

Mécanique des fluides

Jean-Marc Brun

August 8, 2008

Contents

1	Chapter 1 Introduction à la Mécanique des Fluides et aux équations de Navier-Stokes	3
1.1	Introduction	3
1.2	Préambule-Résumé-Objectifs	4
1.3	Principe de déterminisme de Newton	4
1.4	Introduction sur la turbulence	4
1.4.1	Où observer la turbulence ?	4
1.4.2	Les caractéristiques du phénomène	6
1.5	Contenu et Cadre du cours	7
1.6	Bilan	8
2	Mécanique des fluides et Cinématique	9
2.1	Cinématique et dynamique des fluides : un bref aperçu de mécanique des fluides	9
2.1.1	Les deux points de vue sur la turbulence : Description Lagrangienne et Eulerienne	9
2.1.2	Vitesse et accélération	11
2.1.3	Dérivée matérielle et accélération	11
3	Equations de Navier-Stokes	14
3.1	Incompressibilité ou conservation du volume	14
3.2	Conservation de la masse	17
3.3	Etude des déformations	20
3.3.1	Conservation de la quantité de mouvement	21
3.4	Le tenseur des contraintes	23
3.5	Fluide newtonien	29
3.6	1.2. Les inconnues du problème	29
3.7	1.3. Les équations de Navier-Stokes compressibles	29
3.8	1.4. Les equations de Navier-Stokes incompressibles	30
3.8.1	Conservation de l'énergie	31
3.9	Condition limites	33
3.10	Conditions initiales	34
3.11	Equations de Navier-Stokes	35
3.11.1	Cas d'un fluide incompressible	36
3.12	Les équations de Navier-Stokes.	37
3.12.1	La transition du laminaire au turbulent, Nombre de Reynolds et turbulence	39
3.12.2	Quelques notions sur les instabilités et les tourbillons	41
3.13	Equation du tourbillon (ou de la vorticité)	41

4	Modèles de turbulence	45
4.1	Les principales modélisations de la turbulence	45
4.1.1	La simulation numérique directe (DNS)	45
4.1.2	RANS	45
4.1.3	La simulation des grandes échelles (LES)	49
4.1.4	Equations de la simulation des grandes échelles	50
4.1.5	Smagorinsky	52
4.2	Modélisation des écoulements turbulents	52
4.2.1	Equations moyennées	52
4.2.2	Filtre : l'opérateur de Reynolds	53
4.2.3	Exemples de filtres	54
4.2.4	Application filtre	55
4.3	Equations de la simulation moyennée	56
4.3.1	Théorie de Kolmogorov (K41)	57
5	Aspects Théoriques	62
5.1	Chapitre 3 Existence d'une solution	62
5.1.1	Position du problème	62
5.1.2	3.2 Existence d'une solution	63
5.1.3	3.3 Pression	66
5.2	Chapitre 4 Application à un modèle de SGE	68
5.2.1	4.1 Choix du modèle	68
5.2.2	4.2 Existence d'une solution	68
5.2.3	4.3 Conclusion	71
5.2.4	Adimensionalisation	72
6	Aspects Numériques	73
6.1	Simulation numérique des écoulements turbulents	73
6.2	Quelques notions sur la mise en oeuvre numérique	73
6.2.1	Algorithmes de calcul	73
6.2.2	Les calculs parallèles	75

Chapter 1

Chapter 1 Introduction à la Mécanique des Fluides et aux équations de Navier-Stokes

1.1 Introduction

Les équations de Navier-Stokes (ENS) forment un modèle mathématique dérivé à partir des **lois de conservations** qui décrit l'**écoulement d'un fluide**. Ce modèle est bien accepté et utilisé par les ingénieurs et les physiciens.

Il est navrant de constater que de nombreux mathématiciens travaillent sur les équations de Navier-Stokes dédaignent la mécanique des fluides. Ignorant sciemment les principes physiques dont découlent les équations, ils espèrent toutefois en percer le mystère. Vaine entreprise. Ils ont les mains pures mais ils n'ont pas de mains. Evidemment les ingénieurs moquant les difficultés mathématiques de ces équations et considérant l'analyse fonctionnelle comme un luxe gratuit dénué d'intérêt ne sont pas à meilleure enseigne. En quelque sorte, ils avancent les yeux volontairement bandés. Nous allons tenter de naviguer entre ces deux écueils.

Les ENS sont un exemple d'EDP multidimensionnelle ayant une signification physique profonde, présentant une non-linéarité (quadratique...), dont les inconnues (vecteur vitesse et scalaire pression) sont de nature très différentes. Elles fournissent un terrain d'apprentissage privilégié de techniques fructueuses pour bien d'autres EDP¹. Si les écoulements plans sont bien connus, dans le cas de l'espace de nombreuses questions demeurent dont le fameux problème à 1M\$ du Clay insitute[14].

Les **écoulements turbulents** interviennent au sein de nombreux phénomènes naturels. Leur connaissance s'avère utile, par exemple, en météorologie, en aéronautique ou en océanographie. Les équations régissant leur comportement contiennent des termes non-linéaires rendant leur évolution à un instant $t + dt$ très sensible à de petites variations à l'instant t . Autrement dit une connaissance détaillée de l'écoulement à l'instant t est nécessaire pour prédire sa situation à l'instant $t + dt$.

Plus précisément, dans le cas d'un écoulement turbulent, statistiquement homogène et isotrope, le rapport entre les plus grandes et les plus petites échelles actives L/l est de l'ordre de grandeur de $Re^{3/4}$, où le nombre de Reynolds Re rend compte du rapport des forces d'inertie et des forces de viscosité.

La connaissance de la situation à l'instant t en un nombre de points de l'ordre de $(Re^{3/4})^3 = Re^{9/4}$ est donc nécessaire, en dimension 3, pour prédire à l'instant $t + dt$ la situation d'un écoulement dans un volume de diamètre L .

De nombreux domaines font intervenir de grands nombres de Reynolds (10^{12} à 10^{20} en astrophysique), rendant ainsi le calcul en tous les points du maillage hors de portée de la puissance actuelle et même

¹pour un exemple en traitement d'image, voir [8]

prédictible des calculateurs. D'autres approches s'avèrent alors nécessaires pour ramener le nombre de degré de libertés du système étudié à un ordre de grandeur rendant possible la résolution numérique.

Les deux principales approches utilisées pour réduire ce nombre de degré de liberté sont le calcul se limitant à la **moyenne statistique de la solution (RANS** pour Reynolds Averaged Navier-Stokes equation) et la **Simulation des Grandes Echelles (SGE)** modélisant l'effet des petites échelles sur les grandes.

1.2 Préambule-Résumé-Objectifs

Ce cours volontairement succinct poursuit les buts suivant :

- être assimilable en sept semaines par un étudiant de DEA
- être assimilable en sept jours par un mathématicien désireux de s'initier aux équations de Navier-Stokes (ENS)
- servir de tremplin pour une thèse

Il existe relativement peu de traités "complet" sur la théorie des Equation de Navier-Stokes, cet opuscule, en établissant un choix délibéré ne vise pas l'exhaustivité, il vise plutôt la simplicité² Les notions sont présentées sans afféterie, sans technicité inutile, mais nous avons cherché à présenter l'essentiel, en insistant sur l'interprétation mécanique.

Une spécificité du texte est la présence de commentaire heuristiques, signalés par le signe * A méditer : Nous pensons en effet que les mathématiques ne se livrent pas seulement par la déduction ou la démonstration, mais surtout par l'interprétation vivante, qui ne s'élabore que lentement, progressivement. Ces commentaires ne sont pas destinés à être saisi d'emblée, ne doivent pas forcément être compris d'ailleurs, ils sont simplement proposés, et non imposés, pour faciliter l'appropriation de la théorie. Ce document est une première version, l'auteur est très reconnaissant pour toute erreur, coquille ou commentaire qu'on voudra bien lui adresser à brun.cemagref@orange.fr.

1.3 Principe de déterminisme de Newton

Connaissant a l'instant ant $t = t_0$ l'état de l'écoulement ainsi que l'ensemble des conditions limites du problème considéré, il n'existe qu'un seul état réalisable pour tous les instants $t > t_0$.

→ Existence et unicité de la solution mathématique, notion de probleme bien posé.

Remarques : → En pratique l'unicité de la solution n'est pas vérifiée.

1.4 Introduction sur la turbulence

1.4.1 Où observer la turbulence ?

La turbulence est un phénomène présent de manière très facilement visible dans la nature :

- dans l'air : les rafales de vent, les mini-tornades dans le désert, le panache de fumée des grandes cheminées, turbulence atmosphérique (tourbillons de taille > 1000 km)...
- dans l'eau : le lait dans le café, les remous dans les rivières...
- dans la mer : le gulf stream
- dans la terre : le mouvement des plaques continentales

²"Délire laborieux et appauvrissant que de composer de vastes livres, de développer en cinq cent pages une idée que l'on peut très bien exposer oralement en quelques minutes. Mieux vaut feindre que les livres existent déjà et en offrir un résumé, un commentaire." JL Borges, Fictions, Gallimad, trad. de Ficciones, SUR, Bueno Aires, 1944

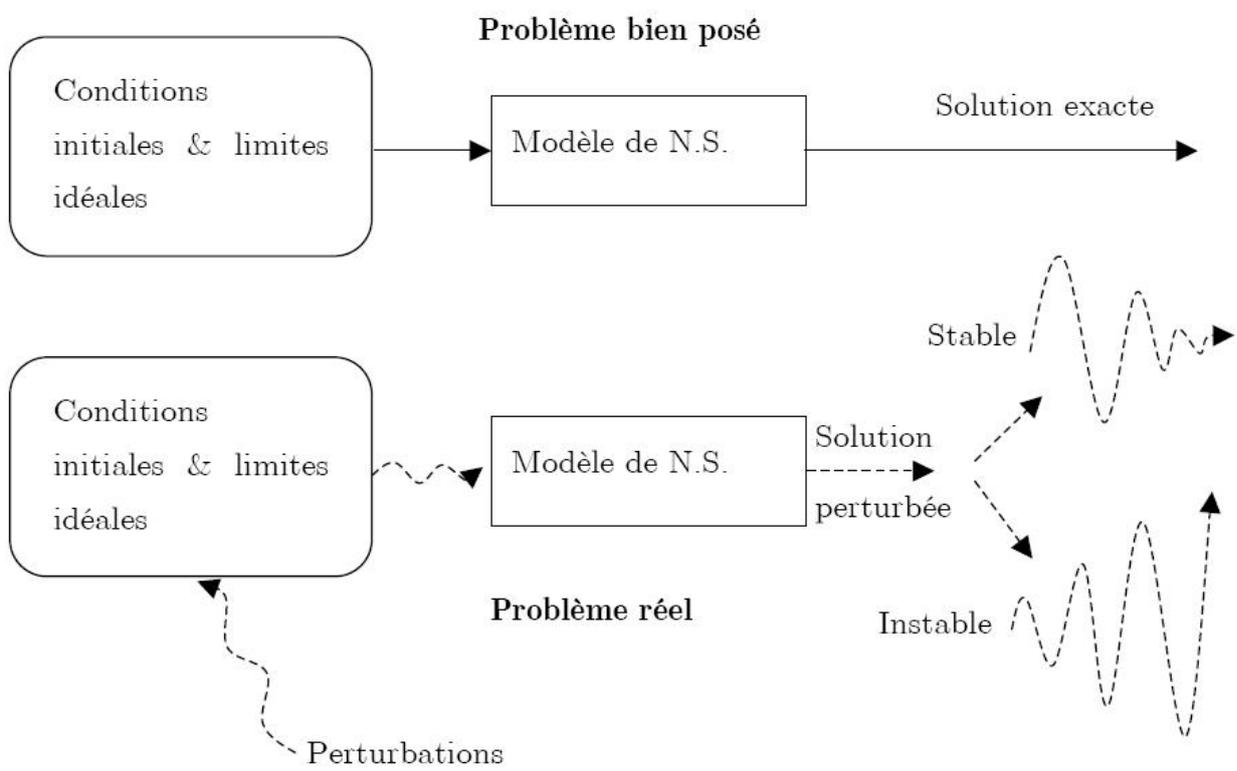


Figure 1.1: Schéma d'analyse de stabilité d'un écoulement en réponse à une perturbation de conditions initiales et/ou aux limites

- dans l'espace : l'atmosphère externe de Jupiter

Il est également très présent dans les écoulements industriels :

- aérodynamique externe des voitures, des camions
- sillage des avions
- aérodynamique interne dans les moteurs (combustion, etc.)

1.4.2 Les caractéristiques du phénomène

Les caractéristiques principales de la turbulence sont les suivantes

- **incertitude** (de mesure, de calcul)
- grande **variété des échelles spatiales** (des tailles de tourbillons) dans l'écoulement
- **caractère aléatoire**, désordonné, chaotique, fluctuant ; redistribution des fluctuations dans l'espace
- **imprévisibilité**, non déterminisme, grande sensibilité aux conditions aux limites : si il existe de très petites différences à l'état initial, elles vont s'amplifier sous l'effet d'interactions non linéaires (cf. exemple bien connu de la météorologie qui n'est pas prévisible à plus de quelques jours, car on ne connaît jamais suffisamment précisément l'état initial). Les cyclones par exemple se déclenchent à quelques dixièmes de degrés de température près. Ceci est valable aussi bien en calcul qu'en essai.
- **augmentation du mélange** : forte diffusion des quantités transportées (exemple : le lait et le café, la température dans un fluide, la fumée, la quantité de mouvement, etc.)
- très **large gamme de longueur d'ondes** : tourbillons présents de tailles très variées (pour un avion : de quelques microns à quelques centaines de mètres, pour la turbulence atmosphérique : de quelques millimètres à quelques milliers de kilomètres)
- le **bruit** : les écoulements turbulents sont bruyants du fait des sources acoustiques créées par les fluctuations de pression dans le fluide (cf l'expérience du tube de Poiseuille). Cela peut générer de l'inconfort dans certains cas (exemple le bruit des rétroviseurs extérieurs des véhicules).

Les effets de la turbulence sont parfois positifs, parfois négatifs :

- effets positifs : l'augmentation du mélange permet d'améliorer la combustion par exemple, d'améliorer la portance des avions, de réduire la température
- effets négatifs : diffusion de la pollution

Et pourtant, certaines grandeurs macroscopiques sont bien reproductibles. Par exemple :

- traînée et portance d'une voiture dans une soufflerie donnée
- débit d'une conduite à haut Reynolds
- puissance d'un moteur à combustion
- température maximale des disques de frein
- durée de persistance du sillage d'un avion de ligne
- portance et traînée d'un avion

1.5 Contenu et Cadre du cours

Le thème du cours est une introduction à l'analyse mathématique des écoulements de fluides newtoniens incompressibles. Le résultat principal qui sera présenté concerne l'existence d'une solution faible pour les équations de Navier-Stokes. Comme préliminaire technique, nous introduirons divers outils issus des théories de l'intégration vectorielle et des distributions vectorielles.

Ce cours présuppose des rudiments d'analyse fonctionnelle, ainsi qu'exposés par exemple dans [19,17]. En particulier, les résultats classiques sur les espaces de Sobolev sont utilisés sans complexes. Une bibliographie suggère des compléments au texte.

Nous allons situer dans ce document les problématiques liées à l'étude des écoulements turbulents puis nous présenterons les principaux modèles élaborés.

Dans le chapitre ??2 nous montrons comment les équations de Navier-Stokes, sont dérivées à partir des **lois de conservation de la masse** et de **conservation de la quantité de mouvement**. Préalablement nous introduisons des notions utiles de cinématique. Dans certains chapitres la rigueur mathématique est mise au second plan.

Nous aborderons ensuite l'existence de solutions aux équations de Navier-Stokes avant de nous intéresser plus particulièrement à un modèle de Simulation des Grandes Echelles au sein duquel la fermeture des équations moyennées est accomplie par l'approximation $\nabla \cdot (\overline{uu}) \approx \nabla \cdot (\overline{u\bar{u}})$ et pour lequel on utilisera le filtre différentiel $\bar{u} = A_\delta^{-1}u$, où $A_\delta \bar{u} = -\delta^2 \Delta \bar{u} + \bar{u}$.

Etude des écoulements turbulents

- Concepts généraux de mécanique des fluides
- Transition, apparition de la turbulence
- Turbulence développée, exemples classiques
- Outils expérimentaux et statistiques
- Equations de Reynolds moyennées
- Couche limite turbulente
- Turbulence homogène
- Méthodes numériques

Thèmes abordés

- Le modèle mathématique
- La difficulté de résolution des équations
- La complexité de la solution et du phénomène physique associé
- Le principe de décomposition de la solution et la modélisation statistique d'une partie de celle-ci
- L'alternative numérique

Aspects non traités

- Les effets d'une physique plus complexe (effets d'action à distance, fluides réactifs, effets d'anisothermie...)
- Les effets de compressibilité (chocs, acoustique,...)

1.6 Bilan

- - on dispose d'un modèle mathématique complet et de très bonne qualité
- - la validité des équations est très large, en permettant de couvrir la très grande majorité des écoulements géophysiques ou industriels, qu'ils soient turbulents ou non

Les équations de la turbulence sont donc connues. MAIS

- . la résolution analytique de ces équations n'est pratiquement jamais réalisable . les non-linéarités présentes dans les équations sont principalement à l'origine des difficultés pour obtenir une solution analytique
- . les rares solutions analytiques disponibles peuvent traduire un état d'équilibre instable, ce qui supprime tout réalisme
- . les solutions des problèmes d'intérêt sont presque toujours instationnaires
- . de nombreuses méthodes numériques pourraient permettre la résolution des équations dans des cas réalistes si la puissance des ordinateurs était plusieurs milliards (de milliards'c) de fois supérieure à celle d'aujourd'hui
→ coûts de calcul encore inaccessibles pour longtemps
- . Des solutions correctes sont pourtant envisageables avec un certain nombre de simplifications.

Chapter 2

Mécanique des fluides et Cinématique

2.1 Cinématique et dynamique des fluides : un bref aperçu de mécanique des fluides

Pour commencer une définition :

Définition 2.1.1 (Fluide). *Un est un milieu continu dans lequel les molécules sont ‘libres de se mouvoir les unes par rapport aux autres’ (milieu matériel pouvant être déformé à partir d’efforts dont la valeur peut être aussi réduite que l’on veut)*

Parmi les fluides, on distingue les liquides et les gaz, nous verrons plus loin que la notion d’*incompressibilité* clarifie les choses. Cette définition est vague, il faudrait invoquer la physique statistique et la notion de ‘*libre parcours moyen*’ pour une définition précise.

Remarque. On peut d’ailleurs déduire les équations de la mécanique des fluides des **équation de Boltzmann** (Cf H. Grad). Toutefois la démonstration laisse encore à désirer d’un point de vue mathématique, voir la théorie des équations cinétiques (Bardos, Perthame, Golse...).¹ \diamond

Mentalement, il faut se représenter un fluide comme la réunion de particules fluides de taille suffisamment petites pour être assimilées à des points matériels de l’espace \mathbb{R}^3 , mais suffisamment grosse par rapport à l’échelle atomique. Les physiciens parlent de **V.E.R.** (volume élémentaire représentatif).

Nous décrirons l’état du fluide par :

- le domaine occupé par le fluide, supposé ouvert connexe noté Ω . On considère un ensemble de particules, qui, à l’instant $t = 0$ occupe un espace $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$.
- le vecteur vitesse du courant au point $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et à l’instant t noté $\mathbf{u}(x, t)$
- la pression (scalaire) du fluide au point $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et à l’instant t noté $p(x, t)$
- la densité (scalaire) du fluide au point $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et à l’instant t noté $\rho(x, t)$

2.1.1 Les deux points de vue sur la turbulence : Description Lagrangienne et Eulerienne

Les scientifiques ont alors deux points de vue possibles :

¹La justification des équations de mécanique des milieux continus à partir de l’équation de Boltzmann est l’objet du sixième problème de Hilbert. La réponse la plus complète à ce jour est l’article : The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels, Françoise Golse, Laure Saint-Raymond, *Inventiones Mathematicae*, vol 155, 2004, pp 81-161.

- soit chercher à moyenner directement la turbulence, à lisser le phénomène : c'est le point de vue statistique. On cherche uniquement les grandeurs moyennes, et l'énergie cinétique turbulente moyenne. C'est une vision "figée" ou "rationnelle" de la turbulence, souvent celle des numériciens.
- soit chercher à extraire la cohérence dans la turbulence : c'est le point de vue des "structures cohérentes". On cherche alors l'évolution des structures qui persistent au milieu du chaos, celles qui vont déterminer la physique de l'écoulement. C'est une vision instationnaire, fluctuante et plus expérimentaliste de la turbulence.

Chaque particule est repérée par sa position $\mathbf{X} \in \Omega_0$. Les particules sont en mouvement. A l'instant t , le domaine Ω_0 s'est déplacé en $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$. Au cours du temps, chaque particule peut être repérée par :

- (i) La position $\mathbf{X} \in \Omega_0$ qu'elle avait initialement (configuration de Lagrange)
- (ii) La position $\mathbf{x} \in \Omega_t$ qu'elle occupe à l'instant t (configuration d'Euler)

Description eulérienne:

* *A méditer* : A chaque instant fixé t , les vitesses du courant donnent un champ de vecteurs . Les lignes du champ ou caractéristiques associées sont appelées *lignes de courants*. Ce sont les solutions de l'ODE :

$$\frac{d\xi}{ds} = \mathbf{u}(\xi(s), t) \quad (2.1)$$

C'est l'approche usuelle, selon le point de vue d'Euler.

On se place en un point $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^3$ fixé et on se réfère aux particules qui passent en ce point (à deux instants différents, la particule qui passe est a priori différente). Les variables utilisées sont appelées variables d'Euler. Il s'agit de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et t . La fonction qui permet de retrouver les particules observées est notée g :

$$\mathbf{X} = g_{Eul}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

Description lagrangienne:

On se réfère à chacune des particules que l'on suit dans son mouvement. Pour cela, on utilise les variables lagrangiennes $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ et t . Une autre façon de voir, selon Lagrange, est de s'intéresser aux trajectoires individuelles des "particules fluides" étiquetées en fonctions de leur position d'origine \mathbf{X} à un instant initial. La trajectoire d'une particule est alors une courbe paramétrée $t \mapsto \mathbf{x} = \varphi_{Lag}(\mathbf{X}, t)$ telle que $\varphi_{Lag}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$.

La position des particules au temps t est donnée par la fonction f :

$$\mathbf{x} = \varphi_{Lag}(\mathbf{X}, t) \quad (2.3)$$

Remarque : Les équations de Navier Stokes sont de type différent selon les cas : à Reynolds infini (Euler) : elles sont hyperboliques

Lien entre les deux descriptions:

Une propriété physique ϕ associée aux particules, peut être représentée par $\tilde{\phi}(\mathbf{X}, t)$ ou $\phi(\mathbf{x}, t)$. Dans le premier cas il s'agit de la description lagrangienne, $\tilde{\phi}(\mathbf{X}, t)$ définit la valeur de la propriété ϕ pour la particule \mathbf{X} et à l'instant t . Dans le second cas, $\phi(\mathbf{x}, t)$ définit la valeur de la propriété ϕ au point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ et à l'instant t .

On a les correspondances suivantes:

$$\tilde{\phi}(\mathbf{X}, t) = \phi(\varphi_{Lag}(\mathbf{X}, t), t) \quad (2.4)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \tilde{\phi}(g_{Eul}(\mathbf{x}, t), t). \quad (2.5)$$

Etant donnés les applications $X \mapsto \varphi_{Lag}(\mathbf{X}, t) = \varphi_t(X)$ ($\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$) supposées suffisamment régulières, pour revenir au point de vue eulérien, *en théorie* il suffit de les inverser.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}), t). \quad (2.6)$$

$$\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}) = g_{Eul}(\mathbf{x}, t) \quad (2.7)$$

Remarque. Il ne faut pas confondre trajectoires et lignes de courants. Sauf dans le des écoulements stationnaire, i.e $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x})$, les deux notions sont différentes. \diamond

Pour construire les applications trajectoires $\varphi_{Lag}(\mathbf{X}, t)$, à partir du point de vue eulérien, il faut résoudre l'ODE

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \varphi_{Lag}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\varphi_{Lag}(\mathbf{X}, t), t) \quad (2.8)$$

avec la condition initiale $\varphi_{Lag}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$.

Remarque. C'est une EDO et non pas une EDP, \mathbf{X} joue le rôle de paramètre. \diamond

Nous utiliserons principalement le point de vue d'Euler, mais parfois il sera utile de recourir au point de vue de Lagrange.

$\frac{d\xi}{ds} = \mathbf{u}(\xi(s), t)$	Euler : lignes de courant temps paramètre, espace variable vecteur vitesse :
$\uparrow\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow\downarrow$
	Lagrange : trajectoires espace paramètre, temps variable courbe paramétrée $t \mapsto \mathbf{x} = \varphi_{Lag}(\mathbf{X}, t)$ telle que $\varphi_{Lag}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$ vecteur vitesse :
	$\frac{\partial \varphi_{Lag}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\varphi_{Lag}(\mathbf{X}, t), t)$

Table 2.1:

En un point de l'espace on sait ce qu'il se passe pour tout temps (espace paramètre, temps variable) : trajectoire \mathbf{x} / Lagrange.

En un temps donné on sait ce qu'il se passe en chaque point de l'espace (temps paramètre, espace variable) : ligne de courant \mathbf{X} / Euler.

2.1.2 Vitesse et accélération

Vitesse

* *A méditer* : Imaginer par exemple que vous suivez la trajectoire d'un grain de pollen emporté par la rivière. Selon ce point de vue, lorsque $t \mapsto \varphi(\mathbf{X}, t)$, $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3)$ est dérivable, le vecteur vitesse est simplement :

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi_{Lag}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.9)$$

Cela donne l'expression lagrangienne de la vitesse.

L'expression eulérienne s'obtient alors en utilisant (1.2). On a

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \varphi_{Lag}}{\partial t}(g_{Eul}(\mathbf{x}, t); t) \quad (2.10)$$

2.1.3 Dérivée matérielle et accélération

Dérivée particulière

$$\Gamma(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \varphi_{Lag}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

◇

Pour l'accélération, en variables lagrangiennes, on a

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) : \quad (2.12)$$

La formule est bien plus simple dans le cadre lagrangien.

En utilisant (1.2) on obtient aussi

$$\tilde{\gamma}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(g(\mathbf{x}; t); t) : \quad (2.13)$$

Cette dernière expression est mixte puisqu'elle utilise les variables d'Euler ainsi que la vitesse lagrangienne.

L'accélération des (ou de la...) particules fluides au point \mathbf{x} à l'instant t est donnée par

$$\gamma(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \quad (2.14)$$

Preuve : 1. *Considérons une particule fluide \mathbf{X} que l'on suit dans son mouvement $t \mapsto x(t) = \varphi_{Lag}(\mathbf{X}, t)$. L'accélération de cette particule est par définition*

$$\frac{d\mathbf{u}(x(t), t)}{dt}. \quad (2.15)$$

Le théorème de différenciation des fonctions composées donne alors :

$$\frac{d\mathbf{u}(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k(t)}{dt} \quad (2.16)$$

Il suffit de noter que $\frac{dx_k(t)}{dt} = u_k$. ⊗•

Remarque. Diverses notation plus ou moins heureuses sont utilisées : la plus courante² est $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$. Cela vient du fait que *formellement* $\mathbf{u} \cdot \nabla = \sum_k u_k \frac{\partial}{\partial x_k}$. Mais $\nabla \mathbf{u}$ est une matrice, et si l'on lit $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ il faut faire très attention... Car en fait $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ au sens usuel du produit matrice vecteur et pas $\mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}$. On appelle le terme non linéaire *terme advectif* ou *inertiel*.

* *A méditer* : essayer de comprendre le pourquoi de cette dénomination. La difficulté majeure du problème vient ce terme non linéaire. ◇

On notera et on appellera

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (2.17)$$

la dérivée matérielle. De sorte que

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{df(\varphi(\mathbf{X}, t), t)}{dt} \quad (2.18)$$

représente bien la dérivée d'une fonction attachée à une particule.³

²malheureusement pas très heureuse

³Certains auteurs l'appellent d'ailleurs dérivée particulaire.

La dérivée particulière d'une grandeur ϕ est le taux de variation temporelle de cette grandeur en suivant une particule à laquelle elle est attachée. On note $d\phi/dt$ avec le sens suivant:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \text{ en variable de Lagrange} \quad (2.19)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + v_j(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \text{ en variable d'Euler. (1.3)} \quad (2.20)$$

Dans la relation (1.3), nous avons utilisé la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés. Dans la suite nous adopterons cette convention sans plus le rappeler. On note par Dv le tenseur des gradients de vitesse, i.e.

$$Dv = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{ij} . \quad (2.21)$$

En utilisant (1.3) nous obtenons l'expression eulérienne de l'accélération :

$$\gamma(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial v}{\partial t} + \underbrace{Dv \circ v}_{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \cdot v_j} . \quad (2.22)$$

Dérivée particulière d'une intégrale

On considère ici une grandeur physique K qui est attachée à un ensemble (en mouvement) $\omega(t)$ de particules. La grandeur K est définie à l'aide d'une fonction k donnée, par une intégrale sur $\omega(t)$:

$$K(t) = \int_{\omega(t)} k(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} : \quad (2.23)$$

On suppose que k et v sont continues dans $\Omega \times (0, T)$, et admettent des dérivés partielles bornées. On obtient alors:

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\omega(t)} \left(\frac{\partial k}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \text{div}(k(\mathbf{x}, t)v(x, t)) \right) d\mathbf{x}. \quad (2.24)$$

Chapter 3

Equations de Navier-Stokes

3.1 Incompressibilité ou conservation du volume

La divergence du champ \mathbf{u} est

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (3.1)$$

Soit $\mathcal{V}_t = \phi_t(\mathcal{V})$ le volume matériel correspondant. On dit que l'écoulement conserve le volume ssi

$$|\mathcal{V}_t| = |\mathcal{V}|. \quad (3.2)$$

Comme par changement de variables :

$$|\mathcal{V}_t| = \int_{\mathcal{V}_t} dx = \int_{\mathcal{V}} |J(\varphi_t)| dX \quad (3.3)$$

la conservation du volume équivaut à $|J(\varphi_t)| \equiv 1$. La propriété de conservation du volume (on dit aussi que l'écoulement est isochore) se traduit simplement en terme de divergence.

Proposition 3.1.1 (Ecoulement isochore). *L'écoulement est isochore si et seulement si le champ de vitesse est incompressible :*

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (3.4)$$

Plus précisément, si $J(\varphi_t)$ désigne le jacobien de $\varphi_t = \varphi(\cdot, t)$ il satisfait l'équation différentielle d'"expansion du volume" :

$$\frac{dJ(\varphi_t)}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot J(\varphi_t) \quad (3.5)$$

avec la condition initiale $J(0) = 1$.

Preuve. Cette preuve est tirée du cours de F. Golse [3] et repose sur le joli lemme suivant.

Lemme 3.1.2 (Lemma 1). *L'application $\det : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \det A \in \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 . Sa différentielle en tout point $A \in GL_n(\mathbb{R})$ est donnée par*

$$d(\det)(A) \cdot M = \det A \cdot \operatorname{trace}(A^{-1}M) \quad (3.6)$$

Commençons par prouver le lemme. l'application \det est polynomiale sur $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$ donc C^∞ . D'autre part, la matrice A étant inversible

$$\det(A + \epsilon M) = \det A \det(I + \epsilon A^{-1}M) \quad (3.7)$$

$$= \det(A) \cdot \epsilon^n \det\left(\frac{1}{\epsilon}I + A^{-1}M\right) \quad (3.8)$$

Utilisons alors le polynômes caractéristique de A :

$$\det(\lambda \cdot 3I - A) = \lambda^n - \text{trace}A \cdot \lambda^{n-1} + O(\lambda^{n-2}) \quad (3.9)$$

$$\det(A + \epsilon M) = \det(A)\epsilon^n + \frac{1}{\epsilon^n} + \text{trace}(A^{-1}M)\frac{1}{\epsilon^{n-1}} + O\left(\frac{1}{\epsilon^{n-2}}\right) \quad (3.10)$$

Finalement

$$\det(A + \epsilon M) = \det(A) \left(1 + \epsilon \text{trace}(A^{-1}M) + o(\epsilon)\right). \quad (3.11)$$

Le lemme est ainsi démontré. \circ

La preuve du théorème s'en déduit aisément : Notons pour simplifier $J(t) = J(\varphi_t)$ et $\nabla_X \varphi = \frac{\partial \varphi_i(\cdot, t)}{\partial X_j}$ en utilisant la différentielle d'une fonction composée

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d \det \left(\frac{\partial \varphi_i(\cdot, t)}{\partial X_j} \right)}{dt} = J(t) \text{trace}(\nabla_X \varphi)^{-1} \frac{\partial \nabla_X \varphi}{\partial t} \quad (3.12)$$

Remarquons que (en supposant l'écoulement régulier)

$$\frac{\partial \nabla_X \varphi}{\partial t} = \nabla_x \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nabla_X \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \quad (3.13)$$

Par le théorème de différenciation composée (avec des notations évidentes) :

$$\nabla_X \mathbf{U}(X, t) = \nabla_x \mathbf{u} \cdot_X \varphi. \quad (3.14)$$

D'où

$$\frac{dJ}{dt} = J(t) \text{trace}(\nabla_X \varphi)^{-1} \cdot \nabla_x \mathbf{u} \cdot \nabla_X \varphi \quad (3.15)$$

La propriété fondamentale d'invariance par conjugaison de la trace donne enfin

$$\frac{dJ}{dt} = J(t) \cdot \text{trace}(\nabla_x \mathbf{u}) \quad (3.16)$$

Il reste à remarquer que $\text{trace}(\nabla_x \mathbf{u}) = \text{div} \mathbf{u}$. $\diamond \quad \square$

Remarque. B.Dacorogna m'a fait remarquer qu'on peut aussi rattaché l'équation différentielle d'expansion du volume à la propriété bien connue d'algèbre linéaire :

$$\det \exp A = e^{\text{Tr}A} \quad (3.17)$$

d'où l'on déduit par linéarité et continuité

$$\det \exp \int_0^t A(s) ds = e^{\int_0^t \text{Tr}A(s) ds} \quad (3.18)$$

Considérons alors $t \mapsto Y(t)$ matrice solution du système différentiel :

$$\dot{Y} = A(t)Y. \quad (3.19)$$

On sait que $\det Y(t) = \exp \int_0^t \text{Tr} A(s) ds \cdot \det Y(0)$ donc

$$\frac{d}{dt} \det Y(t) = \text{Tr} A(t) \cdot \det Y(t) \quad (3.20)$$

Il suffit alors d'appliquer cette formule à $Y(t) = \frac{\partial \phi_i(\cdot, t)}{\partial X_j} = \nabla_X \varphi$ et $A(t) = \nabla_x u$. \diamond

Une application fondamentale du résultat (1.1) est le théorème du transport qui permet de dériver les intégrales sur des domaines matériels :

Theorème 3.1.3 (Théorème de transport). *Soit \mathcal{V} un ouvert, et $\mathcal{V}_t = \phi_t(\mathcal{V})$ le volume matériel correspondant. soit f une fonction à valeur scalaire, on a*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f(x, t) dx = \int_{\mathcal{V}_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) (x, t) + \text{div}(f \cdot \mathbf{u})(x, t) dx = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{Df}{Dt}(x, t) + f \cdot \text{div} \mathbf{u}(x, t) dx \quad (3.21)$$

Preuve. La preuve est basée sur la formule de changement de variable pour se ramener à un domaine fixe et dérivation sous le signe somme.

$$\int_{\mathcal{V}_t} f(x, t) dx = \int_{\mathcal{V}} f(\varphi(\mathbf{X}, t), t) |J(t)| d\mathbf{X} \quad (3.22)$$

D'après l'équation différentielle (1.1), et la condition initiale évidente $J(0) = 1$ (puisque $\varphi(\cdot, 0) = Id$) on a

$$J(t) = \exp \int_0^t \text{div} \mathbf{u}(s) ds \quad (3.23)$$

donc $J(t)$ est toujours strictement positif et on peut enlever la valeur absolue donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \mathcal{V} f(\varphi(\mathbf{X}, t), t) J(t) d\mathbf{X} \quad (3.24)$$

en dérivant sous le signe \int (ce qui est légitime car dans ce chapitre les fonctions sont lisses) :

$$= \int_{\mathcal{V}} \mathcal{V} \frac{df(\varphi(\mathbf{X}, t), t)}{dt} J(t) d\mathbf{X} + \int_{\mathcal{V}} \mathcal{V} f(\varphi(\mathbf{X}, t), t) \frac{dJ(t)}{dt} d\mathbf{X} \quad (3.25)$$

Par définition

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{df(\varphi(\mathbf{X}, t), t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f. \quad (3.26)$$

De plus $\frac{dJ(t)}{dt} = \text{div} \mathbf{u} \cdot J(t)$. Il ne reste plus qu'à faire le changement de variable inverse pour revenir à une intégrale sur \mathcal{V}_t et à remarquer que $\mathbf{u} \cdot \nabla f + f \text{div} \mathbf{u} = \text{div}(f \cdot \mathbf{u})$ pour obtenir le résultat annoncé. $\otimes \bullet \quad \square$

Exercice 1 (loi de Biot-Savart). *Soit un domaine plan étoilé, montré que si \mathbf{u} est à divergence nulle alors il existe une fonction ψ appelée fonction de courant telle que $\mathbf{u} = \nabla^\perp \psi$. Dans ce cas, montrer que les lignes de courant sont les lignes de niveau¹ de ψ . Montrer que*

$$\Delta \psi = \omega. \quad (3.27)$$

En déduire la preuve formelle de la loi de Biot-Savart. Indication utiliser la solution fondamentale du Laplacien (dans \mathbb{R}^3 , $\Delta \frac{1}{4\pi r} = \delta_0$).

¹on dit aussi isovaleurs

La loi d'incompressibilité du fluide.

Un fluide est dit incompressible, lorsque tout sous ensemble de particules du fluide conserve un volume constant au cours de l'écoulement. Autrement exprimé :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} 1 dx = 0, \forall \omega(t) \subset \Omega_t. \quad (3.28)$$

En appliquant (1.5), nous obtenons donc

$$\int_{\omega(t)} \operatorname{div} \vec{v} dx = 0, \forall \omega(t) \subset \Omega_t, \quad (3.29)$$

d'où :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \forall t, \forall x \in \Omega_t \quad (1.20) \quad (3.30)$$

3.2 Conservation de la masse

Un principe fondamental de la mécanique des milieux continus est la conservation de la masse. Soit $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ la densité du fluide au point \mathbf{x} à l'instant t . la masse totale contenue dans un volume matériel \mathcal{V}_t est donnée par

$$m(\mathcal{V}_t) = \int_{\mathcal{V}_t} \rho d\mathbf{x} \quad (3.31)$$

D'après ce qui précède

$$\frac{dm(\mathcal{V}_t)}{dt} = \int_{\mathcal{V}_t} \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (3.32)$$

le volume \mathcal{V}_t étant arbitraire on obtient l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\rho \cdot \mathbf{u})(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (3.33)$$

Remarque. On peut obtenir directement ce résultat en raisonnant sur un volume fixe \mathcal{V} comme suit. D'une part

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\mathbf{x} \quad (3.34)$$

D'autre part la variation de masse ne peut provenir que des flux de masse à travers la paroi $\partial \mathcal{V}$ de \mathcal{V} .

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = - \int_{\partial \mathcal{V}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.35)$$

Il suffit alors d'intégrer par parties

$$\int_{\partial \mathcal{V}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}) d\mathbf{x} \quad (3.36)$$

Comme \mathcal{V} est arbitraire on obtient le résultat.²◇

²On notera que $t \mapsto \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ n'est alors pas constante, à moins que le fluide soit homogène, i.e. ρ soit constante. Ajoutons que, contrairement à une opinion assez répandue un fluide incompressible n'est pas nécessairement à densité constante (fluides dits stratifiés).

Conservation de la masse et conséquences

Soit $\omega(t) \subset \Omega_t$ un ensemble quelconque de particules. Sa masse est donnée par la formule

$$m(\omega(t)) = \int_{\omega(t)} \rho(x, t) dx, \quad (3.37)$$

où $\rho(x, t)$ désigne la densité au point x et à l'instant t .

La loi de conservation de la masse, se traduit alors par

$$\frac{d}{dt} m(\omega(t)) = 0, \forall \omega(t) \subset t. \quad (3.38)$$

En utilisant (1.5) cette équation devient

$$\int_{\omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho v) dx = 0, \forall \omega(t) \subset t \quad (3.39)$$

qui est encore équivalente à l'équation suivante, appelée équation de continuité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \forall \omega(t) \subset t \quad (3.40)$$

Considérons à présent une quantité physique Q attachée à l'ensemble $\omega(t)$, de la forme

$$Q(t) := \int_{\omega(t)} \rho B(x, t) dx. \quad (3.41)$$

La dérivée particulière de Q prend l'expression suivante:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\omega(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho B) + \operatorname{div}(\rho B v) dx \quad (3.42)$$

$$= \int_{\omega(t)} \left(\underbrace{B \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(\rho v) \right)}_{=0 \text{ par (1:10)}} + \rho \frac{\partial B}{\partial t} + \underbrace{\rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} B}_{= \frac{dB}{dt} \text{ par (1:3)}} \right) dx. \quad (3.43)$$

Nous voyons donc que l'on a la formule :

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} B(x, t) dx = \int_{\omega(t)} \rho \frac{dB}{dt} dx. \quad (3.44)$$

Les actions de contact sous l'hypothèse de Cauchy

Soit $\omega(t) \subset \Omega_t$ une région de fluide, délimitée par sa frontière $\partial\omega(t)$. On note par $\vec{\mathbf{n}}$ le vecteur normal extérieur défini en chaque points de $\partial\omega(t)$.

Sous l'hypothèse de Cauchy, on postule que $\Omega_t - \operatorname{antislash}\omega(t)$ agit sur $\omega(t)$ et que l'action peut être représentée par une densité de force $F(M, t, \vec{\mathbf{n}})$ sur la surface $\partial\omega(t)$. Cette densité ne dépend que de t , de $M \in \partial\omega(t)$ et de la normale $\vec{\mathbf{n}}$ en M , à $\partial\omega(t)$.

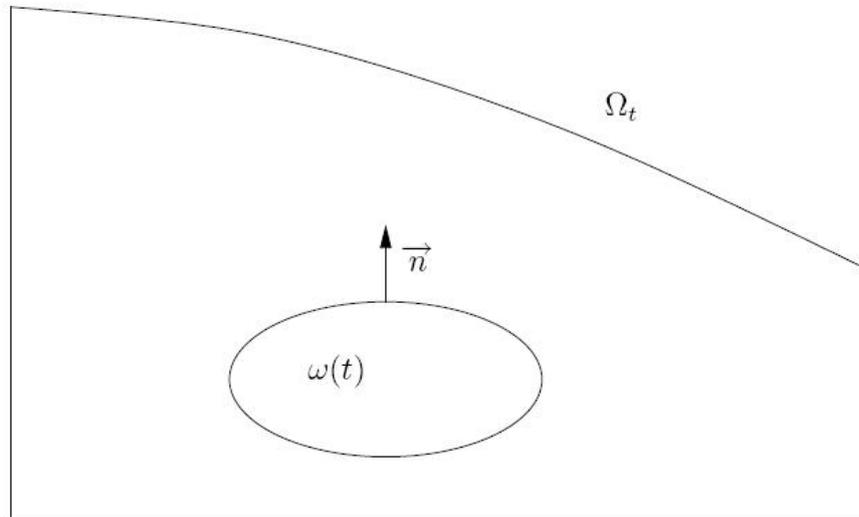


Figure 3.1: a

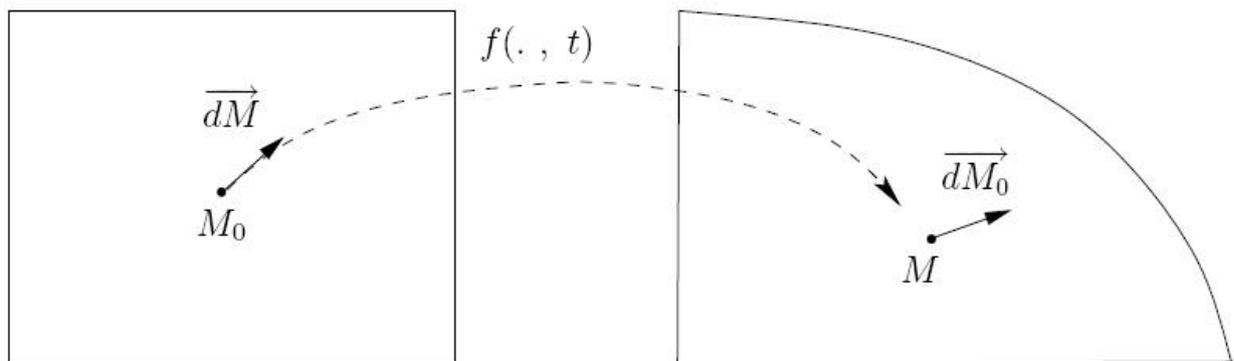


Figure 3.2: arr

3.3 Etude des déformations

On fixe un temps t et on étudie les déformations que Ω_0 a subi. Soit $d\vec{M}_0$ un vecteur infinitésimal qui a pour origine le point $M_0 \in \Omega_0$, de coordonnées X . Au temps t , $d\vec{M}_0$ a été transformé en $d\vec{M}$ comme représenté dans le schéma ci-dessous $M_0, d\vec{M}_0 \rightarrow f(\cdot, t) \rightarrow M, d\vec{M}$

On définit le tenseur F , gradient de la déformation au point M_0 à l'instant t , en posant

$$d\vec{M} = F d\vec{M}_0, \quad (3.45)$$

$$F_{ij}(X, t) = \frac{\partial f_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j}. \quad (3.46)$$

On introduit ensuite la notion de déformation à l'instant t , par rapport à la configuration Ω_0 , et au voisinage de M_0 , par la variation

$$d\vec{M} \cdot \delta\vec{M} - d\vec{M}_0 \cdot \delta\vec{M}_0, \quad (3.47)$$

pour tous les couples infinitésimaux $d\vec{M}_0 \cdot \delta\vec{M}_0$, au point M_0 . Etant donné que $d\vec{M} = F d\vec{M}_0$ et $\delta\vec{M} = F \delta\vec{M}_0$, nous obtenons encore

$$d\vec{M} \cdot \delta\vec{M} - d\vec{M}_0 \cdot \delta\vec{M}_0 = F_{ij} dX_j F_{ik} \delta X_k - dX_j \delta X_j \quad (3.48)$$

$$F d\vec{M}_0 \cdot F \delta\vec{M}_0 - d\vec{M}_0 \cdot \delta\vec{M}_0 \quad (3.49)$$

$$= C_{jk} dX_j \delta X_k - \delta_{jk} dX_j \delta X_k. \quad (3.50)$$

Nous avons fait apparaître le tenseur $C := F^t F$ appelé tenseur des dilatations. On définit encore le tenseur des déformations \mathbf{X} par:

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - Id). \quad (3.51)$$

Nous obtenons finalement la relation

$$d\vec{M} \cdot \delta\vec{M} - d\vec{M}_0 \cdot \delta\vec{M}_0 = 2X_{ij} dX_i \delta X_j, \quad (3.52)$$

d'où la propriété suivante

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Il n'y a pas de déformation au point } \mathbf{M} \\ \text{et à l'instant } t, \text{ par rapport à la configuration,} \\ \Leftrightarrow \mathbf{X}(\mathbf{M}, t) = 0. \end{array} \right. \quad (3.53)$$

Le tenseur des vitesses de déformations On fixe un temps t et on étudie la vitesse à laquelle les déformations se produisent en $M \in \Omega_t$:

$$\frac{d}{dt} (d\vec{M} \cdot \delta\vec{M} - d\vec{M}_0 \cdot \delta\vec{M}_0) = \frac{d}{dt} (d\vec{M} \cdot \delta\vec{M}) \quad \forall d\vec{M}_0 \cdot \delta\vec{M}_0 \quad (3.54)$$

$$\frac{d}{dt} (d\vec{M}) \cdot \delta\vec{M} + d\vec{M} \cdot \frac{d}{dt} (\delta\vec{M}) \quad (3.55)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(X, t) \right) dX_j \delta x_i + dx_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}(X, t) \right) \delta X_i \quad (3.56)$$

$$= \frac{\partial}{\partial X_j} \tilde{v}_i(X, t) dX_j \delta x_i + \frac{\partial}{\partial X_i} \tilde{v}_j(X, t) dx_j \delta X_i, \quad (3.57)$$

$$\text{diffrence centre } \delta \text{ et } d \quad (3.58)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(X, t) dX_j \right) = \frac{\partial f_i}{\partial X_k}(X, t) \delta X_k \quad (3.59)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(X, t) \right) = \frac{\partial}{\partial X_j} \tilde{v}_i(X, t) \quad (3.60)$$

$$\frac{d}{dt} (d\vec{M}) \cdot \delta \vec{M} = \frac{d}{dt} (F_{ij} dX_j) F_{ik} \delta X_k \quad (3.61)$$

Remarquons ensuite que, pour $x = f(X, t)$, on a $\tilde{v}_i(X, t) = v_i(x, t)$, d'où

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \tilde{v}_i(X, t) dX_j = \frac{\partial}{\partial x_k} v_i(x, t) \underbrace{\frac{\partial f_k}{\partial X_j} dX_j}_{=dx_k} \quad (3.62)$$

et, au final:

$$\frac{d}{dt} (d\vec{M} \cdot \delta \vec{M} - d\vec{M}_0 \cdot \delta \vec{M}_0) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx_j \delta x_i \quad (3.63)$$

On définit alors le tenseur des vitesses de déformations, noté \hat{D}_{ij} par:

$$\hat{D}_{ij}(v) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (Dv + Dv^t) \quad (1.9) \quad (3.64)$$

Il est attaché à la description eulérienne. C'est un tenseur symétrique qui s'exprime linéairement par rapport aux composantes du champ des vitesses en description eulérienne. On a la propriété suivante:

$$\left| \begin{array}{l} [t] \text{ La région } \omega(t) \text{ ne subit pas de déformation entre les instants } t_1 \text{ et } t_2, \\ \Leftrightarrow \hat{D}_{ij}(x, t) = 0; \forall x \in \omega(t), t \in [t_1, t_2]. \end{array} \right.$$

Cette propriété se vérifie aisément. En effet, s'il n'y a aucune déformation, c'est à dire si $d\vec{M} \cdot \delta \vec{M}$ reste constant, alors en utilisant (1.8) on obtient

$$\hat{D}_{ij}(x, t) dx_i \delta x_j = 0; \forall dx_i, \delta x_j \quad (3.65)$$

on conclut alors que $\hat{D}_{ij}(x, t) \equiv 0$. De l'autre côté, si $\hat{D}_{ij}(x, t) \equiv 0$, alors l'expression (1.8) implique que $d\vec{M} \cdot \delta \vec{M}$ reste constant. Il n'y a donc pas de déformation.

3.3.1 Conservation de la quantité de mouvement

Jusqu'à présent, nous n'avons pas considéré que la cinématique et la conservation de la masse. Appliquons maintenant la loi fondamentale de la dynamique (loi de Newton) $\vec{F} = m\vec{\gamma} = \frac{dm\vec{v}}{dt}$ à un volume matériel :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{\partial \mathcal{V}_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) dS + \int_{\mathcal{V}_t} \rho \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (3.66)$$

où

- $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ désigne la résultante des forces intérieures s'exerçant au point de $\partial \mathcal{V}_t$ à l'instant t

- $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ désigne la résultante des forces extérieures s'exerçant au point de \mathcal{V}_t à l'instant t

Considérons la variation de la quantité de mouvement du volume matériel. Nous allons prouver la proposition

Theorème 3.3.1. *Proposition*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}_t} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} \quad (3.67)$$

$$(3.68)$$

beginPreuve D'après le théorème de transport

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho u_i d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \left(\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho u_i \cdot \mathbf{u}) \right) d\mathbf{x} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.69)$$

Or

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho u_i \cdot \mathbf{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} u_i + \frac{\partial u_i}{\partial t} \rho + u_i \text{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u_i \quad (3.70)$$

Utilisons maintenant la conservation de la masse (3.33), il vient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho u_i d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \right) d\mathbf{x}. \quad (3.71)$$

◇ * ⊗ •

Remarque. Tout se passe comme si le volume fluide avait une masse constante et subissait l'accélération $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$. En particulier la forme précédente est la même que ρ soit constant ou non. Nous aurons besoin de résultats de mécanique des milieux continus que nous rappelons sans preuve.

La conservation de la quantité de mouvement (loi fondamentale de la dynamique).

On traduit ici que la dérivée par rapport au temps du tenseur des quantités de mouvement est égale au tenseur des forces extérieures appliquées au système. Rappelons que le tenseur de quantité de mouvement associé à $\omega(t) \subset t$ est caractérisé par :

$$\text{sa résultante } \int_{\omega(t)} \omega(t) \rho \vec{v} dx, \quad (3.72)$$

$$\text{son moment en } \int_{\omega(t)} O\vec{M} \wedge \rho \vec{v} dx. \quad (3.73)$$

Les forces extérieures agissant sur $\omega(t)$ sont de deux types: les forces massiques de densité volumique $\rho \vec{f}$ dans $\omega(t)$ et les actions de contacts de densité $\vec{F}(M, t, \vec{\mathbf{n}})$ sur $\partial\omega(t)$. Le tenseur associé a pour résultante

$$\int_{\omega(t)} \rho \vec{F} dx + \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(M, t, \vec{\mathbf{n}}) ds. \quad (3.74)$$

et son moment en O s'exprime comme suit

$$\int_{\omega(t)} O\vec{M} \wedge \rho \vec{f} dx + \int_{\partial\omega(t)} O\vec{M} \wedge \vec{F}(M, t, \vec{\mathbf{n}}) ds, \quad (3.75)$$

La loi fondamentale de la dynamique se traduit donc par les équations suivantes:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \rho \vec{v} dx = \int_{\omega(t)} \vec{F} dx + \int_{\partial\omega(t)} \vec{F}(M, t, \vec{\mathbf{n}}) ds \quad (3.76)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} O\vec{M} \wedge \rho \vec{v} dx = \int_{\omega(t)} O\vec{M} \wedge \rho \vec{f} dx + \int_{\partial\omega(t)} O\vec{M} \wedge \vec{F}(M, t, \vec{\mathbf{n}}) ds, \forall \omega(t) \subset \Omega_t. \quad (3.77)$$

Nous pouvons encore simplifier ces équations en utilisant (1.11), et obtenir:

$$\int_{\omega(t)} (\rho\vec{\gamma} - \rho\vec{f}) dx = \int_{\partial\omega(t)} \vec{F} ds, \quad (1.12) \quad (3.78)$$

$$\int_{\omega(t)} O\vec{M} \wedge (\rho\vec{\gamma} - \rho\vec{f}) dx = \int_{\partial\omega(t)} O\vec{M} \wedge \vec{F} ds, \quad (1.13) \quad \forall \omega(t) \subset \Omega_t. \quad (3.79)$$

3.4 Le tenseur des contraintes

On pose

$$\vec{b} := \rho\vec{\gamma} - \rho\vec{f}, \quad (3.80)$$

et on fait l'hypothèse que b est bornée. On suppose aussi que, pour tous t , \vec{n} fixés, la fonction $M \rightarrow \vec{F}(M, t, \vec{n})$ est continue. On a alors le résultat suivant:

| Il existe un champ de tenseurs $\sigma(M, t)$, $\sigma = (\sigma_{ij})$ tel que l'équation (1.12) prenne l'expression (1.14) énoncée ci-dessous

$$\int_{\omega(t)} (\rho\vec{\gamma} - \rho\vec{f}) dx = \int_{\partial\omega(t)} \sigma \circ \vec{n} ds, \quad \forall \omega(t) \subset t \quad (1.14) \quad (3.82)$$

Preuve.

• Soit t fixé, $M \in \Omega_t$, et \vec{n} un vecteur unitaire d'origine M . On commence tout d'abord par étendre $\vec{F}(M, t, \vec{n})$ à tout \mathbb{R}^3 , en posant

$$\vec{F}(M, t, \vec{\xi}) = |\xi| \vec{F}(M, t, \frac{\xi}{|\xi|}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3. \quad (3.83)$$

Pour montrer que $\vec{\xi} \rightarrow \vec{F}(M, t, \vec{\xi})$ est linéaire, il suffit alors de vérifier que $\vec{F}(M, t, -\vec{n}) = -\vec{F}(M, t, \vec{n})$.

• Montrons que $\vec{F}(M, t, -\vec{n}) = -\vec{F}(M, t, \vec{n})$. Soit $r_0 > 0$ choisi de telle manière que la boule fermée, centrée en M et de rayon r_0 soit incluse dans t . Pour $r \in [0, r_0]$, on note par $\omega_r \subset \Omega_t$ la boule centrée en M et de rayon r . Soit encore Σ le plan passant par M et orthogonal à \vec{n} . On note par Σ_r l'intersection de ω_r avec Σ (voir figure ci-dessous).

Σ_r sépare ω_r en deux demi-boules. Nous notons par ω^+ la partie supérieure, de frontière $\partial_1\omega^+ \cup \Sigma_r$, et par ω^- , la demi-boule inférieure, de frontière $\partial_1\omega^- \cup \Sigma_r$. En appliquant la relation (1.12) pour les ensembles $\omega(t)$, $\omega^+(t)$ et $\omega^-(t)$, nous obtenons les trois équations suivantes :

$$\int_{\omega(t)} \vec{b} dx = \int_{\partial_1\omega^+ \cup \partial_1\omega^-} \vec{F}(\vec{\nu}) ds, \quad (3.84)$$

$$\int_{\omega(t)^+} \vec{b} dx = \int_{\partial_1\omega^+} \vec{F}(\vec{\nu}) ds + \int_{\Sigma_r} \vec{F}(\vec{n}) ds, \quad (3.85)$$

$$\int_{\omega(t)^-} \vec{b} dx = \int_{\partial_1\omega^-} \vec{F}(\vec{\nu}) ds + \int_{\Sigma_r} \vec{F}(-\vec{n}) ds \quad (3.86)$$

En soustrayant la somme des deux dernières équations à la première, nous obtenons encore :

$$\int_{\Sigma_r} \underbrace{(\vec{F}(P, \vec{n}) + \vec{F}(P, -\vec{n}))}_{:= \vec{G}(P)} ds = 0, \quad \forall r \in [0, r_0]. \quad (1.15) \quad (3.87)$$

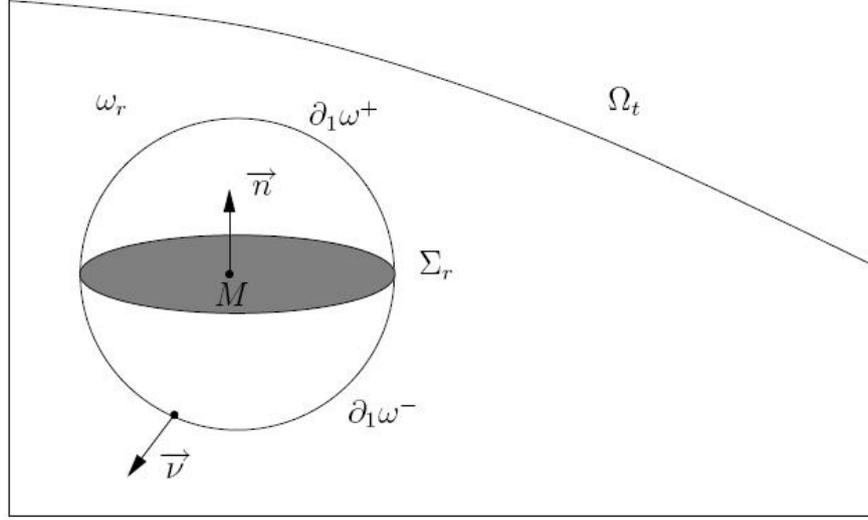


Figure 3.3: erh

Sous les hypothèses faites sur \vec{F} , la fonction $P \rightarrow \vec{G}(P)$ est continue sur $\Sigma \cap \Omega_t$, et en particulier sur la partie compacte $\bar{\omega}_{r_0}$. Soit ϵ le module de continuité de \vec{G} sur $\bar{\omega}_{r_0}$. On a :

$$|\vec{G}(M) - \vec{G}(P)| \leq \epsilon(r), \forall r \in [0, r_0], \forall P \in \Sigma_r, \quad (3.88)$$

d'où:

$$\vec{G}(M) = \vec{G}(P) + \epsilon(r)\eta\vec{P}, \quad (3.89)$$

avec $|\eta\vec{P}| \leq 1$. En intégrant cette égalité sur Σ_r , nous obtenons encore:

$$G(\vec{M}) = \underbrace{\frac{1}{\pi r^2} \int_{\Sigma_r} G(\vec{P}) dx}_{\equiv 0 \text{ par (1:15)}} + \underbrace{\frac{\epsilon(r)}{\pi r^2} \int_{\Sigma_r} \eta\vec{P} dx}_{|\cdot| \leq \pi r^2}. \quad (3.90)$$

En utilisant alors le fait que $\epsilon(r)$ tend vers 0 lorsque r tend vers 0, nous obtenons

$$G(\vec{M}) = 0. \quad (3.91)$$

Ce qui est encore équivalent à :

$$\vec{F}(M, \vec{n}) = -\vec{F}(M, \vec{n}). \quad (3.92)$$

A ce stade nous avons prouvé que $\epsilon \rightarrow \vec{F}(M, t, \vec{\epsilon})$ est linéaire, d'où l'existence du champ de tenseur σ défini par

$$\vec{F}(M, t, \vec{n}) = \sigma \circ \vec{n}. \quad (3.93)$$

En conséquence, l'équation (1.12) prend bien la forme (1.14). \diamond

Réécriture de la conservation de la quantité de mouvement En appliquant la loi de conservation de la quantité de mouvement, nous avons obtenu les deux équations (1.12) et (1.13). Par la suite, nous avons

introduit le tenseur des contraintes, ce qui nous a permis de réexprimer (1.12) en (1.14). A présent, nous reprenons l'équation (1.14), i.e.

$$\int_{\omega(t)} (\rho\gamma_i - \rho f_i) dx = \int_{\partial\omega(t)} \sigma_{ij} \circ n_j ds, \forall i = 1, 2, 3, \forall \omega(t) \subset \Omega_t. \quad (3.94)$$

En appliquant la formule de la divergence, nous obtenons alors

$$\int_{\omega(t)} \left(\rho\gamma_i - \rho f_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right) dx = 0, \forall \omega(t) \subset \Omega_t. \quad (3.95)$$

Cette dernière équation permet finalement d'établir les équations du mouvement :

$$\rho\gamma_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \text{ dans } \Omega_t, \forall i = 1, 2, 3. \quad (1.16) \quad (3.96)$$

Rappelons que, pour un champ de tenseur du second ordre $T = T_{ij}$, on définit $\vec{div} \vec{T}$ en posant:

$$\left(\vec{div} \vec{T} \right)_i := \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}. \quad (3.97)$$

Ainsi, la relation (1.16) admet l'écriture vectorielle suivante:

$$\rho \vec{\gamma} = \vec{div} \vec{\sigma} + \rho \vec{f} \text{ dans } \Omega_t. \quad (1.17) \quad (3.98)$$

Il nous reste encore à établir un lien entre (1.13) et σ . En premier lieu, nous obtenons

$$\int_{\omega(t)} \vec{O}M \wedge (\rho \vec{\gamma} - \rho \vec{f}) dx = \underbrace{\int_{\partial\omega(t)} (\vec{O}M \wedge \sigma \circ \vec{n}) ds}_{:= \vec{D}}, \forall \omega(t) \subset t. \quad (3.99)$$

En appliquant la formule de la divergence sur le membre de droite \vec{D} , nous obtenons après développement :

$$\vec{D} = \int_{\omega(t)} \vec{O}M \wedge \vec{div} \sigma \vec{\beta}_\sigma dx = 0, \forall \omega(t) \subset \Omega_t, \quad (1.18) \quad (3.100)$$

Dans cette dernière expression nous avons utilisé la notation suivante:

$$\vec{\beta}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{32} - \sigma_{23} \\ \sigma_{13} - \sigma_{31} \\ \sigma_{21} - \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

Ainsi, en combinant (1.18) avec (1.17), nous obtenons :

$$\int_{\omega(t)} (\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) dx = 0, \forall i, j, \forall \omega(t) \subset \Omega_t, \quad (3.102)$$

et par conséquent

σ est un champ de tenseur symétrique i.e.

$$\sigma_{ij}(t, M) = \sigma_{ji}(t, M) \quad (1.19) \quad (3.103)$$

Contraintes dans un fluide

Le théorème de Cauchy dit que la résultante des forces intérieures exercées sur la surface \mathcal{V}_t par le fluide environnant s'exprime :

$$\int_{\partial\mathcal{V}_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.104)$$

où $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{i,j})$ est une matrice $n \times n$. Ainsi la contrainte élémentaire s'exerçant sur la surface dS est $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. L'opérateur $\mathbf{n} \mapsto \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ est appelé le tenseur des contraintes.³ On admet (principe de Stokes) que dans un fluide le tenseur des contraintes est fonction *seule des taux de déformations*

$$D = Def(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\perp) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)_{i,j} \quad (3.105)$$

Remarque. Le terme "déformations" vient du fait suivant. Soit \mathbf{l} le vecteur reliant deux point matériels situés en \mathbf{x} et $\mathbf{x} + \mathbf{l}$ à l'instant t . Considérons leurs trajectoires respectives et étudions la variation de $\mathbf{l}(t + s) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x} + \mathbf{l}, s) - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, s)$.

D'où en dérivant par rapport à s en $s = 0$

$$\frac{D\mathbf{l}}{Dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{l}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{l} + o(\mathbf{l}) \quad (3.106)$$

Décomposons la matrice $\nabla\mathbf{u}$ en partie symétrique et antisymétrique

$$\nabla\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\perp) + \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^\perp) \quad (3.107)$$

de sorte que

$$\nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{l} = Def(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{l} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l} \quad (3.108)$$

ainsi au premier ordre

$$\frac{D\mathbf{l}}{Dt} = \underbrace{Def(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{l}}_{\text{mouvement de déformation pure}} + \underbrace{\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}}_{\text{mouvement de rotation solide}} \quad (3.109)$$

$$\frac{D}{Dt} \|\mathbf{l}\|^2 = 2\mathbf{l} \cdot \frac{D\mathbf{l}}{Dt} = 2\mathbf{l}^\perp Def(\mathbf{u})\mathbf{l} \quad (3.110)$$

La forme quadratique de la matrice $Def(\mathbf{u})$ contrôle donc les déformations de longueurs. Ecrit autrement,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{l}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l} + Def(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{l} + o(\mathbf{l}) \quad (3.111)$$

Les termes $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l}$ s'interprètent respectivement comme une translation de vecteur $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et une rotation de vitesse angulaire $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}$. Ils n'introduisent aucune déformation, ils s'agit d'un mouvement *rigide*. La déformation réside donc dans le terme $Def(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{l}$. \diamond

³Ici aussi, il faudrait plutôt utiliser le langage des formes différentielles. Le tenseur des contraintes est en fait une 2-forme.

La fonction doit être objective, c'est à dire indépendante du repère choisi et isotrope. On peut alors prouver (théorème Rivlin-Eriksen, Cf[5]) que la loi de comportement est nécessairement

$$\sigma = a \cdot I + b \cdot D + c \cdot D^2 \quad (3.112)$$

avec a, b, c fonctions scalaires des invariants principaux de D .⁴ Pour les fluides dits newtonniens incompressibles la loi de comportement est

$$\sigma = -p \cdot I + 2\mu \cdot D \quad (3.113)$$

avec $p = p(\mathbf{x}, t)$ la pression et $\mu > 0$ la viscosité dynamique du fluide. Lorsque $\mu = 0$, le fluide est dit *parfait*.

Remarque. Dans un fluide parfait, les contraintes sont uniquement dues à la pression et sont normales aux volumes fluides. Comme il n'y a pas de forces tangentielles, les forces ne peuvent générer aucune rotation. Par conséquent si l'écoulement est irrotationnel à l'instant initial, il le demeure par la suite (théorème de Lagrange). \diamond

Transformons l'intégrale de surface en intégrant par partie avec la formule de la divergence :

$$\int_{\partial \mathcal{V}_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) dS = \int_{\partial \mathcal{V}_t} \sigma \cdot \mathbf{nd}S = \int_{\mathcal{V}_t} \text{div} \sigma d\mathbf{x} \quad (3.114)$$

La loi de Newton se traduit alors par l'équation de Cauchy

$$\int_{\mathcal{V}_t} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}_t} \text{div} \sigma d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{V}_t} \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (3.115)$$

Il reste à calculer (nous utilisons la convention de sommation des indices répétés.)

$$\text{div} \sigma \equiv \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} \quad (3.116)$$

$$\text{div} \sigma = \text{div} (-p \cdot I + 2\mu \cdot D) \quad (3.117)$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.118)$$

Le fluide étant supposé incompressible, nous avons :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.119)$$

Il résulte donc

$$\text{div} \sigma = \underbrace{-\nabla p}_{\text{gradient de pression}} + \underbrace{\mu \Delta \mathbf{u}}_{\text{forces dues à la viscosité}} \quad (3.120)$$

Rassemblant les considérations précédentes nous obtenons

$$\int_{\mathcal{V}_t} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}_t} -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} d\mathbf{x} = \quad (3.121)$$

Comme le volume matériel est arbitraire, la conservation de la quantité de mouvement se traduit par

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \quad (3.122)$$

⁴ ce sont les quantités $\sum_i \lambda_i, \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j$ et $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice symétrique D .

Remarque. Si nous écrivons

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \right) = \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \text{div} \rho u_i \cdot \mathbf{u} \quad (3.123)$$

Nous retrouvons la forme générale d'une loi de conservation : variation instantanée + divergence des flux = sources. En quelque sorte les forces s'interprètent comme des sources de quantité de mouvement. Les équations de Navier-Stokes ne sont rien d'autre qu'un système d'équation de convection diffusion des scalaire u_1, u_2, u_3 par le champ \mathbf{u} . La nonlinéarité réside dans le fait que les scalaires advectés sont actifs, i.e. ils sont liés au champ qui les transporte. \diamond

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les équations de Navier Stokes d'un fluide newtonien homogène incompressible visqueux :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \mathbf{u}) = 0 \\ \text{div} \mathbf{u} = 0 \end{array} \right. \quad (3.124)$$

Le système comporte $n + 2$ équations scalaire et $n + 2$ inconnues u_1, \dots, u_n, p et ρ .

Remarque. La pression p n'apparaît que sous forme ∇p , elle ne peut être déterminée qu'à une constante près. *diaond*

Les ENS admettent un certain nombre de symétries, i.e. elles sont invariantes par les transformations suivantes :

- translation en espace $x \leftarrow x + a$ et en temps $t \leftarrow t + \tau$
- les isométries de l'espace (rotations et réflexions) $x \leftarrow Ax$ avec $A^T A = I$
- les transformations galiléennes $x \leftarrow x - \mathbf{v}t, \mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u}(x - \mathbf{v}t, t) + \mathbf{v}$ avec $\mathbf{v} = \text{const.}$
- le changement d'échelle $x \leftarrow \lambda x, t \leftarrow \lambda^2 t, \mathbf{u} \leftarrow \lambda \mathbf{u}, p \leftarrow \lambda^2 p$

Exercice. Montrer la symétrie suivante des ENS (pour un fluide homogène). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et \mathbf{u}, p une solution des ENS. $\mathbf{u}_\lambda(x, t) = \lambda \mathbf{u}(\lambda x, \lambda^2 t), p_\lambda(x, t) = \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t)$ est encore solution. Jean Leray a posé la conjecture de solutions self-similaires. Un problème résolu il ya peu par Malek-Ruzicka-Necas concerne la non-existence de solutions self-similaires respectant l'inégalité d'énergie.

Il faut compléter le système précédent par des conditions initiales et aux limites. Comme condition initiale, on prend $\mathbf{u}(\cdot, 0) = u_0$ un champ de vitesse donné à divergence nulle et $\rho(\cdot, 0) = \rho_0$. Comme la dérivée temporelle de la pression n'apparaît pas donc la pression ne satisfait pas un problème d'évolution. On ne peut donc prescrire $p(\cdot, 0) = p_0$.

Fluide newtonien (ou de Navier-Stokes) : fluide tel que :

$$\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \overbrace{\eta(\text{div}\overline{\overline{u}} + 2\mu\overline{\overline{D}})}^{\overline{\overline{\tau}}}, \text{ loi de Newton } \vec{q} = -\lambda \text{grad} T, \text{ loi de conduction de Fourier avec } \eta, \mu, \lambda \text{ fonctions que de } T$$

- $\overline{\overline{T}}$ est le tenseur des contraintes dans le fluide
- p est la pression, T , la temperature
- η, μ sont les coefficients de viscosité
- $\overline{\overline{D}}$ est le tenseur des taux de deformations

- \vec{u} est la vitesse eulerienne
- $\overline{\overline{\tau}}$ est le tenseur des contraintes de viscosité
- \vec{q} est le vecteur courant de chaleur ou vecteur densité de flux de chaleur
- λ est la conductivité thermique

Hypothèse de Stokes : A partir du premier et second principe de thermodynamique, on peut montrer que : $\mu \geq 0$, $3\eta + 2\mu \geq 0$ et $\lambda \geq 0$. L'hypothèse de Stokes se formule de la façon suivante : $3\eta + 2\mu = 0$. Elle s'avère satisfaisante dans la plupart des cas traités. Elle permet de considérer seulement la viscosité dynamique μ .

3.5 Fluide newtonien

3.6 1.2. Les inconnues du problème

Dans le cas général, seules 4 grandeurs suffisent à caractériser l'état du fluide :

- - le champ de vitesse : $\vec{u}(\vec{x}, t)$, (1 inconnue vectorielle)
- - le champ de pression : $p(\vec{x}, t)$, (1 inconnue scalaire)
- - le champ de masse volumique : $\rho(\vec{x}, t)$, (1 inconnue scalaire)
- - le champ de masse température : $T(\vec{x}, t)$ (1 inconnue scalaire)

La viscosité dynamique et la conductivité thermique étant supposées connues (valeurs expérimentales et/ou empiriques).

3.7 1.3. Les équations de Navier-Stokes compressibles

Pour un gaz parfait et dans le cas où l'on néglige l'action de la pesanteur, on doit résoudre le système d'équations suivant :

- continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) \quad (3.125)$$

- quantité de mouvement (Navier-Stokes) :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \left(\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}} \right) \cdot \vec{u} = -\overline{\overline{\text{grad} p}} + \text{div} \left(2\mu \overline{\overline{D}} \right) - \frac{2}{3} \overline{\overline{\text{grad}}} (\mu \text{div} \vec{u}) \quad (3.126)$$

- équation de la chaleur :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \left(\vec{u} \cdot \overline{\overline{\text{grad} T}} \right) = \text{div} \left(\lambda \overline{\overline{\text{grad} T}} \right) + T \beta \frac{\partial p}{\partial t} + 2\mu \overline{\overline{D}} : \overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}} - \frac{2}{3} \mu (\text{div} \vec{u})^2 \quad (3.127)$$

avec $p = r\rho T$ loi d'état d'un gaz parfait et $\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad} \vec{u}}} + \overline{\overline{\text{grad}^T \vec{u}}} \right)$

Paramètres physiques : C_p : chaleur massique à pression constante β : coefficient de dilatation isobare ($\beta = - \left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{p=cte}$). Les équations de continuité et de Navier-Stokes s'appliquent également aux gaz réels et aux liquides (newtoniens), seule l'équation de la chaleur change.

Attention : Ne pas confondre fluide parfait ($\mu = 0$ et $\lambda = 0$) avec gaz parfait ($p = r\rho T$)

3.8 1.4. Les equations de Navier-Stokes incompressibles

Pour un fluide de masse volumique constante, on a plus simplement :

- continuité :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{u}) \quad (3.128)$$

- quantite de mouvement (Navier-Stokes) :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\overline{\operatorname{grad} \vec{u}} \right) \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{u} \quad (3.129)$$

- equation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} T = \kappa \Delta T \quad (3.130)$$

Dans ce cas l'équation de la chaleur est decouplée et T joue le rôle d'un scalaire passif.

Parametres physiques : $\nu = \frac{\mu}{\rho}$: viscosité cinématique $\kappa = \frac{\lambda}{\rho C_p}$: diffusivité thermique

Remarque importante : les équations de Navier-Stokes présentent des non-linearité vis a vis des inconnues. Ainsi en coordonnées cartésiennes, on écrit : non-linearites

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (3.131)$$

Pour illustrer le rôle de ces termes, on considère l'équation simplifiée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.132)$$

En prenant comme condition initiale :

$$u(x, t_0) = A \cos(kx) \quad (3.133)$$

On obtient par un développement de Taylor :

$$u(x, t) = u(x, t_0) + (t - t_0) \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t_0} + o(t - t_0)^2 \quad (3.134)$$

$$u(x, t) = u(x, t_0) + (t - t_0) \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{t_0} + o(t - t_0)^2 \quad (3.135)$$

$$u(x, t) = u(x, t_0) + (t - t_0) A^2 k \cos(kx) \sin(kx) + o(t - t_0)^2 \quad (3.136)$$

$$u(x, t) = u(x, t_0) + (t - t_0) \frac{A^2}{2} k \sin(2kx) + o(t - t_0)^2 \quad (3.137)$$

→ apparition d'une harmonique supérieure dans la solution.

Plus généralement, dans un contexte tridimensionnel instationnaire, les termes nonlinéaires provoquent l'apparition d'harmoniques et de sous-harmoniques.

→ notion de transferts de mouvement et d'énergie entre différentes échelles.

3.8.1 Conservation de l'énergie

Considérons un fluide homogène newtonien incompressible remplissant un domaine Ω . Si l'on multiplie scalairement au sens L^2 les ENS par \mathbf{u} on obtient :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u} + \nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \quad (3.138)$$

Intégrons par parties

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u} = - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u} + \int_{\partial \Omega} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (3.139)$$

L'incompressibilité, et la condition limite à la paroi entraînent que

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.140)$$

Les forces de pressions ne "travaillent pas" ! De même le terme visqueux

$$\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} + \nu \int_{\partial \Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \quad (3.141)$$

avec la condition limite d'adhérence $\mathbf{u} = 0$ sur le bord il reste

$$\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} = -\nu \int_{\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\| \quad (3.142)$$

où la notation $A : B = \operatorname{Tr}(AB^T) = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$ désigne le produit scalaire des matrices, la norme euclidienne correspondante étant la norme de Frobenius. Avec le théorème de dérivation sous le signe \int transformons maintenant le terme :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|^2 \quad (3.143)$$

Il reste le terme non-linéaire qui vérifie une propriété remarquable d'antisymétrie.

Theorème 3.8.1. Soit \mathbf{a} un champ incompressible tel que $\mathbf{a} : \mathbf{n} = 0$ sur le domaine et deux fonctions scalaires \mathcal{C}^1

$$\int_{\Omega} (\mathbf{a} \nabla \cdot \varphi) \psi = - \int_{\Omega} (\mathbf{a} \nabla \cdot \psi) \varphi \quad (3.144)$$

Preuve Il suffit de remarquer que puisque $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$,

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \varphi = \operatorname{div} \varphi \cdot \mathbf{a} \quad (3.145)$$

La formule de la divergence donne alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \varphi \cdot \mathbf{a} \psi = - \int_{\Omega} \varphi \mathbf{a} \cdot \nabla \psi + \int_{\partial \Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \varphi \psi \quad (3.146)$$

la condition au bord $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}$ permet de conclure. •◦ En appliquant on obtient

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.147)$$

L'équation (3.138) devient alors :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|^2}_{\text{variation instantanée d'énergie cinétique}} = \underbrace{-\nu \int_{\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\|^2}_{\text{dissipation visqueuse}} + \underbrace{\int_{\Omega} \|\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}\|^2}_{\text{puissance fournie par les forces extérieures}} \quad (1.5) \quad (3.148)$$

On voit sur cette équation que le terme $\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u}$ a un effet dissipatif d'autant plus grand que la viscosité est élevée.

Remarque. Nous verrons plus ultérieurement que cette égalité d'énergie, que nous avons obtenue en supposant que le champ \mathbf{u} était "assez régulier" pour dériver sous le signe somme, intégrer par parties... n'est en fait rigoureusement démontrée que dans le cas des écoulements plans, ou pour certains types de solutions dites *fortes* en dimension 3. En revanche nous montrerons que l'inégalité est vérifiée pour des solutions *faibles* en dimension 3.

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|^2 \leq -\nu \int_{\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \int_{\Omega} \|\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}\|^2 \quad (1.6) \quad (3.149)$$

Forme adimensionnée NS:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (3.150)$$

Reprenons l'inégalité d'énergie (1.6) et supposons les forces extérieures nulles ou dérivant d'un potentiel $\mathbf{f} = -\nabla \mathcal{U}$ de sorte que le terme $\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$ soit nul (intégrer par parties et utiliser l'incompressibilité). On obtient

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|^2 \leq -\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\|^2 \quad (3.151)$$

Supposons que $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3$. Nous verrons dans le prochain chapitre que c'est l'espace fonctionnel naturel pour \mathbf{u} . Utilisons l'inégalité de Poincaré-Friedrichs :

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq C \|\nabla \varphi\|_{L^2} \quad (3.152)$$

En posant $y(t) = \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2}^2$, nous obtenons l'inéquation différentielle :

$$\frac{dy}{dt} \leq -\frac{\alpha}{Re} y(t), \quad y(0) = \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 \quad (3.153)$$

où $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0, \cdot)$ désigne la vitesse initiale du fluide. En multipliant par le facteur intégrant $\exp \frac{\alpha t}{Re}$

$$\frac{d}{dt} y(t) \exp \frac{\alpha t}{Re} \leq 0 \quad (3.154)$$

d'où $y(t) \leq y(0) \exp \frac{\alpha t}{Re}$ ou encore

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 \exp \left(\frac{\alpha t}{Re} \right) \quad (3.155)$$

On voit bien l'effet de la dissipation visqueuse : qu'elle que soit la vitesse initiale, le fluide tend vers l'état au repos, avec un amortissement exponentiel. C'est pour cela que le café une fois remué ne tourne pas indéfiniment...

3.9 Condition limites

Les principales conditions limites *cinématiques* (portant sur le champ de vitesse \mathbf{u} d'un écoulement limité par une paroi immobile sont :

- cas des fluides visqueux : adhérence à la paroi $\mathbf{u} = 0$ sur $\partial\Omega$
- cas des fluides parfaits : glissement imperméable $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$

Remarque. On peut aussi prescrire des conditions limites dynamiques (portant sur le champ de contraintes $\sigma \cdot \mathbf{n}$) par exemple dans le cas d'une surface libre $\sigma \cdot \mathbf{n} = 0$.

On peut enfin mélanger et prescrire par exemple $\mathbf{u}_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ et $\sigma_{nt} = (\sigma \mathbf{n}) \times \mathbf{n}$ ou $u_t = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$ et $\sigma_{nn} = (\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$.

Notons enfin que ces conditions limites sont naturelles car elles se déduisent de la forme faible des équations, formulation qui traduit le principe variationnel dit des "vitesses virtuelles". \diamond

Conditions initiales et aux limites.

Nous supposons que la vitesse initiale des particules est donnée, i.e.

$$\vec{v}(x, 0) = \vec{v}_0(x), \forall x \in \Omega, \quad (3.156)$$

et nous considérons des conditions aux limites d'adhérence sur les parois, i.e. $\vec{v}(x, t) = 0$, sur $\partial\Omega \times [0, T]$.

Nous posons

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_0} \quad (3.157)$$

$$P = \frac{p}{\rho_0} (1.23) \quad (3.158)$$

Exprimées sur la frontière $\partial\Omega$ d'un domaine Ω , avec $\vec{n} \perp \partial\Omega$ la normale extérieure au domaine en $\vec{x}_p \in \partial\Omega$. On pose $\vec{u}_r(\vec{x}_p, t) = \vec{u}(\vec{x}_p, t) - \partial\vec{\Omega}(\vec{x}_p, t)$ vitesse relative / $\partial\Omega$.

Il existe plusieurs types de condition aux limites :

- - Adhérence : $\vec{u}_r(\vec{x}_p, t) = \vec{0}$ sur $\partial\Omega$.
- - Glissement : $\vec{n} \cdot \vec{u}_r(\vec{x}_p, t) = 0$ sur $\partial\Omega$.
- - Glissement libre :

$$\left. \begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{u}_r(\vec{x}_p, t) &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} (\vec{u}_r(\vec{x}_p, t) - u_{rn}(\vec{x}_p, t) \vec{n}) &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \quad (3.159)$$

- - Température imposée : $T(\vec{x}_p, t) = T_{\partial\Omega}(\vec{x}_p, t)$ sur $\partial\Omega$
- - Densité de flux thermique imposée : $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}(\vec{x}_p, t) = \vec{n} \cdot \vec{\varphi}_{\partial\Omega}(\vec{x}_p, t)$ sur $\partial\Omega$

Avec $\frac{\partial}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{grad}$ et $u_{rn} = \vec{u}_r(\vec{x}_p, t) \cdot \vec{n}$.

$u_{\partial\Omega}(\vec{x}_p, t), T_{\partial\Omega}(\vec{x}_p, t), \varphi_{\partial\Omega}(\vec{x}_p, t)$ sont des données du problème.

Remarques :

- Si $T_{\partial\Omega}(\vec{x}_p, t) = cte$: condition aux limites isotherme.
- Si $\vec{\varphi}_{\partial\Omega}(\vec{x}_p, t) \cdot \vec{n} = 0$: condition aux limites adiabatique.

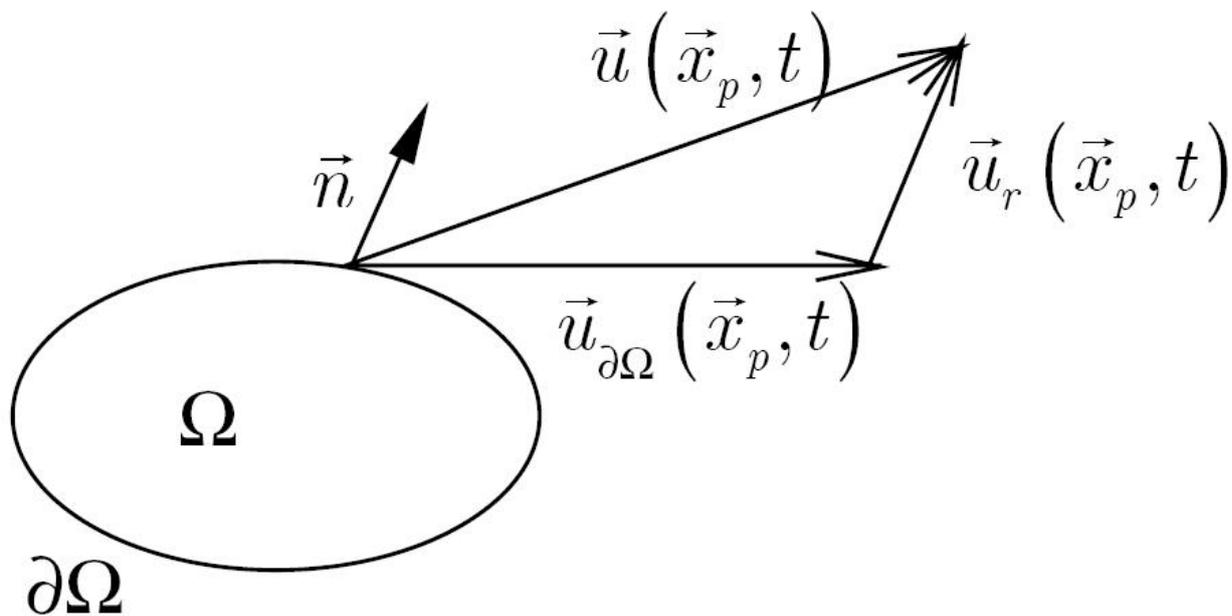


Figure 3.4:

3.10 Conditions initiales

A un instant de référence t_0 , on suppose connu :

$$u(\vec{x}, t_0) = \vec{u}_0 \vec{x}$$

$$p(\vec{x}, t_0) = p_0 \vec{x}$$

$$\rho(\vec{x}, t_0) = \rho_0 \vec{x}$$

$$T(\vec{x}, t_0) = T_0(\vec{x})$$

Remarque : en compressible, deux des trois dernières conditions sont nécessaires, tandis qu'en incompressible, seule la condition sur $u..$ est utile.

3.11 Equations de Navier-Stokes

Equations de conservations

Les équations de Navier-Stokes proviennent de la conservation de la masse et de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (A.1) \quad (3.160)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \rho f \quad (A.2) \quad (3.161)$$

où :

- - \mathbf{u} est la vitesse du fluide ;
- - ρ la masse volumique ;
- - σ le tenseur des contraintes ;
- - f la densité massique des efforts extérieurs ;
- - $\frac{D}{Dt}$ la dérivée particulaire ($\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$).

Pour un fluide Newtonien τ s'écrit

$$\sigma = -pI + \tau \quad (A.3) \quad (3.162)$$

avec :

$$\tau = \eta(\nabla \cdot \mathbf{u})I + 2\mu D \quad (A.4) \quad (3.163)$$

$$\eta = \xi - \frac{2\mu}{3} \quad (A.5) \quad (3.164)$$

où :

- - p est la pression ;
- - τ la partie irréversible du tenseur des contraintes ;
- - μ et ξ les coefficients de première et deuxième viscosité ;
- - D le tenseur des taux de déformation ($D = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$).

La conservation de la quantité de mouvement peut ainsi s'écrire

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla(\eta \nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\nabla \cdot \mu D - \nabla p + \rho f \quad (A.6) \quad (3.165)$$

Pour des coefficients de viscosité μ et η constants on a donc :

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho f + (\eta + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (A.7) \quad (3.166)$$

3.11.1 Cas d'un fluide incompressible

L'équation A.1 devient dans ce cas

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (A.8) \quad (3.167)$$

et A.7 devient alors

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho f + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (A.9) \quad (3.168)$$

Equation qu'on peut encore écrire

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \tilde{p} - \nu \Delta \mathbf{u} = f \quad (A.10) \quad (3.169)$$

où :

- - $\tilde{p} = p/\rho$ est la pression réduite ;
- - $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique.

Pour mémoire, voici les équations de Navier Stokes complètes : l'équation de continuité et les trois équations de transport de la quantité du mouvement :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.170)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.171)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.172)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.173)$$

$$\text{opérateur}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \quad (3.174)$$

$$= \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.175)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{uu}) = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} uu & uv & uw \\ vu & vv & vw \\ wu & wv & ww \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) \\ \frac{\partial}{\partial x}(vu) + \frac{\partial}{\partial y}(vv) + \frac{\partial}{\partial z}(vw) \\ \frac{\partial}{\partial x}(wu) + \frac{\partial}{\partial y}(wv) + \frac{\partial}{\partial z}(ww) \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

$$= \begin{bmatrix} 2u \frac{\partial}{\partial x}(u) + v \frac{\partial}{\partial y}(u) + u \frac{\partial}{\partial y}(v) + w \frac{\partial}{\partial z}(u) + u \frac{\partial}{\partial z}(w) \\ u \frac{\partial}{\partial x}(v) + v \frac{\partial}{\partial x}(u) + 2v \frac{\partial}{\partial y}(v) + w \frac{\partial}{\partial z}(v) + v \frac{\partial}{\partial z}(w) \\ w \frac{\partial}{\partial x}(u) + u \frac{\partial}{\partial x}(w) + w \frac{\partial}{\partial y}(v) + v \frac{\partial}{\partial y}(w) + 2w \frac{\partial}{\partial z}(w) \end{bmatrix} \quad (3.178)$$

$$= \begin{bmatrix} u \frac{\partial}{\partial x}(u) + v \frac{\partial}{\partial y}(u) + w \frac{\partial}{\partial z}(u) + u \left(\frac{\partial}{\partial x}(u) + \frac{\partial}{\partial y}(v) + \frac{\partial}{\partial z}(w) \right) \\ u \frac{\partial}{\partial x}(v) + v \frac{\partial}{\partial y}(v) + w \frac{\partial}{\partial z}(v) + v \left(\frac{\partial}{\partial x}(u) + \frac{\partial}{\partial y}(v) + \frac{\partial}{\partial z}(w) \right) \\ u \frac{\partial}{\partial x}(w) + v \frac{\partial}{\partial y}(w) + w \frac{\partial}{\partial z}(w) + w \left(\frac{\partial}{\partial x}(u) + \frac{\partial}{\partial z}(w) + \frac{\partial}{\partial y}(v) \right) \end{bmatrix} \quad (3.179)$$

On rappelle ci-dessous les équations de Navier Stokes incompressibles :

$$\partial u_i \partial x_i = 0 \quad (3.180)$$

$$\partial u_i \partial t + u_j \partial u_i \partial x_j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \quad (3.181)$$

Les inconnues du système sont $u_i(x_i, t)$ et $p(x_i, t)$.

Compte tenu de 2.6, l'équation 2.7 peut également s'écrire

$$\mathbf{u}_t + \nabla \cdot (\mathbf{uu}) + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = f \quad (3.182)$$

en notant $\mathbf{uv} = \mathbf{u} \otimes v = \mathbf{uv}^t = (u_i v_j)_{ij}$.

Les équations gouvernant le mouvement d'un fluide sont les équations de Navier-Stokes qui, dans le cas incompressible s'écrivent (cf. appendice A) :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.183)$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = f \quad (3.184)$$

où : - \mathbf{u} est la vitesse du fluide ; - p la pression réduite ???? ; - ν la viscosité cinématique ; - f la densité massique des efforts extérieurs ; les différents termes étant adimensionalisés.

3.12 Les équations de Navier-Stokes.

Ce que nous avons fait jusqu'à présent est valable pour des milieux mécaniques continus très généraux. Nous allons maintenant nous occuper plus spécifiquement des fluides, et au final, nous considérerons des

fluides newtonien incompressibles. Nous établirons les équations d'écoulement de tels fluides, aussi appelées équations de Navier-Stokes classiques.

Loi de comportement de σ pour les fluides newtoniens De manière générale, il a été établi expérimentalement, que pour des fluides quelconques, le tenseur σ vérifie les conditions (i) et (ii) ci dessous:

- (i) σ est une fonction du tenseur des vitesses de déformations, i.e.

$$\sigma(M) = \phi(\hat{D}(v(M))),$$
- (ii) La fonction ϕ introduite en (i) est isotrope, c'est à dire :

$$\forall Q \text{ matrice de rotation : } \phi(Q\hat{D}Q^t) = Q\phi(\hat{D})Q^t.$$

Signalons qu'il est d'usage courant, de faire "l'économie de la fonction ϕ " et, de conserver la notation σ pour désigner la fonction qui, au tenseur des vitesses de déformations, associe le tenseur des contraintes.

Lorsque le fluide est Newtonien, on a, en plus de (i) et (ii), la propriété suivante (iii) σ dépend de manière affine de \hat{D} i.e. au plus du premier degré par rapport aux composantes de \hat{D} .

Nous considérons à partir de maintenant un fluide newtonien incompressible. En tenant compte des lois (ii), (iii) ainsi que des équations (1.19) et (1.20), nous obtenons la loi de comportement pour σ :

$$\sigma = -pId + 2\mu\hat{D}, (1.21) \quad (3.185)$$

où p est la pression du fluide (a priori inconnue) et μ est le coefficient de viscosité du fluide, qui est lui connu.

Homogénéité du fluide.

Nous supposons que le fluide étudié est homogène. Cela signifie, qu'à $t = 0$, sa densité est constante et égale à une valeur ρ_0 .

En utilisant l'équation de continuité (1.10) du fluide, nous vérifions ensuite que ρ reste constamment égale à ρ_0 .

Reprenons à présent l'équation (1.17) qui traduit le mouvement du fluide. On a

$$\rho_0 \vec{\gamma} = \text{div} \vec{\sigma} + \rho_0 \vec{f} \text{ dans } \Omega_t. \quad (3.186)$$

En utilisant encore (1.4) et (1.21), il vient:

$$\rho_0 \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + D\vec{v} \circ \vec{v} \right)}_{\vec{\gamma}_{par(1:4)}} = \underbrace{-\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v}}_{= \text{div} \vec{\sigma}_{par(1:21)}} + \rho_0 \vec{f}. \quad (3.187)$$

D'où finalement, l'équation vectorielle :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + D\vec{v} \circ \vec{v} - \frac{\mu}{\rho_0} \Delta \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p. (1.22) \quad (3.188)$$

Nous sommes à présent en mesure de formuler le système de Navier-Stokes classique, qui décrit l'écoulement d'un fluide homogène et incompressible. A partir de maintenant, nous n'utiliserons plus de notation particulière pour désigner les vecteurs. Le système de Navier-Stokes est le problème que nous appelons (P) , qui est constitué des équations ci-dessous:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Dv \circ v - \nu \Delta v = f - \nabla P, \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.189)$$

$$v(x, t) = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T), \quad (3.190)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \text{ dans } \Omega, \quad (3.191)$$

$$\text{div } v(x, t) = 0, \text{ dans } \Omega \times (0, T). \quad (3.192)$$

Les inconnues sont $v : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $P : \Omega(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$. Alors que $\Omega, T, f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $v_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont donnés.

3.12.1 La transition du laminaire au turbulent, Nombre de Reynolds et turbulence

Adimensionnement des équations

Supposons que le fluide soit à densité constante ρ , les ENS s'écrivent (quitte à changer p en p/ρ)

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (3.193)$$

Le coefficient $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique ou moléculaire du fluide. Atitre indicatif pour l'eau $\nu \approx 10^{-4} m^2 \cdot s^{-1}$. Introduisons des grandeurs de référence, (ou échelles caractéristique). Soit L une longueur de référence, par exemple le diamètre de Ω , ou de Ω^c (la longueur de la coque d'un navire...). Ensuite on peut se donner ou bien un durée de référence T ou encore U une vitesse de référence (par exemple la vitesse "moyenne" du courant) en respectant évidemment le lien $U = \frac{L}{T}$.

Introduisons les coordonnées 'à dimensionnées'

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T} \quad (3.194)$$

et les inconnues

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \hat{p} = \frac{p}{U^2} \quad (3.195)$$

et les forces extérieures $\hat{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{f}T^2}{L}$.

On a $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \hat{t}}$ et $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \hat{x}}$ de sorte que les ENS se transforment en

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} = -\nabla \hat{p} + \nu \frac{T}{L^2} \Delta \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{f}} \\ \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} = 0 \end{cases} \quad (3.196)$$

Introduisons le nombre sans dimension, appelé nombre de Reynolds

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (3.197)$$

on a

$$\frac{1}{Re} = \frac{\nu T}{L^2} \quad (3.198)$$

de sorte que les ENS s'écrivent (en enlevant les 'chapeaux')

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (3.199)$$

C'est sous cette forme adimensionnée que nous les écrivons le plus souvent.

Introduisons le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{UL}{\mu/\rho} = \frac{\text{vitesse caractéristique} \times \text{longueur caractéristique}}{\text{viscosité cinématique}} \quad (3.200)$$

sphère de diamètre 1 cm se déplaçant dans l'eau à 1 cm/s	$Re \cong 100$
petit avion se déplaçant à 30m/s	$Re \cong 2.10^7$
fluides géophysiques	$Re \cong 10^{20}$

Table 3.1: Reynolds

L'équation A.10 s'écrit alors :

$$u_t + u \cdot \nabla u + \nabla \tilde{p} - Re^{-1} \Delta u = f(A.15) \quad (3.201)$$

Le nombre de Reynolds peut être interprété comme le rapport entre le temps visqueux τ_{vis} , temps nécessaire à la viscosité pour amortir une perturbation et le temps cinétique τ_{cin} , temps caractéristique de déplacement des particules fluides.

$$Re = \frac{LU}{\nu} = \frac{L^2/\nu}{L/U} = \frac{\tau_{vis}}{\tau_{cin}} \quad (3.202)$$

Il représente ainsi le rapport dans l'équation A.15 entre l'action de la viscosité et celle de la convection. Citons quelques valeurs représentatives du nombre de Reynolds :

Le nombre de Reynolds a été introduit par Osborne Reynolds en 1883. Il compare les termes de convection (non linéaires) aux termes de dissipation visqueuse.

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (3.203)$$

Au fur et à mesure où le nombre de Reynolds augmente, on observe un changement de topologie de l'écoulement qui correspond à la transition laminaire / turbulent. Le nombre de Reynolds critique Re_c correspond à ce passage, il est en général de l'ordre de 1000. On constate en effet que l'écoulement devient "turbulent" à partir de $Re \approx 2000$. Il prend des valeurs différentes selon le type d'écoulement.

Quand $Re \gg 1$, les termes non linéaires deviennent prépondérants, et l'approximation linéaire n'est plus possible. On voit que lorsque $Re \gg 1$ le terme de diffusion $\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}$ "au risque"⁵ d'être petit par rapport au terme non linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$. La non linéarité va prédominer et l'écoulement va être complexe.

Inversement, lorsque $Re \sim 1$ le terme de diffusion va prépondérer et l'écoulement sera très régulier "laminaire". Quand $Re \ll 1$ les termes non linéaires (la convection) sont masqués par la diffusion visqueuse, les équations se rapprochent donc d'équations linéaires. On pourra même dans le cas des écoulements dits rampants (creeping flows) par exemple les glaciers ($Re \ll 1$) négliger complètement le terme non linéaire. On obtient alors le système de Stokes qui fait l'objet du chapitre suivant.

- pour un écoulement de Poiseuille (écoulement dans un tube) (1841), au delà de $Re = 2000$, les quantités ne dépendent plus du nombre de Reynolds. Le frottement est proportionnel à U^2 au lieu de $\mu U/D$ dans le cas laminaire.
- pour un écoulement de Couette (écoulement entre deux plans infinis) : $Re_c = 1000$
- pour une couche limite sur plaque plane, on utilise le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de couche limite δ , $Re = U\delta/\nu$. Pour $Re_\delta < 520$, la couche limite se développe suivant un profil de Blasius en $\delta = \sqrt{x}$. Pour $520 < Re_\delta < 2000$, on a une zone de transition dans laquelle se développent des ondes dites de Tollmien-Schlichting. Au delà, des petites échelles apparaissent et on parle alors de couche limite pleinement développée. Le nombre de Reynolds correspondant basé sur la distance x depuis le démarrage de la couche limite est de $Re_x = 10^6$ environ. Dans un écoulement d'air à 10m/s, la couche limite devient pleinement turbulente à environ 1m du bord d'attaque.

⁵les choses ne sont pas si simples évidemment, en particulier au voisinage des parois à cause des phénomènes de couche limite.

- pour une couche de mélange (écoulement qui résulte du mélange de deux fluides injectés à deux vitesses différentes), le nombre de Reynolds critique basé sur la vitesse moyenne $(U_2 - U_1)/2$ et sur l'épaisseur de couche de mélange $\delta(x)$ est $Re_c = 2500$ environ.

3.12.2 Quelques notions sur les instabilités et les tourbillons

Le nombre de Strouhal (1870) est le nombre principal à connaître pour l'étude des structures cohérentes dans un écoulement turbulent. Il représente la fréquence principale de l'écoulement, rendue sans dimension par la dimension D de l'obstacle et par la vitesse de l'écoulement U_0 :

$$St = \frac{fU_0}{D} \quad (3.204)$$

C'est ce nombre qui est regardé en premier pour caractériser un lâcher de tourbillons ou un phénomène périodique ayant lieu dans un écoulement turbulent.

Vous trouverez ici un aperçu de quelques phénomènes qui apparaissent de manière récurrente dans les écoulements turbulents, et qui sont étudiés avec minutie pour la compréhension de la physique de l'écoulement.

- les spirales de Kelvin-Helmholtz : dans des couches de mélange ou dans les couches cisillées. Les tourbillons grossissent en s'éloignant et s'apparient deux par deux
- l'allée de Van Karman (1911) : en aval d'un cylindre à section circulaire ou à section carrée
- les tourbillons longitudinaux : les tourbillons 2D (comme des spaghettis crus) se déstabilisent, en s'éloignant de l'obstacle, dans la 3ème direction comme des serpents, et se rapprochent les uns des autres par endroits. A ces endroits, il se forme des plus petits tourbillons dans le sens de l'écoulement (le sens longitudinal), qui forment des liens entre les tourbillons principaux.
- les tourbillons en épingle à cheveux : il s'agit de structures caractéristiques de la couche limite pleinement développée, ils se détachent de la paroi en se relevant de plus en plus à mesure que la couche limite se développe.

Tous ces phénomènes sont des exemples d'analyse déterministe des écoulements turbulents. Une mesure ou un calcul moyen ne peut prédire ces phénomènes qui sont intrinsèquement instationnaires. Il faut effectuer des calculs très fins en temps et en espace pour être à même de bien prédire ce type de phénomène. Or ce sont ces phénomènes qui vont être responsables de la topologie globale de l'écoulement. C'est là l'un des problèmes majeurs des simulations numériques de la turbulence.

3.13 Equation du tourbillon (ou de la vorticité)

La vorticité est le rotationnel de la vitesse, $\vec{w} = \vec{rot}\vec{u}$

En appliquant l'opérateur rotationnel   l'équation de Navier-Stokes incompressible, on obtient l'équation vérifiée par \vec{w} ( quation du tourbillon) :

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{w}}{\partial t}}_{\text{instationnaire}} + \underbrace{(\overline{grad\vec{w}})}_{\text{convection}} \cdot \vec{u} = \underbrace{(\overline{grad\vec{u}})}_{\text{tir ment}} \cdot \vec{w} + \underbrace{\nu \Delta \vec{w}}_{\text{diffusionviscosit }} \quad (3.205)$$

Le terme d' tir ment joue un rôle fondamental en turbulence tridimensionnelle. Pour illustrer ce rôle, on peut observer que l'équation de w dans laquelle on ne tient compte que du terme d' tir ment.

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = (\overline{grad\vec{u}}) \cdot \vec{w} \quad (3.206)$$

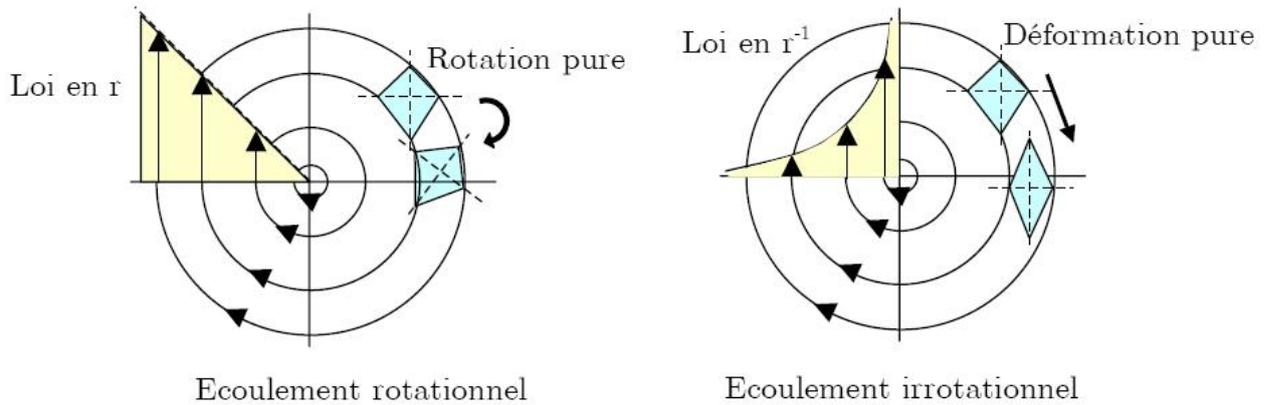


Figure 3.5: Ecoulement rotationnel - Ecoulement irrotationnel

est équivalente à l'équation vérifiée par un vecteur infinitésimal construit à partir de deux points voisins M et M' transportés par \vec{u} , avec

$$\frac{d\vec{MM}'}{dt} = \vec{u}(M) - \vec{u}(M') = (\overline{\text{grad}}\vec{u}) \vec{MM}' \quad (3.207)$$

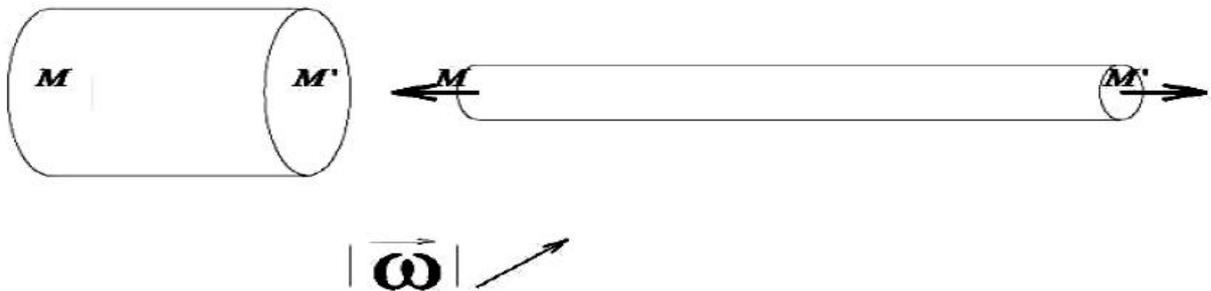


Figure 3.6:

→ on peut faire une analogie entre le phénomène de dispersion de paires de particules et le mécanisme d'étirement tourbillonnaire.

Vorticité ou tourbillon

Définition 3.13.1. On appelle vecteur vorticité et on note ω le rotationnel de \mathbf{u}

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} \quad (3.208)$$

Remarque. On notera que la vorticité a une nature différente en dimension deux ou trois⁶. En dimension 2, $\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ est un scalaire. En dimension 3, $\vec{\omega} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \cdot \mathbf{e}_i$ est un vecteur. \diamond

⁶En fait il s'agit d'une 2-forme différentielle obtenue par différentiation extérieure de la 1-forme circulation $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \sum_j u_j dx_j$
Préciser la notion de n -formes

beginExercice.

En dimension 4, on peut représenter ω par une matrice antisymétrique.

beginExercice. Vérifier une écriture due à Lamb du terme non linéaire

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \omega \times \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^2 / 2 \quad (3.209)$$

L'intérêt principal de la vorticité d'un champ de vecteur est qu'elle *détecte les tourbillons*.

beginExercice.

Considérons par exemple l'écoulement circulaire suivant : $\mathbf{u} = (-y, x)$, tracer (par exemple avec `gnuplot`) ses lignes de courants et calculer la vorticité correspondante. Faites de même avec l'écoulement de Smolarkiewicz $\mathbf{u}(x, y) = (\sin(\pi x) \sin(\pi y), \cos(\pi x) \cos(\pi y))$ où $(x, y) \in (3, 3) \times (3, 3)$. Indication : on pourra

introduire la fonction de courant ψ par $\mathbf{u} = \nabla^\perp \psi = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$.

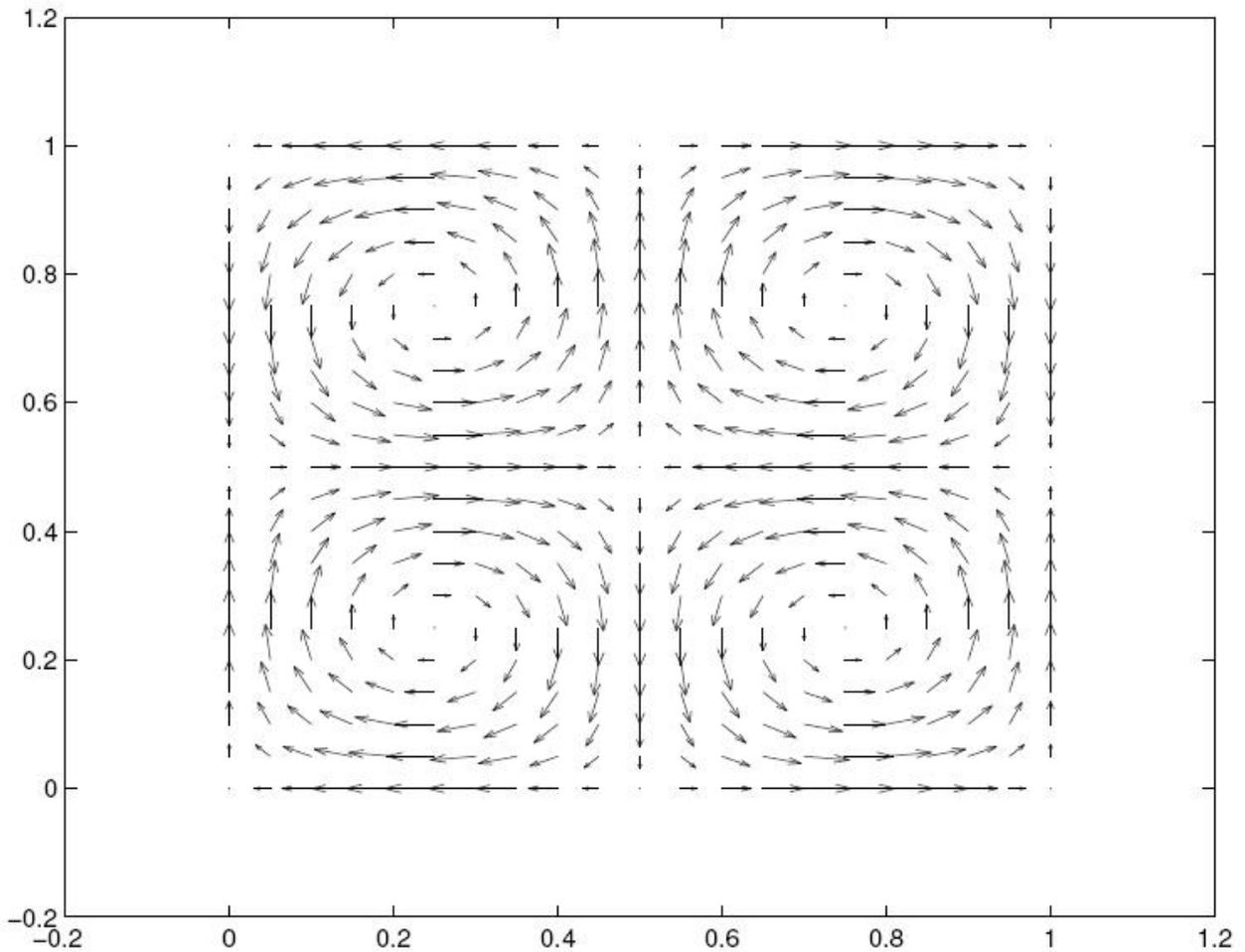


Figure 3.7: a

Remarque. Pour un écoulement remplissant tout l'espace \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, tel que $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, la loi de Biot

et Savart permet d'exprimer \mathbf{u} en fonction de ω

$$\mathbf{u}(x, t) = \int K(x, y) \times \omega(y, t) dy \quad (3.210)$$

avec

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{x-y}{|x-y|^3}, & \text{si } n = 3 \\ \frac{1}{2\pi} \frac{x-y}{|x-y|^2}, & \text{si } n = 2 \end{cases} \quad (3.211)$$

La question de la régularité est délicate. On peut montrer que si ω est borné et hölder alors \mathbf{u} est \mathcal{C}^1 .

Chapter 4

Modèles de turbulence

4.1 Les principales modélisations de la turbulence

Il existe trois principales méthodes de modélisation d'un écoulement turbulent : la simulation numérique directe, dans laquelle on cherche à représenter la totalité des phénomènes physiques, la simulation des grandes échelles, dans laquelle on représente seulement les plus gros tourbillons en fonction du temps, et la simulation moyennée dans laquelle on représente seulement l'écoulement moyen.

4.1.1 La simulation numérique directe (DNS)

Lorsque le nombre de Reynolds est élevé, l'écart entre les plus grandes échelles dans l'écoulement et les plus petites devient tellement élevé qu'il est impossible de prendre en compte toutes les échelles dans un calcul. On montre que le nombre de mailles nécessaires pour résoudre toutes les échelles est proportionnel à $Re^{9/4}$. Ainsi pour un nombre de Reynolds de 10000, il faut envisager un nombre de mailles de 10^9 mailles... C'est ce que l'on appelle la simulation numérique directe (DNS ou Direct Numerical Simulation) : aucune modélisation de la turbulence n'est effectuée, on résout toutes les quantités physiques.

En l'état actuel des choses, les plus gros calculs sont justement de l'ordre de 1024^3 mailles, et tournent sur des machines de plusieurs centaines de processeurs en parallèle. Ce type de calcul est extrêmement difficile à mettre en oeuvre et génère un nombre de données tellement important qu'elles sont très difficiles à utiliser, même dans un cadre de recherche scientifique. Ce type de simulation est donc réservé à des écoulements académiques à des nombres de Reynolds inférieurs à 1000, pour servir d'expérience numérique, souvent utilisées pour la validation des modèles de turbulence que nous allons voir par la suite.

avoir un exemple de calcul et les différentes équations correspondantes DNS, LES, RANS

Par le moyennage des équations de Navier-Stokes, on souhaite substituer le calcul de $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})$ à celui de (\mathbf{u}, p) . Toutefois, le filtrage des équations de Navier-Stokes fait intervenir $\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}$ dans l'équation moyennée (2.10) or ce terme n'est pas connu. Il ne peut être déterminé par de nouvelles équations sans faire apparaître de nouvelles inconnues : on peut par exemple multiplier l'équation (2.10) par \mathbf{u} et la filtrer de nouveau, auquel cas apparaît un terme de corrélation triple, \overline{uuu} et ainsi de suite ... Il est donc nécessaire d'introduire des hypothèses de modélisation supplémentaires.

4.1.2 RANS

La simulation des équations de Navier Stokes moyennées (RANS)

Cette approche consiste à ne simuler que l'écoulement moyen en temps. Toutes les fluctuations sont filtrées et on modélise ces fluctuations par l'action d'une viscosité turbulente.

Les deux types de moyenne possible sont les suivantes :

- moyenne d'ensemble : on effectue N fois la même expérience (c'est-à-dire le même écoulement dans la même soufflerie) et on moyenne les données obtenues
- moyenne temporelle : on effectue une expérience pendant un temps très long et on moyenne les données obtenues

Si le temps de moyenne est suffisamment long, en principe les moyennes temporelles sont indépendantes du temps. En revanche si le temps de moyenne est court (pas de temps petit devant le phénomène principal), les moyennes temporelles restent dépendantes du temps. Les moyennes d'ensemble peuvent également être dépendantes du temps, par exemple pour un écoulement à une fréquence principale périodique.

Lorsque les moyennes temporelles et d'ensemble ne coïncident pas, on dit que le système n'est pas ergodique : lorsque le système évolue lentement par exemple, ou lorsque la moyenne temporelle sera différente en fonction de conditions initiales différentes. Lorsque les moyennes d'ensemble et les moyennes temporelles sont indépendantes du temps et égales, on dit que le processus est "statistiquement stationnaire".

Dans le paragraphe suivant, on décrit la démarche d'obtention des équations moyennées et les modèles de turbulence associés.

L'objectif des modèles RANS est de calculer la moyenne statistique $\langle \mathbf{u} \rangle = \bar{\mathbf{u}}$ du champ de vitesse \mathbf{u} . L'hypothèse première est de supposer que le tenseur de Reynolds est fonction du gradient de vitesse, ce qu'on écrit, pour des raisons de symétrie :

$$R = R(\nabla^s \mathbf{u}), \text{ où } \nabla^s \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t \quad (4.1)$$

L'hypothèse n'est pas vérifiée, cependant, le long des parois, où l'écoulement est laminaire.

Hypothèse de Reynolds - Equations des modèles RANS

Puis l'hypothèse de Reynolds consiste à écrire ∇ sous la forme

$$R = \nu_T \nabla^s \mathbf{u} + \frac{2}{3} k I. \quad (4.2)$$

L'action du tenseur sous-maille est ainsi assimilé à celui d'une viscosité turbulente ν_T combiné à un ajustement de la pression : $\bar{p} := \bar{p} - \frac{2}{3} k I$. Les équations de Navier-Stokes moyennées peuvent alors s'écrire :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.3)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_t + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \bar{p} - \nabla \cdot ((\nu + \nu_T) \nabla^s \bar{\mathbf{u}}) = \bar{f}; \quad (4.4)$$

en effet $\nu \Delta \bar{\mathbf{u}} = \nabla \cdot (\nu \nabla^s \bar{\mathbf{u}})$, compte tenu de (2.13).

Reste à modéliser ν_T .

Modèle de Smagorinsky

Le modèle le plus immédiat, en se plaçant dans le cas d'une turbulence homogène, est de prendre $\nu_T = Cte$. Le niveau de modélisation suivant, proposé par Ladyzhenskaya et Smagorinsky, consiste à écrire :

$$\nu_T = C_S \delta^2 |\nabla^s \bar{\mathbf{u}}| \quad (4.5)$$

Ce modèle pour être performant demande cependant une grille de discrétisation de taille très fine.

modèles à zéro équation

modèles à zéro équation : ν_t est obtenu directement par une expression algébrique en fonction d'une vitesse caractéristique et d'une longueur caractéristique appelée la longueur "de mélange"

$$\nu_t = \kappa u_* l \quad (4.6)$$

avec u_* la vitesse de friction

$$u_*^2 = \nu \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (4.7)$$

et l la longueur de mélange donnée par la loi de Van Driest

$$l = \kappa y \left(1 - \exp \left(-\frac{y^+}{A^+} \right) \right) \quad (4.8)$$

avec $\kappa = 0,41$ la constante de Von Karman, $A^+ = 26$ une constante, et $y^+ = \frac{y u_*}{\nu}$

modèle à une équation

modèle à une équation : ν_t est réécrit en fonction de l'énergie cinétique turbulente k .

$$\nu_t = C_\nu l \sqrt{k} \quad (4.9)$$

On écrit alors une équation supplémentaire pour obtenir k

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = -2 \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - C_k \frac{k^{3/2}}{l} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + C_\sigma k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (4.10)$$

modèle à deux équations

modèle à deux équations : ν_t est réécrit en fonction de k et du taux de dissipation de la turbulence ϵ :

$$\nu_t = C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\epsilon} \quad (4.11)$$

avec

$$\epsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (4.12)$$

Ce taux de dissipation est de plus en plus élevé lorsque l'écoulement possède beaucoup de petites échelles, de fluctuations de vitesses. Il s'agit de la dissipation de ces petites échelles en chaleur.

On écrit alors deux équations supplémentaires pour le transport de k et d' ϵ . Les équations pour k et pour ϵ sont les suivantes

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + C_\sigma k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (4.13)$$

et

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + u_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = -C_{\epsilon 1} \overline{u'_i u'_j} S_{ij} \frac{\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + C_\sigma \epsilon \nu_t) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right) \quad (4.14)$$

avec S_{ij} le taux de déformation du champ moyen :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.15)$$

On observe l'apparition de quatre constantes : $C_\mu, C_{\sigma k}, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}, C_{\sigma \epsilon}$. Il reste donc à caler ces constantes. Pour cela on utilise soit des considérations théoriques (cascade de Kolmogorov), soit des comparaisons avec les termes exacts calculés avec des données expérimentales, soit en faisant varier les constantes jusqu'à obtenir un écoulement moyen satisfaisant. Les constantes les plus souvent utilisées sont celles de Jones et Launder (1972) :

C_μ	0,09
$C_{\sigma k}$	1
$C_{\epsilon 1}$	1,44
$C_{\epsilon 2}$	1,92
$C_{\sigma \epsilon}$	0,77

Ces constantes ont donc été optimisées de manière "empirique". D'autres auteurs (Yakhot et al, 1992) ont cherché à renormaliser ces constantes de manière à ce que certains principes de la physique ne soient pas violés, notamment le fait que k et ϵ doivent toujours rester positifs, et que le modèle doit être invariant par changement de repère galiléen. La nouvelle constante C_μ est de 0,085 au lieu de 0,9. On appelle le modèle le modèle $k - \epsilon$ RNG (pour Re-Normalization Group).

En dehors de ce modèle il existe d'autres modèles à deux équations comme par exemple le modèle $k - \omega$, où $\omega = \epsilon/k$ de Wilcox en 1988. Il existe aussi des approches dites "au second ordre" (Launder, 1975) dans lesquelles on ne modélise pas le transport de k , mais celui de chaque terme du tenseur de Reynolds $\sigma_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$. A la place de l'équation pour k , il y a 6 équations à résoudre dans ce type de modèle : $(\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}, \overline{u'v'}, \overline{u'w'}, \overline{v'w'})$, et toujours l'équation pour ϵ . Dans chaque équation apparaît de nouvelles constantes de calage, qui doivent être fixées par comparaison avec des expériences en soufflerie. Ces modèles sont plus précis, et plus adaptés pour les écoulements fortement anisotropes, c'est-à-dire pour lesquels certaines directions de l'écoulement ne se comportent pas comme les autres, comme par exemple dans un décollement en arrière d'une voiture. Tous ces modèles sont décrits en détails dans Chassaing ([3]).

Modèle $K - \text{Epsilon}$

Le modèle $K - \text{Epsilon}$, plus évolué, est largement utilisé. Il se fonde sur l'idée que :

$$R = R(k, \epsilon, \nabla^S \bar{\mathbf{u}}) \quad (4.16)$$

où

- - $\epsilon = \frac{\nu}{2} \langle |\nabla^S \bar{\mathbf{u}}'|^2 \rangle$ est le taux de dissipation d'énergie turbulente ;
- - $k = \frac{1}{2} \langle |\bar{\mathbf{u}}'|^2 \rangle$ l'énergie cinétique de la turbulence.¹

Pour obtenir les équations vérifiées par k et ϵ il est nécessaire que soient vérifiées les hypothèses suivantes :

- - l'hypothèse de Reynolds ;
- - l'ergodicité ;

¹La notation k désigne ici le taux de dissipation d'énergie turbulente et non plus le nombre d'ondes.

- - l'isotropie de u' ;
- - $\Phi(\partial_t e + (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')\nabla e) \approx \partial_t \bar{e} + \bar{\mathbf{u}}\nabla \bar{e} - \nabla \cdot (\tilde{\nu}_T \nabla \bar{e})$ pour toute quantité scalaire e .

Le modèle conduit alors à une viscosité turbulente de la forme :

$$\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (4.17)$$

où ε et k sont estimés par les équations approchées suivantes, déduites des équations de Navier-Stokes :

$$\partial_t \varepsilon + \bar{\mathbf{u}}\nabla \varepsilon - \frac{c_1 k}{2} |\nabla^S \bar{\mathbf{u}}|^2 - \nabla \cdot \left(c_\varepsilon \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + c_2 \frac{\varepsilon^2}{k} = 0 \quad (2.15) \quad (4.18)$$

$$\partial_t k + \bar{\mathbf{u}}\nabla k - \frac{c_\mu k^2}{2 \varepsilon} |\nabla^S \bar{\mathbf{u}}|^2 - \nabla \cdot \left(c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla k \right) + \varepsilon = 0 \quad (2.16) \quad (4.19)$$

Les constantes $c_\mu = 0,09$, $c_1 = 0,126$, $c_2 = 1,92$, $c_\varepsilon = 0,07$,² ont été évaluées expérimentalement par Comte-Bellot et Corsin en 1966. Cette estimation repose sur les hypothèses que :

- - la décroissance en temps de k et ε est polynomiale ;
- - la variation radiale de $\bar{\mathbf{u}}$ par rapport au flot moyen est localement linéaire ;
- - la décroissance de \mathbf{u} près des parois est logarithmique.

Ce modèle est détaillé par Mohammadi et Pironneau [3].

4.1.3 La simulation des grandes échelles (LES)

Afin d'augmenter le nombre de Reynolds des simulations numériques, la simulation des grandes échelles (LES pour Large eddy Simulation) ne résout que les échelles de l'écoulement supérieures à une taille de coupure donnée. On suppose qu'en dessous de cette taille, la turbulence est isotrope et que les tourbillons peuvent être modélisés par une viscosité turbulente supplémentaire. Cette approche est apparue dans les années 1970 et permet à l'heure actuelle d'effectuer des calculs relativement réalistes à des nombres de Reynolds entre 1000 et 50000 environ.

En pratique on considère que toutes les échelles qui ont une taille inférieure à la taille locale de la maille sont modélisées. Ainsi on appelle le modèle de turbulence le modèle "de sous-maille". Le nombre de modèles de sous-maille développés depuis les années 70 est très important. Chaque modèle a été développé et validé pour telle ou telle classe d'écoulement, avec chacun des caractéristiques différentes en terme de coût de calcul, de robustesse (non explosion des calculs), de précision (par rapport à des essais), de représentation physique des phénomènes, d'universalité (précision sur plusieurs types d'écoulement).

On trouvera dans l'ouvrage de Pierre Sagaut [7] une description assez complète de l'ensemble des modèles existants.

Les modèles de SGE se fondent sur une séparation entre grandes et petites échelles, autour d'une valeur qualifiée de longueur de coupure, la séparation étant obtenue par l'application d'un filtre passe-bas en fréquence. Les grandes échelles sont alors résolues alors que l'action des petites est modélisée. Différentes approches sont utilisées pour cette modélisation. Ainsi que par Sagaut [15] qui recense les principales approches utilisées, on peut les répartir en deux grandes catégories :

- - la modélisation structurelle qui consiste à approcher le tenseur sous-maille τ à partir d'une relation de la forme $\mathbf{u}' = H(\bar{\mathbf{u}})$ ou directement $\tau = H(\bar{\mathbf{u}})$;

²Les valeurs citées sont celles actuellement utilisées et qui ont été réajustées depuis leur estimation initiale

- - la modélisation fonctionnelle où l'on modélise non plus τ mais son action, par une relation de la forme $\nabla \cdot \tau = H(\bar{\mathbf{u}})$.

Nous détaillons ci-après un modèle et renvoyons à [15] pour une description très complète des principaux modèles de SGE.

Similarité d'échelle

La notion de cascade d'énergie suggère que les échelles interagissent de proche en proche. Les plus grandes échelles résolues agissent sur les plus petites qui elles mêmes agissent sur les échelles non résolues. Le modèle de similarité d'échelle suppose que les tenseurs construits à partir de 2 bandes spectrales consécutives sont similaires. On utilise dans ce modèle, appelé modèle de Bardina, l'approximation $\overline{ab} \approx \bar{a}\bar{b}$. On a alors pour les tenseurs de Reynolds, croisé et de Léonard :

$$R = \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} \quad (4.20)$$

$$\approx \overline{\mathbf{u}'} \overline{\mathbf{u}'} \quad (4.21)$$

$$= (\overline{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}})(\overline{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}) \quad (4.22)$$

$$= (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\bar{\mathbf{u}}})(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\bar{\mathbf{u}}}) \quad (4.23)$$

$$C = \mathbf{u}\mathbf{u}' + \mathbf{u}'\mathbf{u} \quad (4.24)$$

$$\approx \bar{\mathbf{u}}\mathbf{u}' + \mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}} \quad (4.25)$$

$$= \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{u}} - \bar{\bar{\mathbf{u}}}) + (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\bar{\mathbf{u}}})\bar{\mathbf{u}} \quad (4.26)$$

$$L = \overline{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}} - \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}} \quad (4.27)$$

COMMENT POURKOI D'où $R + C = (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\bar{\mathbf{u}}}\bar{\bar{\mathbf{u}}})$ et le tenseur sous-maille s'exprime en fonction de $\bar{\mathbf{u}}$ sous la forme :

$$\tau = L + R + C = (\overline{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}} - \bar{\bar{\mathbf{u}}}\bar{\bar{\mathbf{u}}}) \quad (4.28)$$

Ce modèle conduit à un très bon niveau de corrélation avec le tenseur sous-maille effectif. En revanche il sous-estime la dissipation. Il a donné lieu à des modèles dérivés. Citons le modèle de Bardina filtré, comprenant une opération de filtrage supplémentaire, le modèle de Liu-Meneveau-Katz qui fait appel à deux niveaux de coupure différents, le modèle de similarité dynamique où intervient un troisième niveau de filtrage.

4.1.4 Equations de la simulation des grandes échelles

Contrairement au modèle $k - \epsilon$ qui est basé sur un filtrage temporel des équations (on résout seulement les quantités moyennes et on modélise toutes les fluctuations temporelles), la simulation des grandes échelles est basée sur un filtrage spatial des équations : on résout seulement les grandes échelles et on modélise les plus petites.

Pour cela on introduit un nouveau filtrage spatial qu'on va noter \hat{f} , et on décompose la vitesse u_i de la façon suivante :

$$u_i(t) = \hat{u}_i(t) + u_i''(t) \quad (4.29)$$

Ce filtrage spatial en théorie est le produit de convolution avec la variable f et un filtre passe bas en espace (filtre boîte, filtre Gaussien, filtre porte...).

En pratique ce filtrage est implicitement effectué par le maillage du calcul lui-même. Tout ce qui est plus petit que la maille est par définition non résolu, et sera modélisé par une hypothèse de viscosité turbulente comme pour le modèle $k - \epsilon$.

On suppose que le filtre \hat{u} commute avec les dérivées temporelles et spatiales, qu'il conserve les constantes $\hat{\alpha} = \alpha$, et qu'il est linéaire $u \hat{+} v = \hat{u} + \hat{v}$. En revanche contrairement aux moyennes de Reynolds, le champ de vitesse filtré deux fois n'est pas obligatoirement égal au champ de vitesse filtré une fois :

$$\hat{\hat{u}} \neq \hat{u}, \quad (4.30)$$

et les quantités non résolues filtrées ne sont pas obligatoirement égales à zéro :

$$\hat{u}^n \neq 0. \quad (4.31)$$

Les équations sont obtenues par application de ce filtrage sur les équations de Navier Stokes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i \hat{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \end{cases} \quad (4.32)$$

A nouveau on obtient un terme non résolu lié au terme non linéaire de l'équation de quantité de mouvement $u_i \hat{u}_j$. Pour cela on introduit de manière similaire au tenseur de Reynolds, le tenseur dit de sous-maille σ_{sm} (Léonard, 1979) tel que

$$\sigma_{sm} = u_i \hat{u}_j - \hat{u}_i \hat{u}_j \quad (4.33)$$

Alors les équations deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}_i \hat{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) - \frac{\partial \sigma_{sm}}{\partial x_j} \end{cases} \quad (4.34)$$

Le seul terme non connu est ce tenseur σ_{sm} . Il faut donc écrire une équation de fermeture pour ce terme. Comme pour le tenseur de Reynolds, on utilise une hypothèse de Boussinesq qui postule que le champ de vitesse sous-maille se comporte comme un fluide avec une viscosité dite de sous-maille ν_{sm} :

$$-\sigma_{sm} = \nu_{sm} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (4.35)$$

Où $\sigma_{kk} = \hat{u}_i^2 - \hat{u}_i^2$ représente l'énergie cinétique de sous-maille. Finalement les équations de la simulation des grandes échelles deviennent :

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}_i \hat{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}^*}{\partial x_i} + (\nu + \nu_{sm}) \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \quad (4.37)$$

avec \hat{p}^* la pression modifiée de la façon suivante

$$\hat{p}^* = \hat{p} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \quad (4.38)$$

4.1.5 Smagorinsky

Les modèles de sous-maille qui expriment ν_{sm} en fonction des variables résolues \hat{u}_i sont très nombreux dans la littérature. Le plus connu est celui de Smagorinsky (1963) :

$$\nu_{sm} = C_S \Delta \sqrt{2 \|\hat{S}_{ij}\|^2} \quad (4.39)$$

avec \hat{S}_{ij} le tenseur de déformation du champ de vitesse résolu

$$\hat{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.40)$$

La constante C_S est de 0,18 en théorie, mais elle est souvent fixée à 0,1 par les auteurs afin de réduire la dissipation souvent trop importante de ce modèle.

Δ représente la taille du filtre spatial. En pratique on l'évalue localement en fonction de la taille des mailles :

$$\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}. \quad (4.41)$$

De nombreux modèles de simulation des grandes échelles sont encore en cours de développement. Ils sont de plus en plus utilisés dans l'industrie car la puissance de calcul disponible permet maintenant d'utiliser des maillages suffisamment fins pour la LES à des nombres de Reynolds proches de cas industriels.

4.2 Modélisation des écoulements turbulents

Lorsque le calcul direct ne permet pas la résolution d'un problème d'écoulement, on va chercher à résoudre un problème approché obtenu en moyennant tout ou partie des valeurs du problème initial. Nous allons chercher à préciser le cadre théorique dans lequel se place cette approche avant de présenter plus précisément certains des modèles utilisés.

4.2.1 Equations moyennées

Commençons par présenter les outils que nous allons utiliser.

Moyenne d'ensemble

Soit une grandeur $X(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$. La moyenne d'ensemble de X en x est la moyenne obtenue par une infinité de mesures indépendantes $X^{(i)}$ de X :

$$\langle X \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X^{(i)}(x) \quad (4.42)$$

Pour $X \in \mathbb{R}^p$ on définit de même la moyenne d'ensemble du produit des valeurs de la k -ième composante X_k de x aux points x_1, \dots, x_r par :

$$\langle X_k(x_1) \dots X_k(x_r) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_k^{(1)}(x_1) \dots X_k^{(i)}(x_r) \quad (4.43)$$

Ergodicité

Un point ω est dit topologiquement infiniment récurrent si tout voisinage de ce point possède une infinité de points de sa trajectoire.

Lorsqu'une grandeur est homogène un domaine Ω considéré (la notion d'homogénéité sera précisée plus loin dans le cas de la turbulence), on peut faire l'hypothèse d'ergodicité, consistant à supposer que les points ω de Ω sont topologiquement infiniment récurrents.

Dans ces conditions, par l'application du théorème d'ergodicité, à partir d'une réalisation unique de l'expérience considérée, nous pouvons identifier la moyenne spatiale à la moyenne d'ensemble recherchée :

$$\langle X \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X^{(i)}(x) = \frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} X(y) dy \quad (4.44)$$

De même, lorsque X est stationnaire, sous l'hypothèse d'ergodicité, on va pouvoir identifier la mesure moyennée dans le temps avec la moyenne d'ensemble en temps :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X^{(i)}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} X(\tau) d\tau \quad (4.45)$$

Filtres

La réduction recherchée du nombre de degrés de liberté est effectuée par l'intermédiaire d'un filtre passe-bas en fréquences ϕ . En effet, un maillage plus lâche devient alors pertinent vis à vis de la résolution des équations filtrées. Il est souhaitable que ce filtre possède plusieurs propriétés pour permettre la manipulation des équations de Navier-Stokes :

- - la linéarité

$$\phi(u + \lambda v) = \phi(u) + \lambda \phi(v) \quad (4.46)$$

- - la commutation avec la dérivation

$$\partial_i(\phi(u)) = \phi(\partial_i u) \quad (4.47)$$

- - la commutation avec l'intégration

$$\phi\left(\int u\right) = \int \phi(u) \quad (4.48)$$

- - la propriété

$$\phi(\phi(u)v) = \phi(u)\phi(v) \quad (4.49)$$

qui entraîne l'idempotence ($\phi^n = \phi$).

4.2.2 Filtre : l'opérateur de Reynolds

Un filtre possédant ces quatre propriétés est appelé opérateur de Reynolds. Dans le cadre d'une démarche de type RANS, où l'on s'attache uniquement aux valeurs moyennées, le filtre naturel est le filtre statistique :

$$\phi(u) = \langle u \rangle = \int u(x, t, \omega) d\omega \quad (4.50)$$

quelle est la différence entre ω et x ??

Le principe est le suivant. On introduit dans les équations de Navier Stokes une décomposition de u_i en sa moyenne temporelle \bar{u}_i et sa fluctuation u'_i .

$$u(t) = \bar{u} + u'(t) \quad (4.51)$$

On utilise les axiomes de Reynolds, qui postulent que pour toute fonction aléatoire $f(x_i, t), g(x_i, t)$, et pour toute constante α

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} \quad (4.52)$$

$$\overline{\alpha f} = \alpha \bar{f} \quad (4.53)$$

$$\overline{f g} = \bar{f} \bar{g} \quad (4.54)$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} \quad (4.55)$$

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \quad (4.56)$$

Alors on en déduit que

$$\bar{f}' = 0 \quad (4.57)$$

et

$$\overline{f g} = \overline{f' g'} + \bar{f} \bar{g} \quad (4.58)$$

4.2.3 Exemples de filtres

Les filtres utilisés en pratique sont les moyennes

- - en espace

$$\phi_B(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u} \rangle_B = \frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} \mathbf{u}(y, t) dy; \quad (4.59)$$

- - en temps

$$\phi_I(u) = \langle u \rangle_I = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(x, \tau) d\tau; \quad (4.60)$$

- - en espace et en temps

$$\phi_{BI}(u) = \langle u \rangle_{BI} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \langle u \rangle_B d\tau. \quad (4.61)$$

Dans une démarche de type SGE on fait intervenir des filtre passe-haut en échelle que l'on peut modéliser par l'action d'un opérateur de convolution. L'action du filtre peut ainsi être locale. Les filtres classiquement utilisés sont, pour une fréquence de coupure δ :

- - le filtre boîte, correspondant à une moyenne en espace sur $B(x, r)$;

$$\phi_b(u) = G_b * u, G_b(\xi) = \frac{1}{\delta} \quad \text{si } |\xi| \leq \delta/2 \quad (4.62)$$

$$0 \quad \text{sinon ;} \quad (4.63)$$

- - le filtre gaussien

$$\phi_g(u) = \left(\frac{\delta}{\pi\delta^2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y) \exp\left(\frac{-\gamma|x-y|^2}{\delta^2}\right) dy \quad (4.64)$$

$$= G_g * u, G_g(\xi) = \left(\frac{\gamma}{\pi\delta^2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-\gamma|\xi|^2}{\delta^2}\right) \quad (4.65)$$

γ étant une constante choisie ;

- - le filtre porte

$$\phi_p(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y) \text{sin}_c\left(\frac{x-y}{\delta}\right) dy \quad (4.66)$$

$$= G_p * u, \quad (4.67)$$

$$G_p(\xi) = \text{sin}_c\left(\frac{\xi}{\delta}\right), \text{ où } \text{sin}_c(z) = \text{sin}(\pi z)/\pi z. \quad (4.68)$$

On notera, d'une manière générale, la décomposition de u par l'application d'un filtre, sous la forme :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad (4.69)$$

où $\bar{\mathbf{u}} = \phi(\mathbf{u})$ et $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \phi(\mathbf{u})$

On remarque que seul le filtre statistique est un opérateur de Reynolds tel que défini plus haut. Les filtre RANS s'en rapprochent toutefois car il vérifient les propriétés (2.1), (2.2), (2.3) et l'idempotence au lieu de la propriété (2.4).

On peut également noter qu'à partir du moment où la propriété (2.2) est satisfaite, ϕ peut être modélisé par un opérateur de convolution. Cette propriété n'est cependant pas mise en avant pour les filtres de type RANS pour lequel l'action du filtre sous forme d'une moyenne est fondamentale.

4.2.4 Application filtre

L'application à ces équations d'un filtre possédant les propriétés décrites au paragraphe 2.1.3 nous donne les équations de Navier-Sokes filtrées (ou moyennées) :

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad (4.70)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') = 0 \quad (4.71)$$

$$(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')_t + \nabla \cdot ((\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')) + \nabla \bar{p} - \nu \Delta (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') = \bar{f} \quad (4.72)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.73)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_t + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) + \nabla \bar{p} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} = \bar{f} \quad (4.74)$$

$$\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} + \tau \quad (4.75)$$

$$= \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} \quad (4.76)$$

$$(4.77)$$

Tenseur sous-maille

L'équation 2.10 peut s'écrire sous la forme

$$\bar{\mathbf{u}}_t + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} + \tau) + \nabla \bar{p} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} = \bar{f} \quad (4.78)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_t + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) + \nabla \bar{p} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} = \bar{f} - \nabla \cdot \tau \quad (4.79)$$

Le terme $\tau = \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}$ est appelé tenseur sous-maille. Par linéarité du filtre on peut le décomposer :

$$\tau = \overline{(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')} - \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} \quad (4.80)$$

$$= (\bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}}) + (\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}'} + \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}}) + \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} \quad (4.81)$$

$$= L + C + R \quad (4.82)$$

où l'on définit

- - le tenseur de Léonard : $L = \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}$;

- - le tenseur croisé : $C = \bar{\mathbf{u}}\mathbf{u}' + \mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}}$;

- - le tenseur de Reynolds $R = \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}$.

Si le filtre possède la propriété (2.4), on a alors $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u}' = 0$ et

$$L = \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} \quad (4.83)$$

$$= \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}\mathbf{u}} \quad (4.84)$$

$$= \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \bar{\mathbf{u}} \quad (4.85)$$

$$= 0 \quad (4.86)$$

$$C = \bar{\mathbf{u}}\mathbf{u}' + \mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}} \quad (4.87)$$

$$= \bar{\mathbf{u}}\mathbf{u}' - \mathbf{u}'\bar{\mathbf{u}} \quad (4.88)$$

$$= 0 \quad (4.89)$$

Le tenseur sous-maille se réduit alors au tenseur de Reynolds.

4.3 Equations de la simulation moyennée

On décompose $u_i(x_i, t) = \bar{u}_i(x_i) + u'_i(x_i, t)$ et $p(t) = \bar{p} + p'(t)$, on obtient :

$$A \frac{\partial(u_i + u'_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial(u_i + u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial(u_j + u'_j)(u_i + u'_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(p + p')}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \quad (4.91)$$

Si on applique maintenant l'opérateur moyenne à ces équations, en utilisant les axiomes de Reynolds, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_j u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \end{cases} \quad (4.92)$$

On obtient un nouveau terme inconnu : $\overline{u'_i u'_j}$. Les équations ne sont pas fermées. On appelle cela le problème de fermeture. On appelle ce terme le tenseur des contraintes de Reynolds $\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$. Pour fermer les équations, la méthode est basée sur l'hypothèse de Boussinesq : on suppose que le tenseur des contraintes de Reynolds a la même forme qu'un tenseur des contraintes visqueuses, c'est-à-dire que l'écoulement turbulent se comporte comme un fluide de viscosité ν_t :

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \overline{k} \delta_{ij} \quad (4.93)$$

avec k l'énergie cinétique turbulente instantanée

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}, \quad (4.94)$$

et \overline{k} l'énergie cinétique turbulente moyenne.

Les équations de Navier Stokes Moyennées deviennent finalement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_j \overline{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \end{cases} \quad (4.95)$$

avec p^* la pression modifiée :

$$p^* = \overline{p} + \frac{1}{3} \rho \overline{k}. \quad (4.96)$$

On note que la pression résolue n'est pas la vraie pression moyenne mais la pression modifiée p^* . On soustrait ensuite a posteriori l'énergie cinétique turbulente moyenne à la pression obtenue par le calcul pour retrouver la pression moyenne. Nous avons maintenant une nouvelle inconnue : ν_t . Les modèles de turbulence consistent à fermer cette inconnue par diverses méthodes.

4.3.1 Théorie de Kolmogorov (K41)

En 1941 Kolmogorov a présenté une théorie, appelée communément K41, précisant comment se déroulent les transferts d'énergie au sein de la turbulence. Cette théorie est à la base de certaines modélisations que nous aborderons plus loin.

La cascade de Kolmogorov

A l'opposé de cette observation des structures cohérentes des écoulements turbulents, il existe une théorie qui a contribué de façon majeure dans la compréhension de la turbulence : la théorie de Kolmogorov (1941). Elle repose sur une vision "statistique" de la turbulence. Elle dit que les tourbillons dans l'écoulement ont une taille comprise entre les deux taille limites suivantes

- la plus grande échelle de l'écoulement L (imposée par la géométrie de l'écoulement, par exemple typiquement le diamètre d'un cylindre, le diamètre d'une cheminée, ou encore la hauteur d'une voiture),
- la plus petite échelle de l'écoulement η : imposée par la viscosité du fluide ; cette échelle est appelée échelle de Kolmogorov, ou échelle de dissipation visqueuse.

L'ordre de grandeur entre L et η est le suivant :

$$\frac{L}{\eta} = Re^{3/4} \quad (4.97)$$

La théorie de la "cascade" énergétique prédit que les tourbillons reçoivent de l'énergie des échelles plus grandes qu'eux, et la transmettent ensuite aux échelles plus petites qu'eux, et ainsi de suite jusqu'à la plus petite échelle présente dans l'écoulement, l'échelle η . On parle de production d'énergie lorsque les grosses structures sont générées - par un décollement par exemple - et de dissipation d'énergie lorsque les tourbillons disparaissent complètement en aval de l'obstacle. Lorsque la production d'énergie est égale à la dissipation d'énergie, on parle de turbulence "en équilibre".

Cascade d'énergie

Nous allons nous intéresser à un écoulement statistiquement stationnaire dans lequel la turbulence est pleinement développée, c'est à dire dont le nombre de Reynolds est élevé.

Remarquons tout d'abord que les équations de Navier-Stokes sont invariantes par transformation de Galilée. Autrement dit, si $u(x, t)$ est solution, alors $u(x - u_0 t, t) + u_0$ l'est également. En effet :

$$\partial_t(u(x - u_0 t, t) + u_0) = \partial_t u(x - u_0 t, t) \quad (4.98)$$

$$= -u_0 \nabla_y u(y, t) + \partial_t u(y, t), \quad (4.99)$$

pourquoi ?

$$\frac{\partial}{\partial t}(u(x - u_0 t, t)) = \frac{\partial(x - u_0 t)}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t}(x - u_0 t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x - u_0 t) \quad (4.100)$$

$$= -u_0 \partial_t u(y, t) + \partial_t u(y, t) \quad (4.101)$$

$$((u(x - u_0 t, t) + u_0) \cdot \nabla)(u(x - u_0 t, t) + u_0) = (u(y, t) \cdot \nabla_y + u_0 \nabla_y)(u(y, t) + u_0) \quad (4.102)$$

$$= (u(y, t) \cdot \nabla_y + u_0 \nabla_y)u(y, t) + u_0, \quad (4.103)$$

$$\Delta(u(x - u_0 t, t) + u_0) = \Delta(u(x - u_0 t, t)) \quad (4.104)$$

$$= \Delta_y u(y, t), \quad (4.105)$$

et

$$\nabla \cdot (u(x - u_0 t, t) + u_0) = \nabla \cdot (u(x - u_0 t, t)) \quad (4.106)$$

$$= \nabla_y \cdot u(y, t). \quad (4.107)$$

On peut donc étudier l'écoulement dans un repère se déplaçant à une vitesse u_0 constante. Le champ de vitesse est alors réparti sur toutes les échelles du système et on peut considérer l'écoulement statistiquement homogène, isotrope et stationnaire. **Pourquoi ??**

L'hypothèse selon laquelle l'écoulement se maintient dans un état statistiquement stationnaire suppose qu'on lui communique en permanence de l'énergie à une échelle l_I . **Kel est cette échelle** Or, par hypothèse, le nombre de Reynolds associé à cette échelle est très grand et, donc, la dissipation visqueuse y est très petite.

On est ainsi amené à l'image d'une cascade d'énergie, appelée cascade de Richardson, où l'énergie se déverse de proche en proche vers des échelles de plus en plus petites jusqu'à une valeur l_d à laquelle la dissipation visqueuse agit pleinement. **Kel est cette échelle**

La cascade de Richardson permet de comprendre le fait qu'une modification de la viscosité d'un fluide turbulent ne change pas la dissipation d'énergie qui s'y produit. Seul le nombre d'étapes de la cascade change.

Loi d'échelle de Kolmogorov

La théorie de Kolmogorov permet de décrire le déroulement de la cascade de Richardson. Outre l'hypothèse selon laquelle la turbulence, aux échelles considérées, est statistiquement homogène, isotrope et stationnaire, elle repose sur les hypothèses que :

- - dans la zone inertielle, c'est à dire entre l_I et l_d , l'énergie est transférée sans dissipation et à taux constant ;
- - les propriétés statistiques ne dépendent que de l'énergie dissipée et de la viscosité ;
- - dans la zone inertielle elles ne dépendent que de l'énergie dissipée.

De là nous pouvons déduire, par une analyse dimensionnelle une loi reliant le flux d'énergie à sa répartition en fréquence. Précisons ce que nous entendons par là. **Keske ça veut dire**

Remarquons qu'en raison de l'homogénéité, les grandeurs considérées sont proportionnelles à la masse totale du fluide, nous pourrions donc les rapporter à l'unité de masse.

Compte tenu de la première hypothèse, le taux de dissipation visqueuse est égal au taux d'injection d'énergie ε [unités], représentant l'énergie fournie au système par unité de temps (et par unité de masse).

Intéressons nous par ailleurs l'énergie cinétique moyenne par unité de masse. Considérons le tenseur des corrélations de vitesse

$$R_{ij}(\vec{r}, t) = \langle u_i(\vec{x} + \vec{r}, t) u_j(\vec{r}, t) \rangle. \quad (4.108)$$

On peut écrire par transformation de Fourier bigint

$$R_{ij}(\vec{r}, t) = \int \exp^{i\vec{r}\cdot\vec{k}} \phi_{ij}(\vec{k}, t) d\vec{k}, \quad (4.109)$$

où

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}(\vec{k}, t) = \hat{R}_{ij}. \quad (4.110)$$

On a alors — Kaseke c'est ??????????????

$$E = R_{ii}(0, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{ii}(\vec{k}, t) d\vec{k} \quad (4.111)$$

Par l'isotropie de la turbulence, on en déduit en intégrant sur des couronnes de rayon $k = |\vec{k}|$:

$$E = \int_0^\infty 2\pi k^2 \phi_{ii}(k, t) dk = \int_0^\infty E(k) dk \quad (4.112)$$

On peut donc définir ainsi la densité d'énergie cinétique $E(k) = 2\pi k^2 \phi_{ii}(k, t)$. Par une analyse dimensionnelle s'appuyant sur le théoème de Vaschy-Buckingham, les hypothèses de Kolmogorov nous permettent alors d'obtenir une loi reliant $E(k)$, ε et k :

$$E(k) \approx C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (4.113)$$

En effet, puisque ε est homogène à $L^2 T^{-3}$, k à L^{-1} et $E(k)$ à $L^3 T^{-2}$, la seule combinaison $\varepsilon^\alpha k^\beta$ possible correspond à $\alpha = 2/3$ et $\beta = -5/3$. La valeur de C_K , trouvée expérimentalement, est de l'ordre de 1,5.

On peut montrer que les limites $k_I = l_I^{-1}$ et $k_d = l_d^{-1}$ de la zone inertielle, dans laquelle cette formule s'applique, sont :

$$k_I = \nu^{-1}, k_d = \varepsilon^{1/4} \nu^{-3/4}. \quad (4.114)$$

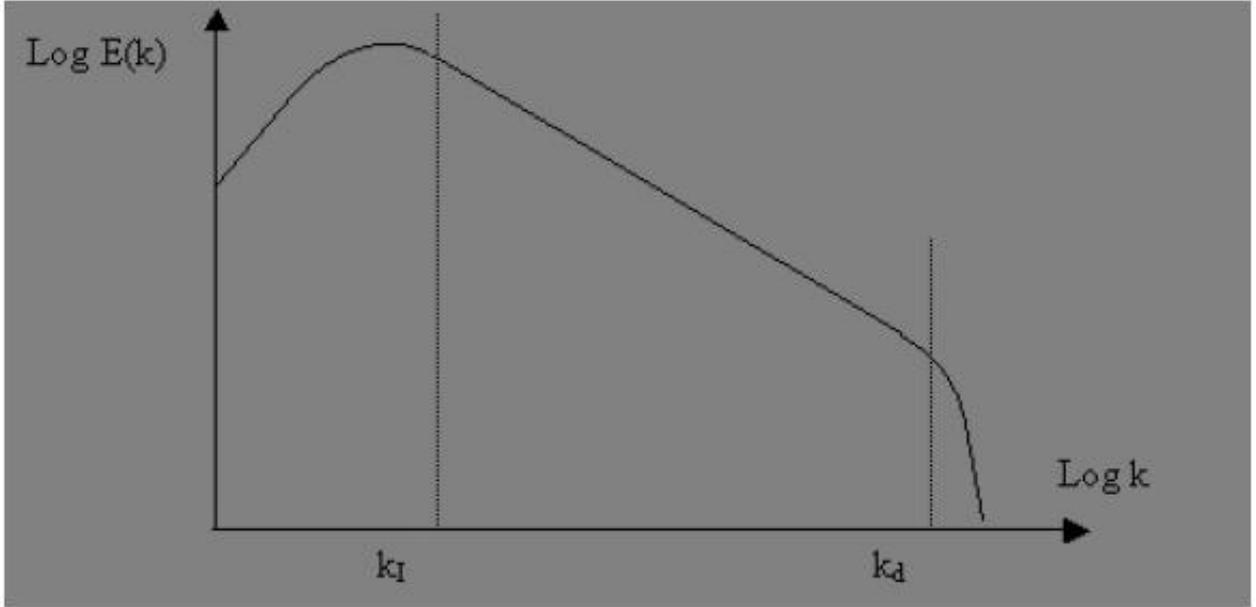


Figure 4.1: Fig. 2.1 - Cascade d'énergie

Tenseurs de corrélation

On définit le moment d'ordre 2 des corrélations de vitesse aux position \vec{x}_1, \vec{x}_2 et aux instants t_1, t_2 comme le tenseur U de composantes :

$$U_{ij} = \langle u^i(\vec{x}_1, t_1) u^j(\vec{x}_2, t_2) \rangle \quad (4.115)$$

$\langle \cdot \rangle$ représentant la moyenne d'ensemble telle que définie au paragraphe (2.1.1), $u = (u^1, u^2, u^3)$ représentant le champ de vitesses.

U permet d'évaluer la corrélation entre vitesses u_1 en \vec{x}_1, t_1 et u_2 en \vec{x}_2, t_2 dans le sens où si u_1 et u_2 sont indépendants, alors $U_{ij} - \langle u_1^i \rangle \langle u_2^j \rangle = 0$.

Remarquons que U est bien un tenseur. En effet, effectuons un changement de coordonnées : Un point M est représenté par $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ dans la base initiale, par $\vec{z} = (z^1, z^2, z^3)$ dans la nouvelle base, avec $x^1 = x^1(z^1, z^2, z^3)$. Notons $V = V(M_1, M_2)$ l'expression de $U = U(M_1, M_2)$ dans la nouvelle base, $v = (v^1, v^2, v^3)$ celle du champ de vitesses. On a alors :

anciennes coordonnées :	$M, \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$
ancienne base :	
nouvelles coordonnées :	$\vec{z} = (z^1, z^2, z^3)$
nouvelle base :	$v = (v^1, v^2, v^3)$

Table 4.1: A

$$u^i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x^i}{\partial z^k} \frac{dz^k}{dt} \quad (4.116)$$

$$= \sum_{k=1}^3 v^k \frac{\partial x^i}{\partial z^k}, \quad (4.117)$$

d'où

$$U_{ij}(M_1, M_2) = \left\langle \sum_{k=1}^3 v^k \frac{\partial x^i}{\partial z^k}(\vec{x}_1, t_1) \sum_{l=1}^3 v^l \frac{\partial x^j}{\partial z^l}(\vec{x}_2, t_2) \right\rangle. \quad (4.118)$$

Or $\partial x^i / \partial z^k(\vec{x}_r, t_r)$ ne dépend pas de la mesure effectuée, donc

$$U_{ij}(M_1, M_2) = \sum_{k,l=1}^3 \langle v^k(\vec{x}_1, t_1) v^l(\vec{x}_2, t_2) \rangle \frac{\partial x^i}{\partial z^k}(\vec{x}_1, t_1) \frac{\partial x^j}{\partial z^l}(\vec{x}_2, t_2), \quad (4.119)$$

soit encore

$$U_{ij}(M_1, M_2) = \sum_{k,l=1}^3 V_{ij}(M_1, M_2) \frac{\partial x^i}{\partial z^k}(\vec{x}_1, t_1) \frac{\partial x^j}{\partial z^l}(\vec{x}_2, t_2), \quad (4.120)$$

qui est l'expression d'un tenseur d'ordre (2,0).

On définit de même les moments d'ordre supérieur ; ainsi, à l'ordre n :

$$U_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \langle u_{\alpha_1}(\vec{x}_1, t_1) u_{\alpha_2}(\vec{x}_2, t_2) \dots u_{\alpha_n}(\vec{x}_n, t_n) \rangle. \quad (4.121)$$

Chapter 5

Aspects Théoriques

5.1 Chapitre 3 Existence d'une solution

5.1.1 Position du problème

On s'intéresse à la résolution des équations de Navier-Stokes :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.2)$$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (5.3)$$

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad (5.4)$$

On se place en dimension 3, dans le cas où $f = 0$ et on suppose $u_0 \in L_x^2$.¹
 (L_x²)???? Espaces $H_0^1(\Omega)$, $C^0(L_w^2)$, $L^2(H^{-1})$

Solution faible

Soit l'espace $V = \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, on dira que \mathbf{u} est une solution faible de (3.1) si :

- - $\mathbf{u} \in L^2(H_0^1) C^0(L_w^2)^2$;
- - $\mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0(x)$;
- - $\partial_t \mathbf{u} \in L^2(H^{-1})$;
- - $\forall \phi \in V, \langle \partial_t \mathbf{u}, \phi \rangle - \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \phi + \nu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \phi = 0$

Inégalité d'énergie

En multipliant la première équation de (3.1) par \mathbf{u} et en l'intégrant en espace et en temps, on obtient :

$$\int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \int_0^t \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} - \nu \int_0^t \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \int_0^t \int_{\Omega} \nabla P \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.5)$$

$$(5.6)$$

¹On notera L_x^2 pour $(L_x^2)^3$ et, en général X pour $(X)^3$.

² w pour la topologie faible

Or

$$\int_0^t \int_{\Omega} \nabla P \cdot \mathbf{u} = - \int_0^t \int_{\Omega} P \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.7)$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = - \int_0^t \int_{\Omega} (\mathbf{u}\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{u} \quad (5.8)$$

$$= - \sum_{ij} \int_0^t \int_{\Omega} u^j u^i \partial_j u^i \quad (5.9)$$

$$= - \sum_{ij} \int_0^t \int_{\Omega} u^j \cdot \frac{1}{2} \partial_j (u^i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \int_0^t \int_{\Omega} \partial_j (u^j) (u^i)^2 \quad (5.10)$$

$$= 0 \quad (5.11)$$

REPRENDRE D'où l'égalité d'énergie :

$$\frac{1}{2} \int |\mathbf{u}(t, x)|^2 dx - \frac{1}{2} \int |\mathbf{u}_0(x)|^2 dx + \nu \int |\nabla \mathbf{u}(t', x)|^2 dx dt' = 0 \quad (3.3) \quad (5.12)$$

Lorsqu'on considère une suite (\mathbf{u}_n) vérifiant (3.1), cette égalité, ainsi qu'on le verra plus loin, devient une inégalité lors du passage à la limite. On obtient ainsi l'inégalité d'énergie :

$$\frac{1}{2} \int |\mathbf{u}(t, x)|^2 dx - \frac{1}{2} \int |\mathbf{u}_0(x)|^2 dx + \nu \int |\nabla \mathbf{u}(t', x)|^2 dx dt' \leq 0 \quad (3.4) \quad (5.13)$$

5.1.2 3.2 Existence d'une solution

3.2.1 Théorème de stabilité

Théorème 1 Soit une suite (\mathbf{u}_n) de $L^2(V)$, avec $\partial_t \mathbf{u}_n \in L^2(V')$ vérifiant les équations de Navier-Stokes (3.1), alors on peut en extraire une sous-suite (\mathbf{u}_n) convergent faiblement vers une limite \mathbf{u} dans $L^2(V)$, solution faible de (3.1) et vérifiant l'inégalité d'énergie (3.4).

Résultats préliminaires On utilisera sans les démontrer les résultats suivants :

Lemme 1 Soient les espaces

$$-V = \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (5.14)$$

$$-H = h \in L^2(\Omega); \nabla \cdot h = 0; h \cdot n|_{\partial\Omega} = 0; \quad (5.15)$$

on a $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, les injections sont denses et celle de V dans H est de plus compacte.

injection dense définition

injection compacte définition

relativement compacte

Lemme 2 (Aubin-Lions) Soient les espaces emboîtés $X \hookrightarrow E \hookrightarrow Y$ où les injections sont denses et celle de X dans E est compacte ; soit une suite (u_n) bornée dans $L_t^p(X)$ est telle que $(\partial_t u_n)$ est bornée dans $L_t^r(Y)$, avec $p, r \geq 1$;

Alors (u_n) est relativement compacte dans $L^{\text{inf}(p,r)}([0, T - \alpha], E)$.

Lemme 3

Si la suite (ϕ_n) est bornée dans $L^p(X)$, avec X borné et que $\phi_n \rightarrow \phi$ presque partout, alors (ϕ_n) est compacte dans $L^q(X)$ pour $q < p$.

Lemme 4

En dimension $N = 3$, pour tout $r \in [2, 6]$, on a :

$$\|u\|_{\frac{4r}{3(r-2)}, r} \leq \|u\|_{\infty, 2}^{\frac{6-r}{2r}} \|u\|_{2,6}^{\frac{3(r-2)}{2r}} \quad (5.16)$$

3.2.2 preuve du théorème

convergence de u_n

Soit $u_n \in L^2(V)$, $\partial_t u_n \in L^2(V')$, vérifiant (3.1). Par l'égalité d'énergie on a :

$$\frac{1}{2} \int |u(t, x)|^2 dx + \nu \int \int |\nabla u(t', x)|^2 dx dt' = \frac{1}{2} \int |u_0(x)|^2 dx. \quad (3.5) \quad (5.17)$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{2} \int |u(t, x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int |u_0(x)|^2 dx, \quad (3.6) \quad (5.18)$$

et

$$\nu \int \int |\nabla u(t', x)|^2 dx dt' \leq \frac{1}{2} \int |u_0(x)|^2 dx. \quad (3.7) \quad (5.19)$$

Autrement dit

$$\sup_t \|u_n(t, x)\|_{L_x^2} \leq \|u_0\|_{L^2}, \quad (3.8) \quad (5.20)$$

et

$$\|\nabla u_n(t, x)\|_{L^2(V)} \leq \frac{1}{\nu} \|u_0\|_{L^2}. \quad (3.9) \quad (5.21)$$

Puisque $V \subset H_0^1$, l'inégalité de Poincaré nous donne alors

$$\|u_n(t, x)\|_{L^2(V)} \leq C \|\nabla u_n(t, x)\|_{L^2(V)} \leq \frac{1}{\nu} \|u_0\|_{L^2}. \quad (3.10) \quad (5.22)$$

Ainsi, par (3.8) et (3.10), u_n est bornée dans $L^2(V) \cap L_t^\infty(L_x^2)$. Or V est réflexif et dans un espace réflexif toute suite bornée admet une sous-suite faiblement convergente. A une sous-suite près, (u_n) admet donc une limite faible, u , dans $L^2(V)$.

estimations

Nous savons que (u_n) appartient à $L_t^\infty(L^2) \cap L^2(H_0^1)$ or, en dimension 3, $L^2(H_0^1) \hookrightarrow L^2(L^6)$ donc $L_t^\infty(L^2) \cap L^2(H_0^1) \hookrightarrow L_t^\infty(L^2) \cap L^2(L^6)$. Par application du lemme 4 avec $r = 4$, on a alors

$$\|u_n\|_{8/3,4} \leq \|u_n\|_{\infty,2}^{1/2} \|u_n\|_{2,6}^{3/4}. \quad (5.23)$$

(u_n) est donc bornée dans $L^{8/3}(L^4)$.

Par ailleurs, puisque u_n vérifie (3.1), on a, $\forall v \in C^\infty(V)$:

$$\int \int \partial_t u_n \cdot v + \int \int \nabla \cdot (u_n u_n) \cdot v - \nu \int \int \Delta u_n \cdot v \quad (5.24)$$

soit encore, en intégrant par parties,

$$\langle \partial_t u_n, v \rangle = -\nu \int \int \nabla u_n : \nabla v + \int \int u_n u_n : v. \quad (3.11) \quad (5.25)$$

Puisque (u_n) est bornée dans $L^{8/3}(L^4)$, $(u_n u_n)$ est bornée dans $L^{4/3}(L^2)$. On en déduit alors par (3.11) que $v \in L^4(V)$ et, donc, que $\partial_t u_n$ est bornée dans $(L^4(V))' = L^{4/3}(V')$.

Compte tenu de l'emboîtement $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ donné par le lemme 1 et des bornes que l'on vient d'établir pour (u_n) et $(\partial_t u_n)$, on a, par application du lemme 2 (Aubin-Lions), (u_n) relativement compacte dans $L^{4/3}(H)$.

Enfin, puisque (u_n) converge dans $L^{4/3}(L^2)$ et est bornée dans $L^{8/3}(L^4)$, on en déduit que (u_n) est compacte dans $L^2(L^2)$.

Passage à la limite dans la formulation faible de (3.1)

Pour que u , limite de (u_n) , soit solution faible de (3.1), il faut que l'on puisse passer à la limite dans l'équation (3.11) pour tout $v \in L^2(V)$. Considérons séparément le passage à la limite dans chacun des termes de cette équation.

- - 1er terme
Soit

$$\tilde{V} = v \in C^\infty([0, T] \times \omega); v|_{\partial\Omega} = 0; v(T, 0) = 0; \nabla \cdot v = 0 \quad (5.26)$$

et soit g la limite faible de $(\partial_t u_n)$ dans $L^{4/3}(V')$. On a, pour $w \in C_0^\infty([0, T] \times \Omega)$,

$$\int \int \partial_t u_n w = - \int \int u_n \partial_t w \rightarrow \int \int u_n \partial_t w = \langle \partial_t u, w \rangle. \quad (5.27)$$

Ainsi $(\partial_t u_n) \rightharpoonup \partial_t u$ dans D' . On identifie alors g et $\partial_t u$. On a donc bien, pour $v \in \tilde{V}$

$$\langle \partial_t u, v \rangle \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_\Omega u \partial_t v - \int_\Omega u_0 v(0, x) \quad (5.28)$$

- - 2me terme
 $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(V)$, on a donc directement, $\forall v \in C^\infty([0, T] \times \Omega)$:

$$-\nu \int \int \nabla u_n \nabla v \rightarrow -\nu \int \int \nabla u \nabla v \quad (5.29)$$

- - 3me terme
 u_n est bornée dans $L^{8/3}(L^4)$ donc, par le lemme 3, u_n est compacte dans $L^p(L^q)$ pour $q < 4$ et $p < 8/3$. Par conséquent $(u_n u_n)$ est compacte dans $L^p(L^q)$ pour $q < 2$ et $p < 4/3$.
Pour tout $v \in C^\infty([0, T] \times \Omega)$ on a donc, dans $L^{4/3}(L^2)$:

$$\int \int u_n u_n : v \rightarrow \int \int u u : v. \quad (5.30)$$

Vérification de l'inégalité d'énergie (3.4)

Considérons l'égalité d'énergie vérifiée par u_n :

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |u_n(t, x)|^2 dx + \nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n(t', x)|^2 dx dt' = \frac{1}{2} \int_\Omega |u_0(x)|^2 dx. \quad (3.12) \quad (5.31)$$

En intégrant (3.12) en temps, on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u_n(t, x)|^2 dx dt + \nu \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_n(t', x)|^2 d\tau dx dt' = \frac{T}{2} \int_{\Omega} |u_0(x)|^2 dx. \quad (5.32)$$

Puisque $(u_n) \rightharpoonup u$ dans $L^2(V)$, on a

$$\int \int |\nabla u|^2 dx dt \leq \underline{\lim} \int \int |\nabla u_n|^2 dx dt \quad (5.33)$$

et

$$\forall \phi \in C^\infty([0, T] \times \Omega), \underline{\lim} \int \int (|\nabla u_n|^2 - |\nabla u|^2) \phi dx dt \geq 0. \quad (5.34)$$

$(|\nabla u_n|^2)$ étant de plus bornée dans $L^1(L^1)$, on a, au sens des mesures dans $[0, T] \times \Omega$,

$$|\nabla u_n|^2 \rightharpoonup |\nabla u|^2 + \mu \quad (5.35)$$

où μ est une mesure de défaut. Ainsi :

$$\int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_n(t', x)|^2 d\tau dx dt' \rightarrow \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u(t', x)|^2 d\tau dx dt' + \int_0^T \int_0^t \mu d\tau dt', \quad (5.36)$$

avec

$$\int_0^T \int_0^t \mu d\tau dt' \geq 0. \quad (5.37)$$

Par ailleurs, par compacité forte dans $L^2(L^2)$,

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u_n(t, x)|^2 dx dt \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx dt. \quad (5.38)$$

u vérifie donc bien l'inégalité d'énergie.

3.2.3 existence

Le théorème 1 nous garantit de pouvoir passer à la limite pour une suite (u_n) vérifiant les équations de Navier-Stokes, sous réserve que certaines condition de régularité soit vérifiées. Il reste donc à pouvoir construire une suite d'approximations (u_n) pour garantir l'existence d'une solution. Nous n'aborderons pas ce point.

5.1.3 3.3 Pression

En passant à la formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes le terme de pression a disparu. Il va cependant pouvoir être retrouvé (à partir de cette formulation) par le théorème de De Rahm.

Théorème de De Rahm

- - Si $u \in D(\Omega)$, $\nabla \cdot u = 0$ et $P \in D'(\Omega)$, alors $\langle \nabla P, u \rangle = 0$.
- - Inversement, si $F \in D'(\Omega)$ vérifie $\langle F, u \rangle = 0$ pour tout $u \in V$, alors il existe $P \in D'(\Omega)$ vérifiant $F = \nabla P$.

Théorème du potentiel si à divergence nulle alors on peut trouver sous forme potentiel ?? décomposition de Helmotz ???

- - Si de plus $F \in H(\Omega)$, alors $P \in L^2/R$ et on a $\|P\|^{-1}|_{L^2/R} \leq C\|F\|_{H^{-1}}$

Corollaire : Soit $s \in D'([0, T] \times \Omega)$, si, $\forall \phi \in V, \langle s(t), \phi \rangle = 0$, alors il existe P appartenant à $D'([0, T] \times \Omega)$, vérifiant $s(t) = P$.

La résolution du problème variationnel permet donc bien de résoudre le problème initial. La valeur de p pouvant être obtenue à partir de u en prenant la divergence de la première équation de (3.1) qui se simplifie en :

$$\Delta p = \nabla \cdot ((u \nabla) u) \quad (5.39)$$

5.2 Chapitre 4 Application à un modèle de SGE

5.2.1 4.1 Choix du modèle

Rappelons les équations de Navier-stokes moyennées :

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.1) \quad (5.40)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_t + \nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}) + \nabla \bar{p} - \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} = \bar{f} + \nabla \cdot R(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (4.2) \quad (5.41)$$

Le modèle de similarité d'échelle de Bardina, présenté au paragraphe 2.3.2, suppose $R(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \approx S(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}) = \overline{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}} - \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}$, permettant ainsi d'obtenir une équation ne dépendant que de $\bar{\mathbf{u}}$ et \bar{p} .

Nous allons présenter ici un modèle proposé par W. Layton et R. Lewandowski ([6], [5] et [7]) modélisant la similarité plus simplement par $\nabla \cdot (\overline{\mathbf{u}\mathbf{u}}) \approx \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}})$, ce qui revient à supposer :

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \approx \tilde{R}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}) = \overline{\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}} - \bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}} \quad (4.3) \quad (5.42)$$

Nous allons donc nous intéresser au problème

$$\nabla \cdot w = 0, \quad (4.4) \quad (5.43)$$

$$w_t + \nabla \cdot (\overline{w\bar{w}}) + \nabla q - \nu \Delta w = \bar{f}, \quad (4.5) \quad (5.44)$$

où w et q sont les valeurs approchées de $\bar{\mathbf{u}}$ et \bar{p} découlant de l'approximation (4.3).

w doit vérifier de plus une condition de compatibilité à $t = 0$ et nous rechercherons une solution de moyenne nulle :

$$w(x, 0) = \bar{u}_0(x); \quad (4.6) \quad (5.45)$$

$$\int w dx = 0. \quad (4.7) \quad (5.46)$$

Nous nous plaçons dans le cas d'un écoulement périodique, cas d'étude plus simple que lorsque interviennent des parois ; ainsi le domaine d'étude sera un pavé de \mathbb{R}^3 . Enfin, nous allons nous intéresser au filtre A_δ^{-1} , approchant le filtre Gaussien, défini par :

$$\bar{\phi} = A_\delta^{-1} \phi \quad (5.47)$$

$$A_\delta \bar{\phi} = -\delta^2 \Delta \bar{\phi} + \bar{\phi} = \phi \quad (4.8) \quad (5.48)$$

Pour toute fonction $\phi(x) \in L^2_{\#}(\Omega)$, sa moyenne $\bar{\phi}$ est bien définie comme étant l'unique solution périodique de (4.8). Compte tenu des conditions de périodicité on remarque que les termes de bord s'annulent lors d'une intégration par parties et qu'alors le filtre A_δ^{-1} commute avec la dérivation et est auto-adjoint.

5.2.2 4.2 Existence d'une solution

4.2.1 Théorème de stabilité

On notera #

$$V_0 = v \in L^2_{\#}; \nabla \cdot v = 0; \int_{\Omega} v = 0 \quad (5.49)$$

$$D = \psi \in C^\infty_{\#}(\Omega); \nabla \cdot \psi = 0; \int_{\Omega} \psi = 0 \quad (5.50)$$

$$D_T = \phi(\cdot, t) \in D \text{ pour } 0 \leq t \leq T; \phi(\cdot, T) = 0 \quad (5.51)$$

Solution faible

Soient $u_0 \in V_0$, $f \in L_t^2(H^{-1})$, On dira qu'une fonction $w \in L_t^2(H^2) \cap L_t^1(H^1)$ est une solution faible de (4.4), (4.5) si, $\forall \phi \in D_T$, w vérifie

$$\int_0^T (\langle w, \partial_t \phi \rangle - \nu \langle \nabla w, \nabla \phi \rangle - \langle \nabla \cdot (\overline{w}w), \phi \rangle) dt = \quad (5.52)$$

$$\int_0^T \langle \overline{f}, \phi \rangle dt - \langle \overline{u}_0, \phi(\cdot, 0) \rangle. \quad (4.9) \quad (5.53)$$

Egalité d'énergie formelle

De manière similaire à l'égalité (3.3) présentée au paragraphe ?? on établit une égalité d'énergie à partir de (4.4), (4.5). En multipliant (4.4) par $-\delta^2 \Delta w + w$ et en intégrant en espace, on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \partial_t |w|^2 + \delta \int_{\Omega} \frac{1}{2} \partial_t |\nabla w|^2 + \quad (5.54)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\overline{w}w) (-\delta^2 w + w) + \nu \int_{\Omega} |w|^2 + \nu \delta^2 \int_{\Omega} |\Delta w|^2 = \int_{\Omega} \overline{f} (-\delta^2 w + w). \quad (5.55)$$

Or, A_{δ} étant auto-adjoint, on a

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\overline{w}w) (-\delta^2 w + w) = \langle A_{\delta}^{-1} (\nabla \cdot (\overline{w}w)), A_{\delta} w \rangle \quad (5.56)$$

$$= \langle \nabla \cdot (\overline{w}w), w \rangle \quad (5.57)$$

$$= 0, \quad (5.58)$$

ainsi que

$$\int_{\Omega} \overline{f} (-\delta^2 w + w) = \langle f, A_{\delta} w \rangle \quad (5.59)$$

$$= \langle A_{\delta}^{-1} f, w \rangle \quad (5.60)$$

$$= \langle \overline{f}, w \rangle. \quad (5.61)$$

On a donc, par une intégration en temps, l'égalité d'énergie

$$k(t) + \int_0^t \varepsilon(t') dt' = k(0) + \int_0^t P(t') dt', \quad (4.10) \quad (5.62)$$

en notant

$$k(t) = \frac{1}{2} \|w(t, \cdot)\|^2 + \frac{\delta^2}{2} \|\nabla w(t, \cdot)\|^2; \quad (5.63)$$

$$\varepsilon(t) = \nu \|\nabla w(t, \cdot)\|^2 + \nu \delta^2 \|\Delta w(t, \cdot)\|^2; \quad (5.64)$$

$$P(t) = \langle f, w \rangle. \quad (5.65)$$

Théorème 2 Soient $u_0 \in V$ et $f \in L_t^2(H^{-1})$, le système (4.4), (4.5) admet une solution faible $w \in L_t^{\infty}(H^1) \cap L_t^2(H^2)$ et, de plus, cette solution vérifie l'égalité d'énergie (4.10).

4.2.2 preuve d'un résultat de stabilité

Estimation de w

Considérons le second membre de l'égalité d'énergie (4.10). On a par Cauchy-Schwartz

$$\int_0^t \langle f, w \rangle \leq \int_0^t \|f\|_{L^2}^2 \|w\|_{L^2}^2, \quad (5.66)$$

et par l'inégalité de Young

$$\|f\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \leq \frac{r}{2} \|f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2r} \|w\|_{L^2}^2, \quad r > 0. \quad (5.67)$$

De même

$$\int_t^0 \nabla f : \nabla w \leq \int_0^t \left(\frac{s}{2} \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2s} \|w\|_{L^2}^2 \right), \quad s > 0. \quad (5.68)$$

On obtient donc, à partir de (4.10), une relation de la forme

$$\alpha \|w\|_{L_t^\infty(H^1)}^2 + \beta \|w\|_{L_t^2(H^2)}^2 \leq M(k(0), f, r, s), \quad (5.69)$$

avec $\alpha, \beta > 0$ pour ∇ et s suffisamment grands. On a donc $w \in L_t^1(H^1) \cap L_t^2(H^2)$.

Estimation de w_t

Compte tenu du résultat précédent, on montre que $Q_\delta(w) = \overline{w\overline{w}} \in L_t^1(H^2)$. En écrivant alors l'équation (4.5) sous la forme d'un problème de Stokes

$$w_t - \nu \Delta w + \nabla q = \overline{f} - \nabla \cdot Q_{\delta(w)}, \quad (4.11) \quad (5.70)$$

on en déduit que $w_t \in L_t^2(L^2(\Omega))$.

Passage à la limite

Considérons maintenant une suite (w_n) de solutions du problème (4.4), (4.5). Les estimations de w et w_t établies précédemment ont montré que (w_n) est bornée dans l'espace $F = w \in L_t^\infty(H_\#^1(\Omega)) \cap L_t^2(H_\#^2(\Omega)); \nabla \cdot w = 0; w_t \in L_t^2(L^2(\Omega))$.

On peut donc extraire une sous-suite que l'on notera également (w_n) , convergent faiblement vers une limite w appartenant à F .

Puisque (w_n) est bornée dans $L_t^1(H_\#^2(\Omega))$, que $((w_n)_t)$ est bornée dans $L_t^2(L^2(\Omega))$, que $H_\#^2(\Omega) \hookrightarrow H_\#^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ et que l'injection de $H_\#^2$ dans $H_\#^1$ est compacte, nous savons alors, par le lemme d'Aubin-Lions (lemme 2), que (w_n) est compacte dans $L_t^2(H_\#^1(\Omega))$.

Par conséquent $(w_n w_n)_n$ converge fortement vers $w w$ dans $L_t^2(L^2)$ et $Q_\delta(w_n)$ vers $Q_\delta(w)$ dans $L_t^2(H^1)$. En considérant la forme (4.11) de l'équation, les résultats classiques du problème de Stokes permettent alors le passage à la limite.

4.2.3 existence

Par la méthode de Galerkin, il est possible de construire une suite de solutions approchées du problème présenté ici ((4.4), (4.5), avec le filtre $\Phi(u) = A_\delta^{-1}u$). Compte tenu du résultat de stabilité précédent, nous avons donc existence d'une solution faible dans $L_t^1(H^1) \cap L_t^2(H^2)$.

5.2.3 4.3 Conclusion

La pertinence du modèle proposé a été confirmé par Layton et Lewandowski ([5]) qui ont montré que lorsque $\delta \rightarrow 0$, les solutions du problème en w ((4.4), (4.5)) convergent vers une solution faible des équations de Navier-Stokes (3.1), et qu'il y avait unicité de la solution faible dans $w \in L_t^1(H^1) \cap L_t^2(H^2)$ pour $u_0 \in V$ et $f \in L_t^2(H^{-1})$.

De plus ce modèle est réversible (l'égalité d'énergie est préservée) et semble particulièrement stable contrairement à d'autres modèles utilisant la similarité d'échelle qui sont également réversibles mais posent des problèmes de stabilité.

5.2.4 Adimensionalisation

L'équation est mise sous une forme sans dimension en posant $u' = u/U$, $x' = x/L$ et $t' = t/T$. U , L et T étant respectivement la vitesse, la longueur et le temps caractéristiques. On obtient alors :

$$\nabla_{x'} \cdot u' = 0 \quad (A.11) \quad (5.71)$$

$$\frac{U}{T} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} u' \cdot \nabla_{x'} u' + \frac{1}{L} u' \cdot \nabla_{x'} \tilde{p} - \frac{\nu U}{L^2} \Delta_{x'} u' = f \quad (A.12) \quad (5.72)$$

En choisissant $T = L/U$ et en posant $p' = \tilde{p}/U^2$, $f' = Lf/U^2$, $\nu' = \nu/UL$ on retrouve les équations A.8 et A.10 avec les variables portant les symboles "prime" :

$$\nabla_{x'} \cdot u' = 0 \quad (A.13) \quad (5.73)$$

$$u'_{\nu'} + u' \cdot \nabla_{x'} u' + \nabla_{x'} \tilde{p}' - \nu' \Delta_{x'} u' = f' \quad (A.14) \quad (5.74)$$

Chapter 6

Aspects Numériques

6.1 Simulation numérique des écoulements turbulents

Avant d'entreprendre une simulation numérique des écoulements turbulents, il faut tâcher de répondre aux questions suivantes :

- quelles équations résoudre ?
- quelle discrétisation utiliser ?
- quel modèle de turbulence choisir ?

Les équations de Navier Stokes sont donc de type différent selon les cas :

- en instationnaire : elles sont paraboliques
- en stationnaire : elles sont elliptiques
- à Reynolds infini (Euler) : elles sont hyperboliques
- en compressible supersonique : elles sont hyperboliques

Les outils numériques (schémas numériques temporels et/ou spatiaux, type de discrétisation) pour résoudre chaque type d'équation sont très différents. Il est donc nécessaire de choisir le code de calcul en fonction du type d'équation à résoudre.

6.2 Quelques notions sur la mise en oeuvre numérique

Il existe de nombreux ouvrages traitant des méthodes numériques de résolution des équations aux dérivées partielles. L'ouvrage de Patankar [8], celui de Hirsch [12] et celui de Fletcher [9] sont des ouvrages de référence. Cette section donne simplement quelques éléments spécifiques aux équations de Navier Stokes en incompressible, qu'il est utile de connaître pour utiliser les codes de calcul commerciaux usuels.

6.2.1 Algorithmes de calcul

Le problème principal des équations de Navier Stokes incompressibles est qu'il n'existe pas d'équation pour la pression, séparée de celle de la quantité de mouvement [11]. De plus la vérification de l'équation de continuité n'est pas garantie pour un champ de vitesse qui vérifie l'équation de quantité de mouvement.

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6.1)$$

On écrit l'équation de la quantité de mouvement de cette façon :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = -\delta \frac{\delta p}{\delta x_i} + H_i \quad (6.2)$$

avec $H_i = -\rho \frac{\delta u_i u_j}{\delta x_j} + \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta x_j}$.

La démarche la plus simple pour les équations instationnaires est d'effectuer un avancement en temps de manière explicite :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\text{Deltat}}{\rho} (H_i^n - \delta \frac{p^n}{\delta x_i}) \quad (6.3)$$

On suppose que la continuité est vérifiée au temps n , alors $\frac{\delta u_i^n}{\delta x_i} = 0$, et on cherche à faire en sorte qu'elle soit vérifiée au temps $n + 1$, soit $\frac{\delta u_i^{n+1}}{\delta x_i} = 0$.

Alors il faut que (d'après (??))

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left(\frac{\delta p^n}{\delta x_i} \right) = \frac{\delta H_i^n}{\delta x_i} \quad (6.4)$$

Il faut donc que la pression p^n vérifie cette **équation de Poisson discrète** pour que la continuité au temps $n + 1$ soit vérifiée.

Les étapes sont donc les suivantes :

- 1. on prend un champ de vitesse u_i^n au temps n , à divergence nulle
- 2. on calcule H_i^n et sa divergence $\frac{\delta H_i^n}{\delta x_i}$
- 3. on résout l'équation de Poisson pour p^n
- 4. on calcule u_i^{n+1} en fonction de u_i^n , H_i^n et de p^n , par un schéma explicite.
Alors on a la garantie que u_i^{n+1} est bien à divergence nulle, et ainsi de suite.

Pour les solutions stationnaires, on utilise souvent une méthodes instationnaires avec un pas de temps élevé pour obtenir une solution stationnaire. On utilise en général des méthodes implicites, c'est-à-dire pour lesquelles le champ de vitesse u_i^{n+1} est une fonction à la fois de données au temps n et de données au temps $n + 1$. Elles plus rapides que les méthodes explicites.

L'algorithme couramment utilisé pour effectuer l'avancement en temps est appelé SIMPLE : Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equation (1984).

Il ne s'agit pas d'une méthode implicite pure qui consiste à effectuer des inversions de matrices, mais d'une méthode de projection-correction, dans laquelle on estime la solution par des quantités intermédiaires, puis on les corrige afin qu'elles vérifient bien la divergence nulle, et ainsi de suite jusqu'à ce que les corrections appliquées tendent vers zéro. Il s'agit d'un traitement pseudostationnaire des équations pour converger vers une solution stationnaire. Les étapes sont les suivantes : au départ on connaît u_i^n et p^n au temps t^n .

- 1. on résout de manière itérative les équations de quantité de mouvement linéarisées (C'est à dire ??? discrètes ?) et on obtient un champ intermédiaire u_i^{m*} . La correction de vitesse est définie par $u_i^m = u_i^{m*} + u'$.
- 2. on introduit une correction de pression telle que $p^m = p^{m-1} + p'$. On résout l'équation pour de correction de pression p'
- 3. on corrige la pression p^m et la vitesse u_i^m , qui satisfait la continuité
- 4. on retourne à l'étape 1 et on effectue la sous-itération $m + 1$, ainsi de suite jusqu'à ce que p' et u' soient négligeables.
- 5. alors on obtient $u_i^{n+1} = u^m$ et $p^{n+1} = p^m$.

Pour les problèmes instationnaires, le pas de temps est choisi afin de reproduire la physique des fréquences souhaitées. Les itérations se poursuivent jusqu'à obtenir une bonne précision à chaque pas de temps. Pour les problèmes stationnaires, on choisit un pas de temps plus grand et on continue les itérations jusqu'à obtenir un état stationnaire.

Des améliorations de rapidité de convergence l'algorithme SIMPLE ont été apportées par la suite : il s'agit de SIMPLEC (pour SIMPLE Consistant, en 1984), de SIMPLER (pour SIMPLE Révisé, en 1980). PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) (1966) est un autre algorithme adapté aux écoulements transitoires. Dans ces algorithmes la relation entre u' et p' est légèrement modifiée, ce qui accélère la convergence. SIMPLEC est le plus rapide.

Pour l'algorithme SIMPLE, il est possible d'améliorer la convergence en additionnant seulement une portion de la correction de pression à la pression et de même pour la vitesse :

$$p^m = p^{m-1} + \alpha_p p', \text{ et } u_i^m = u_i^{m-1} + \alpha_u u' \quad (6.5)$$

où α_p et α_u sont appelés coefficients de sous-relaxation de la pression et de la vitesse, compris entre 0 et 1. Si l'on choisit $\alpha_p = 1 - \alpha_u$, on obtient les performances optimales du schéma SIMPLE, proches de celles du schéma SIMPLEC. Cet algorithme est souvent couplé à un schéma QUICK (pour Quadratic Upstream Interpolation Schemes) pour la résolution des termes de convection

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{(u_i u_j)_{j+1/2}^n - (u_i u_j)_{j-1/2}^n}{\delta x}. \quad (6.6)$$

Ce type de schéma est basé sur l'utilisation d'une grille décentrée (staggered en anglais) où les quantités sont calculées de la façon suivante :

$$u_{j-1/2} = \frac{1}{2}(u_j + u_{j-1}) - \frac{q}{3}(u_{j-2} - 2u_{j-1} + u_{j-1}) \quad (6.7)$$

$$u_{j+1/2} = \frac{1}{2}(u_j + u_{j+1}) - \frac{q}{3}(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) \quad (6.8)$$

Le schéma Quick correspond à $q = 0,375$ (Léonard, 1979).

6.2.2 Les calculs parallèles

Il est difficile de parler de simulations d'écoulements turbulents sans dire quelques mots sur les machines sur lesquelles on effectue ce type de calcul.

Dans l'industrie automobile, les maillages utilisés sont de l'ordre d'une dizaine de millions d'éléments pour un calcul sur véhicule complet. Il n'est pas possible de faire tourner ce calcul sur un seul ordinateur, et il est donc nécessaire d'avoir un code qui est capable de tourner sur plusieurs processeurs (typiquement entre 10 et 50 processeurs linux) en parallèle. Le domaine de calcul est décomposé de manière automatique

en sous-domaines, et le code va devoir gérer à la fois le calcul sur chaque processeur, et les communications entre les processeurs, en cherchant à minimiser au maximum le coût de ces communications.

On définit plusieurs indicateurs caractéristiques pour quantifier l'efficacité de la parallélisation d'un code de calcul ; on compare par exemple le temps que mettrait un calcul de cinq million de mailles sur 10 processeurs et sur 20 processeurs. Si le code est bien parallélisé, on devrait mettre la moitié de temps, par exemple mettre 1 jour au lieu de 2 jours. En pratique, on perd au minimum 20% de rendement, c'est-à-dire qu'on met 1,2 jours au lieu de 2. Le speed up S est dépendant de nombreux paramètres :

- du type de processeurs (Linux, Intel, Optéron, etc.)
- du type de réseau d'interconnection entre les processeurs
- du code de calcul
- de la taille du maillage
- du nombre de processeurs utilisés
- du type de découpage du domaine (en général non modifiable par l'utilisateur)

Il est donc difficile de savoir a priori sur combien de processeurs lancer sa simulation. La meilleure solution est souvent de faire passer des cas tests représentatifs en terme de taille de maillage sur plusieurs nombres de processeurs différents pour optimiser le délai d'obtention de solution.

Index

fluide, 9