégrale de $C_V(T)$. Cas du gaz parfait : U fonction de T seulement. [2] p 840
- Travail des forces de pression [2] p 882
- Transformation isochore $\Delta U = Q$
- Évolution isotherme d'un gaz parfait : $W = -nRT \ln \frac{V_f}{V_i} = -Q$ [1] p 142

1.3 Exemple : évolution monobare d'un gaz parfait

Dans cette partie, on présente le traitement classique d'un exercice de thermodynamique : on écrit le principe de conservation, les équations d'état au début et à la fin, les équations supplémentaires telles que l'équilibre mécanique. On suit l'exercice « Compression quasistatique ou non » de [2]. Selon les références, il s'agit de l'exercice 24.7 ou 25.7.

- Refaire le raisonnement de la question 2 : trouver T_1 (on a $m = 2m_0$). Faire le calcul avec c_v au lieu de γ ?
 - État initial : $P_0 = m_0 g / S$, $T = T_0$, $V_0 = nRT_0 / P_0$
 - État final : $P_1 = 3m_0 g / S$, $V_1 = nRT_1 / P_1$
 - Compression sous P_1 : le premier principe donne

$$C_v(T_1 - T_0) = -P_1(V_1 - V_0)$$

- On en déduit

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{3 + \frac{c_v}{R}}{1 + \frac{c_v}{R}}$$

et on peut réécrire cette formule avec $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$.

- À partir de cet état final (P_1, T_1), on rend les parois diathermanes : on a un transfert thermique Q . L'état final est $P = P_1$, $T = T_0$ et le volume est déterminé par la loi des gaz parfaits. On applique le premier principe, et on montre que l'on a

$$\Delta(U + PV) = Q$$

Transition : On voit apparaître naturellement une fonction d'état qui semble particulièrement adaptée pour les évolution isobares : l'enthalpie $H = U + PV$.

2 Enthalpie et calorimétrie

2.1 Définitions

- Définition, unité. Capacité thermique à pression constante. [2] p 906
- Cas particuliers : phase condensée ($c_p \approx c_v$), gaz parfait ($c_p = c_v + R$)

2.2 Calorimétrie

- Transformation adiabatique monobare, équilibre mécanique : $\Delta H = 0$
- Montrer un calorimètre, justifier pourquoi la transformation est monobare
- Cela va nous permettre de mesurer des capacités à pression constante, ou tout autre grandeur liée à l'enthalpie.

3 Application : les changements d'état

3.1 Enthalpie de changement d'état

- Situation déclenchante : si on chauffe de la glace en la laissant à l'air libre, elle reste à 0°C pendant qu'elle fond.
- Définition, dépendance en température uniquement. [2] p 911
- Variations d'enthalpie : soit changement de température $C_p\Delta T$ soit changement d'état L_v .
ODG pour l'eau : $l_v = 333.55\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ et $c_p = 4.18\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

3.2 Exemple en calorimétrie

- Suivre l'exemple de [2] p 917 : détermination d'une enthalpie de changement d'état en mettant un glaçon dans un calorimètre d'eau chaude.
- Insister sur le caractère de fonction d'état qui permet d'imaginer le chemin que l'on souhaite, et sur le caractère extensif qui permet de calculer la variation totale.

Conclusion

- Ouvrir sur les critères d'évolution : le second principe.

Remarques

- Le caractère extensif de l'énergie interne n'est vrai qu'aux faibles couplages entre particules
- Le caractère intensif/extensif peut dépendre de la situation (résistances en série : i intensif, en parallèle : i extensif).
- Dans le théorème de l'énergie mécanique apparaissent les travaux des forces non conservatives *intérieures et extérieures*, tandis que dans le premier principe on a seulement les forces non conservatives extérieures. Les forces conservatives sont toujours comprises dans l'énergie potentielle.

Évolution et condition d'équilibre d'un système thermodynamique fermé.

Niveau Licence

Prérequis

- Principes de la thermodynamique
- Fonctions d'état en thermodynamique
- Tension superficielle

Message On peut développer une méthode systématique de résolution de problèmes de thermodynamique : trouver les paramètres de contrôle et les variables interne, le bon potentiel thermodynamique.

Bibliographie

- [1] Nicolas CHOIMET. *Thermodynamique PC-PSI*. Bréal éditions, 2004.
- [2] Bernard DIU et al. *Thermodynamique*. Editions Hermann, 2007.
- [3] Stéphane OLIVIER et Hubert GIÉ. *Thermodynamique 1ère et 2ème année*. Tec & Doc, 1996.

Remarques

Commentaires du jury :

- Il est intéressant de choisir un système physique dont l'évolution n'est pas intuitive.
- Nous ne saurions que trop insister sur l'importance d'écrire systématiquement les variables et paramètres des fonctions thermodynamiques introduites au cours de la leçon.
- Il faut bien distinguer les paramètres extérieurs dont la valeur fixée détermine le potentiel thermodynamique adapté à la recherche de l'équilibre et les variables internes dont les variations permettent au système d'atteindre l'équilibre.

Introduction

- On a déjà une condition d'évolution : $S_c \geq 0$. Cependant, l'entropie créée S_c n'est pas une fonction d'état et elle n'est donc pas très adaptée à l'étude de systèmes thermodynamiques.
- Regardons pour des cas particuliers comment décrire l'évolution vers l'équilibre, et comment on pourrait généraliser l'étude.

Transition : Commençons par le système le plus simple : le système isolé.

1 Évolution d'un système thermodynamique isolé

1.1 Description du système

- Système isolé : pas d'échange d'énergie ou de matière avec l'extérieur.
- Définition de paramètre de contrôle et de variable interne. [1] p 38
- Exemple : deux gaz séparés par une paroi. Les paramètres de contrôle sont U et V , les variables internes U_A, U_B, V_A, V_B . [1] p 41

1.2 Condition d'évolution et équilibre

- Second principe : $\Delta S \geq 0$, équilibre si entropie maximale.
- Analogie avec la mécanique : la négumentropie $-S$ ressemble à une énergie potentielle.
- Conséquence : $T_A = T_B$ et $V_A = V_B$ dans l'exemple de [1] page 41.
- Commenter les transferts d'énergie dans le cas où les volumes sont égaux.

Attention

- Bien lire la « Remarque très importante » de [1] pages 39-40 : on ne connaît les variables d'état qu'à l'équilibre, et donc on est en réalité en train de comparer des équilibres fictifs entre eux!
- L'analogie avec la mécanique est plus compliquée qu'elle n'en a l'air. En effet, en mécanique on a des *oscillations* autour de la position d'équilibre, et pas en thermodynamique. En fait, on pourrait retrouver un tel comportement en mécanique en considérant un amortissement en $\lambda \dot{x}$ avec $\lambda \rightarrow +\infty$.

Transition : Comment adapter ce raisonnement à des systèmes non isolés?

2 Évolution d'un système thermodynamique en contact avec un ou plusieurs réservoirs

2.1 Réservoir de température : évolution monotherme

- Système fermé en contact avec un thermostat à T_0 et n'échangeant aucun travail, écriture des deux principes pour arriver à $\Delta(U - T_0 S) \leq 0$. [1] p 42
- Énergie libre externe $F^*(T_0, V; S)$, où T_0 et V sont paramètres de contrôle et S est une variable interne. Bien différencier avec $F(T, V)$ l'énergie libre.
- Condition d'équilibre : $dF^* = 0$, soit pour l'évolution à volume constant : $(T - T_0)dS = 0$.
- Remarquer qu'à l'équilibre la fonction F^* s'identifie avec l'énergie libre F .
- Si on ajoute un échange de travail, les principes donnent $\Delta F^* \leq W$. Notion de travail maximum récupérable, atteint seulement pour une évolution réversible. [1] p 55

Remarques

Dans [2] p 180 on écrit $F^*(T_0, V; U)$, mais cela revient au même car on dispose d'une relation entre U et S .

Transition : Cas plus courant : on travaille à pression fixée, ce qui revient à considérer un « réservoir de volume ».

2.2 Réservoirs de température et de volume

- Par application des principes on obtient $\Delta G^* \leq 0$, où $G^*(T_0, P_0; S, V) = U - T_0 S + P_0 V$. Condition d'équilibre $dG^* = 0$. [1] p 46
- Travail utile maximum récupérable. [1] p 56
- Si on a le temps : équilibre d'une bulle de savon dans l'atmosphère. C'est intéressant, mais la dernière partie étant longue, il y a très peu de chance d'avoir le temps de présenter ceci ; si on termine en avance on peut toujours revenir dessus. [2] p 210

3 Potentiels thermodynamiques et applications

3.1 Définition

- Définition.
- Montrer des potentiels thermodynamiques pour certaines transformations.

[3] p 332

Écran

Potentiels thermodynamiques pour quelques transformations.

Attention

Dans les exemples précédents, F^* et G^* n'étaient des potentiels thermodynamiques que lorsqu'on avait respectivement pas de travail et seulement le travail des forces de pression. Dans le cadre du « travail maximum récupérable », ce ne sont pas des potentiels thermodynamiques.

3.2 Application à un système thermomécanique

Faire l'exercice 2 page 63 de [1].

- Bien expliquer la recherche du potentiel thermodynamique F' .
- Passer plus vite sur les calculs une fois qu'on a F' : aller directement à la température critique et au tracé en fonction de θ , que l'on peut comparer au tracé pour les transitions de phase décrites par Landau.

Conclusion

Ouvrir sur les transitions de phase (paramagnétisme de Landau) et la stabilité ($C_v \geq 0$).

Remarques

L'énergie interne U et l'enthalpie H ne sont pas de bons potentiels thermodynamiques. En effet, leur variation dépend de Q , qui est difficile à expliciter sauf dans le cas $\Delta S = 0$. À l'inverse, dans F^* et G^* , le transfert thermique disparaît lorsqu'on retire $T_0 S$ et on a une évolution plus simple.

Niveau CPGE

Prérequis

- Premier et second principe de la thermodynamique
- Premier principe en écoulement
- Conduction thermique

Message Une bonne machine thermique est un compromis entre puissance et rendement. L'étude générale est complexe, mais l'existence de *variables d'état* permet de simplifier grandement tous les calculs.

Bibliographie

- [1] Pascal ARCHAMBAULT. *Utilisation des diagrammes (P, h) en thermodynamique*. 2013. URL : https://www.ac-paris.fr/portail/upload/docs/application/pdf/2013-11/cpge-diagramme_ph.pdf.
- [2] François MARTIN. « Le réfrigérateur ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* 832 (2001).
- [3] François PATITET. « Les cycles dithermes à l'épreuve du temps ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* 824 (2000).
- [4] Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un PCSI*. Dunod, 2013.
- [5] Marie-Noëlle SANZ, Anne-Emmanuelle BADEL et François CLAUSSET. *Physique tout-en-un 1ère année*. Dunod, 2003.
- [6] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

Introduction

- Définition de machine thermique (à écrire au tableau) : dispositif fonctionnant en cycles dans lequel un fluide échange de l'énergie par transfert thermique et par travail. [4] p 967
- Historiquement : essor à la révolution industrielle, où l'on cherchait à construire les machines les plus performantes

Transition : Première idée : voir quelles informations systématiques la thermodynamique peut nous donner sur le fonctionnement de telles machines.

1 Théorie des machines thermiques

1.1 Évolution sur un cycle

- Suivre [4] p 967 et suivantes.
- Notations : W , Q , conventions de signes
- Schéma synoptique d'une machine monotherme
- Écriture des deux principes sur un cycle : on ne peut que recevoir du travail et fournir du transfert thermique

1.2 Nécessité d'une machine ditherme

- Machine ditherme : Q_c, Q_f , schéma synoptique
- Écriture des deux principes sur un cycle :

[4] p 968

$$W + Q_c + Q_f = 0$$

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$$

- Diagramme de Raveau : [5] p 936
 - Zone 1 : moteur, $W < 0, Q_c > 0, Q_f < 0$
 - Zone 2 : machine frigorifique ou pompe à chaleur, $W > 0, Q_c < 0, Q_f > 0$
 - Zone 3 : radiateur type chauffage central avec convection forcée (pas si intéressant que ça) : $W > 0, Q_c > 0, Q_f < 0$
 - Zone 4 : chauffage, peu intéressant car il suffirait d'utiliser une résistance chauffante : $W > 0, Q_c < 0, Q_f < 0$.

Écran

Diagramme de Raveau, signification des différents domaines.

1.3 Rendement de Carnot

- Définition générale [4] p 969
- Calcul pour un moteur, cas du moteur ditherme réversible : rendement maximal, appelé rendement de Carnot $\eta = 1 - T_f/T_c$.
- Réalisation d'un cycle ditherme réversible : moteur de Carnot. On peut faire le long calcul de [4] p 973 dans le diagramme (p, V) ou bien faire plus vite dans le diagramme (T, S) :
 - On a $\eta = -W/Q_c = 1 + Q_c/Q_f$.
 - En diagramme (T, S) on a pour des transformations réversibles $\delta Q = T dS$ donc le transfert thermique est l'aire sous la courbe. On considère les transformations réversibles ici.
 - On considère le cycle rectangulaire d'extrémités en température T_f et T_c et en entropie S_1 et S_2 . Il est donc constitué de deux adiabatiques réversibles et deux isothermes. On parcourt ce cycle dans le sens des aiguilles d'une montre. On a

$$Q_c = T_c(S_2 - S_1) \quad \text{et} \quad Q_f = T_f(S_1 - S_2)$$

- On a bien $\eta = 1 - T_f/T_c$.
- Donner le résultat pour une machine frigorifique, en précisant qu'on a plutôt une *efficacité*. [4] p 971

Transition : Une machine idéale est donc réversible. Mais en réalité on a plusieurs limitations à cela : les frottements internes, et surtout le fait que les transferts thermiques réversibles prennent un temps infini ! Il faut donc avoir une source chaude à $T \neq T_c$, et on aura alors un transfert par conduction, fondamentalement irréversible.

2 De la machine thermique idéale aux machines thermiques réelles

2.1 Modélisation et calcul de la puissance

- Modélisation de [3] : sources à T_c et T_f , moteur réversible à T'_c et T'_f , étapes de durée Δt .
- Calcul de la puissance [3] p 920

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4} \alpha_c (T_c - T'_c) \left(1 - \frac{T'_f}{T'_c} \right)$$

- On voit que si on veut un cycle réversible sans gradient de température (cas de Carnot), la puissance fournie est nulle.
- De plus, la puissance augmente lorsqu'on s'éloigne du cas réversible de rendement maximal.

Remarques

On pourrait aller plus loin et présenter le moteur endoréversible, qui réalise un bon compromis rendement/puissance : on a pour un tel moteur

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_f}{T_c}}$$

Cependant le calcul est technique et peu intéressant : on peut plutôt mentionner l'existence d'un tel moteur sans aller plus loin. Voir le cours de Alméras pour plus de détails.

Transition : Peut-on relier plus quantitativement l'entropie créée à la puissance ?

2.2 Irréversibilité du cycle

- Calcul de l'entropie créée

$$\frac{\sigma}{\Delta t} \propto T_c - T'_c$$

[3] p 921

- On voit que lorsque Δt diminue, l'entropie créée augmente : la réversibilité et la puissance sont incompatibles.

Transition : En réalité, les machines thermiques étant irréversibles, il est difficile de faire leur étude théorique en les modélisant. Comment obtenir des informations à partir de relevés expérimentaux ? On utilise les diagrammes (p, V) , (T, S) , $(\log p, h)$... Prenons un cas concret, le réfrigérateur.

3 Une machine thermique réelle : le réfrigérateur

Cette section est importante car elle rentre exactement dans les attendus du nouveau programme : ne pas hésiter à sauter des calculs dans les parties 1 et 2 afin d'avoir le temps de traiter celle-ci correctement. On pourra consulter en plus des références précisées [4] p 984 et [6] p 62.

3.1 Conception et choix du fluide caloporteur

- Importance calorifique du changement d'état : pour fournir efficacement de l'énergie à la source chaude, on utilise un condenseur. Le fluide doit se liquéfier à environ 25 °C.
- Schéma de principe. Bien expliquer les différentes étapes.

[2] page 538, 541

[1] p 5

Écran

Schéma de principe du réfrigérateur, avec les valeurs utilisées ensuite dans le diagramme des frigoristes.

Transition : Le relevé des pressions et des températures nous donne accès au cycle, que l'on représente sur un diagramme particulier.

3.2 Diagramme des frigoristes et rendement

- Présentation du diagramme $\log(p)-h$
- Présentation du cycle : coordonnées des points, justification de la forme (isenthalpes, isentropes).
- Pour la lecture, on utilise le premier principe en écoulement : on peut lire directement q_c , q_f , w sur le diagramme

[1] p 10

$$q_c = h_4 - h_3 = -200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{et} \quad q_f = h_2 - h_1 = 146 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

On en déduit $w_u = -q_c - q_f = 54 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

- Calcul de l'efficacité :

$$e = \frac{q_f}{w_u} = 2.7 \quad \text{et} \quad e_C = \frac{T_f}{T_c - T_f} = 3.5.$$

- Nouveau cycle avec compresseur non idéal : on crée de l'entropie. On a désormais $q'_c = -210 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ d'où $e' = 2.3$. L'efficacité a *diminué* puisqu'on a perdu en réversibilité!

Écran

Cycle réel réalisé sur CoolPack, avec coordonnées des points. En premier, cycle avec compresseur idéal réversible, puis cycle avec compresseur réel.

Conclusion

- On a vu le fonctionnement théorique, que l'on peut modéliser avec des cycles réversibles
- En réalité c'est bien plus compliqué : les frottements et les transferts thermiques sont source d'irréversibilité. On fait alors appel à des diagrammes thermodynamiques et de relevés expérimentaux.
- Ouvrir sur le choix du fluide caloporteur : effet sur la couche d'ozone, gaz à effet de serre...

Niveau L3

Prérequis

- Potentiels thermodynamiques
- Équation d'état de Van der Waals
- Électromagnétisme dans les milieux

Bibliographie

- [1] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Thermodynamique*. Dunod, 1984.
- [2] Bernard DIU et al. *Thermodynamique*. Editions Hermann, 2007.
- [3] Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un PCSI*. Dunod, 2013.

Introduction

- Définition générale : changement des propriétés macroscopiques d'un corps de façon brutale (on quantifiera la « brutalité » plus tard)
- Rappeler l'équation des gaz parfaits : le modèle que l'on a ne permet pas de décrire correctement les transitions vers le liquide, etc.

Transition : On va donc commencer par une approche descriptive des transitions, en utilisant des *diagrammes* reliant les variables d'état.

1 Première approche : la transition liquide-vapeur

1.1 Diagrammes de variables d'état

- Paramètres intensifs décrivant un corps pur : P et T , et l'égalité des potentiels chimiques ne donne qu'une relation : on a $P(T)$. [1] p 373
- Diagramme $P-T$, variance sur les frontières, on se limite à la branche liquide-gaz
- On ne connaît pas la composition des phases à la transition, il faut rajouter des données sur la proportion des phases : les titres molaires. [3] p 851
- Connaître les titres molaires revient à connaître le volume total. Diagramme $P-V$, tracé des isothermes. [3] p 855

Écran

Diagrammes $P-T$ et $P-V$ (en volume molaire) de l'eau

Transition : On peut avoir expérimentalement ces diagrammes et comprendre la composition du système pour un jeu de variables P, V, T donné. Mais comment décrire thermodynamiquement les évolutions dans ce diagramme ?

1.2 Description thermodynamique de la transition

- Potentiel thermodynamique adapté : G , constant à P, T fixés. [1] p 291

- Écrire G en fonction des enthalpies libres molaires de chacune des phases g_l et g_s . Si $g_l < g_s$ (ou $g_l > g_s$), par minimisation l'équilibre est monophasé. Cependant, si $g_l = g_s$, G ne dépend plus de la composition du système! On a un *équilibre diphasé*. La pression est fixée par une relation $P(T)$. L'enthalpie libre G est donc *continue* lors de la transition de phase.
- Ce n'est pas le cas pour l'enthalpie ou l'entropie : démonstration de la relation de Clapeyron ([1] chapitre 13 paragraphe 8 + explication sur les grandeurs molaires [2] page 324)
- Ordres de grandeur, comparaison à la capacité calorifique par exemple. Signe de la chaleur latente.

1.3 Point critique de la transition

- Tracer les isothermes dans le diagramme de Clapeyron pour différentes températures. [3] p 855
- Tracé de la chaleur latente en fonction de la température : à T_c , L_v est nulle! On a donc une transition qualitativement différente, avec H et S continues. [2] p 326
- Pour $T > T_c$, il n'y a plus de transition de phase.

Transition : Au point critique, la transition liquide-vapeur change de comportement : nous allons maintenant étudier une autre transition dont le comportement est similaire à la transition critique.

2 Deuxième approche : la transition ferromagnétique-paramagnétique

On sait qu'il existe une transition ferro-para à la température de Curie : il s'agit bien d'une transition brutale donc une transition de phase.

2.1 Choix d'un potentiel

- Paramètres T , M (P oublié car isobare). Potentiel thermodynamique choisi. [2] p 214
- Parité en M , isotropie : on développe en puissances près de la transition, en écrivant

$$\bar{G}(T, M) = A_0(T) + \alpha(T)M^2 + \frac{1}{2}\beta(T)M^4,$$

les termes d'ordre supérieur étant négligés.

2.2 Calcul des variables d'état

- Calcul de M_{eq} par minimisation du potentiel [2] p 215
- Modélisation des fonctions $\alpha(T)$ et $\beta(T)$. [2] p 216
- Graphique de $G(T, M)$ [2] p 217
- Calcul de l'entropie $S = dG/dt$, qui reste constante : pas de chaleur latente! [2] p 218
- Calcul de C_p , discontinu!
- Tracé de M en fonction de T : on a $M \propto -\sqrt{T - T_c}$.

Transition : On retrouve des propriétés semblables entre les deux transitions : existence d'un potentiel, tracé de M ou de $\Delta\rho$ en fonction de T . Mais aussi des différences importantes : existence ou non de chaleur latente, continuité des différents paramètres.

3 Définition moderne des transitions de phase

3.1 Définition générale

- Enthalpie libre généralisée, constante lors de la transition car équilibre (selon le même raisonnement que pour liquide-vapeur). [2] p 646

- Paramètre d'ordre : paramètre nul dans une phase et non nul dans l'autre. Pour ferr-para, il s'agit de M ; pour liquide-vapeur, il s'agit de $\rho_l - \rho_g$. [2] p 652
- Discontinuités et classification « premier ordre » ou « second ordre ». [2] p 653
- Pour la description, on décompose en puissances du paramètre d'ordre.
- Noter que l'on a des relations de Clapeyron généralisées aussi pour le premier ordre. [2] p 647

Remarques

- La transition liquide-vapeur au point critique ne correspond pas à une brisure de symétrie. C'est pourquoi on utilise actuellement une définition généralisée du paramètre d'ordre. Voir [2] p 657.
- En réalité, la transition BKT n'est associée à aucune singularité d'une fonction thermodynamique ou de l'une de ses dérivées mais seulement à la divergence de la longueur de corrélation $\xi(T)$.

3.2 Exposants critiques

Ne faire cette section que si on a le temps, sinon ouvrir dessus en conclusion.

- On étudie le comportement du paramètre d'ordre et de ses dérivées près de la température critique. [2] p 659
- Calculer β , α pour la transition ferro-para.
- Pour des transitions d'ordre 2, les exposants qui apparaissent sont très généralement les mêmes d'une transition à une autre : on parle de *classes d'universalité*. Ils dépendent principalement de la dimension et de la symétrie en jeu.

Écran

Exposants critiques de plusieurs transitions

Conclusion

Ouverture sur le paramètre d'ordre si pas traité, sinon universalité avec Ising par exemple (connaître les exposants suffit) et champ moyen (même méthode dans différents domaines donne les mêmes exposants). On peut aussi parler d'invariance d'échelle et de brisure spontanée de symétrie.

Remarques

Être prêt à répondre aux questions concernant les transitions de phase topologiques (ordre infini, cf. prix Nobel 2016)

16 Facteur de Boltzmann.

Niveau CPGE (MP)

Prérequis

- Loi des gaz parfaits
- Probabilités (mathématiques)

Message Quand on étudie un grand nombre de particules, il faut utiliser des méthodes statistiques plutôt que de décrire chaque particule indépendamment. Le comportement microscopique d'un système est lié à une compétition entre son énergie « propre » et son énergie thermique.

Bibliographie

- [1] David AUGIER et Christophe MORE. *MP, MP* : le cours complet*. Tec & Doc, 2014.
- [2] Bernard DIU et al. *Physique statistique*. Editions Hermann, 1989.
- [3] Vincent RENVOIZÉ et al. *Physique MP-MP* : tout le programme 2014 sous la forme d'exercices corrigés*. Pearson, 2014.
- [4] Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2014.

Introduction

1 Compétition entre énergies

1.1 Modèle de l'atmosphère isotherme

- Suivre [4] p 932.
- Présentation du modèle : hypothèses (gaz parfait, équilibre thermodynamique local, température uniforme), couche mésoscopique
- Traduction de l'équilibre d'une couche de fluide
- Obtenir la loi exponentielle pour la pression, donner la hauteur caractéristique ainsi que des ordres de grandeur.
- Réécrire la pression sous la forme

$$p(z) \propto \exp\left(-\frac{E_p(z)}{k_B T}\right)$$

afin de faire apparaître ce qu'on appelle un facteur de Boltzmann.

- Ordre de grandeur de la hauteur caractéristique de l'atmosphère.

Remarques

Les hypothèses sont importantes :

- Température constante
- Champ gravitationnel \vec{g} constant
- Air considéré comme un gaz parfait

Transition : Peut-on interpréter une telle répartition à partir de phénomènes survenant à l'échelle des particules ?

1.2 Interprétation microscopique

- Suivre encore [4] p 935.
- Nombre de particules $dN(z)$
- Changement de paradigme : au lieu de considérer le nombre de particules à une altitude donnée, on regarde la probabilité pour une particule de se trouver à une altitude donnée.
- Probabilité de présence pour une particule en considérant un récipient de hauteur H .
- Remonter au même facteur de Boltzmann, pour la probabilité cette fois-ci. Bien commenter les termes d'énergies, qui sont plus facile à interpréter ici : la particule tombe à cause de la gravitation mais monte à cause d'une « énergie thermique ».
- Autres cas où ce facteur apparaît : séparation par centrifugation (calculs sur slides, procéder par analogie avec ce que l'on vient de faire).
- Parler de l'expérience de Jean Perrin, critique en histoire des sciences.

[3] p 198

[3] p 201

Écran

Calculs de la séparation par centrifugation.

Transition : On a vu que l'on pouvait décrire un système par les probabilités de ses constituants de se trouver dans un certain état. Peut-on généraliser cela?

2 Description d'un système à spectre d'énergie discret

2.1 Définitions

Il faut axer cette partie sur le passage du macroscopique au microscopique dans la description qui est faite du système. Le message à faire passer est que désormais, afin d'avoir des informations quantitatives sur le système macroscopique, on veut étudier ses constituants.

- L'état d'un système thermodynamique vu à l'échelle macroscopique (monde macroscopique), décrit par un jeu de variables d'état définies et en faible nombre, est appelé macro-état.
- Pour un macro-état donné du système existent généralement un grand nombre de configurations dans le monde microscopique. Chacune de ces configurations est un micro-état.
- Exemple avec les valeurs de dés : microétat (6, 2) et macroétat 8. Autre exemple possible : en thermo, macro-état d'un gaz décrit par les variables d'état p, V, T et micro-état décrit par les (x_i, \vec{v}_i) des particules. Encore mieux : lien avec l'atmosphère isotherme en parlant des positions et vitesses des particules.
- Poser le cadre du système avec spectre d'énergie discret : énergies E_n non dégénérées, c'est-à-dire qu'à chaque énergie correspond un seul micro-état.

Écran

Schéma avec les deux dés et leur somme.

Transition : En général, les micro-états explorés par un système changent en permanence, ce qui rend très difficile leur description directe. On s'intéresse plutôt à des grandeurs statistiques.

Remarques

Le programme impose d'introduire cette leçon à travers le modèle de l'atmosphère isotherme, mais il demande de ne considérer que des systèmes à spectre discret d'énergie sans dégénérescence ensuite. Il est donc un peu difficile de faire la transition entre la représentation en

micro-états de l'atmosphère isotherme et celle d'un tel système.

2.2 Description probabiliste du système

- On a une description *statistique* du système. On considère une vision ensembliste : à un instant t , on trouve le système dans le micro-état i avec une probabilité p_i .
- On normalise les probabilités : cela introduit la fonction de partition. [4] p 938
- Loi de Boltzmann. Bien insister sur la présence d'un thermostat! [4] p 938
- Comparaison de l'occupation de deux niveaux séparés de ΔE en fonction de la valeur de $k_B T$. Tracé des niveaux d'énergie dans le graphe de $p(E)$. [1] p 748

Remarques

Par le principe ergodique, on peut relier la description ensembliste à une vision moyennée temporellement : la probabilité p_i d'un micro-état correspond au temps passé par le système dans ce micro-état. C'est grâce à ça que l'on sait que l'on a le droit de faire des statistiques : les mesures macroscopiques sont des moyennes temporelles, et par le principe ergodique elles sont équivalentes à des moyennes statistiques (on passe plus de temps dans les états de probabilité plus grande qui pèsent plus dans la moyenne statistique et temporelle).

Transition : Comment relier cette description microscopique aux grandeurs que l'on mesure sur le système à l'échelle macroscopique ?

2.3 Valeurs moyennes et limite thermodynamique

- On considère un système composé de N particules indépendantes.
- Une grandeur donnée A subit des changements permanents à cause des fluctuations des micro-états. On s'intéresse donc plutôt à sa moyenne $\langle A \rangle$. [4] p 931
- Pour un tel système, la grandeur totale moyenne est $N\langle A \rangle$, la variance est $N\sigma^2$ donc l'évolution relative est en $1/\sqrt{N}$. [4] p 939
- Ordre de grandeur de N : on a des variations extrêmement faibles, cela justifie que les valeurs mesurées ne varient pas.
- Ouf : le traitement statistique proposé a bien un sens, on va toujours retrouver les mêmes valeurs pour les grandeurs mesurées!

Remarques

La limite thermodynamique est $N \rightarrow +\infty$ à V/N fixé. Voir [2] p 280.

Transition : Exemples le plus simple de système à spectre discret d'énergie de particules indépendantes : deux niveaux.

3 Application : le paramagnétisme

3.1 Population et énergie

- Présenter le modèle : $\varepsilon = \mu B$, à quoi il sert, etc. Préciser que le modèle convient aussi pour des systèmes avec seulement les deux premiers niveaux peuplés à température ambiante. [1] p 753
- Calcul des probabilités d'occupation
- Calcul de l'énergie moyenne (sans utiliser Z), limites haute et basse température.

- Montrer l'évolution en fonction de $k_B T/\varepsilon$.
- Capacité thermique

Écran

Avoir les calculs prêts au cas où on manque de temps. Montrer les graphiques d'évolution.

3.2 Relation de fluctuation-dissipation

- Montrer la relation de fluctuation-dissipation dans ce cas précis. [1] p 756
- C'est un résultat très fort, car il relie des fluctuations (grandeurs à équilibre) et une capacité thermique (grandeur hors équilibre).
- En fait on peut généraliser!

Conclusion

Ouvrir sur les systèmes continus : on peut étudier les gaz et les solides! Enfin pour aller plus loin il faut considérer les statistiques quantiques, le grand canonique...

Remarques

On entend parfois la question : la distribution de Maxwell-Boltzmann est-elle différent de l'ensemble canonique? En fait, la distribution de Maxwell-Boltzmann correspond à l'ensemble canonique pour lequel on peut factoriser la fonction de partition globale en un produit de fonctions de partitions à une particule. Il s'agit de la limite des états individuels peu peuplés de l'ensemble canonique.

Niveau Licence 2**Prérequis**

- Ondes électromagnétiques
- Bilans d'énergie

Message Un corps à équilibre thermique émet un certain rayonnement. Afin de pouvoir étudier quantitativement ce rayonnement, on se place dans le modèle du corps noir. Cela permet de modéliser de nombreuses situations de transfert d'énergie thermique à distance.

Bibliographie

- [1] Jean-Marie BRÉBEC et al. *Thermodynamique 2ème année*. Hachette, 2004.
- [2] Bernard DIU et al. *Physique statistique*. Editions Hermann, 1989.
- [3] Bernard DIU et al. *Thermodynamique*. Editions Hermann, 2007.
- [4] Hubert GIÉ et al. *Physique Spé : MP*, MP et PT*, PT. Cours et exercices d'application*. Tec & Doc, 2000.
- [5] Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2014.
- [6] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

Introduction

- Terre chauffée par le Soleil : existence d'un flux thermique radiatif, transmis par des ondes électromagnétiques.
- Propriétés du rayonnement : à distance et instantané à notre échelle. [1] p 78
- Observer le spectre d'une lampe QI : voir que le rayonnement a en plus une répartition spectrale particulière.

Expérience

Obtenir le spectre d'émission d'une lampe QI avec un spectromètre USB. On peut aussi prendre une petite lampe, faire varier l'intensité qui la parcourt (ce qui fait varier T), et observer le spectre.

Transition : Comment décrire ce nouveau mode de transport de l'énergie ? On doit commencer par bien séparer ce qui concerne l'onde elle-même et ses interactions avec la matière.

1 Transferts d'énergie par rayonnement**1.1 Description du rayonnement**

- Suivre [1] p 79.
- Transmission par onde électromagnétique : l'énergie est décrite par le vecteur de Poynting, dont on ne considèrera que le flux φ .
- Flux surfacique, densités spectrales φ_ν et φ_λ . Lien entre les deux. Unités.

1.2 Interactions matière-rayonnement

- Absorption du rayonnement : φ_a , émission : φ_e , réflexion : φ_r . On ajoute la possibilité de corps non opaques (non prise en compte par [4]) : flux transmis φ_t . [4] p 695
- Corps transparent, corps parfaitement réfléchissant. [1] p 81
- Flux incident $\varphi_i = \varphi_a + \varphi_r + \varphi_t$, flux partant $\varphi_p = \varphi_e + \varphi_r + \varphi_t$.
- Flux radiatif $\varphi_R = \varphi_e + \varphi_r + \varphi_t - \varphi_i = \varphi_e - \varphi_a$. Il s'agit du flux total algébrique sortant du corps.
- En réalité, ces grandeurs dépendent de la longueur d'onde : cas du verre qui est transparent dans le visible mais opaque dans l'infrarouge. [4] p 696
- Équilibre radiatif. Conséquences. [4] p 698

Remarques

Le flux partant de [4] est, pour un corps non opaque, $\varphi_p = \varphi_e + \varphi_r + \varphi_t$. Le flux incident est par conservation de l'énergie $\varphi_i = \varphi_r + \varphi_a + \varphi_t$. On a donc bien $\varphi_R = \varphi_e + \varphi_r + \varphi_t - \varphi_i = \varphi_p - \varphi_i = \varphi_e - \varphi_a$.

Transition : On se place dans le cadre d'un corps maintenu à la température T : cela va nous permettre de mieux décrire les flux.

2 Rayonnement d'équilibre thermique

2.1 Description et densité spectrale d'énergie

- On considère une enceinte maintenue à température constante T . Deux points de vue peuvent être adoptés :
 - Gaz de photons en équilibre thermique avec la paroi,
 - Ondes électromagnétiques avec absorption et émission permanente par les parois.
 Dans tous les cas on peut raisonner en physique statistique, quantifier les modes et obtenir le nombre d'occupation de chaque valeur de ν pour remonter à la densité spectrale. [2] p 818
- On décrit le rayonnement en densité volumique spectrale d'énergie.
- Densité spectrale d'énergie u_ν : il s'agit de la loi de Planck. Lien entre u_ν et u_λ . [1] p 83
- Lois de Rayleigh-Jeans et Wien, historique. En gros, Rayleigh-Jeans provient de la densité spectrale avec l'équipartition de l'énergie (sans les populations du grand canonique pour les photons). [4] p 708

Écran

Programme qui montre les lois de Planck, de Rayleigh-Jeans et de Wien.

2.2 Propriétés et lien avec le flux émis

- Loi du déplacement de Wien (pour la densité spectrale d'énergie, pas pour la densité en flux! Mais le calcul reste le même). [4] p 701
- Cas de l'équilibre radiatif et thermique (ERT) : relier la densité de flux émis avec la densité spectrale d'énergie (facteur $c/4$). [4] p 699
- Loi de Stefan. [4] p 703

Remarques

On peut en réalité obtenir la loi de Stefan sans passer par la loi de Planck : voir [3] p 282-283, ainsi que [2] p 831 pour la pression. Le calcul de la pression utilise la loi de Planck, mais on

peut aussi avoir un raisonnement cinétique pour obtenir $pV = \frac{1}{3}U$ et utiliser la relation D.12 de [3] pour obtenir la dépendance en T^4 . On peut aussi utiliser l'analyse dimensionnelle.

Attention

On dit dans [4] que la loi de Planck n'est valide que dans le cas de l'équilibre radiatif et thermique (ERT)... TODO : à vérifier.

Transition : Peut-on relier ce résultat aux expériences?

3 Corps noir et applications

3.1 Rayonnement du corps noir

- Définition et conséquences sur le flux incident et le flux absorbé. [5] p 703
- Un corps noir est forcément opaque, et $\varphi_i = \varphi_a$ donc $\varphi_r = \varphi_t = 0$.
- Ainsi le flux partant est égal au flux émis : $\varphi_p = \varphi_e$
- Réalisation pratique d'un corps noir. [1] p 81
- Rayonnement émis par un corps noir en ERT et en ETL. Bien justifier qu'en ETL on suit la même loi (car le rayonnement extérieur n'influe que sur la température). Noter qu'on est généralement dans ce second cas, et que celui-ci ne concerne que le flux émis φ_e (cf tableau de [4] p 706). C'est très fort en fait, le corps noir a un flux émis connu même en dehors de l'équilibre radiatif! [4] p 704
- Pour un corps non noir, on a une « émissivité », c'est-à-dire un facteur ε correspondant à la quantité de flux absorbé. [1] p 87

Attention

Il faut bien distinguer la propriété du corps noir d'avoir $\varphi_e = \varphi_p$ et les propriétés qui proviennent de l'équilibre thermique.

3.2 Description de l'effet de serre

- Faire les applications de [6] p 167.
- Bien noter les limites de ce modèle : on ne prend pas en compte les saisons, et on suppose que la Terre rayonne comme un corps noir (alors qu'elle a un albedo...).

Conclusion

Ouvrir sur la démonstration en physique statistique et la thermodynamique d'un gaz de photons.

Niveau CPGE

Prérequis

- Thermodynamique à l'équilibre
- Hydrodynamique : Navier-Stokes, viscosité, couche limite
- Électromagnétisme

Bibliographie

- [1] Bernard DIU et al. *Thermodynamique*. Editions Hermann, 2007.
- [2] Étienne GUYON, Jean-Pierre HULIN et Luc PETIT. *Hydrodynamique physique*. CNRS éditions, 2012.
- [3] Stéphane OLIVIER, Hubert GIÉ et Jean-Pierre SARMANT. *Physique Spé : PC*, PC. Cours et exercices d'application*. Tec & Doc, 2000.
- [4] Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2014.
- [5] Marie-Noëlle SANZ, Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2004.
- [6] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

Introduction

- On n'a pour l'instant étudié que des systèmes à l'équilibre, pas la façon d'atteindre cet équilibre
- Étude bien plus compliquée en général
- Intuitivement, on va relier les inhomogénéités à des déplacements de quantités comme l'énergie, les particules...

1 Généralités sur les phénomènes de transport

On introduit ici les équations de conservation et leurs hypothèses, à travers l'exemple de la diffusion thermique.

1.1 Types de transport

Écran

Définitions de rayonnement, convection et diffusion

- Introduire les différents types de transport, pas toujours de la même quantité! :
 - Rayonnement
 - Convection
 - Diffusion (ou conduction si on impose un gradient)
- En général, on doit considérer les trois mais en fonction du problème on peut en négliger certains

[4] p 728

- Vide : seulement rayonnement, nombre de Reynolds : compare conduction et diffusion dans un fluide
- Dans la suite on considère *uniquement la diffusion (thermique)* : on néglige le rayonnement et la convection, on verra plus tard comment comparer leurs effets relatifs.

1.2 Équilibre thermodynamique local

- Jusqu'à présent : étude macroscopique, équilibre thermodynamique
- Désormais on peut avoir des variations. On doit se donner un cadre d'étude dans lequel on peut définir les grandeurs thermodynamiques : échelle mésoscopique et *équilibre thermodynamique local*. Définition. Mésoscopique : permet de moyenner. Ne pas oublier le caractère temporel de l'équilibre thermodynamique local.

[3] p 344

Écran

Tableau comparant équilibre thermo, équilibre thermo local et hors équilibre (voir [3] section T4.1.c)

- Bilan d'énergie dans le cadre de la diffusion thermique dans un solide, avec sources, dans le cas 1D (celui au programme). Voir [6] section 4.2 du chapitre « Diffusion thermique ». Le faire très proprement en définissant bien le système, et en amenant le courant \vec{j}_{th} !
- Généralisation à 3 dimensions

Transition : On a une équation qui relie deux grandeurs, il manque une relation pour clore le système. Cette relation est généralement phénoménologique.

1.3 Réponse linéaire

- On a une équation sur (T, \vec{j}_{th}) : il nous en faut une seconde pour clore le système.
- Cas homogène : pas de variations, donc en première approximation $\vec{j}_{th} \propto \text{grad } T$
- Loi phénoménologique de Fourier, conductivité thermique
- Signe de λ , schéma au tableau, ordres de grandeur ([6])
- Équation de diffusion, irréversibilité $t \rightarrow -t$ et forme de l'équation

1.4 Généralisation

- Écrire l'équation générale de diffusion d'une quantité f
- Faire ressortir les phénomènes physiques importants : inhomogénéité d'une grandeur intensive, transport d'une grandeur extensive selon le vecteur flux \vec{j} , dans le sens du rétablissement d'homogénéité
- Remarquer que la forme de l'équation de conservation et celle de diffusion sont assez générales, et qu'en fait elles existent dans de nombreux autres domaines : diffusion de particules, viscosité (voir [3] section T4.4.b et [6] page 303 ou [1] complément 9C sur le transport de quantité de mouvement)
- Comparer tous ces domaines, donner les points communs et les différences, préciser les ODG de coefficients de diffusion

Écran

Tableau qui récapitule les analogies

Attention

- Il faut bien être au courant des limites des analogies présentées. Pour cela la lecture de [3] section T4.4.b est nécessaire.
- La loi de Fick concerne en réalité le potentiel chimique, mais on remonte à la concentration car μ lui est lié.

Transition : Étudions les propriétés de l'équation de diffusion

2 Équation de diffusion

2.1 Caractère irréversible

- Calcul de l'entropie créée dans le cas de la diffusion thermique 1D [6] page 134
- Conséquence pour le signe de λ

Remarques

On peut définir un taux de création d'entropie général en théorie de la réponse linéaire, voir [1] complément 9B

2.2 Propriétés et échelles

- Donner l'équation pour la diffusion de particules
- Analyse en ordre de grandeur de l'équation, temps et distance typiques [6]

Expérience

Diffusion de particules dans le glycérol

- distance caractéristique, temps caractéristique
- Retrouver la relation du poly de TP en raisonnant avec la distance caractéristique : α doit varier avec $\text{grad } n \simeq \frac{\Delta n}{l}$ où l est la longueur caractéristique.
- Remonter à l'ordre de grandeur pour D .

Transition : On vient de voir que la diffusion n'est pas très rapide : on s'attend à ce qu'elle ne soit pas le mode de transport le plus important dans tous les cas. Il faut donc trouver un moyen de comparer l'importance de la diffusion et des autres modes de transport.

3 Comparaison aux autres modes de transport

- Cas de la convection : dans un fluide, le transport de quantité de mouvement peut s'effectuer à travers un flux diffusif $\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \simeq \eta U / L$ ou un flux convectif, de l'ordre de $\rho U \times U$ (avec ρU la quantité de mouvement et U la vitesse). On en déduit le *nombre de Reynolds*, qui caractérise l'importance relative de deux modes de transport. Remarquer que ça revient au même de comparer les termes dans Navier-Stokes. [2] p 74
- On peut raisonner de la même manière pour comparer la diffusion thermique ou de particules dans un fluide avec le transport de la même quantité par convection : ce sont les nombres de Péclet. [2] p 76

- Application numérique : le sucre dans le café. On a $U \simeq 5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ et $L \simeq 3 \text{ cm}$. Le coefficient de diffusion du sucre dans l'eau est $D_m = 0.52 \times 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (trouvé sur Internet, pas forcément juste mais au moins dans le bon ordre de grandeur). On a donc $Pe \simeq 1 \times 10^6$!
- Loi phénoménologique de Newton, et démonstration à l'aide d'un profil affine dans la couche limite. [5] p 816
- Coefficient de Newton équivalent pour le rayonnement, ordre de grandeur. [5] p 854

Conclusion

- Phénomène très général, modélisation très puissante car des outils assez élémentaires décrivent des situations très variées.
- Ouverture sur la théorie générale, le lien entre les différents types de transport et les lois qui en découlent (Seebeck, Peltier...)

Bilans thermiques : flux conductifs, convectifs et radiatifs.

Niveau CPGE

Prérequis

- Principes de la thermodynamique
- Modes de transfert thermique
- Lois du rayonnement thermique
- Électrocinétique

Message On peut définir des grandeurs générales décrivant les transferts thermiques. EN régime permanent, l'analogie avec l'électrocinétique permet de résoudre des problèmes très compliqués bien plus simplement.

Bibliographie

- [1] Bernard DIU et al. *Thermodynamique*. Editions Hermann, 2007.
- [2] Stéphane OLIVIER, Hubert GIÉ et Jean-Pierre SARMANT. *Physique Spé : PC*, PC. Cours et exercices d'application*. Tec & Doc, 2000.
- [3] Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2014.
- [4] Marie-Noëlle SANZ, Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2004.
- [5] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

TODO : reprendre les slides de Julien

Introduction

- Jusqu'à présent on a fait de la thermodynamique sans expliciter le terme de transferts thermiques Q .
- On souhaite désormais être plus quantitatif, et étudier les transferts thermiques qui ont lieu, les processus mis en jeu et les ordres de grandeur.
- En hors équilibre on peut aussi chercher à comprendre l'évolution temporelle de la température.

1 Bilan thermique local

1.1 Équilibre thermodynamique local

- Définition : tout sous-système infinitésimal a atteint l'équilibre thermodynamique. Deux échelles de temps : rapide sur laquelle on moyenne et lente sur laquelle on étudie l'évolution. [1] p 464
- On peut alors définir des *champs* de température $T(M, t)$, de pression $P(M, t)$...

1.2 Bilan thermique

- Bilan thermique local à une dimension pour une phase condensée incompressible et indilatable, avec puissance volumique produite : premier principe entre t et $t + dt$ [5] p 128

- Bien définir le transfert $\delta Q_x = \Phi(x, t)dt$ où $\Phi(x, t)$ est le flux de \vec{j}_Q . Le vecteur \vec{j}_Q est la densité de courant thermique.
- Obtenir le bilan, généraliser à 3 dimensions.
- Régime permanent : le bilan devient $\text{div } \vec{j}_Q = 0$, donc \vec{j}_Q est à flux conservatif et le flux $\Phi(x, t)$ est conservé.

Remarques

Le flux thermique est continu. Pour une démonstration, voir [5] p 126.

Transition : Il faut expliciter \vec{j}_Q pour pouvoir étudier l'évolution de la température.

2 Différents modes de transfert thermique

2.1 Conduction

- Définition de conduction thermique. [3] p 727
- Loi de Fourier, conductivité thermique (toujours positive!). [3] p 731
- ODG de conductivité thermique.
- Équation de diffusion thermique 1D, que l'on n'étudiera pas en détail ici : on se concentre sur le régime permanent. [5] p 139
- Régime permanent : exemple d'un mur de conductivité λ et de surface S , entre les températures t_1 et T_2 . Par analogie avec l'électrocinétique, grâce à la conservation du flux, amener la résistance thermique.
- Application au double vitrage (seulement si on a le temps.) [2] p 367

Écran

valeurs typiques de conductivités thermiques.

2.2 Convection

- Définition [3] p 728
- Seulement pour un fluide en mouvement : ne s'applique pas au cas que l'on a considéré puisqu'on n'a pas considéré de mouvement d'ensemble du fluide.
- Loi phénoménologique de Newton, et démonstration à l'aide d'un profil affine dans la couche limite (ce dernier point étant facultatif). [4] p 816
- ODG de h
- Résistance thermique $R_{\text{th}} = \Phi / \Delta T = \frac{1}{hS}$

Remarques

- En fait, la prise en compte de la convection transformerait $\frac{\partial T}{\partial t}$ en $\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) T$, et on pourrait étudier cette nouvelle équation. Ce n'est pas le but de cette leçon cependant.
- Une étude plus approfondie de la couche limite amène à $\delta \sim \sqrt{\nu L / U}$. Ainsi le coefficient de conducto-convection h évolue comme \sqrt{U} .

2.3 Rayonnement

- Définition [3] p 728

- Loi de Stefan (rappel) : flux surfacique émis $\varphi_e = \sigma T^4$. [5] p 164
- Flux radiatif d'un corps noir recevant un flux d'équilibre σT_0^4 : $\varphi_{\text{rad}} = \sigma (T^4 - T_0^4) \approx 4\sigma T_0^3 (T - T_0)$. Ainsi on a une loi de Newton avec un coefficient effectif $h_{\text{rad}} = 4\sigma T_0^3$ et on peut de la même façon introduire une résistance thermique. [4] p 854
- Ordre de grandeur du coefficient h_{rad} : à partir de 300 K, devient tout à fait comparable à de la convection naturelle.

Transition : On a développé la théorie des transferts thermiques : appliquons-la maintenant à un système qui semble très compliqué, pour voir l'intérêt du formalisme des résistances thermiques

3 Application : étude d'une cellule solaire

TODO : bien reprendre le calcul et les slides

On développe l'exercice sur l'étude d'un capteur solaire, de [4] p 867. On réalise le calcul uniquement avec des résistances thermiques, en se ramenant intégralement à un schéma électrique équivalent.

- Présentation du capteur solaire plan.
- Objectif : calculer le rendement $\eta = \varphi_S / \varphi_F$.
- Toutes les interfaces ont la même surface, on peut prendre $S = 1$.
- Modélisation :
 - Conducto-convection aux interfaces (h_F si forcée, h sinon).
 - Verre transparent au rayonnement solaire mais absorbant le reste (possible car l'émission non solaire sera vers 8 μm).
 - Rayonnement thermique de l'atmosphère σT_0^4
 - La laine de verre réfléchit entièrement le rayonnement thermique de l'atmosphère.
 - Températures proches de T_0 et T_F , d'où $h_{\text{rad}} = 4\sigma \left(\frac{T_0 + T_F}{2}\right)^3$ (afin d'avoir le même h_{rad} pour toutes les interfaces, voir l'énoncé).
- Calcul du rendement :

$$\varphi_5 = \frac{T_F - T_0}{\frac{1}{h_F} + \frac{d_c}{\lambda_c} + \frac{1}{h}} = 1.9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$T_0 - T_F = R_2 \varphi_4 + R_1 (\varphi_4 - \varphi_S) \quad \text{donc} \quad \varphi_4 = \frac{T_0 - T_F}{R_1 + R_2} + \frac{\varphi_S R_1}{R_1 + R_2} = 655.0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Et pour finir

$$\eta = \frac{\varphi_4 - \varphi_5}{\varphi_S} = 93\%$$

- Insister sur la puissance des résistances thermiques! On a obtenu le résultat en faisant très peu de calculs...

Écran

- Présentation du capteur solaire plan.
- Schémas présentant les circuits équivalents et les associations.

Remarques

L'absorbeur joue un rôle important car c'est lui qui permet de récupérer le flux solaire.

Conclusion

- On a vu plusieurs types de transferts dans un cas : en réalité, on a beaucoup d'autres applications possibles (refroidissement de composants, température de la Terre...)
- la méthode est toujours la même : par hypothèse simplificatrice, ne considérer que certains transferts, puis préciser le modèle petit à petit. Les transferts seront assez vite couplés ce qui rendra plus difficile la résolution...

Niveau CPGE (PSI)

Prérequis

- Électromagnétisme dans les milieux
- Énergie électromagnétique
- Induction

Message Le RÔLE du FER

Bibliographie

- [1] *Conversion électro-magnéto-mécanique*. URL : http://lnspe2.fr/Cours_Phys/CP02.pdf.
- [2] Jérémy NEVEU. *Moteurs et transformateurs électriques*. 2018.
- [3] Marie-Noëlle SANZ, Stéphane CARDINI et Elisabeth EHRHARD. *Physique tout-en-un PSI-PSI**. Dunod, 2017.
- [4] Charles-Henri VIGOUROUX. « Actualisation des connaissances sur les moteurs électriques ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* 846 (2002).

Remarques

Le programme décompose la leçon comme suit :

- On utilise un exemple simple pour introduire l'équation $F_{em} = (\partial E_{em} / \partial x)_i$.
- On développe ensuite le moteur synchrone en dérivant l'énergie magnétique stockée dans le ferro.
- On développe enfin le moteur à courant continu par analogie avec le moteur synchrone.

Dans l'ancien programme, on supposait que le rotor avait un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ et on avait juste à calculer le couple $\vec{\mathcal{M}} \times \vec{B}$. Cela permettait d'obtenir la condition de synchronisme, mais on n'avait pas les bons ordres de grandeur de puissance en écrivant $\vec{\mathcal{M}} = i_r S$: cela est dû à la présence du ferro qui canalise les lignes de champ. C'est pourquoi le nouveau programme insiste sur le « rôle du fer » : on calcule l'énergie magnétique stockée dans le ferro puis on utilise la relation $F_{em} = (\partial E_{em} / \partial x)_i$ pour obtenir la force ou le couple.

Attention

Le Tout-en-un de référence pour cette leçon est bien l'édition 2017, et non pas une édition antérieure! La présentation du contacteur a été entièrement revue, et est bien meilleure.

Introduction

- Une machine électromécanique a pour but de convertir de la puissance électrique en puissance mécanique. Elle réalise cette opération par le phénomène d'induction : on transforme une tension en courant, puis en champ magnétique, puis en force (ou couple). Tout ceci est réalisé via un matériau ferromagnétique qui va permettre de canaliser les lignes de champ.

- Elle est constituée de deux parties : une partie statique et une partie mobile.
- Durant toute la leçon, on va chercher à obtenir l'expression de la force qui s'exerce sur la partie mobile en connaissant les autres caractéristiques du système.

Transition : On commence par illustrer le principe général du calcul en étudiant un exemple simple : le contacteur électromagnétique.

1 Le contacteur électromagnétique

1.1 Présentation

- Un contacteur est un appareil dont le but est d'établir ou d'interrompre le passage du courant, à partir d'une commande électrique. Intérêt par rapport à un simple interrupteur commandé : il peut subir de forts courants.
- Schéma du dispositif, en ajoutant une tension u dans le circuit électrique comme dans [1] (elle représente la commande). [3] p 707
- Lorsqu'un courant passe, on a établissement d'un champ magnétique \vec{B} dans le fer, et ce champ va agir sur la partie mobile.
- Montrer une carte de champ : comme μ_r est très grand, on peut considérer le ferro comme un tube de champ. Le flux Φ de \vec{B} à travers le ferro est donc le même partout. [3] p 708

Transition : On cherche à relier la force perçue par la partie mobile et le champ magnétique.

1.2 Importance de l'énergie magnétique

- Suivre les calculs de [1].
- Un opérateur extérieur la partie mobile en exerçant la force $F_{op}\vec{e}_x$. Celle-ci est aussi soumise à une force $F_{em}\vec{e}_x$ causée par le champ électromagnétique. Il s'agit de la force que l'on souhaite calculer.
- Faire le schéma équivalent électrique : par application de la loi de Faraday, on a $u = ri + d\Phi/dt$, où Φ est le flux de \vec{B} à travers le bobinage.
- On applique le premier principe à {fer + bobine} entre t et $t + dt$: le système reçoit une puissance électrique, une puissance due à la force F_{op} , et perd de l'énergie par effet Joule. La force F_{em} n'apparaît pas car elle est interne. On a

$$d(E_{em} + E_c) = \delta W + \delta Q = ui dt + F_{op} dx - ri^2 dt = i d\Phi + F_{op} dx.$$

- On applique le théorème de l'énergie cinétique à la partie mobile seule : $dE_c = F_{op} dx + F_{em} dx$. Par identification on obtient $dE_m = i d\Phi - F_{em} dx$. Or $\Phi = Li$ et $dE_m = \frac{1}{2} d(Li^2)$, où L est l'inductance propre. Il vient

$$F_{em} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} = \left(\frac{\partial E_{em}}{\partial x} \right)_{i=cste}.$$

Remarques

- On peut aussi démontrer ce résultat en écrivant la puissance fournie au circuit électrique de façon à faire apparaître $\frac{1}{2} \frac{dLi^2}{dt}$. Voir [3] p 711.
- L'inductance L dépend de la géométrie du système, c'est pour ça qu'elle ne dépend que de x .
- Cette preuve reste valable dans le cas où il y a plusieurs bobinages, c'est pourquoi le résultat est applicable à la machine synchrone.
- Cette démonstration n'étant pas techniquement exigible, on peut préférer admettre le

résultat et faire directement le calcul. Il faut de toute façon bien insister sur l'importance de la formule : de par l'étude du champ magnétique on pourra remonter à la force exercée.

- En réalité, c'est plus complexe pour les circuits qui présentent des saturations : on doit considérer la coénergie magnétique E'_{em} , transformée de Legendre de l'énergie E_{em} ($E'_{em} = i\Phi - E_{em}$), telle que $dE'_{em} = \Phi di + F_{em} dx$. On a donc $F_{em} = (\partial E_{em} / \partial x)_{\Phi} = (\partial E'_{em} / \partial x)_i$. C'est en fait cette quantité qui est la bonne lorsqu'on étudie la conversion électromécanique, mais dans le cas linéaire ($\Phi = Li$) elle est égale à E_{em} .

1.3 Calcul pour le dispositif

- Appliquer le théorème d'Ampère (pour l'excitation magnétique) sur un contour bien choisi : on obtient

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2x + \frac{l}{\mu_r}} \quad [1]$$

- En déduire l'expression de l'inductance $L(x)$ du système, puis de l'énergie $E_{em} = \frac{1}{2} Li^2$.
- Obtenir l'expression de la force en utilisant la formule prouvée précédemment :

$$F_{em} = -\frac{\mu_0 N^2 Si^2}{\left(\frac{l}{\mu_r} + 2x\right)}$$

- Cette force est toujours attractive : elle tend à minimiser la taille des entrefers. C'est logique car l'énergie volumique est en $B^2/2\mu$ où $\mu = \mu_0\mu_r$.
- Force maximale en $x = 0$: $F_{\max} = -\mu_0\mu_r^2 N^2 Si^2 / l^2$. Application numérique : force maximale de 1.1 kN. C'est beaucoup!

[3] p 710

Remarques

On pourrait (et ce serait presque plus pédagogique) utiliser l'énergie magnétique au lieu de l'énergie stockée dans la bobine pour obtenir la valeur de la force. Cependant, les deux sont égales ici car la bobine est la seule source de champ magnétique.

Transition : On a réalisé le raisonnement classique de la résolution d'un problème de conversion de puissance électro-magnéto-mécanique : on modélise le ferromagnétique, on calcule le champ à l'intérieur, on obtient l'énergie électromagnétique, puis on en déduit la force. Appliquons ce raisonnement à des systèmes plus concrets, et plus complexes : les moteurs, notamment le moteur synchrone.

2 La machine synchrone

2.1 Présentation

- On veut faire tourner un axe : on cherche donc à appliquer un couple, et non plus une force.
- On va tirer parti du couple perçu par un moment magnétique dans un champ magnétique.
- Dispositif : un stator émettant un champ à l'aide de spires enroulées, et un rotor possédant un moment magnétique permanent.
- Si le champ est constant, on va juste avoir alignement du moment sur le champ. Il faut donc faire **tourner** le champ.

2.2 Champs statorique et rotorique

- On commence par considérer un seul enroulement autour du stator : une spire unique, parcourue par un courant i . Montrer la carte de champ. [3] p 731
- Modélisation : contour \mathcal{C} , champ nul dans le fer car $\mu_r \rightarrow +\infty$.
- Étude propre des symétries, théorème d'Ampère, calcul du champ. [3] p 731
- Profil du champ pour une spire.
- Superposition de spires décalées : on peut créer un champ en $\cos\theta$. Montrer l'exemple à 3 enroulements. [3] p 732
- On admet que en déphasant les spires décalées, on peut produire un **champ glissant** sous la forme [3] p 735

$$\vec{B}_s(\theta, t) = k_s i_s \cos(\omega t - \theta) \vec{e}_r,$$

où k_s est une constante de proportionnalité et i_s est le courant qui parcourt chacune des spires. Dans la suite, on considère donc deux enroulements de spires dans le stator.

- Pour le rotor, c'est pareil sauf qu'il tourne. Si on note θ_r son angle avec un axe donné (montrer le schéma), on a [3] p 736

$$\vec{B}_r(\theta, t) = k_r i_r \cos(\theta - \theta_r) \vec{e}_r$$

Écran

- Carte de champ pour le champ statorique.
- Champ créé par trois spires décalées de $\pi/3$.
- Angles pour le champ rotorique

Remarques

- On prend ici un champ nul en dehors de l'entrefer car $\mu_r \rightarrow +\infty$. Une objection serait de dire que l'on n'a pas fait ça pour le contacteur. En réalité, dans le contacteur, prendre $\mu_r \rightarrow +\infty$ revient à négliger l/μ_r devant x . Or x peut être nul, car il varie! C'est très différent du cas étudié ici, où l'épaisseur e de l'entrefer est constante.
- On réalise en fait une modélisation assez grossière : en réalité on n'a pas d'enroulement de spires dans le stator, mais plutôt des bobines complètes qui sont déphasées et produisent un champ sinusoïdal.

Transition : On sait quel est le champ partout, on peut donc comme précédemment calculer l'énergie magnétique et remonter au couple.

2.3 Couple appliqué et propriétés

- Calcul de E_{em} selon [1] (qui utilise γ au lieu de θ).
- Calcul du couple $\Gamma_{em} = (\partial E_{em} / \partial \theta_r)_{i_r, i_s}$. On admet que cette formule, obtenue pour le contacteur, reste vrai e en général et pour les couples comme les forces. [3] p 738
- Régime permanent : le rotor tourne à la vitesse angulaire Ω telle que $d\theta_r/dt = \Omega$, d'où $\theta_r(t) = \Omega t - \alpha$, où α est déterminée par la position initiale du rotor. [3] p 739
- En déduire que le couple est tel que

$$\Gamma_{em} = K i_r i_s \sin((\omega - \Omega)t + \alpha)$$

- La valeur moyenne du couple est donc nulle sauf si $\omega = \Omega$: c'est pour cela que l'on parle de machine *synchrone*.

- Tracer la courbe de fonctionnement pour $\alpha \in [0, \pi]$. Tracer aussi les vecteurs \vec{n}_s et \vec{n}_r , montrer que le champ rotorique est en retard. [1] p 7-8
- **Stabilité** : une augmentation du retard implique une augmentation ou diminution du couple en fonction de la zone. (ne pas faire si manque de temps) [1] p 8
- **Point de fonctionnement** : imposé par la charge.

Remarques

On a des machines avec plusieurs « paires de pôles ». Cela correspond à plusieurs enroulements sur le rotor. Si l'on a p paires de pôles, la condition de synchronisme devient $\omega = p\Omega$. Voir [3] p 739.

2.4 Bilan de puissance et propriétés

- Faire le bilan de puissance de [1] p 8-9 (avec deux enroulements) :
 - Pas d'induction dans le rotor
 - Modélisation électrique avec résistance du stator, équation électrique
 - Bilan de puissance électrique
 - Noter la présence de la force contre-électromotrice, qui absorbe de la puissance
 - Prouver que la puissance des forces contre-électromotrices est égale à la puissance du couple (il faut faire une étape un peu étrange d'identification d'une mutuelle, mais le résultat est cohérent).
 - Finir sur le bilan

$$\mathcal{P}_{\text{élec}} = \mathcal{P}_{\text{cuivre}} + \mathcal{P}_{\text{méca}},$$

s'extasier sur la beauté de ce bilan : on a réalisé de la conversion de puissance.

- Utilisation pour les rames du TGV Atlantique (1988) [4]
- Difficulté du démarrage : on n'a un couple moyen non nul que si on tourne déjà à la bonne vitesse. (En général on utilise des onduleurs, c'est compliqué) [2] p 27
- Montrer la zone $\alpha < 0$: on peut aussi avoir un fonctionnement en *alternateur*. [2] p 26

Transition : On s'intéresse donc à d'autres moteurs plus faciles à faire démarrer et à contrôler.

3 Le moteur à courant continu

On n'a clairement pas le temps de faire cette partie, donc il vaut mieux la transformer en conclusion.

- Structure du moteur : il ressemble à la machine synchrone, mais le courant permanent est dans le stator et le courant variable dans le rotor. [1] p 10
- Le champ statorique étant fixé, le champ rotorique doit être fixé quelle que soit la rotation du rotor. Pour réaliser cela, on utilise un **collecteur**.
- Montrer la modélisation de [1] avec une seule spire.
- Le collecteur permet de réaliser la disposition de spires de [1] p 10 *pour tout angle de rotation du rotor*. On a donc un champ toujours dans la même direction, orthogonal au champ statorique.
- Le moteur à courant continu est donc analogue au moteur synchrone avec $\alpha = \pi/2$: on a $\Gamma = \Gamma_{\text{max}} \propto i_r$.
- Le moteur à courant continu est présent dans de nombreuses applications de la vie de tous les jours, car il est facilement commandable en vitesse : on applique un couple proportionnel

au courant. Exemples : métros, trains (anciens). Il sert aussi pour les perceuses, les scies électriques... mais est dans ce cas alimenté en alternatif! Voir [4] p 1252. Inconvénient majeur : la fragilité mécanique des systèmes de balais.

Remarques

Il y a induction dans le rotor, car celui-ci se meut dans le champ magnétique statorique fixe. On peut introduire la force contre-électromotrice, qui est l'opposé de la force électromotrice, et qui fournit une puissance égale à la puissance du couple électromagnétique. La force contre-électromotrice correspond à la puissance absorbée par le circuit électrique. Voir les bilans d'énergie de [3] p 787.

Conclusion

- Développements assez récents quand on sait à quel point le principe du moteur est ancien. Apport de l'électronique de puissance dans les années 80 : possibilités de créer des onduleurs pour utiliser des moteurs synchrones. Apport de l'électronique numérique. [4] p 1246
- Moteurs asynchrones utilisés aujourd'hui : bobine en court-circuit pour rotor. C'est moins cher, mais plus dur à contrôler en vitesse. Parler du moteur à courant continu si on n'en a pas parlé dans la leçon.
- Enjeu crucial pour le développement durable, car les moteurs électriques sont partis pour remplacer les énergies fossiles!

Niveau CPGE (PCSI)

Prérequis

- Électrocinétique
- Force de Laplace
- Champ magnétique

Message Loi de Lenz : les phénomènes d'induction s'opposent aux causes qui leur ont donné naissance.

Bibliographie

- [1] Jérémy NEVEU. *Moteurs et transformateurs électriques*. 2018.
 [2] Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un PCSI*. Dunod, 2013.

Introduction

Expérience

Mise en évidence du phénomène d'induction

- Aimant avec spire suspendue, petite résistance et oscillo
- Sens du courant selon que l'aimant s'approche ou s'éloigne
- Dépendance de l'amplitude en la vitesse d'approche?
- Pas de courant si l'aimant est immobile.
- Mêmes constatations si on déplace le circuit dans le champ \vec{B} stationnaire créé par l'aimant.

Écran

Résumé des constatations expérimentales.

- Faraday souhaitait initialement montrer qu'un champ \vec{B} produisait un courant dans un circuit voisin. Il s'est rendu compte que ce n'était pas le cas, mais que les *variations* du champ donnaient naissance à un courant.

[2] p 1081

Transition : On veut comprendre l'expérience introductive et la théoriser.

1 Lois générales de l'induction

1.1 Flux du champ magnétique

- On cherche à quantifier la « quantité de champ magnétique » qui traverse un circuit.
- Orientation du circuit, vecteur surface \vec{S} . Flux $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$.
- Mentionner le cas d'un champ non uniforme : on fait l'intégrale.
- Unité : le weber Wb.

[2] p 1084

Transition : Comment expliquer les courants et leurs signes dans l'expérience introductive?

1.2 Loi de modération de Lenz

- Loi de modération. [2] p 1088
- Interprétation du signe de i dans l'expérience introductive : le champ induit s'oppose au champ extérieur afin que le flux total augmente moins vite.

Transition : On veut être plus quantitatif.

1.3 Loi de Faraday

- Modélisation du comportement électrique dans un circuit siège de phénomènes d'induction :
 - Circuit fermé : courant induit i . Circuit : source de tension e_{ind} , résistance r .
 - Convention d'orientation **très importantes** : circuit orienté, donc \vec{S} fixé, et cela fixe le sens de i . Il faut toujours orienter e_{ind} et i dans le même sens. On les met à chaque fois dans le sens de \vec{S} .
 - Loi de Faraday (signe provenant de la loi de Lenz) :

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\phi}{dt}$$

- Deux sources possibles d'induction : variation de \vec{B} avec t (induction de Neumann), ou circuit mobile dans \vec{B} fixe (induction de Lorentz). Dans la réalité, les deux peuvent être combinés.
- Faire sentir qu'à un changement de référentiel près les deux se rejoignent... on ne développe pas ça ici. Voir [1] p 10.
- C'est le flux de tous les champs qui apparaît : $\phi = (\vec{B}_{\text{ind}} + \vec{B}_{\text{ext}}) \cdot \vec{S}$.

Transition : On a vu que la loi de Faraday faisait intervenir le flux de tous les champs : il y a donc une « auto-induction », que l'on va détailler maintenant.

2 Auto-induction

2.1 Inductance propre

- Circuit orienté parcouru par un courant i .
- Champ propre $\phi_p = Li$.
- Unité, fait que L est toujours positif [2] p 1094
- Calcul de L pour une bobine de la collection, comparaison à la mesure. On a $L \propto N^2$! [2] p 1095

Expérience

Comparer la valeur de L mesurée à la valeur théorique

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S.$$

Si ça ne fonctionne pas, discuter de la qualité de l'approximation du solénoïde infini.

2.2 Circuit électrique équivalent

- Force électromotrice auto-induite :

$$e_p(t) = -L \frac{di}{dt}.$$

[2] p 1096

- Deux représentations possibles : source de tension $e_p(t)$ en convention générateur ou inductance idéale.
- Énergie $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2}Li^2$.
- Pour mesurer L , on met un échelon de tension, le courant s'établit en un temps caractéristique $\tau = L/R$.
- Le champ magnétique peut aussi provenir d'un autre circuit! Dans cette situation, on définit une inductance mutuelle, et on a des équations différentielles couplées. Cela peut servir par exemple pour le transformateur.

Transition : Deuxième type d'induction : circuit mobile dans \vec{B} stationnaire. Le circuit bouge : il y a de la mécanique, de l'électricité, donc de la conversion électro-mécanique de puissance.

3 Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

3.1 Le microphone électrodynamique

Suivre [2] p 1135 (haut-parleur électrodynamique), en faisant les modifications suivantes :

- Pas de générateur : il est remplacé par un fil
- Une force $F\vec{e}_x$ s'applique sur la membrane
- Prise en compte d'une inductance (il y a des spires bobinées!)

On présente rigoureusement la méthode générale de résolution d'un problème d'induction :

- **Analyse physique :** Le déplacement dû à l'onde sonore dans un champ \vec{B} implique un courant induit et une force de Laplace qui s'opposera au déplacement provoqué par l'onde.
- **Équation électrique :** Loi de Faraday puis loi des mailles

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) + Bav(t) = 0$$

- **Équation mécanique :** calcul des forces de Laplace puis application du PFD

$$m \frac{dv}{dt} = -kx(t) - \alpha v(t) + F(t) + iaB,$$

où l'on remarque que les forces de Laplace s'opposent au mouvement!

- **Bilan énergétique :**

- Bilan électrique $ei = -iaBv = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2) + Ri^2$. La puissance fournie par la source de tension induite est stockée en partie dans la bobine; l'autre partie est dissipée par effet Joule.
- Bilan mécanique $Fv = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2) + \alpha v^2 - iaBv$, interprétation.
- Bilan global :

$$Fv = \frac{d}{dt}(E_{\text{mag}} + E_{\text{cin}} + E_{\text{ressort}}) + Ri^2 + \alpha v^2.$$

- La puissance des forces de Laplace compense la puissance de la fém induite :

$$\mathcal{P}_{\text{Lap}} + \mathcal{P}_{\text{fém}} = 0.$$

- **Régime sinusoïdal établi :** circuit équivalent global, impédance cinétique (TODO : à revoir)

$$\underline{Z}_m = \frac{\alpha}{(Ba)^2} + \frac{k}{(Ba)^2} \frac{1}{j\omega} + \frac{m}{(Ba)^2} j\omega$$

[2] p 1138

Transition : On a converti une puissance mécanique en puissance électrique : peut-on faire l'inverse?

3.2 Le haut-parleur électrodynamique

À ne traiter qu'en cas de surplus de temps. Les calculs sont rigoureusement identiques en remplaçant F par un générateur E . L'importance de l'induction est cependant moins visible car on a déjà un générateur.

Conclusion

- Première approche qui laisse entrevoir de grandes choses
- Inductance mutuelle, conversion de puissance
- Ce qu'il faut retenir : la loi de Lenz, qui permet d'expliquer le freinage par courants de Foucault et même d'un point de vue microscopique le diamagnétisme (TODO : revoir).

Expérience

Pour finir en beauté : freinage par courants de Foucault (uniquement qualitatif).

Niveau CPGE

Prérequis

- Électronique
- Filtres linéaires et diagrammes de Bode
- Amplificateurs opérationnels

Message La commande d'un système nécessite généralement une rétroaction : on doit comparer la sortie à l'entrée pour s'assurer qu'elle a la bonne valeur. On peut aussi renvoyer la sortie sur l'entrée pour amplifier le bruit et former un oscillateur.

Bibliographie

- [1] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Électromagnétisme 3*. Dunod, 1986.
- [2] Jérémy NEVEU. *Cours d'électronique de la préparation à l'Agrégation de Physique*. 2018.
- [3] Stéphane OLIVIER, Christophe MORE et Hubert GIÉ. *Physique Spé : PSI*, PSI. Cours et exercices d'application*. Tec & Doc, 2000.
- [4] Marie-Noëlle SANZ, Stéphane CARDINI et Elisabeth EHRHARD. *Physique tout-en-un PSI-PSI**. Dunod, 2017.

Introduction

- Les systèmes bouclés sont présents partout, en physique, en mécanique, en biologie...
- Façon très intuitive de réaliser une action : on fait boucler la sortie sur l'entrée afin de s'assurer qu'elle correspond à la commande.

1 Commande d'un système en température

1.1 Nécessité d'une rétroaction

- Fonctionnement d'une perceuse : on peut modéliser mécaniquement l'intérieur du moteur, et calculer la tension à appliquer pour avoir une vitesse de rotation Ω en sortie. Il s'agit de la commande en *chaîne directe*. [3] p 63
- Gros inconvénient : si le couple résistant varie, ou si l'amplification dépend de la température, on n'aura aucun moyen de contrôler les variations de Ω . Typiquement, le perçage d'un mur correspondra à un couple résistant bien plus élevé que lorsque la perceuse tourne dans le vide, et on aura donc un Ω bien plus faible. Il faut donc *asservir* le système.
- Tracer une esquisse de schéma-bloc pour la perceuse.
- Autres exemples de systèmes bouclés. [3] p 65

Écran

Perceuse en chaîne directe et en rétroaction. Schéma-bloc.

Transition : On a vu le principe général d'un système bouclé. Détaillons plus précisément le cas de l'électronique, qui nous permettra de mettre en avant les phénomènes physiques importants.

1.2 Comportement en boucle fermée

- Principe général d'un *schéma fonctionnel*, avec des blocs de fonctions de transfert $\underline{A}(j\omega)$ et $\underline{\beta}(j\omega)$. Il s'agit d'une façon très générale de décrire un système bouclé. [2] p 73
- Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF).
- Exemple de systèmes décrits de cette façon : les montages à amplificateur opérationnel (ALI).
- Montage amplificateur non inverseur : présentation, calcul des fonctions de transfert \underline{A} et $\underline{\beta}$.
On utilise la modélisation de l'ALI du premier ordre : $\underline{A} = \mu_0 / (1 + j\omega\tau)$. On obtient [2] p 75

$$\underline{H}_{\text{FTBF}} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0\beta} \frac{1}{1 + \frac{j\omega\tau}{1 + \mu_0\beta}} \quad \text{où} \quad \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

- Plusieurs remarques :
 - On peut mettre cette fonction de transfert sous la forme $K / (1 + j\omega\tau')$, avec K un nouveau gain et τ' un nouveau temps caractéristique.
 - Le choix de R_1 et R_2 permet de contrôler β , et donc de contrôler le temps caractéristique τ' ainsi que le gain K : on peut donc jouer sur les caractéristiques du système avec un paramètre extérieur.
 - Définitions de *précision* et *rapidité* de [2] p 79. Grâce à la rétroaction, on peut donc contrôler ces deux paramètres.
 - On a une moindre sensibilité aux variations du gain. [3] p 68
- On a donc bien réglé les problèmes d'une commande en chaîne directe!
- Tracé du diagramme de Bode au tableau : on reconnaît un passe-bas de pulsation de coupure $1/\tau_c = (1 + \mu_0\beta)/\tau$. [4] p 48
- Lien entre bande passante et rapidité : conservation du produit gain-bande passante. Il y a donc un compromis à faire entre gain et rapidité pour un système d'ordre 1. [4] p 51

Expérience

- Amplificateur non inverseur (schéma dans [4] p 46 ou [2] p 88)
- Montrer que le signal est amplifié, jouer sur R_1 et R_2 .

1.3 Caractérisation de la stabilité

Expérience

Comparateur à hystérésis ([2] p 88)

- Inverser les bornes + et - de l'amplificateur non inverseur.
 - Montrer l'apparition de créneaux : on n'est plus linéaire.
- Ce qui a changé ici est que le système n'est plus *stable*. Définition de stabilité : sortie bornée pour une entrée bornée. [4] p 35
 - Cas des systèmes d'ordre 1 ou 2 : tous les coefficients de l'équation homogène sont de même signe. On peut bien le comprendre pour l'ordre 1 : cela revient à avoir une solution en $\exp(+t/\tau)$.
 - Nouvelle fonction de transfert pour le comparateur à hystérésis. On comprend bien pourquoi le système ne fonctionne plus comme prévu : il est instable (coefficient $1 - \mu_0\beta < 0$)! [4] p 51
 - Important de faire attention aux bornes + et - dans un montage à AO.
 - Problème très présent dans la vie courante : perdre le contrôle d'une voiture en compensant trop, sueur après le sport...

Attention

Le critère pour ordre supérieur à 2 n'est pas au programme de CPGE!

Transition : Les instabilités sont en fait une très bonne source de systèmes oscillant à fréquence constante : les oscillateurs auto-entretenus.

2 Oscillations dans un système bouclé instable

2.1 Oscillateur à pont de Wien

- Idée : associer un amplificateur et un passe-bande. Construire le schéma-bloc, constitué seulement de deux blocs qui bouclent l'un sur l'autre. [4] p 87
- Montrer les deux blocs sur le schéma électrique.
- Faire l'expérience : mesurer expérimentalement le rapport R_2/R_1 critique.
- Calcul de la fonction de transfert, en passant par \underline{r} . On admet l'expression de la fonction de transfert du filtre passe-bande. [2] p 97

Écran

Schéma et schéma-bloc

Expérience

Oscillateur à pont de Wien.

- Suivre les précautions et utiliser les valeurs du poly de TP.
- Trouver expérimentalement la condition d'obtention des oscillations.

2.2 Conditions d'obtention des oscillations

- On veut pouvoir avoir une sortie lorsqu'il n'y a pas d'entrée : cela revient à dire que l'on se trouve aux pôles de la fonction de transfert. C'est le critère de Barkhausen. [1] p 265
- Obtenir la condition $R_2 \geq 2R_1$. Comparer à l'expérience.
- Interpréter en terme de gain : le gain maximal du passe-bande est $\frac{1}{3}$, donc on doit amplifier au moins 3 fois pour qu'une composante fréquentielle devienne instable. C'est alors l'offset de l'ALI (et le bruit électronique) qui déclenche l'instabilité.
- Lien avec la condition sur l'équation différentielle : obtenir l'équation différentielle [2] p 99

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{RC} \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{ds}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} s = 0$$

à partir de la fonction de transfert, et montrer qu'on a la même condition en utilisant le critère sur le signe des coefficients.

- Observer que lorsqu'on s'éloigne de la condition, on n'a plus des oscillations sinusoïdales : on amplifie plusieurs composantes spectrales.

Conclusion

Ouvrir sur de meilleurs oscillateurs, par exemple le quartz, les oscillateurs à relaxation, et la possibilité de prévoir le comportement en FTBF à partir de la FTBO (lieu de Nyquist, [2]). Parler d'oscillateurs non électroniques : le laser, ou même les oscillateurs chimiques (réaction de Belousov-Jabotinski).

Aspects analogique et numérique du traitement d'un signal. Étude spectrale.

Niveau CPGE

Prérequis

- Spectre d'un signal périodique
- Filtrage linéaire
- Circuit comparateur

Message Le traitement d'un signal est facilité par la linéarité de l'électronique, qui permet de décomposer en série de Fourier. Cependant, certaines opérations nécessitent des systèmes non linéaires, ou même de la numérisation.

Bibliographie

- [1] Jérémy NEVEU. *Cours d'électronique de la préparation à l'Agrégation de Physique*. 2018.
- [2] Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2014.
- [3] Marie-Noëlle SANZ, Stéphane CARDINI et Elisabeth EHRHARD. *Physique tout-en-un PSI-PSI**. Dunod, 2017.

Introduction

- Agir sur un signal : important pour améliorer sa qualité (communication), ajouter des effets (musique)
- Signaux utiles à l'homme : acoustiques, optiques. Ils sont compliqués à transporter et à modifier, et sont fortement sensibles à l'extérieur.
- Plus adapté : transformer les signaux en électricité, qui se propage très rapidement et que l'on sait parfaitement contrôler.

Transition : On va voir comment transporter et contrôler des signaux électriques, pour réduire le bruit, les enregistrer...

1 Analyse fréquentielle et filtrage

1.1 Rappels sur les séries de Fourier

- On connaît les signaux sinusoïdaux, mais il en existe beaucoup d'autres.
- Rappel rapide de la possibilité de décomposer n'importe quel signal périodique de fréquence f_s en série de Fourier :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n)$$

[2] p 111

- Composante continue, fondamental, harmoniques.
- Commenter sur le fait que ce sont les fréquences élevées qui permettent de décrire les discontinuités du signal.

[2] p 112

Écran

Décomposition en série de Fourier pour un triangle et un créneau.

1.2 Filtrage linéaire

- À l'aide de la décomposition en série de Fourier et du théorème de superposition, on peut écrire l'effet d'un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ sur un signal périodique $e(t)$ de fréquence f_s :

[2] p 119

$$s(t) = \underline{H}(0)A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} |\underline{H}(n\omega_s)| A_n \cos(n\omega_s t + \varphi_n + \arg(\underline{H}(n\omega_s)))$$

- La représentation en diagramme de Bode prend donc tout son sens!
- Remarque importante : les fréquences du signal de sortie sont identiques à celles du signal d'entrée.
- Prendre l'exemple d'un filtre RC : donner la fonction de transfert, le circuit électrique qui le réalise.
- Interpréter les résultats de l'expérience avec les diagrammes de Bode.

Expérience

Réaliser un filtre RC :

- Choix de $C = 0.1 \mu\text{F}$, R variable.
- Envoyer un créneau ou un triangle en entrée.
- Montrer la fréquence de coupure
- Mettre en évidence l'effet intégrateur aux hautes fréquences.

Transition : Quel est l'usage de ces dispositifs? On va voir qu'ils sont particulièrement utiles pour permettre le transport d'un signal. Cependant, on devra aussi avoir recours à des transformations non linéaires.

2 Opérations pour le transport

2.1 Nécessité d'une modulation

- Idée : transmettre des ondes sonores via des ondes électromagnétiques.
- Ordres de grandeur de tailles d'antennes nécessaires : $L \sim \lambda$ donc pour 440 Hz il faudrait $L = 681 \text{ km} \dots$
- On va donc plutôt utiliser une *porteuse* et la *moduler* par le signal utile, en amplitude, fréquence ou phase. Une telle opération est forcément non linéaire. [3] p 150
- Réalisation technique de la modulation d'amplitude : multiplication. [3] p 152
- Spectre d'un signal modulé en amplitude [3] p 152
- Pour récupérer le signal on doit réaliser de nouveau une opération non linéaire.

2.2 Démodulation par détection synchrone

- De même qu'il a fallu utiliser une opération non linéaire pour moduler, il faut utiliser une opération non linéaire pour démoduler : on veut récupérer une fréquence non présente dans le spectre du signal.
- Principe de la démodulation d'amplitude. [3] p 155
- Intérêt du filtre RC pour la démodulation.

Transition : Comment stocker un signal, ou réaliser des opérations mathématiques comme la division, l'exponentielle? On ne peut pas le faire en analogique, donc on transforme le signal en suite de nombres binaires que l'on peut traiter électroniquement.

3 Traitement numérique

3.1 Numérisation d'un signal

- Avantages de la numérisation [3] p 136
- Définition d'échantillonnage [3] p 127
- Principe du CAN, modèle simple avec comparateur [1] p 129
- Programme Python sur l'échantillonnage d'un sinus : arriver expérimentalement au critère de Shannon, montrer si on a le temps le repliement du spectre lors d'une mesure à l'oscillo. [3] p 127
- Repliement du spectre : l'expliquer par analogie avec la modulation, on a déjà vu l'effet de la multiplication de 2 signaux. On comprend mieux le critère de Shannon, et on voit encore ici l'importance du filtre RC : on va devoir filtrer les fréquences au-dessus de $f_e/2$ lors de l'acquisition d'un signal. [3] p 131
- On peut aussi parler du bruit d'échantillonnage, et le montrer sur un oscillo. [1] p 123

Écran

- Principe du CAN
- Programme Python sur l'échantillonnage

Expérience

Montrer le repliement du spectre sur un signal numérisé à l'oscilloscope? On peut aussi montrer le bruit d'échantillonnage, en faisant Single sur l'oscilloscope puis en changeant le calibre vertical.

3.2 Filtrage numérique

- Prendre la fonction de transfert du RC déjà étudié, remonter à l'équation différentielle [3] p 136
- Utiliser les différences d'Euler pour discrétiser l'équation.
- Comparer la sortie du filtre RC et la sortie du filtre numérique?

Attention

Il faut se renseigner sur les différents schémas de différences finies et leur effet sur la qualité du filtrage.

Expérience

Filtre passe-bas numérique.

- On pourrait utiliser les conditions aux limites périodiques, mais cela nous limite à un signal périodique en entrée.
- Autre possibilité : fixer le premier point à 0, et laisser le programme converger vers la bonne solution.
- Montrer qu'aux hautes fréquences le diagramme de Bode fait n'importe quoi : c'est à cause de la discrétisation!

Conclusion

- Ouvrir sur les CNA et tous les traitement que l'on peut faire en numérique
- Parler de l'importance de la transmission des bits entre ordinateurs : signal « numérique et analogique ».

Leçon
24

Ondes progressives, ondes stationnaires.

Niveau CPGE

Prérequis

- Mécanique du point
- Équations différentielles, équations aux dérivées partielles

Message La propagation d'une onde est permise par le couplage spatio-temporel de deux grandeurs.

Bibliographie

- [1] Jean-Marie BRÉBEC et al. *Ondes 2ème année*. Hachette, 2004.
- [2] Frank CRAWFORD. *Cours de physique de Berkeley 3 : Ondes*. Armand Colin, 1972.
- [3] Stéphane OLIVIER, Hubert GIÉ et Jean-Pierre SARMANT. *Physique Spé : PC*, PC. Cours et exercices d'application*. Tec & Doc, 2000.
- [4] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

Introduction

Écran

Vidéo YouTube : <https://www.youtube.com/watch?v=klN2-bCzJb4> à 0 :37.

- Montrer la propagation d'un motif sans modification de celui-ci.
 - On peut aussi, s'il y en a de disponible, utiliser un long ressort et faire directement l'expérience face au jury.
-
- On entend souvent parler d'ondes : comment se comportent-elles, et comment peut-on les décrire?
 - On va commencer par les ondes progressives, qui décrivent la propagation de perturbations, puis on observera ce qui change lorsque l'on impose plus de contraintes au système.

1 Ondes progressives et équation de d'Alembert

1.1 Définition et modélisation

- Définition : propagation d'une perturbation avec transport d'énergie mais sans transport de matière.
- Modélisation de la corde vibrante : [4] p 842
 - Faire un beau schéma au tableau
 - Hypothèse des petits mouvements
 - Bilan des forces, projection sur O_x et O_y . Tout faire à l'ordre 1.
 - Obtenir l'équation de d'Alembert 1D. Faire apparaître la *célérité* c .
- Solutions générales de l'équation de d'Alembert 1D (ne pas le démontrer) : [3] p 659,
[1] p 34

$$y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

On voit bien un terme de retard qui montre que l'onde peut se *propager* à la vitesse c . On a bien des ondes progressives.

- Revenir sur la vidéo introductive : on peut donner le profil de la fonction f .
- Mentionner l'équation de d'Alembert en 3D, où $\partial^2/\partial x^2$ devient un laplacien. On se restreint dans la suite aux ondes unidimensionnelles, qu'on appellera « ondes planes », puisqu'elles ne dépendent que d'une coordonnée de l'espace.

1.2 Propriétés des solutions

- Autres cas où l'équation de d'Alembert apparaît :
 - Propagation dans un câble coaxial : onde de tension $u(x, t)$. Voir l'exercice ER P2.1 de [3] p 670. On prévoit une slide avec les équations.
 - Propagation d'ondes sonores : onde de pression $p(x, t)$. Voir [4] p 896.
- Réversibilité $t \leftrightarrow -t$.
- Linéaire : on peut étudier la propagation d'ondes monochromatiques de la forme

$$\underline{y}(x, t) = \underline{y}_0 \exp(j(\omega t - kx))$$

puisque tout signal se décompose en une somme (discrète ou continue) de telles ondes. Ne pas parler de transformée de Fourier! Les ondes $y(x, t) = \text{Re}(\underline{y}(x, t))$ sont appelées « ondes planes progressives harmoniques » (OPPH).

- Relation de dispersion $k = \omega/c$ pour $k > 0$. Vitesse des plans équiphase égale à c . [3] p 662

Écran

Équations pour le câble coaxial.

Transition : Vitesse pour la corde vibrante : $c = \sqrt{T_0/\rho}$. On a un rapport entre une grandeur de *rappel* et une grandeur d'*inertie*.

1.3 Impédance et énergie

- Grandeurs couplées pour la corde : vitesse transverse $v_y = \partial y/\partial t$ et force transverse $-T_y(x, t)$. Donner les équations couplées. Attention, la convention de signes de forces de [1] p 32 est opposée à celle de [4] p 842. Dans la convention de [4], les équations couplées sont

$$\begin{cases} \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial(-T_y)}{\partial x} \\ \frac{\partial(-T_y)}{\partial t} = -T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = -T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{cases}$$

- En réalité, ce sont ces grandeurs qui sont à l'origine de la propagation d'une onde!
- Calcul pour une onde plane progressive harmonique : on a $\underline{v} = \partial \underline{y}/\partial t = j\omega \underline{y}$ et $\underline{-T}_y = -T_0 \underline{\alpha} = -T_0 \partial \underline{y}/\partial x = T_0 j k \underline{y}$. Ainsi (voir aussi [2] p 194 pour le calcul)

$$\frac{-\underline{T}_y}{\underline{v}_y} = T_0 \frac{k}{\omega} = \frac{T_0}{c} = \sqrt{T_0 \mu}.$$

- On a donc pour une onde plane progressive harmonique proportionnalité entre les deux grandeurs couplées. Le facteur de proportionnalité Z est réel : il est appelé l'*impédance*. On peut généraliser le résultat à toutes les ondes progressives dans une direction donnée. [1] p 62

- Donner les expressions, admises, des densités linéiques d'énergie (preuve dans le corrigé de la compo 2009, section I.C.1) :

$$e_c(x, t) = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

$$e_p(x, t) = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

et on a donc $e = e_c + e_p = \mu v_y(x, t)^2 = T_y(x, t)^2 / T_0$: l'énergie se propage à la même vitesse que l'onde.

Remarques

- Les équations couplées sont telles qu'il y a un signe $-$, ce qui fait que les grandeurs couplées ici sont bien $+v_y$ et $-T_y$. Voir les équations du câble coaxial de [1] p 61.
- L'expression de e_p est admise ici; pour une preuve complète, on doit écrire la densité linéique d'énergie cinétique $1/2 \mu v_y(x, t)^2$, puis la densité linéique puissance des forces extérieures $\partial T_y v_y / \partial x$, et écrire le théorème de l'énergie cinétique pour obtenir la densité linéique de puissance des forces intérieures \mathcal{P}_{int} . On écrit enfin $\mathcal{P}_{\text{int}} = -pdv * e_p t$, et on obtient la bonne expression.

Transition : Pour l'instant, on a résolu l'équation de façon très général sans s'intéresser aux conditions aux limites. La prise en compte de celles-ci amène des solutions qui ont une forme particulière : les ondes stationnaires.

2 Forme de solution particulière : les ondes stationnaires

2.1 Découplage du temps et de l'espace

Expérience

Corde de Melde

- Placer un vibreur sur un BOY, calé par des poids assez lourds.
- Tendre la corde en plaçant un poids à son extrémité, avec une poulie.
- Exciter le vibreur avec un GBF et un ampli de puissance.
- Noter la masse linéique et la masse qui fait la tension.
- Se placer à un mode propre : on ne voit plus de propagation.

- Définition : une onde stationnaire est une solution d'une équation d'onde pour laquelle les variables de temps et d'espace sont découplées.
- Point fixe au bout de la corde : on ne peut pas avoir une solution progressive.
- Ansatz de solution : $y(x, t) = f(x)g(t)$
- Équations sur f et g , solutions sous la forme de cosinus. [4] p 854
- Conditions aux limites dans le cas de la corde vibrante : $y(0, t) = y_0 \cos \omega t$ et $y(L, t) = 0$. On utilise la forme générale de la solution en produit de cosinus de t et x , on obtient [4] p 860

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t) \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)}$$

- On observe que la solution diverge lorsque k prend certaines valeurs. En réalité, elle ne diverge pas car on quitte le domaine de validité des approximations réalisées.

Transition : Ces valeurs de k sont appelées *modes propres* de la corde.

2.2 Modes propres de la corde vibrante

- Modes propres $k_n = n\pi/L$, avec n entier strictement positif (n négatif équivalent à n positif, et $n = 0$ inintéressant). Fréquences propres.
- Comparer à l'expérience.
- Tracé des modes : supposer que à la résonance, on peut écrire $y(0, t) = 0$ (le vibreur bouge peu). La solution est donc $y(x, t) = A \cos(\omega t) \sin(k_n x)$. On peut tracer les modes, montrer que $\lambda_1 = 2L$ et que de façon générale on a $n + 1$ nuds pour le mode n .
- Équivalence entre ondes progressives et ondes stationnaires : on peut écrire un mode propre comme somme de deux ondes progressives, et vice-versa. Montrer le programme Python [1] p 41

Écran

Programme Python de superposition de deux ondes.

Conclusion

- Ouvrir sur la généralité de l'équation d'onde de d'Alembert : elle est exacte pour les ondes électromagnétiques dans le vide.
- Modes propres, ondes stationnaires utiles en musique, ce sont eux qui font que les instruments émettent un son à une fréquence donnée.

Niveau CPGE

Prérequis

- Équation de d'Alembert
- Équations de mécanique des fluides
- Ondes électromagnétiques
- Ondes stationnaires

Message Les ondes acoustiques sont un type un peu particulier d'ondes mécaniques. Elles correspondent à une perturbation très de l'air au repos, et leur intensité se répartit logarithmiquement.

Bibliographie

- [1] Jean-Marie BRÉBEC et al. *Ondes 2ème année*. Hachette, 2004.
- [2] L D LANDAU et E.M. LIFSHITZ. *Fluid Mechanics : Volume 6 (Course of Theoretical Physics S)*. Butterworth-Heinemann, 1987.
- [3] Stéphane OLIVIER, Hubert GIÉ et Jean-Pierre SARMANT. *Physique Spé : PC*, PC. Cours et exercices d'application*. Tec & Doc, 2000.
- [4] Marc RABAUD. *Notes de cours sur les fluides*. 2018. URL : http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/NotesCours_Agreg.pdf.
- [5] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

Introduction

- On connaît l'existence d'ondes acoustiques (la preuve, je parle) : comment caractériser leur propagation et leur production ?
- Notamment, comment expliquer le fonctionnement des instruments de musique ?

Expérience

Mesure de la célérité du son dans l'air

- Règle scotchée au sol
- Bien mesurer la température
- On observe une longueur d'onde d'environ 1 cm et une vitesse d'environ $34 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Bien retenir ces ordres de grandeur qui nous seront utiles pour simplifier les équations par la suite.

1 Propagation des ondes acoustiques

1.1 Hypothèses et développement perturbatif

- Définition : vibration mécanique d'un milieu matériel (fluide ou solide), qui se propage sous la forme d'ondes grâce à la déformation de celui-ci.
- On s'intéresse surtout à la propagation dans les fluides. On considère un fluide au repos.

- Description du problème : [1] p 93
 - Paramètres p, ρ, T, \vec{v} .
 - Conservation de la masse (1 équation)
 - Équation du mouvement (3 équations)
 - Équation d'état (1 équation)
 - Bilan énergétique : transferts thermiques, etc. (1 équation)

On peut donc résoudre le système, mais il est complexe : on va faire des approximations.

- **Approximation isentropique** : on néglige les phénomènes dissipatifs dans le fluide, ce qui revient à supposer l'écoulement isentropique. [1] p 94
- **Approximation acoustique** :
 - On réalise un développement perturbatif
 - Caractéristiques au repos p_0, ρ_0, T_0 .
 - On note $\rho_1 = \rho - \rho_0, p_1 = p - p_0$, et on note la vitesse \vec{v}_1 .
 - Conservation de la masse : écrire tous les termes, selon [1] p 95
 - Onde monochromatique de période T et de vitesse c_S : donner les ordres de grandeur des différents termes selon [1] p 96, et arriver aux conditions

$$|\rho_1| \ll \rho_0 \quad \text{et} \quad \|\vec{v}_1\| \ll c_S.$$

C'est raisonnable étant donné les résultats expérimentaux de l'introduction. Elles peuvent sembler redondantes (on néglige devant les deux termes), mais on verra ensuite qu'elles sont carrément équivalentes.

Transition : On s'est donné un cadre pour étudier les ondes acoustiques, voyons maintenant comment obtenir les équations de propagation.

1.2 Équation de propagation

- Donner l'équation de conservation de la masse simplifiée : [5] p 894

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0$$

- Utiliser l'hypothèse isentropique pour écrire [1] p 94

$$\rho_1 = \rho_0 \chi_S p_1$$

- Simplifier l'équation d'Euler (pas de viscosité car évolution isentropique) : les approximations déjà données permettent de négliger l'accélération convective. Le terme $-\operatorname{grad} p_0$ compense $\rho \vec{g}$, et $\rho \partial \vec{v}_1 / \partial t \simeq \rho_0 \partial \vec{v}_1 / \partial t$ à l'ordre 1.
- On néglige le terme $\rho_1 \vec{g}$ devant $-\operatorname{grad} p_1$. On verra plus tard pourquoi on a le droit de le faire, une fois qu'on aura donné des ordres de grandeur.
- Équations couplées entre la pression et la vitesse (en 3D). [1] p 97
- Obtenir l'équation de d'Alembert pour p_1 en prenant la divergence de l'équation avec $\operatorname{grad} p_1$. De la même façon, on pourrait démontrer l'équation de d'Alembert pour \vec{v}_1 (en utilisant le fait que l'écoulement est irrotationnel, voir [1] p 98). Donner l'expression de la vitesse c_S .

Remarques

Le programme demande de démontrer l'équation de propagation en 1D, mais il n'y a strictement aucune différence avec la démonstration en 3D, qui est presque plus simple puisqu'on part directement de Euler.

1.3 Résultats

— Pour une évolution isentropique d'un gaz parfait, on a

[1] p 99

$$c_S = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

— ODG de la vitesse du son dans l'air : $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ à température ambiante. Elle dépend de la température de façon assez importante, mais pas de la pulsation : le milieu est *non dispersif*.

— Comparer au résultat expérimental, en faisant bien attention à la température ! Le fait que l'on obtienne le bon résultat justifie a posteriori les approximations réalisées, mais vérifions quand même qu'elles étaient raisonnables.

— Justification de l'hypothèse isentropique : pas de transferts thermiques.

[5] p 897

— Justification de l'hypothèse isentropique : pas de pertes par viscosité.

[3] p 698

— Justification du fait qu'on néglige la gravité : on a en ordre de grandeur

[5] p 931

$$\frac{\|\text{grad } p_1\|}{\|\rho_1 \vec{g}\|} \sim \frac{p_1 / \lambda}{\rho_1 g} = \frac{1}{\lambda g \rho_0 \chi_S} = \frac{c_S^2}{\lambda g}$$

donc pour pouvoir négliger la gravité il faut $\lambda \ll c_S^2 / g \simeq 12 \text{ km}$ soit $f \gg 0.03 \text{ Hz}$.

— Pour des solides, on a une description un peu différente : on regarde les ondes se propageant entre les atomes, modélisés par des masses reliées par des ressorts. On peut montrer

[1] p 100

$$c_S = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

avec E le module d'Young qui caractérise la rigidité du matériau.

Remarques

- Si on suppose les transformations isothermes et non adiabatiques, on n'a pas la bonne vitesse.
- Bien de savoir l'influence de la viscosité car ça sera certainement une question. Voir [4] p 95.
- Il faut bien comprendre l'origine de l'adiabaticité : les transferts thermiques sont trop lents par rapport à la propagation de l'onde.
- On peut prouver l'équation de d'Alembert pour \vec{v} avec quelques manips d'analyse vectorielle, et cela nécessite d'avoir prouvé $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$.

Attention

On fait l'hypothèse barotrope ici : p est fonction de ρ seulement, et pas de T . Cette hypothèse est vérifiée car on a une évolution adiabatique de gaz parfait.

Transition : On a montré que l'on avait des ondes acoustiques : on voudrait désormais étudier leurs propriétés, et notamment comment elles se propagent avant d'arriver à l'oreille.

2 Impédance et aspect énergétique

2.1 Impédance acoustique

- Définition comme le rapport entre p et $\|\vec{v}\|$ pour une onde vers les x croissants (rapport de force et débit volumique) [1] p 102
- Calcul pour une onde monochromatique.
- ODG pour liquide et gaz. [5] p 902
- Remarque : $j\omega\vec{v}$ est selon $\text{grad } p$ donc les ondes sont *longitudinales*.

2.2 Puissance acoustique

- Vecteur de Poynting acoustique, construit à partir de la puissance des forces de pression. [5] p 902
- On recherche une densité d'énergie $e = e_c + e_p$ telle que

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0.$$

On ne démontre pas l'équation de conservation, on préfère dire que l'on recherche une équation de la même forme que toutes les autres déjà vues en physique.

- Utiliser les équations couplées pour remonter à la valeur de $e_p(x, t)$.

2.3 Intensité acoustique

- Suivre [5] p 908.
- Définition de l'intensité sonore et de l'intensité en décibels. Logarithmicité de l'oreille.
- Seuils d'audibilité et de douleur. Infrasons et ultrasons.
- Valeurs typiques de I_{dB} [1] p 108
- Surpressions typiques : 1×10^{-2} Pa, ce qui témoigne d'une sensibilité incroyable! L'oreille humaine est capable de détecter des variations de pressions relatives entre 1×10^{-4} et 1×10^{-9} .
- Vitesses typiques correspondant aux surpressions : utiliser la formule $v_1 = p_1/Z_C$ pour les calculer avec les valeurs de Z_C de [5] p 902.
- En général, pour les ODG, on peut se référer à [5] p 929 (exercice 26.2).

Écran

Zone d'audition de l'oreille humaine

Transition : On a compris la propagation et la réception, mais on veut maintenant comprendre ce qui produit les sons

3 Acoustique et instruments de musique

On va étudier des instruments de musique : on veut savoir comment l'onde se propage entre l'entrée (l'anche par exemple) et la sortie. On a donc besoin de savoir comment une onde acoustique se comporte à l'interface.

3.1 Réflexion et transmission

- Continuité de la vitesse et de la pression à une interface. [1] p 110
- Coefficients de réflexion en amplitude et en énergie pour la surpression, admis. [1] p 111

- C'est pour cela qu'on porte un diapason à notre temple pour l'entendre, ou que l'on place du gel sur la peau pour les échographies : on veut dans ces cas maximiser T .

Transition : Dans les instruments à vent, on a des extrémités ouvertes ou bouchées : cela correspondra à un changement de milieu et on devra donc considérer les ondes transmises ou réfléchies.

3.2 Ondes stationnaires

- Tuyau à extrémité ouverte : surpression nulle au bout donc $Z = 0$. Si l'extrémité est bouchée, on a un nud de débit et $Z = +\infty$.
- On s'attend à avoir des ondes *stationnaires*, avec à chaque extrémité un nud ou un ventre selon que le tuyau soit bouché ou non.
- Montrer la vidéo : on observe bien la différence entre le tuyau ouvert des deux côtés (flûte) et ouvert seulement d'un côté (clarinette). Ces analogies proviennent de la compo A 2009.
- Donner le tableau récapitulatif de [5] p 920. Noter que le timbre des instruments à anche est très différent car il y a moins d'harmoniques.

Écran

Vidéo du tube de Kundt : https://www.youtube.com/watch?v=qUiB_zd9M0k

- On a une explication dans [1] p 114
- Les endroits avec beaucoup de particules correspondent aux ventres de la vitesse.
- Les stries qui apparaissent à faible longueur d'onde sont dues à d'autres harmoniques de plus haute fréquence.

Attention

- La température joue un rôle non négligeable sur la fréquence du son : une différence de quelques dizaines de degrés peut décaler d'un demi-ton...
- En réalité il faut quand même que l'onde sonore sorte de l'instrument : la modélisation en impédance infinie n'est pas très satisfaisante. Chercher des livres décrivant un peu mieux le phénomène. On a déjà pas mal d'infos dans [2]

Conclusion

Résumé, ouverture sur effet de la viscosité, du vent et le guidage d'onde en mer (profil de vitesse variable)

Remarques

Cette leçon est longue : il faut être rapide dès le début ! Aller à l'essentiel, en présentant bien les points clés de l'approximation sans passer trop de temps dessus.

Niveau Licence

Prérequis

- Équation de d'Alembert
- Transformée de Fourier
- Battements
- Mécanique des fluides

Bibliographie

- [1] B. LAHAYE. « Propagation des ondes - vitesse de phase - vitesse de groupe ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* 649 (1982).
- [2] Baptiste PORTELLI et Julien BARTHES. *La physique par la pratique*. H & K, 2005.
- [3] Marc RABAUD. *Notes de cours d'Hydrodynamique*. 2016. URL : http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/NotesCoursL3_FIP.pdf.
- [4] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.
- [5] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PSI*. Dunod, 2004.
- [6] Étienne THIBIERGE. *Propagation des ondes*. 2015. URL : http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/ondes_poly_2015.pdf.

TODO : à peaufiner, notamment Python et le programme qui donne les vitesses pour le coax.

Introduction

1 Propagation dans un câble coaxial

1.1 Constatation expérimentale et modélisation

Expérience

Envoyer un pulse très court ($T \sim 0.1$ ns) dans un câble coaxial, montrer qu'on a *atténuation* et *déformation* (faire attention à envoyer un pulse assez long pour qu'il y ait un max)

- Modélisation initialement sans pertes, on voit que l'on a d'Alembert et propagation sans dispersion. Or, on en observe expérimentalement...
- Faire la modélisation de la ligne avec pertes de [6] page 32, en justifiant bien chaque ajout : pertes Joule et pertes de charge dans l'isolant. Ne pas développer les calculs mais dire que de la même façon on obtient une équation de propagation :

[6] p 8

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\Lambda g + \Gamma r) \frac{\partial u}{\partial t} + r g u.$$

- On a une équation qui ressemble à d'Alembert, mais qui exhibe tout de même un certain nombre de différences.

Transition : L'équation d'onde est semblable à celle de d'Alembert, mais on a de nouveaux termes. Que vont-ils changer dans le comportement de l'onde et sa propagation ?

1.2 Équation d'onde et comportement

Suivre [6] pages 33 pour les calculs.

- Décomposition en OPPH
- Passage en complexes, on remarque que k doit dépendre de ω de façon plus compliquée que simplement linéaire, et que celui-ci peut être complexe
- Relation de dispersion, amener les parties réelle et imaginaire de k et ce qu'elles représentent : propagation et absorption ([6] page 34)
- Définition de la vitesse de phase de [4] page 1011. Calcul pour le câble coaxial. [5] p 675
- Définition de dispersion : vitesse de phase dépendante de ω , et absorption : distance caractéristique δ non nulle. On a bien dispersion et absorption pour le câble coaxial.

Remarques

Pour le câble coaxial, la relation de dispersion est

$$k^2 = \omega^2 \Lambda \Gamma - i\omega(\Lambda g + \Gamma r) - r g.$$

Ainsi, si on écrit $k = k_r + i k_i$, on a

$$\begin{aligned} k_r^2 - k_i^2 &= \omega^2 \Lambda \Gamma - r g, \\ 2k_r k_i &= \omega(\Lambda g + \Gamma r). \end{aligned}$$

Pour que la vitesse de phase ne dépend pas de ω , il faut que k_r soit proportionnel à ω . Pour avoir une distance d'amortissement indépendante de ω , on doit aussi avoir k_i indépendant de ω . Ainsi, on doit avoir

$$|k_r| = \omega \sqrt{\Lambda \Gamma} \quad \text{et} \quad |k_i| = \sqrt{r g}.$$

On en déduit la condition

$$\Lambda g = r \Gamma,$$

qui lorsqu'elle est vérifiée assure qu'un signal se propage sans déformation autre qu'une atténuation exponentielle dans le câble.

Transition : On voit déjà que dans les cas où on a pas d'Alembert, la propagation est plus compliquée. Dans le but d'expliquer l'expérience introductive, on va modéliser un signal physique et étudier sa propagation (au lieu de l'OPPH).

2 Paquet d'ondes, dispersion et absorption

2.1 Modélisation réaliste d'un signal

- Si on superpose deux ondes sinusoïdales, on obtient des battements : on a des zones avec une plus grande amplitude que d'autres. De manière générale, pour pouvoir « localiser » une onde, il va falloir étendre son spectre.
- Définition du signal avec une intégrale : [4] p 1013

$$\underline{s}(z, t) = \int_0^{+\infty} \underline{A}(\omega) \exp(i(\omega t - k(\omega)z)),$$

puis $s(z, t) = \text{Re}(\underline{s}(z, t))$.

- Pour un paquet d'onde, on a une extension spectrale pas trop grande : $\underline{A}(\omega)$ ne prend de valeurs significatives que dans $[\omega_0 - \delta\omega/2, \omega_0 + \delta\omega/2]$.

Transition : On a défini un signal plus physique, voyons comment il se propage.

2.2 Dispersion et vitesse de propagation

— Développement limité pour la propagation : on écrit

[4] p 1016

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left(\frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} + \mathcal{O}((\omega - \omega_0)^2)$$

et on en déduit que l'enveloppe se propage. À cet ordre d'approximation, l'enveloppe ne se déforme pas.

— Définition de la vitesse de groupe : vitesse de propagation de l'enveloppe. On dérive par rapport à la partie réelle de k : on pourrait considérer la partie imaginaire mais elle ne donnerait qu'un préfacteur dans le calcul.

Écran

Programme Python pour visualiser la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

2.3 Étalement du paquet d'ondes

Il n'y a sans doute pas le temps de faire cette partie en prenant son temps, donc ne pas hésiter à la sauter...

- Calcul de [2] pages 227-228
- Faire rapidement la transformée de Fourier?
- Changement de référentiel, arriver à l'équation de l'enveloppe
- On retrouve l'équation de Schrödinger! On a réversibilité de l'étalement, seule l'absorption amène à de l'irréversibilité.

Transition : Appliquons ce formalisme à l'étude des ondes dans un fluide (c'est important car on n'a pas calculé de vitesse de phase ou de groupe pour le câble coaxial...).

3 Ondes de surface dans un fluide

Voir les discussions dans [3] et [1].

3.1 Analyse dimensionnelle

- **Paramètres :** ω , k , h , ρ , g , γ (en supposant qu'on ne prend qu'un ρ , celui du fluide du dessus étant négligeable)
- On a 6 grandeurs et 3 dimensions donc 3 paramètres adimensionnés.
- On isole h par le paramètre kh .
- Si pas de gravité, on trouve $\omega^2 \sim \frac{\gamma}{\rho} k^3$. Si pas de tension superficielle, on trouve $\omega^2 \sim gk$.
- On utilise ces résultats pour se guider un peu : on considère le paramètre ω^2 / gk , qui permet de mettre ω dans un seul paramètre adimensionné. Le seul dernier paramètre possible est $k^2 \gamma / \rho g = (kl_c)^2 = (k/k_c)^2$: il compare gravité et capillarité.
- La vraie relation de dispersion est

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \left(1 + \frac{\gamma}{\rho g} k^2 \right)$$

Remarques

En fait, on a un terme $\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ devant ω^2 , mais il est négligeable dans la plupart des cas car on prend l'air et l'eau. On remarque que ce terme change de signe si le fluide le plus lourd est au-dessus : on a apparition d'une instabilité.

3.2 Étude de la dispersion

- Faire apparaître k_c , le nombre d'onde capillaire. Il sépare deux régimes. [3] p 73
- **Eau peu profonde** : $kh \ll 1$ donc $\tanh(kh) \sim kh$ et $k/k_c \ll l_c/h \sim 1$. Ainsi la relation de dispersion est

$$\omega = \sqrt{ghk}$$

et il n'y a pas de dispersion!

- **Eau profonde** : $kh \gg 1$ donc $\tanh(kh) \sim 1$ et la relation de dispersion est

$$\omega^2 = gk \left(1 + \left(\frac{k}{k_c} \right)^2 \right).$$

- Limite des ondes de gravité, des ondes capillaires : calcul de v_φ et v_g dans ce cas. [3] p 74
- Montrer les photos de [1] : les grandes longueurs d'ondes se propagent bien plus vite.
- Tracé général de la relation de dispersion, vitesse minimale en-dessous de laquelle il n'y a pas propagation.

Écran

- Images de dispersion de [1]
- Relation de dispersion pour les ondes à la surface de l'eau, graphe de v_φ et v_g .

Remarques

Les ondes capillaires sont un exemple de dispersion *anormale* : on a $v_g > v_\varphi$.

Conclusion

Ouvrir sur la propagation guidée, qu'on peut déjà intuitivement à partir du câble coaxial, et les ondes inertielles pour lesquelles \vec{v}_φ et \vec{v}_g sont perpendiculaires.

Attention

La référence [6] utilise la convention $\exp(i(kx - \omega t))$: ne pas oublier de corriger les signes dans les expressions.

Niveau Licence

Prérequis

- Onde électromagnétiques dans le vide
- Conditions sur \vec{E} et \vec{B} à une interface
- Ondes acoustiques

Message Si l'on confine une onde afin de restreindre ses directions de propagation, on quantifie (et on sépare) les fréquences qui peuvent se propager : cela est dû aux conditions aux limites.

Bibliographie

- [1] René MOREAU. « Propagation guidée des ondes acoustiques dans l'air \dot{z} ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* 742 (1992).
- [2] Stéphane OLIVIER, Hubert GIÉ et Jean-Pierre SARMANT. *Physique Spé : PC*, PC. Cours et exercices d'application*. Tec & Doc, 2000.
- [3] Marie-Noëlle SANZ, Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2004.
- [4] Étienne THIBIERGE. *Propagation des ondes*. 2015. URL : http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/ondes_poly_2015.pdf.

TODO : slides

Introduction

- L'amplitude des ondes électromagnétiques sphériques décroît en $1/r$ et leur densité d'énergie en $1/r^2$
- Pour transmettre des signaux sur de longues distances, il est intéressant de *guider* ces ondes

Transition : Pour guider une onde, on pense à l'envoyer dans un câble ou plus généralement un domaine étendu dans une direction et clos dans les autres. On commence par modéliser à outrance afin de dégager les processus physiques importants.

1 Guidage d'ondes électromagnétiques

1.1 Onde électromagnétique entre deux plans métalliques parallèles

Pour cette section, suivre [4] à partir de la page 51.

- Poser le problème, faire un beau schéma.
- Équation de propagation. Les conditions aux limites ne jouent pas sur celle-ci, mais elles vont jouer sur les solutions que l'on considèrera.
- L'invariance selon y entraîne l'existence de deux systèmes découplés, qui amènent aux modes TE et TM (où respectivement \vec{E} ou \vec{B} sont transverses à la direction de propagation).
- Les conditions aux limites imposent la nullité de B_z , E_x et E_y , mais pas des autres composantes car il peut exister des densités surfaciques de charges ou de courants.

[4] p 51

Transition : Résolution de l'équation de propagation pour un mode TE.

1.2 Structure des solutions

Suivre [4] à partir de la page 52.

- On considère un mode TE.
- Ansatz complexe pour le champ électrique
- Solution étant données les conditions aux limites : modes caractérisés par un entier
- Insister sur le fait que ce sont les conditions aux limites qui ont amené cette quantification.
- Donner la relation de dispersion.
- Parler du calcul du champ \vec{B} (on n'a pas la relation de structure ici!!)
- Décomposition en deux OPPH : important, car cela va nous permettre de faire une analogie géométrique plus tard. On pourrait obtenir le champ \vec{B} en appliquant la relation de structure à chaque OPPH.
- Modes TM (ne pas parler de l'existence d'un mode TEM unique, on n'a pas le temps).

1.3 Relation de dispersion

- Relation de dispersion, pulsation de coupure : graphique, cas monomode, cas multimode.
- Vitesses de phase et de groupe.
- Dispersion intramodale et intermodale ([4] p 50).
- Pulsation minimale pour qu'une onde puisse se propager (pas de pulsation minimale pour le mode TEM, mais il n'apparaît pas sur le graphique de [4] car il est TM).

Écran

Relation de dispersion du guide plan-plan. Prévoir aussi des slides de calculs, afin d'aller plus vite que si tout est écrit au tableau...

Transition : Comment appliquer ces résultats à des guides d'ondes plus physiques?

1.4 Généralisation au guide rectangulaire

- Modes TE et TM, caractérisés par deux indices. On n'a plus de mode TEM.
- Nouvelle relation de dispersion.
- Application au banc hyperfréquence vu en TP?

Transition : On a compris comment transporter des ondes électromagnétiques et les conséquences qu'un tel transport avait sur ces ondes. Peut-on étudier de la même façon le guidage d'ondes qui ne sont pas électromagnétiques? On va s'intéresser à un guide d'onde acoustique, que l'on va étudier sans refaire tous les calculs en utilisant la superposition d'ondes planes déjà vue.

2 Étude semi-quantitative du guide d'ondes acoustique

2.1 Observations expérimentales

Expérience

- Faire passer des pulses dans un tuyau cylindrique, observer le signal en sortie (TP Ondes I).
- Repérer les différents pics, mesurer les temps de propagation. On mesure les vitesses de groupe!
 - Ne pas oublier de retrancher le temps de vol mesuré en accolant émetteur et récepteur.
 - Remarquer que les pics varient en intensité en fonction de l'angle d'entrée?
 - On envoie des trains d'ondes : leur profil de raie est en gros une raie monochromatique un peu élargie.
 - On ne voit pas trop de dispersion, car le tuyau est court et le récepteur a une faible bande passante.
 - Ne faire que qualitativement si on manque de temps.
- On observe qu'une même fréquence se propage à plusieurs vitesses, comme dans le cas électromagnétique : on peut sans doute faire une analogie.
 - Remarquer qu'il existe cependant ici un mode qui se propage à la même vitesse que dans l'air...

Transition : Essayons d'appliquer la théorie présentée dans la partie précédente aux ondes acoustiques.

2.2 Méthode géométrique

Suivre [4] pages 58-62.

- Conditions aux limites, propagation du mode fondamental
- Analogie avec 2 OPPH qui se réfléchissent sur les surfaces du guide.
- Obtention de la relation de dispersion, critère sur la position des parois.
- En fait c'est très similaire!
- Généraliser au cas d'un tuyau cylindrique, et retrouver les fréquences obtenues expérimentalement.

[1] p 391

Écran

Schéma de la superposition des deux ondes.

Transition : Le guidage d'ondes acoustiques trouve un intérêt particulier dans la réalisation d'instruments de musique, et plus généralement d'appareils acoustiques.

2.3 Application au cornet acoustique

Voir pour cette section l'exercice de [2] page 768. Cependant, on n'a pas le temps de la traiter, et elle ne rentre pas trop dans le fil directeur de la leçon : elle n'est présente que pour la culture.

- Faire le schéma au tableau
- Redonner les équations d'Euler linéarisée et d'évolution isentropique.
- Conservation de la masse : l'équation change un peu car on a une surface qui varie.
- Relation de dispersion et signe de $\text{Im}(k)$: on a *amplification*!

Écran

Calculs de l'équation de conservation de la masse et de la relation de dispersion (passer vite dessus en cas de manque de temps).

Conclusion

Ouvrir sur la dispersion : on voudrait guider sans trop déformer le signal, notamment pour le numérique (où l'étalement des bits correspond à une perte de bitrate).

Remarques

Voir aussi [3] pour une autre référence qui fait les calculs ;

Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques.

Niveau L3

Prérequis

- Ondes électromagnétiques dans le vide
- Oscillations forcées
- Étude macroscopique des milieux diélectriques (polarisation, équations de Maxwell)
- Optique géométrique
- Spectroscopies (chimie)

Message

Bibliographie

- [1] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Électromagnétisme 4*. Dunod, 1984.
- [2] Jean-Michel RAIMOND. *Électromagnétisme et Relativité*. 2000. URL : <http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/electromagnetisme.htm>.
- [3] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.
- [4] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PSI*. Dunod, 2004.

Introduction

Expérience

Déviation et dispersion de la lumière blanche par un prisme.

- Lampe QI, condenseur, fente, prisme avec élévateur et écran

- On sait que le champ électromagnétique se propage grâce aux équations de Maxwell
- Si de la lumière blanche passe dans un prisme, elle est *déviée*, comme en optique géométrique, et *dispersée* : le comportement est différent selon la fréquence.
- Il faut prendre en compte le *milieu* dans lequel se déplace la lumière pour expliquer ces phénomènes.

1 Propagation d'une onde électromagnétique dans un DLHI

Lorsqu'il est soumis à un champ électrique, un milieu diélectrique se polarise. Apparaissent des dipôles induits : on les décrit par une densité volumique de moments dipolaires \vec{P} .

1.1 Réponse d'un milieu à un champ électrique sinusoïdal

- Champ électrique sinusoïdal $\vec{E} \propto \exp(i\omega t)$
- On exprime la polarisation \vec{P} en fonction de \vec{E} , tout en faisant certaines hypothèses sur le milieu :

[4] p 715

$$\begin{aligned}\vec{P}(M, t) &= \varepsilon_0 \left[\underline{\chi}_e(M, \omega) \right] \vec{E}(M, t) \quad \text{linéaire} \\ &= \varepsilon_0 \left[\underline{\chi}_e(\omega) \right] \vec{E}(M, t) \quad \text{homogène} \\ &= \varepsilon_0 \underline{\chi}_e(\omega) \vec{E}(M, t) \quad \text{isotrope}\end{aligned}$$

- Un milieu vérifiant toutes ces propriétés est appelé DLHI : Diélectrique Linéaire Homogène Isotrope. La quantité $\underline{\chi}_e(\omega)$ est appelée *susceptibilité diélectrique*. Celle-ci est complexe en général : elle prend en compte un retard de la polarisation (qui se traduit donc par un déphasage).
- Permittivité diélectrique complexe $\underline{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \underline{\chi}_e(\omega)$. [1] p 77

Transition : On a pu modéliser la réponse du milieu à la présence d'un champ sinusoïdal. L'ingrédient manquant désormais pour étudier la propagation d'ondes est les équations de Maxwell.

1.2 Pseudo-onde plane progressive monochromatique

- Rappel des relations reliant les densités de charges et de courants liés à la polarisation : [1] p 6, [4] p 709

$$\rho_{\text{liés}}(M, t) = -\text{div} \vec{P}(M, t) \quad \text{et} \quad \vec{j}_{\text{liés}}(M, t) = \frac{\partial \vec{P}(M, t)}{\partial t}$$

- Montrer les équations de Maxwell pour un diélectrique parfait (pas de charges ou de courants libres). Ansatz pour le champ. [1] p 200
- Donner les équations en régime sinusoïdal forcé (avec l'ansatz proposé) :

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad ; \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B} \quad ; \quad \vec{k} \wedge \vec{B} = -\omega \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \vec{E}$$

- Relation de structure [1] p 202
- Structure des ondes : tout se passe comme pour les ondes dans le vide, sauf que la relation de structure n'est vraie que pour des champs complexes!
- Prendre \vec{e}_z comme direction de propagation, écrire $\vec{k} = k \vec{e}_z$, et poser $k = k' - ik''$. Donner l'expression des champs.

Écran

- Équations de Maxwell pour un diélectrique parfait (pas de charges ou de courants libres). Ansatz pour le champ.
- Expressions des champs

Attention

- Il faut savoir donner des exemples de milieux non LHI et savoir retrouver les équations de Maxwell (avec $\text{div} \vec{P} = -\rho_{\text{liés}}$).
- On utilise lors de cette leçon la convention en $\exp(i\omega t)$. Certaines références, comme [1], utilisent plutôt $\exp(-i\omega t)$

Transition : On va définir une grandeur qui permettra de faire le lien avec l'optique.

1.3 Indice complexe

- Définition de l'indice complexe : réfraction et extinction. [1] p 204
- Vitesse de phase $v_\varphi = \omega / k' = c / n'$. [1] p 205
- Vitesse de groupe, formule de Rayleigh. [1] p 216
- Vecteur de Poynting : on retrouve la loi de Beer-Lambert.

Écran

Calcul du vecteur de Poynting.

Remarques

Dans les zones de *dispersion anormale*, telles que $n(\omega)$ soit une fonction décroissante, on peut avoir $v_g > c$ et même $v_g < 0$. En fait la notion de vitesse de groupe perd son sens ici. Voir [2] p 329.

Transition : Développons maintenant un modèle microscopique afin de donner des valeurs à $\underline{\chi}_e(\omega)$.

2 Modélisation microscopique

Rappel : les dipôles induits sont dus aux nuages électroniques, aux noyaux dans les molécules et à l'alignement de dipôles permanents. Ce sont les trois types de polarisabilités que nous étudierons dans la suite. Voir [1] p 85-92.

Attention

Dans cette partie, il faut bien insister sur l'application de l'étude des diélectriques à la propagation des ondes. On ne s'intéresse pas à la modélisation des diélectriques pour la beauté de la chose.

2.1 Polarisation électronique

- Modèle de l'électron élastiquement lié. [1] p 85
- On néglige la contribution magnétique (électrons non relativistes, $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| / \|\vec{E}\| \simeq v/c \ll 1$) et les variations spatiales du champ électrique ($\vec{k} \cdot \vec{r} \ll 1$ soit $r \ll \lambda$, avec $r \sim a_0 = 53 \text{ pm}$).
- On parvient à l'équation

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \gamma m \frac{d\vec{r}}{dt} + m\omega_0^2 \vec{r} = -e\vec{E}$$

- Dipôle $\vec{p} = -e\vec{r}$, polarisabilité [1] p 86

$$\underline{\alpha}(\omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

- ODG : $\omega_0 \sim 1 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\gamma = 1/\tau \sim 1 \times 10^{-12} \text{ s}$. Préciser que γ est la largeur de la bande d'absorption et que $Q \gg 1$ étant donné les ODG. [4] p 712,
- Milieu dilué : $\chi(\omega) = N\alpha(\omega)$. [2] p 259
- Apport de la mécanique quantique : [1] p 206

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

[2] p 270,
[1] p 88

où les f_i sont des « forces d'oscillateurs ». On remarque une forte analogie avec une somme d'oscillateurs (la formule quantique ne prenant pas en compte les pertes).

Écran

- Justification des termes de l'équation
- Graphe de χ' et χ'' , commentaires sur la largeur des pics. Voir [4] p 713. On tend bien vers 0 en l'infini car l'électron « ne peut plus suivre ».

Remarques

Ici on étudie le mouvement des barycentres des nuages électroniques.

2.2 Polarisabilités atomique et d'orientation

- Polarisabilité atomique : déplacement des noyaux dans les molécules (degrés de liberté de rotation-vibration). On fait le même modèle, mais on a $\omega_{0,at} = 1 \times 10^{13} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. [1] p 89
- Polarisation d'orientation pour des molécules polaires. Il faut un certain temps pour que le dipôle s'aligne, et avec un retard exponentiel (modèle de Debye), on trouve (sans développer les calculs)

$$\chi'_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \text{et} \quad \chi''_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Remarques

- Si la molécule n'a pas de symétrie sphérique, on a une polarisabilité matricielle. Pour les milieux amorphes ou fluides, on moyenne et on obtient $\vec{p} = \frac{1}{3} \epsilon_0 \text{Tr}[\alpha] \vec{E}$. Voir [1] p 55.
- La valeur en statique de la polarisabilité d'orientation est calculable en physique statistique (on obtient la fonction de Langevin). On peut revoir ce calcul en préparation.

2.3 Susceptibilité totale

Écran

- Graphe des parties réelle et imaginaire de la susceptibilité dans le cas de l'eau.
 - Identifier l'infrarouge, le visible.
 - Pour une bande de largeur γ centrée en ω_0 , on a deux cas limites : soit $\omega \ll \omega_0$, « \vec{P} suit \vec{E} » et la susceptibilité est réelle, soit $\omega \gg \omega_0$ et la polarisation « ne suit plus », la susceptibilité est nulle.
 - Les valeurs en zéro s'additionnent.
- Courbes expérimentales de <https://refractiveindex.info/>.
 - Bien choisir l'échelle en eV, l'échelle logarithmique pour les abscisses, et chercher parmi les différentes tables proposées celle qui propose la plus grande plage de données. Tracer l'indice et l'absorption.
 - Comparaison eau liquide/eau solide : on n'a pas la polarisation d'orientation pour la glace.
 - Courbe de l'éthanol : relier k au spectre IR, trouvable sur <https://sdfs.db.aist.go.jp>. Faire correspondre les bandes du spectre aux pics sur le tracé de $n''(\omega)$.

Transition : Considérons le cas de l'eau. Dans le domaine optique, on voit qu'il n'y a pas d'absorption mais seulement de la dispersion.

2.4 Dispersion dans le domaine optique

— Formule de Cauchy pour $\lambda \gg \lambda_i$, en faisant attention au fait que $1/(\omega_i^2 - \omega^2) \propto \lambda_i^2 \lambda^2 / (\lambda^2 - \lambda_i^2)$

[1] p 206

$$n^2 = 1 + \sum_i \frac{C_i}{\omega_0^2 - \omega^2} = 1 + \sum_i \frac{D_i \lambda_i^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} = 1 + \sum_i \frac{D_i \lambda_i^2}{1 - (\lambda_i/\lambda)^2} = 1 + \sum_i D_i \lambda_i^2 + \frac{\sum_i D_i \lambda_i^4}{\lambda^2} + \frac{\sum_i D_i \lambda_i^6}{\lambda^4} + \dots$$

— On pourrait traiter les milieux denses : calculs plus compliqués mais on arriverait au même développement limité! On peut donc expliquer la dispersion par le prisme.

[1] p 207

Conclusion

— On a pu retrouver le cadre des lois de l'optique géométrique et le principe de la déviation par un prisme.

— Il resterait en toute rigueur à traiter l'interface entre des diélectriques, mais c'est analogue à ce qui a été fait pour des milieux d'impédances différentes dans [3] p 1046. En fait ici l'impédance serait $\sqrt{\mu_0/\varepsilon} \propto 1/n$.

— Ouverture sur les milieux anisotropes : biréfringence, etc.

— Le bilan énergétique dans un diélectrique est plus complexe que dans le vide puisqu'il faut prendre en compte l'effet du milieu : voir [1] p 219. On a dans une zone sans absorption, avec des charges élastiquement liées ($\chi = A/(\omega_0^2 - \omega^2)$) :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = v_g \langle u_{\text{tot}} \rangle \vec{u} = \left\langle u_{\text{cin}} + u_{\text{pot}} + \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle \vec{u}.$$

On calcule $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} n c \varepsilon_0 E_0^2 \vec{u}$, $n = \sqrt{1 + A/(\omega_0^2 - \omega^2)}$ et $v_g = n c / (1 + A\omega_0^2/(\omega_0^2 - \omega^2))^{-1}$. Les densités d'énergie valent

$$\langle u_{\text{cin}} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0}{4} \frac{A\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}, \quad \langle u_{\text{pot}} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0}{4} \frac{A\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad \text{et} \quad \langle u_{\text{em}} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0}{4} \left(2 + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \right).$$

On ne peut donc pas simplement remplacer ε_0 par ε dans la densité d'énergie électromagnétique. Cela fonctionnerait si ε ne dépendait pas de ω ... Sinon, on applique la formule de [1] p 257, corrigé de l'exercice 6 :

$$u_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\omega} \right)$$

Remarques

Paragraphe intéressant sur l'amplification dans les lasers à la fin de la partie 3 du chapitre 4 de [1]

Pour réellement revenir à l'optique géométrique, on doit passer à une quantité scalaire : c'est le modèle de l'onde quasi-plane. On ne parle pas du tout de ça ici.

Attention

Commentaire lors de la leçon : pas forcément besoin de faire Descartes et passer plus de temps sur le reste et la physique que ça contient

Niveau CPGE

Prérequis

- Ondes électromagnétiques dans le vide
- Dispersion, absorption
- Diffusion thermique

Message

Bibliographie

- [1] Neil ASHCROFT et David MERMIN. *Physique des solides*. EDP Sciences, 2002.
- [2] Jérémy NEVEU. *Moteurs et transformateurs électriques*. 2018.
- [3] Marie-Noëlle SANZ, Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2004.
- [4] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

Introduction

- On a étudié la propagation des ondes dans le vide, mais autour de nous les ondes électromagnétiques se propagent aussi beaucoup dans un type de matériau très différent : les conducteurs.
- Définition : milieu possédant des charges libres susceptibles de se mouvoir sur des distances macroscopiques.
- Exemples : métaux, solutions électrolytiques...
- On commence par étudier le modèle du plasma, un constituant important de l'Univers. Ce modèle assez simple va nous permettre de dégager les phénomènes importants, et nous pourrons ensuite passer à une modélisation plus aboutie.

1 Propagation dans les plasmas dilués

1.1 Présentation du modèle

- Définition : milieu ionisé, constitué d'ions de charge $+e$, masse M et d'électrons de charge $-e$, masse m . [3] p 513
- Plasmas naturels : soleil (car haute température), ionosphère (le rayonnement UV provenant du Soleil arrache des électrons)
- Plasmas artificiels : décharge électrique dans un gaz, plasmas pour la fusion nucléaire (on enlève les électrons d'un noyau afin qu'il soit possible de rapprocher un autre noyau et de lancer la fusion).
- Hypothèses simplificatrices : électrons non relativistes ($v \ll c$), plasma peu dense (on peut négliger les interactions entre charges)
- Propagation d'une OPPH : [4] p 1001

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - kz)).$$

Transition : Le milieu contient des charges libres : celles-ci vont réagir à la présence de l'onde. Obtenons cette réponse, puis utilisons-la pour calculer la rétroaction sur l'onde elle-même.

1.2 Conductivité complexe

— Équation du mouvement pour une famille de porteurs (n, q, m, \vec{v}) :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

— Simplifications pour un plasma suffisamment dilué : $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll \|\vec{E}\|$ et $kz \ll 1$ à l'échelle du mouvement d'un électron. On peut donc simplifier l'équation du mouvement. [3] p 514

— En régime sinusoïdal forcé, parvenir à [4] p 1003

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma} \underline{\vec{E}} \quad \text{où} \quad \underline{\gamma} = -i \frac{n_0 q^2}{m \omega}.$$

— On a une contribution par famille de porteur. Ici il y a deux familles, mais $M \gg m$ donc on ne prend en compte que les électrons. On peut donc écrire

$$\underline{\vec{j}} = -i \frac{ne^2}{m\omega} \underline{\vec{E}} = -i \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \underline{\vec{E}} \quad \text{où} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}.$$

La pulsation ω_p est appelée **pulsation plasma**.

— Conductivité imaginaire pure : $\underline{\vec{j}}$ et $\underline{\vec{E}}$ sont en quadrature de phase et la puissance moyenne dissipée par effet Joule est nulle. [4] p 1004

— Équation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \underline{\vec{j}} = 0 \quad \text{donc} \quad i\omega \underline{\rho} + \underline{\gamma} \text{div} \underline{\vec{E}} = \left(i\omega + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\right) \underline{\rho} = 0 \quad \text{puis} \quad (\omega^2 - \omega_p^2) \underline{\rho} = 0.$$

Ainsi on peut toujours prendre $\rho = 0$. Lorsque l'on se trouve exactement à la pulsation plasma, on peut avoir apparition d'ondes longitudinales un peu bizarres...

Remarques

Pour faire l'hypothèse d'homogénéité de $\underline{\vec{E}}$ à l'échelle du mouvement de l'électron, on doit écrire $ka \sim kv/\omega \ll kc/\omega = c/v_\phi < 1$. On a le même résultat que [3] car on a $k/\omega < 1/c$ pour un plasma (en effet $v_\phi > c$). Noter qu'il existe une autre façon de faire la preuve, en passant par une description eulérienne de l'écoulement (voir [4] p 1003).

Attention

La référence [3] utilise la convention en $\exp(i(kx - \omega t))$, donc il faut inverser le signe de toutes les parties imaginaires.

Transition : On a décrit la réponse du milieu à une onde électromagnétique. Utilisons maintenant les équations de Maxwell pour boucler la boucle, et obtenir le champ électromagnétique au complet.

1.3 Relation de dispersion

— Suivre [3] avec un vecteur \vec{k} de direction quelconque (on doit donc démontrer que l'onde est transverse).

- Écrire les équations de Maxwell en notations complexes, avec l'équivalence $\text{div} \leftrightarrow -i\vec{k}$. et $\text{rot} \leftrightarrow -i\vec{k} \wedge$.
- L'équation de Maxwell-Gauss nous dit que l'on a $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$.
- On utilise Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère pour remonter à la relation de dispersion de Klein-Gordon :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

Transition : On a une relation assez différente de la relation de dispersion de d'Alembert : on peut donc s'attendre à des comportements différents!

2 Régimes de propagation dans les plasmas

2.1 Cas $\omega > \omega_p$

- Propagation avec dispersion, pas d'absorption. Milieu transparent. Calcul de la vitesse de phase, de la vitesse de groupe, relation [4] p 1019

$$v_g \times v_\varphi = c^2.$$

- La vitesse de phase est plus grande que c mais ce n'est pas grave.
- Si on a le temps : relation de structure pour les OPPH, vitesse de propagation de l'énergie. On peut justifier a posteriori les hypothèses faites au début. [3] p 518

2.2 Cas $\omega < \omega_p$

- Ici, le vecteur d'onde k est complexe! On le note \underline{k} . En fait, l'étude faite depuis le début reste valable...
- $\underline{k} = -i/\delta$, choix du signe. [4] p 1006
- Onde évanescente de la forme

$$\vec{E} = \underline{E}_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \exp(i\omega t).$$

- Passage aux champs réels, vecteur de Poynting. On a $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$: en moyenne l'onde ne transmet pas d'énergie. On a réflexion totale, le plasma se comporte comme un miroir. [3] p 520
- Application à l'ionosphère. [3] p 521

3 Propagation dans les métaux

3.1 Lois de réponse

- Modèle de Drüde : les collisions des électrons avec le réseau (plus précisément avec les défauts, en fait) peuvent être modélisées par un terme de frottements, de sorte que l'équation vérifiée par la vitesse moyenne est [1] p 12

$$m \frac{d\langle \vec{v} \rangle}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \langle \vec{v} \rangle$$

- Mêmes approximations qu'auparavant : électrons non relativistes donc pas de terme magnétique ni de dépendance spatiale du champ. Comme précédemment, on ne pourra vérifier ces approximations qu'a posteriori.

- Différences majeures avec le plasma : les ions sont considérés fixes (on avait simplement négligé leur mouvement auparavant), et surtout on a des interactions sous la forme d'une force de frottement fluide. ODG de τ : pour le cuivre, on a $\tau \sim 1 \times 10^{14}$ s. [4] p 1007
- Conductivité complexe [4] p 1008

$$\underline{\gamma} = \frac{\frac{ne^2\tau}{m}}{1 + i\omega\tau} = \frac{\gamma_{\text{plasma}}}{1 + \frac{1}{i\omega\tau}}$$

- On a désormais deux fréquences : $\omega_p \sim 1 \times 10^{16}$ rad · s⁻¹ et $1/\tau \sim 1 \times 10^{14}$ rad · s⁻¹ (pour un métal comme le cuivre). [2] p 7
- On a aussi $\rho = 0$, sauf pour $\omega = \omega_p$, mais on ne rentrera pas plus dans les détails ici (voir [2] p 7-8).
- On a deux domaines distincts :
 - **Domaine optique** : $\omega \gg 1/\tau$, $\underline{\gamma} = \gamma_{\text{plasma}}$. Les électrons ne sont pas freinés, on retrouve un modèle de plasma. On a les deux domaines classiques des plasmas : $\omega < \omega_p$ (réflexion totale, à l'origine de l'éclat métallique) et $\omega > \omega_p$ (transparence).
 - **Domaine ohmique** : $\omega \ll 1/\tau$. Il s'agit du domaine classique de l'électronique!

Transition : Étudions ce nouveau domaine, d'une importance capitale pour la transmission de signaux et pour les circuits réalisés en TP.

3.2 Domaine ohmique

- Dans ce domaine, $\underline{\gamma} \simeq \gamma_0 = ne^2\tau/m$.
- Suivre [3] p 533 : écrire les équations de Maxwell, obtenir la relation de dispersion (mais remplacer $\underline{\gamma}$ par γ_0 dès le début) :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma_0\omega.$$

- On peut négliger le terme en ω^2/c^2 . Donner la nouvelle relation de dispersion : elle correspond à l'équation [3] p 534

$$\Delta \vec{E} = \mu_0\gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Effet de peau, épaisseur de peau δ et expression de k en fonction de δ . [4] p 1023
- ODG de δ : le champ pénètre très peu dans un conducteur! Conducteur parfait : conductivité infinie, le champ n'y pénètre pas du tout. [3] p 536
- Expression du champ électrique. L'onde n'est pas évanescence puisqu'elle se propage : il s'agit d'une onde amortie. [4] p 1024
- Aspect énergétique : expression du vecteur de Poynting.

Écran

Ordres de grandeur de δ pour différents matériaux.

Remarques

De façon générale, pour pouvoir négliger la contribution magnétique et pour pouvoir supposer le champ uniforme sur l'échelle considérée, il faut avoir $v \ll v_\varphi$. Or ici, $v_\varphi = \sqrt{2\omega/\mu_0\gamma_0}$. On voit donc qu'aux faibles fréquences, les hypothèses ne seront plus forcément vérifiées... Heureusement, les vitesses caractéristiques d'électrons sont très faibles, car la densité de cou-

rant est $j = -nev$ et n est de l'ordre de $1 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$ dans un conducteur.

Conclusion

Écran

Récapitulatif des trois régimes ([2] p 9).

— Ouvrir sur le traitement quantique de la conduction.

Niveau CPGE

Prérequis

- Ondes électromagnétiques dans le vide
- Dipôle électrostatique
- Énergie électromagnétique
- Électron élastiquement lié

Message L'étude des ondes produites par un dipôle électrique oscillant montre que toute charge accélérée rayonne. Le rayonnement produit n'est pas isotrope!

Bibliographie

- [1] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Électromagnétisme 3*. Dunod, 1986.
- [2] Jérémy NEVEU. *Cours d'électronique de la préparation à l'Agrégation de Physique*. 2018.
- [3] Stéphane OLIVIER, Hubert GIÉ et Jean-Pierre SARMANT. *Physique Spé : PC*, PC. Cours et exercices d'application*. Tec & Doc, 2000.
- [4] Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2014.
- [5] Marie-Noëlle SANZ, Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2004.

Introduction

- On a étudié les ondes électromagnétiques sans s'intéresser à leurs sources
- On veut voir si la modélisation d'oeppm était réaliste ou non
- On va s'intéresser à un modèle simple d'émetteur : un dipôle oscillant.

1 Modèle du dipôle électrique oscillant

- Modèle de l'émetteur : ensemble de charges ponctuelles q_i , de vitesses \vec{v}_i . La charge totale est nulle, et le moment dipolaire électrique est défini par

[5] p 575

$$\vec{p}(t) = \sum_i q_i \vec{O}A_i = \sum_{q_i > 0} q_i \vec{O}A_i + \sum_{q_i < 0} q_i \vec{O}A_i = \vec{O}P \sum_{q_i > 0} q_i + \vec{O}N \sum_{q_i < 0} q_i = q \vec{N}P$$

où N et P sont les barycentres tels que $\vec{O}P = \sum_{q_i > 0} \vec{O}A_i / \sum_{q_i > 0} q_i$, et idem pour N . On a posé $q = \sum_{q_i > 0} q_i = -\sum_{q_i < 0} q_i$.

- On va faire quelques approximations pour pouvoir calculer le champ créé. Les champs \vec{E} et \vec{B} sont créés par l'ensemble des charges q_i en A_i . Ainsi, en $M(r, \theta, \varphi)$ à t , ces champs dépendent de
 - L'atténuation : amplitude en $1/A_i M$, $1/A_i M^2$, etc. On fait l'*approximation dipolaire* : $a \ll r$, donc $A_i M \simeq r$.
 - Le retard à la propagation : le champ à t dépend des sources en $t - A_i M/c$. Or $A_i M/c = r/c + \delta t$ avec $\delta t \simeq a/c$. On fait l'*approximation non relativiste* : $\delta t \ll T$, soit $a \ll \lambda$ (équivalent à $c/f \gg a$ soit $c \gg v$).

[5] p 576

- On résume tout ensemble : on va considérer un **dipôle oscillant**, qui vérifie $\vec{N}P = a \cos(\omega t)$, $a \ll r$ et $a \ll \lambda$. [4] p 632
- Important : on compare les distances à r et les phases à 1.
- Exemple : atome dans une lampe spectrale, antenne radio (décomposée en plein de petits dipôles) [3] p 728

Écran

Schéma des coordonnées utilisées pour toute la présentation

Transition : Avec ces approximations, on peut calculer le champ créé par les charges. Cependant, cela n'est pas d'un grand intérêt physique : on va plutôt commenter physiquement les résultats.

2 Champ rayonné et propriétés

2.1 Expression générale et zone de rayonnement

- Traitement des invariances et symétries de [4] p 633 :
 - Invariances : rotation autour de \vec{e}_z donc les composantes sont indépendantes de φ (les vecteurs eux-mêmes dépendent de φ à travers \vec{e}_φ)
 - Symétries : plan méridien de symétrie ($M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$) donc \vec{B} est selon \vec{e}_φ et \vec{E} est selon \vec{e}_r et \vec{e}_θ .
- Expression complète des champs, avec les deux approximations déjà faites. [1] p 227
- Comparaison des ordres de grandeur des différents termes : on se place dans la zone de rayonnement $r \gg \lambda$, et on écrit les expressions des champs dans celle-ci [1] p 228

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r} \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r c} \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{e}_\varphi.$$

Ces expressions sont donc valables dans la zone $a \ll \lambda \ll r$.

Écran

Expression complète des champs avec toutes les dérivées de p , puis les expressions simplifiées en zone de rayonnement

2.2 Propriétés du champ rayonné

- Suivre [3] p 731.
- Anisotropie : rayonnement nul dans l'axe et maximal dans la direction orthogonale.
- Retard de propagation : on a bien une onde
- Décroissance en $1/R$, on verra ensuite comment l'interpréter.
- Polarisation rectiligne
- Structure locale d'onde plane : on peut donner une certaine réalité aux ondes planes toujours étudiées en physique. [5] p 580

Transition : D'autres aspects peuvent être déduits de ces champs, mais il faut pour cela comprendre la répartition de l'énergie.

3 Aspect énergétique

3.1 Puissance rayonnée

- Vecteur de Poynting [5] p 582

$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{\sin^2\theta}{cr^2} \ddot{p}^2 \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{e}_r.$$

- Anisotropie, diagramme de rayonnement [4] p 636
- Puissance moyenne rayonnée à travers une surface de rayon $r \gg \lambda$. [5] p 582
- Conservation de l'énergie : cela justifie l'amplitude en $1/r$.
- Formule de Larmor
- Résultat plus général : toute charge accélérée rayonne (on peut le voir en associant à une charge une autre charge fixe en O , et compenser celle-ci par une charge de signe opposé immobile qui ne rayonne pas). On a

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 \langle a^2 \rangle.$$

Écran

Diagramme de rayonnement pour le dipôle oscillant

Transition : Utiliser cette propriété de toute charge accélérée pour expliquer de nombreux phénomènes : rayonnement thermique, antennes, rayonnement synchrotron... et la diffusion dans le ciel

3.2 Application à la couleur du ciel

- On reprend l'exemple de l'atome vu au début : on étudie ses électrons dans le modèle de l'électron élastiquement lié. On l'a vu en prérequis, on sait que l'on a [3] p 735

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\Gamma\dot{\vec{r}} - m\omega_0\vec{r} - e\vec{E} \quad \text{donc} \quad \underline{\vec{p}} = -e\underline{\vec{r}} = \frac{e^2}{m\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma\omega} \underline{\vec{E}} \simeq \frac{e^2}{m\omega_0^2} \underline{\vec{E}}.$$

Si on manque de temps, on peut juste dire que l'on a des dipôles avec \vec{p}_0 constant.

- La puissance rayonnée étant en ω^4 , on a $\mathcal{P}_{\text{violet}}/\mathcal{P}_{\text{rouge}} = 16$.
- Expérience, commenter la couleur et la polarisation. [3] p 736

Expérience

Diffusion Rayleigh dans une cuve avec du lait en poudre (mettre très peu de lait). Montrer la diffusion du bleu et la polarisation du faisceau de « première diffusion ».

Conclusion

- Ouverture : lunettes polarisantes, antennes.

Remarques

Pour les questions :

- Revoir le développement multipolaire (les termes quadrupolaire, etc. sont bien présents mais sont de préfacteur bien plus faible que le terme dipolaire)
- Diffusion de Mie
- Revoir l'ARQS ([2] p 12)

Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat

Niveau L3

Prérequis

- Optique géométrique
- Optique ondulatoire
- Formulation lagrangienne en mécanique analytique

Message On peut réécrire les lois de l'optique géométrique comme découlant d'un principe d'extrémalisation. Cela permet de faire le lien avec de la physique moderne, et d'obtenir des résultats plus puissants.

Bibliographie

- [1] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Optique et physique ondulatoire*. Dunod, 1986.
- [2] René-Jean CHAMPEAU, Renaud CARPENTIER et Ivan LORGERÉ. *Ondes lumineuses*. de boeck, 2009.
- [3] José-Philippe PÉREZ. *Optique, fondements et applications, 7ème édition*. Dunod, 2011.
- [4] Baptiste PORTELLI et Julien BARTHES. *La physique par la pratique*. H & K, 2005.
- [5] Clément SAYRIN. *Travaux dirigés d'Optique*. URL : <http://www.lkb.upmc.fr/cqed/teaching/teachingsayrin/>.

Introduction

- Comme on a retrouvé les lois de Newton à l'aide d'un principe variationnel (le principe de moindre action), on va désormais chercher à retrouver les lois de l'optique de la même façon.
- Donner l'énoncé historique du principe de Fermat : on va en donner une formulation plus moderne et voir ce qu'elle implique.

1 Principe de Fermat et premières conséquences

1.1 Cadre de l'optique géométrique

- Optique géométrique : la lumière est constituée de *rayons* selon lesquels est transportée l'énergie lumineuse. [2] p 5
- Vitesse de la lumière dans un milieu d'indice n .
- Hypothèses de travail :
 - Milieu linéaire, transparent et isotrope : on n'a pas de biréfringence, et on peut définir un indice n .
 - Milieu non homogène : on a $n(\vec{r})$.
 - On prend de faibles longueurs d'onde, afin de négliger entièrement les phénomènes de diffraction.

Remarques

- On a deux définitions possibles des rayons lumineux : on peut les voir comme les lignes de champ du vecteur de Poynting (les directions de propagation de l'énergie), ou comme les courbes orthogonales aux surfaces d'ondes. Ces deux définitions coïncident cependant pour un milieu isotrope : voir [4] p 160.
- L'approximation des « faibles longueurs d'ondes » est en fait plus profonde : on parle d'approximation de l'onde quasi-plane, et elle revient à supposer que les ondes électromagnétiques considérées ont une amplitude $E(M)$ qui varie faiblement à l'échelle de variation de la phase :

$$\lambda \frac{\|\vec{\text{grad}} E\|}{|E|} \ll 1.$$

Cette approximation n'est pas valable près d'un point de convergence des rayons : on doit plutôt considérer le faisceau gaussien dans cette zone, ce qui montre qu'on a une avance de phase de π . Voir [1] p 72.

1.2 Énoncé du principe

- Suivre [3] p 18.
- Temps de parcours d'une courbe \mathcal{C}_{AB} , d'abscisse curviligne ds :

$$\tau_{AB} = \int_A^B d(t(s)) = \int_A^B \frac{ds}{v(s)} = \frac{1}{c} \int_A^B n ds = \frac{L_{AB}}{c},$$

où L_{AB} est le **chemin optique**, noté (AB) . On a noté AB et non pas \mathcal{C}_{AB} pour éviter des problèmes de lourdeur de notation, mais il faut bien voir qu'ici on calcule la longueur sur une courbe quelconque parcourue.

- Énoncé moderne du principe : « Entre deux points A et B atteints par la lumière, le chemin optique le long du trajet suivi par la lumière est *stationnaire* ».
- Précisons ce que l'on entend par stationnaire : dessiner la déformation d'une trajectoire. On est stationnaire lorsque

$$\delta L = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{où} \quad \max \|\delta \vec{M}\|.$$

- Différence avec la formulation initiale : on est stationnaire et non pas minimal, on peut donc se trouver dans le cas où le chemin optique est maximal (miroir plus concave qu'une ellipse) ou constant (miroir elliptique). Voir <https://femto-physique.fr/optique/principe-de-fermat.php> pour plus de détails.
- Importance de cette formulation variationnelle : elle fait le lien avec de nombreux autres domaines de la physique décrits de cette manière (formulation lagrangienne en mécanique, en relativité générale, en théorie quantique des champs...)

Transition : Voyons maintenant en quoi ce principe variationnel nous permet de retrouver des résultats connus d'optique géométrique. Commençons par deux conséquences rapides, que l'on considère en général comme incluses dans la définition.

1.3 Conséquences directes

- Suivre [3] p 20.
- Propagation rectiligne dans un milieu homogène.
- Retour inverse de la lumière : $L_{AB} = L_{BA}$ donc si (AB) est stationnaire, (BA) l'est.

Transition : Montrons maintenant que ce principe permet de retrouver les lois de l'optique géométrique.

2 Lois de l'optique géométrique

2.1 Lois de Snell-Descartes

- Résultat intermédiaire : différentielle d'un chemin optique. Pour vérifier la stationnarité d'un chemin, on va regarder des trajets voisins, et il est donc particulièrement intéressant de calculer dL_{AB} lorsque le chemin change. Ici, on fait varier les extrémités :

$$dL_{AB} = n dAB = n \vec{u} \cdot (d\vec{B} - d\vec{A}).$$

Faire le schéma de [1] p 100.

- Lois de Descartes pour la réfraction : suivre [3] p 21, obtenir la relation vectorielle

$$n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1 = \alpha \vec{N}$$

et en déduire les deux lois de la réfraction [1] p 103.

- Pour la réflexion, c'est pareil avec $n_1 = n_2$. On a donc bien un rayon réfléchi dans le plan d'incidence, et $\sin i = \sin i'$.

[1] p 101

Écran

Schéma avec les notations.

Transition : On a retrouvé les lois fondamentales de l'optique géométrique. Mais le principe de Fermat permet d'aller plus loin, grâce à la notion de chemin optique! On peut ainsi faire le pont vers l'optique ondulatoire.

2.2 Théorème de Malus

- Définition d'une surface d'onde : surface équi-chemin optique. [1] p 103
- Pour une onde sphérique, les surfaces sont des sphères. Pour une onde plane, ce sont des plans.
- Théorème de Malus tel qu'il est énoncé dans [1] p 104.
- Démonstration de [1] p 104 (on peut aussi faire la démonstration de [4] p 160, mais le principe de Fermat n'apparaît pas de façon aussi claire)

Remarques

En fait, le calcul est un peu plus compliqué : il faut en toute rigueur considérer une surface autour de A , et l'approximation de l'onde quasi-plane est alors valable entre les deux surfaces. Si l'on est trop proche de A ou de A' , l'approximation n'est plus valable et on doit considérer une phase supplémentaire : la phase de Gouy. Voir [2] p 49.

2.3 Formation des images : le stigmatisme

- Définition du stigmatisme rigoureux. [1] p 110
- Démonstration pour A et A' réels : on montre que $L_{AA'}$ est une constante, indépendante du rayon.

- Stigmatisme rigoureux : difficile à réaliser. Il est valide pour le miroir plan pour tout couple de points, le miroir elliptique pour les foyers, le miroir parabolique pour le foyer et l'infini et le dioptre sphérique pour les points de Weierstrass.
- Stigmatisme approché dans les conditions de Gauss. Connaître la preuve : voir [1] p 128.

[3] p 31

Remarques

On peut aussi utiliser le principe de Fermat pour démontrer la relation de conjugaison : tout d'abord pour un dioptre sphérique (exercice 1 page 147 de [1], où l'on identifie le terme en x de $L_{AA'}$ à 0 pour vérifier le principe de Fermat), puis conjugaison de deux dioptres sphériques confondus pour obtenir la relation de Descartes connue ([1] p 152).

3 Propagation dans un milieu non homogène

- Démonstration de [5], en utilisant plutôt que z une variable intermédiaire u telle que

$$L = \int du \frac{ds}{du} n(\vec{r}(u)) = \int du \mathcal{L} \left(\vec{r}(u), \frac{d\vec{r}}{du} \right).$$

- Ne pas faire les calculs : écrire les équations d'Euler-Lagrange (avec $ds/du = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$), puis donner directement l'équation des rayons.
- Passage dans la base de Frenet : identifier la courbure, et montrer que la concavité du rayon est tournée dans le sens de $\vec{\text{grad}} n$.
- Cela explique le phénomène de mirage ! En effet, lorsque la température augmente, la densité ρ diminue et par la loi de Gladstone ($n - 1 \propto \rho$) l'indice diminue aussi. On en déduit que les rayons se courbent vers le haut.

[4] p 162

Écran

Mirages.

Expérience

Si on a le temps, montrer la déviation d'un faisceau laser par un gradient de concentration ([3] p 12)

- Mettre du sucre au fond de la cuve
- Passage faisceau laser \leftrightarrow rayon lumineux : les faisceaux gaussiens vérifient bien l'optique géométrique pour $z > 0$ (voir [2] p 245).

Conclusion

- Ouvrir sur l'analogie entre l'optique géométrique et la mécanique : la vitesse est $n\vec{u}$, la position \vec{r} et l'énergie potentielle $-\frac{1}{2}n^2$. Une différence importante cependant : en optique géométrique, la vitesse initiale dépend de la position initiale, ce qui ajoute une grandeur conservée. Voir [4] p 163.

Niveau Licence**Prérequis**

- Optique géométrique
- Diffraction
- Transformée de Fourier
- Conditions des sinus d'Abbe

Message Un microscope est un compromis entre l'optique géométrique et l'optique non paraxiale.

Bibliographie

- [1] Mortimer ABRAMOWITZ et Michael W. DAVIDSON. *Combination Methods with Phase Contrast*. URL : <https://www.olympus-lifescience.com/en/microscope-resource/primer/techniques/fluorescence/fluorophase/>.
- [2] Claude BOCCARA. « La cohérence de la lumière et l'imagerie des tissus du corps humain ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* 927 (2010).
- [3] Philippe COCHARD. *La microscopie confocale*. URL : <https://trigenotoul.com/wp-content/uploads/2014/09/Confocal-cours.pdf>.
- [4] Sylvain HOUARD. *Optique, une approche expérimentale et pratique*. de boeck, 2011.
- [5] Alfred KASTLER. « La technique du contraste de phase ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* (1948).
- [6] Douglas MURPHY et al. *Introduction to Phase Contrast Microscopy*. URL : <https://www.microscopyu.com/techniques/phase-contrast/introduction-to-phase-contrast-microscopy>.
- [7] Stephen PADDOCK, Thomas FELLERS et Michael DAVIDSON. *Introductory Confocal Concepts*. URL : <https://www.microscopyu.com/techniques/confocal/introductory-confocal-concepts>.
- [8] Clément SAYRIN. *Travaux dirigés d'Optique*. URL : <http://www.lkb.upmc.fr/cqed/teaching/teachingsayrin/>.
- [9] SEXTANT. *Optique expérimentale*. Hermann, 1997.
- [10] Kenneth SPRING et Michael DAVIDSON. *Introduction to Fluorescence Microscopy*. URL : <https://www.microscopyu.com/techniques/fluorescence/introduction-to-fluorescence-microscopy>.
- [11] Gérard WASTIAUX. *La microscopie optique moderne*. Tec & Doc, 1994.

Introduction

- Définition d'un microscope : appareil permettant d'étudier des détails microscopiques à une échelle macroscopique.
- Microscope : utilisation de lentilles grossissantes afin d'observer la nature, la fin du XVIème siècle.

[4] p 154

- Idée : Agrandir une image, puis la mettre à l'infini afin qu'elle soit facile à observer (les premiers microscopes, constitués d'une seule lentille, devaient être placés directement sur l'il...).
- On veut d'un microscope qu'il grossisse beaucoup, qu'il possède une bonne résolution, et qu'il donne une image la plus fidèle possible.

1 Principe du microscope

1.1 Dispositif

Montrer un microscope de la collection en même temps qu'on développe le fonctionnement du dispositif. On peut mettre en évidence sur celui-ci l'éclairement, la mise au point, le cercle oculaire...

Écran

Coupe et schéma d'un microscope, contenant les notations utilisées lors de la leçon.

- Deux systèmes optiques, correspondant aux deux étapes décrites dans l'introduction : l'objectif et l'oculaire.
- L'objectif donne une image agrandie et inversée de l'objet. On le place de telle sorte que son foyer soit juste au-dessus de l'objet. Pour avoir un bon grossissement et un faible encombrement, on choisit une faible focale.
- L'oculaire permet d'obtenir une image agrandie et à l'infini afin que l'il n'accomode pas.
- On se place au cercle oculaire pour avoir le plus de lumière.
- On voit déjà que l'objectif est la pièce maîtresse du microscope.
- Démonstration de la relation

$$G_{c,mic} = G_{c,oc} |\gamma_{ob}|$$

[4] p 155

[8]

Expérience

Mesure du grossissement commercial d'un microscope ([9] p 54)

- Lampe QI avec condenseur et filtre antithermique, condenser les rayons sur la mire micrométrique que l'on étudie.
- Observer dans le plan focal image d'une lentille en sortie de l'oculaire pour être rigoureux, mais elle n'est pas réellement nécessaire.

Attention

La démonstration de [8] se complique la vie pour rien. Considérons le calcul fait dans cette référence, et notons B' le projeté de B sur la lentille \mathcal{L}_1 . On a par théorème de Thalès dans les triangles $F'_1 O_1 B'$ et $F'_1 A_1 B_1$ la relation

$$\gamma_{ob} = -\frac{\Delta}{f'_1},$$

sans avoir à utiliser de formules de conjugaison. On peut ensuite poursuivre le calcul.

Transition : Pourquoi n'a-t-on pas en pratique des microscopes de grandissement très élevé? Cela ne sert à rien si l'on ne peut pas résoudre correctement l'image.

1.2 Limite de résolution

- Définition de la limite de résolution, contrainte due à la diffraction et lien avec le demi-angle u . Ouverture numérique ω_0 . S'il y a le temps : démonstration à l'aide de la condition des sinus d'Abbe (démonstrée elle-même dans [8]).
- Objectifs à immersion : augmenter n et donc la résolution.
- ODG de limites de résolution : il s'agit du principal facteur limitant du microscope.

[4] p 160

Écran

Critère de Rayleigh.

Remarques

- De façon générale, ce sont les angles les plus grands qui donnent la résolution, car ils correspondent aux grandes fréquences spatiales (typiquement dans le plan de Fourier). Cependant ce sont ces rayons qui ne respectent pas bien les conditions de Gauss! La réalisation d'un microscope est donc avant tout un compromis...
- Le choix de $n = 1.5$ pour le liquide d'immersion est fait pour minimiser la réflexion et la réfraction avec le verre. Ce choix semble indépendant de la réflexion et réfraction... Ce n'est pas très clair. Voir l'article Wikipédia « Oil immersion » pour plus de détails.
- On peut aussi parler de profondeur de champ. Celle-ci vaut $\lambda \sqrt{n^2 - \omega_0^2} / \omega_0^2$.

Transition : Pour avoir une bonne résolution, il nous faut avoir des rayons très inclinés sur l'axe et on va quitter les conditions de Gauss... Cela va amener des aberrations, qu'il va falloir corriger.

1.3 Aberrations des lentilles

On ne peut pas traiter intégralement cette partie. Il est préférable de choisir un exemple et de le traiter à fond.

- Corrections pour l'objectif : on veut diminuer le demi-angle u pour revenir dans les conditions de Gauss. Pour réaliser ceci, on utilise un dioptre sphérique et on se place aux points de Weierstrass.
- Aberrations chromatiques : dues à la variation de l'indice n avec la longueur d'onde. Voir la discussion de [4] p 126. Afin de les corriger dans l'oculaire, on utilise deux lentilles : les verre de champ et verre d'il, qui permettent de ramener les rayons bleus vers le centre afin qu'ils soient moins déviés.

[4] p 160

[4] p 161

Écran

Montrer des schémas pour les aberrations, et des images de dispositifs réels.

Remarques

On pourrait aussi aborder l'éclairement : on ne veut pas avoir l'image du filament dans le plan d'observation, il faut donc se placer en conditions d'éclairage de Köhler. Celui-ci consiste à faire l'image du filament de la lampe sur le diaphragme d'ouverture, lui-même placé dans le plan focal objet du condenseur. Ainsi, on a bien un éclairage parallèle pour le spécimen.

Transition : Comment peut-on réaliser une image d'un spécimen non coloré? Ce serait particulièrement utile en biologie.

2 Microscopie à contraste de phase

2.1 Strioscopie et contraste de phase

Pour les calculs, voir [8], section « Diffraction 2 ». Pour des explications plus détaillées, voir [5] (qui fait tous les calculs en réels).

Écran

Principe du microscope à contraste de phase : vidéo de toutestquantique (<http://toutestquantique.fr/champ-sombre-et-contraste/>). Schéma général.

- On souhaite observer un objet de phase au microscope. Sans objet, on a sur l'écran d'observation une vibration $\underline{s}_0 = V_0 \exp(i\omega t)$. Avec un objet de phase, on observe $\underline{s} = V_0 \exp(i\omega t + i\varphi)$. Si le déphasage φ est faible devant 2π , on peut écrire

$$\underline{s} = \underbrace{\underline{s}_0}_{\text{rayon direct}} + \underbrace{i\varphi \underline{s}_0}_{\text{lumière diffractée}} .$$

- Deux approches possibles : on peut chercher à retirer \underline{s}_0 pour avoir une intensité proportionnelle à φ^2 ou chercher à déphaser \underline{s}_0 de $\frac{\pi}{2}$ afin de faire interférer les deux ondes.
- Strioscopie : couper \underline{s}_0 en plaçant un petit écran au niveau du rayon directement issu de la source. On a alors $\underline{s} = i\varphi \underline{s}_0$ et une intensité lumineuse $I(\varphi) = I_0 \varphi^2$. Problème : le contraste est très faible car φ est très petit. De plus, on ne peut pas différencier les variations positives des variations négatives.
- On peut déphaser le signal direct de $\pi/2$ avec une lame de verre, d'épaisseur $n\lambda + \lambda/4$. Alors $\underline{s} = \underline{s}_0(i\varphi - i) = -i\underline{s}_0(1 - \varphi)$. On a alors

$$I(\varphi) = I_0(1 - 2\varphi)$$

car φ^2 est négligeable. Le contraste est alors proportionnel au déphasage : il s'agit de la méthode de *contraste de phase*, pour laquelle Frederik Zernike a reçu le prix Nobel en 1953.

Remarques

- La vision « optique de Fourier » de [8] est valable : en fait, l'éclairage de Kohler permet de faire l'image du diaphragme d'ouverture sur la plaque de phase, tout en éclairant le spécimen à l'infini. On réalise donc bien du filtrage spatial.
- Les images observées par contraste de phase possèdent un certain halo autour des détails. Ce halo est dû à la diffraction : le second pic de la tache d'Airy est déphasé de π par rapport au pic principal, et au lieu d'interférer destructivement il interférera constructivement, pour former une zone plus claire.

2.2 Applications

- Très utile en biologie, car on ne peut pas colorer des cellules sans les tuer. Cette méthode sert aussi pour visualiser les défauts des optiques, par exemple en astronomie.
- Méthode non intrusive et non destructive!
- Montrer des comparaisons de microscopie usuelle et avec contraste de phase. Montrer de belles images.

Écran

Images obtenues par contraste de phase, issues de [6].

Transition : Comment cibler des zones spécifiques du vivant, et étudier des spécimens en trois dimensions?

3 Microscopie confocale laser

Écran

Schéma d'un microscope confocal laser à fluorescence.

- Explications dans [3, 2, 7, 10, 11].
- Principe : on focalise un faisceau laser sur une couche de l'échantillon, cela excite des fluorophores qui réémettent une lumière à une longueur d'onde différente. Celle-ci est sélectionnée, et reçue par un photomultiplicateur.
- Intérêt particulier en microscopie fluorescente car la lumière diffusée est éliminée. [11] p 254
- Principe du miroir dichroïque [10].
- Montrer la vidéo de toutestquantique.
- On peut faire des coupes d'un objet en 3 dimensions car la lumière provenant des autres zones est très faible (laser non focalisé) et se fait couper par le diaphragme devant le détecteur.
- Problème du photoblanchiment : peut être résolu par le contraste de phase! Celui-ci permet de repérer les zones importantes avant de passer en microscopie fluorescente ([1])

Écran

- Vidéo d'observation de mitose de cellules (<https://www.microscopyu.com/galleries/confocal/laser-scanning>)
- Problème du blanchiment : fibroblastes de cerf aboyeur au bout de quelques minutes [10].
- Vidéo explicative : <http://toutestquantique.fr/fluorescent-et-confocal/>

Remarques

- Dans [2], on dit qu'une source cohérente spatialement permettra de mieux focaliser la lumière en un point. En fait, il serait plus rigoureux de dire que la largeur de la zone où un faisceau est focalisé est liée directement à la largeur des optiques utilisées (limite de diffraction) ou la largeur du faisceau lui-même (autodiffraction). Ainsi, les faisceaux larges pourront être focalisés plus ponctuellement. Or on pourrait voir un faisceau cohérent spatialement comme un seul mode très large, tandis qu'une lumière décohérente spatialement serait une assemblée de modes plus petits, ayant des zones de focalisation plus larges...
- Plus d'informations sur la microscopie confocale dans [3]. Ce document est à lire avant le passage en leçon!
- On peut mettre plusieurs lasers pour pouvoir voir plusieurs types de fluorophores sur une seule image.
- Plusieurs sources semblent dire que la microscopie confocale a une meilleure résolution que la microscopie à champ large. En fait, il semblerait que l'on doive faire le

produit de la « illumination intensity point spread function » et de la « detection intensity point spread function » et appliquer le critère sur celui-ci, ce qui pourrait expliquer le facteur $1/\sqrt{2}$ vu dans [3]. Voir <https://www.olympus-lifescience.com/fr/microscope-resource/primer/techniques/confocal/resolutionintro/>. En tous cas, ce genre d'amélioration est probablement réalisé en contrôlant le diamètre du « pinhole ».

- La vitesse du microscope confocal est plutôt bonne : on trouve dans les fiches techniques des vitesses atteignant « 1400 lignes par seconde ».

Conclusion

- Les microscopes ont de nombreuses limites, et pour les améliorer on doit faire appel à des méthodes récentes bien plus complexes.
- Principe du microscope moderne : ne pas faire l'image entre l'objectif et l'oculaire : on veut un faisceau parallèle au milieu, ce qui permet d'ajouter des filtres pour traiter l'image. L'objectif forme donc une image à l'infini.
- Ouvrir sur la microscopie à champ proche et les méthodes non optiques (effet tunnel, etc.)

Niveau CPGE

Prérequis

- Ondes électromagnétiques
- Optique géométrique
- Modèle des trains d'ondes

Message

Bibliographie

- [1] Daniel MAURAS. *Optique physique et électronique*. Presses Universitaires de France, 2001.
- [2] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.
- [3] Clément SAYRIN. *Travaux dirigés d'Optique*. URL : <http://www.lkb.upmc.fr/cqed/teaching/teachingsayrin/>.

Introduction

On peut avoir des interférences avec des vagues, avec des ondes sonores... La lumière étant une onde, on s'attendrait à observer des interférences, mais ce n'est pas le cas! Pourquoi?

1 Superposition de deux ondes lumineuses

1.1 Conditions d'observation et éclairage

- Somme de deux champs électriques, intensité, définition de cohérence : [2] p 714

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + \langle \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \varphi_1(M, t) - \varphi_2(M, t)) \rangle + \langle \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \varphi_1(M, t) - \varphi_2(M, t)) \rangle$$

avec la moyenne réalisée sur le temps d'intégration du détecteur $T_{\text{détecteur}}$.

- Définir le déphasage et la différence de marche :

$$\Delta\varphi(M, t) = \varphi_1(M, t) - \varphi_2(M, t) = \frac{2\pi}{\lambda}(S_1M - S_2M) + \varphi_1(O, t) - \varphi_2(O, t) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M) + \varphi_1(O, t) - \varphi_2(O, t).$$

- Sources cohérentes : terme d'interférences non nul. Il faut :
 - $\omega_1 = \omega_2 = \omega$,
 - des polarisations non orthogonales,
 - une différence de phase à l'origine constante (on la prend nulle sans perte de généralité)
- On comprend pourquoi on n'observe pas d'interférences autour de nous : on a $T_{\text{ill}} \approx 0.1$ s, et les polarisations et phases à l'origine sont aléatoires sur ce temps.
- Formule de Fresnel pour l'intensité : puisque $I_1 = \frac{1}{2}E_{01}^2$, et de même pour I_2 , on obtient pour l'intensité perçue (dans le cas de sources cohérentes) [2] p 717

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \cos \Delta\varphi(M)$$

Remarques

L'intensité est définie par

$$I = \langle \|\vec{E}(M, t)\|^2 \rangle,$$

tandis que l'éclairement est défini par la puissance surfacique moyenne reçue par une surface, définie avec le vecteur de Poynting. On a donc un facteur de proportionnalité entre les deux quantités (et un facteur d'angle). L'intensité lumineuse, quant à elle, est une grandeur qui prend en compte la réponse de l'il (elle s'exprime en candelas).

Transition : Qu'observe-t-on alors?

1.2 Figure d'interférences

- Interférences constructives, destructives. Ordre d'interférence.
- Contraste :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

- Contraste maximal pour $I_1 = I_2$. Effet du contraste.
- Hyperboloïdes de révolution : ce sont les surfaces équi- δ .

[1] p 67

Écran

Slide avec effet du contraste et hyperboloïdes

Transition : Maintenant qu'on comprend mieux ce qui se passe on va pouvoir chercher à obtenir expérimentalement des interférences. C'est difficile, il faut un dispositif particulier.

2 Réalisation expérimentale : les trous d'Young**Expérience**

Expérience des fentes d'Young

- Philora + filtre 546 nm + fente source réglable + bifente d'Young. Regarder à l'infini (ne pas mettre de lentille de projection).
- Observation : franges rectilignes (cohérentes avec les hyperboloïdes!)
- Montrer l'effet de la distance entre les fentes.
- Calcul : par invariance, on se ramène à un plan (l'argument plus violent étant de dire qu'on fait de la diffraction par deux fentes).
- Calcul de la différence de marche, préciser les approximations..
- Interfrange $i = \lambda D/a$, profil en intensité.

[3]

[2] p 738

Transition : Jusqu'à présent, on a considéré des sources ponctuelles et monochromatiques. Cependant, les sources réelles ont des largeurs de raies non nulles. Quel est l'effet de cet élargissement?

3 Source non monochromatique

- Deux sources de fréquence différentes sont incohérentes et n'interfèrent pas : on somme les profils d'interférences.

— Calcul quantitatif pour un doublet ν_1 et ν_2 , facteur de contraste :

[3]

$$C(x) = \cos\left(\frac{\pi a x \Delta\lambda}{D \lambda^2}\right)$$

- Première annulation en $x = \lambda^2 D / 2 a \Delta\lambda$: on a alors $p = \frac{1}{2}$, et les franges sombres se superposent aux franges brillantes.
- Critère semi-quantitatif de brouillage : $\Delta p < \frac{1}{2}$.
- Source de faible largeur spectrale : on applique ce critère semi-quantitatif, on obtient

$$\delta(M) \leq l_c.$$

- La longueur l_c est la *longueur de cohérence temporelle* de la source, qui correspond à l'extension spatiale moyenne d'un train d'ondes. Dans le modèle des trains d'ondes, on a deux trains d'ondes différents en M , donc la différence de phase à l'origine est aléatoire.

Attention

La perte de contraste aux grands angles est bel et bien due à la cohérence temporelle, car elle provient de la longueur des trains d'ondes, qui est reliée à la largeur spectrale de la source.

3.1 Source non ponctuelle

La leçon étant déjà assez longue, cette partie ne pourra sans doute pas être traitée...

Expérience

Élargir la fente source, montrer la diminution du contraste.

- On somme les contributions de chaque source ponctuelle qui constituent la source étendue : on obtient un système de franges décalées.
- Pour une source de largeur b , le critère de bon contraste est (voir [3], TD interférences, exercice 3) :

$$\alpha \leq \frac{\lambda}{b} = \theta_c,$$

où $\alpha = \frac{a}{D}$ est l'angle sous lequel est vue la bifente.

Remarques

Élargir les fentes dans la direction orthogonale au plan de propagation n'est pas un problème, car seules les sources contenues dans un plan parallèle au plan des trous initiaux interfèrent (deux sources contenues dans deux plans différents interfèrent toujours destructivement avec deux autres sources).

Conclusion

- On a compris pourquoi il fallait des dispositifs spéciaux et qu'on avait pas d'interférences tout le temps dans la vie de tous les jours
- Ouverture sur la division d'amplitude et l'interférométrie : on corrige les problèmes de cohérence spatiale et on fait des mesures précises.

Niveau CPGE

Prérequis

- Interférences à deux ondes
- Division du front d'onde
- Notion de cohérence (spatiale et temporelle)

Bibliographie

- [1] Daniel MAURAS. *Optique physique et électronique*. Presses Universitaires de France, 2001.
- [2] José-Philippe PÉREZ. *Optique, fondements et applications, 6ème édition*. Dunod, 2000.
- [3] José-Philippe PÉREZ. *Optique, fondements et applications, 7ème édition*. Dunod, 2011.
- [4] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.
- [5] Clément SAYRIN. *Travaux dirigés d'Optique*. URL : <http://www.lkb.upmc.fr/cqed/teaching/teachingsayrin/>.
- [6] SEXTANT. *Optique expérimentale*. Hermann, 1997.

Introduction

Expérience

Fentes d'Young avec lampe QI + filtre. Fente source réglable, bifente d'écart environ 0.2 mm et de largeur 0.7 mm.

- On voit que les interférences par division du front d'onde sont limitées il est difficile d'utiliser de larges sources, et on a donc peu de luminosité.

1 Division d'amplitude

1.1 Principe et localisation

- Source ponctuelle : interférences bien contrastées partout.
- Fentes d'Young : division du front d'onde, ou **division géométrique**. On perd du contraste lorsque l'on étend la source.
- On peut montrer que pour obtenir des interférences bien contrastées avec une source étendue, il faut faire de la division d'amplitude, ou **division énergétique**. [1] p 159
- Principe : un rayon est séparé en plusieurs rayons qui interfèrent, à l'aide d'une lame semi-réfléchissante.
- On aura alors une surface où le contraste est maximal : il s'agit de *localisation* des interférences.

Transition : Comment réaliser de la division d'amplitude concrètement?

1.2 lame à faces parallèles

Les calculs et schémas de [5] (TD Interférences) sont parfaits pour cette section.

- On ne suppose qu'une seule réflexion. Voir [3] p 320 pour des justifications énergétiques.
- Schéma d'une lame à faces parallèles, avec les deux sources secondaires. Montrer les hyperboloïdes : on s'attend donc à des anneaux.
- Localisation à l'infini lorsqu'on élargit la source : donner l'argument qualitatif de superposition des systèmes d'anneaux.
- Différence de marche, dans le cas $n = 1$ (puisqu'on ne fait que des lames d'air ensuite)
- On a donc bien des anneaux.

Écran

Hyperboloïdes.

Transition : On va voir une réalisation concrète de ce dispositif théorique : l'interféromètre de Michelson. Ensuite on pourra considérer le cas avec plus d'une réflexion et s'intéresser au Fabry-Pérot

2 Interféromètre de Michelson

2.1 Fonctionnement et schéma équivalent

Écran

- Schéma du vrai interféromètre ([2] chapitre 24 page 301), montrer en même temps sur le vrai
- Schéma simplifié avec miroirs et sources secondaires ([1] page 161)
- Bref historique : [4], intro du chapitre réservé au Michelson. On peut parler rapidement de la motivation de base, et du fait qu'il est encore utilisé pour les détections d'ondes gravitationnelles aujourd'hui!
- Fonctionnement présenté rapidement à l'aide du schéma sur l'écran.
- Avec les sources secondaires, on se ramène au cas précédent : faire le schéma des deux sources alignées avec l'écran au tableau.

2.2 Configuration « lame d'air »

- On réalise exactement la situation vue auparavant : $\delta = 2ne \cos(i)$.
- Discuter des conditions d'obtention : condenseur de courte focale, observation dans le plan focal image

Écran

Schéma d'observation à l'infini du cours d'Alméras (TODO : prendre le schéma sur son cours)

Expérience

Anneaux d'égalé inclinaison avec une lampe à vapeur de sodium :

- Montrer que l'on reste très bien cohérent pour plein de valeurs de e , montrer que l'on a bien des anneaux qui *rentrent* quand on se rapproche de $e = 0$ (contact optique)
 - On a des annulations : problème de cohérence temporelle qui nous permet de remonter au doublet du sodium
 - Mesurer le $\Delta\lambda$ du sodium, comparer à la valeur tabulée
 - Insister sur la *précision excellente*
-
- Calcul du rayon des anneaux : [5], voir [1] p 164 pour l'excédent fractionnaire. Les anneaux sont de plus en plus resserrés et l'ordre au centre est maximal!
 - Pas de problème de cohérence spatiale, on est seulement limité par l'étendue spectrale de la source : on peut exploiter cela pour faire des mesures de spectre.

Expérience

Mesure de l'écart des raies du doublet du sodium [6]

- Montrer la perte de contraste : l'interpréter par la somme de deux systèmes d'anneaux.
- Faire le calcul de [1] p 178, remonter à la largeur du doublet.
- On s'attend à $\Delta e = 0.29$ mm.

2.3 Configuration « coin d'air »**Écran**

- Schéma de [1] page 165 du coin d'air
 - Schéma d'observation du cours de Alméras (TODO : prendre le schéma sur son cours)
-
- Schéma simplifié au tableau.
 - Calcul de la différence de marche en incidence normale. Franges d'égalé épaisseur, localisées au voisinage du coin d'air. [1] p 168
 - Dispositif d'observation (incidence normale, image des miroirs)
 - Calcul de l'interfrange
 - « Étalonnage » du coin d'air : on peut faire correspondre un certain ΔX sur l'écran à une certaine différence de marche. C'est utile pour déterminer des épaisseurs.

Transition : Maintenant on ne néglige plus les réflexions secondaires

3 Interféromètre Fabry-Pérot

- Faire un beau schéma avec les réflexions multiples et les notations
- Calcul de l'intensité transmise, entièrement suivant [5] (TD Interférences) :

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

- Finesse à partir de la largeur à mi-hauteur :

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\varphi}{\delta\varphi} = \frac{2\pi}{\frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R},$$

qui caractérise la résolution de l'interféromètre.

- Application : filtres interférentiels ([3] p 378). En incidence normale, on a $\lambda_m = 2e/m$. En général les $\lambda_{m>1}$ sont hors du visible. On met de plus une gélatine pour sélectionner la couleur.

Attention

Il y a une erreur d'un facteur 2 dans un des résultats de [5].

Conclusion

- Intérêt : sources élargies, plus de luminosité.
- Prix à payer : localisation des interférences.
- Applications : mesure de longueurs, de raies, et surtout LIGO/Virgo et LISA : détection de variations très faibles de longueurs!

Niveau L3

Prérequis

- Modèle scalaire de la lumière
- Optique géométrique
- Transformée de Fourier

Bibliographie

- [1] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Optique et physique ondulatoire*. Dunod, 1986.
- [2] Daniel MAURAS. *Optique physique et électronique*. Presses Universitaires de France, 2001.
- [3] José-Philippe PÉREZ. *Optique, fondements et applications, 7ème édition*. Dunod, 2011.
- [4] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.
- [5] Clément SAYRIN. *Travaux dirigés d'Optique*. URL : <http://www.lkb.upmc.fr/cqed/teaching/teachingsayrin/>.
- [6] SEXTANT. *Optique expérimentale*. Hermann, 1997.

Introduction

Expérience

Éclairer une fente par un laser, observer l'image à grande distance, réduire la largeur de la fente : on observe un comportement non prédit par l'optique géométrique...

1 Principe de la diffraction

1.1 Principe de Huyguens-Fresnel

- Énoncé du principe :

$$ds(M) = A(\theta) t(x, y) s_0(P) \frac{\exp(ikr)}{r} d\Sigma$$

[1] p 215

- Contributions de Huyguens puis Fresnel. [3] p 262
- Schéma propre au tableau indiquant toutes les notations que l'on aura pour la suite (distances d et D , points M , P , onde reçue $s_0(P)$, onde diffractée $s(M)$, coordonnées x, x_0, y, y_0).
- Énoncé mathématique avec l'intégrale sur la pupille : arriver à [5]

$$s(M) = A \iint_{\Sigma} t(x, y) s_0(P) \frac{\exp(ikPM)}{PM} d\Sigma$$

Écran

Notations, schéma.

1.2 Amplitude diffractée par une pupille quelconque

- Développer le calcul complet comme dans le TD de Clément Sayrin Diffraction I [5]. Laisser un signe \propto devant l'intégrale afin d'éviter les problèmes lorsque D ou d tend vers l'infini.
- Approximation : DL de la phase mais pas de l'amplitude sphérique.
- Bien remarquer que l'on a une transformée de Fourier.

Remarques

On peut donner une expression plus précise de A dans le cadre de la diffraction de Fresnel. Voir [3] p 403 (fonction de transfert de Fresnel).

1.3 Approximation de Fraunhofer

- Calcul de l'intensité diffractée : voir [5], [1] p 220. Approximation de Fraunhofer lorsque le terme de phase $\frac{1}{2}kr^2(1/d + 1/D)$ est négligeable.
- Arriver à

$$s(M) = \iint_{\Sigma} t(x, y) \exp(-ik((\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y)) dx dy.$$

- On a alors, à un préfacteur complexe constant peu important car on observera des intensités relatives, la transformée de Fourier de la pupille :

$$s(M) = \hat{t}(\alpha k, \beta k)$$

Voir [5] (TD Diffraction 2) pour plus de détails. Attention, les notations x et X sont inversées par rapport au TD précédent.

- Conditions de réalisation de la diffraction de Fraunhofer : [5]
 - Diffraction d'une onde plane ($1/d = 0$) à l'infini ($1/D = 0$), c'est-à-dire dans le plan focal d'une lentille convergente. On a alors $\alpha = X/f'$.
 - Diffraction d'une onde plane ($1/d = 0$) à grande distance ($D \gg r^2/2\lambda$, ODG $D \gg 2.5$ mm pour $r = 50$ μ m et $\lambda = 500$ nm.)
 - Diffraction au voisinage de l'image géométrique de la source (voir [3] p 269). Ce cas est très important, car il montre que des figures de diffraction accompagnent la moindre formation d'image! Cette situation correspond en fait au cas $d = -D$: on a une source virtuelle. Voir [6] p 139.

Écran

Montage à deux lentilles, passage à une lentille.

Transition : Essayons maintenant d'expliquer la forme de la tache observée lors de l'expérience initiale.

2 Figures de diffraction

2.1 Fente rectangulaire

- Calcul du profil d'intensité de la figure (en admettant la transformée de Fourier). [4] p 850
- Tracé du profil en intensité : tache centrale de largeur $\theta \sim \lambda/a$, deux fois plus large que les autres et d'intensité bien plus grande. [3] p 272

Expérience

Montrer qualitativement que si la largeur de la fente augmente, la tache centrale se réduit. Montrer aussi que la tache centrale est deux fois plus large que les autres. Pour les valeurs numériques, voir [2] page 249.

2.2 Tache d'Airy

- Expression de l'intensité admise [2] p 251
- Angle correspondant à la tache centrale : $\theta_1 = 1,22\lambda/2R$. [1] p 233
- Intensités relatives des pics [2] p 253
- Parler du critère de Rayleigh pour la résolution des instruments d'optique ([2] page 256 et [1] page 240).

Expérience

Montrer la tache d'Airy.

2.3 Propriétés générales de la figure de diffraction

- Théorème de Babinet. [5]
- Translation d'une fente : ajoute seulement un déphasage, qui ne change pas l'intensité. [1] p 273

Transition : On a vu que la figure obtenue était la transformée de Fourier : on peut donc, en faisant la transformée inverse, revenir à l'image d'origine et faire du filtrage de fréquences spatiales

3 Filtrage spatial

- La figure de diffraction est la transformée de Fourier de la transmittance : on fait apparaître les fréquences spatiales $k\alpha$ et $k\beta$.
- Filtrage volontaire, schéma avec plan de Fourier ([6] page 129, Fourier entre objet et Fourier, identité entre objet et image, donc Fourier inverse entre Fourier et image)
- Schéma au tableau
- Filtrage involontaire par une optique trop petite [4] page 856

Expérience

Faire l'**expérience d'Abbe** : [6] page 128

- On peut faire l'image du plan de Fourier sur un écran afin de montrer que l'on coupe des fréquences spatiales.

Remarques

Il est important de faire un schéma clair au tableau et de bien expliquer qualitativement ce qu'il se passe : ne pas hésiter à retirer les différentes parties du montage afin de montrer qu'on a bien la transformée de Fourier, de montrer ce qu'il se passe quand il n'y a pas de filtrage, etc.

Conclusion

Ouverture sur la strioscopie pour observer des variations de phase. Parler de la limitation des instruments d'optique (critère de Rayleigh), si pas abordé durant la leçon.

Niveau L3

Prérequis

- Diffraction de Fraunhofer
- Structure cristalline (réseau direct, réseau réciproque)

Message La connaissance de la structure de la matière et de sa composition se résume à deux fonctions : les facteurs de forme et de structure, qui une fois connus permettent de remonter à la figure de diffraction.

Bibliographie

- [1] Neil ASHCROFT et David MERMIN. *Physique des solides*. EDP Sciences, 2002.
- [2] Charles KITTEL. *Physique de l'état solide, 7ème édition*. Dunod, 2005.
- [3] José-Philippe PÉREZ. *Optique, fondements et applications, 7ème édition*. Dunod, 2011.
- [4] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.
- [5] Clément SAYRIN. *Travaux dirigés d'Optique*. URL : <http://www.lkb.upmc.fr/cqed/teaching/teachingsayrin/>.

Introduction

On a déjà vu la diffraction de Fraunhofer, et le lien entre l'intensité diffractée et la transformée de Fourier de la transmittance. Peut-on ainsi remonter à des informations sur la structure de l'objet diffractant? Inversement, peut-on remonter à des propriétés de l'onde incidente si on connaît la structure? Durant cette leçon on s'intéressera uniquement aux structures périodiques.

Préliminaires

Écran

Schéma avec les notations.

- Application du principe de Huyguens-Fresnel pour calculer l'intensité diffractée par un ensemble de structures identiques.
- Parvenir à

[5]

$$I(M) = I_0 \times \underbrace{\left| \sum_j \exp(-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{R}_j) \right|^2}_{|\mathcal{S}|^2} \times \underbrace{\left| \int_{\Sigma} t_0(\delta\vec{r}) \exp(-i\Delta\vec{k} \cdot \delta\vec{r}) d\Sigma \right|^2}_{|\mathcal{F}(M)|^2}$$

où \mathcal{S} est le **facteur de structure**, dépendant uniquement de la répartition des objets diffractants, et \mathcal{F} le *facteur de forme*, correspondant à la figure de diffraction d'une figure unique.

Transition : Après cet épisode calculatoire un peu désagréable, on dispose d'une formule très générale! Appliquons-la à un cas simple, le cas d'un réseau unidimensionnel.

1 Diffraction par un réseau unidimensionnel

Expérience

Diffraction d'un faisceau laser élargi par des réseaux de différents pas.

- On observe des pics d'intensité régulièrement espacés.

1.1 Intensité diffractée

- Facteur de structure, étude simplifiée en disant qu'il n'est non nul que lorsque [5]

$$\sin\theta_n - \sin\theta_0 = n \frac{\lambda}{a} \quad \text{où } n \in \mathbf{Z}$$

- Cela correspond à des interférences constructives entre deux rayons successifs. [3] p 352
- Calcul du facteur de structure : [5]

$$|\mathcal{S}|^2 = N^2 \left(\frac{\sin(N\pi ua)}{N \sin(\pi ua)} \right)^2 \quad \text{avec } u = \frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{\lambda}$$

- Calcul du facteur de forme : il s'agit de la figure de diffraction par une fente, de largeur e . La formule est connue ([4] p 852), mais le calcul est refait dans [3] p 355. On a

$$|\mathcal{F}(\theta)|^2 \propto \text{sinc}^2(\pi ue)$$

- L'intensité totale transmise est (en ramenant les facteurs constants dans I_0 , de sorte que $I(\theta = \theta_0) = N^2 I_0$) :

$$I = N^2 I_0 \text{sinc}^2(\pi ue) \left(\frac{\sin(N\pi ua)}{N \sin(\pi ua)} \right)^2$$

- Montrer le programme Python.

Écran

Programme Python pour la diffraction par N fentes.

- Montrer les rôles des facteurs de forme et de structure, et de quels paramètres ceux-ci dépendent.
- Inversion des trois échelles Na , a , e entre l'espace du réseau et l'espace réciproque. Voir [5].

Remarques

- En cas de manque de temps, ou si les calculs sont trop lourds, on peut facilement les écourter en n'en présentant que le principe.
- Pour les calculs faits ici, on ne se trouve pas dans l'approximation des petits angles utilisée pour la plupart des calculs de diffraction de Fraunhofer. C'est pour cela qu'on a un facteur $\sin\theta - \sin\theta_0$ et non pas $\theta - \theta_0$. En pratique les conditions expérimentales vérifient l'approximation des petits angles.

Transition : Les maxima du réseau sont très bien localisés lorsque N devient grand. Or leurs positions dépendent de la longueur d'onde incidente : on vient de réaliser un spectromètre!

1.2 Propriétés dispersives du réseau

Expérience

Spectrométrie avec un réseau

- Lampe Philora HP, fente, lentille de courte focale, réseau et écran (et lentille de grande focale pour observer à l'infini, mais se placer loin est suffisant).
- Pouvoir dispersif, pouvoir de résolution. [5], [3] p 357
- Mentionner l'utilité du réseau dans un monochromateur : on sélectionne une seule longueur d'onde.

Remarques

Le réseau habituel a un grand inconvénient : son maximum d'intensité est pour $\theta = \theta_0$, soit $m = 0$: il n'a aucun pouvoir de résolution, toutes les raies sont confondues. On réalise ainsi des réseaux « blazés », qui ont leur maximum d'intensité pour $m = 1$ par exemple. Pour ce faire, on ajoute un déphasage à progression arithmétique à chaque rayon. Voir [3] p 362.

Transition : Grâce à un réseau parfaitement bien connu, on peut remonter aux propriétés spectrales de la source. À l'inverse, on peut utiliser une source au spectre connu et étudier la figure de diffraction pour remonter à la structure périodique : il s'agit d'une technique très utilisée dans l'étude des solides cristallins.

2 Application à l'étude de la matière

Remarques

Cette dernière partie est très importante, car le jury attend plus que des interférences à N ondes dans le domaine électromagnétique. Il faut donc y passer un certain temps, quitte à sauter les calculs dans la partie précédente. Les ordres de grandeur doivent être maîtrisés.

2.1 Cristallographie par rayons X

- Nécessité d'utiliser des rayons X si on se restreint aux ondes électromagnétiques ([5] Diffraction 2, exercice III).
- Calcul du facteur de structure, condition de von Laue. On peut faire le calcul complet de [5], qui est bien dans l'esprit de la leçon de calculer des facteurs de structure, mais on peut aussi présenter le raisonnement de [1] p 111.
- Si on a le temps, on peut mentionner la construction d'Ewald ([1] p 118).

Remarques

Pour plus d'informations sur le réseau réciproque, voir [5] Diffraction 2, à la fin, ou [2] p 25-31.

2.2 Diffraction d'électrons et de neutrons

- On peut aussi utiliser des ondes de matière : ODG pour les électrons et les neutrons avec λ_{DB} . [5]

- Les neutrons étant non chargés, ils sont sensibles à la position des noyaux et non des nuages électroniques. Ils ont un moment magnétique non nul, donc ils renseignent aussi sur les moments magnétiques de la matière sondée. Pour toutes ces raisons, le facteur de forme est différent de la diffraction par rayons X! Il contient plus d'informations.

[2] p 409

Conclusion

- Insister sur l'importance des facteurs de forme et de structure
- Ouvrir sur la diffraction par des motifs aléatoires.

Niveau CPGE

Prérequis

- Physique statistique
- Rayonnement d'équilibre thermique
- Physique quantique : inégalité de Heisenberg

Message Le traitement de l'interaction lumière-matière doit être quantique. Sa compréhension permet de mieux le maîtriser et de concevoir des systèmes au comportement étonnant, comme le laser.

Bibliographie

- [1] Bernard CAGNAC et Jean-Pierre FAROUX. *Lasers. Interaction lumière-matière*. EDP Sciences, 2002.
- [2] Bernard CAGNAC, Lydia THCHANG-BRILLET et Jean-Claud PEBAY-PÉROULA. *Physique atomique 1*. Dunod, 2005.
- [3] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.
- [4] Richard TAILLET. *Optique physique*. de boeck, 2015.

Introduction

- On a commencé par décrire les interactions entre la matière et le rayonnement par le modèle de l'électron élastiquement lié : on a vu que l'on pouvait avoir émission (terme de pertes dans l'équation, qui désexcite l'électron, voir [4] p 225), ou absorption (qui est à l'origine de la partie imaginaire non nulle de $\varepsilon_r(\omega)$, voir [4] p 227 et 232).

Expérience

Spectre d'émission de la lampe de Balmer (spectro USB ou PVD).

Écran

Spectre d'absorption du Soleil

- Montrer le spectre d'émission et d'absorption : on observe dans les deux cas des raies. On retrouve des raies aux mêmes positions : ce sont celles de l'hydrogène.
- On a donc des échanges discrets entre la lumière et la matière. Le modèle de l'électron élastiquement lié n'est pas suffisant pour expliquer cela : on voit maintenant que le modèle correct pour décrire ces interactions est un modèle *quantique*.

Remarques

Noramlement, un spectre d'absorption ne devrait contenir que les raies correspondant aux

transitions entre $n = 0$ et $n > 0$, alors pourquoi observe-t-on les raies de Balmer en absorption?

Transition : Commençons donc par décrire les différents phénomènes d'absorption et d'émission de la lumière.

1 Phénomènes d'absorption et d'émission

1.1 Niveaux d'énergie d'un atome

- L'énergie du système (molécule, atome, etc.) qui échange de l'énergie avec le rayonnement est quantifiée : on a des niveaux d'énergie E_n avec $n \in \mathbf{N}$. [3] p 1064
- Les fréquences qui interagissent avec le système sont proches de ν_0 et vérifient la **relation d'Einstein** :

$$E_i - E_j = h\nu_0.$$

Dans la suite, on considère pour un rayonnement de densité d'énergie en fréquence $u(\nu)$, et pour simplifier deux niveaux E_1 et E_2 tels que $E_1 < E_2$, de populations respectives N_1 et N_2 . On note ν_0 la quantité $E_2 - E_1/h$.

- Pour un *grand nombre d'atomes*, le nombre d'atomes qui subissent la transition $1 \rightarrow 2$ vérifie [3] p 1065

$$dN_{\text{processus}} = \pm N dp_{\text{processus}},$$

où $dp_{\text{processus}}$ est la probabilité du processus et le signe est associé à une absorption ou une émission. Cette formule est valable car on fait une moyenne.

1.2 Émission spontanée

- Un atome dans un état excité se désexcitera spontanément pour revenir à son fondamental.
- Une façon classique de le voir est qu'un électron en orbite autour d'un noyau est accéléré, et rayonne ainsi de l'énergie. Il va donc en perdre et descendre en énergie. Cependant, cette vision est à prendre avec des pincettes puisqu'une application numérique montre que la matière devrait entièrement s'effondrer en une fraction de seconde. On ne peut d'ailleurs pas expliquer l'existence d'un fondamental... La vraie explication fait appel à de la physique quantique de niveau plus élevé, et on ne fera qu'admettre l'émission spontanée pour l'instant. [4] p 251
- On a $dp_{\text{spont}} = A_{21} dt$ donc $dN_2/dt_{\text{spont}} = -A_{21}N_2$. [3] p 1067
- Unité de A_{21} : s^{-1} . Mentionner le lien avec la demi-vie du niveau d'énergie. [4] p 252
- Caractéristiques du photon émis. [3] p 1067

Remarques

En réalité, l'émission spontanée a lieu car il y a couplage avec le champ électromagnétique : si on quantifie celui-ci, on voit que son état fondamental se couple avec les états excités E_i des atomes. Cela permet une transition $E_i \rightarrow E_0$ pour l'atome, simultanée avec une transition vers un état excité pour le champ : celui-ci contient désormais un photon.

1.3 Largeur de raie

- On a écrit que seuls des photons de fréquence fixée $\nu_0 = \Delta E/h$ pouvaient interagir avec l'atome. Cela fixe donc des valeurs précises pour les énergies, et viole par là l'inégalité temps-

- énergie : on aurait un temps infini passé dans les niveaux excités! On doit forcément avoir un élargissement naturel. [3] p 1068
- Autre source d'élargissement : effet Doppler. Largeur relative en \sqrt{T} . [2] p 25
- Encore autre source : chocs. Ils diminuent l'énergie et donc la durée de vie τ dans l'état excité. Par $\tau\Delta E \sim 1$, en déduit que les raies s'élargissent. [2] p 26
- La quantité de photons disponibles pour une transition à fréquence ν est donc [3] p 1069

$$\int_0^{+\infty} g(\nu)u(\nu) d\nu$$

- Pour un spectre bien plus large que la largeur de raie on obtient $u(\nu_0)$.

1.4 Absorption

- Un système absorbe un photon pour monter en énergie. [3] p 1065
- Probabilité par unité de temps, proportionnelle à la densité de rayonnement disponible : [2] p 90

$$dp_{\text{abs}} = \int_0^{+\infty} \sigma_{12}(\nu)u(\nu) d\nu,$$

où $\sigma_{12}(\nu)$ est une fonction maximale en ν_0 caractérisant l'absorption (on a fait rentrer le facteur λ/h dans $\sigma_{12}!$).

- On définit

$$B_{12} = \int_0^{+\infty} \sigma_{12}(\nu) d\nu \quad \text{et} \quad g(\nu) = \frac{\sigma_{12}(\nu)}{B_{12}},$$

de sorte que $\int g(\nu) d\nu = 1$: $g(\nu)$ est le *profil de raie*, que l'on réutilisera par la suite pour exprimer la pondération spectrale des probabilités.

- Lorsque le rayonnement incident est bien plus large que la raie, on peut écrire [3] p 1069

$$dp_{\text{abs}} = B_{12} \int_0^{+\infty} g(\nu)u(\nu) d\nu = B_{12}u(\nu_0) \int_0^{+\infty} g(\nu) d\nu = B_{12}u(\nu_0).$$

- En déduire $dN_1/dt_{\text{abs}} = -u(\nu_0)B_{12}N_1$. [3] p 1066
- Unité de ce coefficient : $J^{-1} \cdot s^{-2} \cdot m^3$

1.5 Émission induite

- Einstein a ajouté un nouveau processus : l'émission induite. On peut en donner une interprétation classique : on excite le nuage électronique à la fréquence propre. [4] p 250
- On a $dp_{\text{stim}} = B_{21} dt \int u(\nu)g(\nu) d\nu \simeq B_{21}u(\nu_0) dt$ donc $dN_2/dt_{\text{stim}} = -u(\nu_0)B_{21}N_2$. [3] p 1066
- Propriétés du photon émis : on amplifie le rayonnement incident car on émet un nouveau photon parfaitement identique. Le rayonnement sera donc très cohérent.
- Unité de B_{21} , similitude avec l'absorption. [4] p 251

Écran

Récapitulatif des processus d'émission et absorption.

Attention

Techniquement, on pourrait définir un profil de raie $g_{12}(\nu)$ pour l'absorption et un profil $g_{21}(\nu)$ pour l'émission induite, mais on suppose que ces deux profils sont identiques.

Transition : Faisons un bilan : on doit en général combiner les trois processus.

2 Liens entre les processus

2.1 Bilan à l'équilibre

- Bilan des trois processus. [3] p 1070
- On prend le cas d'atomes en équilibre avec un rayonnement thermique à T (pas de dégénérescence). Celui-ci étant large, on peut faire l'approximation déjà énoncée auparavant. Démonstration de la relation

$$u(\nu_0) = \frac{A_{21}}{B_{12} \frac{N_1}{N_2} - B_{21}}.$$

- On a équilibre thermique donc on peut écrire $N_1/N_2 = \exp(h\nu_0/k_B T)$ et par identification avec le rayonnement d'équilibre thermique, on obtient [3] p 1071

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu_0^3}{c^3} \quad \text{et} \quad B_{12} = B_{21}.$$

- Remarques :
 - l'émission induite B_{21} est nécessaire,
 - on peut prouver la même relation sans équilibre avec un rayonnement thermique (et donc sans l'approximation de rayonnement large), mais c'est au-delà du cadre du cours,
 - on remarque une forte symétrie entre l'émission induite et l'absorption.

2.2 Importance relative entre processus

- Émission induite plus importante à densité d'énergie plus grande : c'est assez logique. Elle domine par ailleurs à basse fréquence, tandis que l'émissions spontanée domine à haute fréquence. C'est pour cela que la lumière de notre vie de tous les jours n'est pas constituée de photons ayant tous les mêmes propriétés. [4] p 253
- Comparaison en fonction de la température si le rayonnement est un rayonnement thermique : à température ambiante, le rayonnement en-dessous de 1×10^{12} Hz est dominé par l'émission induite, et on peut donc oublier la nature corpusculaire de la lumière (on n'aura pas de variation de phase entre les photons). Par contre dans le domaine optique, l'émission spontanée domine.
- On voit que l'obtention de faisceaux générés par émission induite est incroyablement difficile dans le domaine optique. La seule façon d'en avoir est donc d'être **hors équilibre thermique**.

Transition : Le phénomène d'émission qui nous intéresse est l'émission induite. En effet, comme déjà présenté, elle nous permettrait d'obtenir un faisceau de lumière intense et très *cohérent*.

3 Application au laser

3.1 Nécessité d'une inversion de population

- On a déjà vu qu'obtenir de l'émission induite est très difficile à l'équilibre thermique. On va clarifier cette notion.

- Bilan d'énergie de [3] p 1073 (attention, c'est un bilan pour une composante donnée du spectre!), négliger l'émission spontanée et obtenir

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial z} + \frac{\partial u_\nu}{\partial t} = (N_2 - N_1) B_{21} u_\nu g(\nu) h\nu - \pi_{\text{pertes}}$$

- On utilise $I = cu$ (milieu dilué) pour obtenir l'équation bilan, en posant $\gamma(\nu)$. Attention, on a un facteur 2π entre $\gamma(\nu)$ et $\gamma(\omega)$.
- Conclure sur la nécessité d'une inversion de population. On retrouve le fait que l'on doit être hors équilibre thermique : à l'équilibre thermique on a forcément $N_1 \geq N_2$ donc $\gamma(\nu) \leq 0$.
- Réalisation pratique : cas du MASER ([1] p 160, [2] p 117) où la séparation est électrique. Dire qu'en optique, à cause de la relation $B_{21} = B_{12}$, on a forcément besoin d'un autre niveau (sinon l'absorption compense forcément l'émission induite).

Attention

Le bilan énergétique de [3] p 1073 est en réalité pour un intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$! On a donc une densité spectrale d'énergie, etc. Le bilan total reste valable pour un certain ν sans problème.

Remarques

L'importance de l'émission spontanée pour les lasers n'est vraiment pas claire. [4] dit page 253 qu'elle joue dans le domaine optique mais pas dans le domaine des micro-ondes. Cependant, même dans le domaine optique, le rapport A_{21}/B_{21} vaut moins de 1×10^{-13} en unités SI. Il dépend aussi fortement de $u(\nu)$. Cependant, dans [3] p 1074, on néglige l'émission spontanée. De façon générale, on dira que l'émission spontanée est peu présente, et qu'elle se moyenne à 0 car elle a lieu dans toutes les directions.

3.2 Oscillateur optique

Voir [3], pages 1085 et suivantes.

- Amplification par l'inversion de population, bouclage par des miroirs semi-réfléchissants : le faisceau réalise des allers-retours et est amplifié de plus en plus. (en réalité, les miroirs sont sphériques, ce qui donne un faisceau gaussien en sortie)
- Équation sur la puissance moyenne spatiale :

$$\frac{d}{c} \frac{d\mathcal{P}_m}{dt} = (\gamma_{ns}d - \alpha) \mathcal{P}_m \quad \text{avec} \quad \pi_{\text{pertes},m} = \alpha \mathcal{P}_m.$$

- On a donc démarrage des oscillations dès que $\gamma_{ns}d > \alpha$, soit un gain supérieur aux pertes.
- Pour savoir la ou les fréquence(s) du laser, on trace la courbe du gain et on lui superpose la transmittance de la cavité Fabry-Pérot. Seuls les pics qui correspondent à un gain supérieur aux pertes sont amplifiés.

Remarques

Pour réaliser l'amplification d'un faisceau, on a besoin de deux ingrédients : l'émission induite et l'inversion de population (nécessaire afin d'avoir plus d'émission induite que d'absorption). Cependant, on ne les réalise pas de la même façon selon qu'on se trouve dans le domaine optique ou des micro-ondes.

- Dans le cas des micro-ondes, on a des durées de vie spontanées de 1×10^3 s à 1×10^6 s. Ainsi, on n'aura pas d'émission spontanée, et toute l'émission sera induite. Pour réaliser l'inversion de population, il suffit de séparer les molécules qui sont dans le niveau

- fondamental : il s'avère que c'est possible à l'aide d'un champ électrique. Voir [1] p 160.
- Dans le cas optique, on ne peut pas séparer le fondamental E_0 par champ électrique. On doit donc réaliser l'inversion de population de façon optique, et ce n'est pas possible de pomper sur le niveau excité E_a directement car $B_{21} = B_{12}$. On pompe donc sur un troisième niveau E_c , qui se désexcite rapidement de manière non radiative sur un autre niveau. Ce niveau est donc en inversion de population par rapport au fondamental, et il est choisi de façon à avoir une faible probabilité d'émission spontanée. Voir [1] p 163. Pour aller plus loin, on peut ajouter un quatrième niveau E_b au-dessus du fondamental de façon à réaliser une inversion entre E_b et E_a sans exciter la majorité des électrons de E_0 .

Conclusion

- Ouvrir sur le régime permanent : le gain diminue lorsque l'intensité augmente, et à saturation le gain est égal aux pertes.
- Ouvrir aussi sur les propriétés gaussiennes du faisceau émis.

Aspects corpusculaires du rayonnement. Notion de photon.

Niveau L3

Prérequis

- Rayonnement d'équilibre thermique
- Pression de radiation
- Relativité restreinte (quadrivecteur impulsion-énergie)
- Biréfringence
- Dispositifs d'interférences à deux ondes

Message Afin d'expliquer certains phénomènes observés en physique, il est nécessaire de *quantifier* le rayonnement électromagnétique en lui associant une particule appelée le photon. Cette particule permet de réinterpréter les résultats classiques, et apporte une vision profondément quantique du rayonnement.

Bibliographie

- [1] Claude ASLANGUL. *Mécanique quantique 1*. de boeck, 2007.
- [2] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Mécanique 1*. Dunod, 1984.
- [3] Bernard CAGNAC, Lydia THCHANG-BRILLET et Jean-Claud PEBAY-PÉROULA. *Physique atomique 1*. Dunod, 2005.
- [4] Bernard DIU et al. *Physique statistique*. Editions Hermann, 1989.
- [5] Hubert GIÉ. « L'introduction de la constante d'action h par Planck ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* 679 (1985).
- [6] H. J. KIMBLE, M. DAGENAIS et L. MANDEL. « Photon Antibunching in Resonance Fluorescence ». In : *Physical Review Letters* 39.11 (sept. 1977), p. 691-695. DOI : [10.1103/physrevlett.39.691](https://doi.org/10.1103/physrevlett.39.691). URL : <https://doi.org/10.1103/physrevlett.39.691>.
- [7] Willis E LAMB JR et Marlan O SCULLY. « The photoelectric effect without photons ». In : (1968).
- [8] D. N. MOOTHOO et al. « Beth's experiment using optical tweezers ». In : *American Journal of Physics* 69.3 (mar. 2001), p. 271-276. DOI : [10.1119/1.1309520](https://doi.org/10.1119/1.1309520). URL : <https://doi.org/10.1119/1.1309520>.
- [9] Stéphane OLIVIER, Hubert GIÉ et Jean-Pierre SARMANT. *Physique Spé : PC*, PC. Cours et exercices d'application*. Tec & Doc, 2000.
- [10] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

Introduction

- TODO : références pour dire qu'on part d'une vision corpusculaire (les grecs, Newton), pour aller vers une vision ondulatoire avec Maxwell et Hertz.

1 Proposition d'un quantum d'énergie

1.1 Rayonnement du corps noir

Pour cette partie, on se base essentiellement sur [5] (attention! Il y a une erreur, l'auteur confond u_1 et u_ν parfois...). Le but n'est pas de refaire l'intégralité des calculs des scientifiques de l'époque, mais plutôt de donner un aperçu du raisonnement qui a mené au postulat de l'existence du photon. Il est important d'insister sur le fait que Planck n'a pas supposé l'existence de photons lorsqu'il a proposé sa « loi de Planck »...

- On cherche à expliquer pourquoi un rayonnement à l'équilibre thermique dans un volume possède un certain spectre.
- Considérons un rayonnement à l'équilibre thermique dans une enceinte : se forment des ondes stationnaires dont on peut calculer la densité de modes. La donner directement.
- Loi de Rayleigh-Jeans : appliquer l'équipartition pour obtenir $u_1 = k_b T$.
- Loi empirique de Wien : donner la formule $u_1 = h\nu \exp(-b\nu/T)$
- Tracer au tableau les allures des distributions. On peut aussi utiliser le programme Python.
- Donner la formule de Planck pour u_1 :

$$u_1 = \frac{k_B b \nu}{\exp(b\nu/T) - 1} \quad \text{où} \quad b = \frac{h}{k_B}.$$

Il s'agit seulement d'une interpolation entre les deux formules proposées précédemment! Il n'y a pas de physique supplémentaire...

- Utiliser l'équilibre thermique pour écrire $ds_1/du_1 = 1/T$ et par intégration remonter à s_1 .
- Considérer N « quanta » d'énergie ε , montrer que l'entropie s'identifie à l'entropie calculée à partir de la loi de Planck à condition d'avoir

$$\varepsilon = h\nu.$$

Ne pas faire les calculs de Stirling, mais bien insister sur le résultat : on a une interprétation quantifiée du rayonnement, ce qui semble mettre en doute les affirmations considérées valides à cette époque.

- Par ajustement, on remonte à une première valeur de la constante de Planck : $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

Écran

Programme Python sur les lois de Rayleigh-Jeans et Wien.

Transition : On n'a pour l'instant pas associé ce postulat à l'existence de photons : le raisonnement a été purement classique, et a d'ailleurs amené Planck à considérer des oscillateurs fixes plutôt que des photons.

1.2 Effet photoélectrique

Expérience

Faire l'expérience de l'effet photoélectrique. Montrer quelques propriétés, notamment le fait que la tension ne dépende pas de la puissance reçue. Avec le dispositif de la prépa on ne peut cependant pas montrer l'effet de tension de seuil.

- Description de l'effet, des observations générales.
- Bilan énergétique, travail d'extraction.

[3] p 6

[3] p 8

- Montrer les résultats, dire que étant donnée la charge élémentaire cela permet de remonter à **la même valeur** de h que le raisonnement basé sur le corps noir.
- Prix Nobel 1922 pour Einstein
- On a donc quantification des échanges entre le rayonnement et la matière, et cette quantification est cohérente avec la quantification du rayonnement. Cela nous amène à la notion de photon : la particule associée à la lumière.

Remarques

Bien que l'effet photoélectrique semble confirmer l'existence du photon, il faut reconnaître pour être parfaitement rigoureux qu'il ne fait que prouver la quantification de l'interaction matière-rayonnement. Ainsi, Lamb et Scully ont proposé dans [7] une explication qui ne suppose qu'un comportement quantique du métal. Cependant, le présenter est intéressant historiquement car il correspond à l'approche historique et invite à réfléchir à la cohérence d'une quantification. De plus, il sert en fin de leçon pour expliquer le principe du photomultiplicateur.

Transition : Si le photon existe, il doit permettre de retrouver les résultats connus sur les ondes.

2 Cohérence avec la notion d'onde électromagnétique

2.1 Masse et énergie

- Pour retrouver une onde qui se propage à la célérité de la lumière dans le vide, on doit avoir une vitesse c pour les photons.
- Cela implique, par la formule $E = \gamma mc^2$, que la masse d'un photon est exactement nulle. [1] p 127
- Ainsi la relation $E = \gamma mc^2$ devient indéterminée, et on la remplace par la relation de Planck-Einstein $E = h\nu$.
- On a donc $p_\mu p^\mu = 0$, ainsi l'impulsion du photon est $p = h\nu/c$. [2] p 258

Remarques

En plus de poser des problèmes de divergence d'énergie, une masse photonique non nulle impliquerait une décroissance exponentielle de l'interaction coulombienne et l'existence d'une polarisation longitudinale de la lumière.

Transition : Voyons si cette expression est cohérente avec l'électromagnétisme classique.

2.2 Impulsion

- Calcul de pression de radiation du point de vue microscopique, à partir de l'exercice 27.7. On suppose la formule classique connue, on la retrouve à partir d'un raisonnement corpusculaire. [10] p 989
- Noter que si W est l'énergie d'un photon, on a $p = W/c$.
- Application au refroidissement d'atomes de sodium (masse 3.82×10^{-26} kg) : à température 300 K, la vitesse thermique est $570 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Avec un photon de longueur d'onde 589 nm (d'impulsion $p = h/\lambda$), on a une variation d'impulsion relative 5.2×10^{-5} . Il faut donc un grand nombre de cycles d'absorption-réémission. [3] p 75
- Il peut être intéressant de revoir le calcul classique : il est présent par exemple dans [9].

Remarques

La théorie cinétique des gaz de photons amène à une pression vérifiant $p = \frac{1}{3}u$, tandis que pour un gaz de molécules on a $p = \frac{2}{3}u$. Voir [4] p 831.

2.3 Moment cinétique

- Présenter l'expérience de Beth : l'envoi d'une onde polarisée circulairement entraîne une rotation d'une lame biréfringente par l'action de $d\vec{\Gamma} = \vec{P} dV \wedge \vec{E}$. [3] p 306
- Réalisation expérimentale récente avec des pinces optiques. [8]
- Interprétation en terme de moment cinétique : par conservation de L_z , on doit attribuer à l'onde un moment cinétique. On retrouve le même type de formules que pour l'impulsion, à savoir $L_z = W/\omega = \hbar$. On retrouve encore la même constante h . [3] p 310

Écran

Schéma de l'expérience de [3] p 311.

Transition : On peut interpréter les résultats sur les ondes comme des résultats sur les particules. On peut avoir un ordre de grandeur de la « luminosité » d'un photon dans [3] p 183 : $\mathcal{P} = 1$ mW, donc on reçoit seulement un photon toutes les 1×10^9 périodes. On pourrait donc penser qu'à cette échelle il n'est plus possible de définir le champ électrique de l'onde sous la forme $\vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi)$ car celle-ci n'est réellement qu'une suite de photons très éloignés : il n'y aurait ainsi plus d'interférences. On va maintenant s'intéresser aux expériences à photons uniques, qui ont voulu vérifier s'il était possible de faire interférer des photons seuls et ont ainsi mis en évidence la nature profondément quantique de celui-ci.

3 Dualité onde-corpuscule**3.1 Production et détection de photons uniques**

- Production : notamment en plaçant des filtres de densité devant une source usuelle. item On reçoit une puissance très faible (1×10^{-12} W pour 1 cm^2) : il faut l'augmenter considérablement si l'on souhaite mesurer quoi que ce soit. [3] p 188
- Principe du photomultiplicateur, basé sur l'effet photoélectrique déjà étudié. Gain usuel de 1×10^6 . [3] p 184

Écran

Schéma d'un photomultiplicateur.

Attention

Bien avoir en tête les limitations thermiques aux détecteurs à photons uniques! On ne peut pas faire des expériences avec seulement un photon par seconde...

3.2 Interférences à photons uniques

- Montrer des résultats d'expériences à photons uniques : fentes d'Young dans [3] p 189, anneaux d'un Fabry-Pérot dans [3] p 193, biprisme de Fresnel dans [10] p 1170.

- Ces expériences sont incroyables : alors qu'on a vu qu'en moyenne on reçoit bien moins d'un photon par période, on peut quand même observer un profil d'interférences, comme si les photons interféraient tout de même! Cela montre que le photon est un objet profondément quantique.

Écran

Résultats d'expériences : vidéo du site de ressources (<http://ressources.agreg.phys.ens.fr/ressources/>). On a aussi l'article correspondant pour avoir les informations sur la réalisation de l'expérience.

Conclusion

- Bien insister sur le message : on a vu que le photon était cohérent avec les résultats expérimentaux, on a déduit certaines de ses propriétés, mais on a surtout montré à la fin qu'il n'était pas qu'une façon originale de décrire des phénomènes connus : il permet d'expliquer des comportements impossibles pour un objet ondulatoire.
- Parler de Kimble, Dagenais et Mandel qui prouvent rigoureusement l'existence du photon en 1977 ([6]). Ouvrir sur les cas où la dualité onde-corpuscule n'est plus suffisante pour expliquer les phénomènes : l'intrication quantique entre deux photons.

Aspects ondulatoires de la matière. Notion de fonction d'onde.

Niveau PC

Prérequis

- Équation de d'Alembert, solution en paquet d'ondes
- Probabilité continues
- Fentes d'Young

Message Tout comme on a associé une particule au rayonnement, on peut associer une onde à toute particule. On met ainsi en valeur une nouvelle propriété de la matière, qui est fondamentale (ce que l'on voit dans l'inégalité de Heisenberg).

Bibliographie

- [1] Claude ASLANGUL. *Mécanique quantique 1*. de boeck, 2007.
- [2] O. CARNAL et J. MLYNEK. « Young's double-slit experiment with atoms : A simple atom interferometer ». In : *Physical Review Letters* 66.21 (mai 1991), p. 2689-2692. DOI : [10.1103/physrevlett.66.2689](https://doi.org/10.1103/physrevlett.66.2689). URL : <https://doi.org/10.1103/physrevlett.66.2689>.
- [3] Claude COHEN-TANNOUJDI, Bernard DIU et Franck LALOË. *Mécanique quantique, tome 1*. Hermann, 1997.
- [4] *Diffraction des électrons par le graphite*. 304.
- [5] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

Introduction

On a pu associer une particule à la lumière : pourrait-on de façon symétrique imaginer associer une onde à la matière? C'est une idée qui a été proposée par de Broglie dès 1924.

Remarques

Ce n'est pas comme ça que de Broglie a proposé sa relation : en réalité, il a fait un raisonnement relativiste, qui peut se résumer à « (E, \vec{p}) est un quadrivecteur et $E = \hbar\omega$ donc on s'attend à avoir $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. Cependant un tel raisonnement n'est pas du tout au programme de prépa. »

1 Onde associée à une particule

1.1 Mise en évidence expérimentale

Expérience

Diffraction des électrons par du graphite ([4])

- Bien expliquer le fonctionnement de l'expérience, où se trouve le graphite, pourquoi on met une tension élevée.
 - Montrer les cercles : interpréter en disant que pour un angle θ on aura toujours des cristaux qui feront la diffraction, on aura donc des cercles.
 - Donner la relation de Bragg, en l'interprétant rapidement.
 - Remonter à la longueur d'onde des électrons : elle est très petite, ce qui rend difficiles les expériences en général! Attention, on peut facilement confondre θ et 2θ .
 - Le caractère non relativiste est justifié pour V plus petit que la dizaine de kilovolts.
-
- Diffraction des électrons : premières expériences proposées pour tester la relation de de Broglie.
 - Première expérience : Davisson-Germer en 1928. Montrer le setup expérimental et les résultats sur slides. C'est le même principe que l'expérience qu'on a faite.

Écran

Setup expérimental et résultats de l'expérience de Davisson-Germer.

1.2 Relation de de Broglie

- À une particule matérielle de quantité de mouvement p et d'énergie E est associée une onde de longueur d'onde $\lambda_{DB} = h/p$ et de fréquence $\nu_{DB} = E/h$. [5] p 1170
- Cela nous amène la dualité onde-particule : selon le phénomène, la matière a soit un comportement particulaire, soit un comportement ondulatoire.
- ODG de longueurs d'ondes : déjà vue pour la diffraction d'électrons, pour des grains de poussière de masse 1×10^{-15} kg et de vitesse $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ λ_{DB} vaut 0.7 fm et pour un être humain en train de marcher elle vaut environ 2×10^{-36} m.
- Montrer que la longueur d'onde mesurée pour les électrons est cohérente avec l'accélération.

Remarques

de Broglie n'a pas intuité cette relation à partir de rien : depuis 1830, on savait qu'il y avait une analogie entre les équations de Hamilton-Jacobi ($\vec{p} = \text{grad } S, E = -\frac{\partial S}{\partial t}$ où S est l'action) et la propagation des rayons lumineux ($\vec{k} = \text{grad } \phi, \omega = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$ où ϕ est la phase $\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$). Cependant cette analogie n'avait pas été développée plus avant, faute de motifs. Pour plus de détails, voir [1] p 274.

Transition : Si on peut associer une longueur d'onde à la matière afin de la décrire de façon ondulatoire, on devrait pouvoir lui associer un champ scalaire.

1.3 Fonction d'onde d'une particule

- Suivant l'hypothèse de de Broglie, on remplace la notion de trajectoire par la notion d'état dépendant du temps t . Un tel état est caractérisé par sa fonction d'onde $\psi(M, t)$. [3] p 19
- On interprète cette fonction ψ comme une *probabilité de présence* : la probabilité de trouver la particule en un volume $d\tau$ centré en M à l'instant t est

$$dP(M, t) = |\psi(M, t)|^2 d\tau$$

- Condition de normalisation.
- Solutions en ondes planes en $\exp(i(kx - \omega t))$

Transition : Avec ce nouvel outil, on peut interpréter des expériences de physique ondulatoire avec des particules comme les électrons.

1.4 Fentes d'Young avec des ondes de matière

En fonction du temps disponible, cette partie peut devenir « c'est pareil qu'en optique, donc voici l'interfrange ».

- Calcul de la densité de probabilité dans le cas des trous d'Young, en fonction de la différence de marche. On reconnaît la formule de Fresnel. On ne refait pas le calcul de δ : l'interfrange est donc $i = \lambda_{DB} D / a$.
- Montrer le résultat de [2] (figure 5).

Écran

Résultat de [2] : fentes d'Young avec des atomes d'hélium pour $\lambda_{DB} = 1.03$.

Transition : Comment décrire l'évolution de cette fonction d'onde pour décrire l'évolution quantique de la particule ?

2 Dynamique de la fonction d'onde

2.1 Équation de Schrödinger

- Partir de l'équation de d'Alembert 1D, poser $v_\phi = E/p$ selon de Broglie, poser une dépendance temporelle en $\exp(i\omega t)$ (car on a une énergie donnée), et obtenir l'équation de Schrödinger stationnaire historique, la réécrire sous la forme

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t) = E\psi(x, t).$$

Note : pour cela, il faut écrire $E = \hbar\omega = p^2/2m + V(\vec{r})$, et remplacer le p^2 qui apparaît dans d'Alembert à l'aide de cette expression. [1] p 280

- On peut donc ensuite identifier E à $i\hbar \partial/\partial t$ et obtenir l'équation de Schrödinger : c'était le raisonnement historique.
- Propriétés de l'équation :
 - Ordre 1 en t , donc la connaissance de $\psi(x, t_0)$ permet de connaître $\psi(x, t > t_0)$.
 - Équation linéaire.
 - On retrouve bien le fait que l'énergie potentielle est définie à une constante près.
 - L'objet physique est $|\psi(x, t)|^2$, donc une modification de la phase de la fonction d'onde ne joue aucun rôle.
- L'équation avec E est l'équation de Schrödinger indépendante du temps. La densité de probabilité des solutions ne dépend pas du temps : on les appelle « états stationnaires ». Interpréter l'équation en terme de conservation de l'énergie (valable aussi pour l'équation dépendant en identifiant E à l'opérateur $i\hbar \partial/\partial t$).

Remarques

- L'identification de E à $i\hbar \partial/\partial t$ fait que l'on n'effectue pas une preuve rigoureuse de l'équation de Schrödinger, mais plutôt un raisonnement qui permet de la retrouver. Une

preuve plus rigoureuse consiste à dire que la probabilité doit se conserver, ainsi l'opérateur d'évolution de $|\psi\rangle$ doit être unitaire et se mettre donc sous la forme $\exp(i\hat{H}t)$ où \hat{H} est hermitien.

- En réalité, le programme admet l'équation de Schrödinger puis retrouve les états stationnaires en ondes planes, mais je trouve que cette façon d'amener l'équation est plus pédagogique car elle permet de développer l'analogie à partir d'une équation d'onde connue.

2.2 Solution en paquet d'ondes

- Solution pour une particule libre : $\psi(x, t) = A \exp(i(kx - \omega t))$. Relation de dispersion d'une telle particule $\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\hbar k}{2m}$. [5] p 1201
- On a *dispersion* : la solution générale est une superposition d'ondes planes en un paquet d'ondes (car l'équation est linéaire)
- On a un paquet d'ondes, on peut définir une vitesse de groupe $v_g = \frac{\hbar k}{m}$.

Attention

On n'a pas le choix entre $kx - \omega t$ et $\omega t - kx$, car la fonction d'onde est complexe.

Transition : Pour Heisenberg : un paquet d'onde correspond à une densité de probabilité de présence non ponctuelle, donc on aimerait savoir si l'on peut toujours définir la position d'une particule. Pour le courant de probabilité : on a conservation de l'intégrale de $|\psi|^2$ par normalisation, cependant ψ peut varier : on s'attend à retrouver une loi de conservation.

2.3 Inégalité de Heisenberg

Selon le temps, traiter cette partie ou la suivante. Les deux sont très importantes pour la compréhension de la notion de fonction d'onde.

- Définir la moyenne de x :

$$\langle x \rangle = \int x |\psi(x, t)|^2 dx$$

- Définir l'indétermination $\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, qui est en fait l'écart-type de x avec la densité de probabilité $|\psi(x, t)|^2$.
- Inégalité de Heisenberg spatiale. C'est un résultat profond, car il montre qu'on ne peut pas comprendre la matière sans l'interprétation en fonction d'onde : c'est plus qu'une simple analogie. [5] p 1179
- Inégalité de Heisenberg en énergie, un peu différente car elle ne correspond pas à une dispersion statistique. [5] p 1180

2.4 Densité de courant de probabilité

- Écrire la probabilité $dP = \frac{\hbar k}{m} |\psi(x, t)|^2 dt$ et interpréter cela au moyen d'une densité de courant de probabilité $\vec{j}(x, t) = \frac{\hbar \vec{k}}{m} |\psi(x, t)|^2$. [5] p 1207
- On a la forme générale du courant et l'équation de conservation dans [1] p 289 : si on a le temps, faire la démonstration complète avec la différence de l'équation de Schrödinger multipliée par ψ et par ψ^* .

Conclusion

Ouvrir sur les autres effets ondulatoires que l'on pourra observer, notamment l'existence d'ondes évanescentes : on pourra voir des particules « traverser » des barrières de potentiel classiquement inaccessibles, il s'agit de l'effet tunnel.

Remarques

- Pourquoi l'équation de Schrödinger est-elle complexe? On peut le voir comme le fait que la propagation d'une onde est toujours associée à deux grandeurs couplées. Ici, les deux degrés de liberté sont ψ et ψ^* .

Confinement d'une particule et quantification de l'énergie.

Niveau CPGE

Prérequis

- Équation de Schrödinger et version indépendante du temps
- Principe d'indétermination d'Heisenberg
- Force centrale

Message Le confinement induit une quantification du vecteur d'onde : ce résultat est connu en classique. Cependant, il amène aussi une quantification de l'énergie par le lien entre E et k , ce qui est tout à fait nouveau en quantique.

Bibliographie

- [1] Claude ASLANGUL. *Mécanique quantique 1*. de boeck, 2007.
- [2] David AUGIER et Christophe MORE. *MP, MP* : le cours complet*. Tec & Doc, 2014.
- [3] Claude COHEN-TANNOUJJI, Bernard DIU et Franck LALOË. *Mécanique quantique, tome 1*. Hermann, 1997.
- [4] José-Philippe PEREZ, Robert CARLES et Olivier PUJOL. *Quantique, fondements et applications*. de boeck, 2013.
- [5] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

Introduction

- Dans de nombreuses situations on considère une particule au fond d'un puits de potentiel. En physique classique, la particule se trouve immobile au fond du puits. En quantique c'est différent.
- Physique ondulatoire classique : on a vu que k était quantifié. En quantique, on a une relation $E(k)$, on peut donc s'attendre à ce que E soit quantifié aussi!
- Pour une indétermination Δx , trouver l'énergie minimale avec le principe d'Heisenberg. [2] p 683
- Principe général : plus le confinement est grand, plus on a des énergies importantes.

Transition : Comment modéliser le confinement d'une particule quantique?

1 Modèle simple : le puits infini

1.1 Équation et résolution

- Modélisation d'un puits infiniment profond [5] p 1232
- On admet que la fonction d'onde ψ est continue.
- On ne regarde que l'équation indépendante du temps en décomposant sur les ondes stationnaires en $\exp(i\omega t)$.
- Résolution : cas $E \leq 0$ inintéressant, cas $E > 0$. Normalisation, énergies. [5] p 1233
- Densité de probabilité de présence : elle possède bien les mêmes symétries que le potentiel.
- Montrer les premiers modes propres.

- Points communs et différences avec la corde de Melde. Insister sur le fait que la quantification de k est commune aux deux situations, tandis que celle de E est spécifique au problème quantique. Point important : $\lambda_{DB}/2$ est un sous-multiple de la largeur du puits, comme L pour la corde vibrante. [5] p 1234
- Niveaux d'énergie en n^2 : aux grands n , l'écart relatif est en $2/n$ et on retrouve des niveaux de plus en plus proches.
- Comparer le fondamental à l'énergie minimale obtenue avec Heisenberg.

Écran

Premiers modes propres.

Remarques

Concernant la continuité de la fonction d'onde :

- La probabilité linéique devant rester finie, $|\psi(x, t)|$ est toujours finie ([4] 138)
- Si la différence de potentiel est finie, alors $d\psi/dx$ est bien continue et ψ l'est donc aussi. ([1] p 524)
- Dans le cas du puits infini, $d\psi/dx$ est discontinue mais $\psi(x)$ est continue...
- Autre façon de faire : ψ est continue car si elle ne l'était pas $d\psi/dx$ serait infinie en un point et le courant de probabilité divergerait.

1.2 Applications

- Ordres de grandeur d'énergies pour les nucléons d'un noyau, les électrons d'un atome. Calcul pour un être humain dans une pièce : c'est totalement négligeable. [4] p 199
- Exemple des polymères conducteurs, qui servent à faire des écrans OLED. TODO : s'informer. Montrer que la longueur d'onde est proportionnelle au nombre d'atomes. [4] p 210

2 Généralisation au puits fini

Dans cette section, on suit [5] page 1240 et suivantes.

- Modélisation : trois sections, puits symétrique par rapport à $x = 0$.
- Les symétries du potentiel se retrouvent dans la densité de probabilité : cela nous permet de séparer les cas symétrique et antisymétrique.
- Écrire l'équation de Schrödinger pour les domaines
- Conditions aux limites très importantes : ψ et $d\psi/dx$ sont continues. Démontrer la continuité de la dérivée en supposant ψ continue. [1] p 524
- États libres non quantifiés, résolution graphique pour les états liés (sans faire les calculs des équations).
- Il existe toujours une solution
- Profondeur de pénétration : varie en $1/\sqrt{V_0 - E}$, donc pénètre plus lorsqu'on se rapproche de la barrière.
- Interprétation à l'aide de l'inégalité temps-énergie.

Écran

- Programme qui donne les premiers modes du puits fini
- Programme qui fait la résolution graphique

3 Atome d'hydrogène

Si possible, il vaut mieux ne pas faire cette partie qui ne rentre pas très bien dans le fil directeur de la leçon. Ainsi, il faut passer du temps sur les explications physiques du puits fini.

- On suppose le noyau fixe (masse réduite pas au programme) : on a alors une équation

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right) \varphi(r) = E\varphi(r)$$

où $V(r)$ est le potentiel de Coulomb.

[3] p 788

- On peut résoudre cette équation de la même façon qu'on a résolu le puits, mais ici le potentiel est plus complexe.
- Comme pour le problème à deux corps, on peut faire apparaître un potentiel effectif $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$. On a donc confinement, on s'attend à avoir quantification de l'énergie. [3] p 788
- Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène $E_n = -\frac{1}{n^2} E_I$, dégénérescence (sur un graphique). [3] p 808

Écran

Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Conclusion

- Bien insister sur le comportement qualitativement différent en physique quantique.
- Propriétés vues ici : résultats mathématiques très généraux. C'est aussi valable pour les ondes stationnaires en classique, cependant ici on peut relier k et E , ce qui est nouveau!
- Ouvrir sur les édifices polyatomiques : étude des niveaux d'énergie utile pour la chimie.

Niveau CPGE

Prérequis

- Équation de Schrödinger
- Courant de probabilité
- Inégalité d'Heisenberg
- Radioactivité (Lycée)

Message

Bibliographie

- [1] Jean HARE. *Abrégé de mécanique quantique à l'usage de la préparation à l'agrégation de physique*. 2018.
- [2] Bernard LEROY. « Le microscope à effet tunnel ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* 699 (1987).
- [3] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PC-PC**. Dunod, 2016.

Introduction

Lors de l'étude du puits fini, on a vu que la fonction d'onde pouvait pénétrer dans les bords du puits. Si ceux-ci sont de profondeur finie, on peut imaginer que la fonction d'onde les traverse et soit de nouveau propagative après : c'est l'effet tunnel.

1 Barrière de potentiel

1.1 Position du problème

- Modélisation avec 3 régions [3] p 1250
- Bien justifier les conditions de raccordement : ψ est continue et le saut de potentiel est fini donc $d\psi/dx$ est continue aussi.
- Définir $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ et $q = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. Équations dans chaque domaine, forme des solutions. [3] p 1250
- Pas d'onde provenant de $x = +\infty$: on se ramène à un espace de solutions à une seule dimension.

1.2 Coefficient de transmission

- On définit le coefficient de transmission en courant de probabilité $\mathcal{T} = \|\vec{j}_t\| / \|\vec{j}_i\| = |A_3|^2 / |A_1|^2$. [3] p 1252
- Un calcul non développé amène à

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4\frac{E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)} \sinh^2\left(\frac{a}{\delta}\right)}$$

- Graphes de la densité de probabilité de présence : onde évanescente sous la barrière.

- Profondeur de pénétration à partir de l'inégalité d'Heisenberg : on retrouve la profondeur caractéristique δ . [3] p 1246
- Approximation de la barrière épaisse. [3] p 1254
- Ordres de grandeur de coefficients de transmission : c'est un effet qui est uniquement présent aux très faibles échelles de masse et d'énergie. [3] p 1255

Écran

- Graphe de la probabilité de présence
- Comparaison entre la formule exacte pour \mathcal{T} et la formule de la barrière épaisse.
- ODG de \mathcal{T} .

Remarques

Le courant de probabilité associé à une onde évanescence est nul. Dans le cas présent on a tout de même un courant sous la barrière car lors du calcul du courant le terme croisé entre l'onde évanescence et l'onde anti-évanescence donne une contribution non nulle.

Transition : Cet effet n'est présent qu'aux très basses masses et énergies. On s'attend donc à ce qu'il soit surtout présent à l'échelle atomique : on va voir le cas de la radioactivité α .

2 Radioactivité α

2.1 Modélisation

- Rappels sur la radioactivité α : émission d'un noyau d'hélium. Exemple de l'uranium 236. Particule α émise dans le noyau, qui peut s'enfuir par effet tunnel. [3] p 1260
- Modélisation de la force forte par une zone avec confinement à $-V_0$, puis potentiel coulombien. [1] p 88
- Faire le dessin du potentiel et de la zone $[r_0, r_1]$ dans laquelle $E < V(r)$.

2.2 Calcul et comparaison à l'expérience

- On associe des barrières infinitésimales : chacune a un coefficient de transmission proportionnel à $\exp(-2\sqrt{2m(V(r)-E)}dx/\hbar)$, donc

$$\mathbf{P}(x+dx) = \mathbf{P}(x) \times \exp\left(-2\frac{\sqrt{2m(V(r)-E)}dx}{\hbar}\right) \simeq \mathbf{P}(x) \left(1 - 2\frac{\sqrt{2m(V(r)-E)}dx}{\hbar}\right)$$

et ainsi

$$\mathcal{T} = \frac{\mathbf{P}(x_1)}{\mathbf{P}(x_0)} \propto \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{2m(V(r)-E)} dx\right)$$

- Calcul de l'intégrale dans l'exponentielle en supposant $r_0 \ll r_1$ (attention, il y a une erreur dans le premier préfacteur, qui est corrigée ensuite). On arrive à

$$\mathcal{T} = A \exp\left(a(Z) - \frac{b}{\sqrt{E}}\right).$$

Le préfacteur n'est pas trop important pour la suite (il est en \sqrt{E} mais on va prendre le logarithme). [1] p 90

- Temps de demi-vie radioactive : il sera en $\tau_0 \ln(2)/\mathcal{T}$ où τ_0 est le temps entre deux collisions. [3] p 1263
- Comparer l'évolution prévue en $\ln t_{\frac{1}{2}} = A + B/\sqrt{E}$ à l'expérience : ça fonctionne très bien sur une très grande plage d'ordres de grandeur!

Écran

Graphe de $\ln t_{\frac{1}{2}}$ en fonction de $1/\sqrt{E}$.

Attention

Obtenir la formule pour un potentiel $V(r)$ par association de barrières infinitésimales pose deux problèmes importants :

- on utilise la formule de barrière épaisse alors qu'on prend une épaisseur dx qu'on fait tendre vers 0;
- pour une barrière infinitésimale donnée, on ne prend pas en compte l'onde réfléchie sur la barrière suivante.

Pour résoudre ces problèmes, on peut utiliser l'approximation WKB, qui étonnamment donne le même résultat! Pour plus de précisions, voir [1] p 83.

3 Microscopie à effet tunnel**3.1 Principe du courant tunnel**

- Schéma global. Prix Nobel 1986. La pointe doit être extrêmement fine!
- Profil de la barrière, courant en exponentielle : $I \propto \exp(-2d/\delta)$.
- C'est la raison pour laquelle le microscope est si précis : la dépendance exponentielle implique que l'on doit se trouver à quelques nanomètres de la surface pour observer un courant. En effet, $\delta \simeq 6 \times 10^{-10}$ m.

[3] p 1257

Écran

Schéma global d'un microscope à effet tunnel.

Remarques

Certaines modélisations ont un courant en $C \exp(-2d/\delta)/d$, mais le facteur $1/d$ est négligeable devant la décroissance due à l'exponentielle. Voir [2].

3.2 Mode de fonctionnement et résolution

- Pointe fine et régulation par des quartz piézoélectriques. [2]
- Topographie et spectroscopie, intérêts. [3] p 1258
- Importance de la taille de la pointe : elle limite la résolution [2]
- Modélisation de la résolution latérale : $\sqrt{2h\delta}$ où h est la distance entre le substrat et le centre de courbure de l'atome au bout de la pointe.

Conclusion

- Ouvrir sur l'existence d'une analogie en physique ondulatoire classique : la réflexion totale frustrée. Lorsqu'il y a réflexion totale sur une surface, une onde évanescente se crée dans le milieu et peut amener à l'apparition d'une onde qui se propage bel et bien si le milieu est suffisamment fin.

Niveau L3

Prérequis

- Structure du noyau atomique
- Interactions fondamentales
- Énergie de masse
- Électrostatique
- Radioactivité
- Effet tunnel

Message On peut comprendre les processus de fission et de fusion par modélisation des interactions internes au noyau. Ces deux processus sont très efficaces pour extraire de l'énergie de masse de noyaux.

Bibliographie

- [1] Jacques FOOS. *Manuel de radioactivité*. Hermann, 2009.
- [2] Claude Le SECH et Christian NGÔ. *Physique nucléaire, des quarks aux applications*. Dunod, 2010.
- [3] Luc VALENTIN. *Le monde subatomique, énigmes et trouvailles*. Hermann, 1995.

Introduction

- Compréhension de la structure fondamentale de la matière
- Avancées théoriques et expérimentales majeures au XX^{ème} siècle
- Sources d'énergie et bombes A et H, associées au deux phénomènes respectivement de fission et de fusion que nous allons étudier
- But de la leçon : se donner des outils de physicien pour comprendre la matière à l'échelle du noyau atomique et ces processus de fusion et fission.

1 Le noyau atomique

1.1 Cohésion du noyau

- Noyau : système lié de Z protons et $N = A - Z$ neutrons.
- Interactions mises en jeu pour la cohésion : problème quantique à A corps, avec interaction coulombienne et interaction forte... C'est très compliqué à résoudre! [3] p 51
- L'énergie de liaison $E_l(A, Z)$ assure la cohésion du noyau. Plus il y a de nucléons, plus elle est grande : pour ${}^2_1\text{H}$, on a $E_l(2, 1) = 2.22 \text{ MeV}$, pour ${}^{16}_8\text{O}$ elle vaut 127.6 MeV et pour ${}^{238}_{92}\text{U}$ elle vaut 1801.2 MeV . On définit donc l'énergie de liaison *par nucléon* $E_l(A, Z)/A$. [2] p 20
- On peut obtenir expérimentalement la valeur de l'énergie de liaison par nucléon : il s'agit de la Courbe d'Aston.

Écran

Courbe d'Aston

Transition : On souhaite développer un modèle qui permettrait de comprendre l'évolution générale de la courbe. Bien évidemment, on ne pourra pas expliquer tous les petits détails...

1.2 Modèle de la goutte liquide

- Observations expérimentales : [3] p 144
 - Le rayon nucléaire évolue environ en $r_0 A^{\frac{1}{3}}$.
 - L'énergie de liaison par nucléon est à peu près constante pour $A \gtrsim 16$.
- On en déduit que l'on peut en première approximation modéliser le noyau par une « goutte liquide », dans laquelle les A nucléons forment une assemblée compacte, interagissant par un terme d'énergie indépendant de A .
- Travaux de Bether et Weizsäcker en 1935 : proposent une formule semi-empirique, basée sur une évaluation des différentes énergies qui sont présentes dans le noyau. [2] p 28
 - Force nucléaire à courte portée, n'agissant que sur les plus proches voisins : on a un terme proportionnel à A , que l'on note $E_V = a_V A$.
 - Le noyau n'étant pas infini, il possède une surface et les nucléons à la surface, en nombre de $A^{\frac{2}{3}}$, possèdent moins d'interactions. On a donc un terme $E_S = -a_S A^{\frac{2}{3}}$.
 - Répulsion coulombienne entre protons : sphère de charge Ze et de rayon R , qui donne un terme d'énergie $E_C = -a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}$.
 - Terme d'asymétrie qui tend à égaliser le nombre de neutrons et le nombre de protons : $E_a = -a_a \frac{(A-2Z)^2}{A}$. On a des explications dans [2] p 28 et des explications dans [3] p 148 : il s'agit d'une question de niveau de Fermi et de remplissage des états disponibles. Cependant, on ne détaille pas ça ici, et on admet l'expression.
 - Énergie d'appariement δ , qui traduit la volonté des nucléons de s'associer deux à deux (question de spin). Les noyaux ayant N et Z pairs gagnent une énergie d'appariement, ceux qui n'ont que l'un des deux pairs n'en gagnent pas, et ceux qui ont N et Z impair en perdent une. On écrit $\delta = \delta_0 a_p / A^{\frac{1}{2}}$, avec $\delta_0 = 0$ ou ± 1 selon la parité de N et Z (on peut écrire $\delta_0 = ((-1)^N + (-1)^Z)/2$. [3] p 151
- Pour finir :

$$E_l(A, Z) = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta.$$

Écran

Explication des différents termes.

Remarques

On peut associer au terme d'appariement une notion de « superfluidité nucléaire ».

1.3 Comparaison à l'expérience

Écran

Valeur des différents coefficients, comparaison ajustement/courbe théorique.

- Écart pour les noyaux très légers : il n'y a pas assez de nucléons pour pouvoir faire la statistique.

- Stabilité particulière pour certaines valeurs de N ou de Z . On peut en fait aller plus loin et présenter un modèle en couches, par analogie avec les couches électroniques d'un atome. Les « noyaux magiques » correspondraient aux gaz nobles, avec toutes leurs couches remplies : ils sont particulièrement stables. [3] p 153,

Transition : Selon la courbe d'Aston, deux processus différents peuvent augmenter la stabilité, [2] p 37 selon leur Z : la fusion (pour les noyaux légers) ou la fission (pour les noyaux lourds).

2 Fission nucléaire

2.1 Principe

- Brève introduction historique : découverte fortuite en 1939 par Lise Meitner, Otto Hahn et Fritz Strassman alors que l'on cherchait à fabriquer des éléments transuraniens en bombardant l'uranium de neutrons.
- **Fission spontanée** : on réalise une déformation de la goutte liquide, et on voit si cela permet de diminuer l'énergie de liaison. [2] p 71
 - Comparaison des termes $a_S A^{\frac{2}{3}}$ et $a_C \frac{Z^2}{A}$: on fait apparaître le *paramètre de fissilité* Z^2/A .
 - On observe de la fission spontanée à partir de $Z^2/A \gtrsim 35$, même si le modèle de la goutte liquide donnerait plutôt une valeur de 45 (l'effet étant quantique, on doit raisonner en terme de probabilité).
 - En pratique, la fission spontanée ne concerne que très peu de processus : elle n'intervient que pour les noyaux très lourds. [1] p 154
- **Fission induite** : on veut faire franchir la barrière de fission à un noyau.
 - Principe : on envoie un neutron, et ça va déclencher le processus de fission.
 - Deux types de neutrons : neutrons lents (d'énergie 0.025 eV, égale à l'énergie thermique) et neutrons rapides (énergie supérieure à 1 MeV - il existe plusieurs définitions mais on utilise la valeur de l'énergie des neutrons produits lors de la fission de l'uranium).
 - Pour dépasser la barrière, il faut que l'énergie de liaison apportée par le neutron reçu (qui vaut toujours environ 7 MeV, voir courbe d'Aston) soit supérieure à l'énergie d'activation de la barrière de fission. [1] p 156
 - Deux types de noyaux : ceux qui peuvent fissionner en recevant un neutron thermique, ou ceux qui en recevant un neutron thermique deviennent fissiles après émission radioactive. [1] p 157
 - Exemples : ${}_{92}^{235}\text{U} + {}_0^1\text{n} \longrightarrow {}_{92}^{236}\text{U} \longrightarrow {}_{36}^{93}\text{Kr} + {}_{56}^{140}\text{Ba} + 3 {}_0^1\text{n}$ ([2] p 195), ${}_{92}^{238}\text{U} + {}_0^1\text{n} \longrightarrow {}_{92}^{239}\text{U} \xrightarrow{\beta^-} {}_{93}^{239}\text{Np} \xrightarrow{\beta^-} {}_{94}^{239}\text{Pu}$ ([1] p 157)
 - Asymétrie des produits de fission, lien avec les nombres magiques déjà vus. [1] p 158

Écran

- Barrière de fission

Remarques

- Le cas de Lise Meitner est un des exemples les plus connus de l'« effet Matilda » : l'attribution d'une découverte scientifique réalisée par une femme à l'un de ses homologues masculins.
- La section efficace d'absorption d'un neutron thermique est très différente de celle d'absorption d'un neutron rapide. Pour ${}^{235}\text{U}$, il est bien plus simple d'absorber un neutron lent. Pour ${}^{238}\text{U}$, l'absorption d'un neutron rapide entraîne directement la fission : le

noyau est fissile pour des neutrons rapides. Voir [2] p 197, [3] p 212.

- Pour plus de détails sur la valeur de la barrière de fission, voir [3] p 213. Il y a un lien entre le caractère pair-pair ou non des noyaux et leur capacité à absorber des neutrons pour fissionner, mais celui-ci n'est pas clair pour moi (il s'agit en gros de la variation d'énergie d'appariement).

Transition : On peut voir sur la courbe d'Aston que les produits de la fission ont une énergie de liaison plus forte que l'énergie de liaison de ^{235}U . Ainsi, on aura un gain en énergie de liaison lors de processus de fission, ce qui implique la libération d'énergie dans le milieu. ODG : une réaction libère 210 MeV ([2] p 198, ou mieux : [1] p 162). De plus, on libère des neutrons : ceux-ci pourraient être utilisés pour relancer deux ou trois nouvelles réactions de fission (on produit 2.4 neutrons en moyenne). C'est le principe à la base des *réacteurs à fission*.

2.2 Fission dans les réacteurs nucléaires

- Objectif : réaction en chaîne. On utilise la fission de ^{235}U , déjà présentée. Coefficient de multiplication neutronique k . [2] p 196
- On admet qu'on doit utiliser les neutrons lents (c'est dû à la section efficace). Or les neutrons émis sont rapides : on doit les ralentir. C'est le rôle du modérateur. [2] p 199
- Exemple d'un réacteur de type REP. Voir [2] p 202 et suivantes pour des détails.
- ODG d'énergie disponible : 7×10^{10} J par gramme de ^{235}U consommé, contre 3.3×10^4 J pour la combustion de 1 g de charbon. [3] p 215

Transition : Autre côté de la courbe d'Aston : gain en énergie si on associe 2 noyaux légers. De plus, on se demande d'où viennent tous les éléments, comment se sont-ils formés?

3 Fusion nucléaire

3.1 Principe et exemples

- Fusion deutérium-tritium. Énergie libérée par nucléon (bien plus grande que pour la fission car on a une pente plus forte dans la courbe d'Aston). Cette réaction est favorisée car on crée de l'hélium, noyau magique. [2] p 210
- On doit pouvoir rapprocher les noyaux suffisamment les uns des autres. ODG avec $Z_1 = Z_2 = 1$: $E = Z_1 Z_2 e^2 / (4\pi\epsilon_0) = 0.14 \text{ MeV}$. Énergie thermique à température ambiante : 0.025 eV, il faut donc atteindre une température de 1.8×10^9 K. [3] p 224
- On la traverse par effet tunnel, mais la probabilité est en exponentielle décroissante, donc il faut tout de même avoir des températures très élevées.
- Le processus de fusion peut avoir lieu dans les étoiles, où le cur est à une température très élevée. La formation de noyaux lourds par fusion dans les étoiles est appelée *nucléosynthèse* et est à l'origine de la grande variété d'éléments chimiques dans l'Univers. La fusion de l'hydrogène amène à la synthèse de l'hélium, puis des éléments jusqu'au fer, puis des éléments plus massifs. [3] p 264

Transition : Peut-on reproduire les conditions nécessaires à la fusion en laboratoire?

3.2 Fusion contrôlée

- Nécessité du confinement : éviter les contacts avec la paroi, atteindre une densité suffisante pour que la fusion soit auto-entretenu. [3] p 225
- Confinement inertiel (laser MégaJoule) ou magnétique (Tokamak) [2] p 211

- Pour l'instant, l'énergie nécessaire au confinement est supérieure à l'énergie récupérée de la fusion. Projet ITER : facteur d'amplification 10.

Conclusion

Ouvrir sur l'énergie de demain : réacteurs Gen IV (neutrons rapides - dangereux car le caloporteur est du sodium liquide, etc.), fusion peut-être un jour...

Évolution temporelle d'un système quantique à deux niveaux.

Niveau L3

Prérequis

- Équation de Schrödinger
- Formalisme des opérateurs quantiques
- Facteur gyromagnétique

Message Les états propres du Hamiltonien sont stationnaires : toute condition initiale n'étant pas un état propre impliquera des oscillations entre les différents niveaux d'énergie. Pour résoudre l'équation de Schrödinger dans ce genre de cas on se ramènera toujours aux **états propres**.

Bibliographie

- [1] Claude ASLANGUL. *Mécanique quantique 3*. de boeck, 2009.
- [2] Jean-Louis BASDEVANT. *12 leçons de mécanique quantique*. Vuibert, 2006.
- [3] Claude COHEN-TANNOUJJI, Bernard DIU et Franck LALOË. *Mécanique quantique, tome 1*. Hermann, 1997.
- [4] Mark THOMSON. *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press, 2013.

TODO : reprendre avec ce qui est ajouté par Julien

Introduction

- On a vu en quantique qu'il y avait quantification de l'énergie
- On sait décrire un système étant donné son énergie (exemple du puits infini)
- Si l'on place une particule dans ces niveaux d'énergie, comment va-t-elle se comporter?
- Exemple notamment d'un système à deux niveaux pour la facilité de calcul : on considère un spin $\frac{1}{2}$. Il peut s'agir par exemple d'un électron ou d'un atome d'argent.

Transition : Voyons en premier lieu pourquoi il s'agit bien d'un système à deux niveaux, et comment décrire de façon générale un état de ce système.

1 Système à deux niveaux couplés

1.1 Description d'un état général

- Stern et Gerlach?
- On se place dans un repère sphérique d'axe (Oz) , et l'opérateur $\hat{S}_{\vec{u}}$ correspond à la mesure du spin selon l'axe \vec{u} .
- On choisit l'axe (Oz) comme référence : on définit $|+\rangle$ et $|-\rangle$, états propres de \hat{S}_z . Énergies, représentation matricielle de \hat{S}_z . [3] p 391
- Représentation matricielle de \hat{S}_x et \hat{S}_y , puis plus généralement de $\hat{S}_{\vec{u}}$. [3] p 392
- États propres de $\hat{S}_{\vec{u}}$: $|+\rangle_{\vec{u}}$ et $|-\rangle_{\vec{u}}$, cas de (Oy) et (Ox) . [3] p 393
- Remarquer que si l'on prépare le système dans un état propre, on y reste pour tout temps.

Écran

Rappel des formules, car elles sont longues à écrire et on va y revenir.

Transition : On soumet ce système à un hamiltonien simple : les deux états propres de \hat{S}_z sont des états propres de \hat{H} . Comment le système évolue-t-il? On va mettre à profit la caractérisation des états que l'on vient de voir.

1.2 Précession de Larmor

- Ajout d'un hamiltonien $\hat{H} = \omega_0 \hat{S}_z$. [3] p 401
- Équation de Schrödinger, évolution temporelle en $\exp(\hat{H}/i\hbar)$.
- État initial de direction quelconque, évolution indépendante de $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$, angles $\theta(t)$ et $\varphi(t)$. [3] p 402
- Le spin ne tourne pas vraiment, mais la direction suivante laquelle la composante est $+\hbar/2$ avec certitude vérifie bien une équation de précession.
- On voit l'intérêt de la description du système qu'on a faite!

Transition : La résolution était facile car les états propres considérés étaient aussi états propres de \hat{H} . Seulement, si on ajoute un couplage entre ces états, ce ne sera plus le cas.

1.3 Ajout d'un couplage

- On généralise l'étude précédente à deux niveaux d'énergies E_+ et E_- associés aux états $|\varphi_+\rangle$ et $|\varphi_-\rangle$, et on ajoute un couplage W . On voit que si $E_{\pm} = \pm\omega_0\hbar/2$ on retrouve le cas du spin. Le couplage peut correspondre à un champ transverse.
- Il est très important de remarquer que cette étude correspond à la précédente si l'on écrit les états propres. Cependant, les états propres du hamiltonien sans couplage sont ceux qui sont en général accessibles à l'expérimentateur, et sont donc ceux qui nous intéressent.
- Diagonalisation du hamiltonien, nouveaux états propres et nouvelles énergies propres. Montrer qu'en fait ça revient aux formules du cas du spin dans une direction \vec{u} : on a « changé la direction » des états propres. [3] p 406
- Variations des énergies E_+ et E_- en fonction de la différence d'énergie : création d'un état plus stable et d'un état moins stable. Application en chimie par exemple. [3] p 407
- Si l'on part de l'état $|\varphi_-\rangle$, on peut obtenir l'évolution temporelle du système en exprimant $|\varphi_-\rangle$ en fonction des états propres du nouveau hamiltonien. *C'est le message à retenir* : si on ajoute un couplage, il suffit de tout réexprimer en fonction des nouveaux vecteurs d'onde et on peut résoudre le problème exactement de la même façon. [3] p 412
- Donner l'expression de $\mathcal{P}_{+-}(t)$: on a

$$\mathcal{P}_{+-}(t) = \sin^2 \theta \sin\left(\frac{E_+ - E_-}{2\hbar} t\right)$$

- Applications :
 - H_2^+ ([3] p 413)
 - Oscillations des neutrinos ([2] p 153) : états propres de l'interaction faible, états propres de masse. Développement ultra-relativiste, matrice de couplage, probabilité d'oscillation qui se met exactement sous la même forme. Expression de θ en fonction de la distance parcourue. Détection a été récompensée par un prix Nobel en 2015. Préciser qu'il y a en réalité 3 saveurs de neutrinos.

Écran

Résultats expérimentaux pour les oscillations de neutrinos.

Attention

Nous voulions initialement faire la leçon à travers l'exemple des neutrinos, mais il y a un problème : on ne sait pas s'ils se propagent à la même vitesse, et [2] omet complètement de parler du problème. Seul [4] l'aborde, en disant qu'un traitement plus complet en paquet d'ondes donne le bon résultat (et il s'avère que c'est le même).

Transition : On vient de voir qu'un couplage entre deux niveaux d'énergie impliquait des oscillations entre ceux-ci, à $\omega = \Delta E/\hbar$. Que se passe-t-il maintenant si le couplage est sinusoïdal forcé?

2 Oscillations forcées

2.1 Couplage sinusoïdal

Suivre les calculs de [3] p 444. On peut aussi consulter [1] section 18.11.

- Expression du Hamiltonien.
- Changement de référentiel : deux méthodes sont possibles, soit de façon élégante en suivant [1] 18.11 et la note de bas de page de [3] p 445, soit en posant le changement de façon plus pédestre (ce que fait [3]).
- Quelle que soit la méthode, on se ramène à

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -\Delta\omega & \omega_1 \\ \omega_1 & \Delta\omega \end{pmatrix}$$

- Passer rapidement sur la résolution de l'équation, donner directement l'expression de $P_{12}(t)$. On retrouve un résultat proche de ce qu'on avait obtenu à la partie précédente : c'est normal, puisque encore une fois on s'est placé dans une base où le hamiltonien était diagonal et ne dépendait pas du temps.

Écran

Mettre un support pour les calculs?

Transition : On retrouve le \sin^2 du cas non forcé, mais il y a un terme d'amplitude qui peut varier en fonction de ω .

2.2 Résonance et application à la RMN

Suivre [3] p 446.

- Tracé de l'amplitude en fonction de ω .
- Forme de P_{12} à la résonance : quelle que soit l'amplitude du couplage on a à un moment une probabilité 1 d'être dans le second état!
- Cas de la RMN : application de façon à retourner les spins. En effet, quel que soit l'amplitude du couplage, on a retournement des spins de façon certaine tous les $t_n = (2n + 1)\pi/\omega_1$.
- Analyse chimique : $\omega_0 = \gamma B_0$, et B_0 est un champ effectif qui dépend de l'environnement du H dans la structure.

Conclusion

- Tout au long de la leçon, importance des états propres! En fait, la résolution du problème revient juste à trouver la base adns laquelle \hat{H} est indépendant du temps et obtenir ses états propres.

43 *Évolution temporelle d'un système quantique à deux niveaux.*

- Ouverture sur plus de degrés de liberté, typiquement les 3 neutrinos ou les couplages en RMN.

Capacités thermiques : description, interprétations microscopiques.

Niveau L3

Prérequis

- Thermodynamique
- Ensemble canonique
- Conditions aux limites périodiques
- Statistiques quantiques

Message L'énergie est stockée dans différents degrés de liberté qui sont « activés » lorsque l'énergie thermique est suffisante.

Bibliographie

- [1] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Thermodynamique*. Dunod, 1984.
- [2] Bernard DIU et al. *Physique statistique*. Editions Hermann, 1989.
- [3] Bernard DIU et al. *Thermodynamique*. Editions Hermann, 2007.
- [4] Charles KITTEL. *Physique de l'état solide, 7ème édition*. Dunod, 2005.

Introduction

- Capacités thermiques déjà vues en thermodynamique
- On n'a pas d'expressions pour celles-ci. TODO : vraiment ?
- On va voir qu'un modèle microscopique permet de comprendre comment l'énergie est emmagasinée dans un solide, par degrés de liberté successivement activés.

1 Description thermodynamique

TODO : références de cette partie, voir Debye semi-qualitatif

1.1 Définition

- Définition de la capacité thermique
- Capacité thermique à volume constant, pression constante, à partir de U et H .
- Noter qu'on a la même définition en physique statistique, avec $\partial \langle E \rangle / \partial T$

1.2 Propriétés

- Extensivité, signe positif (preuve dans [3] p 196)
- Principe de Nernst : C_V tend vers 0 quand T tend vers 0.
- On peut les mesurer par calorimétrie : montrer des résultats expérimentaux sur slides.
- Revoir la relation de Mayer généralisée.

[3] p 144

Écran

Résultats expérimentaux pour des solides et des gaz : C_V fonction de T . ODG.

Transition : Modèle pour expliquer ces résultats expérimentaux? On commence par les gaz parfaits, afin de dégager le message important : on a des degrés de liberté qu'on active les uns après les autres.

2 Capacité thermique des gaz

2.1 Gaz parfait monoatomique

- Rappel du théorème d'équipartition de l'énergie : chaque terme quadratique du hamiltonien a une valeur moyenne $k_B T/2$ (attention aux hypothèses plus profondes, voir [2] p 307!). Conditions d'application. [2] p 304
- Hamiltonien du gaz parfait : pour une particule, $\varepsilon = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2/2m$. Mouvements de translation seulement, sans structure interne ni interactions. [2] p 294
- Application du théorème d'équipartition : $U = \frac{3}{2}nRT$ et $C_{V,m} = \frac{3}{2}R$, $C_{P,m} = \frac{5}{2}R$.

Écran

Valeurs de $C_{V,m}$ pour des gaz nobles.

2.2 Gaz parfait diatomique

- Vibration
 - Oscillateur harmonique quantique, fonction de partition. [2] p 334
 - Capacité thermique

$$C_V = Nk_B \left(\frac{T_{\text{vib}}}{2T} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2 \left(\frac{T_{\text{vib}}}{2T} \right)}$$

- Si $k_B T \ll k_B T_{\text{vib}} \equiv \hbar\omega$, le degré de liberté est « gelé ». Au contraire, si $k_B T \gg k_B T_{\text{vib}}$, on retrouve l'équipartition.
- ODG de $\hbar\omega$: environ 0.1 eV.
- Rotation
 - Deux degrés de liberté : $\frac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2)$, donc en classique on ajoute $k_B T$ à l'énergie moyenne. [2] p 339
 - Estimation de T_{rot} par $k_B T_{\text{rot}} = \hbar^2/2I$, soit $T_{\text{rot}} \sim 1 \times 10^1$ K. [2] p 340
 - Faire le lien entre les $\hbar\omega$ et les bandes d'absorption, notamment IR.
 - Capacité thermique classique selon que les degrés sont gelés ou non : $\frac{5}{2}R$ ou $\frac{7}{2}R$.

Écran

- Valeurs pour H_2 , N_2 , I_2 , Cl_2
- Courbe déjà présentée de C_V en fonction de T sur laquelle on fait apparaître T_{rot} et T_{vib} .

Remarques

On ne prend pas en compte les degrés de liberté du nuage électronique : il faudrait en toute rigueur le faire à très haute température (par exemple dans les étoiles). Voir [2] p 333.

Transition : On a compris comment expliquer l'évolution avec la température des capacités thermiques des gaz. Cependant, on a vu que C_V tendait vers 0 lorsque T tend vers 0. Ce n'est pas en contradiction avec ce que l'on vient de voir, car on n'a pas pris en compte les transitions de phase! On s'intéresse donc maintenant à la modélisation des solides.

3 Capacité thermique des solides cristallins

On se restreint par simplicité aux cristaux parfaits. Pour les solides (que l'on considèrera incompressibles), on a $C_P \simeq C_V$.

3.1 Résultats expérimentaux

- Loi de Dulong et Petit (1819) : $C_{V,m} = 3R$ à « haute température ».
- Interprétation via l'équipartition de l'énergie : N oscillateurs harmoniques à 3 dimensions indépendants.

Écran

$C_{V,m}(T)$ pour plusieurs solides cristallins.

Transition : Pour interpréter les résultats aux plus basses températures, on utilise un modèle quantique inspiré sur cette constatation classique.

3.2 Modèle d'Einstein

- N oscillateurs harmoniques indépendants à 3 dimensions, de pulsation propre ω_E . [1] p 379
- Le calcul a déjà été fait lors de l'étude des degrés de vibration pour un gaz diatomique, les résultats sont identiques :

$$C_V = 3Nk_B \left(\frac{T_{\text{vib}}}{2T} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2 \left(\frac{T_{\text{vib}}}{2T} \right)}$$

- Donner un ODG de T_E .
- À haute température, on retrouve l'équipartition
- À basse température, on a une exponentielle.

Écran

Capacité thermique de l'argon solide ([4] p 116).

Transition : Comment expliquer cette dépendance en T^3 à basse température? On a oublié un ingrédient essentiel : les oscillateurs sont *couplés*.

3.3 Modèle de Debye

On ne présente ici qu'un traitement semi-qualitatif. Pour un traitement détaillé, voir [2] p 282 et [4] p 114.

- Pour simplifier, on considère un cristal à une dimension.
- L'étude de la propagation d'ondes dans ce cristal donne la relation de dispersion

$$\omega(k) = 2\omega_0 \left| \sin \frac{ka}{2} \right|.$$

- Approximation de Debye : $\omega_k = c_s k$. Idem à 3D. Donner directement cette formule en cas de manque de temps.
- Proportion de modes excités : volume de la sphère de rayon $k_B T$ dans l'espace des k , $\mathcal{V}_e = \frac{4}{3}\pi(k_B T)^3$. On parle de façon équivalente d'énergie ou de k car il y a une relation linéaire entre ω et k .

- Volume occupé par l'ensemble des modes : $\frac{4}{3}\pi(k_B T_D)^3$, avec T_D la température de Debye.
- On peut exprimer T_D en fonction des paramètres connus : on écrit $k_B T_D = \hbar\omega_D = \hbar c_s k_{\max}$, k_{\max} étant tel qu'il y ait bien $3N$ modes (N dans chaque dimension) :

$$3N = \frac{\frac{4}{3}\pi k_{\max}^3}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3}.$$

Notons que l'expression de T_D n'est pas nécessaire pour avoir l'évolution en T^3 à faible température.

- On a bien tous les modes dans la première zone de Brillouin car $(2\pi/L)/(2\pi/a) = L/a = N$.
- L'énergie des modes excités étant environ $k_B T$, on a

$$U = 3Nk_B T \left(\frac{T}{T_D}\right)^3$$

et on retrouve bien

$$C_V = 12Nk_B \left(\frac{T}{T_D}\right)^3$$

- Pour la comparaison, le résultat exact a un facteur $\pi^4/15$ en plus ([2] p 392, [4] p 115).

Écran

- Relation de dispersion $\omega(k) = c_s k$
- Résultats de Dulong et Petit, Einstein et Debye comparés.

Remarques

Le modèle d'Einstein est valide pour les modes optiques dans les cristaux polyatomiques, pour lesquels $\omega(k) \simeq \text{cste}$.

Attention

Ce modèle de sphère contenant tous les modes n'a rien de particulièrement quantique : il ne faut pas faire l'analogie avec Fermi-Dirac ou quoi que ce soit. On suppose juste qu'on a certains modes disponibles et qu'on n'en excite que les premiers.

3.4 Capacité thermique des électrons de conduction

Cette section ne doit pas être abordée durant la leçon et n'est là que pour la culture. On a pour les électrons $C_V \propto T$. On présente de nouveau une explication semi-qualitative, le traitement complet se trouvant dans [2] p 839 et [4] p 139.

- Modèle : gaz de Fermi d'électrons libres.
- Les électrons excités sont ceux qui se trouvent à la surface de la sphère de Fermi. Ils sont en proportion T/T_F , car

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{donc} \quad \frac{dE}{E} = 2 \frac{dk}{k} \quad \text{et} \quad \frac{k_B T}{k_B T_F} \propto \frac{dk}{k_F},$$

(où $T \ll T_F$, donc T est un infinitésimal par rapport à T_F) et on calcule le rapport des volumes :

$$\frac{4\pi k_F^2 dk}{\frac{4}{3}\pi k_F^3} \propto \frac{dk}{k_F} \propto \frac{T}{T_F}.$$

44 Capacités thermiques : description, interprétations microscopiques.

— On en déduit l'énergie interne :

$$U \simeq \frac{3}{2} N k_B T \times \frac{T}{T_F}$$

et ainsi on a bien $C_V \propto T$.

— Comparaison aux résultats expérimentaux : il s'agit d'une preuve du caractère fermionique des électrons!

Conclusion

— Ouvrir sur la capacité thermique des électrons

Niveau L3

Prérequis

- Milieux magnétiques
- Électromagnétisme dans la matière
- Ensemble canonique
- Spin

Message TODO

Bibliographie

- [1] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Électromagnétisme 4*. Dunod, 1984.
- [2] Bernard DIU et al. *Physique statistique*. Editions Hermann, 1989.
- [3] Warren E. HENRY. « Spin Paramagnetism of Cr⁺⁺⁺, Fe⁺⁺⁺, and Gd⁺⁺⁺ at Liquid Helium Temperatures and in Strong Magnetic Fields ». In : *Physical Review* 88.3 (nov. 1952), p. 559-562. DOI : [10.1103/physrev.88.559](https://doi.org/10.1103/physrev.88.559). URL : <https://doi.org/10.1103/physrev.88.559>.
- [4] Charles KITTEL. *Physique de l'état solide, 7ème édition*. Dunod, 2005.
- [5] Étienne du TRÉMOLET DE LACHEISSERIE. *Magnétisme 1 : fondements*. EDP Sciences, 2000.

Introduction

1 Origine microscopique du magnétisme

1.1 Moments magnétiques atomiques

- Moment magnétique associé au moment cinétique orbital : $\vec{\mu}_L = i \times \pi r^2 \vec{e}_z = q/T\pi r^2 \vec{e}_z$ et $T = 2\pi r/v$, donc

$$\vec{\mu}_L = \frac{q}{2m} \vec{\mathcal{L}} = -\frac{e\hbar}{2m} \vec{L}.$$

[1] p 147

- Magnéton de Bohr $\mu_B = e\hbar/2m = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$. On a donc $\vec{\mu}_L = -\mu_B \vec{L}$ pour un électron.
- Moment magnétique intrinsèque dû au spin : facteur gyromagnétique g de Landé. On a

$$\vec{\mu}_S = -g_S \mu_B \vec{S} \quad \text{où} \quad g_S \approx 2.$$

- Moment magnétique total :

$$\vec{\mu} = -g \mu_B \vec{J}.$$

[4] p 378

- On a $m_p \gg m_e$, donc seul le moment magnétique des électrons va compter ici.

Remarques

- Lors de cette leçon, on notera $\vec{\mathcal{L}}, \vec{\mathcal{P}}, \vec{\mathcal{J}}$ les « vrais » moments cinétiques, et $\vec{L}, \vec{S}, \vec{J}$ les moments cinétiques « en unités de \hbar », définis par $\vec{\mathcal{L}} = \hbar \vec{L}$, etc.
- À partir de l'expression de g de [4] p 378, on peut retrouver $g = 1$ pour \vec{L} seul, et $g = 2$

pour \vec{S} seul.

1.2 Définitions

— Définition de l'aimantation : moment magnétique moyen par unité de volume, tel que $d\vec{\mathcal{M}} = \vec{M}(\vec{r}) d\tau$. [1] p 100

— On peut obtenir l'aimantation si l'on connaît l'énergie libre (dans le cas d'un système en contact avec un thermostat) : [2] p 310

$$M = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial F}{\partial B_0} \right)_{T,V,N}$$

— Susceptibilité magnétique : on définit [2] p 310

$$\chi = \mu_0 \lim_{B_0 \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial B_0},$$

grandeur sans dimension.

— Signe de χ : diamagnétisme, paramagnétisme, ferromagnétisme. Pour donner un ordre de grandeur de χ , il faudrait préciser la température T et la densité n .

Remarques

— La susceptibilité magnétique est parfois définie par $\chi = \partial M / \partial B_0$, ce qui correspond à notre définition dans les unités CGS. On voit aussi parfois $\chi = \mu_0 M / B$ (par exemple dans [4] p 375) : cela correspond aussi à notre définition car aux faibles valeurs de B_0 l'aimantation est généralement proportionnelle au champ appliqué.

— En réalité, le champ que l'on peut imposer est \vec{H} . Pour un paramagnétique, on a $\chi \ll 1$, donc cela correspond en gros à $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$. Cependant, pour un ferro, cela ne fonctionne plus... On a donc bien le droit de mettre \vec{B}_0 dans l'hamiltonien du paramagnétisme, mais peut-on faire la même chose pour le ferromagnétisme? Ce n'est pas clair. Cependant, le champ moyen ferromagnétique comprend la contribution des voisins, et cela compense peut-être le problème?

Transition : On ne s'intéressera pas au diamagnétisme, qui correspond en fait simplement à un phénomène d'induction des électrons dans le solide. On supposera l'existence de moments permanents, et on étudiera leur interaction avec un champ appliqué. On commence par le cas où les moments sont indépendants : le paramagnétisme.

2 Le paramagnétisme

Le paramagnétisme ne peut être présent que dans les éléments ayant des couches internes non saturées (tous les électrons ne sont pas appariés), c'est-à-dire les couches 3d, 4f, 5f... Les couches externes ne peuvent pas participer car les électrons sont pris pour les liaisons chimiques (voir [1] p 189).

La discussion de la partie précédente ne concerne que des atomes ou ions libres. En réalité, on peut envisager deux types de paramagnétismes : [5] p 259

- des électrons localisés autour de leur noyau (paramagnétisme de Curie, que l'on traite ici)
- des électrons totalement délocalisés, décrivant les électrons de conduction (paramagnétisme de Pauli).

2.1 Hamiltonien et fonction de partition

- Suivre [2] p 311. Ne traiter que le cas $J = 1/2$.
- Niveaux d'énergie $m_J g \mu_B B_0$ pour un moment. On a $m_J = \pm 1/2$.
- Moments magnétiques indépendants : on factorise la fonction de partition.
- Calcul de l'énergie libre.

2.2 Aimantation et susceptibilité magnétique

- Calculer l'aimantation à partir de F . On peut techniquement la calculer sans passer par F ([4] p 378), mais comme cela on développe la méthode générale qui nous permettrait de faire le calcul pour J quelconque. [2] p 313
- Calcul de la susceptibilité magnétique (avec un facteur μ_0 en plus par rapport à [2]) :

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \mu_0 \frac{N}{V} \left(\frac{g \mu_B}{2} \right)^2 \frac{1}{k_B T}.$$

- On retrouve la loi de Curie établie expérimentalement en 1895 par Pierre Curie : $\chi = C/T$. [2] p 315
- Montrer les résultats pour $J \neq \frac{1}{2}$ et les résultats expérimentaux.
- Commentaires :
 - La quantité apparaissant sur le graphe est S et non pas J , car $L = 0$. En effet, on a $L = 0$ dès que la couche interne est à moitié remplie : couche 3d pour Fe^{III} , couche 4f pour le Gd^{III} (voir [4] p 382). Pour Cr^{III} , c'est un peu différent : on a blocage du moment cinétique par le champ cristallin (ce qui est général pour la couche 3d, mais n'apparaît pas pour les autres couches).
 - Dans l'article original ([3]), on retrouve bien le blocage (« quenching ») du moment cinétique orbital, car sans blocage on aurait $g = 5/2$ qui n'ajuste pas du tout la courbe expérimentale de la figure 2.
 - Voir aussi [5] p 263 et 271.

Écran

Résultats pour $J \neq \frac{1}{2}$ et résultats expérimentaux ([4] p 380, [3]).

Remarques

On conserve g dans les calculs au lieu de le simplifier en écrivant $g = 2$, car en réalité il y a un « moment magnétique anormal » de l'électron qui fait que g ne vaut pas exactement 2.

2.3 Paramagnétisme de Pauli

Ne pas présenter cette partie, afin de se concentrer sur le champ moyen. Cependant, il est intéressant de la relire.

- On applique la distribution de Fermi-Dirac : seuls les états électroniques au bord de la sphère de Fermi peuvent s'orienter suivant \vec{B} , car dans la sphère, tous les états sont déjà occupés.
- La proportion d'électrons qui peuvent s'orienter est donc

$$\frac{4\pi k_f^2 dk_f}{\frac{4}{3}\pi k_f^3} = 3 \frac{dk_f}{k_f} = \frac{3}{2} \frac{dT_F}{T_F} \quad \text{car} \quad \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m} = k_B T_F \quad \text{et} \quad \frac{\hbar^2 k_f dk_f}{m} = k_B T \quad \text{donc} \quad 2 \frac{dk_f}{k_f} = \frac{dT_F}{T_F}$$

où l'on remarquera que $T \ll T_F$, donc T joue le rôle d'un infinitésimal.

- Ces électrons seront les seuls à pouvoir faire du paramagnétisme, et on considèrera qu'ils font du paramagnétisme de Curie :

$$\chi_{\text{Pauli}} = \frac{C}{T} \frac{3}{2} \frac{T}{T_F} = \frac{3}{2} \frac{N \mu_0 \mu_B^2}{V k_B T_F}.$$

C'est exactement la bonne formule! Voir [2] p 843.

- On a donc une susceptibilité indépendante de la température, tant que $T \ll T_F$, c'est-à-dire en pratique tant que le métal est solide ($T_F \approx 1 \times 10^4$ K).
- Résultat historiquement important pour démontrer l'existence d'un gaz de Fermi d'électrons dans un métal.

Transition : On ne peut pas tout expliquer avec ce modèle, notamment le ferromagnétisme, caractérisé par l'existence d'une aimantation non nulle à $\vec{B} = \vec{0}$. En effet la formule obtenue donne zéro pour un champ B_0 nul. L'élément manquant ici est l'*interaction* entre les spins.

3 Description du ferromagnétisme

Écran

Résultats expérimentaux : aimantation non nulle en-dessous d'une certaine température T_C .

3.1 Hamiltonien de Heisenberg

- D'où vient le ferromagnétisme? [2] p 451
 - L'interaction magnétique dipolaire entre les moments n'est pas suffisante, on aurait $T_C \sim 1$ K.
 - Interaction d'échange : pour des spins parallèles, la fonction d'onde en position est antisymétrique (par principe d'exclusion) donc ils ne peuvent pas être trop proches. Leur énergie d'interaction coulombienne est donc faible. Pour des spins antiparallèles, le principe d'exclusion n'empêche pas qu'ils se trouvent au même endroit et donc leur énergie de répulsion coulombienne est plus élevée.
 - On peut tout ramener à une énergie d'interaction $-J \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$. L'intégrale d'échange J est prise positive ici (sinon c'est de l'antiferromagnétisme). On a plus d'informations sur J dans [1] p 190.
- On ne considère que les interactions avec plus proches voisins : il vient l'hamiltonien d'interaction

$$H = g \mu_B \vec{B}_0 \cdot \sum_{i=1}^N \vec{S}_i - J \sum_{i,j \text{ voisins}} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

Attention

La convention de signe $\vec{\mu} = -g \mu_B \vec{J}$ est opposée dans [2] p 450, ce qui fait qu'il y a un signe - de plus dans l'hamiltonien pour cette référence (le signe - de l'interaction moment magnétique - champ n'est plus compensé). On a donc un champ magnétique effectif différent, puis tout rentre dans l'ordre car $\vec{M} = -\frac{N}{V} g \mu_B \langle \vec{S}_i \rangle$.

Transition : On a a priori un problème à N corps couplés. On ne sait pas le résoudre : on réalise une approximation, appelée approximation de champ moyen.

3.2 Approximation de champ moyen

- Champ moléculaire, principe de l'approximation : on remplace le champ par sa valeur moyenne [2] p 454
- Noter que le champ moléculaire avait été proposé par Weiss bien plus tôt. [1] p 189
- On peut alors appliquer les calculs réalisés pour le paramagnétisme : on obtient l'équation implicite

$$M = N \frac{g\mu_B}{2V} \tanh\left(\frac{g\mu_B}{2k_B T} B_{\text{eff}}(M)\right)$$

où $B_{\text{eff}}(M) = B_0 + \lambda M$.

- Insister sur le contenu physique de cette équation : on s'est ramené à des états indépendants! Cela revient à passer de l'ensemble canonique à des facteurs de Boltzmann individuels.
- Résolution graphique en champ nul. [2] p 457
- Température de Curie T_C , aimantation pour $T > T_C$ et $T < T_C$.
- Si on a le temps : exposant critique $\beta = 0.5$. [2] p 465

3.3 Système en présence d'un champ extérieur

À adapter selon le temps restant.

- Argument rapide : au-dessus de T_C on a une phase paramagnétique. D'après la loi de Curie, on a $\mu_0 M = \chi_{\text{para}} M$, donc

$$\mu_0 M = \frac{C}{T} (B_0 + \lambda M) \quad \text{soit} \quad \chi = \frac{\mu_0 M}{B_0} = \frac{C}{T - \frac{C\lambda}{\mu_0}} = \frac{C}{T - T_C}.$$

Il s'agit de la loi de Curie-Weiss.

- On peut aussi présenter les calculs lorsque $B_0 \rightarrow 0$ et $T > T_C$. [2] p 461

Écran

Calculs pour $B_0 \rightarrow 0$ et $T > T_C$.

Conclusion

- On a utilisé ici l'approximation de champ moyen, utile dans de nombreux domaines de la physique (voir compléments de [2], notamment III.G, III.H, III.K). Elle est très puissante, car avec un raisonnement assez simple on a pu obtenir l'existence d'une transition de phase.
- Ouverture possible : domaines de Weiss?

Niveau L3 (pour les domaines de Weiss... à mé-
diter) **Prérequis** — Magnétisme dans les milieux

Bibliographie

- [1] Michel BERTIN, Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Électromagnétisme 4*. Dunod, 1984.
- [2] Charles KITTEL. *Physique de l'état solide, 7ème édition*. Dunod, 2005.
- [3] Jérémy NEVEU. *Cours d'électronique de la préparation à l'Agrégation de Physique*. 2018.
- [4] Marie-Noëlle SANZ et al. *Physique tout-en-un PSI 2ème édition (ancien programme)*. Dunod, 2006. ISBN : 2100548719.

Introduction

- On a déjà vu le magnétisme dans les matériaux
- Comment expliquer qu'il existe des aimants permanents?
- Ce type de propriétés permanente est extrêmement utile pour les technologies actuelles, comme le stockage de données par exemple.

1 Aimantation des corps ferromagnétiques**1.1 Définition**

- Définition d'un corps ferromagnétique [1] page
- Hypothèse pour la suite : milieux homogènes, isotropes 172

Attention

Pas d'hypothèse de linéarité!

- Exemples de matériaux ferromagnétiques [1] page
- Caractéristiques que l'on peut déjà observer : solides cristallins ou polycristallins 172
- Valeur typique de μ_r : 1×10^5

Transition : Comprendre ce que ces propriétés vont changer pour le champ magnétique créé.

1.2 Canalisation des lignes de champ

- On considère pour le moment un milieu linéaire : $B = \mu_0 \mu_r H$
- Continuité de la composante tangentielle de H : très forte réfraction [4] page
- On canalise le flux magnétique dans le milieu ferro 679, [3]
- Point de vue énergétique : $E = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r}$ donc l'énergie est minimisée si le champ est important dans le milieu ferro et faible autour.

Transition : Utilisations possibles de ce phénomène de canalisation des lignes de champ?

1.3 Application à l'électrotechnique

— Encore pour un milieu linéaire, faire le calcul de l'électroaimant [4] page

Transition : On a supposé pour les derniers calculs que l'on avait un matériau linéaire, plus précisément on cherche à connaître la réponse du matériau $B = f(H)$ 680

2 Lois de réponse

2.1 Cycle d'hystérésis

Expérience

Cycle d'hystérésis d'un matériau de fer dur. TODO : référence

Écran

Schéma de l'expérience

Courbe d'hystérésis générale avec première aimantation.

— On voit que le matériau n'est pas linéaire du tout!

— La réponse dépend de l'histoire du matériau

— Champ coercitif, aimantation à saturation, champ rémanent [4] page

— Que représente ce cycle? Pertes énergétiques 672

[4] page

672

[1] page

187

Attention

Champ coercitif pour M et B sont légèrement différents...

— Revenir sur l'électroaimant : droite de fonctionnement [4] page

Transition : Cela va nous permettre de définir 2 familles de ferromagnétiques, chacune ayant des applications technologiques différentes. 682

2.2 Ferromagnétiques doux et durs

— Définitions, tracer les cycles caractéristiques au tableau [4] page

— Ferro doux : quasiment linéaire, peu de pertes, ne sature pas. Utile pour l'électrotechnique : 674

transformateur, électroaimant car on a peu de pertes.

— Ferro dur : fort effet de mémoire, utile pour le stockage de données sur un disque dur, les aimants permanents par exemple. Il faut contrôler le champ coercitif.

— Grande gamme de H_c

Écran

Valeurs de H_c et B_r , cycles d'hystérésis pour des ferros durs et doux

Transition : À l'échelle de l'échantillon, comment fonctionne le magnétime? Le moment n'est pas du tout égal au moment de saturation, on voudrait comprendre pourquoi.

2.3 Interprétation en domaines

Écran

- Domaines dans une plaquette monocristalline
- Origine des domaines

- Interprétation de ce résultat :
- Si on a une aimantation uniforme, on a un champ fort à l'extérieur, ce qui n'est pas intéressant du tout.
- Il se forme des **domaines de Weiss**, d'aimantation uniforme mais pas de même direction.
- Si on modifie le champ appliqué, on déplace les parois : cela permet de comprendre la courbe de première aimantation.

[1] page
180

Conclusion

- Ouvrir sur le stockage de données
- Parler des aimants en terres rares qui sont bien plus puissants, et dire qu'il s'agit d'un domaine encore actif de la recherche.
- Prix Nobel 2007 magnétorésistance géante

Remarques

Lire le chapitre « Ferromagnétisme et antiferromagnétisme » de [2] pour donner du contenu et répondre aux questions.

Mécanismes de la conduction électrique dans les solides.

Niveau L3

Prérequis

- Mécanique classique
- Électromagnétisme
- Statistiques quantiques

Message

Bibliographie

- [1] Neil ASHCROFT et David MERMIN. *Physique des solides*. EDP Sciences, 2002.
- [2] Bernard DIU et al. *Physique statistique*. Editions Hermann, 1989.
- [3] André GUINIER, Étienne GUYON, Jean MATRICON et al. « Propriétés électroniques des solides ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* 550 (1972).
- [4] Charles KITTEL. *Physique de l'état solide, 7ème édition*. Dunod, 2005.

Introduction

Écran

Résistances de différents solides.

- Comment expliquer cette différence de propriétés électriques entre les solides ?
- On commence par une approche classique, mais on va ensuite montrer que la compréhension quantique des porteurs de charges est absolument nécessaire pour décrire la conduction électrique dans les solides.

1 Description classique : modèle de Drude

1.1 Hypothèses du modèle

- Hypothèses et approximations : [1] p 4
 - On ne s'intéressera qu'à la contribution des électrons : les ions sont supposés fixes, car leur masse est largement supérieure.
 - **électrons libres** : on néglige les interactions électron-ion.
 - **électrons indépendants** : on néglige les interactions des électrons entre eux entre deux collisions.
 - **temps de relaxation** : temps τ entre les collisions (on ne dit pas sur quoi), indépendant de la position et de la vitesse de l'électron. On peut le ramener à une force de frottements fluides.
- ODG de la densité électronique n . [1] p 5
- Donner l'équation du mouvement, remonter au résultat en régime stationnaire.

Remarques

Comment écrire l'équation du mouvement pour le modèle de Drude?

- L'équation du mouvement pour un électron, entre deux collisions, est

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}.$$

- On peut montrer ([1] p 12) que si la probabilité de choc est de dt/τ , la vitesse moyenne $\langle \vec{v} \rangle$ vérifie l'équation

$$m \frac{d\langle \vec{v} \rangle}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \langle \vec{v} \rangle.$$

Cependant cette formule est un peu plus longue à démontrer, et seul le régime stationnaire est intéressant ici.

- On peut donc plutôt dire que la vitesse entre deux chocs vaut, par intégration, $\vec{v}(t) = -et\vec{E}/m$. En moyenne, le temps entre deux chocs est τ , donc la vitesse moyenne est atteinte lorsque $t = \tau$, soit

$$\langle \vec{v} \rangle = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

1.2 Résultats

- Conductivité en courant continu :

$$\sigma = \frac{ne\tau}{m}$$

[1] p 8

- Ordres de grandeur de τ

[1] p 11

1.3 Limites du modèle

- Libre parcours moyen ℓ constant (par l'expérience), vitesse moyenne v en \sqrt{T} : on a $\tau = \ell/v \propto 1/\sqrt{T}$.
- On observe plutôt $\sigma \propto 1/T$.
- On peut évaluer ℓ expérimentalement : il atteint facilement 100, c'est bien plus grand que la distance entre les ions! Ce résultat est peu réaliste étant donné le modèle de Drude : imaginons un être humain qui court dans une forêt, la distance typique entre deux collisions sera la distance entre deux arbres. Ce modèle nous donnerait donc envie de dire que les électrons collisionnent sur les ions, ce qui n'est apparemment pas le cas. Et si on corrige le libre parcours moyen sans changer la vitesse, on n'a plus le bon τ donc plus le bon σ !

[3] p 291

Transition : Cette description classique du gaz d'électrons n'explique pas vraiment les observations. Pour aller plus loin, on prend en compte les statistiques quantiques.

2 Modèle de Sommerfeld : gaz parfait de fermions**2.1 Description des états électroniques**

- Conditions aux limites périodiques, quantification.
- Rappel de la distribution de Fermi-Dirac.
- Sphère de Fermi, calcul du vecteur d'onde de Fermi si on est à température nulle. Calcul de T_F , v_F (très élevée alors qu'on s'est placé à $T = 0$!). Ordres de grandeur. En fait on a bien fait de supposer T nulle car $T \ll T_F$ et le gaz de fermions se comporte comme s'il était à température nulle!

[1] p 36

[1] p 47

[2] p 838,

[1] p 40

- Nouveau libre parcours moyen, en utilisant la vitesse de Fermi comme vitesse moyenne : on atteint facilement les centaines d'angströms, ce qui correspond à l'expérience, et à des collisions sur des impuretés. [1] p 60
- On remarque que v_F vaut 100 fois plus que v_{th} utilisée pour le calcul de Drude, mais qu'il y a un même facteur 100 entre le libre parcours moyen réel et le libre parcours moyen de Drude : les deux erreurs se compensent, ce qui permet d'avoir la bonne valeur de τ et donc de σ avec le modèle de Drude (et ce qui explique que changer le libre parcours moyen dans le modèle de Drude n'était pas efficace).

2.2 Conduction électrique

- Sphère de Fermi, déplacement lorsqu'on applique un champ \vec{E} . [4] p 144
- **En moyenne** (car on considère tous les électrons à la fois), le temps entre deux collisions est τ , et la sphère se décale donc de $\delta\vec{k} = -e\vec{E}\tau/\hbar$, ce qui permet de remonter à $\delta\vec{v}$ puis σ .
- Noter que désormais τ est le temps entre deux collisions *sur les défauts!*
- Défauts du modèle des électrons libres : essentiellement, il ne permet pas de prévoir pourquoi certains matériaux sont des métaux, et d'autres des isolants ou des semi-conducteurs. [1] p 65

Transition : On réfléchit aux hypothèses à remettre en cause : essentiellement l'approximation des électrons libres.

3 Structure de bandes

3.1 Modèle des électrons quasi-libres

- Les électrons libres sont des ondes $\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$. On prend un modèle 1D pour simplifier.
- Réflexion de Bragg des électrons sur le réseau des ions : $2a\sin\theta = n\lambda$, avec $\theta = \pi/2$. Ainsi $k = n\pi/a$ avec n entier relatif. Ondes stationnaires lorsque la condition est vérifiée. [4] p 163,
- Ondes stationnaires ψ_+ et ψ_- , qui localisent les électrons en deux zones différentes : donc deux énergies, on aura apparition d'un *gap*. [3] p 314
- Pour le calcul complet : [1] p 181. Mentionner le théorème de Bloch, le traitement quantique, etc.

3.2 Différents types de matériaux

Écran

Remplissage des niveaux d'énergie pour différents matériaux.

3.3 Conductivité des semi-conducteurs

Il est important d'en parler car, comme le précise le jury, tous les solides ne sont pas des métaux.

- Voir [2] p 844, [4] p 199.
- Dépendance exponentielle de la densité de porteurs :

$$n_c(t) = \sqrt{N_c N_v} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right) \quad \text{où} \quad N_{c,v} = \frac{1}{4} \left(\frac{2m_{c,v} k_B T}{\pi \hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Cela écrase complètement la dépendance en T de τ .

- Principe du dopage : on contrôle le nombre d'impuretés, afin de contrôler les propriétés électriques du matériau.

Conclusion

- Phénomène profondément quantique, car $T \ll T_F$. On a vu l'importance du réseau périodique d'ions.
- Semi-conducteurs super, car grâce au dopage on peut contrôler les propriétés de conduction et réaliser des composants stylés, comme les transistors.

Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique.

Niveau CPGE

Prérequis

- Électrocinétique
- Régime sinusoïdal forcé
- Analogie électromécanique

Message Montrer le caractère central et universel des résonances en physique. Appuyer sur le nombre de degrés de liberté.

Bibliographie

- [1] Jean-Marie BRÉBEC et al. *Mécanique MPSI*. Hachette, 2003.
- [2] Claude COHEN-TANNOUDJI, Bernard DIU et Franck LALOË. *Mécanique quantique, tome 1*. Hermann, 1997.
- [3] Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Mécanique 1*. Dunod, 1996.
- [4] José-Philippe PÉREZ. *Électronique, fondements et applications*. Dunod, 2006.
- [5] Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un PCSI*. Dunod, 2013.
- [6] Marie-Noëlle SANZ, Anne-Emmanuelle BADEL et François CLAUSSET. *Physique tout-en-un 1ère année*. Dunod, 2003.
- [7] Clément SAYRIN. *Travaux dirigés d'Optique*. URL : <http://www.lkb.upmc.fr/cqed/teaching/teachingsayrin/>.

Introduction

- Définition d'une résonance : la réponse d'un système à une excitation passe par un maximum en fonction d'un paramètre variable. Ici, ce paramètre sera la fréquence. On parlera de considérations énergétiques plus tard.
- Dans la vie quotidienne : fréquences émises par les instruments, capteur radio (on choisit la fréquence de résonance qui correspond à la porteuse). Il existe aussi des résonances dans le domaine microscopique!

Transition : Commençons par un modèle simple afin de bien dégager les phénomènes physiques qui entrent en jeu.

1 Oscillateur harmonique forcé

Systeme étudié : masse avec ressort et frottements fluides. Équation du mouvement :

[1] p 96

$$m\ddot{x} + a\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

1.1 Résonance en position

- Réécrire l'équation sous sa forme canonique :

[1] p 96

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{km}.$$

— Passage en régime sinusoïdal forcé : $x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t))$, avec $\underline{x} = x_m \exp(i\varphi_x) \exp(i\omega t)$. On a [1] p 102

$$\underline{x} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}} \quad \text{soit} \quad x_m = \frac{F_0/(m\omega_0^2)}{\sqrt{G(u)}},$$

$$\text{où } G(u) = (1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}.$$

— Comportement asymptotique. Détails du comportement entre les deux limites : cas $Q < 1/\sqrt{2}$ et $Q > 1/\sqrt{2}$. On dérive pour obtenir le maximum, conformément à la définition donnée en introduction. Obtenir la *pulsation de résonance* [1] p 103

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

— Tracé des courbes sur slide, les commenter : à basse fréquence, on « suit » la commande, tandis qu'à haute fréquence on ne peut plus.

Écran

- Courbes de module et de phase, pour différentes valeurs de Q
- Analogie électromécanique : elle nous permet de faire un lien entre la position dans un oscillateur amorti et la charge de C dans un RLC.
- Programme Python : résonances du RLC série. Montrer la résonance en tension (bornes de C), voir qu'elle se comporte de la façon attendue. Montrer le courant (tension aux bornes de R) : on observe aussi une résonance, mais la fréquence ne dépend pas de Q !

Transition : Par analogie, on va donc étudier la vitesse dans l'oscillateur amorti.

1.2 Résonance en vitesse

— Multiplier le calcul précédent par $j\omega$: on parvient à [1] p 105

$$v_m = \frac{QF_0}{m\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(u - \frac{1}{u}\right)^2}}$$

- Résonance à ω_0 , indépendamment du facteur de qualité.
- Commenter les courbes : on ne tend plus vers un palier à basse fréquence (logique car la position tendait vers un palier). De plus, la vitesse est en phase avec l'excitation à la résonance.
- Puissance fournie maximale à la résonance? TODO

1.3 Aspects énergétiques et bande passante

— Aspect énergétique : on peut dire que la résonance correspond au moment où on « extrait le maximum d'énergie de la source », donc quand Ei est maximal, soit i maximal. On peut aussi remarquer que en moyenne la puissance fournie est entièrement dissipée par effet Joule, mais à la résonance cela est vrai en instantané. [6] p 381

— Bande passante : zone pour laquelle $\langle \mathcal{P}_g \rangle(\omega) \leq \mathcal{P}_{\max}/2$, donc $I(\omega) \leq I_{\max}/\sqrt{2}$. Admettre l'expression [3] p 244

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

- Réponse à un échelon : évolution $n \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right)$, on a donc un temps caractéristique $\tau = Q/\omega_0$. [5] p 355
- On a la relation $\tau\Delta\omega = 2$, très générale puisqu'elle ne dépend pas des caractéristiques du système! [3] p 244

1.4 Universalité du modèle

- On a vu des résonances à échelle macroscopique. Notre modélisation est très générale :
 - Le terme de rappel correspond à un développement autour d'une position d'équilibre stable
 - Le terme de pertes correspond à une modélisation simple de frottements.
 - Le forçage par une composante sinusoïdale permet, par linéarité, de remonter à n'importe quelle excitation.
- Autres exemples (sur slides) :
 - Amortisseur de voiture : on cherche à avoir Q faible!
 - Électron élastiquement lié : on peut modéliser la réponse des milieux matériels à un champ sinusoïdal (par exemple une onde). Les résonances correspondent aux fréquences d'absorption des matériaux.
- RMN : admettre qu'il y a une résonance lorsqu'on excite un proton à la bonne fréquence. [2] p 447

Écran

Systèmes avec résonance : voiture, électron élastiquement lié, RMN...

Transition : Montrer les spectres de RMN avec protons couplés : on a séparation des pics! le nombre de pics dépend du nombre de protons... et l'espacement dépend du couplage!

2 Résonance d'oscillateurs couplés

2.1 Approche descriptive

- On a l'impression qu'à chaque degré de liberté correspond une résonance.
- On réalise un modèle simple pour l'étude d'oscillateurs couplés : deux circuits RLC couplés par mutuelle.

Expérience

Circuits RLC couplés

- Faire une wobulation, montrer le déplacement des pics de résonance.
- Faire un schéma au tableau
- Esquisser les équations : on comprend pourquoi il y a couplage, et comment on pourrait résoudre. [4] p 363
- Admettre les fréquences de résonance, les écrire au tableau.

Transition : Et pour un nombre infini de degrés de liberté?

2.2 Cavités résonantes

- Suivre [7], section Cohérence.
- Pour le Fabry-Pérot, on peut dire que chaque rayon réfléchi dans la cavité est un degré de liberté. On en a donc bien une infinité.

- Calcul de la différence de marche en supposant un unique indice $n \simeq 1$ (à admettre en cas de manque de temps) : $\delta = (ABC) - (AD)$ et $e/AB = \cos\theta$, $AD/AC = \sin\theta$, $AC/2e = \tan\theta$ donc

$$\delta = \frac{2e}{\cos\theta} - 2e \tan\theta \sin\theta = 2e \cos\theta.$$

- Calcul de l'intensité transmise : pour une longueur donnée, on sélectionne seulement certaines fréquences!
- Parler de la finesse.
- Mentionner les autres exemples.

Écran

Autres exemples de résonances avec une infinité de degrés de liberté : corde de Melde, ondes de marées...

Conclusion

Ouvrir sur les résonances paramétriques : on fait varier un autre paramètre que ω , par exemple C pour le RLC ou l pour le pendule.

Niveau Licence

Prérequis

- Oscillateur harmonique
- Mécanique
- Électronique

Message Le pouvoir des portraits de phase qui permettent de comprendre le comportement d'un oscillateur sans avoir la solution de son équation différentielle.

Bibliographie

- [1] Pierre BERGÉ, Yves POMEAU et Christian VIDAL. *L'ordre dans le chaos*. Hermann, 2004.
- [2] Jean-Pierre FAROUX et Jacques RENAULT. *Mécanique 1*. Dunod, 1996.
- [3] Hubert GIÉ et Jean-Pierre SARMANT. « Le portrait de phase des oscillateurs ». In : *Bulletin de l'union des physiciens* 744 (1992).
- [4] Hubert GIÉ et Jean-Pierre SARMANT. *Mécanique 1ère année*. Tec & Doc, 1995.
- [5] *Oscillateurs linéaires et non linéaires*. 63.
- [6] Bernard SALAMITO et al. *Physique tout-en-un PCSI*. Dunod, 2013.

Introduction

- Définition d'un oscillateur : système dont une grandeur caractéristique croît et décroît périodiquement.
- Définition de non-linéaire : l'équation ne vérifie pas le principe de superposition. Plus physiquement, la réponse n'est pas une fonction linéaire de l'excitation.

Remarques

On pourrait définir la non linéarité par l'apparition de nouvelles harmoniques. Cependant, dans le cas de l'oscillateur paramétrique, on a apparition de nouvelles harmoniques alors que l'équation elle-même vérifie le principe de superposition.

Transition : On va commencer par l'étude d'un oscillateur simple, mais qui va nous permettre d'introduire l'essentiel des outils pour travailler avec les oscillateurs, et qui va mettre en exergue les propriétés fondamentales des non-linéarités.

1 Le pendule pesant : du linéaire au non linéaire

1.1 Mise en équation. Portrait de phase.

- Expression de l'énergie mécanique, équation du mouvement :

[2] p 248

$$E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Cette équation est non linéaire.

- On doit avoir $E \geq mgl(1 - \cos\theta)$, et alors l'énergie cinétique est $E - mgl(1 - \cos\theta)$. Tracer l'énergie potentielle en fonction de θ , placer la droite correspondant à l'énergie mécanique totale. On distingue trois cas : [2] p 250
- $E < 2mgl$: on a oscillations entre $-\theta_m$ et $+\theta_m$, avec annulation de la vitesse en $\pm\theta_m$. Si on suppose $E \ll 2mgl$, ou $\theta_m \ll \pi$, on peut écrire $\sin\theta \simeq \theta$ et l'équation devient

$$\frac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2} + \theta^2 = \text{cste.}$$

On a donc affaire à des trajectoires circulaires dans le plan $(\theta, \dot{\theta}/\omega_0)$. Lorsque E n'est plus négligeable devant $2mgl$, les trajectoires ne sont plus oscillatoires, mais on a toujours un **mouvement oscillatoire** ([3] p 721).

- $E > 2mgl$: on n'a jamais annulation de $\dot{\theta}$, et θ peut prendre des valeurs quelconques. On a un **mouvement révolutif** ([3] p 721). Donner le tracé dans le plan $(\theta, \dot{\theta}/\omega_0)$.
- $E = 2mgl$: il s'agit de la **séparatrice**. Donner son tracé dans le même plan.
- Commentaires généraux sur les trajectoires : sens de parcours, impossibilité de se croiser (deux trajectoires qui se croisent sont forcément les mêmes par théorème de Cauchy), périodicité lorsque $E < 2mgl$.
- Les non-linéarités ont donc pour effet de faire apparaître des solutions *qualitativement différentes*.
- On voit que la connaissance des trajectoires $(\theta(t), \dot{\theta}(t)/\omega_0)$ pour toute condition initiale est suffisante pour caractériser le comportement de l'oscillateur à tout temps. Généralisons cette notion.
- Définition de l'espace des phases : on écrit les équations du mouvement sous la forme de N équations d'ordre 1 : $dx_1/dt = \dots, \dots, dx_N/dt = \dots$. L'espace des phases est alors (x_1, \dots, x_N) , et une *trajectoire de phase* est la courbe paramétrée $(x_1(t), \dots, x_N(t))$. Le *portrait de phase* est l'ensemble des trajectoires de phase pour plusieurs conditions initiales. [6] p 632

Remarques

Le théorème de Cauchy stipule que deux trajectoires $(\theta_1(t), \dot{\theta}_1(t)/\omega_0)$ et $(\theta_2(t), \dot{\theta}_2(t)/\omega_0)$ qui se croisent sont forcément les mêmes, car alors il existerait un temps t_0 tel que $\theta_1(t_0) = \theta_2(t_0)$ et $\dot{\theta}_1(t_0)/\omega_0 = \dot{\theta}_2(t_0)/\omega_0$, ce qui implique que les solutions seraient identiques par unicité. Cependant, cela n'est pas un problème pour le croisement des séparatrices : il faut un temps infini pour atteindre le point de croisement, donc le temps t_0 n'est jamais atteint.

1.2 Apparition d'harmoniques supplémentaires

Écran

Programme Python traçant les solutions, leurs FFT et les portraits de phase pour plusieurs oscillateurs.

- Montrer l'oscillateur harmonique (linéaire)
- Montrer le pendule simple : on retrouve le portrait de phase déjà vu. Commenter la FFT : apparition d'une harmonique à 3ω .
- Calcul de l'effet des non-linéarités : [2] p 251
- Montrer par DL du sinus que l'on aura apparition d'un terme à 3ω .

— Formule de Borda (ne pas faire le calcul, surtout si manque de temps) :

$$\omega \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

— Amplitude de la nouvelle harmonique : $\varepsilon \simeq \theta_0^2/192$.

— On vient de découvrir un nouvel effet des non-linéarités : la variation de la fréquence avec l'amplitude, et l'apparition de nouvelles harmoniques.

1.3 Oscillateur amorti

Écran

Le même programme Python, cette fois pour l'oscillateur amorti.

— Montrer l'oscillateur amorti : portrait de phase, enveloppe exponentielle. L'élargissement des pics de la FFT est dû à l'élargissement de la bande passante $\Delta\omega = \omega_0/Q$.

— Notion de point attracteur : point vers lequel le système évoluera pour tout un ensemble de conditions initiales.

— Infinité d'attracteurs ponctuels pour l'oscillateur amorti.

[3] p 725

— Lien entre irréversibilité et portrait de phase : si on change t en $-t$, cela revient à inverser l'axe des ordonnées. Ici l'axe des abscisses n'est pas un axe de symétrie, donc on est irréversible!

[4] p 163

Transition : Dans la réalité, un oscillateur sans amortissement n'existe pas. Cependant, il existe de nombreux systèmes qui oscillent de façon entretenue, par exemple le cur. Comment expliquer cela?

2 Oscillations entretenues

2.1 Considérations générales

— On veut faire apparaître deux caractéristiques essentielles :

[2] p 257

— l'amorçage des oscillations,

— la stabilisation de l'amplitude en régime permanent.

— On souhaite avoir un cycle bien défini : l'équation ne peut être linéaire, sans quoi toute homothétie du cycle dans l'espace des phases serait aussi une solution. On recherche donc une modélisation par une équation *non linéaire*.

[3] p 727

— Pour un oscillateur donné, c'est le coefficient devant \dot{x} qui régit les échanges d'énergie avec l'extérieur. On se concentre donc sur la non-linéarité du terme en \dot{x} , plus que sur celle du potentiel. On pose l'équation générale

$$\ddot{x} + A(x)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

— Choix le plus simple pour $A(x)$:

$$A(x) = -a\omega_0 \left(1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right) = \varepsilon (x^2 - 1).$$

On ne met pas de terme en x car on souhaite conserver la symétrie de parité (un terme en x amplifierait un côté de l'oscillateur et pas l'autre). Il s'agit du modèle de Van der Pol.

Transition : Réalisation de ce modèle simple.

2.2 Oscillateur de Van der Pol

- On adimensionne l'équation en posant $X = x/x_0$. Il vient

$$\ddot{X} + \varepsilon(X^2 - 1)\dot{X} + X = 0.$$

- On comprend que cela correspond à une amplification pour $X < 1$ ($x < x_0$) et un amortissement pour $X > 1$.

Expérience

Plaquette de l'oscillateur de Van der Pol ([5])

- Préciser le rôle de chaque partie de la plaquette, tout en utilisant les schémas électriques sur slides.
 - Rôle du paramètre ε : il contrôle directement la non-linéarité. S'il est faible, on a des oscillations quasi-sinusoïdales ; s'il devient trop grand on rentre dans un régime d'oscillations à relaxation.
 - Montrer le portrait de phase : il permet de conclure sur le caractère sinusoïdal ou non des oscillations.
 - On a un cycle limite : cas particulier d'attracteur ([3] p 729). Ce cycle ne dépend *que des propriétés de l'oscillateur*.
 - Montrer la FFT sur l'oscilloscope ou sur le programme Python.
- Se référer à [2] p 260 pour ce qui suit. Admettre les résultats, ou les démontrer si on a le temps.
 - Naissance des oscillations contrôlée par ε .
 - Amplitude contrôlée par les non-linéarités.
 - Apparition d'harmoniques, elles aussi contrôlées par les non-linéarités.
 - Ces phénomènes sont présents dans de nombreux oscillateurs en électronique. Les équations qui les régissent sont cependant plus ou moins complexes, car on peut avoir des composants comme les AO qui amènent des saturations difficiles à décrire.
 - L'oscillateur de Van der Pol n'est pas qu'un modèle : il permet de décrire le passage du courant dans certaines lampes d'amplis anciens (c'est ainsi qu'il a été découvert, par Balthasar van der Pol, dans les labos de Philips).

Conclusion

- Insister de nouveau sur la puissance des portraits de phase, qui permettent de comprendre de nombreuses propriétés d'un oscillateur sans avoir la solution de l'équation différentielle à tout temps t .
- Ouvrir sur le chaos, notamment dans les attracteurs étranges : deux points séparés initialement par une distance infinitésimale verront cette distance croître exponentiellement, alors qu'ils resteront bien dans l'attracteur ! Voir les premiers chapitres de [1] pour plus de détails.

Remarques

Pour un oscillateur forcé, l'espace des phases est de dimensions 3 : l'équation $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F \cos \omega t$ est réécrite sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega_0^2 x - \gamma v + F \cos \phi \\ \dot{\phi} = \omega \end{cases}$$

On a donc les trois degrés de liberté nécessaires à l'apparition d'une transition vers le chaos.

Remarques

Pour plus de détails sur les systèmes dynamiques, le nombre de degrés de liberté nécessaires à l'apparition de transitions vers le chaos, les systèmes intégrables, etc., voir le cours « Transition vers le chaos » de Vincent Croquette (<https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00092949>).