

**PARCOURS
INGÉNIEUR**

**PeiP
1^{er} cycle ingénieur
Prépa intégrée**

et Ondes électromagnétisme

Maxime NICOLAS

- *Cours avec applications*
- *Tests de connaissances*
- *Exercices avec corrigés détaillés*

DUNOD

Ondes et électromagnétisme

Maxime NICOLAS

Professeur à Polytech' Marseille

DUNOD

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du

droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2009

ISBN 978-2-10-054276-5

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^e et 3^e a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Avant-propos	vii
Chapitre 1. Temps, espace, énergie	1
1.1 Généralités	1
1.2 Temps, fréquence	3
1.3 Espace, longueur d'onde	5
1.4 Énergie	7
Synthèse	8
Exercices	9
Corrigés	11
Chapitre 2. Les oscillateurs	14
2.1 Qu'est-ce qu'un oscillateur ?	15
2.2 Quatre exemples d'oscillateurs	16
2.3 Oscillateur harmonique non amorti	23
2.4 Oscillateur amorti	26
2.5 Forçage et résonance	29
2.6 Couplage de deux oscillateurs	33
2.7 Couplage linéaire de N oscillateurs	39
Synthèse	41
Exercices	42
Corrigés	45
Chapitre 3. L'équation d'onde simple et ses solutions	49
3.1 Équation d'onde simple	50
3.2 Fonction d'onde monochromatique	55
3.3 Superpositions et interférences	64

Synthèse	68
Exercices	69
Corrigés	72
Chapitre 4. Ondes et vibrations mécaniques	74
4.1 Ondes de compression dans un solide	75
4.2 Corde vibrante : ondes transverses	78
4.3 Vibrations transversales des membranes	89
4.4 Vibration des poutres	98
Synthèse	106
Exercices	107
Corrigés	110
Chapitre 5. Ondes dans les fluides : l'acoustique	113
5.1 Introduction sur les fluides	114
5.2 Équations de base	115
5.3 Hypothèses de l'acoustique linéaire	116
5.4 Linéarisation des équations de base	117
5.5 Équation d'onde acoustique	118
5.6 Vitesse du son	119
5.7 Ondes dans les tuyaux	121
5.8 Intensité et niveau acoustique	123
5.9 Vérification des hypothèses	125
5.10 Acoustique musicale	126
Synthèse	127
Exercices	128
Corrigés	131
Chapitre 6. Ondes électromagnétiques	133
6.1 Dimensions, unités et constantes	134
6.2 Lois de l'électrostatique	135
6.3 Charges mobiles et courants	138
6.4 Lois de la magnétostatique	139
6.5 Induction électromagnétique	142
6.6 Équations de Maxwell	143
6.7 Équation d'onde électromagnétique	145

6.8	Propagation dans le vide	146
6.9	Onde plane électromagnétique	147
6.10	Polarisation des ondes électromagnétiques	149
6.11	Énergie électromagnétique	150
	Synthèse	154
	Exercices	154
	Corrigés	157
	Chapitre 7. Ondes électromagnétiques et matière	160
7.1	Ce qu'est la matière	161
7.2	Conduction électrique	162
7.3	Polarisation d'un milieu matériel	164
7.4	Induction magnétique	172
7.5	Équations de Maxwell dans la matière	173
7.6	Équation de propagation	174
7.7	Propagation dans les milieux matériels homogènes	176
7.8	Ondes et interfaces	184
7.9	Lois de Snell-Descartes	185
7.10	Réflexion totale sur une interface	187
7.11	Propagation guidée	188
	Synthèse	191
	Exercices	192
	Corrigés	196
	Chapitre 8. Ondes et vibrations non linéaires	201
8.1	Pendule pesant faiblement non linéaire	201
8.2	Oscillations de relaxation	204
8.3	Frottement solide	206
8.4	Optique non linéaire	210
8.5	L'oscillateur de Van der Pol	211
	Synthèse	213
	Exercices	213
	Corrigés	216
	Annexe A. Formulaire	219
A.1	Fonctions circulaires	219

A.2 Champs de vecteurs	220
A.3 Opérations vectorielles	221
A.4 Opérateurs différentiels	221
A.5 Relations utiles	223
A.6 Théorèmes	224
Annexe B. Index des symboles	225
Bibliographie et références	229
Index	231

Avant-propos



Présentes dans des domaines aussi différents que l'acoustique et l'électromagnétisme, les ondes sont universelles. Cet ouvrage suit donc un choix thématique et propose un parcours riche et varié dans la physique contemporaine, les phénomènes naturels, les systèmes appliqués et industriels et les dispositifs de laboratoire.

Le premier chapitre met en place le vocabulaire, les dimensions et unités des quantités physiques utiles pour décrire les phénomènes vibratoires et ondulatoires. Le deuxième chapitre est entièrement consacré aux oscillateurs, brique de base pour construire une théorie des ondes. Plus mathématique, le chapitre 3 présente les outils et méthodes d'analyse qui seront utilisés dans les chapitres suivants. Le chapitre 4 offre un panorama des vibrations et ondes mécaniques dans des systèmes solides et élastiques à une, deux ou trois dimensions. Le chapitre 5 porte sur l'acoustique linéaire, avec une attention particulière pour les ondes sonores. Les chapitres 6 et 7 sont consacrés à l'électromagnétisme avec d'abord des rappels sur l'électrostatique, la magnétostatique, puis l'établissement des équations de Maxwell. Les solutions de propagation d'onde dans le vide puis dans les milieux matériels sont présentées. Enfin le chapitre 8 montre une ouverture vers les systèmes non linéaires.

Cet ouvrage s'adresse prioritairement aux étudiants des cycles préparatoires des écoles d'ingénieurs Polytech mais aussi aux élèves ingénieurs ainsi qu'aux étudiants de licence scientifique. Peu de connaissances préalables sont nécessaires, si ce n'est une bonne maîtrise de la loi de Newton, des lois de base de l'électrostatique et de la magnétostatique, des techniques de dérivation et d'intégration et une bonne connaissance des fonctions circulaires et exponentielles. Les principaux outils mathématiques utilisés dans cet ouvrage sont rappelés dans un formulaire (Annexe A).

Dans chaque chapitre le lecteur trouvera des encarts « loupe », qui détaillent un point un peu technique ou abordent un calcul plus spécialisé, et des encarts « application » qui illustrent la théorie avec des exemples concrets.

Les exercices, dont les corrigés sont détaillés, sont classés en trois catégories : des tests de connaissance sous forme de QCM, des exercices d'application qui viennent illustrer les résultats d'un chapitre, et des exercices d'approfondissement qui permettent d'aller un peu plus loin ou de détailler certains calculs qui ne sont pas développés complètement dans le chapitre. Le niveau de difficulté des exercices d'application et d'approfondissement est signalé par •, •• ou •••. Les exercices de niveau ••• seront plus profitables aux étudiants de niveau L3 ou en formation d'ingénieur.

En fin d'ouvrage, un index des symboles et un index terminologique pourront aider le lecteur à retrouver rapidement une notation, un terme ou une formule et le chapitre correspondant.

Temps, espace, énergie

1

Plan

Cours

1.1 Généralités

1.2 Temps, fréquence

1.3 Espace, longueur d'onde

1.4 Énergie

Synthèse

Exercices

Corrigés

Objectifs

- Définir le vocabulaire
- Connaître quelques ordres de grandeur
- Comprendre et utiliser la notion de dimension d'une grandeur physique

Cours

Nous sommes entourés par les ondes. La lumière, le son, les vibrations du sol ou d'une machine, les vagues, sont des exemples variés qui peuvent tous être décrits comme des ondes. L'étude des ondes se place au carrefour de nombreux domaines de la physique microscopique ou macroscopique, de la mécanique, des mathématiques appliquées, des sciences de la Terre, et même des sciences de la vie. Malgré la variété des phénomènes rencontrés, nous pouvons dégager une description commune, car toutes les ondes impliquent un couplage entre le temps et l'espace.

1.1 GÉNÉRALITÉS

Dérivé du latin *unda*, le mot **onde** désigne d'abord l'eau mobile, en particulier les mouvements de la surface de la mer. À partir du XVIII^e siècle, le mot onde désigne une propagation à la surface d'un liquide. Il est ensuite généralisé à tout phénomène de propagation, supporté par un milieu matériel (les ondes mécaniques) ou sans support matériel (les ondes électromagnétiques). C'est dans ce cadre général que nous allons définir une onde.

Toute onde est associée à une vibration, une oscillation, qui se transmet de proche en proche. Une **oscillation** ou une **vibration** est un changement périodique d'une quantité physique : une position, une hauteur, un champ électrique, une force, etc. Cela implique une notion forte de périodicité, qui indique le retour à la situation initiale à intervalle de temps régulier. Cet intervalle de temps définit une **période**.

Dans un milieu continu (un fluide ou un solide par exemple), une perturbation ou une information locale périodique va avoir un effet sur le voisinage. Ce voisinage va à son tour perturber un autre voisinage et, par cet enchaînement, la perturbation initialement localisée va se déplacer dans le milieu.

La vitesse de propagation est liée aux propriétés physiques du milieu. Pour un fluide, cette vitesse dépend principalement de la masse volumique et de la compressibilité. Par exemple, la vitesse du son dans l'air est de l'ordre de $340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, mais cette vitesse peut changer en fonction de la température et de la pression de l'air. Dans le cas d'un solide la vitesse de propagation d'une perturbation (un choc par exemple) dépend de la masse volumique et de l'élasticité. Pour un milieu non matériel, et en particulier pour le vide, ce sont les propriétés électriques et magnétiques qui gouvernent cette vitesse. La vitesse de la lumière, proche de $300\,000\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, est reliée à deux constantes physiques de l'Univers : la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide.

À partir d'un intervalle de temps (la période) mesuré en secondes et d'une vitesse mesurée en mètres par seconde, le produit des deux donne une longueur. C'est la distance parcourue par la perturbation ou l'information durant une période. Si la vitesse est constante, la distance parcourue augmente avec le temps et la perturbation s'est déplacée d'une certaine longueur appelée la **longueur d'onde**.



Encart 1.1 Dimensions des quantités physiques

Chaque quantité physique mesurable est liée à une dimension, elle-même liée à une ou plusieurs unités. Ainsi, une distance a la dimension d'une longueur (L) et peut avoir comme unité le mètre (unité du système international), le pouce, le décamètre, le parsec, etc. Les dimensions de base et les unités du système international sont :

Dimension	Symbole	Unité SI
courant	\mathcal{I}	Ampère (A)
longueur	\mathcal{L}	mètre (m)
masse	\mathcal{M}	kilogramme (kg)
temps	\mathcal{T}	seconde (s)

On peut construire les dimensions de quantités plus complexes à partir de ces dimensions de base. Par exemple, la vitesse a comme dimension $\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1}$ et s'exprime en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, et l'accélération a comme dimension $\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}$ et s'exprime en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Une force, la force de pesanteur par exemple, a comme dimension le produit d'une masse par une accélération, soit $\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{T}^{-2}$.

On utilise parfois des quantités sans dimension. Un angle en est un exemple utile. C'est une quantité qui peut varier entre 0 et 2π (ou 0 et 360 degrés) mais dont la dimension est 1. Toutefois un angle a une unité de mesure, le degré, le radian ou le grade.

1.2 TEMPS, FRÉQUENCE

Pour décrire un système en mouvement, l'évolution d'une quantité physique, une variation d'un nombre, on utilise des fonctions mathématiques qui dépendent du temps. Notée t , la variable temps ne peut qu'augmenter, et l'évolution d'une quantité ne peut que dépendre du passé. C'est la notion de causalité.

Parmi toutes les fonctions qui dépendent d'une variable, il existe un ensemble de fonctions appelées **fonctions périodiques**. Ces fonctions ont une représentation graphique qui peut être fractionnée en une infinité de motifs identiques. La période τ d'une fonction est le plus petit intervalle de temps pour lequel la fonction retrouve sa valeur initiale. La période se mesure en unité de temps, avec une unité de base qui est la seconde (abréviation s) dans le système international d'unités (SI). On appellera ces fonctions les fonctions **t -périodiques**.

Définitions

- Une fonction est **t -périodique** de période τ si

$$f(t) = f(t + \tau)$$

quel que soit l'instant t .

- La **période** est une durée et se mesure en s.
- La **fréquence** ν est l'inverse de la période :

$$\nu = \frac{1}{\tau}$$

et son unité est le hertz (Hz), 1 Hz est équivalent à 1 s^{-1} .

- La **pulsation** ou **fréquence angulaire** ω est le produit de la fréquence par 2π :

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\tau}$$

et se mesure en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On peut facilement démontrer que si une fonction est périodique de période τ , elle est également périodique de période $n\tau$, où n est un nombre entier strictement supérieur à un. En effet, si on note $t' = t + \tau$, on a $f(t + 2\tau) = f(t' + \tau) = f(t') = f(t)$. Le mot période désigne donc la plus petite valeur de l'ensemble des intervalles de temps pour lesquels la fonction est périodique.

La **figure 1.1** montre quatre exemples de fonctions périodiques temporelles. La représentation graphique de ces fonctions peut être complexe, comme dans l'exemple des battements cardiaques, ou très simple, comme dans le cas d'une fonction en créneaux.

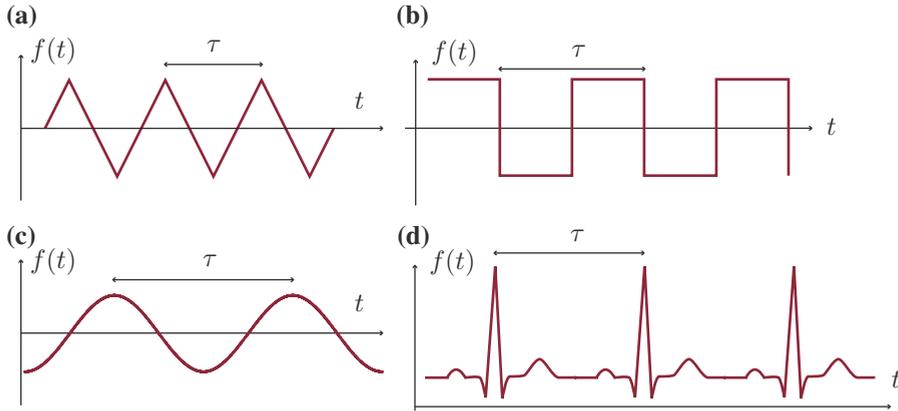


Figure 1.1 Exemples de fonctions t -périodiques.

(a) fonction en dents de scie, (b) fonction créneau, (c) fonction circulaire, (d) signal électrique typique d'un électrocardiogramme.

Exemple 1 : les battements cardiaques

Les battements cardiaques sont un exemple de mouvement périodique pour un organisme vivant. Chez l'homme, on peut les mesurer au travers de l'activité électrique des muscles du cœur. Le signal obtenu est appelé un électrocardiogramme (ECG). La fréquence cardiaque est bien sûr variable d'un individu à l'autre et dépend également des efforts demandés au cœur. La fréquence cardiaque peut être très variable d'une espèce à l'autre mais, en règle générale, plus l'animal est gros, plus sa fréquence cardiaque est basse. Ainsi la fréquence cardiaque d'une baleine est de 10 battements par minute (bpm), de 25 pour un éléphant, de 60 à 100 chez l'homme adulte, et de 500 chez les oiseaux de petite taille. Cette règle se vérifie même au sein d'une même espèce : la fréquence cardiaque d'un fœtus de 10 semaines est proche de 200 bpm, puis baisse à 150 bpm vers la 14^e semaine.

Exemple 2 : des fréquences astronomiques

À une échelle beaucoup plus grande, les mouvements des étoiles et des planètes sont également périodiques. Par exemple, la position de la Terre autour du Soleil est une fonction périodique d'une période d'un an, soit 31 536 000 secondes. La fréquence associée est donc d'environ $3,17 \cdot 10^{-8}$ Hz. Parmi tous les objets célestes, les pulsars tirent leur nom de leur luminosité variable. Un pulsar est une étoile à neutrons qui est en rotation rapide autour d'elle-même et qui émet un rayonnement puissant dans une direction différente de son axe de rotation. Un observateur éloigné, sur la Terre en particulier, voit donc un signal apparaître puis disparaître de façon périodique. Certains pulsars ont une période de l'ordre de la seconde, mais le plus rapide observé actuellement, baptisé Ter5ad, a une fréquence de rotation de 716 Hz.

Exemple 3 : les fréquences électromagnétiques

Toujours dans le domaine de la physique, le rayonnement électromagnétique (développé au chapitre 6) montre une très large gamme de fréquences, appelée **spectre**. Même si la nature physique du rayonnement est identique, le spectre est découpé en bandes de fréquences liées aux applications ou à la provenance du rayonnement. Par exemple, les ondes radio sont des ondes électromagnétiques dont la fréquence est comprise entre 9 kHz et 3 000 GHz, selon l'Union internationale des télécommunications dont le rôle est de réglementer l'utilisation des différentes fréquences. À l'autre extrémité du spectre électromagnétique, on trouve le rayonnement gamma (γ), issu par exemple de la réaction d'annihilation électron + positron. Ce rayonnement, très dangereux pour les organismes vivants, a une fréquence supérieure à 10^{19} Hz.

Le **tableau 1.1** regroupe quelques fréquences remarquables que l'on peut rencontrer dans la vie quotidienne.

Tableau 1.1 Quelques fréquences remarquables.

Domaine	Fréquences	Dénomination, application
géophysique	0,01 à 10 Hz	ondes sismiques
acoustique	< 20 Hz	infrasons
	de 20 à 20 000 Hz	bande de fréquences audibles
	440 Hz	diapason (LA), tonalité téléphonique
	> 20 000 Hz	ultrasons
horlogerie	32 768 Hz	oscillation d'un quartz de montre
	9,192631770 GHz	horloge atomique au césium
électromagnétisme	2 450 MHz	four à micro-ondes, wifi
	88 à 108 MHz	radio FM
	174 à 223 MHz	radio numérique terrestre
	470 à 860 MHz	télévision numérique terrestre
physique atomique	10^{14} Hz	vibration des atomes dans les solides

1.3 ESPACE, LONGUEUR D'ONDE

Après avoir défini des fonctions t -périodiques, on peut définir des fonctions périodiques selon une ou plusieurs coordonnées de l'espace. Dans un espace tridimensionnel, chaque point est défini par trois coordonnées (x, y, z) dans un repère cartésien.

La **figure 1.2a** montre une surface qui est périodique dans une direction, la direction x . Il s'agit d'une forme ondulée dont l'élévation $h(x)$ est une fonction sinusoïdale : $h(x) = h_0 \sin(2\pi x/\lambda)$. La fonction sinus est une fonction de périodicité 2π , ce qui indique que $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$ pour n'importe quel angle θ . En appliquant cette relation à la forme ondulée, on a

$$\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x + \lambda)\right) = \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right),$$

ce qui montre que la longueur λ est la période spatiale de la fonction $h(x)$. Cette quantité est appelée longueur d'onde, c'est-à-dire la longueur pour laquelle la fonction x -périodique retrouve sa valeur.

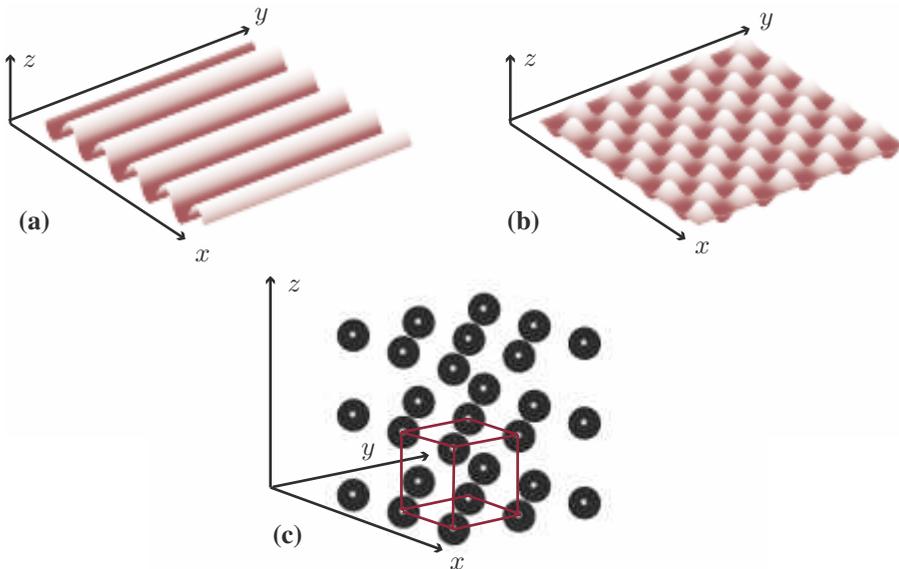


Figure 1.2 Représentation de surfaces périodiques.

(a) surface x -périodique, (b) surface périodique dans les deux directions x et y , (c) motif périodique selon les trois dimensions de l'espace. Ce motif est basé sur la répétition d'une maille cubique (en bleu).

Définitions

- Une fonction est **x -périodique** de période λ si

$$f(x) = f(x + \lambda)$$

quelle que soit la position x .

- La longueur λ est la **longueur d'onde** de la fonction f .

- Le **nombre d'onde** k_x est défini par :

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda},$$

sa dimension est \mathcal{L}^{-1} et son unité est le m^{-1} .

On peut définir des fonctions qui sont multi-périodiques, c'est-à-dire que la fonction est périodique pour plusieurs variables. La **figure 1.2b** montre une surface périodique selon les deux directions x et y . C'est une fonction du type $\sin(k_x x) \sin(k_y y)$ avec deux nombres d'ondes k_x et k_y . Dans l'exemple de la figure, les deux nombres d'ondes sont égaux.



Ne pas confondre la longueur d'onde avec le nombre d'onde. La longueur d'onde se mesure en m, tandis que le nombre d'onde se mesure en m^{-1} .

Comme une fréquence, une longueur d'onde est un nombre positif. On va principalement rencontrer les longueurs d'ondes les plus courtes dans le domaine de l'électromagnétisme et de la physique des particules. Dans le **tableau 1.2** sont indiquées quelques longueurs d'ondes remarquables.

Tableau 1.2 Quelques longueurs d'ondes remarquables.

Domaine	Longueur d'onde	Dénomination, application
électromagnétisme	> 10 cm	ondes radio
	1 à 300 μm	infra-rouge
	400 à 700 nm	lumière visible
	10 à 400 nm	ultraviolet
acoustique	1,7 cm à 17 m	domaine audible
ondes de surface	de 1 m à 100 km	vagues océaniques

1.4 ÉNERGIE

L'énergie d'un système physique est une quantité qui peut prendre plusieurs formes. La dimension de l'énergie est $\mathcal{L}^2 \mathcal{M} \mathcal{T}^{-2}$, et l'unité standard est le joule (J). En mécanique, l'énergie totale se décompose en une énergie cinétique, liée au mouvement, en une énergie potentielle, liée à la présence d'une masse dans un champ de force, et en un travail des différentes forces qui agissent sur le système, par exemple une force de frottement.

Exemple : énergie cinétique d'une masse oscillante

Une masse m qui se déplace à une vitesse v possède une énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Si cette masse suit un mouvement périodique de la forme

$$x(t) = x_0 \sin \omega t,$$

sa vitesse est

$$v(t) = \dot{x}(t) = x_0 \omega \cos \omega t,$$

et son énergie cinétique est

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 \cos^2 \omega t.$$

D'autres formes existent : l'énergie électrique, magnétique, thermique, et des processus complexes font souvent intervenir de nombreux échanges entre ces différentes formes d'énergie. La technologie présente de nombreux dispositifs qui permettent de convertir l'énergie d'une forme à une autre. Un microphone assure la conversion de l'énergie mécanique acoustique en énergie électrique. Cette conversion correspond à la traduction d'un signal acoustique en un signal électrique. Une fois amplifié et conditionné, ce signal peut être envoyé vers un dispositif émetteur, une antenne, qui va convertir l'énergie électrique en énergie électromagnétique transportée par une onde radio. En inversant le processus, le signal électromagnétique est converti par un récepteur en signal électrique qui à son tour est converti en signal acoustique par un dispositif haut-parleur. Cette chaîne de transformation des énergies est un exemple d'un système de communication utilisé pour la diffusion par radio hertzienne ou par téléphonie, pour ne citer que des applications de la vie courante.

Dans les milieux continus, l'énergie est répartie dans un volume, espace à trois dimensions. Si la répartition est homogène, on peut définir une densité volumique d'énergie, mesurée en $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$. C'est le cas des ondes électromagnétiques dans le vide qui transportent l'énergie dans tout le volume disponible.

SYNTHÈSE**Savoirs**

- Une onde est la propagation de proche en proche d'une oscillation, d'une vibration ou d'une information périodique.
- La période est l'intervalle de temps nécessaire pour retrouver l'état initial.
- La longueur d'onde est la distance entre deux valeurs identiques d'une fonction d'une variable spatiale.
- La fréquence ν est l'inverse de la période τ ; le nombre d'onde est $2\pi/\lambda$.

Savoir-faire

- Convertir une période en fréquence et une longueur d'onde en nombre d'onde.
- Connaissant la vitesse de propagation d'une onde, relier la fréquence à la longueur d'onde.

Mots-clés

- Fréquence
- Période
- Pulsation
- Longueur d'onde
- Nombre d'onde

Exercices

Tester ses connaissances

- 1 La quantité $2\pi x/\lambda$ a comme unité :
 a. le mètre. b. le m^{-1} . c. sans unité.
- 2 Un nombre d'onde a comme unité :
 a. le mètre. b. le m^{-1} . c. sans unité.
- 3 La vitesse de la lumière (vitesse de propagation des ondes électromagnétiques) est proche de :
 a. $300\,000\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. b. $300\,000\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. c. $300\,000\,000\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.
- 4 La pression est une force par unité de surface. Sa dimension est :
 a. $\mathcal{L}T^{-1}$. b. $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}T^{-2}$. c. $\mathcal{L}^{-2}\mathcal{M}T^{-1}$.

Exercices d'application

- 5 Donner la période en secondes, la fréquence en Hz et la pulsation en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ associées à un rythme cardiaque de 80 battements par minute.
- 6 Un tambour de machine à laver tourne à 1 500 tours par minute. Déterminer la période, la fréquence et la pulsation correspondantes.
- 7 Une voiture roule à une vitesse $v = 90\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Un des pneus (diamètre $D = 62\text{ cm}$) a un défaut sous la forme d'une petite bosse sur la bande de roulement. Déterminer la fréquence de vibration qui peut être ressentie par le conducteur.

- 8 Donner les longueurs d'ondes associées aux fréquences sonores 20 Hz (limite basse de l'audition), 440 Hz (diapason), 20 kHz (limite haute de l'audition), 5 MHz (ultrasons).
- 9 Quelles sont les fréquences associées aux couleurs dont les longueurs d'ondes sont données ci-dessous :

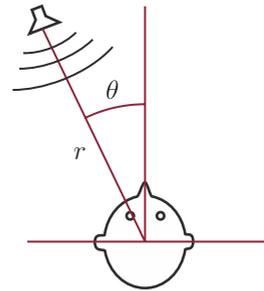
Couleur	Longueur d'onde λ
bleu	470 nm
rouge	650 nm
jaune	580 nm
vert	530 nm

- 10 Quelles sont les longueurs d'onde associées aux ondes électromagnétiques de fréquences $\nu = 100$ MHz (radio en modulation de fréquence) et $\nu = 2\,450$ MHz (chauffage par micro-onde) ?

Exercices d'approfondissement

11 La perception du relief sonore

- Déterminer la différence de temps de propagation entre une source sonore et les oreilles gauche et droite d'un auditeur. La distance entre les deux oreilles est $2d = 20$ cm. On placera un repère dont l'origine est entre les oreilles et la source sonore est repérée par des coordonnées polaires (r, θ) .
- Simplifier l'expression obtenue en supposant que la source est éloignée de l'auditeur : $r \gg d$.
- Calculer la différence de temps de parcours de l'onde sonore pour une source placée à $r = 10$ m et orientée à $\theta = 45^\circ$.



Corrigés

Tester ses connaissances

	a.	b.	c.
1			X
2		X*	
3	X		
4		X	

* Un nombre d'onde est calculé comme l'inverse d'une longueur.

Exercices d'application

- 5 Un rythme de 80 battements par minute correspond à 1,33 battements par seconde. La fréquence est donc $\nu = 1,33 \text{ Hz}$ et la période $\tau = 1/\nu = 0,67 \text{ s}$. La pulsation est $2\pi\nu = 8,37 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.
- 6 La rotation correspond à $1500/60 = 25$ tours par seconde, la fréquence est donc $\nu = 25 \text{ Hz}$, la période $\tau = 40 \text{ ms}$ et la pulsation est $\omega = 157 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.
- 7 Si on note ν la fréquence de rotation des roues, la vitesse est le produit de cette fréquence et de la distance parcourue pour un tour de roue, soit $v = \pi D\nu$. La fréquence est donc $\nu = v/\pi D = 12,8 \text{ Hz}$ pour les données numériques proposées.
- 8 Les ondes sonores se propagent à la vitesse de $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. La longueur d'onde associée à une fréquence ν est $\lambda = c/\nu$, ce qui donne pour les fréquences proposées : 17 m pour la fréquence de 20 Hz, 77 cm pour la fréquence de 440 Hz, 1,7 cm pour la fréquence de 20 kHz et 340 μm pour les ultrasons à 1 MHz.
- 9 Les ondes électromagnétiques se déplacent à la vitesse de la lumière $c = 3\cdot 10^8 \text{ m/s}$. La fréquence associée à une longueur d'onde est $\nu = c/\lambda$ ce qui donne pour les couleurs proposées :

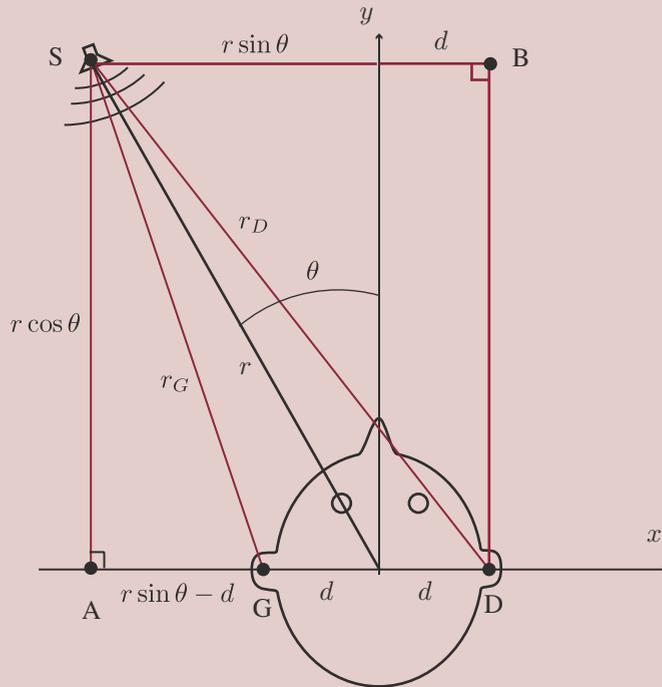
Couleur	Longueur d'onde λ (nm)	Fréquence (Hz)
bleu	470	$6,38\cdot 10^{14}$
rouge	650	$4,62\cdot 10^{14}$
jaune	580	$5,17\cdot 10^{14}$
vert	530	$5,66\cdot 10^{14}$

- 10 Avec la relation $\lambda = c/\nu$ et avec $c = 3\cdot 10^8 \text{ m/s}$, la longueur d'onde associée à une fréquence de 100 MHz est $\lambda = 3 \text{ m}$ et la longueur d'onde générée par un four à micro-ondes est $\lambda = 12 \text{ cm}$.

Exercices d'approfondissement

11 La perception du relief sonore

- a. Le tracé géométrique de la configuration montre que la distance entre la source et l'oreille gauche r_G est plus courte que la distance entre la source et l'oreille droite r_D .



La relation de Pythagore appliquée aux triangles rectangles AGS et BDS donne $r_G^2 = r^2 \cos^2 \theta + (r \sin \theta - d)^2$ et $r_D^2 = r^2 \cos^2 \theta + (r \sin \theta + d)^2$, soit

$$r_G = r \sqrt{1 - \frac{2d}{r} \sin \theta + \frac{d^2}{r^2}},$$

$$r_D = r \sqrt{1 + \frac{2d}{r} \sin \theta + \frac{d^2}{r^2}},$$

et la différence de temps de vol de l'onde acoustique est

$$\Delta t = \frac{r_D - r_G}{c}.$$

- b. Si on suppose que $d/r \ll 1$, alors le terme quadratique d^2/r^2 dans les expressions de r_G et r_D peut être négligé, et on peut également développer

$\sqrt{1 \pm 2d/r} \approx 1 \pm d/R$, ce qui donne pour la différence de temps :

$$\Delta t = \frac{2d \sin \theta}{c}, \quad \text{pour } d \ll r.$$

On remarque que, par cette hypothèse, la différence de temps est indépendante de la distance r de la source.

- c. Avec un angle $\theta = 45^\circ$ et une vitesse $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, on trouve une différence de temps de 0,3 ms. Cette différence de temps de perception n'est pas la seule information utilisée par le cerveau pour localiser une source sonore. L'atténuation ainsi que le déphasage entre les deux signaux sont également importants.

2

Les oscillateurs

Plan

Cours

- 2.1 Qu'est-ce qu'un oscillateur ?
- 2.2 Quatre exemples d'oscillateurs
- 2.3 Oscillateur harmonique non amorti
- 2.4 Oscillateur amorti
- 2.5 Forçage et résonance
- 2.6 Couplage de deux oscillateurs
- 2.7 Couplage linéaire de N oscillateurs

Synthèse

Exercices

Corrigés

Objectifs

- Définir la notion d'oscillateur
- Déterminer la fréquence propre d'un oscillateur
- Identifier les phénomènes de résonance
- Modéliser l'amortissement et la dissipation d'énergie

Cours

La propagation d'une onde repose sur des oscillations ou vibrations locales. L'oscillation la plus simple est obtenue par la présence de deux forces : une force motrice et une force de rappel. À partir des principes de base de la physique et de la mécanique, il est possible de décrire le mouvement d'un oscillateur simple par deux quantités : l'amplitude d'oscillation et la fréquence d'oscillation. Si en plus on prend en compte la dissipation d'énergie (frottement par exemple), on peut calculer comment l'oscillation s'atténue au cours du temps. Enfin, quand l'oscillateur est en contact avec une source d'énergie, on peut modéliser l'adaptation de l'oscillateur à cette source.

2.1 QU'EST-CE QU'UN OSCILLATEUR ?

Commençons par une véritable expérience de table. Sur le bord d'une table, maintenez fermement l'extrémité d'une règle (en plastique ou en métal) avec le pouce. L'autre extrémité est dans le vide. Appuyez sur l'extrémité libre et relâchez. La règle vibre en émettant un son caractéristique dû aux chocs répétés entre la règle et la table. En changeant la longueur de la règle au-dessus du vide, on change la sonorité. Expérience simple à réaliser mais complexe à transcrire mathématiquement : la règle oscille autour d'une position de repos qui est très proche de l'horizontale.

À la suite de cet exemple, nous choisirons une définition très générale :

Définition

Un **oscillateur** est un objet ou une quantité physique qui décrit une variation périodique autour d'une position d'équilibre.

Un système physique en **équilibre** est un système dont les caractéristiques physiques sont constantes dans le temps. Ces caractéristiques peuvent être la position, la vitesse, la charge électrique, etc.

Par exemple, une bille au fond d'une cuvette est un système en équilibre. Si on perturbe la bille en lui donnant un coup, elle va retourner au fond de la cuvette et retrouver sa position d'équilibre (figure 2.1). Au contraire, une bille immobile au sommet

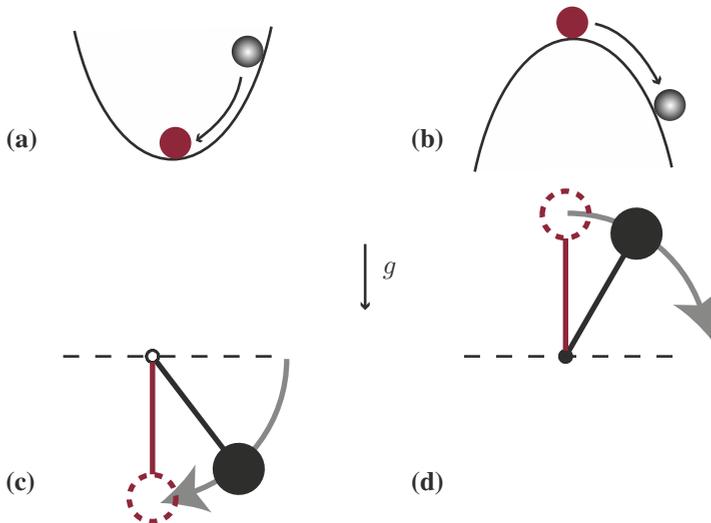


Figure 2.1 Les positions d'équilibre (en bleu) peuvent être stables (a, c) ou instables (b, d). Dans ces exemples, c'est la force de pesanteur qui est motrice.

d'une colline ne retrouvera jamais sa position d'équilibre si on lui donne une impulsion. Cet exemple montre la distinction entre un équilibre **stable** (la cuvette) et un équilibre **instable** (la colline).

Un équilibre stable est donc défini par l'existence d'une force de rappel qui ramène le système vers la configuration d'équilibre. Dans le cas de la cuvette, la force de gravité couplée avec la forme incurvée du sol impose un retour de la bille vers le fond.

L'expérience de la règle montre qu'au bout d'un certain temps, la vibration s'amortit et la règle redevient immobile : l'énergie initiale fournie par la déformation de la règle s'est dissipée au cours du mouvement.



Pour commencer l'étude des oscillateurs, nous ne prenons pas en compte ces pertes d'énergie.

2.2 QUATRE EXEMPLES D'OSCILLATEURS

Ces quatre exemples n'existent que dans un monde idéal où les frottements, la friction et, plus généralement, la dissipation d'énergie n'existent pas. L'énergie initiale du système est donc indéfiniment conservée, même si cette énergie peut prendre plusieurs formes. Malgré cette hypothèse, il convient de se pencher avec beaucoup d'attention sur ces modèles car ils sont à la base de toute la physique des ondes et des vibrations.

2.2.1 Système masse-ressort

Le premier exemple d'oscillateur est un ressort attaché à un point fixe à une extrémité et à une masse libre à son autre extrémité (figure 2.2). Comme tous les frottements sont négligés, la seule force le long de l'axe Ox est la force de rappel du ressort $R = -kx$. La constante k est la raideur du ressort, dont la valeur se mesure en $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Plus cette valeur est élevée, plus le ressort va résister à l'allongement ou à la compression.

L'équation du mouvement masse \times accélération = somme des forces s'écrit ici simplement

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = R = -kx \quad (2.1)$$

ou encore

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (2.2)$$

Le seul coefficient du second terme k/m a la dimension d'un temps à la puissance -2 . En effet

$$\left[\frac{k}{m} \right] = \frac{\mathcal{M}\cdot\mathcal{T}^{-2}}{\mathcal{M}} = \mathcal{T}^{-2}$$

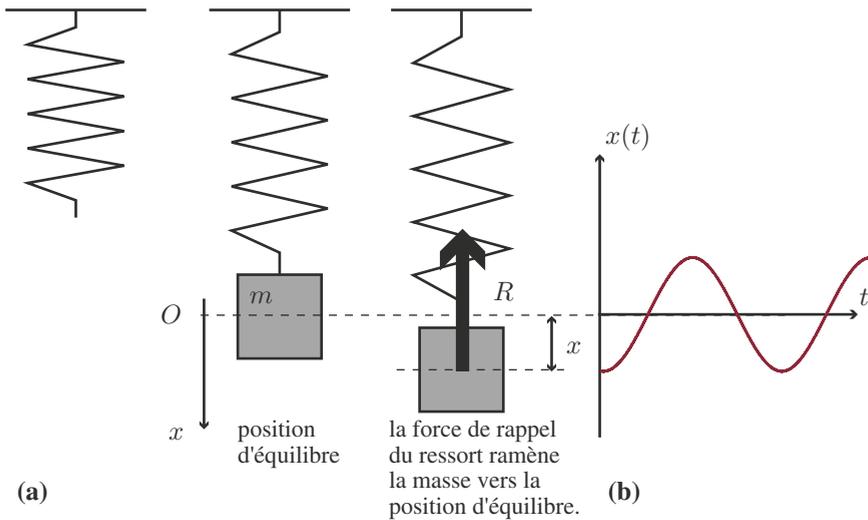


Figure 2.2 Oscillation d'une masse liée à un point fixe par un ressort.

Ce coefficient est homogène à une pulsation au carré et on choisit d'écrire l'équation (2.2) sous la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.3)$$



Ce système vibrant est l'archétype des oscillateurs. C'est pourquoi dans la suite de ce chapitre, c'est ce modèle qui sera choisi comme exemple lorsqu'une description physique sera nécessaire.

2.2.2 Pendule simple

Un pendule est constitué d'une masse m au bout d'une tige (ou corde) de longueur l . La masse est soumise à la gravité et la position d'équilibre est à la verticale sous le point de fixation. Ce point d'équilibre est **stable**. Un autre point d'équilibre, **instable** celui-là, se trouve à la verticale au-dessus du point de fixation.

Quel que soit son mouvement, la masse se déplace sur un arc de cercle de rayon l (figure 2.3). La coordonnée curviligne qui permet de repérer la position de la masse est $l\theta$ où θ est l'angle de la tige par rapport à la verticale. En projection sur l'axe tangent à la trajectoire, la loi de Newton s'écrit

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta, \quad (2.4)$$

et après simplification

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (2.5)$$

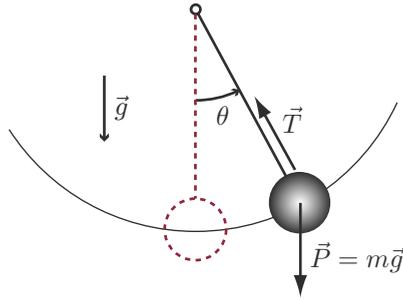


Figure 2.3 Définition des paramètres pour le pendule simple.

Comme dans l'exemple du système masse-ressort, le seul coefficient de l'équation, g/l , est homogène au carré d'une pulsation :

$$\left[\frac{g}{l} \right] = \frac{\mathcal{L} \cdot \mathcal{T}^{-2}}{\mathcal{L}} = \mathcal{T}^{-2},$$

et l'équation du pendule s'écrit

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2.6)$$

La projection de la force de pesanteur sur l'axe donne un terme en $\sin \theta$. L'équation du pendule simple est donc **non linéaire**. Si on limite le mouvement aux petites oscillations ($\theta \ll 1$), on peut utiliser un développement de la fonction sinus en série de Taylor :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots, \quad \theta \ll 1.$$



Encart 2.1 Développement de fonctions en série et linéarisation d'équations

Toutes les fonctions peuvent être développées en polynôme autour d'un point, sous réserve qu'elles soient dérivables. Soit $f(x)$ une fonction et x_0 un point autour duquel on cherche un développement, appelé développement de Taylor-Young. Le développement est

$$f(x)_{x \approx x_0} = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right) (x_0) (x - x_0)^n \quad (2.7)$$

Les fonctions circulaires ont comme développement à l'ordre au voisinage de $x = 0$:

$$\sin \theta = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} \theta^{2j+1},$$

$$\cos \theta = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{(2j)!} \theta^{2j}.$$

Grâce au développement (2.7), une équation non linéaire (par exemple l'équation du pendule 2.6) peut être linéarisée autour d'un point particulier. Une équation est dite linéaire pour une variable ou une fonction x si toute combinaison linéaire de deux solutions x_1 et x_2 indépendantes forme une solution.

En ne gardant que le premier terme de ce développement, on fait l'approximation $\sin \theta \approx \theta$, et l'équation du mouvement est alors rendue linéaire, mais restreinte aux petites oscillations :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0. \quad (2.8)$$



L'hypothèse d'une petite oscillation est dans la pratique difficile à formuler, car cela dépend de la précision choisie. Si on accepte une erreur d'un pour-cent dans le développement $\sin \theta \approx \theta$, cela correspond à un angle $\theta < 0,25$ rad, soit un maximum de 14 degrés.



Encart 2.2 Mesure du temps

La fréquence d'un pendule pesant ne dépend que de sa longueur. Ainsi, un pendule d'une exacte longueur de $9,81/\pi^2 = 99,4$ cm oscille avec une période de deux secondes. Comme le pendule passe deux fois par période au point d'équilibre, on peut définir la seconde comme l'intervalle de temps entre deux passages successifs au point d'équilibre d'un pendule de cette longueur.

2.2.3 Oscillateur électronique

L'oscillateur électronique le plus simple est composé de deux dipôles : une inductance idéale et un condensateur (figure 2.4). Cet oscillateur est idéal car il n'y a pas de perte. Dans la réalité, la résistance des conducteurs et des contacts induit une perte d'énergie sous forme de chaleur (l'effet Joule). Une modélisation plus réaliste comporte une résistance en série R .

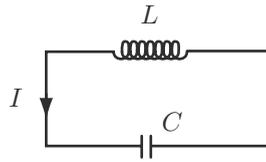


Figure 2.4 L'oscillateur électronique le plus simple.

Il est composé d'une inductance (self) L et d'un condensateur de capacité C .

Si on note I l'intensité du courant dans le circuit et q la charge du condensateur, la différence de potentiel aux bornes de l'inductance est LdI/dt et celle aux bornes du condensateur est q/C . D'autre part, l'intensité est reliée à la charge par $I = dq/dt$. La loi des mailles appliquée à ce circuit donne donc

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0, \quad (2.9)$$

ou encore

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (2.10)$$

Encore une fois, la constante $1/LC$ est homogène à l'inverse d'un temps au carré, et on écrit l'équation pour la charge instantanée :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2.11)$$



Encart 2.3 Oscillateurs électroniques

Ce principe est présent dans tous les oscillateurs électroniques, de haute ou basse fréquence. De nombreux oscillateurs ont été inventés dans le premier quart du XX^e siècle lors du développement des communications par radio. Les oscillateurs sont utilisés pour sélectionner une fréquence particulière et mettre ainsi en communication deux appareils distants.

Dans les années 1960, les oscillateurs ont été utilisés pour la synthèse sonore avec la mise en œuvre des premiers synthétiseurs analogiques, les oscillateurs de plus basse fréquence (*low frequency oscillator*, LFO) étant utilisés pour moduler la fréquence ou la phase d'un signal créé par un oscillateur de fréquence audible (typiquement on considère que l'oreille humaine est sensible aux vibrations acoustiques entre 20 et 20 000 Hz).

2.2.4 Modèle harmonique de la liaison atomique

Une liaison atomique est la mise en commun d'un ou plusieurs électrons par deux atomes. Deux atomes ainsi liés forment une molécule. L'interaction entre ces deux atomes est représentée par un potentiel qui dépend de la distance r séparant les centres (noyaux) des deux atomes (figure 2.5).

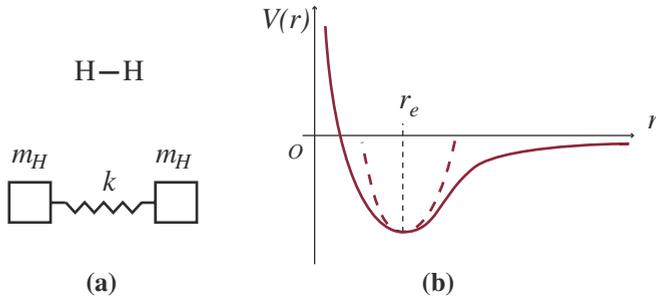


Figure 2.5

(a) Modèle mécanique d'une liaison atomique simple : les deux atomes (par exemple deux atomes d'hydrogène) sont modélisés par deux masses reliées par une liaison élastique, un ressort. **(b)** Représentation du potentiel d'interaction V entre les deux atomes (trait continu), et son approximation parabolique (trait pointillé).

Le potentiel est en général une fonction compliquée mais il peut se décomposer en deux parties :

- une partie attractive à longue portée ($r > r_e$) ;
- une partie fortement répulsive à courte portée ($r < r_e$).

Pour une distance d'équilibre $r = r_e$ le potentiel passe par un minimum. La force d'interaction F entre les deux atomes dérive du potentiel et passe donc par zéro à cette distance particulière :

$$F(r_e) = - \left(\frac{dV}{dr} \right)_{r=r_e} = 0.$$

Si la distance entre les atomes varie peu par rapport à la valeur d'équilibre r_e , on peut développer le potentiel sous la forme

$$V(r \approx r_e) = V(r_e) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n V}{dx^n} \right)_{r=r_e} (r - r_e)^n.$$

Comme le potentiel admet un minimum, la dérivée première du potentiel est nulle et les deux premiers termes du développement sont

$$V(r \approx r_e) \approx V(r_e) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{r=r_e} (r - r_e)^2 + \dots$$

et le potentiel approché est de forme parabolique (figure 2.5b). Avec cette approximation, la force de liaison est

$$F = - \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{r=r_e} (r - r_e) + \dots,$$

qui est de la même forme que la force de rappel du ressort présenté plus haut (§ 2.2.1). L'analogie montre que la raideur du ressort est équivalente à la dérivée seconde du potentiel évalué à la distance d'équilibre.

Exemple : la molécule H₂

Le modèle mécanique de cette molécule est composé de deux masses identiques m_H reliées par un ressort de raideur k . Notons x_1 et x_2 les écarts de chaque masse par rapport à leurs positions d'équilibre respectives. Les équations du mouvement des atomes sont

$$m_H \frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_1 - x_2), \quad (2.12)$$

$$m_H \frac{d^2x_2}{dt^2} = +k(x_1 - x_2). \quad (2.13)$$

Dans ce système, c'est l'écart de position entre les masses qui produit la force, c'est donc la seule variable $x_{12} = x_1 - x_2$ qui est pertinente. La différence des deux équations ci-dessus produit

$$m_H \frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} = -2k(x_1 - x_2), \quad (2.14)$$

ou encore

$$\frac{d^2x_{12}}{dt^2} + \omega_0 x_{12} = 0, \quad (2.15)$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m_H}} = \sqrt{\frac{2}{m_H} \left(\frac{d^2V}{dr^2} \right)_{r=r_e}}.$$

Le facteur 2 dans cette équation vient de la présence de deux masses identiques. Le système est un système masse-ressort avec une masse réduite $m_H/2$. Dans le cas où les masses sont différentes (m_1 et m_2), la masse réduite est $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$.



Encart 2.4 Spectroscopie infrarouge

Ce modèle simple est largement utilisé en spectroscopie infrarouge (IR). Un spectromètre est un appareil qui compare les spectres électromagnétiques avant et après la traversée d'un échantillon. La différence des spectres montre les bandes des fréquences absorbées par l'échantillon de matière à analyser. Ces fréquences sont reliées aux différentes liaisons atomiques présentes. Chaque liaison est répertoriée par une fréquence propre et on peut lui associer une constante de raideur k selon le modèle mécanique. Quelques exemples de constantes de raideur et de fréquences propres $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ sont donnés ci-dessous :

Liaison	$k(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$\nu_0(10^{13} \text{ Hz})$
H-Cl	480	8,66
H-F	970	8,72
H-Br	410	7,68
H-I	320	6,69
C-O	1 860	6,42
N-O	1 530	6,63

2.3 OSCILLATEUR HARMONIQUE NON AMORTI

Les quatre exemples précédents aboutissent tous à une équation de la même forme. On peut donc écrire une équation générale pour l'amplitude de l'oscillateur $A(t)$. Cette amplitude peut être la position de la masse, l'écart du pendule avec la verticale, etc. Cette équation est :

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \omega_0^2 A = 0. \quad (2.16)$$

L'équation (2.16) est une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre. La détermination complète de la solution nécessite donc la connaissance de deux conditions initiales sur l'amplitude et la vitesse de l'oscillateur à $t = 0$. Posons :

- l'amplitude initiale $A_0 = A(t = 0)$;
- la vitesse initiale $\dot{A}_0 = dA/dt(t = 0)$.

2.3.1 Solution générale

Pour résoudre l'équation (2.16), on doit chercher une fonction $A(t)$ telle que sa dérivée seconde soit égale à $-\omega_0^2 A$. Sans hypothèse particulière, la solution générale de (2.16) s'écrit sous la forme d'exponentielles complexes :

$$A(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t},$$

où les constantes A_1 et A_2 sont déterminées par les conditions initiales ($t = 0$) :

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(A_0 - i \frac{\dot{A}_0}{\omega_0} \right),$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left(A_0 + i \frac{\dot{A}_0}{\omega_0} \right).$$

Finalement, après réarrangement, la solution générale est

$$A(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{A}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (2.17)$$

Cette solution peut également s'écrire sous la forme d'une seule fonction circulaire, mais avec une phase initiale ϕ_0 :

$$A(t) = A_1' \cos(\omega_0 t + \phi_0). \quad (2.18)$$

Graphiquement, l'amplitude décrit une sinusoïde de période $2\pi/\omega_0$ (figure 2.6a) et la vitesse montre la même forme, mais avec un décalage temporel (un déphasage) de $\tau/2$ (figure 2.6b). Une autre façon de représenter graphiquement l'évolution de l'oscillateur consiste à tracer la vitesse \dot{A} en fonction de l'amplitude A : c'est le **portrait de phase** (figure 2.6c). La propriété principale de ce tracé est de montrer

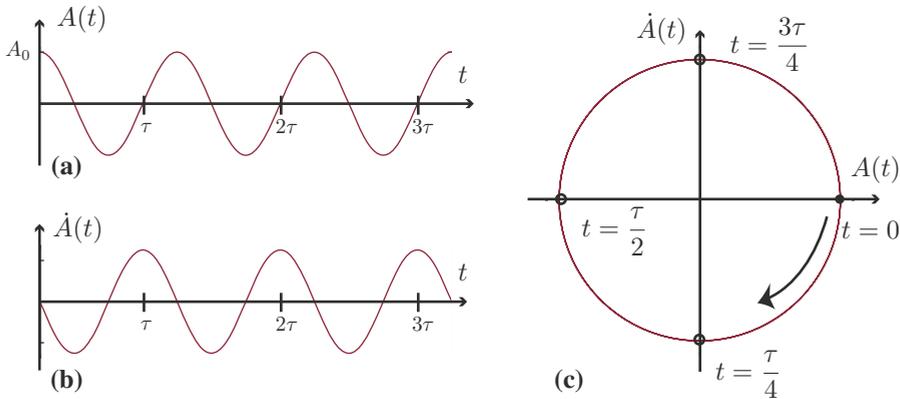


Figure 2.6

Au cours du temps, l'amplitude (a) d'un oscillateur non amorti décrit une courbe sinusoïdale, de même que sa vitesse (b). Ces deux courbes sont décalées d'une demi-période $\tau/2$, ce qui correspond à un déphasage de π . Si on trace la vitesse $\dot{A}(t)$ en fonction de l'amplitude $A(t)$, le portrait de phase est une courbe fermée (c). Les conditions initiales sont une amplitude non nulle $A_0 \neq 0$ et une vitesse nulle $\dot{A}_0 = 0$.

une forme fermée : le système retrouve son état après chaque intervalle de temps égal à la période τ .

L'équation (2.16) a été obtenue pour des systèmes idéaux, en l'absence de dissipation d'énergie. La courbe fermée du portrait de phase montre non seulement la périodicité de l'oscillateur, mais également la conservation de l'énergie totale du système.

2.3.2 Conservation de l'énergie totale

Une énergie a comme dimension $\mathcal{ML}^2\mathcal{T}^{-2}$ et l'unité SI associé est le joule (J). Pour construire une énergie à partir de l'équation (2.16), il est plus aisé de revenir à un modèle mécanique, par exemple le système masse-ressort. L'amplitude A désigne donc l'allongement du ressort x par rapport à sa position d'équilibre.

L'équation (2.16) met en relation l'amplitude A et l'accélération d^2A/dt^2 . On peut faire apparaître la vitesse \dot{A} en écrivant :

$$\frac{d\dot{A}}{dt} + \omega_0^2 A = 0.$$

En multipliant par $m\dot{A}$, on a :

$$m\dot{A} \frac{d\dot{A}}{dt} + m\omega_0^2 \dot{A} A = 0,$$

puis en intégrant une fois par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{1}{2}m\dot{A}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \mathcal{E}, \quad (2.19)$$

où \mathcal{E} est une constante, l'énergie totale du système.

En réintroduisant la masse m et la raideur k , et en posant $A = x$ et $v = dx/dt$ on a :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \mathcal{E}. \quad (2.20)$$

soit la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle écrites sous une forme traditionnelle.

Au cours du mouvement oscillatoire, l'énergie effectue un va-et-vient : en s'éloignant de la position d'équilibre stable, le système ralentit jusqu'à l'arrêt complet avec une énergie potentielle maximum. Au contraire, au passage au point d'équilibre, la vitesse — donc l'énergie cinétique — est maximale et l'énergie potentielle est nulle.

La solution étant périodique de période τ , on peut calculer la moyenne temporelle de l'énergie :

$$\langle \mathcal{E} \rangle_t = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{1}{2}m\dot{A}^2 dt + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 dt,$$

ce qui donne

$$\langle \mathcal{E} \rangle_t = \frac{1}{4}m(\omega_0^2 A_0^2 + \dot{A}_0^2) + \frac{1}{4}m(\omega_0^2 A_0^2 + \dot{A}_0^2).$$

On constate donc que, sur une période, l'énergie cinétique moyenne est égale à l'énergie potentielle moyenne.

2.4 OSCILLATEUR AMORTI

Dans les systèmes réels, il y a échange d'énergie entre l'oscillateur et l'environnement extérieur : soit l'oscillateur transmet de l'énergie — donc il en perd — soit il en absorbe. On peut imaginer de nombreuses sources de frottement, ainsi que différents modes de dissipation d'énergie. Dans la suite de ce chapitre, nous discutons uniquement du frottement de type « visqueux » où la force est proportionnelle à la vitesse.



Encart 2.5 Le frottement visqueux

Un objet solide qui se déplace dans un milieu fluide (gaz ou liquide) subit une force de frottement de direction opposée à la vitesse. La force de frottement est d'autant plus forte que la viscosité du milieu est grande. L'expression de la force de frottement dépend de la géométrie de l'écoulement autour de l'objet considéré et cet écoulement est caractérisé par un nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho_f U L}{\eta_f},$$

où ρ_f et η_f sont la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide, U est la vitesse caractéristique relative entre le solide et le fluide, et L la taille caractéristique de l'objet solide. Quand le nombre de Reynolds est petit devant 1 ($Re \ll 1$), la force de frottement est proportionnelle à la vitesse de l'objet \vec{U} et à la taille de l'objet :

$$\vec{F}_f = -C\eta_f L \vec{U}.$$

Par exemple, pour une sphère de rayon a se déplaçant à une vitesse \vec{U} dans un fluide au repos, G. G. Stokes (1819–1903) a montré que la force de frottement est

$$\vec{F}_f = -6\pi\eta_f a \vec{U}.$$

Pour rendre compte de ce frottement, on ajoute un terme proportionnel à la vitesse \dot{A} dans l'équation d'amplitude (2.16) :

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \gamma \frac{dA}{dt} + \omega_0^2 A = 0 \quad (2.21)$$

où γ est une **constante d'amortissement** qui a la dimension de l'inverse d'un temps ($[\gamma] = \mathcal{T}^{-1}$).

La solution générale d'une telle équation différentielle est du type $A = e^{ut}$, ce qui donne une équation caractéristique du second degré $u^2 + \gamma u + \omega_0^2 = 0$ dont les racines sont

$$u_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} \right) = -\frac{\gamma}{2} \pm \alpha \quad \text{avec } \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}.$$

La solution de (2.21) est donc de la forme

$$A(t) = e^{-\gamma t/2} (A_1 e^{\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t})$$

et les conditions initiales (A_0, \dot{A}_0) permettent de déterminer les constantes A_1 et A_2 , pour obtenir finalement la solution générale de (2.21) :

$$A(t) = \frac{e^{-\gamma t/2}}{2\alpha} \left\{ \alpha A_0 (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) + \left(\frac{\gamma}{2} A_0 + \dot{A}_0 \right) (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) \right\}. \quad (2.22)$$

Selon la nature de α (imaginaire, nul ou réel), on peut distinguer trois régimes décrits ci-dessous.

2.4.1 Régime oscillant

Si $(\gamma^2 - 4\omega_0^2) < 0$, alors α est un imaginaire pur, que l'on écrit sous la forme $\alpha = i\omega_1$ avec

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}}. \quad (2.23)$$

Dans ce cas, la solution (2.22) devient

$$A(t) = e^{-\gamma t/2} \left\{ A_0 \cos \omega_1 t + \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{\gamma}{2} A_0 + \dot{A}_0 \right) \sin \omega_1 t \right\} \quad (2.24)$$

et l'amplitude décrit une oscillation de pulsation ω_1 avec une enveloppe exponentiellement décroissante. Ce régime est appelé **pseudo-périodique** car il ne satisfait pas à la définition de la périodicité vue au chapitre 1. La **figure 2.7** montre l'amplitude (a), la vitesse (b) et le portrait de phase (c) pour un exemple d'amortissement faible.

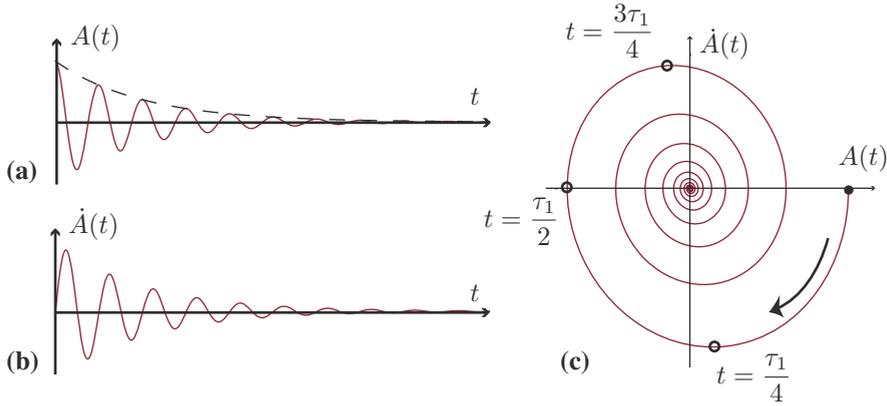


Figure 2.7

Au cours du temps, l'amplitude d'un oscillateur non amorti décrit une courbe sinusoïdale (en haut à gauche) dont l'amplitude est modulée par une fonction exponentielle décroissante (pointillée), de même que sa vitesse (en bas à gauche). Ces deux courbes sont décalées d'une demi période $\tau_1/2$, ce qui correspond à un déphasage de π . Si on trace la vitesse \dot{A} en fonction de l'amplitude A , le portrait de phase est une courbe spirale (droite). Les conditions initiales sont une amplitude non nulle $A_0 \neq 0$ et une vitesse nulle $\dot{A}_0 = 0$.

L'amortissement introduit une différence importante par rapport au cas de l'oscillateur idéal car il modifie sa pulsation. L'expression (2.23) montre que la pulsation ω_1 est plus petite que la pulsation ω_0 de l'oscillateur idéal. En faisant augmenter le facteur d'amortissement jusqu'à une valeur critique $4\omega_0$, la pulsation ω_1 tend vers 0, et l'amortissement supprime totalement les oscillations. On parle alors de **régime critique** pour $\gamma = 4\omega_0$ et de **régime aperiodique** pour $\gamma > 4\omega_0$. Ces régimes sont abordés dans les exercices 12 et 13 de ce chapitre.

2.4.2 Dissipation d'énergie

On peut appliquer à l'équation (2.21) le même traitement qu'au § 2.3.2, à savoir une multiplication par \dot{A} et une intégration par rapport au temps, ce qui donne

$$\frac{1}{2}\dot{A}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 A^2 = -\gamma \int \dot{A}^2 dt.$$

L'énergie du système est maintenant une fonction du temps :

$$\mathcal{E}(t) = -\gamma \int \dot{A}^2 dt,$$

et son évolution dépend du signe de γ . Dans les cas réalistes où γ est positif, l'énergie décroît vers 0 avec le taux de décroissance

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\gamma\dot{A}^2.$$

L'amortissement d'un oscillateur est caractérisé par un nombre sans dimension appelé le **facteur de qualité**.

Définition

Le **facteur de qualité** est calculé par

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}. \quad (2.25)$$

En régime oscillant, l'enveloppe de l'amplitude de l'oscillateur décroît exponentiellement avec le temps, et le temps nécessaire pour diminuer l'amplitude d'un facteur $e \approx 2,7$ est $Q\tau/\pi$, avec τ la période. Q/π est donc le nombre d'oscillations nécessaires pour que l'enveloppe diminue d'un facteur e .

Exemple 1 : oscillateur à quartz

Les oscillateurs à quartz utilisés pour les horloges électroniques ont un facteur de qualité de l'ordre de 10^6 .

Exemple 2 : amortisseur de voiture

Un amortisseur de voiture doit au contraire amortir très rapidement l'énergie apportée par une irrégularité de la route, et son facteur de qualité doit être légèrement supérieur à 1.

2.5 FORÇAGE ET RÉSONANCE

2.5.1 Équation d'amplitude de l'oscillateur forcé

Quand le système est soumis à une force extérieure variable, l'équation d'amplitude devient

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \gamma\frac{dA}{dt} + \omega_0^2A = F(t),$$

où $F(t)$ est une fonction de forçage. C'est une équation linéaire **inhomogène** car elle contient un terme source $F(t)$ qui ne dépend pas de A . Grâce à la linéarité, on

peut toujours décomposer la fonction $F(t)$ en une série de Fourier et ne travailler qu'avec un seul mode de pulsation ω (cet aspect est développé dans le chapitre suivant). L'équation à résoudre devient donc

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \gamma \frac{dA}{dt} + \omega_0^2 A = A_F \cos(\omega t). \quad (2.26)$$

avec une constante d'amplitude de forçage A_F . La solution complète de cette équation comprend deux termes :

- la solution générale de l'équation sans second membre, solution obtenue dans la section précédente. Cette solution est un mouvement amorti avec une amplitude qui tend vers 0 pour $t \rightarrow \infty$. C'est un **transitoire** ;
- une solution particulière liée au régime permanent, une fois le transitoire complètement amorti.

La solution particulière devra refléter plus ou moins fidèlement le forçage qui lui fournit l'énergie. On choisit donc comme solution générale une fonction

$$A(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi),$$

où A_1 est une constante inconnue et ϕ un déphasage à déterminer. En injectant cette solution dans (2.26), on obtient la relation

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t + \phi) - \omega \gamma \sin(\omega t + \phi) = \frac{A_F}{A_1} \cos(\omega t).$$

Pour déterminer A_1 et ϕ à partir d'une seule équation, on choisit d'abord un instant t' tel que $\omega t' + \phi = 0$, ce qui donne

$$(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{A_F}{A_1} \cos \phi,$$

puis un instant t'' tel que $\omega t'' + \phi = \pi/2$, ce qui donne

$$-\omega \gamma = \frac{A_F}{A_1} \sin \phi.$$

Avec ces deux dernières égalités, on peut déterminer l'amplitude A_1 et le déphasage ϕ :

$$\frac{A_1}{A_F} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}} \quad (2.27)$$

$$\tan \phi = \frac{-\omega \gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.28)$$

2.5.2 Résonance

Tracée sur la **figure 2.8a**, l'expression (2.27) de l'amplitude de l'oscillateur amorti et forcé présente un maximum pour une pulsation

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \quad (2.29)$$

Cette pulsation est la **pulsation de résonance** entre l'oscillateur et le forçage. Le maximum de la fonction $A_1(\omega)$ augmente quand l'amortissement diminue, et la courbe présente une divergence à $\omega = \omega_0$ pour $\gamma = 0$. Le déphasage ϕ (**figure 2.8b**)

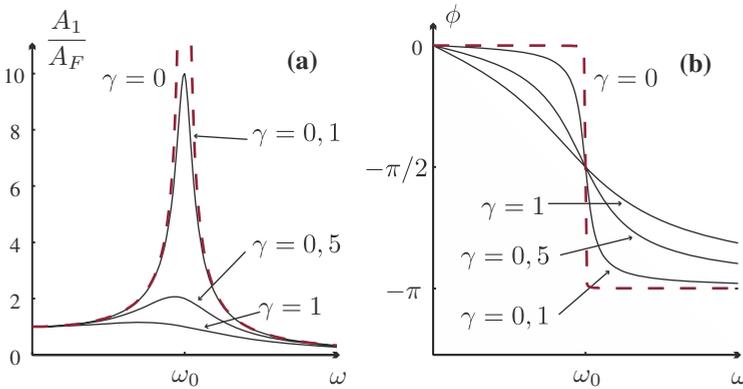


Figure 2.8 Amplitude et déphasage ϕ de l'oscillateur harmonique forcé, avec et sans amortissement.

(a) amplitude A_1/A_F en fonction de la pulsation; (b) déphasage ϕ en fonction de la pulsation.

est toujours négatif car l'oscillateur est toujours en retard par rapport au forçage. Ce déphasage passe par la valeur $-\pi/2$ pour la pulsation propre ω_0 .

La **figure 2.9** montre un exemple d'évolution temporelle d'un oscillateur amorti et forcé à une fréquence différente de sa fréquence propre. Après un transitoire, l'amplitude $A(t)$ (a) est une fonction circulaire de pulsation ω_1 , et le portrait de phase (b) est une cycloïde compliquée qui converge vers un cycle limite imposé par le forçage, une fois le transitoire éteint.

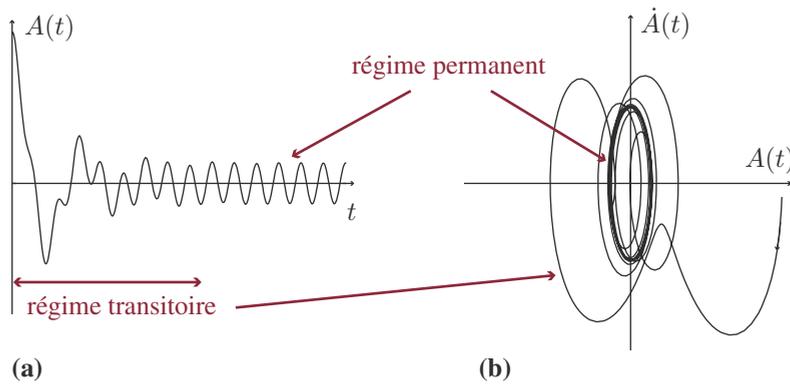


Figure 2.9 Oscillateur amorti forcé.

Après un transitoire, l'oscillateur adopte la fréquence du forçage en régime permanent, avec une amplitude et une phase définies par les relations (2.27) et (2.28).



Encart 2.6 La chute du pont de Tacoma Narrows

Le pont de Tacoma est un exemple célèbre d'oscillateur forcé qui entre en résonance. Construit dans l'état de Washington, il est ouvert à la circulation le 1^{er} juillet 1940. Le 7 novembre de la même année, par des conditions météorologiques qui n'ont rien d'exceptionnelles (un vent constant de 65 km/h), le tablier du pont se met à osciller en se tordant puis se brise. Il n'y a pas eu de victimes.

Soumis à un vent de travers qui longe la rivière, le pont a créé un sillage de tourbillons, phénomène de mécanique des fluides connu sous le nom de tourbillons de Bénard-Von Karman. Les tourbillons se décrochent du pont à intervalle régulier, créant une dépression locale périodique. Comme la fréquence de décrochement des tourbillons était proche de la fréquence naturelle d'oscillation du pont ($\omega \approx \omega_0$), il est entré en résonance, jusqu'à ce que les amplitudes de balancement, et donc les contraintes mécaniques, soient trop fortes.



Encart 2.7 Physiopathologie des vibrations

Lorsqu'un corps humain est soumis à des vibrations, mouvements mécaniques périodiques, il peut y avoir des effets pathologiques. La complexité du corps humain incite à une modélisation simplifiée. Les médecins et ergonomes qui s'intéressent à ces effets utilisent des modèles simples où le corps est assimilé à un ensemble de masses liées entre elles par des liaisons élastiques qui jouent aussi le rôle d'amortisseurs (les ligaments, les muscles, les disques intervertébraux).

En dessous de 2 Hz, le corps soumis à une vibration se comporte comme une masse unique. Pour des fréquences plus élevées, certaines parties du corps peuvent entrer en résonance avec la vibration extérieure. Quelques exemples sont donnés dans le tableau ci-dessous. Il faut également noter que les vibrations sont en général perceptibles au-dessus d'une accélération de $0,01 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Partie du corps	Gamme de fréquence (Hz)
thorax	3 à 7
cœur	4 à 8
bassin	4 à 9
tête	20 à 30
globes oculaires	60 à 90

Une exposition prolongée à des vibrations (par exemple pour un conducteur d'engin de chantier, un marin) peut provoquer des troubles visuels, des troubles cardiaques, pulmonaires ou ostéo-articulaires.

2.6 COUPLAGE DE DEUX OSCILLATEURS

2.6.1 Formulation générale

Un exemple mécanique de deux oscillateurs couplés est présenté sur la [figure 2.10](#) : un oscillateur composé d'une masse m_1 et d'un ressort de raideur k_1 est relié à un oscillateur composé d'une masse m_2 et d'un ressort de raideur k_2 par l'intermédiaire d'un ressort de couplage de raideur k_c . Chaque masse subit les forces de rappel de deux ressorts. On écrit les équations de mouvement

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_c (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_c (x_2 - x_1) \end{cases} \quad (2.30)$$

que l'on met sous la forme

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_{01}^2 x_1 + \omega_{c1}^2 (x_2 - x_1) \\ \ddot{x}_2 = -\omega_{02}^2 x_2 - \omega_{c2}^2 (x_2 - x_1) \end{cases} \quad (2.31)$$

avec les définitions suivantes :

$$\omega_{01}^2 = \frac{k_1}{m_1}, \quad \omega_{02}^2 = \frac{k_2}{m_2}, \quad \omega_{c1}^2 = \frac{k_c}{m_1}, \quad \omega_{c2}^2 = \frac{k_c}{m_2}.$$

Les pulsations des deux oscillateurs couplés sont inconnues, mais on peut supposer que les oscillations sont monochromatiques. On choisit donc comme solutions des fonctions

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad \text{et} \quad x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \phi_2).$$

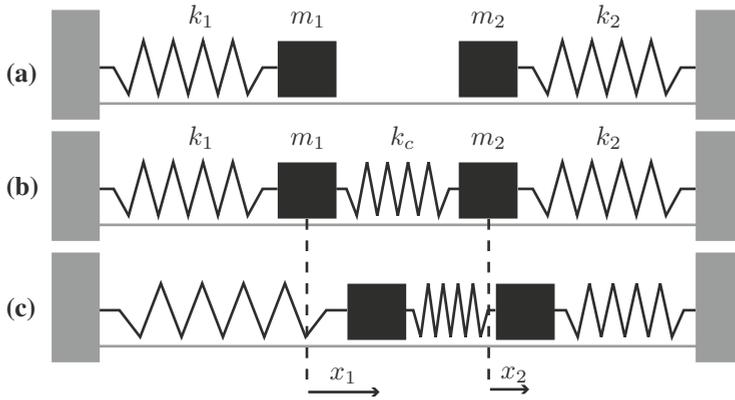


Figure 2.10 Couplage de deux oscillateurs mécaniques par une liaison élastique.

(a) oscillateurs isolés, (b) oscillateurs couplés en position d'équilibre, (c) oscillateurs couplés hors position d'équilibre. Les variables x_1 et x_2 sont les écarts des positions des masses par rapport à leurs positions d'équilibre.

où X_1 et X_2 sont des constantes d'amplitude. Les accélérations se calculent facilement :

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 X_1 \cos(\omega t + \phi_1) = -\omega^2 x_1, \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 X_2 \cos(\omega t + \phi_2) = -\omega^2 x_2,$$

et le système (2.31) devient un système de deux équations pour les positions x_1 et x_2 :

$$\begin{cases} (\omega^2 - \omega_{01}^2 - \omega_{c1}^2)x_1 + \omega_{c1}^2 x_2 = 0, \\ \omega_{c2}^2 x_1 + (\omega^2 - \omega_{02}^2 - \omega_{c2}^2)x_2 = 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Ce système peut s'écrire avantageusement sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_{01}^2 - \omega_{c1}^2 & \omega_{c1}^2 \\ \omega_{c2}^2 & \omega^2 - \omega_{02}^2 - \omega_{c2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (2.33)$$

et admet une solution non nulle ($x_{1,2} \neq 0$) si le déterminant de la matrice est nul, c'est-à-dire :

$$[\omega^2 - (\omega_{01}^2 + \omega_{c1}^2)] [\omega^2 - (\omega_{02}^2 + \omega_{c2}^2)] - \omega_{c1}^2 \omega_{c2}^2 = 0. \quad (2.34)$$

Cette dernière équation est un polynôme d'ordre 4, mais ne comporte que des puissances paires. En posant $\Omega = \omega^2$, on obtient une équation du second degré $A\Omega^2 + B\Omega + C = 0$, avec

$$\begin{aligned} A &= 1, \\ B &= -(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + \omega_{c1}^2 + \omega_{c2}^2), \\ C &= \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 + \omega_{01}^2 \omega_{c2}^2 + \omega_{02}^2 \omega_{c1}^2. \end{aligned}$$

Comme une pulsation est un nombre positif, seules deux racines de la relation (2.34) sont physiquement pertinentes :

$$\omega_- = \sqrt{\frac{1}{2}(-B - \sqrt{B^2 - 4C})} \quad \text{et} \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{1}{2}(-B + \sqrt{B^2 - 4C})}. \quad (2.35)$$

L'intensité du couplage est caractérisée directement par la raideur du ressort k_c . Pour interpréter l'effet du couplage sur les pulsations ω_- et ω_+ , on introduit une pulsation de couplage ω_c telle que

$$\omega_c^2 = \omega_{c1}^2 + \omega_{c2}^2 = k_c \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right).$$

La **figure 2.11** montre comment la pulsation de couplage ω_c influe sur les pulsations ω_- et ω_+ . Dans la limite d'un couplage très faible ($k_c \rightarrow 0$), les deux pulsations du système couplé sont simplement les deux pulsations des oscillateurs isolés. Dans la limite d'un fort couplage ($k_c \rightarrow \infty$), la liaison entre les deux oscillateurs se comporte comme une liaison très rigide. La pulsation ω_- correspond à la pulsation d'un oscillateur simple de masse $m_1 + m_2$ et de raideur $k_1 + k_2$:

$$\lim_{\omega_c \rightarrow \infty} (\omega_-) = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1 + m_2}}.$$

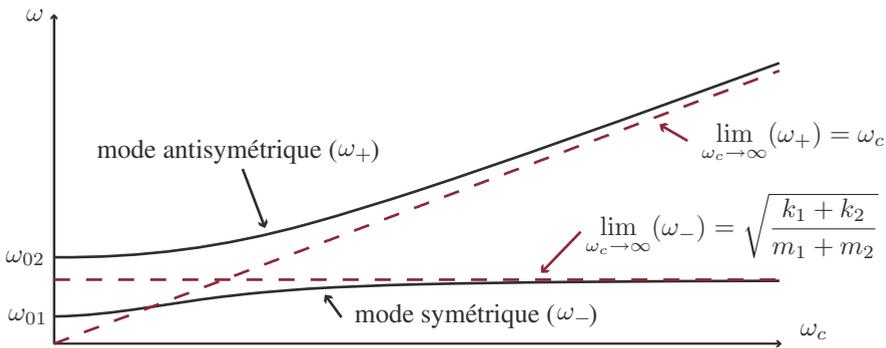


Figure 2.11 Influence de l'intensité du couplage sur les pulsations propres de deux oscillateurs couplés.

Pour cette pulsation, les deux masses se déplacent en phase, et on définit ce **mode d'oscillation** comme le mode **symétrique** (**figure 2.12a**). Comme le couplage entre les deux oscillateurs est très fort, les raideurs des ressorts k_1 et k_2 sont négligeables devant k_c . Tout se passe comme si les deux masses n'étaient reliées que par le ressort de couplage. Dans ce cas, la pulsation de vibration est déterminée par la raideur k_c et par la masse réduite du système. On a donc

$$\lim_{\omega_c \rightarrow \infty} (\omega_+) = \sqrt{k_c \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)} = \omega_c.$$

Cette pulsation correspond à un mode de vibration où les masses sont en opposition de phase. On définit ce mode comme le mode **antisymétrique** (figure 2.12b).

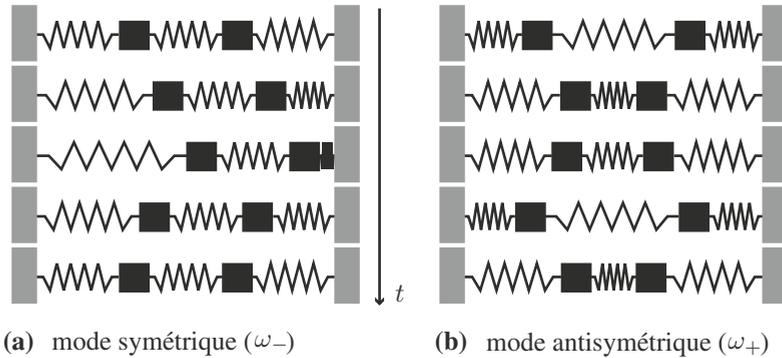


Figure 2.12 Modes de vibrations de deux oscillateurs couplés.

(a) mode symétrique de pulsation ω_- où les deux oscillateurs vibrent en phase, et (b) mode antisymétrique de pulsation ω_+ où les oscillateurs sont en opposition de phase.

Le couplage de deux oscillateurs donne deux modes de vibration possibles. Puisque le système est linéaire, on peut superposer linéairement ces deux solutions indépendantes et la forme générale de la solution est donc

$$x_1(t) = X_- \cos(\omega_- t + \phi_-) + X_+ \cos(\omega_+ t + \phi_+), \quad (2.36)$$

$$x_2(t) = X_- \cos(\omega_- t + \phi_-) - X_+ \cos(\omega_+ t + \phi_+). \quad (2.37)$$

Les quatre constantes X_- , X_+ , ϕ_- et ϕ_+ sont déterminées à partir des conditions initiales du système, à savoir les positions et vitesses initiales des deux oscillateurs.



Encart 2.8 La séparation des fréquences

On peut montrer que l'écart entre les pulsations propres d'un système couplé est plus grand que l'écart entre les pulsations des oscillateurs isolés :

$$|\omega_+ - \omega_-| \geq |\omega_{02} - \omega_{01}|.$$

La séparation des fréquences ou des pulsations est d'autant plus grande que l'intensité du couplage est importante. Dans l'exemple des masses et des ressorts, la raideur du ressort de couplage vient s'ajouter aux raideurs des ressorts isolés, ce qui produit une augmentation des fréquences du système.

2.6.2 Couplage de deux oscillateurs identiques

Quand les deux oscillateurs sont identiques ($m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$), ils ont la même pulsation propre

$$\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

et la pulsation de couplage est $\omega_c = \sqrt{2k_c/m}$. D'après les résultats établis à la section précédente, les deux pulsations propres de vibration du système couplés sont maintenant

$$\omega_- = \omega_0, \quad (2.38)$$

$$\omega_+ = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_c^2}. \quad (2.39)$$

La pulsation du mode symétrique est indépendante de l'intensité du couplage. Si le couplage est fort, la pulsation du mode antisymétrique tend vers une limite

$$\lim_{\omega_c \rightarrow \infty} (\omega_+) = \sqrt{\frac{2k_c}{m}} = \omega_c.$$

La **figure 2.13** illustre l'évolution des pulsations propres ω_- et ω_+ en fonction de la pulsation de couplage.

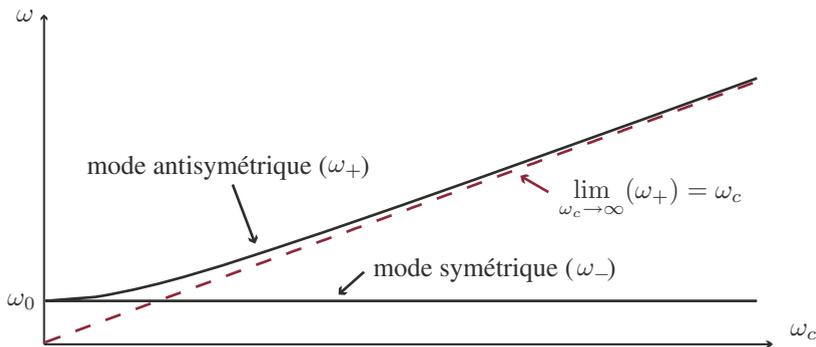


Figure 2.13 Influence de l'intensité du couplage sur les pulsations propres de deux oscillateurs couplés identiques.

2.6.3 Phénomène de battements

Dans le cas d'un faible couplage, c'est-à-dire $\omega_c \ll \omega_0$, les deux fréquences ω_- et ω_+ sont très proches. La superposition des deux modes va produire un phénomène de battements. En effet la solution générale est la somme de deux fonctions cosinus avec arguments proches. En utilisant la relation

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 2 \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right),$$

on peut écrire que les solutions (2.36, 2.37) se mettent sous la forme

$$x_1(t) = (X_- - X_+) \cos(\omega_- t + \phi_-) + 2X_+ \cos(\omega_m t + \phi_m) \cos(\Delta\omega t + \Delta\phi),$$

$$x_2(t) = (X_- + X_+) \cos(\omega_- t + \phi_-) - 2X_+ \cos(\omega_m t + \phi_m) \cos(\Delta\omega t + \Delta\phi),$$

avec

$$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_- + \omega_+), \quad \phi_m = \frac{1}{2}(\phi_- + \phi_+),$$

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_- - \omega_+), \quad \Delta\phi = \frac{1}{2}(\phi_- - \phi_+).$$

La **figure 2.14** illustre ce comportement avec $X_- = X_+$. Les oscillations x_1 et x_2 décrivent une oscillation de pulsation ω_m avec une amplitude de modulation qui varie selon le cosinus de $\Delta\omega$. L'intervalle de temps entre deux maximums successifs de la modulation est $2\pi/\Delta\omega$.

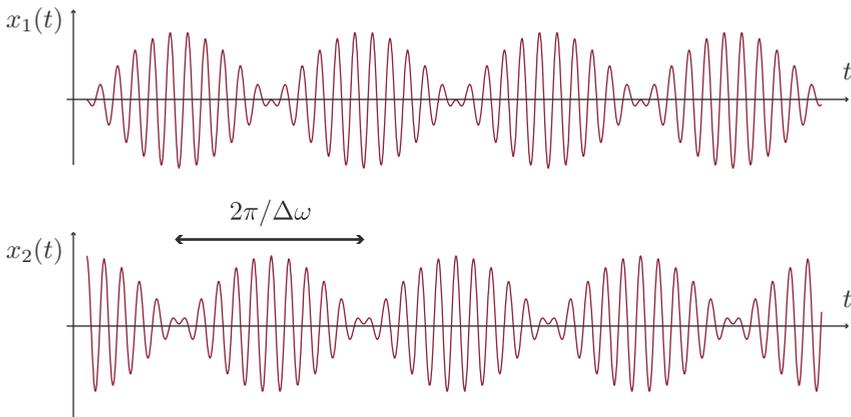


Figure 2.14 Solutions de vibrations pour deux oscillateurs identiques faiblement couplés.

Les pulsations propres ω_- et ω_+ sont proches et produisent un phénomène de battement.

Pour terminer, on peut citer une dernière configuration : si le ressort de couplage a la même raideur que les ressorts des oscillateurs isolés, alors la pulsation du mode antisymétrique est $\omega_+ = \sqrt{3}\omega_0$.



Encart 2.9 Les cordes sympathiques

Certains instruments de musique à cordes utilisent des cordes qui ne sont pas directement mises en vibration par le musicien ou par un mécanisme. Ces cordes sont mises en vibration par couplage avec d'autres cordes via l'air, un procédé qui semble avoir été inventé par les luthiers anglais au XVII^e siècle. À l'époque baroque, on trouvait ainsi des violons d'amour, des violons munis de 12 cordes sympathiques (les 12 tons de la gamme) en plus des quatre cordes traditionnelles.

En Inde, le sitar, luth traditionnel, s'est vu ajoutée une corde sympathique au XIX^e siècle, corde qui contribue au timbre particulier de cet instrument. Ces cordes ont une fonction d'enrichissement harmonique, et le très léger désaccord entre la corde sympathique et la corde actionnée produit des battements sonores caractéristiques.

2.7 COUPLAGE LINÉAIRE DE N OSCILLATEURS

2.7.1 Chaîne linéaire de N oscillateurs différents

Les calculs précédents peuvent se généraliser sans difficulté à un nombre N d'oscillateurs couplés deux à deux. Les équations du mouvement de chaque masse sont rassemblées dans un système

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_c (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) + k_3 (x_3 - x_2) \\ &\vdots \\ m_i \ddot{x}_i &= -k_i (x_i - x_{i-1}) + k_{i+1} (x_{i+1} - x_i) \\ &\vdots \\ m_N \ddot{x}_N &= -k_N (x_N - x_{N-1}) + k_{N+1} x_N \end{cases} \quad (2.40)$$

On a vu que les équations du mouvement étant linéaires en déplacement, on peut mettre un tel système d'équations sous une forme matricielle. Ainsi, pour N oscillateurs, on peut composer un vecteur \vec{X} à N composantes pour les N positions x_i et le système (2.40) s'écrit sous la forme matricielle

$$M \vec{X} = 0$$

où M est une matrice $N \times N$. Comme le déterminant de la matrice est nul, on obtient un polynôme de degré $2N$ pour la pulsation ω . Ce polynôme est pair et ne comporte que des termes d'ordre 0, 2, 4, ..., $2N$. Si mathématiquement le système a $2N$ solutions, il n'y a que N solutions positives pour ω . Ces solutions correspondent aux N modes propres de vibration du système.

2.7.2 Chaîne linéaire de N oscillateurs identiques

Un système mécanique étendu peut comporter un grand nombre d'oscillateurs identiques suffisamment proches les uns des autres pour que des interactions existent.

Exemple : un solide monoatomique

Le cuivre est un solide métallique composé d'une seule espèce d'atome. Les liaisons entre atomes voisins sont donc identiques et la modélisation mécanique comporte donc des masses m reliées par des ressorts de raideur k . Avec une masse atomique $m_{Cu} = 1,55 \cdot 10^{-25}$ kg et une masse volumique $\rho_{Cu} = 8960$ kg·m⁻³, on peut calculer qu'un cm³ de cuivre contient $8,5 \cdot 10^{22}$ atomes, soit 44 millions d'atomes par centimètre linéaire.

La modélisation précédente peut s'étendre facilement à un nombre arbitraire N d'oscillateurs alignés. Pour chaque oscillateur, on peut écrire une équation de mouvement, ce qui donne un système de N équations pour les N variables de position. Pour N oscillateurs, on peut associer N modes propres de vibration. La figure 2.15 montre quelques modes de vibration d'une corde plombée : le mode le plus simple (mode 1) où tous les plombs vibrent en phase, et le mode le plus élevé, où les plombs voisins sont en opposition de phase.

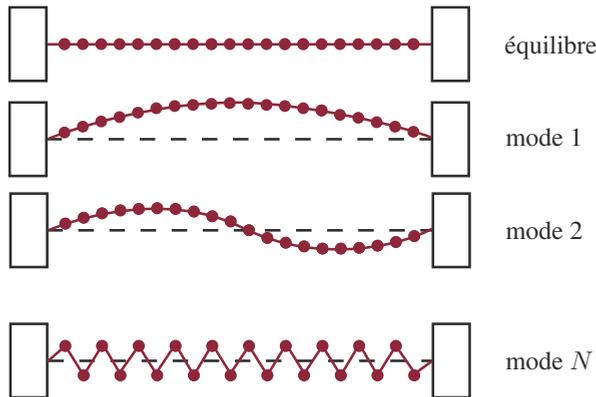


Figure 2.15 Modes de vibration d'une corde plombée constituée de N oscillateurs couplés.

Une autre configuration est une succession rectiligne de masses et de ressorts. L'équation du mouvement de la masse repérée par l'indice n est simplement

$$m \frac{d^2 A_n}{dt^2} = k(A_{n+1} - A_n) - k(A_n - A_{n-1})$$

car elle est couplée aux deux masses voisines $n - 1$ et $n + 1$ par des ressorts de même raideur k . Cette équation peut également s'écrire

$$\frac{d^2 A_n}{dt^2} - \omega_c^2 (A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}) = 0. \quad (2.41)$$

En faisant le choix d'une solution oscillante $A_n = A_{0n} \cos \omega t$, on a donc un système de N équations du type

$$(2\omega_c^2 - \omega^2) A_n - \omega_c^2 A_{n+1} - \omega_c^2 A_{n-1} = 0$$

qui peut s'écrire sous la forme d'une matrice $N \times N$ appliquée à un vecteur \vec{A} dont les composantes sont les amplitudes A_n . La diagonale de la matrice contient les termes en $(2\omega_c^2 - \omega^2)$, et chacun de ces termes est bordé de deux termes $-\omega_c^2$ qui illustre le couplage avec les oscillateurs voisins. Toutefois il est difficile en pratique de résoudre le problème quand N est vraiment grand.



Le chapitre suivant montre comment on peut contourner cette difficulté, en interprétant le deuxième terme de l'équation (2.41) et en décrivant le système de N oscillateurs comme un système continu.

SYNTHÈSE

Savoirs

- Un oscillateur est un système physique dont le comportement s'organise autour d'une configuration d'équilibre stable.
- La stabilité de l'équilibre est définie par une force de rappel qui ramène le système vers la configuration d'équilibre.
- Un oscillateur non amorti est un système oscillant dont l'énergie est conservée.
- L'équation linéaire d'un oscillateur non amorti (sans dissipation d'énergie) est une équation différentielle temporelle du second ordre avec un seul coefficient ω_0 :

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \omega_0^2 A = 0.$$

La pulsation ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur, et elle dépend de la construction physique du système.

- L'équation linéaire d'un oscillateur amorti est

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \gamma \frac{dA}{dt} + \omega_0^2 A = 0$$

avec un coefficient d'amortissement γ positif dans le cas d'un système dissipatif.

- Un oscillateur forcé adopte la pulsation du forçage après un régime transitoire. Son amplitude d'oscillation dépend de sa pulsation propre, de la pulsation de forçage et du facteur d'amortissement.

- Le nombre de modes de vibrations et de pulsations propres est égal au nombre de degrés de liberté (nombre d'oscillateurs).

Savoir-faire

- Calculer la fréquence propre d'oscillation d'un système.
- Identifier les paramètres de résonance et d'amortissement pour un système dissipatif forcé.
- Calculer le facteur de qualité d'un système résonant.
- Calculer les pulsations propres et les modes correspondant d'un système couplé.

Mots-clés

- Oscillateur, pulsation propre, fréquence propre
- Amortissement, dissipation d'énergie, forçage, résonance
- Oscillateurs couplés, modes propres

Exercices

Tester ses connaissances

- 1 Un coefficient d'amortissement γ négatif indique :
 - a. que l'énergie de l'oscillateur est conservée.
 - b. que l'énergie augmente.
 - c. que l'énergie diminue.
- 2 En régime permanent, un oscillateur amorti et forcé a une énergie :
 - a. constante.
 - b. qui augmente.
 - c. qui diminue.
- 3 La fréquence de résonance d'un oscillateur dépend :
 - a. uniquement de la fréquence de forçage.
 - b. de la fréquence de forçage mais aussi du coefficient d'amortissement.
 - c. de la fréquence propre de l'oscillateur.

Exercices d'application

- 4 Calculer le développement à l'ordre 2 autour de $x_0 = 3\pi/2$ de la fonction $\sin x$.
- 5 Développer à l'ordre 6 la fonction $\sin(x^2)$ autour du point $x_0 = 0$.
- 6 Une mesure par accéléromètre montre qu'une machine vibre à une fréquence $\nu = 50$ Hz avec une accélération maximale de $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Déterminer l'amplitude de la vibration.
- 7 Une machine tournante montre un déplacement oscillant de son axe de rotation de $1 \mu\text{m}$ à 18 000 tours par minute. Calculer l'accélération maximale subie par l'axe.
- 8 Vibration de la liaison OH d'une molécule. On modélise la liaison OH par deux masses m_H et m_O reliées par un ressort de raideur $k_{OH} = 730 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Après avoir écrit les équations du mouvement des deux masses, calculer la masse réduite puis la pulsation propre de vibration de cette molécule.

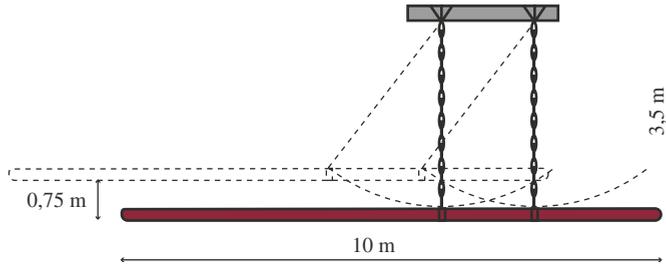
Exercices d'approfondissement

- 9 **Calcul de la fréquence de résonance d'un oscillateur amorti et forcé**
Montrer que la fréquence de résonance d'un oscillateur amorti et forcé est

$$\nu_R = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{8\pi^2\nu_0^2}}$$

et donner une expression approchée pour un oscillateur faiblement amorti. On note ν_0 la fréquence propre de l'oscillateur.

- 10 **Modélisation de la marche humaine**
Lors de la marche, la jambe en mouvement est analogue à un pendule de longueur l . Sachant que la longueur parcourue en faisant un pas est proche de $2l/3$, proposer une relation entre la vitesse de marche et la longueur de la jambe. Donner une valeur numérique pour $l = 90$ cm.
- 11 **Le bélier médiéval**
Utilisé de l'Antiquité jusqu'au XVI^e siècle, le bélier était un engin de destruction de portes et de murailles. Son principe ainsi que ses dimensions sont présentés sur la figure ci-après.



Supposons que le bélier est une poutre cylindrique en chêne (masse volumique $700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) de 50 cm de diamètre et 10 m de long. À partir des données de la figure, calculer la vitesse maximum atteinte par le bélier ainsi que l'énergie totale. Donner également la durée d'une oscillation libre.

12 Régime critique de l'oscillateur amorti

À partir de l'équation (2.22), considérer le cas $\gamma = 2\omega$. Montrer que l'amplitude de l'oscillateur est

$$A(t) = e^{-\gamma t/2} \left\{ A_0 + t \left(\frac{\gamma}{2} A_0 + \dot{A}_0 \right) \right\}. \quad (2.42)$$

Conseil : utiliser le développement $e^{\alpha t} \approx 1 + \alpha t + \dots$

13 Régime aperiodique de l'oscillateur amorti

À partir de l'équation (2.22), considérer le cas $\gamma^2 - 4\omega_0^2 > 0$. Montrer que l'amplitude de l'oscillateur est

$$A(t) = e^{-\gamma t/2} \left\{ A_0 \cosh \alpha t + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\gamma}{2} A_0 + \dot{A}_0 \right) \sinh \alpha t \right\}. \quad (2.43)$$

14 Modes de vibration d'une molécule triatomique linéaire

Les molécules triatomiques linéaires (par exemple le très toxique acide cyanhydrique $\text{H-C}\equiv\text{N}$) sont composées de trois atomes dont les noyaux sont alignés. Les forces d'interaction entre les atomes sont modélisées par deux ressorts de raideurs k_{HC} et k_{CN} . On désigne par x_{H} , x_{C} et x_{N} les écarts des atomes par rapport à leurs positions d'équilibre et par m_{H} , m_{C} et m_{N} les masses des atomes.

- Écrire les équations du mouvement couplées pour les atomes de la molécule triatomique HCN.
- En effectuant le changement de variable $x_{\text{HC}} = x_{\text{C}} - x_{\text{H}}$ et $x_{\text{CN}} = x_{\text{N}} - x_{\text{C}}$, déterminer les pulsations propres de vibration de la molécule.

Corrigés

Tester ses connaissances

	a.	b.	c.
1		X	
2	X		
3		X	

Exercices d'application

- 4 Le développement de la fonction sinus autour d'un point x_0 est

$$(\sin x)_{x \approx x_0} = \sin x_0 + \cos x_0 (x - x_0) - \frac{1}{2} \sin x_0 (x - x_0)^2 + \dots$$

ce qui donne avec $x_0 = 3\pi/2$

$$(\sin x)_{x \approx x_0} = -1 + -\frac{1}{2} \left(x - \frac{3\pi}{2} \right)^2 + \dots$$

La « cuvette » de la fonction sinus est donc approchée par une parabole.

- 5 En posant $a = x^2$, on cherche le développement de $\sin a \approx a - a^3/6 + \dots$, ce qui donne

$$(\sin x^2)_{x \approx 0} = x^2 - \frac{x^6}{6} + \dots$$

- 6 La machine se comporte comme un oscillateur harmonique avec une amplitude de déplacement $x = A \cos \omega t$. Sa vitesse est $\dot{x} = -A\omega \sin \omega t$ et son accélération est $\ddot{x} = -A\omega^2 \cos \omega t$. On a donc :

$$A = \frac{\max(\ddot{x})}{\omega^2} = \frac{20}{(2\pi\nu)^2} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

- 7 L'accélération maximale est donnée par $A\omega^2 = 4A\pi^2\nu^2$. La vitesse de rotation de 18 000 tours par minute correspond à une fréquence de 300 Hz, ce qui donne $A\omega^2 = 3,55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, soit environ 3,6 fois l'accélération de la gravité.

- 8 On note x_O et x_H les positions des atomes d'oxygène et d'hydrogène. Les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} m_O \ddot{x}_O = -k_{OH}(x_O - x_H), \\ m_H \ddot{x}_H = +k_{OH}(x_O - x_H). \end{cases}$$

En divisant chaque équation par la masse de l'atome considéré et en faisant la différence des deux équations, on obtient :

$$\ddot{x}_{\text{OH}} = -\frac{k_{\text{OH}}}{m_{\text{OH}}}x_{\text{OH}}$$

avec $x_{\text{OH}} = x_{\text{O}} - x_{\text{H}}$ et la masse réduite $m_{\text{OH}} = m_{\text{O}}m_{\text{H}}/(m_{\text{O}} + m_{\text{H}})$. Cette masse réduite vaut 16/17 u.a. (L'unité atomique est équivalente à $1,66 \cdot 10^{-27}$ kg) et la pulsation de la liaison OH est $\omega_{\text{OH}} = \sqrt{k_{\text{OH}}/m_{\text{OH}}} = 6,81 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$.

Exercices d'approfondissement

9 Calcul de la fréquence de résonance d'un oscillateur amorti et forcé

L'amplitude de l'oscillateur amorti et forcé est donnée par l'expression (2.27) :

$$A_1 = A_F [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2]^{-1/2},$$

avec $\omega_0 = 2\pi\nu_0$. Cette fonction A_1 atteint son maximum quand $dA_1/d\omega = 0$, soit

$$4\omega^3 + 2\omega(\gamma^2 - 2\omega_0^2) = 0.$$

La fréquence de résonance ν_R est donc

$$\nu_R = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{8\pi^2\nu_0^2}}.$$

Dans le cas d'un amortissement faible ($\gamma \ll \omega_0$), le développement limité au premier ordre de ν_R est

$$\nu_R \approx \nu_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{16\pi^2\nu_0^2}\right).$$

10 Modélisation de la marche humaine

On note tout d'abord $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ la pulsation du pendule de longueur l représentant la jambe en mouvement. Le mouvement d'un pas correspond à une demi-période, donc une durée de $\tau/2 = \pi\sqrt{l/g}$. Comme la longueur parcourue par pas est $2l/3$, la vitesse de marche est

$$v = \frac{2l\sqrt{g}}{3\pi\sqrt{l}} = \frac{2}{3\pi}\sqrt{gl}.$$

Avec une longueur $l = 0,9 \text{ m}$ et $g \approx 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, on trouve une vitesse de $0,64 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, soit $2,3 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Cette valeur peut paraître faible, mais c'est la vitesse calculée sans impulsion, avec uniquement la gravité comme force motrice. La marche normale est bien sûr animée par des forces musculaires qui viennent augmenter la vitesse.

11 Le bélier médiéval

D'après la figure, la pulsation est $\omega_0 = \sqrt{g/L} = \sqrt{9,81/3,5} = 1,67 \text{ s}^{-1}$, soit une fréquence de 0,26 Hz et une période de 3,75 s. Masse du bélier : 1374 kg. Énergie : $\mathcal{E} = mg\Delta h = 10\,112 \text{ J}$. La vitesse maximum s'obtient par la conversion complète de l'énergie en énergie cinétique, on trouve une vitesse maximum de $3,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

12 Régime critique de l'oscillateur amorti

Avec $\gamma = 2\omega$, $\alpha = 0$, on ne peut donc utiliser directement l'expression (2.22) car on trouve α au dénominateur. En utilisant le développement $e^{\alpha t} \approx 1 + \alpha t$ et $e^{-\alpha t} \approx 1 - \alpha t$, on peut écrire :

$$A(t) = \frac{1}{2}e^{-\gamma t/2} \left(A_0 + t \left(\frac{\gamma}{2}A_0 + \dot{A}_0 \right) \right).$$

13 Régime apériodique de l'oscillateur amorti

Si $\gamma^2 - 4\omega_0^2 > 0$, alors α est un réel, et la solution (2.22) se met sous la forme

$$A(t) = e^{-\gamma t/2} \left\{ A_0 \cosh(\alpha t) + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\gamma}{2}A_0 + \dot{A}_0 \right) \sinh(\alpha t) \right\}$$

et le mouvement est apériodique, c'est-à-dire sans périodicité.

14 Modes de vibration d'une molécule triatomique linéaire

a. Avec les notations de l'énoncé, les trois équations du mouvement pour les trois atomes sont

$$\begin{cases} m_H \ddot{x}_H = k_{HC}(x_C - x_H), \\ m_C \ddot{x}_C = -k_{HC}(x_C - x_H) + k_{CN}(x_N - x_C), \\ m_N \ddot{x}_N = -k_{CN}(x_N - x_C). \end{cases}$$

On peut vérifier que les signes des différentes forces de rappel sont corrects en faisant la somme de ces trois équations. La molécule étant un système isolé, on doit vérifier que

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i = 0, \quad \text{avec } i = H, C, N.$$

b. En divisant les équations du mouvement par les masses respectives puis en faisant la différence entre les équations pour C et H d'une part, et N et C d'autre part, le système précédent peut s'écrire sous la forme de deux équations :

$$\begin{cases} \ddot{x}_{HC} = -\omega_{HC}^2 x_{HC} + \omega_C^2 x_{CN}, \\ \ddot{x}_{CN} = \omega_C'^2 x_{HC} + \omega_{CN}^2 x_{CN}, \end{cases}$$

avec

$$\omega_{HC}^2 = k_{HC} \left(\frac{1}{m_H} + \frac{1}{m_C} \right), \quad \omega_{CN}^2 = k_{CN} \left(\frac{1}{m_C} + \frac{1}{m_N} \right),$$

$$\omega_C^2 = \frac{k_{CN}}{m_C}, \quad \omega_C'^2 = \frac{k_{HC}}{m_C}.$$

En choisissant des solutions oscillantes de pulsation ω pour les variables x_{HC} et x_{CN} , on obtient le système linéaire

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_{\text{HC}}^2 & \omega_{\text{C}}^2 \\ \omega_{\text{C}}^2 & \omega^2 - \omega_{\text{CN}}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\text{HC}} \\ x_{\text{CN}} \end{pmatrix} = 0$$

qui admet comme solutions les pulsations propres du système

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\omega_{\text{HC}}^2 + \omega_{\text{CN}}^2 \pm \sqrt{(\omega_{\text{HC}}^2 + \omega_{\text{CN}}^2)^2 + 4\omega_{\text{C}}^2\omega_{\text{C}}^2} \right)}.$$

La pulsation ω_{-} correspond au mode symétrique, et la pulsation ω_{+} au mode anti-symétrique.

L'équation d'onde simple et ses solutions

3

Plan

Cours

- 3.1 Équation d'onde simple
- 3.2 Fonction d'onde monochromatique
- 3.3 Superpositions et interférences

Synthèse

Exercices

Corrigés

Objectifs

- Établir l'équation d'onde simple
- Déterminer la solution générale de l'équation d'onde
- Établir les fonctions d'onde monochromatiques de base
- Définir les vitesses de phase et de groupe
- Présenter le phénomène d'interférences
- Définir les ondes progressives et stationnaires

Cours

Les oscillateurs présentés au chapitre 2 sont des systèmes physiques isolés dénombrables. Quand les oscillateurs couplés sont très nombreux, il devient difficile de les décrire individuellement. La description est alors facilitée par un modèle continu, sous la forme d'une équation d'onde, équation qui relie les variables d'espace et de temps d'une fonction. Cette équation d'onde a en particulier comme solution la fonction d'onde monochromatique qui est l'élément de base pour générer des solutions complexes. Les caractéristiques de cette fonction, le vecteur d'onde et la pulsation sont reliés par une relation de dispersion.

3.1 ÉQUATION D'ONDE SIMPLE

3.1.1 Équation d'onde à une dimension

Quand le nombre d'oscillateurs couplés N tend vers l'infini, il n'est plus possible de décrire individuellement chaque oscillateur qui compose une chaîne. Le système physique devient continu, et la description discrète par un nombre entier $i = 1, \dots, N$ doit être remplacée par une description continue indexée par une variable d'espace.

Si les N oscillateurs sont à l'équilibre séparés d'une distance δx , comme illustré sur la [figure 3.1](#), on peut proposer de remplacer l'amplitude de chaque oscillateur — indexée par le nombre entier i — par la valeur d'une fonction continue qui prend cette valeur à la position de l'oscillateur :

$$A_i(t) = A(x, t).$$

Les oscillateurs voisins $i - 1$ et $i + 1$ ont comme amplitudes

$$A_{i-1}(t) = A(x - \delta x, t) \quad \text{et} \quad A_{i+1}(t) = A(x + \delta x, t),$$

et l'équation de mouvement (2.41) de l'oscillateur i établie au chapitre précédent

$$\frac{d^2 A_i}{dt^2} - \omega_c^2 (A_{i+1} - 2A_i + A_{i-1}) = 0 \quad (3.1)$$

devient donc

$$\frac{d^2 A(x, t)}{dt^2} - \omega_c^2 [A(x + \delta x, t) - 2A(x, t) + A(x - \delta x, t)] = 0.$$

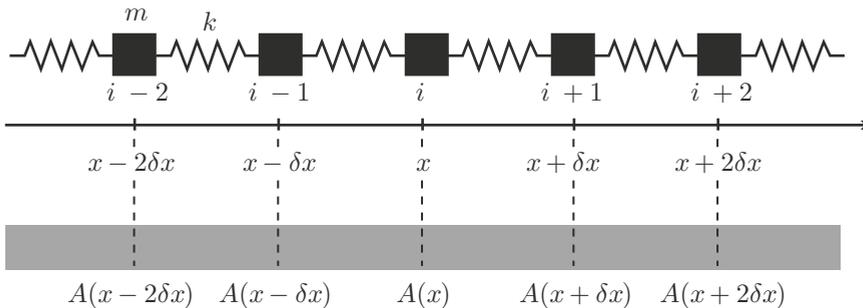


Figure 3.1 Chaîne linéaire d'un grand nombre d'oscillateurs identiques. Chaque oscillateur interagit avec ses deux proches voisins par un couplage identique.

Si l'écart δx est suffisamment petit par rapport à la taille macroscopique du système, on peut calculer les amplitudes des oscillateurs voisins par un développement limité :

$$A_{i+1} = A(x + \delta x) = A(x) + \delta x \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{(\delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) + \dots \quad (3.2)$$

$$A_{i-1} = A(x - \delta x) = A(x) - \delta x \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{(\delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) + \dots \quad (3.3)$$

et la somme des équations (3.2) et (3.3) correspond à l'expression discrète de la dérivée seconde en x de la fonction $A(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{(\delta x)^2} [A(x + \delta x, t) - 2A(x, t) + A(x - \delta x, t)]. \quad (3.4)$$

Cette expression est le calcul en différences finies du laplacien à une dimension de la fonction $A(x, t)$.

Dans la limite où $\delta x \rightarrow 0$, l'équation (3.1) s'écrit donc :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{\omega_c^2 \delta x^2} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0,$$

et la quantité $\omega_c^2 \delta x^2$ étant homogène au carré d'une vitesse, on a

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \quad (3.5)$$

avec une vitesse

$$c = \omega_c \delta x. \quad (3.6)$$

Cette équation est une **équation d'onde simple**, équation différentielle d'ordre 2 en espace et d'ordre 2 en temps. Elle est également appelée équation de d'Alembert et on note parfois

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A = \square A = 0$$

avec \square l'opérateur de d'Alembert.



La simplicité de cette équation est liée au choix du modèle utilisé pour l'établir : dans la chaîne linéaire des oscillateurs identiques, les forces de dissipation ne sont pas prises en compte. L'énergie totale du système est donc conservée.

3.1.2 Solution générale à une dimension

L'équation d'onde simple (3.5) peut se décomposer sous la forme

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0 \quad (3.7)$$

ou encore

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) A = 0. \quad (3.8)$$

La dernière formulation de l'équation d'onde montre qu'il existe deux vitesses dans le système : $+c$ et $-c$, associées à deux sens de propagation opposés. Pour chercher des solutions à l'équation d'onde, on introduit deux nouvelles variables :

$$\begin{cases} X(x, t) = x - ct \\ Y(x, t) = x + ct \end{cases}$$

qui sont des variables d'espace associées à deux référentiels mobiles aux vitesses $+c$ et $-c$ respectivement. Dans l'écriture en (x, t) , le référentiel a une position fixe, tandis que les variables X et Y sont associées à deux référentiels mobiles.

Les opérateurs de dérivation partielle de l'équation d'onde (3.5) doivent être transformés et on utilise pour cela :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}.$$

De même, la transformation de l'opérateur $\partial/\partial t$ est :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial t} = c \left(\frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X} \right).$$

Dans l'équation (3.5), nous avons besoin de l'opérateur de dérivée seconde en x , donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2,$$

et l'opérateur $\partial^2/\partial t^2$ est

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 = c^2 \left(\frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\partial}{\partial X} \right)^2.$$

Par ce changement de variables, l'équation (3.5) devient une équation intégrable :

$$\underbrace{\frac{\partial^2 A}{\partial X \partial Y}}_{\text{forme 1}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial A}{\partial Y} \right)}_{\text{forme 2}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial A}{\partial X} \right)}_{\text{forme 3}} = 0.$$

La deuxième forme de cette équation montre que la dérivée de A par rapport à Y ne dépend pas de X , donc que la fonction A ne dépend que de Y . Mais la troisième

forme montre que la dérivée de A par rapport à X ne dépend pas de Y , donc que la fonction A ne dépend que de X . La forme générale de la solution $A(X, Y)$ est donc la somme de deux fonctions indépendantes qui ne dépendent chacune que d'une variable, X ou Y :

$$A(x, t) = F(X) + G(Y) = F(x - ct) + G(x + ct). \quad (3.9)$$

Les deux fonctions F et G sont des fonctions d'onde **arbitraires** et ne sont déterminées que par les conditions aux limites et initiales du système. L'équation d'onde simple n'impose aucune forme particulière pour ces fonctions, du moment qu'elles sont dérivables.

Définitions

- Une **fonction d'onde scalaire** est une fonction des coordonnées de l'espace et du temps qui est solution de l'équation d'onde.
- Une **fonction d'onde vectorielle** est un vecteur dont les composantes sont des fonctions des coordonnées de l'espace et du temps qui sont solutions de l'équation d'onde.
- Une onde est **longitudinale** quand l'amplitude de l'onde est orientée dans la même direction que sa direction de propagation.
- Une onde est **transverse** quand l'amplitude de l'onde est orientée perpendiculairement à sa direction de propagation.

Par exemple, on montre sur la **figure 3.2**, qu'une fonction en forme de bosse se déplace au cours du temps dans la direction des z croissants. C'est une fonction $F(x - ct)$. Une fonction $G(x + ct)$ en forme de créneau se déplace, elle, dans la direction des z décroissants.

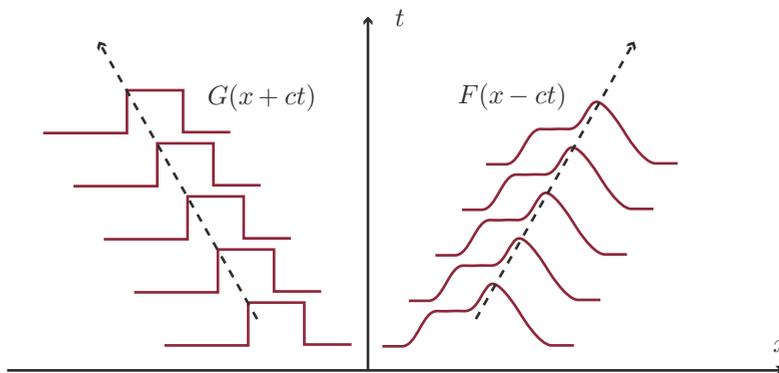


Figure 3.2 Illustration de la propagation de deux solutions de l'équation d'onde simple.

La fonction $G(x + ct)$ se propage vers les x décroissants tandis que la fonction $F(x - ct)$ se propage dans la direction des x croissants.

3.1.3 Équation d'onde à trois dimensions

Dans un espace à trois dimensions, la fonction d'onde dépend des trois coordonnées de l'espace et du temps. Dans un repère cartésien (x, y, z) , on note $A = A(x, y, z, t)$ et l'équation d'onde simple devient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0.$$

Définitions

- L'opérateur **laplacien**, noté Δ , est un opérateur de dérivation du second ordre et correspond à la divergence du gradient d'une fonction scalaire :

$$\Delta A = \operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}} A).$$

- En coordonnées cartésiennes, le laplacien de la fonction A est

$$\Delta A = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A.$$

Le laplacien en coordonnées cylindriques et sphériques est proposé dans l'annexe A.

Avec ces définitions, l'équation d'onde simple dans un espace à trois dimensions est donc

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \quad (3.10)$$

où l'opérateur laplacien dépend du système de coordonnées choisi.

3.1.4 Solution générale à trois dimensions

Dans un espace tridimensionnel, on note \vec{r} le vecteur position par rapport à l'origine et $\vec{\kappa}$ le vecteur unitaire qui indique la direction de propagation de l'onde. En coordonnées cartésiennes, on a

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \|\vec{\kappa}\| = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2} = 1.$$

Par analogie avec le cas unidimensionnel, on introduit deux nouvelles variables :

$$\begin{cases} X(x, y, z, t) = \kappa_x x + \kappa_y y + \kappa_z z - ct, \\ Y(x, y, z, t) = \kappa_x x + \kappa_y y + \kappa_z z + ct, \end{cases}$$

qui sont des variables d'espace associées à deux référentiels mobiles se déplaçant aux vitesses $+c$ et $-c$ selon la direction du vecteur $\vec{\kappa}$. Les opérateurs $\partial^2/\partial x^2$, $\partial^2/\partial y^2$ et $\partial^2/\partial z^2$ se transforment par la même méthode qu'au § 3.1.2, et l'équation d'onde devient donc

$$(\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2) \left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y} \right)^2 = 0,$$

ou encore

$$(\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2 - 1) \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right) + 2(\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2 + 1) \frac{\partial^2 A}{\partial X \partial Y} = 0.$$

Comme le vecteur $\vec{\kappa}$ est unitaire, on retrouve la même équation intégrable que dans le cas unidimensionnel :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial X \partial Y} = 0$$

et les solutions générales de cette équation sont des fonctions des seules variables X ou Y . La solution générale de l'équation d'onde à trois dimensions (3.10) en coordonnées cartésiennes est donc

$$A(x, y, z, t) = F(\kappa_x x + \kappa_y y + \kappa_z z - ct) + G(\kappa_x x + \kappa_y y + \kappa_z z + ct) \quad (3.11)$$

$$= F(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - ct) + G(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} + ct) \quad (3.12)$$

On retrouve sans difficulté le cas de la propagation à une dimension selon la direction x en posant $\kappa_x = 1$ et $\kappa_y = \kappa_z = 0$.

3.2 FONCTION D'ONDE MONOCHROMATIQUE

3.2.1 Propagation à une dimension

L'équation d'onde est une équation différentielle en temps et en espace. Sans précision supplémentaire, ses solutions sont des fonctions arbitraires de deux variables $F(z - ct)$ et $G(z + ct)$ dans le cas de la propagation à une dimension. Grâce aux travaux de Joseph Fourier (1768–1830), on peut utiliser la propriété suivante : toute fonction périodique peut être décomposée en une somme de fonctions circulaires (encart 3.1).

Quand la fonction considérée n'est pas périodique, on peut quand même la supposer périodique en choisissant une période infinie. Dans ce cas, la somme discrète de Fourier devient une intégrale sur une base continue de fonctions circulaires. On parle alors de la transformée de Fourier d'une fonction (encart 3.2).



Encart 3.1 Décomposition de fonctions périodiques en séries de Fourier

Toute fonction $f(t)$ t -périodique de période τ peut se décomposer sous la forme d'une somme

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t,$$

avec $\omega_0 = 2\pi/\tau$, et n un entier supérieur ou égal à 1. Les coefficients a_n et b_n dépendent de la fréquence et l'ensemble de ces coefficients constitue le spectre de Fourier de la fonction f . La plus petite fréquence est $\nu_0 = 1/\tau$; cette valeur est également l'écart entre deux fréquences voisines : $\nu_{n+1} - \nu_n = 1/\tau$. Une autre écriture est :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a'_n \cos(n\omega_0 t - \phi_n),$$

avec $a'_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\tan \phi_n = b_n/a_n$. Une troisième écriture est sous forme complexe :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \exp(in\omega_0 t),$$

avec $|c_n| = a'_n/2$ et $\arg(c_n) = -\phi_n$.

De même, toute fonction $F(X)$ x -périodique de longueur d'onde λ peut se décomposer sous la forme d'une somme :

$$\begin{aligned} F(X) &= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nk_0 X + b_n \sin nk_0 X \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \exp(ink_0 X) \end{aligned}$$

avec $k_0 = 2\pi/\lambda$, et n un entier supérieur ou égal à 1.



Encart 3.2 La transformée de Fourier d'une fonction

Quand une fonction temporelle $f(t)$ n'est pas périodique dans le domaine de mesure, on peut la considérer t -périodique en considérant une période $\tau \rightarrow \infty$.

Dans ce cas, on écrit la décomposition en série de Fourier de la fonction sous la forme :

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \exp(i2\pi nt/\tau) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \exp(i2\pi nt/\tau) \Delta\nu$$

avec $\Delta\nu \rightarrow 0$. La somme discrète peut alors s'écrire sous la forme d'une intégrale (somme continue) :

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{f}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

avec la transformée de Fourier

$$\hat{f}(\nu) = \int_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt.$$

Dans le domaine spatial, une fonction $F(X)$ est transformée par :

$$\begin{aligned} F(X) &= \int_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{F}(\lambda^{-1}) e^{i\frac{2\pi}{\lambda} X} d\lambda^{-1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{F}(k) e^{ikX} dk \end{aligned}$$

avec la transformée de Fourier

$$\hat{F}(\lambda^{-1}) = \int_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(X) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} X} dX.$$

Grâce à cette transformation, la fonction $F(X)$ peut être écrite

$$F(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{F}(k) e^{ikX} dk.$$

Comme l'équation d'onde est linéaire, les termes issus de la décomposition de la solution générale (3.9) sont aussi des solutions de l'équation d'onde. Les fonctions F et G sont donc décomposées sur une base de fonctions de la forme

$$\begin{aligned} \exp(ikX) &= \exp(ik(x - ct)) = \exp(i(kx - \omega t)), \\ \exp(ikY) &= \exp(ik(x + ct)) = \exp(i(kx + \omega t)), \end{aligned}$$

avec la relation de définition suivante :

$$\omega = kc.$$

Une onde monochromatique est un élément de cette base, définie par un couple (k, ω) .

Définition

Une **onde monochromatique** est une onde qui est décrite par une pulsation unique ω correspondant à un nombre d'onde k . On peut représenter mathématiquement cette fonction d'onde par une écriture réelle :

$$A(x, t) = A_0 \cos(kx \pm \omega t),$$

ou complexe :

$$A(x, t) = A_0 e^{i(kx \pm \omega t)}. \quad (3.13)$$

Le signe + désigne une onde qui se propage dans le sens des x décroissants tandis que le signe - désigne une propagation dans le sens des x croissants.

Le signe \pm désigne soit la solution propagative, soit la solution régressive. L'argument de l'exponentielle

$$\phi = kx \pm \omega t$$

est appelé la **phase**, composée à partir du nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$ et de la pulsation $\omega = 2\pi\nu$. La phase est un angle et n'a donc pas de dimension. Pour chaque onde monochromatique, la relation entre k et ω est déterminée par la physique du système : c'est la relation de dispersion.



Encart 3.3 Le laser

Inventé en 1960, le laser (acronyme de *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) est une source électromagnétique monochromatique. Basé sur les transitions entre les différents niveaux d'énergie des atomes, ce dispositif synchronise l'émission électromagnétique de tous les atomes et permet d'avoir en sortie la superposition de plusieurs ondes monochromatiques cohérentes et ainsi un rayonnement intense d'une seule couleur.

Les lasers les plus courants sont le rouge ($\lambda = 632$ nm, présents dans les lecteurs CD et DVD), le bleu ($\lambda = 405$ nm, présents dans les lecteurs de DVD haute définition) mais il existe des lasers produisant des rayonnements dans l'infra rouge et l'ultraviolet.

3.2.2 Propagation à trois dimensions

Quand l'onde peut se propager dans les trois directions de l'espace, la direction de propagation est repérée par le vecteur unitaire \vec{k} , et la position d'un point du plan ou de l'espace est repérée par \vec{r} . Le choix du système de coordonnées dépend des symétries du problème physique.

Définition

À deux ou trois dimensions, la propagation est désignée par un vecteur d'onde \vec{k} . En notant \vec{r} le vecteur position, l'**onde monochromatique** est notée

$$A(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)$$

ou

$$A(\vec{r}, t) = A_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)}.$$

avec

$$\vec{k} = k\vec{\kappa}$$

le **vecteur d'onde**.

La phase de l'onde est $\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t$ et l'ensemble des points de l'espace qui correspondent à la même valeur de ϕ est appelé un **front d'onde** ou une **surface d'onde**.

À un instant donné, par exemple $t = 0$, la phase vaut

$$\phi_0 = \vec{k} \cdot \vec{r} = k\vec{\kappa} \cdot \vec{r}.$$

Les points de l'espace qui sont associés à cette valeur de la phase sont donnés par

$$d\phi_0 = k\vec{\kappa} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Cette relation montre que la phase est constante quand on se déplace perpendiculairement à la direction de propagation $\vec{\kappa}$ de l'onde. Les fronts d'ondes sont donc des surfaces en tout point perpendiculaires au vecteur d'onde \vec{k} .

La géométrie des fronts d'ondes est dépendante de la nature de la source de l'onde et de la nature du milieu dans lequel se fait la propagation. En général, on distingue trois types d'ondes caractéristiques des principales symétries : les ondes planes, cylindriques (ou circulaires) et sphériques.

3.2.3 Onde monochromatique plane

Une onde est **plane** quand les fronts d'ondes sont des surfaces planes. Cela correspond à un vecteur d'onde \vec{k} orienté suivant une seule direction de l'espace. Les fronts d'ondes sont des plans parallèles entre eux séparés d'une distance $\lambda = 2\pi/k$ et tous perpendiculaires à la direction $\vec{\kappa}$ (figure 3.3a). La position absolue de ces plans dépend du temps car cet ensemble se déplace à des vitesses $\pm \omega/k$.

Si le vecteur d'onde est orienté suivant la direction x , le vecteur propagation est $\vec{\kappa} = \vec{e}_x$ et l'onde plane monochromatique est notée

$$A(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t).$$

Si cette onde se propage dans un espace à trois dimensions, la valeur de l'amplitude de l'onde est constante dans tout plan (yz) perpendiculaire à x .

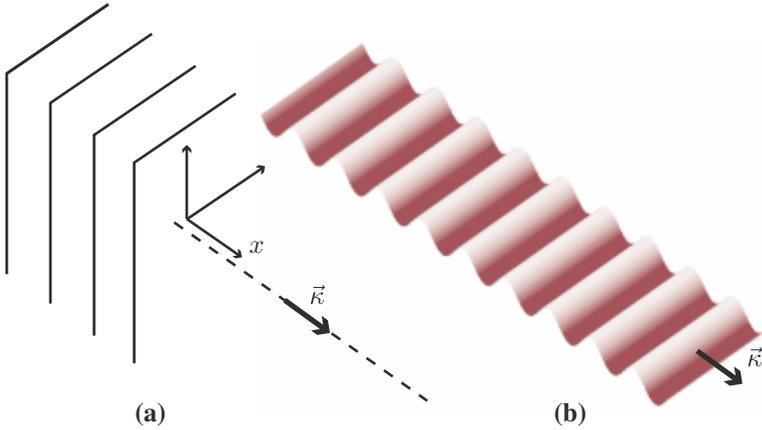


Figure 3.3 Illustrations des fronts d'onde plane (a) et de l'amplitude d'une onde se propageant selon l'axe x (b).

3.2.4 Onde monochromatique sphérique

Quand la propagation admet une symétrie ponctuelle dans un espace **isotrope** à trois dimensions, l'équation d'onde admet comme solutions les combinaisons linéaires des ondes monochromatiques sphériques. La direction de propagation est donnée par

$$\vec{\kappa} = \kappa_r \vec{e}_r, \quad \kappa_\theta = 0, \quad \kappa_\varphi = 0,$$

et l'opérateur laplacien en coordonnées sphériques (voir annexe A) est tel que :

$$\Delta A = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA).$$

L'équation d'onde (3.10) s'écrit donc

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(rA)}{\partial t^2} = 0.$$

On retrouve ici une équation d'onde à une dimension d'espace dont la solution rA se décompose sous la forme d'une somme $F(r - ct) + G(r + ct)$. La fonction d'onde sphérique est donc de la forme

$$A(r, t) = \frac{1}{r}F(r - ct) + \frac{1}{r}G(r + ct)$$

et l'onde monochromatique sphérique s'écrit sous la forme

$$A(\vec{r}, t) = \frac{A_0}{r} \cos(k\|\vec{r} - \vec{r}_0\| \pm \omega t), \tag{3.14}$$

avec $\vec{r}_0 = (r_0, \theta_0, \varphi_0)$ la position de la source ou du point d'absorption et $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$ les coordonnées sphériques du point considéré.

Les fronts d'onde ont la forme de sphères concentriques centrées sur \vec{r}_0 (figure 3.4a) et on distingue les ondes divergente et convergente.

Définitions

- Une onde est **divergente** quand l'onde se propage en s'éloignant de la source placée en \vec{r}_0 . Sa notation est

$$A(\vec{r}, t) = \frac{A_0}{r} \cos(k\|\vec{r} - \vec{r}_0\| - \omega t).$$

- Une onde est **convergente** quand l'onde se propage en convergeant vers un point \vec{r}_0 . Sa notation est

$$A(\vec{r}, t) = \frac{A_0}{r} \cos(k\|\vec{r} - \vec{r}_0\| + \omega t).$$

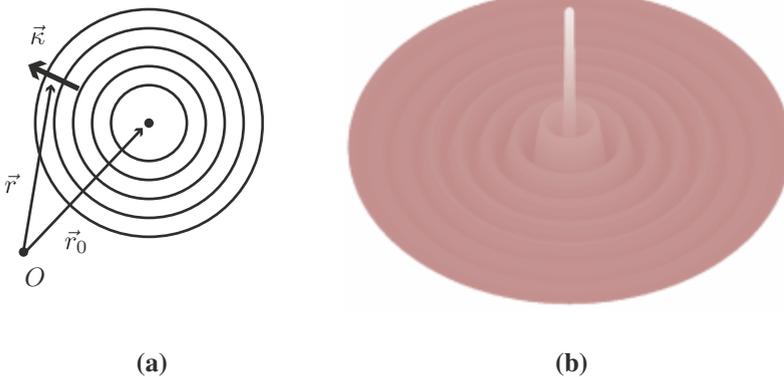


Figure 3.4 Illustrations des fronts d'onde sphérique (a) et de l'amplitude de l'onde sphérique (b).

3.2.5 Relation de dispersion

En choisissant l'onde monochromatique comme base de toutes les fonctions solutions de l'équation d'onde, on a introduit deux quantités, k et ω , l'une liée à l'espace, l'autre liée au temps. Ces deux quantités sont reliées par la physique du système et leur relation dérive de l'équation d'onde ou des équations du mouvement.

Définition

On appelle **relation de dispersion** la relation entre le vecteur d'onde \vec{k} (ou le nombre d'onde k si le problème est à une dimension) et la pulsation ω . Cette relation est dérivée de l'équation d'onde et peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{D}(\vec{k}, \omega) = 0 \quad (3.15)$$

Prenons l'exemple de l'équation d'onde simple (3.5) à une dimension, avec comme solution la forme monochromatique (3.13) :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A e^{i(kz \pm \omega t)} = \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) A e^{i(kz \pm \omega t)} = 0$$

soit

$$\omega = \pm kc.$$

On peut remarquer dans cet exemple la correspondance entre l'ordre des dérivées dans l'équation d'onde et l'ordre des termes du polynôme en k et ω . En effet :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Leftrightarrow -k^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Leftrightarrow -\omega^2.$$

Aux opérateurs de dérivée partielle en z et t de l'équation d'onde correspondent des termes polynomiaux en k et ω de la relation de dispersion. On peut généraliser :

$$\partial^n / \partial z^n = (\partial / \partial z)^n \equiv (ik)^n,$$

$$\partial^n / \partial t^n = (\partial / \partial t)^n \equiv (\pm i\omega)^n.$$

En passant de l'équation d'onde à la relation de dispersion, on passe des coordonnées spatio-temporelles (\vec{r}, t) aux coordonnées de Fourier conjuguées (\vec{k}, ω) .

3.2.6 Vitesse de phase

Pour une onde monochromatique définie par (3.13), la quantité

$$\phi = kx - \omega t$$

est homogène à un angle : c'est la **phase**, comprise entre 0 et 2π . Pour suivre une valeur de phase donnée (une crête d'onde ou un creux, par exemple), il faut se déplacer sur l'axe x quand le temps augmente. La relation entre x et t est donnée en annulant la différentielle totale de la phase :

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) dt + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) dx = 0,$$

ce qui donne

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_\phi = \frac{\omega}{k}. \tag{3.16}$$

Définition

La vitesse de phase est calculée par :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}. \tag{3.17}$$

C'est la vitesse de propagation d'une valeur fixe de la phase, comprise entre 0 et 2π .

La vitesse v_ϕ est donc la vitesse de phase de l'onde, illustrée sur la **figure 3.5**. Pour l'équation d'onde simple, la vitesse de phase est simplement égale à $\pm c$ suivant le sens de la propagation. La phase étant une quantité purement mathématique, sa

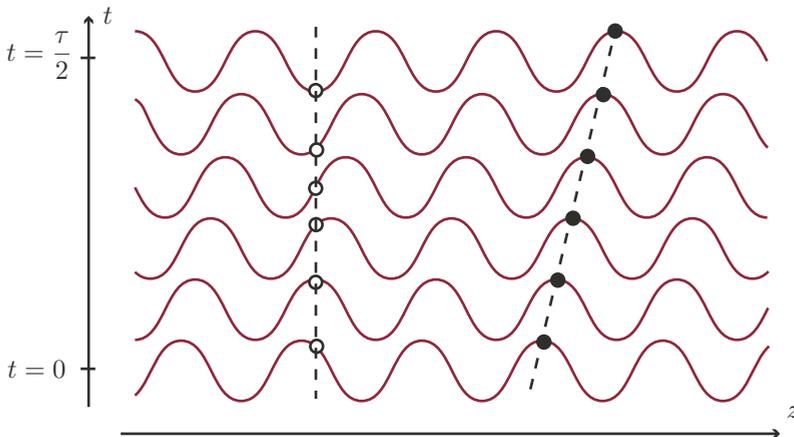


Figure 3.5 Illustration de la vitesse de phase : l'amplitude d'une onde monochromatique est tracée pour 6 instants entre $t = 0$ et $t = \tau/2$.

Le marqueur blanc indique l'amplitude de l'onde à une position fixée par rapport au référentiel du laboratoire. Le marqueur noir est lié à l'onde par une valeur constante de la phase, ici un des sommets de l'onde. Au cours du temps, l'amplitude mesurée par le marqueur blanc oscille tandis que le marqueur noir se déplace dans l'espace à la vitesse de phase de l'onde.

vitesse de propagation n'a pas de limite physique. Dans certains cas, on pourra trouver des vitesses de phase supérieures à la vitesse de la lumière dans le vide !

La vitesse de phase renseigne sur les propriétés de dispersion du système :

- si v_ϕ est une constante, la propagation est **non dispersive**, toutes les fréquences se propagent à la même vitesse. Un signal composé de fréquences multiples ne se déforme pas lors de la propagation.
- Si la vitesse de phase dépend de la fréquence $v_\phi = v_\phi(\omega)$, le système est **dispersif**, et un signal complexe (composé de plusieurs fréquences) se déforme au cours de la propagation.

3.3 SUPERPOSITIONS ET INTERFÉRENCES

L'équation d'onde étant linéaire, la combinaison linéaire de deux solutions indépendantes est également une solution. Les possibilités de superposition sont donc infinies, mais quelques superpositions classiques méritent un développement.

3.3.1 Superposition de deux ondes planes

Deux ondes planes monochromatiques de même fréquence mais de vecteurs d'onde différents se superposent sous la forme :

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= A_0 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t) + A_0 \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \Delta\phi). \end{aligned} \quad (3.18)$$

La somme de deux cosinus s'écrit sous la forme d'un produit :

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 2 \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right),$$

ce qui donne

$$A = 2A_0 \cos \left[\frac{1}{2}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} - \frac{\Delta\phi}{2} \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{r} - \omega t + \frac{\Delta\phi}{2} \right]. \quad (3.19)$$

Dans le volume d'intersection apparaît une onde de vecteur d'onde $\frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$ avec une amplitude modulée par la fonction $\cos \left[\frac{1}{2}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} - \frac{\Delta\phi}{2} \right]$. Ceci est illustré sur la [figure 3.6](#). La superposition de deux ondes crée une **interférence**. Cette interférence peut être **constructive** si les amplitudes des deux ondes s'ajoutent, ou au contraire **destructive** si les amplitudes se soustraient au point de donner une amplitude résultante nulle.

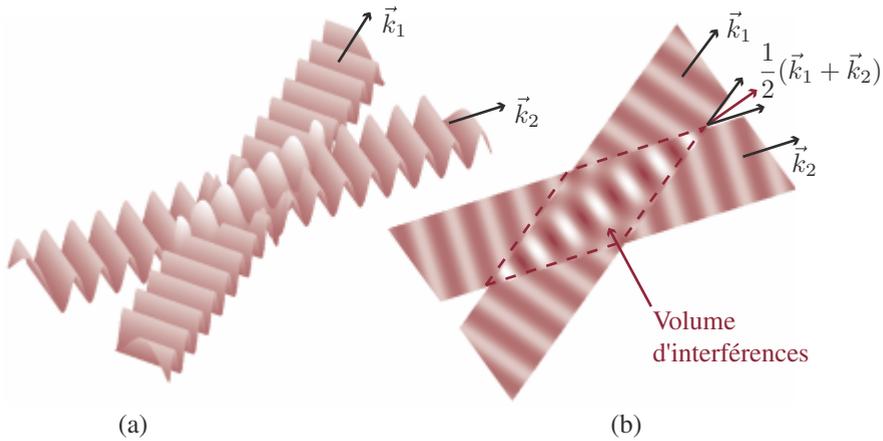


Figure 3.6 Interférence de deux ondes planes de vecteurs d'onde \vec{k}_1 et \vec{k}_2 .

Dans le volume d'interférences, l'onde résultante a un vecteur d'onde $\frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)$. **(a)** Vue en perspective. **(b)** Vue de dessus. Les franges claires correspondent à une amplitude élevée tandis que les franges sombres correspondent à une faible amplitude.

3.3.2 Ondes stationnaires

Le calcul précédent prend une forme particulière dans le cas où les deux ondes superposées sont de vecteurs d'ondes opposés :

$$\vec{k}_1 = -\vec{k}_2.$$

Dans ce cas, si x est l'axe de propagation, on a

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= A_0 \cos(kx - \omega t) + A_0 \cos(-kx - \omega t + \Delta\phi) \\ &= 2A_0 \cos\left(kx - \frac{\Delta\phi}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\Delta\phi}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

La somme des deux ondes progressives monochromatiques de directions opposées et de même fréquence ω produit une vibration qui n'est pas progressive : c'est une **onde stationnaire**. L'expression (3.20) montre que tous les points du domaine vibrent en phase à la pulsation ω , avec une amplitude de vibration qui est modulée par une fonction cosinus qui dépend de l'espace.

On retrouvera ces ondes stationnaires dans les chapitres suivants.

3.3.3 Vitesse de groupe

Lorsque l'onde est composée de plusieurs ondes monochromatiques, l'onde résultante est appelée un paquet d'ondes. Ce paquet d'ondes montre une enveloppe, forme qui englobe toutes les fluctuations du signal. Pour une onde composée de deux ondes monochromatiques différentes

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 \\
 &= A_0 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t) + A_0 \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t) \\
 &= \underbrace{2A_0 \cos(\Delta\vec{k} \cdot \vec{r} - \Delta\omega t)}_{\text{enveloppe}} \underbrace{\cos(\vec{k}_m \cdot \vec{r} - \omega_m t)}_{\text{onde moyenne}}.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

avec les notations suivantes :

$$\vec{k}_m = \frac{1}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2), \quad \omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\Delta\vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2), \quad \Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2).$$

L'onde résultante montre le produit de deux cosinus. Le premier est interprété comme la propagation d'une enveloppe d'amplitude et le deuxième est l'onde progressive moyenne de vecteur d'onde \vec{k}_m et de pulsation ω_m . On remarque que si les vecteurs d'ondes et les pulsations des deux ondes sont proches, les écarts $\Delta\vec{k}$ et $\Delta\omega$ sont faibles et on retrouve le phénomène de battements déjà observé pour les oscillateurs faiblement couplés.

Deux vitesses sont présentes dans cette écriture :

- la vitesse de phase de l'onde moyenne

$$v_{\phi m} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\|\vec{k}_1 + \vec{k}_2\|},$$

- la vitesse de propagation de l'enveloppe

$$v_{\text{enveloppe}} = \frac{\Delta\omega}{\|\Delta\vec{k}\|}.$$

Dans la limite où les ondes ont des vecteurs d'onde et des pulsation très proches, l'expression $\Delta\omega/\|\Delta\vec{k}\|$ tend vers la dérivée de ω par rapport à k . Cette limite est appelée la **vitesse de groupe**, car elle correspond à la vitesse de propagation d'un paquet d'ondes monochromatique (figure 3.7).

Définition

La **vitesse de groupe** est la vitesse de propagation de l'enveloppe d'une onde composée de plusieurs ondes monochromatiques. Elle est calculée à partir de la relation de dispersion écrite sous la forme $\omega(k)$:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad (3.22)$$

ou sous la forme $k(\omega)$:

$$v_g = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1}. \quad (3.23)$$

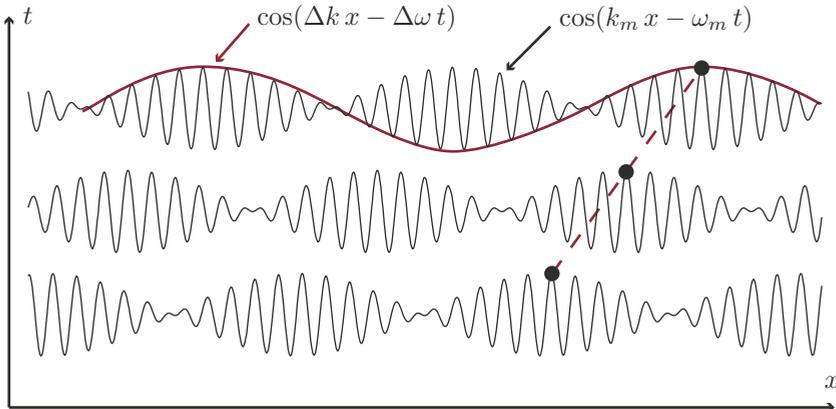


Figure 3.7 Illustration de la vitesse de groupe.

L'onde moyenne (nombre d'onde \vec{k}_m , pulsation ω_m) est modulée par une onde progressive se déplaçant à la vitesse $\Delta\omega/\|\Delta\vec{k}\|$.

La vitesse de groupe peut être calculée directement à partir de la relation de dispersion $\mathcal{D} = 0$. La différentielle totale de cette équation est

$$d\mathcal{D} = \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial k} dk + \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\omega} d\omega = 0,$$

et on peut écrire :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = - \left(\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial k} \right) \left(\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\omega} \right)^{-1}. \quad (3.24)$$

Quand la propagation est non dispersive, la vitesse de phase v_ϕ est constante et égale à la vitesse c . La vitesse de groupe dans ce cas est donc égale à la vitesse de phase $v_g = v_\phi = c$.

La vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie. Au contraire de la phase, l'énergie est une quantité physique dont la vitesse ne peut en aucun cas dépasser la vitesse de la lumière dans le vide.

Ce formalisme est compatible avec les ondes stationnaires. En effet, dans le cas où les deux ondes ont la même pulsation ($\omega_1 = \omega_2$) et des vecteurs d'ondes opposés ($\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$), l'écart $\Delta\vec{k}$ est nul et la vitesse de groupe est également nulle. L'enveloppe résultante est bien immobile par rapport au référentiel du laboratoire et l'onde est stationnaire.

SYNTHÈSE

Savoirs

- L'équation d'onde simple à trois dimensions s'écrit

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0.$$

- La solution en onde plane de l'équation d'onde simple est la combinaison linéaire d'ondes monochromatiques

$$A(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t).$$

- La solution en onde sphérique de l'équation d'onde simple est la combinaison linéaire d'ondes monochromatiques

$$A(\vec{r}, t) = \frac{A_0}{r} \cos(kr \pm \omega t).$$

- Les fronts d'ondes sont les surfaces en tout point perpendiculaires au vecteur d'onde \vec{k} .
- La vitesse de phase est $v_\phi = \omega/k$.
- La vitesse de groupe est $v_g = d\omega/dk = (dk/d\omega)^{-1}$.

Savoir-faire

- Écrire la relation de dispersion à partir de l'équation d'onde.
- Calculer les vitesses de phase et de groupe à partir de la relation de dispersion.
- Identifier la nature d'une onde (progressive ou stationnaire) ainsi que la forme des fronts d'onde.

Mots-clés

- Ondes progressive et stationnaire
- Relation de dispersion
- Ondes convergente et divergente
- Vitesses de phase et de groupe

Exercices

Tester ses connaissances

1 La fonction d'onde

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = A_0 \vec{e}_y \cos(kx + \omega t)$$

- a. est une onde longitudinale progressive.
- b. est une onde longitudinale régressive.
- c. est une onde transverse progressive.
- d. est une onde transverse régressive.

2 L'amplitude $A_0 \sin(kx) \cos(-\omega t)$ est celle d'une onde

- a. progressive.
- b. stationnaire.
- c. régressive.

3 L'équation de la chaleur pour un champ de température $T(\vec{r}, t)$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T$$

est une équation d'onde.

- a. Vrai.
- b. Faux.

4 La relation de dispersion d'une onde électromagnétique dans un matériau isolant est

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r \left(1 + i \frac{\omega_c}{\omega} \right).$$

La propagation est

- a. non dispersive pour $\omega \ll \omega_c$ et dispersive pour $\omega \gg \omega_c$.
- b. dispersive pour $\omega \ll \omega_c$ et non dispersive pour $\omega \gg \omega_c$.
- c. dispersive pour toutes les pulsations.
- d. non dispersive pour toutes les pulsations.

Exercices d'application

5 La fonction $F(z - ct)$ est définie par :

$$F(Y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -1 < Y < 1. \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Tracer la fonction F pour $c = 3$ à différents instants $t = 0$, $t = 1$ et $t = 3$.

6 Les fonction $F(x - ct)$ et $G(x + ct)$ sont définies par :

$$F(X) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -4 < X < -2, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \quad G(Y) = \begin{cases} -1 & \text{pour } 2 < Y < 4, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Tracer l'onde résultante $F + G$ pour $c = 3$ aux instants $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$.

7 Déterminer les relations de dispersion pour les équations d'onde suivantes :

- a. $a \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - b \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0$
- b. $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$
- c. $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \beta \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$

Préciser pour chaque cas si la propagation est dispersive ou non.

Exercices d'approfondissement

8 **Relation de Rayleigh entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe** Sans faire d'hypothèse sur la nature dispersive de la propagation, montrer que

$$v_g = v_\phi + k \frac{\partial v_\phi}{\partial k} = v_\phi \left(1 - \frac{\omega}{v_\phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \omega} \right)^{-1}.$$

9 Ondes de surface •••

La relation de dispersion des ondes de surfaces (les vagues à la surface de l'eau) est

$$\omega^2 = gk \tanh kh.$$

Cette relation fait intervenir l'accélération de la gravité g et la hauteur h . Cette relation est valable pour des longueurs d'ondes $\lambda = 2\pi/k$ supérieures au cm, quand les effets de tension de surface sont négligeables. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe pour les ondes en eau profonde ($kh \gg 1$) et en eau peu profonde ($kh \ll 1$).

Corrigés

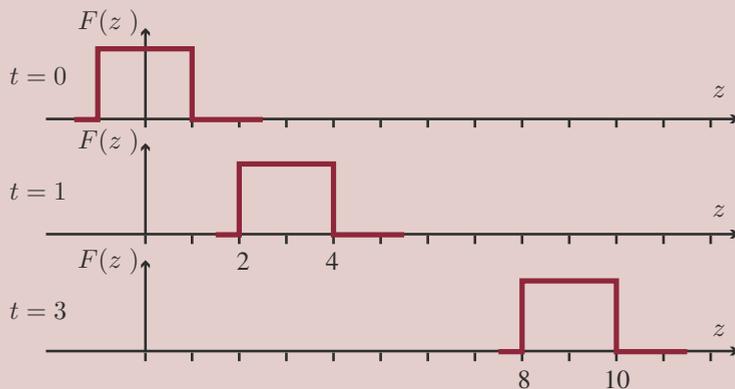
Tester ses connaissances

	a.	b.	c.	d.
1				X
2		X		
3		X*		
4	X			

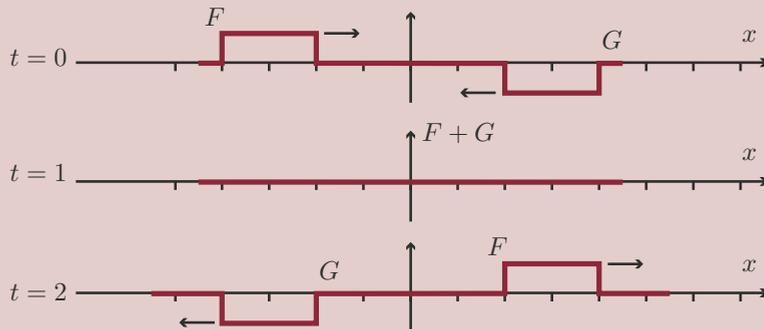
*C'est une équation de diffusion, avec une dérivée première en temps.

Exercices d'application

- 5 La fonction F est non nulle pour $-1 < z - ct < 1$, soit pour $ct - 1 < z < ct + 1$. On doit donc tracer $F = 1$ pour $2 < z < 4$ à $t = 1$ et $8 < z < 10$ pour $t = 3$.



- 6 Comme pour l'exercice précédent, la fonction F est non nulle pour $-1 < x < 1$ à $t = 1$ et pour $2 < x < 4$ à $t = 2$. La fonction G est non nulle pour $-1 < x < 1$ à $t = 1$, et pour $-4 < x < -2$ à $t = 2$. La résultante $F + G$ est nulle partout pour $t = 1$, c'est une interférence destructive.



7 En choisissant une onde monochromatique de la forme $\varphi = \varphi_0 \exp(kx - \omega t)$, les relations de dispersion sont :

- $\omega = \sqrt{b/ak}$. La propagation est non dispersive car la vitesse de phase $\sqrt{b/a}$ ne dépend ni de la pulsation ni du vecteur d'onde.
- $\omega^2 = c^2 k^2 (1 - \alpha k^2)$. La propagation est dispersive.
- $\omega^2/c^2 - k^2 + i\beta\omega = 0$. La propagation est dispersive. De plus la relation de dispersion est complexe. La dérivation d'une telle équation est présentée dans le chapitre 4 et représente la propagation d'une onde dans une corde amortie.

Exercices d'approfondissement

8 Relation de Rayleigh entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe

En toute généralité, on sait que la pulsation et le vecteur d'onde sont reliés par la relation de dispersion. À partir de l'écriture $\omega = \omega(k)$, et avec les définitions de v_ϕ et v_g , on peut calculer

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\omega}{k} \right) = \frac{1}{k} v_g - \frac{\omega}{k^2}$$

et donc on montre que

$$v_g = v_\phi + k \frac{\partial v_\phi}{\partial k}.$$

On peut également calculer

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\omega}{k} \right) = \frac{1}{k} - \frac{\omega}{k^2} \frac{1}{v_g}$$

et donc

$$v_g = v_\phi \left(1 - \frac{\omega}{v_\phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \omega} \right)^{-1}.$$

9 Ondes de surface

Pour une hauteur d'eau très importante (par exemple au milieu de l'océan Atlantique), le nombre kh est très grand devant l'unité et on peut écrire $\tanh(kh) \approx 1$. Dans ce cas, la relation de dispersion se réduit à $\omega = \sqrt{gk}$ et les vitesses de phase et de groupe sont respectivement :

$$v_\phi = \sqrt{\frac{g}{k}}, \quad v_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} v_\phi \quad (kh \gg 1).$$

Dans le cas d'une eau peu profonde (faible hauteur d'eau comparée à la longueur d'onde), la fonction tangente hyperbolique peut se développer au premier ordre $\tanh(kh) \approx kh + \dots$. La relation de dispersion est donc $\omega = \sqrt{ghk}$ et les vitesses de phase et de groupe sont égales :

$$v_\phi = v_g = \sqrt{gh} \quad (kh \ll 1).$$

On peut remarquer que les vagues en eau profonde sont dispersives alors que les vagues en eau peu profonde sont non dispersives.

4

Ondes et vibrations mécaniques

Plan

Cours

- 4.1 Ondes de compression dans un solide
- 4.2 Corde vibrante : ondes transverses
- 4.3 Vibrations transversales des membranes
- 4.4 Vibration des poutres

Synthèse

Exercices

Corrigés

Objectifs

- Utiliser la loi de Newton pour écrire les équations d'amplitude de vibration
- Comprendre la notion de mode propre de vibration
- Introduire la notion de rigidité

Cours

Les systèmes mécaniques solides montrent une grande variété de phénomènes vibratoires. Dans l'ingénierie, les ondes et vibrations sont parfois souhaitées ou au contraire néfastes. La modélisation des ondes et vibrations dans des systèmes à une, deux ou trois dimensions permet de déterminer les propriétés de propagation des systèmes mécaniques et ainsi de les contrôler.

Dans un solide, toute déformation sous l'effet d'une force ou d'une contrainte produit une force de rappel liée à l'élasticité du matériau. Cette élasticité, équilibrée par l'inertie du solide, est l'ingrédient principal de la propagation des ondes. Dans un système réel, la dissipation d'énergie ainsi que la rigidité vont influencer sur la propagation des ondes et des vibrations.

4.1 ONDES DE COMPRESSION DANS UN SOLIDE

4.1.1 Loi de Hooke

Lorsqu'on applique un effort sur un matériau solide, il se déforme. Pour de faibles déformations, le matériau retrouve sa position et sa forme initiales quand l'effort est supprimé. Il s'agit d'une déformation **élastique** et réversible. Pour des déformations importantes, le matériau se déforme irréversiblement, on parle de déformation **plastique**. Enfin, si l'effort ne peut être supporté, le matériau se brise : c'est la rupture.

Considérons un échantillon de matériau solide sous forme d'une barre rectangulaire de section S (figure 4.1a). On note F l'intensité de la force appliquée aux deux extrémités pour réaliser un effort de traction. Initialement de longueur L , la barre se voit allongée sous traction jusqu'à une longueur $L + \Delta L$. La force F dépend proportionnellement de la section S : plus la section est importante, plus la force appliquée doit être grande pour obtenir la même déformation.

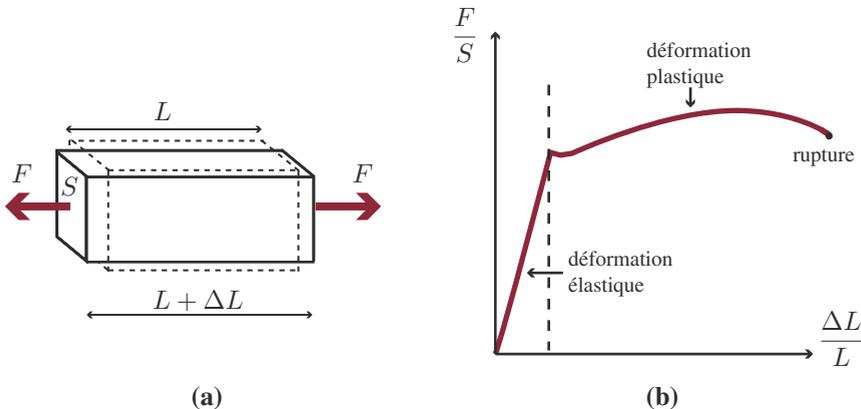


Figure 4.1

Lors d'un essai de traction (a), on applique une force F sur les deux sections S opposées d'un barreau. Pour les faibles forces, la déformation est élastique et réversible. Au-delà d'une certaine force appliquée, la déformation devient plastique et irréversible. Si on continue d'augmenter la force, on peut aller jusqu'au point de rupture du matériau (b).

La loi de Hooke est l'expression du comportement élastique d'un matériau. Elle s'exprime ainsi :

$$\frac{F}{S} = \sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad (4.1)$$

et relie l'allongement relatif $\Delta L/L$ à la contrainte normale $\sigma = F/S$ appliquée au matériau. Le coefficient de proportionnalité est le module élastique E , également appelé le module d'Young. Dans cette relation, l'allongement relatif est un nombre

sans dimension. Toutefois, il est commode de l'exprimer en $\mu\text{m}/\text{m}$. La contrainte est le rapport entre une force et une surface, son unité est donc le $\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$, également appelé le pascal (Pa).

4.1.2 Onde longitudinale de compression

La représentation la plus simple d'un solide élastique est celle d'une chaîne d'atomes reliés entre eux par une liaison élastique, modélisée par un ressort. C'est la configuration étudiée au chapitre 2. Si on déplace un atome, le déplacement va se transmettre aux atomes voisins via la liaison élastique. On peut appliquer le même raisonnement à tous les atomes d'un solide se trouvant dans le même plan perpendiculaire au déplacement imposé.

Comme il n'est pas possible de décrire individuellement le mouvement de chaque atome, on choisit une description continue du matériau : dans un volume élémentaire contenant un grand nombre d'atomes et de liaisons élastiques, on définit des quantités physiques locales qui s'expriment en fonction de la position et du temps.

Considérons un élément de largeur dx sur lequel on applique un bilan des forces (figure 4.2). La masse de l'élément est $m = \rho S dx$ et on note $u(x)$ et $u(x + dx)$ les déplacements des deux faces de l'élément. Supposons que l'élément est comprimé,

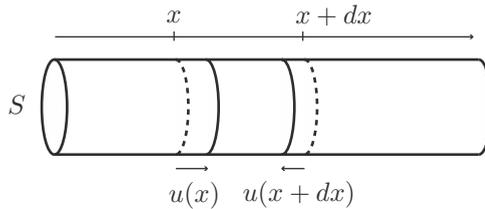


Figure 4.2 Onde de compression dans un barreau.

L'élément de matériau de longueur dx compris entre les abscisses x et $x + dx$ est déformé sous l'effet d'une compression locale : les déplacements de ses deux faces sont notés $u(x)$ et $u(x + dx)$.

sous l'effet de forces $F(x)$ et $F(x + dx)$ sur ses deux faces. D'après la loi de Hooke (4.1), la variation de longueur de l'élément est reliée à la force par

$$\frac{u(x) - u(x + dx)}{dx} = \frac{F}{SE}.$$

On a ici identifié $dx = L$ et $u(x) - u(x + dx) = \Delta L$. Le membre de gauche de cette expression est la définition de la dérivée de la fonction u par rapport à x , avec un signe moins. En supposant que la longueur de l'élément dx est extrêmement petite devant la taille macroscopique du matériau, on peut écrire

$$F(x) = -SE \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Le bilan des forces appliqué à l'élément est

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x) - F(x + dx),$$

ce qui donne

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right].$$

Dans cette dernière expression, la différence dans le crochet est la définition de la dérivée de u par rapport à x . Il s'agit donc de la dérivée seconde et on obtient pour le déplacement local u une équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4.2)$$

avec une vitesse de propagation

$$c_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (4.3)$$

On a obtenu au chapitre 3 la solution générale d'une telle équation d'onde. Dans ce cas, la solution est une onde monochromatique **longitudinale** : l'amplitude de l'onde u et le vecteur propagation sont orientés dans la même direction x .

4.1.3 Vitesse des ondes de compression dans les solides

La vitesse de propagation dépend de la masse volumique et du module élastique du matériau, deux propriétés macroscopiques. On peut relier cette expression à la vitesse de propagation de l'onde obtenue pour la chaîne linéaire d'oscillateurs identiques (3.6). En effet, la vitesse est

$$c_c = \omega_c \delta_x = \sqrt{\frac{k}{m}} \delta_x = \sqrt{\frac{k \delta_x^2}{m}} = \sqrt{\frac{k}{\delta_x} \frac{\delta_x^3}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

et on peut identifier

$$E = \frac{k}{\delta_x} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{m}{\delta_x^3}.$$

Le module élastique est donc relié à la raideur des liaisons atomiques et la masse volumique macroscopique est calculée à partir de la masse volumique microscopique, rapport entre la masse de l'atome m et le volume qu'il occupe δ_x^3 . Le **tableau 4.1** donne quelques valeurs typiques pour la vitesse des ondes de compression. On constate que cette vitesse est de l'ordre de quelques kilomètres par seconde.

Tableau 4.1 Quelques valeurs de vitesses d'onde de compression pour des matériaux courants.

Matériau	ρ ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)	E (GPa)	c_c ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
acier	7 900	200	5 000
cuivre	8 920	124	3 700
béton	2 500	2,7	1 000
plexiglas	1 200	2,4	1 400
verre	2 500	70	5 300



Encart 4.1 Les ondes sismiques P

Lors d'un séisme, différentes ondes se propagent dans les matériaux qui composent la croûte terrestre. Les plus rapides sont les ondes P, ondes primaires, qui sont des ondes de compression longitudinales. Ces ondes se propagent à environ $13 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ dans le noyau et à environ $6 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ près de la surface. Elles sont donc enregistrées les premières sur le sismogramme, graphique qui représente l'accélération de la surface de la Terre au point de mesure.

Il existe d'autres types d'ondes : les ondes S (pour secondaire) qui sont des ondes de cisaillement, et les ondes R, H et L qui sont des ondes de surface.

4.2 CORDE VIBRANTE : ONDES TRANSVERSES

Le modèle de corde vibrante est un système à une dimension, c'est-à-dire qu'une seule variable d'espace est nécessaire pour connaître la valeur locale de la vibration. La corde vibrante peut être aisément réalisée expérimentalement et visualisée, ce qui en fait un modèle d'étude idéal pour représenter d'autres vibrations parfois invisibles, comme les ondes de pression dans un tuyau ou les ondes électromagnétiques.

4.2.1 Forme d'une corde statique

Une corde est un objet longiligne de masse totale M et de masse volumique ρ . En première approximation, on peut donc assimiler à une corde tout objet dont les longueurs caractéristiques selon les 3 directions de l'espace (x , y , z) sont telles que :

$$L = L_x \gg L_y, \quad L_x \gg L_z, \quad L_y \approx L_z.$$

La forme d'une corde dépend de la manière dont cette corde est attachée et également des forces qui s'appliquent dessus. Une des configurations les plus simples est la corde attachée entre deux points. Soumise à la pesanteur, sa forme peut être incurvée (figure 4.3a) ou horizontale si elle est fortement tendue (figure 4.3b).

La tension d'une corde provient des forces que l'on applique à ses extrémités. Cette tension, mesurée en newtons, caractérise macroscopiquement l'état des liaisons entre les composants de la corde, les atomes ou les molécules.

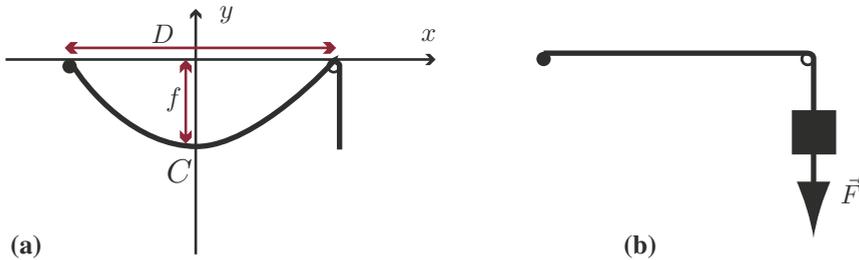


Figure 4.3 (a) Corde détendue entre deux points séparés d'une distance D .
(b) Corde tendue à une tension $T_0 = \|\vec{F}\|$ entre deux points.

Le bilan des forces d'un petit élément de longueur dx (figure 4.4) donne un équilibre entre trois forces : la pesanteur et les deux forces de tension de part et d'autre de l'élément :

$$dm \vec{g} + \vec{T}(x) + \vec{T}(x + dx) = 0.$$

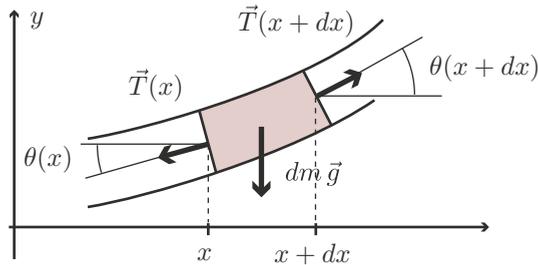


Figure 4.4 Élément de corde déformé soumis à des forces de tension et à son poids.

En projection sur les axes x et y , cela donne :

$$-T(x) \cos \theta(x) + T(x + dx) \cos \theta(x + dx) = 0, \quad (4.4)$$

$$-dm g - T(x) \sin \theta(x) + T(x + dx) \sin \theta(x + dx) = 0. \quad (4.5)$$

La projection sur x (4.4) montre que la projection horizontale de la tension est identique en tout point de la corde. En particulier, au point C , le centre de la corde, où la tangente à la corde est horizontale, on note $T(C) = T_0 = T(x) \cos \theta(x)$. On a donc :

$$T(x) = \frac{T_0}{\cos \theta(x)}.$$

Avec cette notation, on peut réécrire l'équation (4.5) sous la forme

$$-dm g + T_0[\tan \theta(x + dx) - \tan \theta(x)] = 0,$$

ou encore

$$-\frac{Mg}{LT_0} + \frac{d}{dx} \tan \theta(x) = -\frac{Mg}{LT_0} + \frac{d\theta}{dx} \frac{d \tan \theta}{d\theta} = 0.$$

En supposant que l'élément de longueur dx est suffisamment petit pour être assimilé à un segment droit, on peut calculer la tangente de l'angle par

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx},$$

ce qui donne

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{1}{l_c}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad (4.6)$$

avec une longueur caractéristique

$$l_c = \frac{LT_0}{Mg}.$$

Cette équation, appelée **équation de la chaînette**, se résout par un changement de variable (encart 4.2) et la forme de la corde attachée par deux points séparés d'une distance D est donnée par :

$$y(x) = l_c \left[\cosh \left(\frac{x}{l_c} \right) - \cosh \left(\frac{D}{2l_c} \right) \right]. \quad (4.7)$$



Encart 4.2 Intégration de l'équation de la chaînette

L'équation (4.6) peut s'intégrer après un changement de variable. Posons

$$p = \frac{dy}{dx},$$

on a donc

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{1}{l_c}\right) \sqrt{1 + p^2},$$

puis

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{l_c}.$$

L'intégration de cette relation donne

$$\operatorname{arcsinh}(p) = \frac{x}{l_c} + C$$

et la condition $dy/dx = p = 0$ en $x = 0$ impose que la constante d'intégration $C = 0$. La pente locale de la corde p est donc

$$p = \frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{x}{l_c}\right),$$

soit

$$y(x) = l_c \cosh\left(\frac{x}{l_c}\right) + Y.$$

La constante d'intégration Y est déterminée par les points d'attache de la corde : $y = 0$ en $x = -D/2$ ou en $x = D/2$ et on trouve

$$y(x) = l_c \left[\cosh\left(\frac{x}{l_c}\right) - \cosh\left(\frac{D}{2l_c}\right) \right].$$

Cette forme est appelée **chaînette** ou caténaire. Elle a été établie indépendamment par Leibnitz, Huyghens et Bernoulli à la fin du XVII^e siècle.

On peut maintenant facilement calculer la « flèche » f , la déviation maximale de la corde par rapport à la ligne horizontale passant par les points d'attache :

$$f = y(0) = l_c \left[\cosh\left(\frac{D}{2l_c}\right) - 1 \right],$$

et la tension le long de la corde

$$T(x) = \frac{T_0}{\cos \theta} = T_0 \cosh\left(\frac{x}{l_c}\right).$$

Enfin, l'écart de tension entre les points d'attache et la flèche est

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{f}{L} \frac{Mg}{T_0}$$

ce qui indique que pour une corde bien tendue ($f \ll L$), la tension est constante sur toute la longueur.

Exemple : tension des cordes d'instruments

Les cordes de guitare (figure 4.5) sont tendues entre deux points dont l'un permet de faire varier la tension (la clé) pour accorder l'instrument. La tension des cordes est de l'ordre de 70 N, chaque corde ayant un diamètre et/ou une densité linéique différente. Un violon comporte 4 cordes tendues à environ 200 N. Pour un piano, les cordes sont tendues avec des tensions entre 600 et 750 N. L'instrument nécessite donc un cadre en acier pour éviter les déformations des pièces en bois.

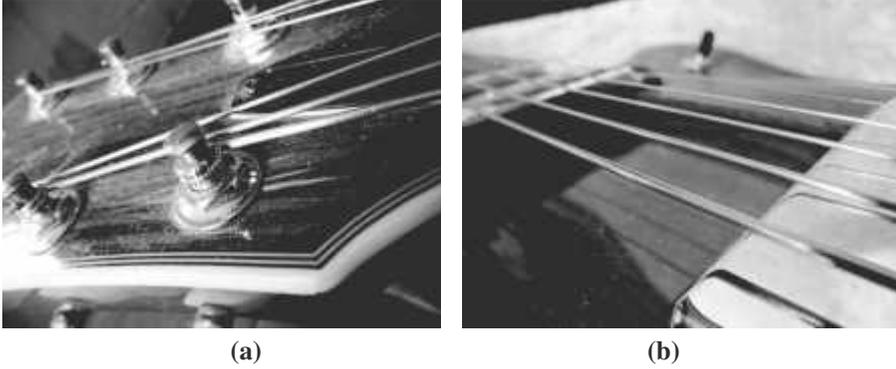


Figure 4.5 Cordes de guitare électrique.

(a) Mécanisme de réglage de la tension des cordes, (b) les cordes les plus graves, au premier plan de la photo, ont une section plus importante, donc une masse linéique élevée.

4.2.2 Ondes transversales d'une corde

Quand une corde est en vibration, on peut écrire une équation de mouvement pour chaque élément infinitésimal de la corde. En se limitant aux vibrations **transversales** (par exemple alignées le long de l'axe y), le principe fondamental de la dynamique pour l'élément de longueur dx et de masse $dm = M dx/L$ est :

$$dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -T(x) \sin \theta(x) + T \sin \theta(x + dx) - dm g.$$

À cause du terme de gravité constant $-dm g$, cette équation n'a pas de solution analytique simple. Mais on s'intéresse dans la suite à la vibration d'une corde sous forte tension et on émet l'hypothèse que

$$dm g \ll T.$$

Avec cette hypothèse, la tension T est uniforme $T(x) = T_0$ et le PFD est

$$\frac{M}{L} dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 [\sin \theta(x + dx) - \sin \theta(x)].$$

Comme la corde est bien tendue, les angles $\theta(x)$ sont toujours faibles, ce qui autorise l'approximation

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{\partial u}{\partial x}.$$

L'équation du mouvement se met donc sous la forme d'une équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (4.8)$$

avec une vitesse de propagation de l'onde

$$c_s = \sqrt{\frac{T_0 L}{M}} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_L}}. \quad (4.9)$$

On a défini ici la masse linéique $\rho_L = M/L$ de la corde, mesurée en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$. La notation c_s fait référence à *string*, corde en anglais.

Quand une corde de section S est tendue avec une tension T_0 , la contrainte est $\sigma = T_0/S$. D'autre part, la masse linéique est reliée à la masse volumique par $\rho_L = \rho S$. La vitesse de propagation des ondes transversales est donc

$$c_s = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_L}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}. \quad (4.10)$$

De plus, si on utilise la loi de Hooke (4.1) avec un module élastique E , on peut écrire la vitesse des ondes transverses de la corde :

$$c_s = \sqrt{\frac{E \Delta L}{\rho L}} = c_c \sqrt{\frac{\Delta L}{L}}.$$

En utilisant le formalisme d'une onde monochromatique, on peut chercher des solutions du type

$$y(x, t) = y_0 e^{i(kx \pm \omega t)},$$

avec une relation de dispersion établie à partir de l'équation d'onde (4.8)

$$\omega = \pm c_s k$$

où le signe \pm indique les deux directions de propagation possibles. La vitesse de phase ω/k et la vitesse de groupe $d\omega/dk$ sont égales et valent :

$$v_\phi = v_g = \pm c_s.$$

La propagation d'une onde transverse le long d'une corde est donc non dispersive : toutes les fréquences se propagent à la même vitesse.

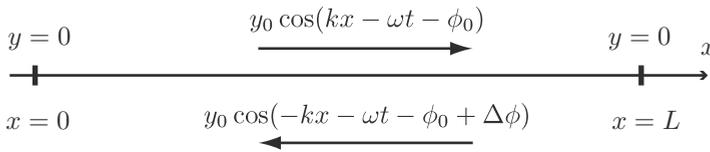
4.2.3 Ondes stationnaires transversales

La forte tension d'une corde (comparée à la force de pesanteur) est obtenue en tendant la corde entre deux points fixes : $y = 0$ en $x = 0$ et $x = L$. L'espace unidimensionnel de la corde est confiné et la propagation des ondes se fait dans un système fermé. On présente ci-après deux méthodes pour déterminer les solutions de vibration de la corde tendue entre deux points.

Méthode 1

Dans cette méthode, on considère le confinement de deux ondes, incidente et réfléchie, avec un déphasage $\Delta\phi$ entre elles produit par la réflexion sur les conditions de confinement (figure 4.6). On prend également en compte un déphasage initial ϕ_0 représentant la condition initiale de l'onde incidente. La superposition de ces deux ondes, déduite de l'expression (3.20), est :

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_0 \cos(kx - \omega t - \phi_0) + y_0 \cos(-kx - \omega t - \phi_0 + \Delta\phi), \\ &= 2y_0 \cos\left(kx - \frac{\Delta\phi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \phi_0 - \frac{\Delta\phi}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

**Figure 4.6**

Entre les deux points d'attache, l'onde transversale $y(x, t)$ se propage sous la forme d'une onde progressive et d'une onde régressive.

Pour respecter la condition d'absence de mouvement en $x = 0$, il faut que le déphasage soit tel que $-\Delta\phi/2 = \pi/2$, c'est-à-dire $\Delta\phi = -\pi$. Et pour respecter la condition d'absence de mouvement en $x = L$, il faut que

$$kx + \frac{\pi}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

donc que le nombre d'onde k soit égal à

$$k = \frac{n\pi}{L}.$$

Avec la relation de dispersion, on sait que $\omega = nc\pi/L$ et l'onde stationnaire transverse de la corde est donc

$$\begin{aligned} y(x, t) &= 2y_0 \cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \phi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2y_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{nc_s\pi}{L}t + \phi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

où le nombre entier n supérieur ou égal à 1 désigne le **mode de vibration** de la corde.

Méthode 2

Une autre méthode consiste à chercher directement des solutions de la forme

$$y(x, t) = \tilde{A}(x) \cos(\omega t + \phi'_0)$$

avec un découplage des dépendances spatiales et temporelles. La phase ϕ'_0 est la phase initiale de l'onde. On suppose ici que tous les morceaux de la corde vibrent en phase. Les conditions aux limites spatiales s'appliquent à la seule fonction $\tilde{A}(x)$. En insérant ce type de solution dans l'équation d'onde (4.8), on obtient une équation pour l'amplitude \tilde{A} :

$$\frac{d^2 \tilde{A}}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c_s^2} \tilde{A} = 0$$

dont la solution générale est

$$\tilde{A} = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx).$$

Comme on doit vérifier $\tilde{A}(0) = 0$, on trouve $A_1 = 0$, et la deuxième condition en $x = L$ impose $\sin(kL) = 0$, soit :

$$k = n \frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega = n \frac{\pi}{L} c_s.$$

Le mode n de vibration de la corde s'écrit donc :

$$y(x, t) = A_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{nc_s\pi}{L}t + \phi'_0\right), \quad (4.13)$$

et on retrouve l'expression (4.12) avec $A_2 = 2y_0$ et $\phi'_0 = \phi_0 + \pi/2$.

Quelle que soit la méthode choisie, la solution complète de la corde vibrante est une superposition linéaire de tous les modes possibles de vibration :

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t + \phi_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

À chaque mode n correspond une pulsation $\omega_n = n\pi c/L$. Les modes $n = 1, 2$ et 3 sont montrés sur la [figure 4.7](#). La valeur n correspond au nombre de ventres, tandis que les nœuds sont au nombre de $n - 1$, si on exclut les deux points de fixation.

La fréquence de vibration la plus basse correspond au mode $n = 1$. Cette fréquence est appelée la **fréquence fondamentale** de la corde :

$$\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{c_s}{2L}.$$

Les modes d'ordre plus élevé ($n > 1$) ont des fréquences qui sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale :

$$\frac{\nu_n}{\nu_1} = n.$$

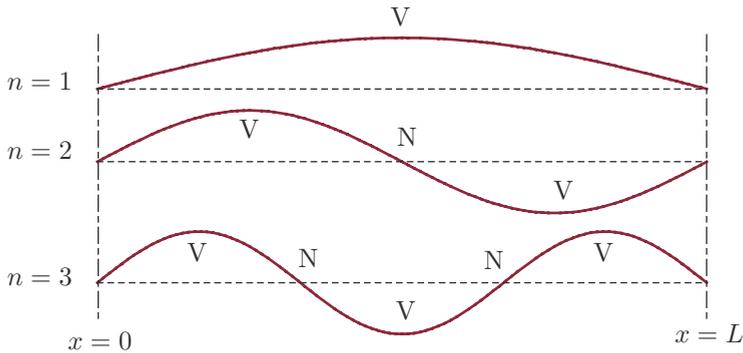


Figure 4.7 Premiers modes de vibration d'une corde tendue entre deux points. Chaque mode d'ordre n comporte n ventres (N) et $n - 1$ nœuds.

Ces fréquences sont appelées les **harmoniques**.



Les constantes d'amplitude A_n sont déterminées par deux conditions initiales : la forme de la corde à $t = 0$ et la vitesse de chaque point de la corde à $t = 0$. En effet, l'équation d'onde est une équation comportant une dérivée seconde en temps et une dérivée seconde en espace. Il faut donc deux conditions d'espace et deux conditions de temps pour résoudre complètement le problème.



Encart 4.3 Méthodes de contrôle et mesure en génie civil

La relation simple entre la fréquence de vibration et la tension d'une corde est la base de plusieurs méthodes de mesure et de contrôle dans le domaine du génie civil et du bâtiment. Par exemple, on peut, à l'aide d'un accéléromètre, mesurer les différents harmoniques de vibration d'un hauban, câble utilisé pour soutenir le tablier d'un pont suspendu. La tension du câble peut ainsi être contrôlée et servir d'indicateur de la bonne tenue du câble dans le temps.

Pour surveiller l'état de contrainte d'une structure en béton, il est possible d'utiliser des capteurs à corde vibrante (CCV), également appelés jauge extensométrique à corde vibrante, à noyer dans le béton. Reliée à deux têtes en acier en contact avec le béton, la corde est protégée par un petit caisson et excitée par un électroaimant lors de la mesure. Le dispositif est placé dans le coffrage avant la mise en place du béton frais. La fréquence de vibration de la corde est mesurée par un système d'acquisition portable et un simple calibrage permet

de remonter à l'état de déformation $\Delta L/L$. Cette méthode est largement utilisée pour des structures nécessitant une surveillance particulière comme les centrales nucléaires, les parois de tunnels, les ponts ou encore les barrages.

4.2.4 Densité énergétique de la corde

Chaque élément de corde de longueur dx et de masse dm est en mouvement. L'énergie cinétique de ce petit élément est

$$d\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}dm \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{L} dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2,$$

et on peut définir une densité linéique d'énergie cinétique

$$\Gamma_c = \frac{d\mathcal{E}_c}{dx} = \frac{1}{2} \frac{M}{L} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2.$$

L'énergie potentielle d'un petit élément de corde déformé par la vibration est

$$d\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{M}{L} c_s^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx,$$

et la densité linéique d'énergie potentielle est

$$\Gamma_p = \frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = \frac{1}{2} \frac{M}{L} c_s^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2.$$

L'énergie totale de l'élément est donc $d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_c + d\mathcal{E}_p$ et l'intégrale sur la longueur de la corde donne l'énergie totale de la corde en vibration :

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{M}{L} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + c_s^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx.$$

4.2.5 Amortissement visqueux d'une corde

Entourée d'un environnement fluide (l'air), une corde va subir une force de frottement qui va dissiper son énergie. Chaque élément de corde va donc se comporter comme un oscillateur amorti. L'équation de mouvement d'un petit élément de corde de longueur dx est :

$$dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T(x) \sin \theta(x) + T \sin \theta(x + dx) - dm g - C\eta\pi \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) dx,$$

où η est la viscosité du fluide et C une constante numérique qui dépend de la géométrie de la corde (section carrée ou ronde). Avec les mêmes hypothèses que précédemment (corde bien tendue, pesanteur négligeable), on peut écrire l'équation d'onde sous la forme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial y}{\partial t} = 0. \quad (4.15)$$

Cette équation d'onde a un terme supplémentaire par rapport à l'équation d'onde simple. Le terme d'amortissement visqueux est présent sous la forme d'une dérivée temporelle du déplacement transverse. On recherche des solutions en onde stationnaire :

$$y(x) = y_0 \sin(kx) e^{i\omega t},$$

et la relation de dispersion associée est

$$\mathcal{D} = \frac{\omega^2}{c_s^2} - k^2 - i\beta\omega = 0.$$

La relation de dispersion est donc complexe et pour déterminer des solutions, on doit choisir une pulsation également complexe :

$$\omega = \omega_r + i\omega_i,$$

et la solution prendra la forme

$$y(x) = y_0 \sin(kx) e^{-\omega_i t} e^{i\omega_r t}.$$

En séparant les parties réelle et imaginaire de la relation de dispersion, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathcal{D}) &= -k^2 + \frac{1}{c_s^2} (\omega_r^2 - \omega_i^2) + \beta\omega_i = 0, \\ \operatorname{Im}(\mathcal{D}) &= \beta - \frac{2}{c_s^2} \omega_i = 0, \end{aligned}$$

et donc la pulsation complexe est

$$\omega = kc_s \sqrt{1 - \frac{\beta^2 c_s^2}{4k^2}} + i \left(\frac{\beta c_s^2}{2} \right).$$

Comme ω_i est positif, la vibration décroît exponentiellement avec le temps et le temps caractéristique de décroissance (le temps qu'il faut pour que l'amplitude de vibration soit divisée par un facteur $e \approx 2,7$) est $1/\omega_i$, soit $2/\beta c^2$. On remarque plusieurs choses. Comme dans le cas de l'oscillateur isolé amorti en régime oscillant, la pulsation est modifiée par l'amortissement. De plus, on trouve que l'amortissement produit une décroissance exponentielle de l'amplitude de vibration au cours du temps, décroissance qui est d'autant plus forte que le facteur d'amortissement est important. Ce facteur est principalement relié à la viscosité du fluide, ce qui confirme intuitivement le résultat qualitatif suivant : augmenter la viscosité du fluide environnant la corde va réduire la durée de vibration.

4.3 VIBRATIONS TRANSVERSALES DES MEMBRANES

Une membrane est une surface solide élastique tendue sur un contour fixe. On parle de membrane quand l'épaisseur selon une direction est très petite devant les autres dimensions (figure 4.8a) :

$$L_x \approx L_y, \quad L_x \gg L_z, \quad L_y \gg L_z.$$

La tension d'une membrane provient des forces que l'on impose sur son contour. La figure 4.8b montre un exemple de mise en tension d'une membrane selon une direction : un poids F suspendu à un des côtés de longueur L_y de la membrane par l'intermédiaire d'une barre de répartition impose à la membrane une contrainte σ telle que $F = \sigma L_y L_z$. On définit la **tension linéique** T_L d'une membrane par

$$T_L = \frac{F}{L_y} = \sigma L_z. \quad (4.16)$$

La tension linéique est une force par unité de longueur et s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$. Les figures 4.8c, d, e fournissent une autre illustration de la tension linéique. Une membrane mise en tension le long de la direction x est coupée sur une longueur L selon la direction y . Naturellement, la fente s'ouvre et il faudrait appliquer sur chaque bord une force $T_L \times L$ pour refermer complètement la coupure.

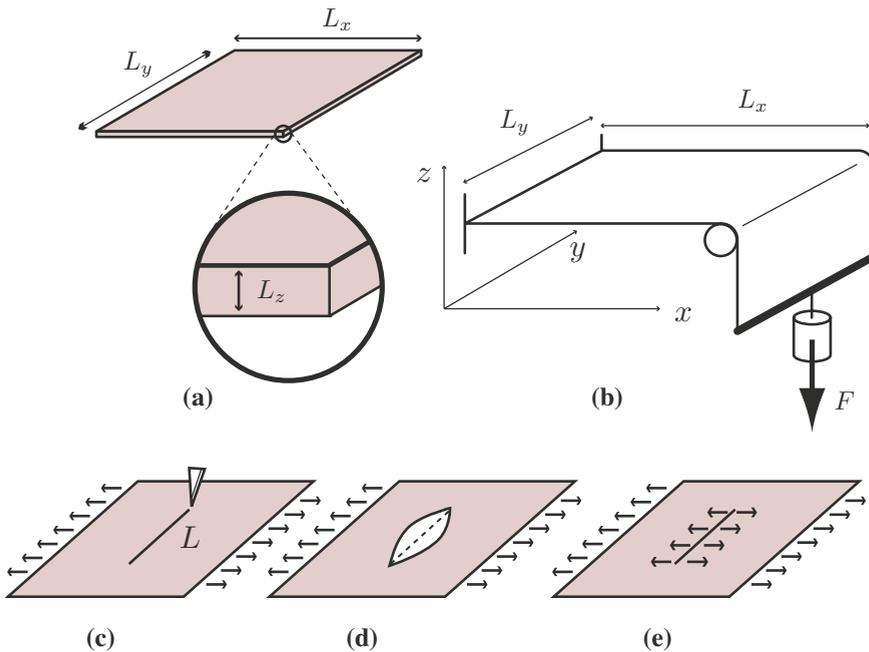


Figure 4.8 (a) Dimensions caractéristiques d'une membrane. (b) Origine de la tension linéique par la suspension d'un poids équivalent à une force F . (c) Quand une membrane tendue est coupée sur une longueur L , la coupure s'ouvre (d) et il faut appliquer une force sur chaque bord de la coupure pour la refermer (e).

4.3.1 Équation d'amplitude et relation de dispersion

Au repos, la membrane est définie mathématiquement comme une surface plane d'équation

$$z(x, y, t) = 0.$$

Sous l'effet d'une perturbation extérieure qui lui apporte de l'énergie, la membrane va se mettre en vibration et on va chercher à déterminer la fonction d'élévation $z(x, y, t)$ qui représente la vibration. Une première méthode repose sur l'écriture du principe fondamental de la dynamique pour un petit élément de membrane ; cette méthode est détaillée dans l'encart 4.4. Une deuxième méthode est basée sur l'analogie avec la corde vibrante.



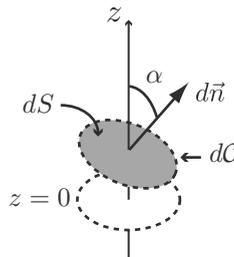
Encart 4.4 Démonstration de l'équation d'onde d'une membrane

L'équation du mouvement de la membrane s'obtient à partir du principe fondamental de la dynamique appliqué à un petit élément de la membrane de surface dS de masse dm . Si la membrane est suffisamment tendue, son poids est négligeable devant la force de tension, seule force d'importance ici. La tension est la force de rappel élastique, calculée comme l'intégrale de la tension linéique sur le contour dC de l'élément de surface. Comme on recherche des vibrations principalement perpendiculaires au plan de la membrane à l'équilibre (le plan xy), on écrit la projection du principe fondamental de la dynamique selon l'axe z :

$$dm \frac{d^2 z}{dt^2} = \left(\oint_C T_L \cdot dC \right)_z, \quad (4.17)$$

avec

$$\left(\oint_C T_L \cdot dC \right)_z = T_L \oint_C dC \cos \alpha = T_L \oint_C \left(\frac{dz}{dn} \right) dC.$$



Le théorème de Green nous permet de transformer l'intégrale de contour en une intégrale de surface :

$$\oint_C \left(\frac{dz}{dn} \right) dC = \iint_S \left(\frac{d^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z \cdot dS = S \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right).$$

En introduisant la densité surfacique $\rho_s = dm/dS$, l'équation de mouvement s'écrit sous la forme d'une équation d'onde à deux dimensions spatiales :

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - \frac{\rho_s}{T_L} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \quad (4.18)$$

Pour passer de l'équation d'onde de la corde vibrante (4.8) à une équation d'onde transverse pour une membrane, il faut transposer le résultat obtenu à une dimension dans un espace à deux dimensions. En particulier, l'opérateur $\partial^2/\partial x^2$ de l'équation de la corde est un des termes d'un opérateur laplacien qui, à deux dimensions, est

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

en coordonnées cartésiennes. La vitesse de propagation des ondes transverses de la corde est calculée par la tension de la corde (une force) et la masse linéique de la corde, mais peut aussi être exprimée en fonction de la contrainte σ et de la masse volumique du matériau. Si on suppose que la membrane est mise en tension de manière isotrope (c'est-à-dire de la même façon suivant x ou y), on a, en suivant la définition de la tension linéique (4.16) :

$$\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{T_L}{L_z} \frac{L_z}{\rho_s}} = \sqrt{\frac{T_L}{\rho_s}}$$

où $\rho_s = M/(L_x L_y)$ est la masse surfacique de la membrane. L'équation d'onde d'une membrane est donc

$$\Delta z - \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad (4.19)$$

où Δ désigne le laplacien à deux dimensions qui peut être exprimé en coordonnées cartésiennes ou polaires, avec une vitesse de propagation

$$c_m = \sqrt{\frac{T_L}{\rho_s}}. \quad (4.20)$$

4.3.2 Modes de vibration d'une membrane rectangulaire

En reprenant la même méthode que pour la corde vibrante, il est commode de choisir une solution sous la forme

$$z(x, y, t) = Z(x, y) \cos(\omega t + \phi).$$

L'équation d'onde (4.19) devient alors une équation d'amplitude du type

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) Z(x, y) + \frac{\omega^2}{c_m^2} Z(x, y) = 0, \quad (4.21)$$

et la solution de cette équation doit satisfaire les conditions de bord, c'est-à-dire une amplitude nulle sur les bords de la membrane. Pour aller plus loin, il faut donc choisir une géométrie pour le cadre. Prenons le cas d'une membrane rectangulaire fermée par deux côtés de longueurs L_x et L_y . Dans la direction x , on doit imposer $Z = 0$ en $x = 0$ et $x = L_x$. Dans la direction y , on doit imposer $Z = 0$ en $y = 0$ et $y = L_y$.

Par analogie avec la corde vibrante, problème à une dimension, on peut proposer une fonction d'amplitude

$$Z(x, y) = Z_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right),$$

où les nombres m et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1. Les modes de vibration sont maintenant indicés par des couples (m, n) et en injectant cette solution dans l'équation d'amplitude (4.21), les fréquences possibles sont déterminées par

$$\omega_{mn} = c_m \pi \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2}. \quad (4.22)$$

Le premier mode de vibration correspond à $m = 1$ et $n = 1$. La fréquence la plus basse d'une membrane rectangulaire est donc

$$\nu_{11} = \frac{\omega_{11}}{2\pi} = \frac{c_m}{2L_y} \sqrt{\frac{1}{r^2} + 1} = \frac{c_m}{2rL_y} \sqrt{1 + r^2}$$

où r est le rapport d'aspect $r = L_x/L_y$. Les fréquences des modes d'ordre plus élevé ($m > 1$ ou $n > 1$) sont

$$\nu_{mn} = \frac{c_m}{2rL_y} \sqrt{m^2 + n^2 r^2} = \nu_{11} \sqrt{\frac{m^2 + n^2 r^2}{1 + r^2}}.$$

Contrairement à la corde vibrante, les fréquences des modes élevés ne sont pas des multiples de la fréquence fondamentale. La solution complète, superposition de tous les modes,

$$z(x, y, t) = \sum_{m=1, n=1}^{\infty} Z_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \cos(\omega_{mn}t + \phi_{mn}) \quad (4.23)$$

est déterminée par la connaissance de la condition de forme initiale de la membrane $z(x, y, 0)$ qui donne accès aux valeurs de Z_{mn} et ϕ_{mn} .

La figure 4.9 montre quelques exemples de modes de vibrations pour une membrane de rapport d'aspect $r = 2$.

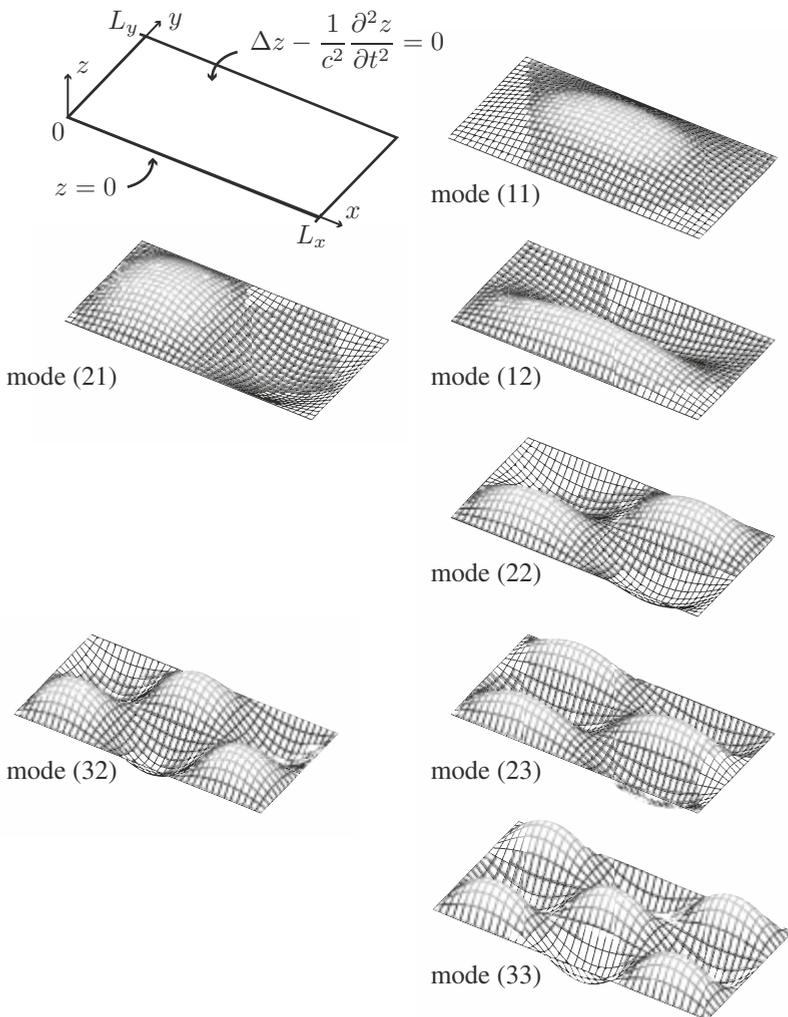


Figure 4.9 Illustrations des premiers modes de vibration d'une membrane rectangulaire de dimensions $L_x = 2L_y$.



Encart 4.5 Modes de vibration dégénérés

L'expression (4.22) de la pulsation d'une membrane rectangulaire est la racine carrée de la somme de deux carrés. Les nombres m et n étant des entiers, leurs carrés sont aussi des entiers. Si les carrés des longueurs L_x^2 et L_y^2 sont

incommensurables, c'est-à-dire que le rapport des deux n'est pas une fraction de deux entiers, alors aucune paire des valeurs m et n ne peut donner la même pulsation.

Si au contraire les carrés des longueurs L_x^2 et L_y^2 sont commensurables, alors les paires (m, n) et (n, m) correspondent à la même pulsation. Géométriquement ces modes sont différents mais partagent la même fréquence. On parle de modes **dégénérés**. Toutes les membranes rectangulaires avec un rapport d'aspect r entier comportent des modes dégénérés.

Comme pour la corde, une membrane vibrante en mode monochromatique est caractérisée par des points d'élevation nulle. Ces points forment des lignes appelées **lignes nodales**.

Définition

Une **ligne nodale** est l'ensemble des points de la membrane qui ont une élévation nulle à tout instant, en dehors du cadre. Pour une membrane rectangulaire en mode de vibration (m, n) non dégénéré, il existe $m + n - 2$ lignes nodales.

Pour une membrane rectangulaire en mode (m, n) non dégénéré, il y a $m - 1$ lignes nodales parallèles à l'axe y et $n - 1$ lignes nodales parallèles à l'axe x . La membrane est donc fractionnée en $m \times n$ rectangles de surfaces égales et de dimension $(L_x/m) \times (L_x/n)$.

4.3.3 Membranes carrées

On peut rencontrer des cas particuliers intéressants quand les deux côtés sont égaux : $L_x = L_y$. De façon évidente, les modes (m, n) et (n, m) ont la même fréquence, même s'ils sont différents géométriquement. Les modes tels que $m \neq n$ sont donc dégénérés. La superposition de deux modes dégénérés peut s'écrire

$$z(x, y, t) = \cos(\omega_{mn}t) \left[A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_x} + A_{nm} \sin \frac{n\pi x}{L_x} \sin \frac{m\pi y}{L_x} \right],$$

car la linéarité de l'équation d'onde autorise la superposition des solutions.

Exemple : modes (12) et (21)

Une membrane excitée à la fréquence $\omega = \omega_{12} = \omega_{21}$ a une amplitude de la forme

$$A(x, y) = A_{12} \sin \frac{\pi x}{L_x} \sin \frac{2\pi y}{L_x} + A_{21} \sin \frac{2\pi x}{L_x} \sin \frac{\pi y}{L_x}.$$

En utilisant la transformation $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, on obtient

$$A(x, y) = 2 \sin \frac{\pi x}{L_x} \sin \frac{\pi y}{L_x} \left[A_{21} \cos \frac{\pi x}{L_x} + A_{12} \cos \frac{\pi y}{L_x} \right].$$

Pour de telles superpositions, la ou les lignes nodales s'obtiennent pour $A(x, y) = 0$ sans tenir compte des conditions de bord. La courbe de la ligne nodale est donc décrite par la fonction

$$y(x) = \frac{L_x}{\pi} \arccos \left(-\frac{A_{21}}{A_{12}} \cos \frac{\pi x}{L_x} \right),$$

mais quelques cas particuliers peuvent être visualisés facilement. Quand les amplitudes sont opposées, ($A_{21} = -A_{12}$), la ligne nodale est décrite par $y = x$, l'équation de la diagonale principale du carré (figure 4.10a). Quand les amplitudes sont égales ($A_{21} = A_{12}$), la ligne nodale est décrite par $y = L_x - x$, l'équation de l'autre diagonale (figure 4.10b). La superposition de modes dégénérés montre des figures géométriques qui ne respectent pas la symétrie de la géométrie du cadre.

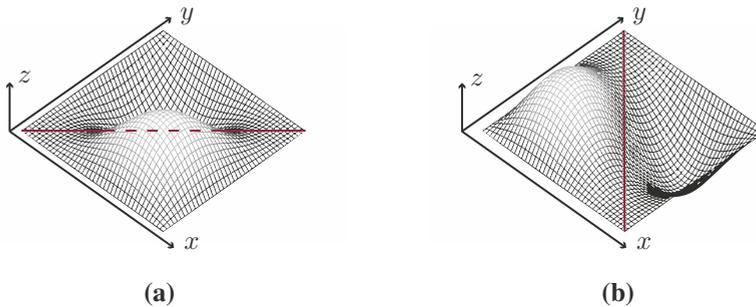


Figure 4.10 Superposition des modes (21) et (12) d'une membrane carrée :

$$A_{21} = -A_{12} \text{ (a)}, A_{21} = A_{12} \text{ (b)}.$$

Les lignes nodales sont les diagonales du carré (en bleu).

4.3.4 Membrane circulaire

On reprend l'équation d'onde (4.19) mais cette fois avec une membrane tendue sur un cadre circulaire de rayon R . C'est un modèle simple de peau de tambour. Il est plus aisé alors de réécrire l'équation d'onde avec des coordonnées polaires (r, θ). L'amplitude de vibration à la fréquence ω est donc de la forme $Z(r, \theta) \cos \omega t$, et l'équation différentielle pour l'amplitude est :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} + \frac{\omega^2}{c_m^2} = 0.$$

La condition de contour $Z(R, \theta) = 0$ est indépendante de θ . La variation de Z avec θ est donc arbitraire, sous réserve de périodicité : $Z(r, \theta) = Z(r, \theta + 2\pi)$. On peut donc décomposer l'amplitude sous la forme de modes propres azimutaux de la forme

$$Z(r, \theta) = \sum_n Z_n(r) \cos(n\theta + \phi_n).$$

Chaque mode Z_n doit vérifier une équation

$$\frac{d^2 Z_n}{dx^2} + \frac{1}{x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) Z_n = 0, \quad (4.24)$$

avec $x = \omega r / c$. C'est une équation de Bessel dont les solutions sont les fonctions de Bessel.



Encart 4.6 Les fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel sont les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 Z_n}{dx^2} + \frac{1}{x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) Z_n = 0.$$

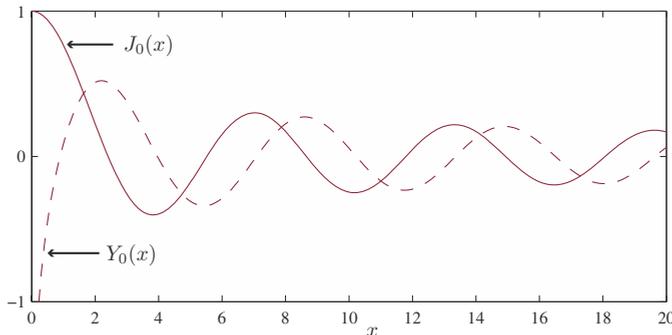
Le paramètre n est appelé l'ordre de l'équation. Cette équation est du second ordre, ce qui implique deux solutions particulières linéairement indépendantes. Les deux types de solutions sont les fonctions de Bessel du premier ordre

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^m}{m! \Gamma(n+m+1)},$$

et les fonctions de Bessel du second ordre

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}.$$

La fonction Γ est définie par $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.



Comme les fonctions de Bessel $Y_n(x)$ divergent pour $x \rightarrow 0$, elles ne peuvent être des solutions physiques acceptables pour la membrane dont le centre a une élévation finie. La vibration d'une membrane circulaire est donc donnée par

$$z(r, \theta, t) = \cos(\omega t) \sum_n \alpha_n J_n(kr) \cos(n\theta + \phi_n).$$

Le choix de la fréquence est imposé par le fait que le contour de la membrane $r = R$ correspond à un zéro de la fonction de Bessel d'ordre n . Ces valeurs ne peuvent être calculées facilement, mais les fonctions de Bessel sont assez bien approchées par des fonctions du type

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right],$$

et les zéros de ces fonctions sont approchés par :

$$B_{pn} \approx \pi \left(p + \frac{n}{2} - \frac{1}{4} \right).$$

La pulsation du mode (pn) est déterminée par le p -ième zéro de la fonction J_n , soit

$$J_n(k_{pn} R) = 0$$

ce qui donne, avec la relation de dispersion $\omega_{pn} = c_m k_{pn}$:

$$\omega_{pn} = \frac{c}{R} B_{pn}.$$

Exemple 1 : pulsation du mode (10)

Le mode (10) est caractérisé par le premier zéro ($p = 1$) de la fonction de Bessel J_0 . On trouve $B_{10} \approx 3\pi/4$. La pulsation est donc :

$$\omega_{10} = \frac{c}{R} B_{10} \approx \frac{3c\pi}{4R}.$$

C'est le mode fondamental, illustré sur la figure 4.11a.

Exemple 2 : pulsation du mode (31)

Le mode (31) est caractérisé par le troisième zéro ($p = 3$) de la fonction de Bessel J_1 . On trouve $B_{31} \approx 13\pi/4$. La pulsation est donc :

$$\omega_{31} = \frac{c}{R} B_{31} \approx \frac{13c\pi}{4R}.$$

C'est le mode illustré sur la figure 4.11b.

Dans cette configuration circulaire, il y a deux types de lignes nodales : les lignes nodales diamétrales et les lignes nodales azimutales. Un mode de vibration (pn) présente $p - 1$ lignes nodales diamétrales, lignes droites passant par le centre de la membrane, et n lignes nodales azimutales, cercles de rayon $B_{pn}R$ centrés sur le centre de la membrane.



Figure 4.11 Exemples de vibrations d'une membrane circulaire. **(a)** mode fondamental de vibration $n = 0, p = 1$; **(b)** exemple de mode $n = 1, p = 3$.

4.4 VIBRATION DES POUTRES

Les approximations faites dans le cas de la corde ou des membranes proviennent de la hiérarchie des échelles de longueur dans les différentes directions de l'espace. Une **poutre** est un objet allongé dont la plus petite dimension n'est pas négligeable par rapport à la plus grande. Si x est l'axe le long de la poutre, on va noter :

$$L_x > L_y, L_z.$$

La vibration des poutres est calculée avec l'hypothèse suivante : sous l'effet d'une charge ponctuelle ou d'une force répartie (la gravité par exemple), un élément de poutre va se déformer et on suppose que cette déformation reste suffisamment petite pour que la loi de Hooke reste valable.

4.4.1 Forme d'une poutre statique

Dans un premier temps, nous calculons la forme d'une poutre soumise à une force en volume répartie, la force de pesanteur. La forme d'une poutre se détermine à partir de deux équations de bilan sur un petit élément de poutre, de longueur infinitésimale dx : un équilibre des forces et un équilibre des moments.

L'équation différentielle qui détermine la forme d'une poutre est

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{S\rho g}{EI} = a. \quad (4.25)$$

La méthode détaillée pour obtenir cette équation est présentée dans l'**encart 4.7**. C'est une équation différentielle d'ordre 4, ce qui impose de connaître 4 conditions aux

limites pour déterminer explicitement la forme. Ces conditions aux limites sont choisies à partir des possibilités de fixation de la poutre : extrémité encastrée, libre ou simplement posée.

La relation (4.25) fait intervenir de nombreux paramètres : l'accélération de la gravité g , la section S , le module élastique E et enfin le moment d'inertie de la section I , défini ci-après.

Définition

Le **moment d'inertie quadratique** d'une surface S par rapport à un axe est défini par

$$I = \iint_S y^2 dS$$

où y est la distance à l'axe de rotation des points formant la surface S .

Un moment d'inertie quadratique a comme dimension \mathcal{L}^4 et se mesure en m^4 .

La **figure 4.12** montre quelques exemples de moments d'inertie pour des poutres de formes classiques : sections rectangulaire pleine, circulaire pleine, rectangulaire creuse et poutre en I .

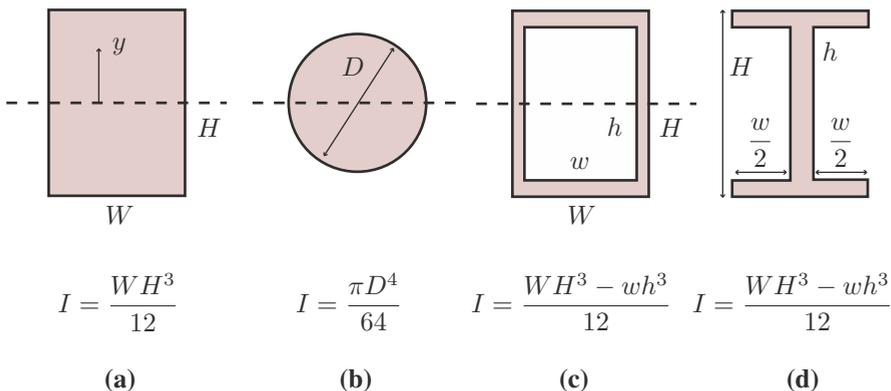


Figure 4.12 Exemples de géométries de poutre et du moment d'inertie correspondant.

(a) section rectangulaire pleine, (b) section circulaire pleine, (c) section rectangulaire creuse, (d) profil en I.

Après intégration de l'équation (4.25), la forme générale d'une poutre est

$$y(x) = \frac{a}{24}x^4 + \frac{K_1}{6}x^3 + \frac{K_2}{2}x^2 + K_3x + K_4$$

où les constantes K_1 , K_2 , K_3 et K_4 sont déterminées par les conditions aux limites de la poutre.



Encart 4.7 Équation de la surface neutre d'une poutre

L'équilibre de forces pour un élément de longueur dx (repéré par 2 sur la figure ci-après) s'écrit formellement

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_2 + \vec{F}_{3 \rightarrow 2} = 0.$$

La force \vec{F}_2 est ici le poids s'il n'y a pas de force supplémentaire. La force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est la réaction de la partie 1. C'est une force qui s'oppose à la descente de l'élément 2. C'est un **effort tranchant** que l'on note $-T$. La force $\vec{F}_{3 \rightarrow 2}$ au contraire fait descendre l'élément 2. On note $\|\vec{F}_{3 \rightarrow 2}\| = T(x + dx) \approx T + dT$. Le bilan des forces est donc :

$$-T + Sdx\rho g + (T + dT) = 0$$

soit

$$\frac{dT}{dx} = -S\rho g. \tag{4.26}$$

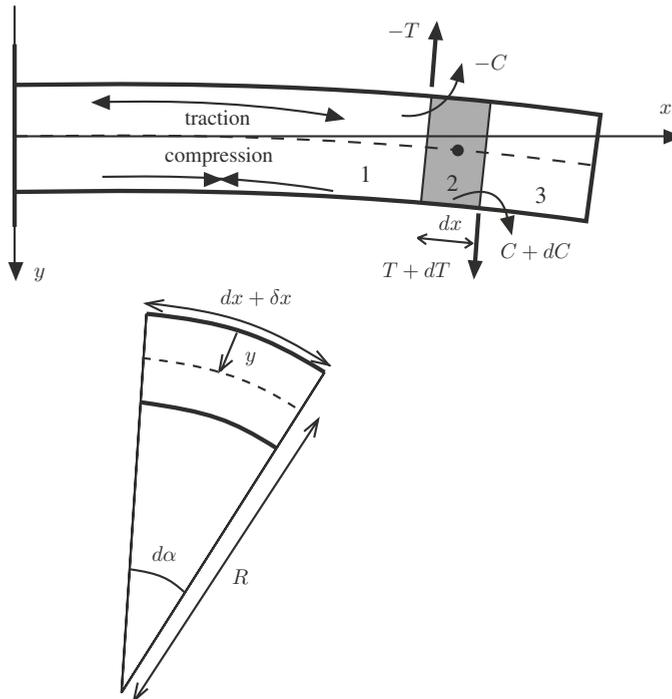


Schéma de la poutre mono-encastée. La surface neutre (pointillée) est la surface qui n'est ni étirée ni comprimée. Le point noir représente l'axe de rotation de l'élément de longueur dx .

L'équilibre des moments donne

$$-C + (C + dC) + T \frac{dx}{2} + (T + dT) \frac{dx}{2} = 0,$$

soit

$$\frac{dC}{dx} = -T, \quad (4.27)$$

ce qui donne

$$\frac{d^2C}{dx^2} = S\rho g. \quad (4.28)$$

Dans une telle situation, la partie supérieure de la poutre est étirée (traction), tandis que la partie inférieure est comprimée. Il existe donc entre les deux parties une surface qui n'est ni étirée, ni comprimée : la **surface neutre**. Elle sert de référence. L'étirement de la partie supérieure correspond à un allongement δx , relié à une contrainte élémentaire dF/dS par la loi de Hooke :

$$\frac{\delta x}{dx} = \frac{1}{E} \frac{dF}{dS},$$

où la constante E est le module élastique du matériau. Dans l'approximation où l'angle $d\alpha$ est faible, on peut écrire $\delta x/dx = -y/R$ et donc :

$$dF = -\frac{y}{R} E dS.$$

Le couple C se calcule par

$$-C = \iint_S y dF = -\frac{E}{R} \iint_S y^2 dS,$$

soit

$$C = \frac{E}{R} I = \frac{E}{R} \iint_S y^2 dS, \quad (4.29)$$

avec I le moment d'inertie, qui dépend de la forme de la section de la poutre. Le rayon de courbure R dépend de la cote x et se calcule par

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \approx \frac{d^2y}{dx^2}. \quad (4.30)$$

Finalement, la combinaison des équations (4.26)-(4.30) donne l'équation de la surface neutre :

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{S\rho g}{EI} = a.$$

4.4.2 Forme d'une poutre mono-encastree

On cherche la forme d'une poutre dont une extrémité est encastree dans un mur et l'autre extrémité est libre. Les conditions aux limites qui s'appliquent à l'équation (4.25) sont :

$$\begin{aligned} y &= 0 & \text{en } x = 0, \\ dy/dx &= 0 & \text{en } x = 0, \\ d^2y/dx^2 &= 0 & \text{en } x = L, \\ d^3y/dx^3 &= 0 & \text{en } x = L. \end{aligned}$$

La forme de la poutre est donc donnée par

$$y(x) = \frac{a}{2}x^2 \left(\frac{x^2}{12} - \frac{Lx}{3} + \frac{L^2}{2} \right) \quad (4.31)$$

et on peut calculer la **flèche**, déviation maximum par rapport à l'horizontale :

$$f = y(L) = \frac{aL^4}{8}.$$



Encart 4.8 Détermination du module élastique d'un matériau

La mesure directe du module élastique d'un matériau nécessite un matériel de précision car la déformation relative est en général très faible (de l'ordre de quelques $\mu\text{m/m}$). Mais grâce au calcul de la flèche d'une poutre encastree à une extrémité, il est facile de mesurer cette flèche et, connaissant les caractéristiques géométriques de la poutre, on peut obtenir

$$E = \frac{1}{8} \frac{S\rho g L^4}{If}.$$

4.4.3 Vibration de la poutre mono-encastree

Quand la poutre est en mouvement, on rajoute un terme d'accélération à l'équation statique (4.28), ce qui donne

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \rho S \left(g - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right). \quad (4.32)$$

En introduisant l'expression du couple C obtenue aux équations (4.29) et (4.30), on obtient l'équation de la poutre vibrante :

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - g \right) = 0. \quad (4.33)$$

Pour résoudre cette équation de mouvement, on choisit de poser une **hypothèse de vibration inertielle** :

$$g \ll \left| \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right|, \quad (4.34)$$

donc de négliger le rôle de la gravité. On réécrit l'équation (4.33) sous la forme

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{c_c^2 r_g^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (4.35)$$

avec $c_c = \sqrt{E/\rho}$, la vitesse des ondes de compression (voir § 4.1) et r_g le **rayon de giration**.

Définition

Le **rayon de giration** d'une poutre de section S et de moment d'inertie I est

$$r_g = \sqrt{\frac{I}{S}}. \quad (4.36)$$

Ce rayon correspond au rayon du disque qui a le même moment d'inertie I que la section de la poutre.

L'équation de la poutre vibrante (4.35) n'est pas une équation d'onde classique. La dérivée en espace est d'ordre 4 et correspond au carré de l'opérateur laplacien ; c'est la conséquence de la prise en compte de la rigidité de la poutre.

Pour une poutre « courte » (un plongeur par exemple), tous les points de la poutre vibrent en phase, seule l'amplitude du mouvement dépend de la position x par rapport au support. On va donc chercher des solutions du type

$$y(x, t) = A(x)e^{i\omega t},$$

et l'amplitude est décrite par l'équation

$$\frac{d^4 A}{dx^4} - \frac{\omega^2}{c_c^2 r_g^2} A = 0. \quad (4.37)$$

Cette équation admet des solutions caractéristiques de type $A_0 e^{mx}$, avec un exposant m tel que $m^4 = \omega^2 / (c_c^2 r_g^2)$. Il y a donc 4 solutions possibles, et la solution générale est

$$\begin{aligned} A(x) &= A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x} + A_3 e^{i\alpha x} + A_4 e^{-i\alpha x} \\ &= B_1 \cosh \alpha x + B_2 \sinh \alpha x + B_3 \cos \alpha x + B_4 \sin \alpha x, \end{aligned}$$

avec $\alpha = \sqrt{\omega/c_c r_g}$. Il faut maintenant déterminer les constantes $B_1 \dots B_4$ avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} A &= 0 \text{ en } x = 0, \\ dA/dx &= 0 \text{ en } x = 0, \\ d^2A/dx^2 &= 0 \text{ en } x = L, \\ d^3A/dx^3 &= 0 \text{ en } x = L, \end{aligned}$$

ce qui donne $B_1 = -B_3$ et $B_2 = -B_4$ et

$$\begin{pmatrix} \cosh \alpha L + \cos \alpha L & \sinh \alpha L + \sin \alpha L \\ \sinh \alpha L - \sin \alpha L & \cosh \alpha L + \cos \alpha L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Ce système admet des solutions si le déterminant de la matrice est nul, c'est-à-dire si

$$\psi(\alpha L) = \cosh \alpha L \cdot \cos \alpha L + 1 = 0. \tag{4.38}$$

Il n'y a pas de solution analytique à l'équation $\psi = 0$, on cherche donc des solutions numériquement ou par méthode graphique. La fonction ψ est tracée sur la **figure 4.13**. Le premier zéro de la fonction est tel que $\alpha_0 = 1,44\pi/2L$, ce qui donne une fréquence fondamentale de vibration

$$\omega_0 = \frac{1,44\pi^2}{4L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

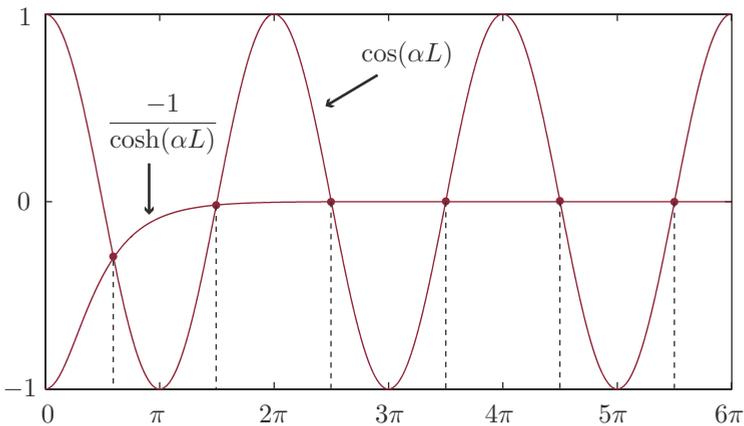


Figure 4.13 Tracé des fonctions $\psi(\alpha L) = \cosh \alpha L \cdot \cos \alpha L + 1$.

en fonction des paramètres mécaniques et dimensionnels de la poutre. Les zéros suivants sont, à une petite erreur près, $\alpha_{n \geq 1} = (2n + 1)\pi/2L$, ce qui donne des fréquences

$$\omega_{n \geq 1} = \frac{(2n + 1)^2 \pi^2}{4L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

La vibration de la poutre mono-encastree est equivalente à la vibration d'un ressort lame. Par analogie, on peut introduire une raideur de la poutre k_{poutre} en ecrivant

$$\omega_n = \beta_n \sqrt{\frac{EI}{\rho S L^4}} = \beta_n \sqrt{\frac{k_{poutre}}{M}},$$

où M est la masse de la poutre et la raideur de la poutre est

$$k_{poutre} = \frac{EI}{L^3}.$$

On voit ici que la raideur de la poutre depend du module d'elasticite, du moment d'inertie et de la longueur. Les coefficients β_n sont des nombres sans dimension qui dependent du mode de vibration considere.

Retour sur l'hypothese de vibration inertielle

Ces solutions ont ete obtenues avec l'hypothese (4.34). Le terme d'acceleration peut etre approxime par une amplitude de vibration proche de la fleche f de la poutre sous gravite :

$$\left| \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right| = \omega^2 A \approx f \omega^2$$

ce qui donne

$$\frac{g}{\left| \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right|} = \frac{g}{f \omega^2} = \frac{128}{(2n + 1)^4 \pi^4}.$$

Le **tableau 4.2** montre que l'hypothese de vibration inertielle n'est pas bien verifiee pour le mode fondamental. En revanche, cette hypothese est validee pour les modes $n \geq 1$.

Tableau 4.2 Rapport gravite/inertie pour la poutre vibrante.

Mode n	0	1	2	3
Rapport $g/(f \omega^2)$	0,64	0,02	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$



Encart 4.9 Le microscope à force atomique

Le microscope à force atomique (AFM, *Atomic Force Microscope* en anglais) est un instrument de mesure et d'analyse des surfaces avec une résolution proche de la taille d'un atome. Il n'utilise pas l'optique comme un microscope classique mais l'interaction entre la pointe d'une sonde et les atomes de la surface à visualiser. La pointe est fixée au bout d'une poutre et la fréquence de vibration de cette poutre (de l'ordre de 100 kHz) dépend de la force d'interaction et donc de la distance entre la pointe et la surface.

Avec un dispositif de balayage (déplacement sur deux axes) et un dispositif de rétroaction pour maintenir la sonde à distance constante de la surface, on peut cartographier la topographie de la surface à l'échelle atomique.

4.4.4 Ondes progressives d'une poutre

Si la poutre est suffisamment longue (c'est-à-dire $L_x \gg \sqrt{S}$), on peut chercher pour l'équation (4.35) des solutions en onde progressive du type

$$y = A e^{i(kx - \omega t)}.$$

La relation de dispersion est alors

$$\omega = c_c r_g k^2$$

et le système est dispersif : la vitesse de phase $v_\phi = c_c r_g k$ dépend de k .



Encart 4.10 Vibration des planchers

Lors de la conception d'un bâtiment, les fréquences de vibration des planchers doivent être estimées pour éviter les problèmes de résonance, par exemple avec une machine tournante ou tout simplement avec les pas des usagers. Les planchers étant en général posés sur des poutres de sections normalisées, on peut calculer les fréquences propres de vibration des poutres.

Le confort d'utilisation d'un plancher est défini par une limite d'accélération acceptable. Pour les fréquences inférieures à 10 Hz, une accélération de $0,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ est perceptible. Elle devient gênante au-delà de $0,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

SYNTHÈSE

Savoirs

- Les ondes de compression sont des ondes longitudinales, avec une vitesse $c_c = \sqrt{E/\rho}$.
- Les ondes transversales d'une corde se propagent à une vitesse $c_s = \sqrt{T/\rho_L}$.
- Les ondes transversales d'une membrane se propagent à une vitesse $c_m = \sqrt{T_L/\rho_S}$.
- L'existence de conditions aux limites pour la propagation des ondes introduit une sélection des fréquences possibles.

Savoir-faire

- Écrire l'équation d'onde à partir de l'équation de mouvement d'un élément infinitésimal du système mécanique.
- Déterminer les fréquences propres d'un système mécanique en vibration.
- Différencier une équation d'onde dispersive d'une équation non dispersive.

Mots-clés

- Vitesse de propagation
- Ondes longitudinales et transversales
- Amortissement, rigidité

Exercices

Tester ses connaissances

- 1 Une poutre déformée sous l'effet d'une charge est :
 - a. en compression.
 - b. en traction.
 - c. en compression et en traction.
- 2 Pour une membrane vibrante, deux modes dégénérés ont des fréquences :
 - a. commensurables.
 - b. incommensurables.
 - c. égales.

- 3 Pour une membrane rectangulaire en vibration avec un côté plus grand que l'autre, la fréquence fondamentale de vibration dépend :
- a. principalement de la longueur du petit côté.
 - b. principalement de la longueur du grand côté.
 - c. de la même façon des longueurs des côtés.

Exercices d'application

- 4 Calculer la vitesse de propagation des ondes transverses pour une corde de piano en acier, supposée non rigide et non amortie. La tension est de 900 N, et la corde a un diamètre de 3 mm.
- 5 Donner l'expression de la tension le long d'une corde verticale de longueur L attachée à son extrémité supérieure et soumise à la gravité.

Exercices d'approfondissement

6 Vibrations d'une corde réelle

On considère une corde réelle tendue entre deux points sans négliger ni la rigidité ni l'amortissement dû au fluide environnant. L'équation de mouvement d'un élément de corde de longueur dx et de poids dm est

$$dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx - C \eta \pi \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dx - K \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} dx.$$

- a. À partir de cette équation, déterminer la relation de dispersion.
- b. On considère ensuite des modes stationnaires de la forme

$$u(x, t) = A_0 \sin(kx) \exp(i\omega t),$$

- avec $k = n\pi/L$. La pulsation est complexe $\omega = \omega_r + i\omega_i$. Déterminer $\omega_r(k)$ et ω_i .
- c. Commenter l'effet de l'amortissement et de la rigidité sur la pulsation ω_r .

7 Mode fondamental de vibration d'une membrane triangulaire

À partir de l'observation des lignes nodales d'une membrane carrée en mode 2, calculer la fréquence fondamentale de vibration d'une membrane de forme triangulaire isocèle rectangle de côté a .

8 Vibration d'une poutre doublement encastree

En reprenant le raisonnement développé pour la poutre mono-encastree, déterminer les pulsations de vibration d'une poutre encastree aux deux extrémités.

9 Vibration d'une plaque mince

On considère une plaque mince rectangulaire de dimensions $L_x \times L_y \times L_z$. L'équation de l'élévation $z(x, y, t)$ est

$$\frac{EL_z^2}{12\rho(1-\nu^2)}\Delta^2 z + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0.$$

Dans cette équation, le laplacien est $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ et ν est le coefficient de Poisson du matériau. En choisissant une solution de la forme

$$z(x, y, t) = Z(x, y)e^{i\omega t},$$

déterminer les pulsations propres ω de la plaque mince en vibration.

Corrigés

Tester ses connaissances

	a.	b.	c.
1			X
2			X
3	X		

Exercices d'application

- 4 La corde a une masse linéique $\rho_L = 4\rho * (\pi D^2) = 0,056 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$, avec $\rho = 7900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

La vitesse des ondes transverse est donc $c_s = \sqrt{T_0/\rho_L} = 126,95 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- 5 La tension de la corde à la coordonnée z dépend de la longueur du morceau en dessous. Le point d'attache supporte tout le poids de la corde, la tension est donc $T(z = 0) = \rho_L g L$. L'autre extrémité est libre, la tension est donc $T(z = L) = 0$ et la tension décroît linéairement : $T(z) = \rho_L g(L - z)$.

Exercices d'approfondissement

6 Vibrations d'une corde réelle

- a. En utilisant le formalisme des ondes monochromatiques, les opérateurs différentiels qui apparaissent dans l'équation de mouvement peuvent être interprétés par

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Leftrightarrow -k^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Leftrightarrow -\omega^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^4} \Leftrightarrow k^4, \quad \frac{\partial}{\partial t} \Leftrightarrow i\omega.$$

La relation de dispersion est donc

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - i\alpha\omega - \beta k^4 = 0.$$

- b. Comme la pulsation est une quantité complexe et le nombre d'onde réel, la relation de dispersion $\mathcal{D} = 0$ se décompose en deux équations $\text{Re}(\mathcal{D}) = 0$ et $\text{Im}(\mathcal{D}) = 0$, soit

$$\begin{aligned} -k^2 + \frac{1}{c^2}(\omega_r^2 - \omega_i^2) + \alpha\omega_i - \beta k^4 &= 0, \\ \frac{2}{c^2}\omega_r\omega_i - \alpha\omega_r &= 0. \end{aligned}$$

La deuxième équation donne la partie imaginaire de la pulsation : $\omega_i = \alpha c^2/2$. En combinant ce résultat avec la première équation, on trouve :

$$\omega_r = kc \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 c^2}{4k^2} + \beta k^2}.$$

- c. On peut remarquer que l'amortissement ($\alpha \neq 0$) diminue la fréquence de vibration de la corde. C'est le même résultat que celui obtenu pour l'oscillateur amorti. De plus on voit que la rigidité ($\beta \neq 0$) augmente la fréquence de vibration de la corde.

7 Mode fondamental de vibration d'une membrane triangulaire

Les modes (12) et (21) d'une membrane carrée de côté a sont dégénérés car ils sont associés à la même pulsation :

$$\omega_{12} = \omega_{21} = \frac{c\pi}{a} \sqrt{5}.$$

La superposition de ces deux modes montre une ligne nodale qui est la diagonale du carré. Comme la ligne nodale est une ligne d'élévation nulle, cette ligne peut être assimilée à une frontière rigide d'un domaine triangulaire isocèle rectangle. Ce domaine ne comporte pas de ligne nodale, ce qui correspond à son mode fondamental de vibration. La fréquence fondamentale du triangle est donc égale à la fréquence du mode (21) du carré :

$$\min\{\omega_{\text{triangle}}\} = \omega_{12(\text{carré})} = \frac{c\pi}{a} \sqrt{5}.$$

8 Vibration d'une poutre doublement encastrée

L'amplitude de vibration d'une poutre est donnée par la forme générale

$$A(x) = B_1 \cosh \alpha x + B_2 \sinh \alpha x + B_3 \cos \alpha x + B_4 \sin \alpha x,$$

avec cette fois les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} A &= 0 \quad \text{en } x = 0 \quad \text{et } x = L, \\ dA/dx &= 0 \quad \text{en } x = 0 \quad \text{et } x = L. \end{aligned}$$

ce qui donne $B_1 = -B_3$ et $B_2 = -B_4$ et

$$\begin{pmatrix} \cosh \alpha L - \cos \alpha L & \sinh \alpha L - \sin \alpha L \\ \sinh \alpha L + \sin \alpha L & \cosh \alpha L - \cos \alpha L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Le système admet des solutions si le déterminant de la matrice est nul, c'est-à-dire si $\cosh \alpha L \cdot \cos \alpha L = 1$. En utilisant la **figure 4.13** et en traçant la courbe $1/\cosh(\alpha L)$ au lieu de $-1/\cosh(\alpha L)$, on voit que la première intersection a lieu pour $\alpha L \approx 3\pi/2$, puis la deuxième à $5\pi/2$, etc. Les pulsations de vibration de la poutre encastrée aux deux extrémités sont donc

$$\omega_{n \geq 0} = \frac{(2n + 3)^2 \pi^2}{4L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}.$$

9 Vibration d'une plaque mince

C'est un problème analogue au problème de la membrane vibrante rectangulaire. Le choix de la solution monochromatique donne une équation pour l'amplitude $Z(x, y)$ de la forme

$$\frac{EL_z^2}{12\rho(1-\nu^2)}\Delta^2 Z - \omega^2 Z = 0.$$

En choisissant, comme pour la membrane, une décomposition de la fonction Z comme une somme de termes

$$Z(x, y) = \sum_{m,n} Z_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right),$$

l'opérateur Δ^2 est :

$$\Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2\right]^2,$$

ce qui donne des pulsations propres :

$$\omega_{mn} = \pi^2 \sqrt{\frac{EL_z^2}{12\rho(1-\nu^2)}} \left[\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2\right].$$

Ondes dans les fluides : l'acoustique

5

Plan

Cours

- 5.1 Introduction sur les fluides
- 5.2 Équations de base
- 5.3 Hypothèses de l'acoustique linéaire
- 5.4 Linéarisation des équations de base
- 5.5 Équation d'onde acoustique
- 5.6 Vitesse du son
- 5.7 Ondes dans les tuyaux
- 5.8 Intensité et niveau acoustique
- 5.9 Vérification des hypothèses
- 5.10 Acoustique musicale

Synthèse

Exercices

Corrigés

Objectifs

- Établir l'équation d'onde acoustique
- Aborder la technique de linéarisation d'équations non linéaires
- Comprendre et calculer la vitesse de propagation du son
- Aborder quelques notions sur l'acoustique musicale

Cours

L'acoustique est la science des ondes sonores dont nous pouvons percevoir une partie avec nos oreilles. La physique des ondes sonores ne se limite pas à la propagation du son dans l'air car on peut, avec les mêmes équations, décrire les ondes sonores dans tous les fluides, liquides ou gaz. Malgré la complexité de la description des fluides en mouvement, l'équation d'onde acoustique est la plus simple qui soit, tant que les variations de pression sont petites par rapport à la pression atmosphérique. La vitesse de propagation des fluctuations de pression, la vitesse du son, peut être calculée à partir de deux paramètres du fluide : sa masse volumique et sa compressibilité.

5.1 INTRODUCTION SUR LES FLUIDES

La matière est classiquement divisée en trois états : l'état solide, l'état liquide et l'état gazeux. Les deux derniers états sont regroupés sous le nom de **fluide**. À la différence d'un solide, un fluide ne peut conserver une forme propre : par exemple un volume d'eau va adopter la forme du récipient et un gaz va occuper tout le volume disponible. Les composants des fluides, atomes ou molécules, n'ont pas de positions fixes et changent constamment de voisins.

Comme tout milieu matériel, un gaz ou un liquide peut être soumis à des vibrations. La vibration d'un fluide est directement contrôlée par deux paramètres : sa masse volumique (la quantité de matière par unité de volume) et sa capacité à être comprimé : la compressibilité. La compressibilité d'un gaz est très grande car les composants (atomes ou molécules) du gaz sont très éloignés les uns des autres. En revanche, il est beaucoup plus difficile de comprimer un liquide, car les composants sont déjà très proches les uns des autres, chaque composant étant entouré de nombreux voisins.



Encart 5.1 Gaz et liquide : deux états désordonnés de la matière

Les atomes ou molécules qui composent les fluides sont en mouvement constant et interagissent par chocs, interactions électrostatiques ou stériques.

À partir de la loi des gaz parfaits, on peut montrer qu'une mole de gaz (soit $6,022 \cdot 10^{23}$ atomes ou molécules) occupe un volume de 22,4 litres. Chaque molécule occupe donc un volume de l'ordre de 10^{-26} m^3 et la distance interatomique est proche de 3,33 nm, appelée longueur de Loschmidt.

En phase liquide, les masses volumiques sont environ 1 000 fois plus élevées. La distance intermoléculaire est donc réduite d'un facteur 10. Cette distance est de l'ordre de quelques angströms, donc de la taille d'une molécule. On peut donc imaginer les molécules d'un liquide comme des proches voisines.

Dans ce chapitre, on décrit un fluide comme un milieu continu, c'est-à-dire qu'on peut définir en tout point de l'espace des quantités telles que la vitesse, la pression, la masse volumique et la température. La **figure 5.1** montre comment on peut passer d'une description discrète (où l'on identifie les atomes et molécules) à une description continue, avec des variables dépendantes des coordonnées d'espace. En choisissant un volume de contrôle (représenté par un carré sur la figure), on peut calculer la moyenne de nombreuses quantités dans ce volume de contrôle : la moyenne des vitesses des atomes, la masse de matière contenue, etc. Ces quantités moyennes sont des fonctions qui dépendent de la position dans l'espace, position du centre du volume de contrôle.

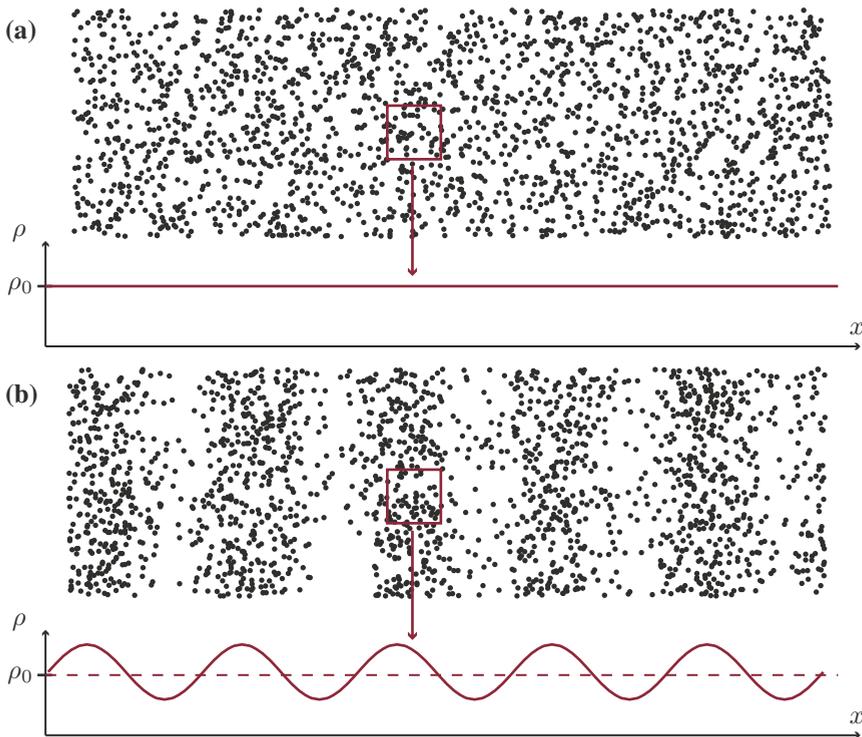


Figure 5.1 Fluide au repos et soumis à une onde de compression. À l'équilibre **(a)**, les molécules du fluide sont réparties aléatoirement dans tout le volume disponible, et la masse volumique $\rho(x) = \rho_0$ est homogène. Lors du passage d'une onde **(b)**, il se crée des zones de forte densité et des zones de faible densité.

5.2 ÉQUATIONS DE BASE

La description des ondes acoustiques dérive de la description des fluides en mouvement. La description complète d'une fluide est donnée par un ensemble de trois équations : deux équations de conservation (de la masse et de la quantité de mouvement) et une équation thermodynamique. Le comportement d'un fluide en mouvement est décrit par un ensemble de 3 variables : un champ de vecteur vitesse, un champ de pression et un champ de masse volumique. Dans un espace à 3 dimensions, le vecteur vitesse a trois composantes, ce qui donne un total de 5 fonctions à prendre en compte :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}, t) \\ v_y(\vec{r}, t) \\ v_z(\vec{r}, t) \end{pmatrix}, \quad \rho(\vec{r}, t), \quad p(\vec{r}, t).$$

La première équation de base est **l'équation de conservation de la masse**. Cette équation relie la variation de la masse volumique locale à la variation de matière

contenue dans un volume de contrôle autour du point considéré :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0. \quad (5.1)$$

Quand la masse volumique diminue ($\partial \rho / \partial t < 0$), c'est que les molécules de fluide quittent le volume considéré sans être remplacées. En se limitant à une dimension d'espace, l'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v_x) = 0. \quad (5.2)$$

La deuxième équation de base est **l'équation de conservation de la quantité de mouvement**. C'est une forme locale de la loi de Newton appliquée à un petit volume de fluide.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{g}. \quad (5.3)$$

Ici les deux forces prises en compte sont la force de pression (le terme en $\operatorname{grad} p$) et la force de gravité. Comme pour la relation précédente, on se limite à un système à une dimension. La conservation de la quantité de mouvement est alors

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (5.4)$$

Enfin la troisième équation est une **relation thermodynamique** qui relie la pression à la masse volumique :

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{\rho \chi}. \quad (5.5)$$

Le coefficient χ est la **compressibilité** adiabatique, c'est-à-dire que l'on s'intéresse à des variations de pression et de masse volumique mais sans changement de température.

Ces trois équations de base (5.2), (5.4) et (5.5) sont non linéaires et montrent des couplages entre la vitesse locale, la masse volumique locale et la pression locale. Par exemple le terme $v_x \cdot \partial v_x / \partial x$ est un terme quadratique en vitesse. Autre exemple, le terme $\rho \cdot v_x$ de la conservation de la masse est également un terme non linéaire car c'est un produit de deux variables indépendantes.

5.3 HYPOTHÈSES DE L'ACOUSTIQUE LINÉAIRE

Comme pour les oscillateurs, il faut définir un état d'équilibre. Pour un fluide, il s'agit d'un état de repos, avec une pression et une masse volumique **homogènes**, c'est-à-dire égales en tout point de l'espace. Par exemple, pour de l'air à température ambiante, on considère une masse volumique $\rho_0 = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et une pression $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

La théorie de l'acoustique linéaire repose sur trois hypothèses :

- première hypothèse : la fluctuation de pression induite par une onde acoustique est négligeable par rapport à la pression du fluide au repos ;
- deuxième hypothèse : la fluctuation de masse volumique induite par une onde acoustique est négligeable par rapport à la masse volumique du fluide au repos ;
- troisième hypothèse : la fluctuation de vitesse du fluide est petite.

ans la suite, on va noter avec un indice 1 les quantités variables et un indice 0 les quantités reliées à l'état d'équilibre. Pour chaque paramètre physique, on va supposer que l'influence d'une onde modifie légèrement l'état de base et on le formalise de la façon suivante :

	État d'équilibre	État perturbé
pression	p_0	$p = p_0 + \psi p_1(x, t)$
masse volumique	ρ_0	$\rho = \rho_0 + \psi \rho_1(x, t)$
vitesse	$v_0 = 0$	$v = \psi v_1(x, t)$

Dans cette notation, on a introduit un petit paramètre sans dimension $\psi \ll 1$ qui indique qu'il s'agit d'une petite perturbation par rapport à l'état d'équilibre. Les perturbations p_1 , ρ_1 et v_1 sont des fonctions de l'espace et du temps.

5.4 LINÉARISATION DES ÉQUATIONS DE BASE

Pour rendre les équations de base linéaires, on considère que le système s'écarte faiblement de l'état d'équilibre. La **méthode des perturbations** consiste à introduire les développements avec le petit paramètre ψ dans les équations de base, puis à développer les équations comme des polynômes du paramètre numérique ψ .

Pour l'équation de conservation de la masse (5.2), cela donne :

$$\underbrace{\psi^0 \left[\frac{\partial \rho_0}{\partial t} \right]}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{\psi \left[\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right]}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\psi^2 \left[\rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right]}_{\text{ordre 2}} = 0.$$

Le terme d'ordre 0 est nul car la masse volumique dans l'état de base ρ_0 ne dépend pas du temps, sa dérivée par rapport à t est donc nulle. Comme le paramètre ψ est petit, son carré est encore plus petit, la linéarisation consiste donc à négliger les termes en ψ^2 . Avec cette hypothèse, l'équation de conservation de la masse se réduit à :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0. \quad (5.6)$$

La même méthode appliquée à la conservation de la quantité de mouvement et à la relation thermodynamique donne

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0, \quad (5.7)$$

$$\chi \rho_0 p_1 = \rho_1. \quad (5.8)$$

Les trois équations (5.6), (5.7) et (5.8) remplacent donc les équations (5.2), (5.4) et (5.5) et sont maintenant linéaires.

5.5 ÉQUATION D'ONDE ACOUSTIQUE

En injectant la relation (5.8) dans la relation (5.6), on obtient

$$\chi\rho_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (5.9)$$

qui avec (5.7) forme un système de deux équations pour les variables p_1 et v_1 . Enfin, en dérivant la relation (5.9) par rapport au temps et en dérivant la relation (5.7) par rapport à la variable d'espace x , on a

$$\chi\rho_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} + \rho_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = 0, \quad (5.10)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0. \quad (5.11)$$

La différence entre ces deux dernières relations permet d'éliminer le terme en vitesse pour n'obtenir qu'une relation pour la perturbation de pression p_1 qui s'écrit sous la forme d'une équation d'onde

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0, \quad (5.12)$$

avec une vitesse de propagation

$$c_a = \sqrt{\frac{1}{\chi\rho_0}}. \quad (5.13)$$

On doit remarquer ici la forte analogie entre cette vitesse de propagation et celle obtenue pour un solide élastique (équation d'onde 4.2, chapitre 4). En effet, le coefficient de compressibilité n'est rien d'autre que l'inverse du module élastique E :

$$\chi = \frac{1}{E}.$$

La linéarisation des équations de la mécanique des fluides permet donc d'établir la loi de propagation des ondes de compression dans un fluide, dans la limite des petites déformations où on considère le fluide comme élastique. Toutefois, il faut garder à l'esprit la différence fondamentale entre la compression d'un solide et celle d'un fluide : lors d'une déformation élastique d'un solide, les atomes proches voisins sont les mêmes au cours de la déformation, alors que dans le volume de contrôle d'un fluide, les atomes voisins changent.

5.6 VITESSE DU SON

La vitesse de propagation des ondes acoustiques ne dépend que de deux paramètres physiques : la masse volumique et la compressibilité du fluide à l'équilibre. Dans l'eau, la masse volumique est $\rho_0 = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et la compressibilité $\chi = 4,6 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$, ce qui donne une vitesse du son d'environ $1\,500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Dans l'air, la vitesse du son est proche de $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Quand la température change, les fluides se dilatent et la masse volumique moyenne diminue, ce qui induit une augmentation de la vitesse du son. Avec la loi des gaz parfaits écrite sous la forme

$$\frac{p}{\rho} = \hat{r}\Theta = \frac{\hat{R}}{\hat{M}}\Theta,$$

où $\hat{R} = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits, et \hat{M} la masse molaire du gaz, on trouve que la vitesse du son augmente comme la racine carrée de la température. En pratique, pour de l'air, on peut utiliser la corrélation $c_a = 331,5 + 0,6(\Theta - 273,15) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ avec Θ la température en kelvins.

Pour l'eau, une corrélation utile est

$$c_a = 1\,449,2 + 4,6(\Theta - 273,15) - 0,055(\Theta - 273,15)^2,$$

vitesse calculée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, et la propagation du son dans l'eau de mer est influencée par la température mais aussi par la salinité.



Encart 5.2 Histoires de la mesure de la vitesse du son

On doit à Isaac Newton (1643–1727) une célèbre expérience de la mesure de la vitesse du son. Dans un des halls du Trinity College de l'université de Cambridge, Newton frappait dans ses mains à un rythme régulier et se déplaçait face à un mur assez lointain jusqu'à ce que l'écho du claquement de ses mains coïncide parfaitement avec le claquement suivant.

En France, après des premières expériences par l'Académie des sciences en 1738, Arago dirigea en 1822 une commission pour mesurer la vitesse du son dans l'air. On effectua des expériences entre deux villes voisines : Montlhéry et Villejuif situées au sud de Paris et distantes l'une de l'autre de 18,6 km. On mesura l'intervalle de temps entre le moment où apparaissait la lueur produite, à la bouche d'un canon par l'inflammation de la poudre, et le moment où on percevait le son auditivement. Le temps mis par la lumière à franchir la distance est négligeable, une onde lumineuse faisant 7,5 fois le tour de la Terre en une seconde. La moyenne de plusieurs expériences donna une vitesse mesurée de $332 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Un expérience similaire fut effectuée sous l'eau avec le son d'une cloche. En 1826, Colladon et Sturm mesurèrent une vitesse de $1\,435\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans l'eau du lac de Genève.

Quand le milieu est formé d'un mélange de deux phases, la vitesse du son est plus complexe à décrire. Néanmoins, pour un mélange de deux phases dont on connaît les proportions (un mélange **diphasique**), on peut faire le calcul suivant : si on note Φ_1 et Φ_2 les proportions en volume de chaque phase, la masse volumique du mélange est

$$\rho_m = \Phi_1\rho_1 + \Phi_2\rho_2,$$

et la compressibilité du mélange est

$$\chi_m = \Phi_1\chi_1 + \Phi_2\chi_2.$$

Si le milieu n'est constitué que de deux phases, le volume est occupé soit par la phase 1 soit par la phase 2. On a donc $\Phi_2 = 1 - \Phi_1$. De ce fait, la vitesse de propagation du son dans un mélange diphasique est

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{\sqrt{\chi_m\rho_m}} \\ &= [(\Phi_1\chi_1 + (1 - \Phi_1)\chi_2)(\Phi_1\rho_1 + (1 - \Phi_1)\rho_2)]^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

et cette vitesse est fonction de la fraction volumique Φ_1 . C'est une fonction non monotone (figure 5.2) qui comporte un minimum. La même vitesse peut donc être obtenue pour deux mélanges différents.

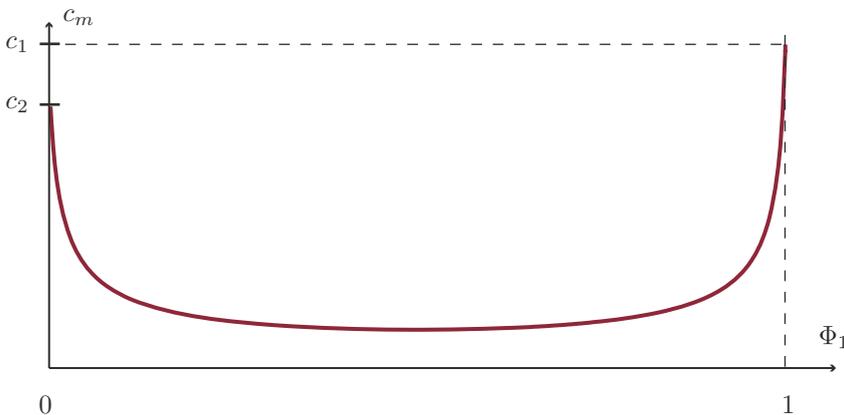


Figure 5.2 Vitesse de propagation du son d'un mélange de deux phases en fonction de la fraction volumique Φ_1 de la phase (1).



Encart 5.3 Le sonar et l'échographie médicale

La détection des fonds sous-marins, des sous-marins, des bancs de poissons utilise la propagation et la réflexion des ondes ultrasonores. L'appareil appelé **sonar** a été inventé au tout début du XX^e siècle d'abord pour détecter les icebergs par Lewis Nixon en 1906, puis véritablement mis en œuvre et breveté par Paul Langevin à partir de 1915. Langevin a, en particulier, tiré bénéfice des travaux sur la piézoélectricité du quartz pour concevoir des émetteurs et des récepteurs ultrasonores.

Les ultrasons sont également à la base de l'**échographie médicale** utilisée pour l'imagerie de certains organes. L'utilisation en imagerie médicale date de l'association d'un médecin et d'un électronicien britanniques en 1951. Suivant les organes à observer et leur proximité de la surface du corps, les appareils d'échographie utilisent des ondes de fréquences comprises entre 1,5 et 10 MHz.



Échographie d'un fœtus à 3 mois.

À forte puissance, les ultrasons sont également utilisés pour la destruction de tumeurs ou de calculs rénaux de faible taille, sous réserve d'une bonne focalisation du faisceau ultrasonore.

5.7 ONDES DANS LES TUYAUX

La propagation d'une onde sonore dans un tuyau permet de canaliser l'énergie acoustique et de se placer dans un système à une dimension. On a vu au chapitre 3 que la solution générale de l'équation d'onde simple peut être représentée par une somme d'ondes monochromatiques progressives ou régressives. Le spectre des fréquences possibles dépend de la source d'onde acoustique, mais aussi des conditions aux limites du système s'il n'est pas infini.

Prenons le cas d'un tuyau rectiligne de longueur L **ouvert aux deux extrémités**. Les deux extrémités $x = 0$ et $x = L$ sont en contact avec un grand volume d'air à pression constante p_0 , la pression atmosphérique. La pression dans le tuyau est donc de la forme

$$p(x, t) = p_0 + P(x)e^{i\omega t},$$

et la perturbation $p_1 = p - p_0$ doit vérifier l'équation d'onde (5.12). L'amplitude de l'onde acoustique $P(x)$ est reliée à la pulsation par

$$\frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c_a^2} P = 0,$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$P(0) = 0 \quad \text{et} \quad P(L) = 0.$$

La solution générale pour l'amplitude est

$$P(x) = P_\alpha \cos(kx) + P_\beta \sin(kx), \quad k = \omega/c_a,$$

et la vérification des conditions aux limites impose

$$P_\alpha = 0, \quad P_\beta \neq 0, \quad kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et la pression dans le tube ouvert prend la forme

$$p(x, t) = p_0 + P_\beta \sin\left(n \frac{c_a}{2L} x\right) e^{i\omega t}.$$

En injectant cette solution dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement linéarisée (5.7), on trouve que la vitesse locale du fluide est modulée spatialement par une fonction $\cos(nc_a x/2L)$. À chaque nœud de pression correspond un ventre de vitesse et inversement. Le spectre des fréquences du tube ouvert aux deux extrémités est un spectre simple avec la présence d'harmoniques :

$$\nu_n = n\nu_1 = n \frac{c_a}{2L}.$$

La fréquence fondamentale correspond à une longueur d'onde égale à deux fois la longueur du tube.

En présence d'une paroi rigide et indéformable, le fluide ne peut se déplacer ; il existe donc une condition de vitesse nulle à la paroi qui correspond à une condition de pression maximale. Pour un tuyau **fermé aux deux extrémités**, on a donc des conditions aux limites sur la vitesse du type :

$$v_1(0, t) = 0, \quad v_1(L, t) = 0,$$

et ces nœuds de vitesse correspondent à des ventres de pression, en vertu de l'équation (5.7). À ce déphasage près, le spectre des fréquences acoustiques dans le tube fermé aux deux extrémités est identique au spectre du tube ouvert.

La situation est différente quand le tuyau est **ouvert à une extrémité et fermé à l'autre**. Dans ce cas, les conditions limites pour la pression sont d'avoir un nœud

à une extrémité et un ventre à l'autre extrémité. La distance d'un nœud à un ventre étant égale à un quart de longueur d'onde ($\lambda/4$) au minimum, ou égal à un nombre impair de fois $\lambda/4$, on a :

$$L = (2n - 1) \frac{\lambda}{4},$$

soit des fréquences

$$\nu_n = (2n - 1) \frac{c}{4L}.$$

Le spectre acoustique comprend une fréquence fondamentale $\nu_1 = c/4L$ et des harmoniques impaires $\nu_n = (2n - 1)\nu_1$.

5.8 INTENSITÉ ET NIVEAU ACOUSTIQUE

L'**audition** est évidemment l'application première de l'acoustique. L'oreille humaine est sensible sur une gamme de fréquences comprise entre 20 Hz et 20 kHz. Au-delà de 20 kHz, on parle des **ultrasons**, et en dessous de 20 Hz, on parle **d'infrasons**. Nous percevons des sons plus ou moins forts, plus ou moins intenses.

Définitions

- L'**intensité acoustique** est définie par

$$I = \frac{1}{T} \left| \int_0^T \frac{p_1^2}{\rho_0 c} dt \right| \quad (5.15)$$

et a comme unité le $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

- De façon conventionnelle, le **niveau acoustique** est exprimé en décibels :

$$L_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

avec une intensité de référence $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$, intensité minimale détectée par l'oreille.

L'intensité acoustique est donc la moyenne temporelle du carré des fluctuations de pression. La moyenne est calculée sur un temps arbitraire T , mais il est commode de choisir la période d'une onde monochromatique. Pour une onde monochromatique progressive de type $p_1(x, t) = P_0 \sin(kx - \omega t)$, l'intensité acoustique est

$$I = \frac{1}{2} \frac{P_0^2}{\rho_0 c}.$$

Pour une onde sphérique dont la fluctuation de pression est $p_1 = \frac{P_0}{r} \sin(kr - \omega t)$, l'intensité acoustique est

$$I = \frac{1}{2r^2} \frac{P_0^2}{\rho_0 c}.$$

ce qui illustre la décroissance en r^{-2} de l'intensité acoustique d'une onde provenant d'une source ponctuelle.



Encart 5.4 Le décibel

Le décibel (dB) est une unité qui traduit le rapport entre deux intensités. Son nom est un hommage à un pionnier des télécommunications, A. Graham Bell (1847–1922). En acoustique, le niveau de référence est $I_0 = 10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$, et les niveaux standard d'intensité acoustique vont de 0 à 180 dB, avec un seuil de douleur à 120 dB. On donne quelques exemples de niveaux acoustiques :

Niveau acoustique	Bruit ou son
0 dB	seuil d'audibilité
20 à 30 dB	conversation à voix basse
60 à 70 dB	conversation à voix haute, téléphone, téléviseur
90 à 100 dB	circulation routière
100 à 110 dB	marteau-piqueur, discothèque, concert de rock
120 à 130 dB	avion au décollage (à 500 m)
180 dB	décollage de fusée



Encart 5.5 La nouvelle réglementation acoustique

La nouvelle réglementation acoustique (NRA) appliquée à la construction des bâtiments est un ensemble de normes d'isolation acoustiques des murs, des planchers, etc. Par exemple, cette réglementation impose que le bruit extérieur à un immeuble d'habitation soit atténué d'au moins 30 dB par les murs extérieurs. Un autre exemple concerne les bruits d'impact sur un plancher (marche, chute d'objets) : cette réglementation impose une atténuation de 58 dB entre deux pièces séparées par un plancher ou par une cloison.

5.9 VÉRIFICATION DES HYPOTHÈSES

Rappelons que l'obtention de l'équation d'onde (5.12) a été possible grâce à des hypothèses de faibles fluctuations de pression, vitesse et masse volumique.

On peut calculer que l'intensité minimale correspond à une fluctuation de pression $\psi p_1 = \sqrt{2\rho_0 c I_0} \approx 30 \mu\text{Pa}$, une valeur très faible devant la pression atmosphérique ($p_0 = 10^5 \text{ Pa}$). L'intensité maximale admise par l'oreille est de 130 dB, soit $10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Cette intensité correspond à une fluctuation de pression $p_1 \approx 94 \text{ Pa}$. On peut donc dans ce domaine vérifier l'hypothèse $\psi p_1 \ll p_0$ utilisée pour linéariser les équations.

L'ordre de grandeur des fluctuations de masse volumique est obtenu directement par la relation thermodynamique linéarisée (5.8). Les deux valeurs limites calculées pour les limites de l'audition sont données dans le tableau 5.1 et montrent que la fluctuation $\psi\rho_1$ est bien négligeable devant la masse volumique de l'air au repos.

La vitesse de déplacement de l'air au passage d'une onde sonore est estimée à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement linéarisée (5.7). En choisissant une fluctuation de pression de la forme $p_1 = P_0 \cos(kx - \omega t)$, on a

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{k P_0}{\rho_0} \sin(kx - \omega t),$$

et après intégration par rapport au temps, on trouve

$$|v_1| = \frac{P_0}{\rho_0 c_a} = \sqrt{\frac{2I}{\rho_0 c_a}}.$$

Les valeurs de la fluctuation de vitesse correspondant aux limites de l'audition sont données dans le **tableau 5.1** mais sont difficilement comparables à la valeur de référence de la vitesse du fluide au repos qui vaut zéro ! Toutefois, il existe une référence de vitesse : la vitesse de propagation du son c . L'hypothèse de faible fluctuation de vitesse peut donc être maintenant établie comme $v_1 \ll c$, et les valeurs calculées montrent que cette hypothèse est bien vérifiée dans le domaine auditif.

Cette hypothèse sur la vitesse du fluide est souvent exprimée sous la forme d'un nombre sans dimension, le nombre de Mach.

Définition

Le **nombre de Mach** est le rapport entre la vitesse de l'écoulement v et la vitesse des ondes de compression dans le fluide c :

$$M = \frac{v}{c}.$$

Ce nombre est très petit devant l'unité dans le domaine de l'acoustique linéaire. Quand le nombre de Mach devient de l'ordre de 1 ou même supérieur à un, les équations linéarisées (5.6), (5.7) et (5.8) ne sont plus valables. Les écoulements correspondants sont appelés **supersoniques** et un autre type d'onde apparaît : les ondes de choc.

Tableau 5.1 Valeurs des variables acoustiques calculées pour deux niveaux acoustiques de référence.

Niveau acoustique (dB)	0	130
Intensité ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$)	10^{-12}	10
Fluctuation de pression ψp_1 (Pa)	$3 \cdot 10^{-5}$	94
Fluctuation de masse volumique $\psi \rho_1$ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	$2,5 \cdot 10^{-10}$	$8 \cdot 10^{-4}$
Fluctuation de vitesse ψv_1 ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	$7 \cdot 10^{-8}$	0,2

5.10 ACOUSTIQUE MUSICALE

Les sons musicaux sont générés par différents types d'instruments, mais tous reposent sur un principe général : la création d'une ou plusieurs fréquences de vibration et la mise en résonance de cette vibration avec un volume d'air pour amplifier le son.

Les sons musicaux tels que nous les connaissons sont en général très complexes. Un son est composé de multiples fréquences et la façon dont ces fréquences apparaissent ou s'atténuent est caractéristique d'un son. Ainsi, même si plusieurs instruments de musique jouent la même note, on peut les distinguer car ils n'ont pas le même timbre. Le **timbre** rassemble plusieurs caractéristiques d'un son : la variation temporelle de son amplitude (l'enveloppe) et la composition en fréquence, le spectre. De plus, toutes les fréquences n'ont pas la même enveloppe, ce qui donne une grande richesse aux sons musicaux.

Les sons musicaux ne sont pas strictement périodiques, car un son est défini par un début et une fin. La période temporelle d'un son n'est donc pas définie mathématiquement avec la définition proposée au chapitre 1. Pour illustrer ceci, la **figure 5.3** montre le signal acoustique produit par un piano dont une seule touche est actionnée.

La fréquence fondamentale d'un son musical définit la note. Les sons graves sont les sons de basse fréquence et les sons aigus sont les sons de haute fréquence. Quand on entend deux sons différents, on peut définir un intervalle qui correspond au rapport entre les fréquences de ces deux sons. Dans la musique occidentale, les notes sont classées sous la forme d'une **gamme** (appelée gamme chromatique) découpée en 12 notes. Le clavier du piano (**figure 5.4**) représente toutes ces notes qui se reproduisent sur plusieurs octaves. Une octave est un intervalle musical qui représente un doublement de la fréquence fondamentale. Pour la gamme chromatique parfaitement divisée (on parle de tempérament égal), une octave est divisée en 12 demi-tons. Un demi-ton est le plus petit intervalle de cette gamme, avec un rapport de fréquence

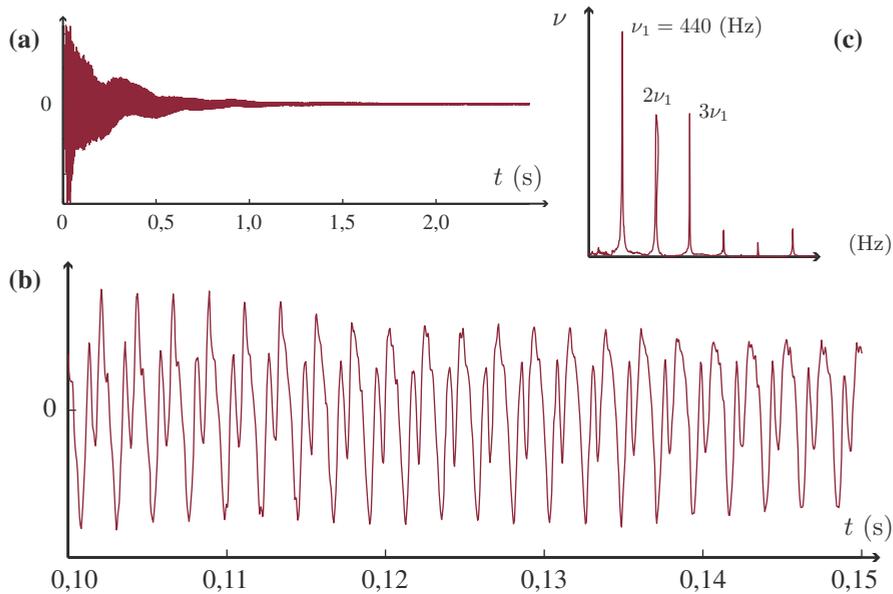


Figure 5.3 Signal acoustique produit par la note la ($\nu_0 = 440$ Hz) d'un piano. (a) Enveloppe du signal jusqu'à l'extinction du son. (b) Le signal acoustique montre un caractère presque périodique. (c) La décomposition de Fourier du signal montre l'importance des harmoniques $2\nu_0$ et $3\nu_0$ dans le timbre du piano.

égal à $2^{1/12}$. Cela correspond, au piano, au passage d'une touche à une touche immédiatement voisine. Comme tous les intervalles sont définis comme des rapports entre deux fréquences, il faut choisir une fréquence de référence. De nos jours, le **diapason** (la fréquence de référence pour accorder les instruments entre eux) est attribué à la note la et a une fréquence de 440 Hz.

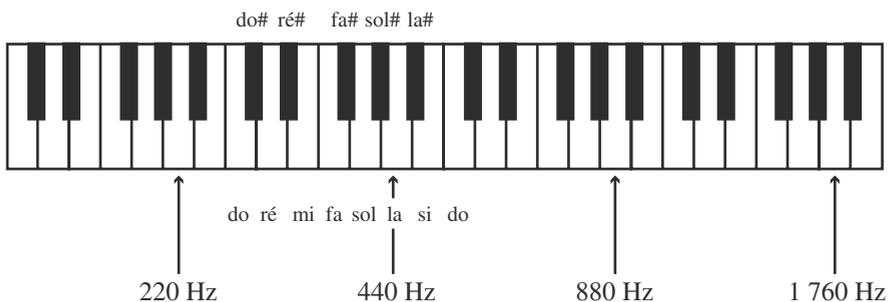


Figure 5.4 Notes de musiques représentées sur un clavier de piano et quelques fréquences associées.

SYNTHÈSE

Savoirs

- Les équations de l'acoustique linéaires sont établies par une approximation des équations de conservation des fluides.
- La propagation du son dans l'air est non dispersive : toutes les fréquences ont la même vitesse de phase.
- La vitesse de propagation des ondes acoustiques est reliée à la masse volumique et à la compressibilité :

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi}}$$

- L'intensité acoustique produite par une source ponctuelle varie comme l'inverse du carré de la distance à la source.

Savoir-faire

- Calculer la vitesse de propagation du son dans un fluide.
- Relier les fluctuations de pression, de vitesse et de masse volumique à l'intensité et au niveau acoustique.
- Déterminer la position des nœuds et ventres de pression et de vitesse dans un tuyau.

Mots-clés

- Intensité acoustique, niveau acoustique
- Fréquence, son, bruit

Exercices

Tester ses connaissances

1 Lorsque la température de l'air augmente, la vitesse du son :

- a. diminue. b. reste constante. c. augmente.

- 2 À quelle intensité correspond le seuil de douleur ?
 a. $0,1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. b. $1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. c. $10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.
- 3 Un intervalle d'un demi-ton correspond à :
 a. une différence de fréquences de 0,5 Hz.
 b. un rapport de fréquences égal à 1,0595.
 c. un rapport de fréquences égal à 2.
- 4 L'intensité acoustique émise par une source ponctuelle :
 a. décroît comme l'inverse du carré de la distance à la source.
 b. est constante.
 c. décroît comme l'inverse de la distance à la source.

Exercices d'application

- 5 Les chauves-souris utilisent l'écholocation pour « voir » les obstacles. Si on suppose que la chauve-souris vole à environ 30 m d'un obstacle, quel est le temps mis par une impulsion sonore pour revenir à l'animal ?
- 6 Quelle est la variation de pression correspondant à une variation de niveau acoustique de 1 dB ?
- 7 Estimer l'ordre de grandeur de la fluctuation de pression captée par l'oreille lors d'une conversation à voix haute.
- 8 Déterminer l'ordre de grandeur du déplacement du tympan soumis à un son de niveau 30 dB à 1 000 Hz.

Exercices d'approfondissement

- 9 **Mesure de la concentration en particules solides d'un liquide**
 Il est possible de mesurer la concentration en particules solides transportées par un liquide en mesurant la vitesse de propagation du son dans le mélange liquide + particules. En utilisant la relation (5.14), montrer que la variation de vitesse du son en fonction de la fraction volumique de solide Φ_s est linéaire pour $\Phi_s \ll 1$.
- 10 **Propagation d'ondes ultrasonores**
 Lors de la propagation unidimensionnelle d'une onde acoustique dans un fluide (de l'eau par exemple), la pression est décrite par une fonction

$p(x, t) = p_0 e^{i(\omega t - kx)}$ et la relation de dispersion est :

$$\mathcal{D}(k, \omega) = \omega^2 - c_a^2 k^2 (1 + i\omega\tau) = 0.$$

Dans cette équation, c_a est la vitesse de l'onde sans atténuation, et τ est un temps caractéristique qui dépend de la viscosité du liquide η et de la masse volumique ρ_0 :

$$\tau = \frac{\eta}{\rho_0 c_a^2}.$$

- a. Calculer l'ordre de grandeur de la quantité $\omega\tau$ pour une onde ultrasonore de fréquence 1 MHz. On prendra $c = 1\,500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\eta = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.
- b. Par une approximation justifiée, écrire la relation de dispersion sous la forme $k = k_r(\omega) + ik_i(\omega)$.
- c. En déduire que la pression peut s'écrire sous la forme

$$p = p_0 e^{-x/L} e^{i(\omega t - k_r x)}$$

où L est une distance caractéristique d'atténuation. Donner l'ordre de grandeur de cette longueur d'atténuation pour des fréquences de 1 MHz, 10 MHz et 100 MHz.

Corrigés

Tester ses connaissances

	a.	b.	c.
1			X
2			X
3		X	
4	X		

Exercices d'application

- 5** La distance parcourue par l'onde sonore est de 2×30 m et la vitesse est de l'ordre de $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Le temps de vol est donc $60/340 \approx 175$ ms.
- 6** Si on désigne par P_1 , I_1 et L_{dB1} la pression, intensité et niveau acoustique du signal 1, et P_2 , I_2 et L_{dB2} la pression, intensité et niveau acoustique du signal 2, on a $L_{dB2} - L_{dB1} = 1$, ce qui correspond à $\log(I_2/I_1) = 10^{-1}$. Le rapport des intensités est relié aux rapports des pressions par $I_2/I_1 = P_2^2/P_1^2$, et on a finalement $P_2 = 10^{0,05} P_1 \approx 1,12 P_1$.
- 7** Une conversation à voix haute a un niveau acoustique $L_{dB} = 60$ dB, ce qui correspond à une intensité $I = I_0 \cdot 10^{L_{dB}} = 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.
- 8** Le niveau acoustique est de 20 dB, ce qui correspond à une intensité acoustique de $10^{-10} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. On peut donc calculer que la fluctuation de vitesse du fluide est $|v_1| = 6,7 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Proche du tympan, le fluide a une vitesse instantanée $v_1 = |v_1| \sin \omega t$, et en intégrant par rapport au temps, la position des particules fluides proches du tympan est

$$x = -\frac{|v_1|}{\omega} \cos \omega t$$

L'ordre de grandeur de la fluctuation du tympan est donc reliée à la fréquence ν par la relation $|v_1|/(2\pi\nu)$ ce qui donne environ $2 \cdot 10^{-10}$ m, soit 2 angströms.

Exercices d'approfondissement

9 Mesure de la concentration en particules solides d'un liquide.

La vitesse de propagation du son dans un mélange de deux phases notées 1 et 2 peut se développer sous la forme

$$c_m = (\rho_2 \chi_2)^{-1/2} \left[1 + \Phi_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\chi_1}{\chi_2} - 2 \right) + \Phi_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1 \chi_1}{\rho_2 \chi_2} - \frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{\chi_1}{\chi_2} \right) \right]^{-1/2}.$$

Pour de faibles fractions volumiques $\Phi_s = \Phi_1 \ll 1$, on peut négliger le terme en Φ_1^2 et faire un développement limité :

$$c_m \approx (\rho_2 \chi_2)^{-1/2} \left[1 - \frac{\Phi_1}{2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\chi_1}{\chi_2} - 2 \right) \right],$$

ce qui montre une décroissance linéaire de la vitesse du son en fonction de Φ_1 à partir de la vitesse du son du liquide pur $c_{\text{liquide}} = (\rho_2 \chi_2)^{-1/2}$.

10 Propagation d'ondes ultrasonores

- Avec les données proposées, on trouve $\omega\tau \approx 3 \cdot 10^{-6}$.
- La relation de dispersion est

$$k = \frac{\omega}{c} (1 + i\omega\tau)^{-1/2}$$

et en remarquant que $\omega\tau \ll 1$, on peut faire un développement limité pour écrire :

$$k = \frac{\omega}{c} - \frac{1}{2}i \frac{\omega^2\tau}{c}.$$

- En injectant ce nombre d'onde complexe dans l'écriture de l'onde de pression, on obtient :

$$p = p_0 e^{i\omega t} e^{-ik_r x} e^{k_i x} =_0 e^{-x/L} e^{i(\omega t - k_r x)}.$$

La longueur d'atténuation L est par identification :

$$L = \frac{2c}{\omega^2\tau} = \frac{2\rho_0 c^3}{\omega^2 \eta}.$$

Pour les fréquences de 1, 10 et 100 MHz, on trouve respectivement des longueurs d'atténuation de 170 m, 1,7 m et 1,7 cm.

Plan

Cours

- 6.1** Dimensions, unités et constantes
- 6.2** Lois de l'électrostatique
- 6.3** Charges mobiles et courants
- 6.4** Lois de la magnétostatique
- 6.5** Induction électromagnétique
- 6.6** Équations de Maxwell
- 6.7** Équation d'onde électromagnétique
- 6.8** Propagation dans le vide
- 6.9** Onde plane électromagnétique
- 6.10** Polarisation des ondes électromagnétiques
- 6.11** Énergie électromagnétique

Synthèse

Exercices

Corrigés

Objectifs

- Rappeler les lois de l'électrostatique et de la magnétostatique
- Établir les équations de Maxwell
- Établir l'équation d'onde électromagnétique dans le vide
- Établir les propriétés de l'onde plane électromagnétique
- Définir l'énergie électromagnétique et sa propagation

Cours

Les ondes électromagnétiques regroupent un large spectre de phénomènes physiques et d'applications : les ondes radio, la lumière visible, les rayons X, etc. Toutes ces ondes sont décrites par le même formalisme : la propagation conjointe d'un champ électrique et d'un champ magnétique. À la suite de nombreux travaux sur les phénomènes électriques ou magnétiques, la fin du XIX^e siècle a vu naître la théorie puis les applications des ondes électromagnétiques.

6.1 DIMENSIONS, UNITÉS ET CONSTANTES

Les phénomènes électriques et magnétiques nécessitent de nombreuses quantités physiques pour être formalisés mathématiquement. Le **tableau 6.1** regroupe les principales quantités utiles dans la suite de cet ouvrage pour décrire la propagation des ondes électromagnétiques.

Tableau 6.1 Dimensions et unités des principales quantités physiques utiles en électromagnétisme.

Quantité	Symbole	Dimension	Unité SI
courant	I	\mathcal{I}	ampère (A)
potentiel électrique	U	$\mathcal{I}^{-1}\mathcal{L}^2\mathcal{M}\mathcal{T}^{-3}$	volt (V)
charge	q	$\mathcal{I}\mathcal{T}$	coulomb (C)
densité de courant	\vec{j}	$\mathcal{I}\mathcal{L}^{-2}$	$\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$
champ électrique	\vec{E}	$\mathcal{I}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{T}^{-3}$	$\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$
champ magnétique	\vec{B}	$\mathcal{I}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{T}^{-2}$	tesla (T)
capacité	C	$\mathcal{I}^2\mathcal{L}^{-2}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{T}^4$	farad (F)
inductance	L	$\mathcal{I}^{-2}\mathcal{L}^2\mathcal{M}\mathcal{T}^{-2}$	henry (H)
énergie	\mathcal{E}	$\mathcal{L}^2\mathcal{M}\mathcal{T}^{-2}$	joule (J)

Les lois de la physique sont basées sur des constantes fondamentales. En électromagnétisme, on utilise principalement :

- la **constante diélectrique du vide**

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}; \quad (6.1)$$

- la **perméabilité magnétique du vide**

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}. \quad (6.2)$$

- la **charge élémentaire** (charge de l'électron)

$$q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \quad (6.3)$$

Une autre constante est la vitesse de la lumière $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ qui sera introduite au § 6.7.

6.2 LOIS DE L'ÉLECTROSTATIQUE

6.2.1 Loi de Coulomb

La loi fondamentale de l'électrostatique est la **loi de Coulomb** (1736 - 1806), qui décrit le champ électrique créé par une charge électrique statique et également les forces d'interaction entre charges. Une charge électrique q crée autour d'elle un champ électrique statique \vec{E} . C'est un champ radial dont l'intensité (la norme du vecteur) décroît en inverse de la distance au carré à la charge. Formellement, on écrit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r. \quad (6.4)$$

On a noté \vec{r} le vecteur position à partir d'un repère centré sur la charge qui génère le champ. Le vecteur unitaire \vec{e}_r est $\vec{r}/\|\vec{r}\|$. Le champ électrique créé par une charge isolée est présenté sur la **figure 6.1**. C'est un champ de vecteurs radial, c'est-à-dire que tous les vecteurs sont supportés par des droites passant par le centre, la charge source.

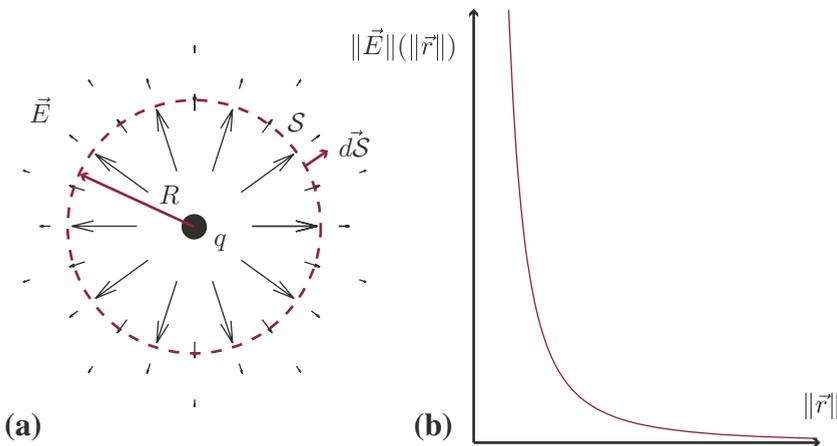


Figure 6.1

(a) Visualisation à deux dimensions du champ électrique coulombien créé par une charge isolée positive. La surface de Gauss utilisée pour le calcul du flux est tracée en bleu. **(b)** L'intensité du champ décroît en $1/r^2$.

En présence d'un champ électrique, toute charge q subit une force électrique \vec{F}_e proportionnelle à la charge et au champ :

$$\vec{F}_e = q\vec{E}.$$

Ainsi une charge q' placée dans le champ électrique créé par une charge q subit une force

$$\vec{F}_e = q'\vec{E} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

où \vec{r} est le vecteur position dont l'origine est placée sur la charge source q . La charge q subit elle-même la force opposée $-\vec{F}$. La force d'interaction entre deux charges est attractive si les charges sont de signes opposés et répulsive si les charges sont de même signe.

En présence de plusieurs charges, le champ électrique résultant est la somme vectorielle des champs créés par toutes les particules :

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i.$$

C'est le principe de superposition des champs électriques.

Comme le champ électrique ne dépend, en norme, que de la distance à la charge source, il dérive d'un potentiel électrostatique.

Définition

Le **potentiel électrostatique** est une fonction scalaire $U(r)$ telle que le champ électrostatique associé est

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } U(r). \quad (6.5)$$

Le potentiel est mesuré en volt (V). Le potentiel est défini par rapport à une valeur de référence. En général, on choisit un potentiel nul à l'infini, loin de toute charge :

$$U(r \rightarrow \infty) = 0.$$

Comme les champs électriques, les potentiels sont additifs. Ainsi, si N charges créent individuellement N potentiels, le potentiel résultant est la somme

$$U = \sum_{i=1}^N U_i.$$

6.2.2 Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss découle du calcul du flux du champ électrique au travers d'une surface fermée S :

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

où $d\vec{S}$ désigne le vecteur surface unitaire sortant et perpendiculaire à la surface. Comme la surface est arbitraire, nous pouvons choisir une surface sphérique centrée sur la charge source et de rayon R . Comme le champ électrique ne dépend en norme que de la distance à la source, le calcul de l'intégrale de surface se ramène à

$$\Phi_E = \|\vec{E}(R)\| \times S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \times 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Si on considère maintenant non plus une charge unique mais un ensemble de charges réparties de façon homogène dans un volume, on peut définir une **densité volumique de charges** ρ_c , mesurée en $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$.

Définition

La **densité volumique de charges** est définie par

$$\rho_c = \frac{Q}{V} = nq$$

où Q désigne la charge totale incluse dans un volume V , n la densité numérique de charges (mesurée en m^{-3}) et q la charge élémentaire.

La charge totale Q incluse dans un volume V est

$$Q = \iiint_V \rho_c dV.$$

En notant S la surface délimitant le volume V , le calcul du flux du champ électrique est simplement

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_c dV.$$

Cette relation est la forme globale du théorème de Gauss. En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski (voir l'annexe A) appliqué au champ électrique

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{E} dV,$$

on peut écrire l'égalité suivante :

$$\iiint_V \text{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_c dV.$$

Sachant que le volume d'intégration est arbitraire et peut donc être aussi petit que nécessaire, on écrit

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}. \quad (6.6)$$

C'est la forme locale du **théorème de Gauss**, également appelé théorème de Coulomb-Gauss, d'après les noms des deux contributeurs.

La combinaison des équations (6.5) et (6.6) donne l'**équation de Poisson** qui fait intervenir le laplacien de la fonction potentiel :

$$\Delta V = -\frac{\rho_c}{\epsilon_0}. \quad (6.7)$$

C'est une équation différentielle qui n'est complètement résolue qu'avec les conditions aux limites appropriées au problème considéré.

6.3 CHARGES MOBILES ET COURANTS

6.3.1 Densité de courant

Un ensemble de charges électriques en mouvement est appelé **courant électrique**. Nous sommes familiers du courant électrique utilisé dans les conducteurs. Ce courant, mesuré en ampères (A), est la mesure macroscopique du mouvement d'un grand nombre de charges élémentaires, les électrons. En chaque point de l'espace, on peut définir une densité locale de charge et une densité de courant.

Définition

La **densité de courant** est un vecteur défini par

$$\vec{j} = N q \vec{v},$$

où N est la densité numérique de charge et \vec{v} est la vitesse locale des charges q . La densité de courant est mesurée en $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$.

Pour un conducteur de section S traversé par un courant I permanent, la densité de courant a une norme

$$\|\vec{j}\| = \frac{I}{S}.$$

Exemple : la densité de courant dans un conducteur domestique.

La conduction électrique est généralement assurée par des fils de cuivre. Pour alimenter un circuit d'éclairage, on utilise des fils de $1,5 \text{ mm}^2$ de section, avec un courant maximum de 10 A. La densité maximum de courant admissible est donc de $6,7 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$.

6.3.2 Équation de conservation de la charge

La conservation de la charge est un des principes fondamentaux de la physique, au même titre que la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie, etc. Pour un volume de contrôle \mathcal{V} fixe, délimité par une surface \mathcal{S} fermée, la charge totale contenue dans ce volume est

$$Q(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \rho_c(t) d\mathcal{V}.$$

Quand cette charge varie au cours du temps, la variation dQ est

$$\begin{aligned} dQ &= \iiint_{\mathcal{V}} \rho_c(t+dt) d\mathcal{V} - \iiint_{\mathcal{V}} \rho_c(t) d\mathcal{V} \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} (\rho_c(t+dt) - \rho_c(t)) d\mathcal{V} \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho_c}{\partial t} dt d\mathcal{V}. \end{aligned}$$

Cette variation de charge dQ est due aux déplacements des charges qui peuvent entrer ou sortir du volume \mathcal{V} . Si on note $\vec{d}\mathcal{S}$ le vecteur unitaire sortant à la surface \mathcal{S} , la variation de charge est

$$dQ = - \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot \vec{d}\mathcal{S}.$$

Le signe moins indique la perte de charge quand les charges quittent le volume ($\vec{j} \cdot \vec{d}\mathcal{S} > 0$). L'intégrale de surface peut être transformée en intégrale de volume par le théorème de Green-Ostrogradski (relation A.9 du formulaire), ce qui donne finalement

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right] d\mathcal{V} = 0.$$

Comme le volume de contrôle est arbitraire, l'intégrale sur ce volume ne peut s'annuler que si l'intégrande est nulle. L'**équation de conservation de la charge** s'écrit donc sous la forme locale

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (6.8)$$

6.4 LOIS DE LA MAGNÉTOSTATIQUE

Un champ magnétique est créé quand des charges sont en mouvement. Un courant électrique dans un conducteur est une source de champ magnétique. On parle de **magnétostatique** quand les champs sont créés par des courants stationnaires, indépendants du temps.

Le champ magnétique \vec{B} créé par un courant d'intensité I est

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta,$$

où r est la distance entre la source de courant et le point de mesure.

Le champ \vec{B} est un champ azimutal dont les vecteurs sont perpendiculaires à la direction du courant (figure 6.2a). C'est également un champ à divergence nulle. En effet,

en utilisant à nouveau le théorème de Green-Ostrogradski, le calcul de la divergence du champ revient à calculer le flux de ce champ au travers d'une surface fermée. Pour conserver la symétrie de la source de champ magnétique (un fil rectiligne), on choisit une surface cylindrique \mathcal{S} dont l'axe est confondu avec le fil. Les vecteurs \vec{B} sont toujours tangents à la surface, donc $\vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ en tout point. Par conséquent, la relation

$$\iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{B} \, d\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

implique que

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (6.9)$$

On peut déjà faire une remarque en comparant les propriétés de divergence des champs électrique (6.6) et magnétique (6.9). Le champ magnétique a une divergence toujours nulle alors que le champ électrique peut avoir une divergence nulle en l'absence de charge ou non nulle en présence de charge. L'analogie entre ces deux équations montre qu'il n'existe pas de monopôle magnétique. En effet, si on brise en deux un aimant, on n'obtient pas deux monopôles (nord et sud) mais deux aimants dipôles magnétiques.

Le tracé du champ magnétique créé par un fil rectiligne (figure 6.2b) montre un caractère rotationnel important. Calculons le rotationnel du champ magnétique. Il est aisé pour ce calcul d'utiliser le théorème de Stokes qui transforme l'intégrale de surface du rotationnel en une intégrale de contour :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} (\operatorname{rot} \vec{B}) \cdot d\vec{S},$$

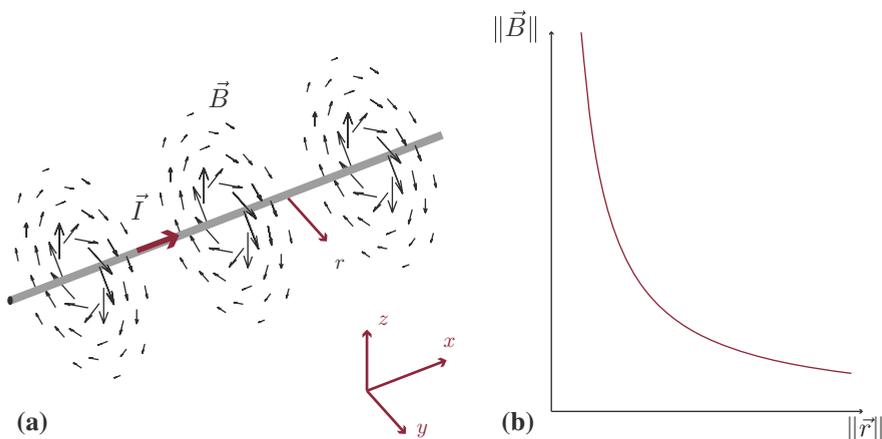


Figure 6.2 Champ magnétique créé par un courant stationnaire dans un fil conducteur.

Le champ est à divergence nulle.

où S est une surface portée par un contour C . Toujours en respect de la symétrie du fil rectiligne, on choisit comme contour C un cercle perpendiculaire au fil dont le centre est situé sur le fil conducteur. L'intégrale de contour est alors simplement

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \times 2\pi r = \mu_0 I$$

car le vecteur \vec{B} est sur le contour toujours colinéaire avec le vecteur élémentaire $d\vec{l}$. Le théorème de Stokes est alors :

$$\iint_S (\text{rot } \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I.$$

Comme le champ \vec{B} est orienté dans un plan perpendiculaire au fil, son rotationnel est lui parallèle au fil. Maintenant, en considérant une surface de calcul S qui est un cylindre fermé dont l'axe est confondu avec le fil, l'élément $d\vec{S}$ est parallèle au vecteur $\text{rot } \vec{B}$ uniquement sur la base circulaire du cylindre. Or le courant électrique I est l'intégrale de la densité de courant \vec{j} . On a donc

$$\iint_S (\text{rot } \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

et par identification :

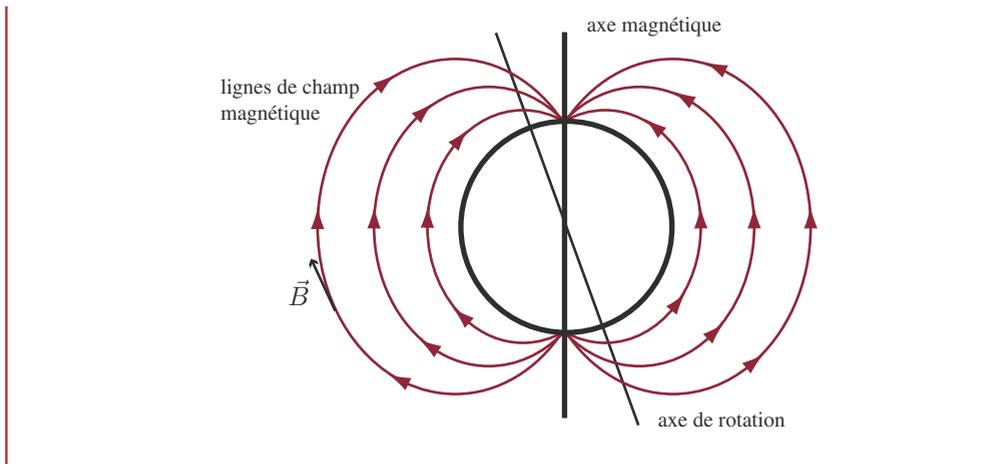
$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (6.10)$$

Cette dernière relation est connue sous le nom de **théorème d'Ampère**.



Encart 6.1 Le champ magnétique terrestre

La Terre possède un champ magnétique permanent mais non stationnaire. Ce champ, induit par le noyau métallique liquide de la Terre, peut être facilement mis en évidence par une boussole. Les pôles Nord et Sud magnétiques ne sont pas confondus avec les pôles géographiques et se déplacent constamment : la figure ci-après montre que l'axe magnétique et l'axe de rotation ne sont pas confondus. Actuellement, le champ magnétique terrestre a une intensité proche de $6 \cdot 10^{-6}$ T aux pôles, et de $3 \cdot 10^{-6}$ T à l'équateur. Dans l'histoire de la Terre, le champ magnétique s'est plusieurs fois inversé, laissant des traces de son orientation dans les roches magmatiques. Le champ magnétique terrestre constitue un véritable bouclier contre le rayonnement cosmique, déviant les particules de haute énergie.



6.5 INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

L'induction électromagnétique est le couplage entre le champ électrique et le champ magnétique. L'induction n'est obtenue qu'en présence d'un champ magnétique variable au cours du temps.

En 1831, Michael Faraday (1791–1867) a découvert qu'en faisant varier un champ magnétique près d'un conducteur, on pouvait induire une force électromotrice capable de déplacer les électrons libres, donc générer un courant électrique. Plus la variation du champ magnétique est importante, plus le courant généré est important. Cette expérience est illustrée dans sa configuration la plus simple par la **figure 6.3** : un aimant permanent est déplacé vers une boucle conductrice reliée à un ampèremètre. L'aiguille se déplace quand l'aimant est en mouvement. Le sens du déplacement de l'aimant est relié au sens du courant.

On peut observer un phénomène identique pour un champ stationnaire, mais avec un circuit électrique mobile. Dans le référentiel du champ magnétique, les électrons libres du circuit se déplacent à une vitesse \vec{v} et subissent donc une force de Lorentz

$$F = q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{E}_m$$

avec $\vec{E}_m = \vec{v} \times \vec{B}$.

À la suite de ces expériences, Faraday a proposé une loi qui relie le flux du champ magnétique Φ_B à la force électromotrice \mathfrak{F} :

$$\mathfrak{F} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (6.11)$$

Malgré son nom, la force électromotrice n'est pas une force, mais une différence de potentiel entre les points A et B du circuit qui génère le courant électrique. La différence de potentiel peut aussi être calculée par

$$\mathfrak{F} = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l}.$$

On a maintenant une égalité de la forme

$$\oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

et en utilisant le théorème de Stokes (A.10), on a l'égalité

$$\iint \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S},$$

et donc

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{6.12}$$

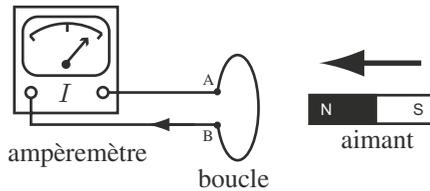


Figure 6.3 Principe de l'induction

Le mouvement d'un champ magnétique à proximité d'un circuit conducteur induit une circulation de courant, visualisée par un ampèremètre.

6.6 ÉQUATIONS DE MAXWELL

Ce qu'on appelle **équations de Maxwell** est un ensemble de quatre équations qui rassemblent les contributions de Coulomb, Ørsted, Faraday, Gauss et bien sûr Maxwell (1837–1879). Quand Maxwell s'intéresse à l'électricité et au magnétisme, il a à sa disposition les lois de l'électrostatique, de la magnétostatique et également la loi de l'induction. Dans son célèbre ouvrage *A treatise on electricity and magnetism* publié en 1873, il remarque que le théorème d'Ampère n'est pas compatible avec le principe de conservation de la charge et propose une théorie pour corriger ce problème.

Mathématiquement, la conservation de la charge s'exprime au travers d'un bilan des charges qui rentrent ou sortent d'un volume de contrôle. Si la densité volumique de charges ρ_c varie dans ce volume au cours du temps, c'est qu'il y a eu ajout ou perte de charges par le biais d'un courant \vec{j} . La conservation de la charge s'exprime

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0. \tag{6.13}$$

En prenant la divergence du théorème d'Ampère, on trouve que

$$\text{div}(\text{rot } \vec{B}) = \mu_0 \text{div } \vec{j} = 0,$$

car la divergence d'un rotationnel est toujours nulle. Cela implique que $\partial\rho_c/\partial t = 0$ et limite donc la portée du théorème d'Ampère aux régimes permanents.

Maxwell s'est beaucoup intéressé aux analogies entre les champs \vec{E} et \vec{B} . Mais seule la relation d'induction comporte un terme instationnaire portant sur le champ électrique. Maxwell a donc proposé de modifier le théorème d'Ampère pour y ajouter un terme instationnaire portant sur le champ magnétique. Écrivons cette relation modifiée sous la forme

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} - \alpha \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

avec une constante α qui sera déterminée par la conservation de la charge. En appliquant la divergence à cette relation, on obtient cette fois

$$\text{div}(\text{rot } \vec{B}) = \mu_0 \text{div } \vec{j} + \alpha \frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \vec{E}).$$

Comme la divergence d'un rotationnel est nulle, on a, en utilisant le principe de conservation de la charge (6.13) et la relation de Coulomb-Gauss (6.6)

$$0 = -\mu_0 \frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho_c}{\partial t},$$

et finalement

$$\alpha = \varepsilon_0 \mu_0.$$

Le principe de conservation de la charge est maintenant compatible avec une **relation de Maxwell-Ampère** écrite sous la forme

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \left(\vec{j} + \vec{j}_D \right). \quad (6.14)$$

Le terme ajouté par Maxwell se présente sous la forme d'un courant appelé **courant de déplacement** \vec{j}_D . De son vivant, Maxwell n'a jamais vu la vérification expérimentale de son hypothèse de courant de déplacement. Ce n'est qu'en 1887 avec les travaux de Hertz que la théorie de Maxwell a été complètement vérifiée. Les travaux de Hertz ont donné naissance aux premières télécommunications, l'ère de la radio pouvait commencer.

En résumé, les quatre **équations de Maxwell** sont :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}, \quad (6.15)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (6.16)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.17)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (6.18)$$



Ces équations montrent le couplage entre les champs électriques et magnétiques, en faisant intervenir la densité de charges ρ_c et la densité de courant \vec{j} ainsi que deux constantes ϵ_0 et μ_0 .

6.7 ÉQUATION D'ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

L'équation d'onde électromagnétique est obtenue à partir des équations de Maxwell. Le rotationnel de la relation de Maxwell-Faraday (6.17) donne

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Comme les variables d'espace x, y, z et de temps t sont indépendantes, on peut permuter la dérivée temporelle avec l'opérateur rotationnel. D'autre part, le double rotationnel se transforme grâce à la relation (A.6) pour donner :

$$\text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } \vec{B}).$$

En utilisant la relation de divergence (6.15) et la relation de Maxwell-Ampère (6.18), on obtient finalement une relation pour le seul champ électrique

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad } \rho_c. \quad (6.19)$$

avec une vitesse

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (6.20)$$

De même, le rotationnel de la relation (6.18) donne

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \mu_0(\text{rot } \vec{j}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

et, après combinaison avec la relation de divergence (6.16), la relation (6.17) donne

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0(\text{rot } \vec{j}). \quad (6.21)$$

Dans les deux équations de propagation (6.19) et (6.21) apparaît la même vitesse $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$. Les champs électrique et magnétique se propagent donc à la même vitesse, appelée **vitesse de la lumière** (encart 6.2).



Encart 6.2 La vitesse de la lumière

La vitesse de la lumière est une constante fondamentale de la physique. Depuis 1983, sa valeur est fixée à

$$c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Après des estimations à $2\cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ au XVII^e siècle, puis des mesures proches de $3\cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ au XIX^e siècle, l'invention du laser dans les années 1960 a permis d'atteindre une grande précision de mesure. On ne cherche plus à mesurer la vitesse de la lumière depuis que cette vitesse sert de référence pour la définition du mètre : le mètre est la distance parcourue par la lumière en $1/299\,792\,458 \text{ s}$.

Dans la plupart des calculs, on utilise une valeur approchée

$$c \approx 3 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

ce qui représente une erreur relative de 0,07 % très souvent négligeable.

6.8 PROPAGATION DANS LE VIDE

En l'absence de charges et de courant,

$$\rho_c = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j} = 0,$$

les équations de Maxwell dans le vide sont :

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad (6.22)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0, \quad (6.23)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.24)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (6.25)$$

et l'équation de propagation du champ électrique (6.19) se réduit à

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = \square \vec{E} = 0. \quad (6.26)$$

On peut écrire la même relation pour le champ \vec{B} , ce qui montre que les champs électrique et magnétique se propagent à la même vitesse c .

La forme mathématique de cette équation d'onde est identique à celle rencontrée pour les ondes mécaniques non dissipatives et non dispersives. On peut donc utiliser les résultats généraux obtenus au chapitre 3.

6.9 ONDE PLANE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Pour étudier la propagation, on choisit une direction de l'espace de propagation, par exemple x . Le champ électromagnétique est donc décrit par

$$\vec{E}(x - ct) \quad \text{et} \quad \vec{B}(x - ct)$$

les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont donc constants dans le plan Oyz . La divergence nulle du champ électrique (dans le vide) montre que

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{=0} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0.$$

Cette relation est vérifiée pour deux conditions alternatives : soit E_x ne dépend pas de x , ce qui contredit la notion de propagation selon x , soit la composante E_x est nulle. Le même raisonnement appliqué au champ \vec{B} , lui aussi de divergence nulle, montre que le champ EM est de la forme

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Les champs \vec{E} et \vec{B} sont **transverses**, car les vecteurs sont toujours perpendiculaires à la direction de propagation.

La relation de Maxwell-Faraday (6.17) appliquée à l'onde plane permet de montrer que les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont également perpendiculaires. En effet,

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix},$$

soit

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \end{cases} \quad (6.28)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{cases} \quad (6.29)$$

Comme le champ électrique ne dépend que d'une variable $\phi = x - ct$, les relations ci-dessus se mettent sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial \phi} = \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \frac{\partial B_y}{\partial \phi}, \end{cases} \quad (6.30)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \phi} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \frac{\partial B_z}{\partial \phi} \end{cases} \quad (6.31)$$

et après intégration par rapport à ϕ

$$\begin{cases} E_z = -cB_y, \\ E_y = cB_z. \end{cases} \quad (6.32)$$

$$(6.33)$$

Le produit scalaire $\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = c(B_y B_z - B_y B_z)$ est nul, ce qui montre que les vecteurs \vec{E} et \vec{B} de l'onde plane sont perpendiculaires. D'autre part, on peut calculer que

$$\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|. \quad (6.34)$$

La figure 6.4 présente une visualisation de l'onde plane EM dans le cas où les vecteurs \vec{E} et \vec{B} gardent la même direction au cours de la propagation. Dans cet exemple, on parle de polarisation rectiligne, mais il existe d'autres états de polarisation.

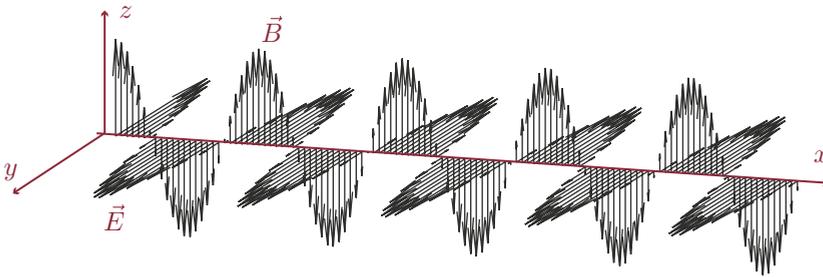


Figure 6.4 Champs de vecteurs électrique et magnétique pour une onde plane avec une polarisation rectiligne

La propagation se fait suivant l'axe x , le champ électrique est orienté suivant y et le champ magnétique est orienté suivant z .

En utilisant le formalisme de l'onde monochromatique, on peut décrire le champ électromagnétique par

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Avec cette écriture, les relations de divergence nulle sur \vec{E} et \vec{B} donnent

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad \text{et} \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0,$$

ce qui est une autre démonstration du caractère transverse de l'onde plane dans le vide. La relation d'induction (6.12) impose d'autre part

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

soit

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} = \frac{k}{\omega} \vec{\kappa} \wedge \vec{E} = \frac{1}{c} \vec{\kappa} \wedge \vec{E}. \quad (6.35)$$

6.10 POLARISATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Lors de la propagation, les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires à la direction de propagation. Mais tout en restant dans le plan, ils peuvent se déplacer et décrire différentes figures. La direction et la trajectoire décrites par les champs électromagnétiques lors de la propagation sont appelées la **polarisation** de l'onde (figure 6.5).

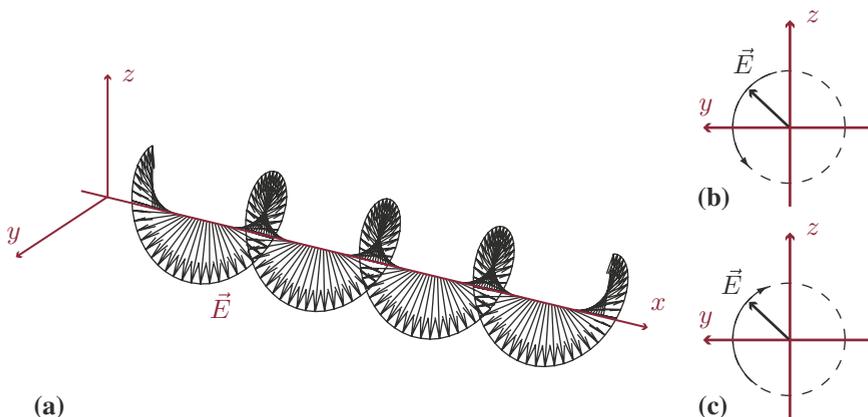


Figure 6.5 Polarisation circulaire du vecteur champ électrique

(a) l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit une hélice dans l'espace. En regardant l'onde depuis un point $x \rightarrow \infty$, l'extrémité du vecteur est assujettie à un cercle. Le sens de parcours de ce cercle donne le sens de la polarisation circulaire : polarisation circulaire gauche (b) et droite (c).

Pour une onde plane monochromatique se propageant dans la direction x , le vecteur champ électrique est

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{y0} \cos(kx - \omega t + \phi_y) \\ E_{z0} \cos(kx - \omega t + \phi_z) \end{pmatrix}.$$

Pour une position x fixée, l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit différentes figures suivant la valeur du déphasage $\phi_y - \phi_z$ entre les composantes y et z .

- Si $\phi_y - \phi_z$ est un multiple de π , le vecteur \vec{E} garde une direction constante. La polarisation est **rectiligne**.
- Si $\phi_y - \phi_z = \pm\pi/2$ et $E_{y0} = E_{z0}$, la polarisation est **circulaire**. Le signe du déphasage détermine le sens de rotation du vecteur \vec{E} autour de l'axe x . Pour un observateur placé à $x = \infty$, c'est-à-dire qui reçoit l'onde électromagnétique, la polarisation est **circulaire droite** si la rotation est dans le sens des aiguilles d'une montre. Dans le cas contraire, la polarisation est dite **circulaire gauche**.

- Si $\phi_y - \phi_z = \pm\pi/2$ et $E_{y0} \neq E_{z0}$, l'extrémité du vecteur \vec{E} décrit une ellipse, avec un sens de circulation donné par le déphasage. On parle alors de **polarisation elliptique** droite ou gauche, avec la même convention que pour la polarisation circulaire.
- Si $\phi_y - \phi_z$ est quelconque, et $E_{y0} \neq E_{z0}$, la polarisation est elliptique, mais les axes principaux de l'ellipse ne sont pas confondus avec les axes y et z du repère de coordonnées.

Les sources lumineuses conventionnelles (lampes à incandescence, arcs électriques par exemple) produisent des ondes électromagnétiques à partir d'une multitude de sources de taille atomique sans corrélation particulière entre elles. La superposition de ces ondes est non polarisée car tous les types de polarisation sont présents et se superposent.



Encart 6.3 Filtre polarisant et cinéma en relief

Certains matériaux comme les cristaux permettent de filtrer une partie du rayonnement et ne laissent passer qu'une direction de polarisation particulière. Il s'agit d'un filtre polarisant car une partie du rayonnement est absorbée tandis que le reste est transmis. La polarisation de la lumière intervient aussi par réflexion sur certaines surfaces, comme les vitres, les vernis ou encore la surface de l'eau.

La perception du relief est due à la combinaison par le cerveau de deux images distinctes formées par les deux yeux. Pour reproduire une sensation de relief à partir d'une surface plane (un écran de cinéma), le projecteur doit former sur l'écran des images destinées à l'œil gauche et des images destinées à l'œil droit. En portant des lunettes où chaque verre a une polarisation différente, le spectateur va voir des images légèrement différentes avec chaque œil et ainsi ressentir une impression de relief.

6.11 ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

6.11.1 Densité d'énergie électromagnétique

Les ondes électromagnétiques ne sont en général pas localisées : l'énergie qu'elles transportent est répartie dans l'espace. On va donc chercher à décrire une densité d'énergie — une énergie par unité de volume — plutôt que l'énergie elle-même. De plus les ondes se déplacent et transportent l'énergie à une certaine vitesse. Une quantité physique pertinente est donc la **densité d'énergie par unité de temps** \mathcal{E} , que l'on mesure en $\text{J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pour construire cette quantité \mathfrak{E} , on va utiliser les quantités physiques définies précédemment : le champ électrique \vec{E} , le champ magnétique \vec{B} , la densité de courant \vec{j} . Concernant les constantes, on choisit d'utiliser ε_0 et la vitesse c (l'autre constante μ_0 est reliée aux deux autres). La quantité \mathfrak{E} n'inclut pas de dimension de courant ou de charge, c'est une quantité construite à partir d'une masse, d'une longueur et d'un temps :

$$[\mathfrak{E}] = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-3}.$$

Exemple 1 : densité de courant et champ électrique

On peut retrouver cette dimension en faisant le produit de la densité de courant et du champ électrique. La densité de courant est naturellement proportionnelle à un courant alors que le champ électrique est inversement proportionnel à un courant :

$$[\vec{j} \cdot \vec{E}] = [\vec{j}] \times [E] = \mathcal{I}\mathcal{L}^{-2} \times \mathcal{L}\mathcal{M}\mathcal{I}^{-1}\mathcal{T}^{-3} = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-3}.$$

Le produit $\vec{j} \cdot \vec{E}$ est donc bien équivalent à une densité d'énergie par unité de temps.

Exemple 2 : champ électrique et permittivité

La permittivité ε_0 a comme dimension $\mathcal{I}^2\mathcal{L}^{-3}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{T}^4$. En multipliant cette quantité par le carré du champ électrique, on peut éliminer la dimension de courant. Le produit $\varepsilon_0 E^2$ a la même dimension qu'une énergie par unité de volume. Pour obtenir une densité d'énergie par unité de temps, il faut encore diviser $\varepsilon_0 E^2$ par un temps caractéristique.

Il existe d'autres combinaisons des quantités physiques de base qui permettent de trouver cette densité \mathfrak{E} . Mais il faut parfois introduire des temps caractéristiques ou des longueurs caractéristiques inconnus. Pour contourner cette difficulté, il faut revenir aux équations de description des champs électromagnétiques, les équations de Maxwell.

6.11.2 Conservation de l'énergie électromagnétique

Outre la conservation de la charge déjà décrite par la relation (6.8), les équations de Maxwell doivent vérifier le principe de conservation de l'énergie. La relation de Maxwell-Ampère (6.18) donne la densité de courant sous la forme

$$\vec{j} = \varepsilon_0 c^2 \left(\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Le produit scalaire avec le champ électrique est

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 c^2 \left[\left(\text{rot } \vec{B} \right) \cdot \vec{E} - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \right]$$

et le produit multiple dans le crochet peut être décomposé :

$$(\text{rot } \vec{B}) \cdot \vec{E} = (\text{rot } \vec{E}) \cdot \vec{B} + \text{div}(\vec{B} \wedge \vec{E}).$$

Finalement en appliquant la relation de Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$, on obtient une relation de conservation

$$\vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left[\frac{\epsilon_0}{2} (E^2 + c^2 B^2) \right]}_{\mathcal{U}} + \text{div} \underbrace{\left[\epsilon_0 c^2 (\vec{E} \wedge \vec{B}) \right]}_{\vec{\Pi}} = 0.$$

On a introduit ici deux nouvelles quantités, une quantité scalaire et une quantité vectorielle : la densité d'énergie électromagnétique \mathcal{U} et le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$.

Définitions

- La **densité d'énergie électromagnétique** est calculée par

$$\mathcal{U} = \frac{\epsilon_0}{2} (E^2 + c^2 B^2), \quad (6.36)$$

et est mesurée en $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$.

- Le **vecteur de Poynting** désigne la direction de propagation de l'énergie :

$$\vec{\Pi} = \epsilon_0 c^2 (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}. \quad (6.37)$$

Avec ces définitions, l'équation de conservation de l'énergie se met sous une forme compacte

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad (6.38)$$

qui est analogue à l'équation de conservation de la charge (6.13).

Dans le vide cette expression ne comporte pas de terme source car il n'y a ni charge ni courant. La conservation d'énergie **dans le vide** est donc

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = 0.$$



Encart 6.4 Énergie et fréquence du rayonnement

Depuis le début du XX^e siècle, on sait relier directement l'énergie d'un rayonnement électromagnétique à sa fréquence. La relation de Planck

$$\mathcal{E} = h\nu,$$

montre la proportionnalité directe entre \mathcal{E} et ν , avec une constante h (la constante de Planck) qui vaut

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}.$$

Cette relation montre que les rayonnements de haute fréquence sont plus énergétiques que les rayonnements de basse fréquence. Porteurs de quantité d'énergie importante, les rayonnements hautes fréquences (UV, X, γ) du spectre électromagnétique ont des effets importants sur les molécules qui composent les êtres vivants. Certains sont capables de dissocier les molécules et donc de modifier la structure intrinsèque des molécules organiques.

6.11.3 Énergie électromagnétique dans le vide

Prenons le cas d'une onde plane se propageant dans le vide. Il n'y a ni charges ($\rho_c = 0$) ni densité de courant ($\vec{j} = 0$). On peut utiliser directement la relation (6.35) pour calculer le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\omega\mu_0} \vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \frac{E^2}{\omega\mu_0} \vec{k} = \frac{E^2}{c\mu_0} \vec{k}.$$

En calculant la densité d'énergie de l'onde plane monochromatique dans le vide :

$$\mathcal{U} = \frac{\varepsilon_0}{2} (E^2 + c^2 B^2) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \varepsilon_0 E^2,$$

on montre que les champs électrique et magnétique contribuent à part égale à la densité d'énergie électromagnétique.

Définitions

- L'**intensité électromagnétique** est l'énergie électromagnétique traversant une surface unité par unité de temps. Pour une onde plane monochromatique dans le vide, l'intensité est

$$I_{EM} = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \|\vec{\Pi}\|.$$

- La **puissance électromagnétique** est le flux du vecteur de Poynting au travers d'une surface :

$$P = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}.$$

SYNTHÈSE

Savoirs

- Les charges sont sources de champ électrique.
- Les charges mobiles sont sources de champ magnétique.
- L'équation d'onde électromagnétique dans le vide est

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = 0.$$

- La vitesse de propagation $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide, aussi appelée vitesse de la lumière.
- Une onde électromagnétique plane se propageant dans le vide est telle que les vecteurs $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ forment un trièdre direct, et

$$\|\vec{E}\| = c\|\vec{B}\|.$$

Savoir-faire

- Écrire les 4 équations de Maxwell.
- Retrouver l'équation d'onde électromagnétique dans le vide à partir des équations de Maxwell.
- Déterminer la polarisation d'une onde électromagnétique.

Mots-clés

- Champs électriques et magnétiques
- Vitesse de la lumière, énergie électromagnétique
- Polarisation rectiligne, circulaire, elliptique

Exercices

Tester ses connaissances

1 Le potentiel électrique peut être mesuré en :

a. A

b. V

c. N·m·C⁻¹

- 2 Le champ électrique peut être mesuré en :
- a. $A \cdot m^{-1}$ b. V c. $N \cdot C^{-1}$
- 3 La dimension du vecteur de Poynting est :
- a. MT^{-3} b. $\mathcal{L}^2 MT^{-3}$ c. $\mathcal{I}^2 \mathcal{L}^{-3} \mathcal{M}^{-1} T^4$
- 4 La dimension de la résistance électrique R qui intervient dans la loi d'Ohm $U = RI$ est :
- a. $\mathcal{I}^{-1} \mathcal{L}^2 \mathcal{M} T^{-3}$ b. $\mathcal{I}^{-2} \mathcal{L}^2 \mathcal{M} T^{-3}$ c. $\mathcal{L}^2 \mathcal{M} T^{-3}$
- 5 Que devient l'intensité d'une onde EM quand le champ électrique diminue de moitié ?
- a. Elle augmente d'un facteur 2.
 b. Elle diminue de moitié.
 c. Elle diminue d'un facteur 4.

Exercices d'application

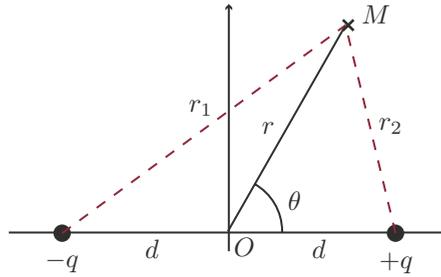
- 6 Le flux solaire dans la haute atmosphère est d'environ $1\,350 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Estimer l'énergie reçue par une surface de 1 m^2 exposée pendant une heure.
- 7 Une antenne de communication émet avec une puissance de 100 W . Quelle est la valeur du champ électrique reçu à une distance de 500 m de l'antenne si on suppose qu'elle rayonne de manière isotrope sur une demi-sphère centrée sur l'antenne ? Calculer également le champ magnétique.
- 8 Une onde plane électromagnétique a comme champ électrique

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Préciser l'orientation du vecteur d'onde et déterminer le champ magnétique correspondant.

Exercices d'approfondissement

- 9 Le dipôle électrostatique
- Un dipôle électrostatique est constitué de deux charges $+q$ et $-q$ séparées d'une distance $2d$. Trouver le potentiel créé par le dipôle, puis le champ électrostatique associé. On supposera que le point de mesure se trouve à grande distance du dipôle : $r \gg 2d$.



10 Interférences électromagnétiques

Deux ondes planes électromagnétiques de pulsation ω se propagent selon les vecteurs d'ondes \vec{k}_1 et \vec{k}_2 tels que

$$\vec{k}_1 = \cos \theta \vec{e}_y + \sin \theta \vec{e}_z, \quad \vec{k}_2 = \cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z.$$

Les champs électriques de ces deux ondes sont

$$\vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_x e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{E}_2 = E_0 \vec{e}_x e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

- Calculer les champs magnétiques \vec{B}_1 et \vec{B}_2 correspondants.
- Calculer les parties réelles des champs électrique et magnétique résultant de la superposition des deux ondes.
- Calculer le vecteur de Poynting correspondant à la superposition des deux ondes, et sa moyenne temporelle.
- Montrer que l'énergie électromagnétique présente en moyenne temporelle une structure d'interférences dans le plan $y = 0$. Donner la distance entre deux franges d'interférences successives.

Corrigés

Tester ses connaissances

	a.	b.	c.
1		X	X
2			X
3	X		
4			
5			X

- 6** Le flux solaire a comme unité le $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. Pour obtenir des joules, l'unité de mesure de l'énergie, il faut multiplier le flux par une surface et par une durée. Dans le cas proposé, l'énergie reçue par une surface unité pendant une heure est $1\,350 \times 1 \times 1\,600 = 2,16 \text{ MJ}$.
- 7** La puissance est le flux du vecteur de Poynting au travers d'une surface hémisphérique dans ce cas. Si on note R la distance entre l'antenne et le récepteur, on a

$$P = \|\vec{\Pi}\| \times 2\pi R^2 = 2\pi c \varepsilon_0 E^2 R^2,$$

ce qui donne un champ électrique

$$E = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{P}{2\pi c \varepsilon_0}} = 0,155 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

On calcule le champ magnétique par $B = E/c = 5,16 \cdot 10^{-10} \text{ T}$.

- 8** Comme le vecteur champ électrique de l'onde plane est orienté suivant x , la condition $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ impose que $k_x = 0$ et donc que le vecteur \vec{k} soit dans le plan yz : $\vec{k} = k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$. On détermine le champ magnétique en utilisant la relation $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ qui s'écrit $i \vec{k} \wedge \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$, soit

$$i \begin{pmatrix} 0 \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Seule la composante selon y est non nulle, ce qui donne un champ magnétique de la forme

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_y e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{avec} \quad B_0 = -\frac{k_x}{E_0} \omega.$$

Exercices d'approfondissement

9 Le dipôle électrostatique

Le potentiel créé par le dipôle est la somme de deux potentiels créés par les charges $-q$ et $+q$. En notant r_1 et r_2 les distances entre ces charges et le point de mesure M , on a

$$U(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Les distances r_1 et r_2 peuvent être exprimées en fonction des coordonnées polaires par

$$r_1 = r \left(1 + \frac{2d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2} \right)^{1/2}, \quad r_2 = r \left(1 - \frac{2d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2} \right)^{1/2}.$$

Dans le cadre d'un développement limité induit par l'hypothèse $r \gg 2d$, on a

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2d}{r} \cos \theta \right), \quad \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{2d}{r} \cos \theta \right)$$

et le potentiel résultant est donc

$$U(M) = \frac{qd \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^2}.$$

On obtient le champ électrique en calculant le gradient du potentiel : ses composantes sont

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{qd \cos \theta}{\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{et} \quad \vec{E}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{qd \sin \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}.$$

10 Interférences électromagnétiques

a. On obtient le champ magnétique par la relation

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E}_1 = -i\vec{k}_1 \wedge \vec{E}_1$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} &= -ik \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= -ik \vec{E}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)}. \end{aligned}$$

Après intégration par rapport au temps (en choisissant une constante d'intégration nulle car il n'y a pas de champ magnétique statique), on trouve

$$\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

Un calcul identique permet de trouver le champ \vec{B}_2 :

$$\vec{B}_2 = -\frac{E_0}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

b. Le champ électrique résultant est

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 \vec{e}_x \left[e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} + e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} \right],$$

et sa partie réelle est

$$\begin{aligned} \text{Re}(\vec{E}) &= E_0 \vec{e}_x [\cos(ky \cos \theta + kz \sin \theta - \omega t) + \cos(ky \cos \theta - kz \sin \theta - \omega t)] \\ &= E_0 \vec{e}_x \cos(ky \cos \theta - \omega t) \cos(kz \sin \theta). \end{aligned}$$

La même méthode donne pour le champ magnétique total $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

$$\text{Re}(\vec{B}) = -\frac{2E_0}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(ky \cos \theta - \omega t) \sin(kz \sin \theta) \sin \theta \\ \cos(ky \cos \theta - \omega t) \cos(kz \sin \theta) \cos \theta \end{pmatrix}.$$

c. Le vecteur de Poynting, calculé à partir des parties réelles des champs électrique et magnétique, est

$$\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c E_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \cos^2(ky \cos \theta - \omega t) \cos^2(kz \sin \theta) \cos \theta \\ -\sin(2ky \cos \theta - 2\omega t) \sin(2kz \sin \theta) \sin \theta \end{pmatrix}.$$

d. En moyenne temporelle, la composante Π_z du vecteur de Poynting est nulle, car la fonction $\sin(2ky \cos \theta - 2\omega t)$ est de moyenne nulle. En revanche, la composante Π_y n'est pas nulle et on trouve

$$\vec{\Pi} = 2\varepsilon_0 c E_0^2 \vec{e}_y \cos^2(kz \sin \theta) \cos \theta.$$

L'onde résultante présente donc une structure d'interférences avec des franges d'interférences séparées d'une distance

$$\Delta z = \frac{\pi}{k \sin \theta} = \frac{\lambda}{2 \sin \theta}.$$

Ondes électromagnétiques et matière

Plan

Cours

- 7.1 Ce qu'est la matière
- 7.2 Conduction électrique
- 7.3 Polarisation d'un milieu matériel
- 7.4 Induction magnétique
- 7.5 Équations de Maxwell dans la matière
- 7.6 Équation de propagation
- 7.7 Propagation dans les milieux matériels homogènes
- 7.8 Ondes et interfaces
- 7.9 Lois de Snell-Descartes
- 7.10 Réflexion totale sur une interface
- 7.11 Propagation guidée

Synthèse

Exercices

Corrigés

Objectifs

- Comprendre les principaux effets des champs électriques et magnétiques sur un milieu matériel
- Établir les équations de Maxwell pour un champ électromagnétique dans un milieu matériel
- Établir la relation de dispersion dans un milieu neutre
- Comprendre l'effet des interfaces sur le champ électromagnétique
- Introduire la notion de guidage des ondes

Cours

Constituée de charges libres ou liées, la matière interagit avec les ondes électromagnétiques. Le champ électrique peut induire une densité locale de courant et également induire une polarisation des atomes et molécules du milieu. La permittivité électrique ε décrit cette polarisation. Le champ magnétique peut modifier la structure magnétique de la matière, décrite par une perméabilité μ . Dans un milieu matériel,

les équations de Maxwell modifiées permettent d'écrire une équation de propagation d'onde électromagnétique. Trois types de solutions générales peuvent être obtenues.

7.1 CE QU'EST LA MATIÈRE

La matière est constituée d'atomes et de molécules et, à plus petite échelle encore, de charges positives (les électrons) et de charges négatives (les protons du noyau). Nous disposons *a priori* avec les équations de Maxwell (6.15)-(6.18) d'une description mathématique adaptée à la propagation des ondes électromagnétiques dans la matière. Un milieu matériel est, à l'échelle microscopique (l'échelle des particules élémentaires), composé de « beaucoup de vide ». La taille typique d'un noyau atomique est de 10^{-15} m alors que la distance entre deux noyaux de deux atomes voisins est de l'ordre de la taille de l'atome, c'est-à-dire 1 angström (10^{-10} m). Aussi valables qu'elles soient, les équations de Maxwell microscopiques sont inutilisables dans les milieux macroscopiques car nous ne disposons d'aucun instrument de mesure assez précis pour les vérifier.

Il importe donc d'écrire des équations similaires, mais qui décrivent des champs macroscopiques, c'est-à-dire obtenus par des moyennes sur des distances ou des volumes dont l'échelle est accessible aux instruments de mesure. Mais si le volume de moyenne est trop grand, on peut perdre les effets dus aux variations du champ électromagnétique sur une longueur d'onde. Par conséquent, on va s'intéresser à des grandeurs macroscopiques obtenues par la moyenne sur une taille intermédiaire entre la distance interatomique et la longueur d'onde du champ électromagnétique. Tant que la longueur d'onde du champ électromagnétique λ est très grande devant la taille atomique (figure 7.1), des atomes voisins vont subir le même champ et donc avoir une réaction semblable.

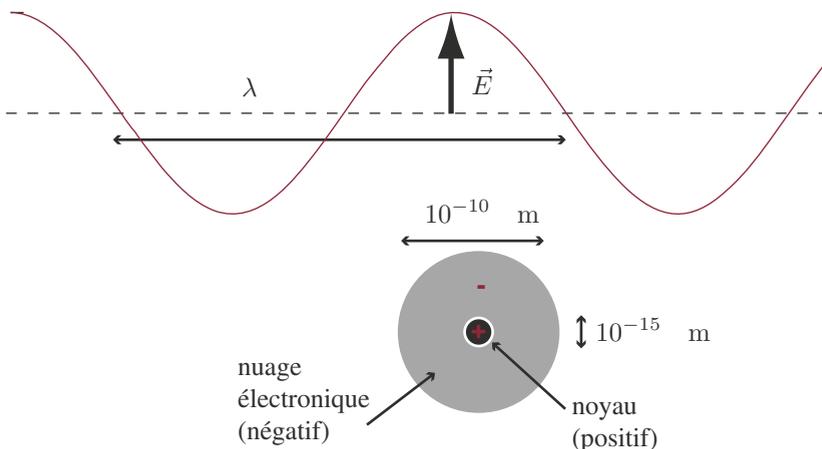


Figure 7.1 Les échelles de taille du noyau et de l'atome sont en général très petites devant la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique.

Un matériau traversé par une onde électromagnétique va se trouver en présence simultanée d'un champ électrique variable et d'un champ magnétique variable.

7.2 CONDUCTION ÉLECTRIQUE

7.2.1 Loi d'Ohm

Un matériau conducteur permet le déplacement d'électrons libres. Sous l'effet d'une différence de potentiel, un courant se met en place. La loi d'Ohm exprime la relation entre la différence de potentiel ΔU et le courant électrique I :

$$\Delta U = R I. \quad (7.1)$$

La résistance R , mesurée en ohms (Ω), exprime le « freinage » du mouvement des électrons libres par la structure du matériau. Pour un fil conducteur de longueur L et de section S (figure 7.2), on peut écrire la loi d'Ohm sous la forme

$$\vec{E}L = R\vec{j}S,$$

ou encore

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (7.2)$$

Cette équation est la **loi d'Ohm microscopique**. La constante $\gamma = L/RS$ est la **conductivité** du matériau.

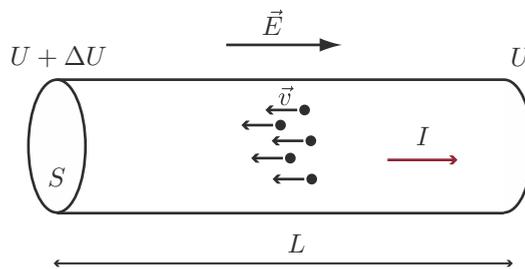


Figure 7.2 Sous l'effet d'une différence de potentiel ΔU , un conducteur présente un courant électrique I . Par convention, le courant électrique est orienté dans le sens opposé au sens de déplacement des électrons.

7.2.2 Classification électrique des matériaux

Du point de vue électrique, on distingue deux grandes classes de matériaux : les **conducteurs** et les isolants, aussi appelés **diélectriques**. Un matériau est conducteur quand il dispose de **charges libres** capables de se mouvoir sous l'effet d'un champ

électrique. La capacité conductrice des matériaux est déterminée par la conductivité γ , ou son inverse, la résistivité.

Définitions

- La **conductivité électrique** γ d'un matériau est le rapport entre la densité de courant et le champ électrique. Elle intervient dans la loi d'Ohm locale

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

La conductivité électrique a comme dimension $\mathcal{I}^2 \mathcal{L}^{-3} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{T}^3$ et se mesure en $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

- La **résistivité** est l'inverse de la conductivité :

$$\rho_e = \gamma^{-1}$$

et se mesure en $\Omega \cdot \text{m}$.

Les matériaux conducteurs sont caractérisés par une faible résistivité ou une forte conductivité. Au contraire, les isolants sont caractérisés par une forte résistivité. Quelques ordres de grandeurs de ces quantités pour des matériaux courants sont proposés dans le **tableau 7.1**. On peut remarquer la grande différence d'ordre de grandeur entre un isolant et un conducteur.

Tableau 7.1 Valeurs des conductivités électriques γ et des résistivités ρ_e pour quelques matériaux conducteurs et isolants.

Type	Matériau	Conductivité ($\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$)	Résistivité ($\Omega \cdot \text{m}$)
Conducteurs	cond. parfait	∞	0
	argent	$6,25 \cdot 10^7$	$16 \cdot 10^{-9}$
	cuivre	$5,9 \cdot 10^7$	$17 \cdot 10^{-9}$
	or	$4,55 \cdot 10^7$	$22 \cdot 10^{-9}$
	nickel	$1,43 \cdot 10^7$	$70 \cdot 10^{-9}$
	fer	$9,62 \cdot 10^6$	$104 \cdot 10^{-9}$
	plomb	$4,83 \cdot 10^6$	$207 \cdot 10^{-9}$
Diélectrique	diélec. parfait	0	∞
	eau pure	$\approx 10^{-9}$	$\approx 10^9$
	verre	$\approx 10^{-17}$	$\approx 10^{17}$
	polymères	$\approx 10^{-20}$	$\approx 10^{20}$

Pour être complet, il faut également citer les matériaux semi-conducteurs (le silicium par exemple) qui ont une conductivité intermédiaire entre les conducteurs et les isolants. Les supraconducteurs sont eux des matériaux conducteurs parfaits qui ont cette propriété généralement à très basse température.

7.3 POLARISATION D'UN MILIEU MATÉRIEL

7.3.1 Polarisation microscopique

Un atome est un objet électriquement neutre. Il est classiquement représenté par un noyau composé de Z protons et donc porteur d'une charge $+Zq_e$ et d'un nuage de Z électrons porteur d'une charge $-Zq_e$. En l'absence de champ extérieur, les centres de masse du noyau \vec{r}_p et du nuage électronique \vec{r}_e sont confondus : $\vec{r}_p = \vec{r}_e$ (figure 7.3). De plus, le nuage électronique est représenté par une sphère de rayon r_0 .

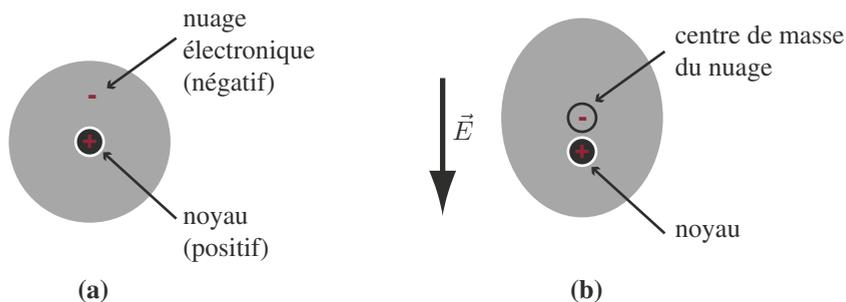


Figure 7.3 En l'absence de champ extérieur, les centres de masse des charges positives (le noyau atomique) et des charges négatives (le nuage électronique) sont confondus **(a)**. En présence d'un champ électrique externe \vec{E} , la force électrique déplace les centres de masse dans des directions opposées. Le champ crée un dipôle électrostatique interne à l'atome **(b)**.

En présence d'un champ électrique \vec{E} que l'on suppose constant, le noyau et le nuage électronique subissent des forces électriques opposées. Il en résulte un écart entre les centres de masse et donc la création d'un **dipôle** : les charges $+Nq_e$ et $-Nq_e$ sont séparées d'une petite distance $\vec{\delta}$. Il en résulte une polarisation atomique, également appelée polarisation microscopique. Chaque atome placé dans le champ \vec{E} porte un moment dipolaire

$$\vec{p} = Zq_e\vec{\delta} = \alpha\epsilon_0\vec{E}, \quad (7.3)$$

où $\alpha = 4\pi r_0^3$ est la polarisabilité électronique de l'atome. Cette quantité ne dépend pas du nombre d'électrons mais de la taille de l'atome r_0 .



Encart 7.1 La polarisabilité électronique

Le nuage électronique est source de champ électrique local \vec{E}_e pour le proton et, à l'équilibre, les forces électriques induites par le champ externe et le champ local doivent se compenser. On a donc

$$\vec{E} + \vec{E}_e = 0.$$

On obtient la même relation en raisonnant sur le champ électrique local créé par le noyau appliqué au nuage d'électrons.

En appliquant le théorème de Gauss sur une surface sphérique centrée sur le centre de masse des électrons \vec{r}_e dont la surface passe par le noyau (donc de rayon $\delta = \|\vec{r}_p - \vec{r}_e\|$), on obtient

$$4\pi\delta^2 E = \frac{Zq_e}{\epsilon_0} \frac{\frac{4}{3}\pi\delta^3}{\frac{4}{3}\pi r_0^3},$$

soit

$$E = \frac{Zq_e\delta}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}.$$

Le moment dipolaire porté par l'atome est donc $\vec{p} = Zq_e\delta\vec{E} = 4\pi\epsilon_0 r_0^3 \vec{E} = \alpha\epsilon_0 \vec{E}$. La quantité α , basée sur le volume de l'atome, est la **polarisabilité électronique** de l'atome. On donne dans le tableau ci-dessous quelques valeurs de la polarisabilité :

Atome	α (m ⁻³)
H	$0,67 \cdot 10^{-30}$
C	$1,76 \cdot 10^{-30}$
O	$0,80 \cdot 10^{-30}$
Al	$6,80 \cdot 10^{-30}$
Fe	$8,40 \cdot 10^{-30}$
Co	$7,50 \cdot 10^{-30}$

7.3.2 Polarisation macroscopique

Un milieu matériel composé d'un grand nombre d'atomes soumis à un champ électrique externe va générer un grand nombre de dipôles électriquement induits, chaque dipôle contribuant à la création d'un champ électrique de polarisation. Pour décrire cet effet de façon macroscopique, on propose une **relation linéaire** entre le champ électrique induit \vec{E}_{pol} et le champ externe \vec{E} :

$$\vec{E}_{pol} = \chi\vec{E}. \quad (7.4)$$

Le paramètre χ est la **susceptibilité diélectrique** du matériau. C'est un nombre positif sans dimension qui décrit la réaction macroscopique du milieu matériel. Le champ électrique de polarisation est relié à la polarisation macroscopique \vec{P} par

$$\vec{P} = \epsilon_0 \vec{E}_{pol} = \epsilon_0 \chi \vec{E}.$$

En utilisant le théorème de Gauss dans une surface contenant le milieu matériel polarisé, on a

$$\text{div}(\vec{E} + \vec{E}_{pol}) = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}, \quad (7.5)$$

ce qui peut également s'écrire sous la forme

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_c}{(1 + \chi)\epsilon_0} = \frac{\rho_c}{\epsilon_r \epsilon_0}. \quad (7.6)$$

La densité de charge ρ_c à prendre en compte dans cette équation est la densité de **charges libres**. Cette relation est l'équation de Maxwell-Gauss pour un champ électrique en présence d'un milieu matériel caractérisé par sa permittivité relative ϵ_r , en présence de charges libres ρ_c .

Définition

La **permittivité relative** ϵ_r est calculée par

$$\epsilon_r = 1 + \chi.$$

C'est un nombre sans dimension qui vaut 1 dans le vide, et est supérieur à 1 dans un milieu matériel.

La permittivité relative des matériaux dépend principalement du nombre de dipôles induits par unité de volume (la densité numérique mesurée en m^{-3}), mais également des interactions entre ces dipôles. De plus, la présence d'un dipôle permanent porté par un atome ou une molécule influence la permittivité relative. Ainsi la permittivité des gaz est très proche de l'unité, tandis que la permittivité des liquides peut atteindre plusieurs dizaines. Quelques valeurs sont proposées dans le **tableau 7.2**.

On utilise parfois le champ de déplacement électrique \vec{D} défini par

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}.$$

Tableau 7.2 Quelques valeurs de permittivités relatives ϵ_r pour des gaz et des liquides.

phase	fluide	ϵ_r
gaz	air	1,00054
	O ₂	1,00049
	CO ₂	1,00092
	CH ₄	1,00081
	C ₄ H ₁₀	1,00258
liquide	eau	78
	trichloroéthylène	3,42
	éthanol	24,3
	glycérol	42,5



Encart 7.2 Estimation des permittivités relatives

Dans un gaz non polaire, les molécules ne portent pas de dipôle permanent. Chaque molécule porte un moment dipolaire \vec{p} et si la densité numérique des molécules est notée N , la polarisation macroscopique est $\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha\epsilon_0\vec{E}$ et la permittivité relative est donc

$$\epsilon_r = 1 + \chi = 1 + N\alpha.$$

Ce calcul simple n'est plus valable dans le cas de molécules polaires qui portent un moment dipolaire permanent. À ce dipôle permanent s'ajoute un dipôle induit par le champ électrique externe. De plus, la distribution des orientations des moments dipolaires est influencée par la température. Le modèle de permittivité relative pour un gaz polaire (avec des molécules suffisamment éloignées pour que les interactions dipolaires soient faibles) donne

$$\epsilon_r = 1 + \frac{Np_0^2}{3\epsilon_0kT}$$

où p_0 est le moment dipolaire permanent et T est la température.

Pour un milieu liquide, les analyses précédentes ne s'appliquent plus car le champ extérieur pour un atome est une superposition du champ externe et des champs émis par les molécules proches polarisées. On se contente ici de donner le résultat, connu sous le nom de relation de Clausius-Mossotti :

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)}.$$

On retrouve la relation obtenue pour un gaz non polaire quand $N \rightarrow 0$ et que la densité numérique se rapproche de celle d'un gaz.

7.3.3 Application au condensateur

Un condensateur est constitué de deux plaques conductrices parallèles séparées d'une faible distance d par rapport à leur largeur. L'espace entre les plaques peut être occupé par un matériau isolant ou laissé vide. Un condensateur est caractérisé par sa capacité C , mesurée en farads. C'est en effet l'une des expériences de Faraday qui va nous permettre d'étudier l'effet d'un champ constant sur un diélectrique.

Si on compare deux condensateurs de mêmes dimensions, l'un vide de capacité C_1 , l'autre rempli d'un isolant solide (du verre par exemple) de capacité C_2 (figure 7.4), on peut mesurer

$$C_2 > C_1 \quad \text{et} \quad \Delta U_2 < \Delta U_1.$$

Le diélectrique entre les plaques a donc fait diminuer le champ électrique $\Delta U/d$. La capacité C_2 varie suivant les matériaux isolants, mais est toujours proportionnelle à C_1 , la capacité du condensateur « vide » :

$$C_2 = \zeta C_1.$$

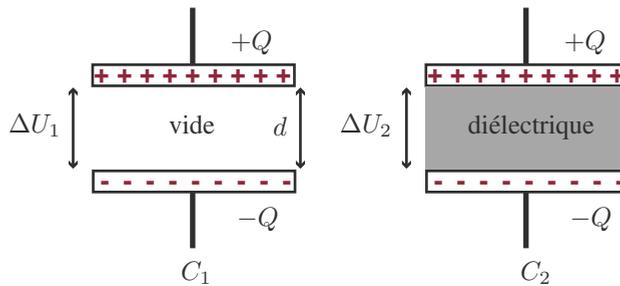


Figure 7.4 Expérience de Faraday sur les condensateurs.

Sous l'effet de la différence de potentiel, les charges s'accablent sur les plaques. Si on note S la surface des plaques, la densité surfacique de charges sur chaque plaque est

$$\sigma = \pm \frac{Q}{S}.$$

On peut relier la charge totale Q à la différence de potentiel en utilisant la loi de Gauss (6.15). En choisissant une surface fermée de forme parallélépipédique de section S et d'épaisseur δ (figure 7.5), on peut écrire

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{\delta S}.$$

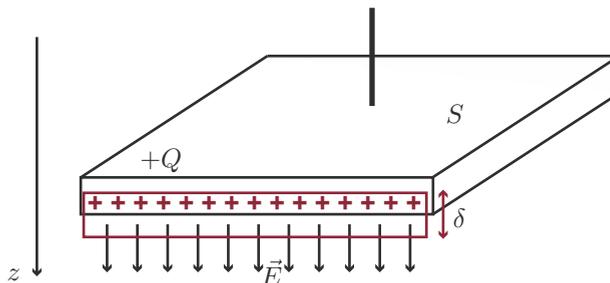


Figure 7.5 Surface de Gauss utilisée pour calculer la capacité du condensateur.

Si on choisit l'axe z comme l'axe qui porte le vecteur champ électrique : $\vec{E} = E\vec{e}_z$, perpendiculaire à la plaque du condensateur, la divergence du champ électrique est $\partial E/\partial z$. En choisissant une épaisseur δ suffisamment petite, on peut écrire que

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{E}{\delta} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{S}.$$

Par conséquent, avec $E = \Delta U/d$ et $\sigma = Q/S$, on peut écrire la relation entre la charge totale et la différence de potentiel :

$$Q = \frac{S\epsilon_0}{d}\Delta U = C\Delta U.$$

où C est la **capacité** du condensateur.

Dans l'expérience de Faraday, si la capacité C augmente par la présence du diélectrique alors que la charge Q reste constante, c'est que la différence de potentiel et le champ électrique diminuent. D'après la loi de Gauss, si le flux du champ électrique au travers de la surface fermée est moindre, c'est que des charges sont apparues en surface de l'isolant. C'est un effet de **polarisation** de l'isolant, qui peut être expliqué de façon microscopique à l'échelle des atomes ou des molécules qui constituent l'isolant.

7.3.4 Effet microscopique d'un champ électrique variable

En présence d'une onde électromagnétique dont le champ électrique varie de façon périodique, les atomes et molécules du milieu matériel développent également des dipôles induits variables qui répondent au champ externe variable. Le modèle physique qui permet d'aborder ce phénomène est le modèle du nuage d'électrons liés au noyau par une force de rappel élastique (figure 7.6). Pour simplifier, nous considérons un atome avec un seul électron, l'atome d'hydrogène. Ce modèle fait intervenir trois forces :

- la force de rappel élastique ;
- une force de frottement, appelée force de freinage ;
- une force électrique externe issue du champ électrique variable.

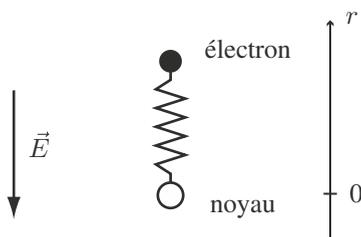


Figure 7.6 Modèle de l'électron lié au noyau par une force de rappel élastique et soumis à un champ électrique variable.

L'équation de mouvement pour la position $r(t)$ de l'électron est

$$m_e \frac{d^2 r}{dt^2} + \Gamma \frac{dr}{dt} + m_e \omega_0^2 r = -q_e E. \quad (7.7)$$

La pulsation ω_0 est la pulsation propre de la liaison élastique entre l'électron et le noyau et la raideur du ressort mécanique équivalent est $k = m_e \omega_0^2$. La force de freinage est proportionnelle et opposée à la vitesse, avec un coefficient de freinage Γ qui a la dimension d'une pulsation :

$$\Gamma = \frac{\omega_0^2 q_e^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3}.$$

L'équation (7.7) est identique à l'équation de l'oscillateur harmonique amorti et forcé (2.26) établie au chapitre 2. Si on suppose une sollicitation monochromatique de la forme

$$E = E_0 e^{i\omega t},$$

on va chercher une solution également monochromatique de la forme

$$r(t) = r_0 e^{i(\omega t + \phi)}.$$

Par ce choix d'oscillation harmonique, l'amplitude d'oscillation de l'électron est donnée par la relation

$$r_0 [m_e(\omega^2 - \omega_0^2) - i\Gamma\omega] = q_e E_0, \quad (7.8)$$

et la polarisabilité $\alpha = q_e r_0 / \epsilon_0 E_0$ est

$$\alpha = \frac{q_e^2}{m_e \epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}. \quad (7.9)$$

On constate que cette polarisabilité est maintenant complexe, et peut se mettre sous la forme $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$, avec une partie réelle et une partie imaginaire.

7.3.5 Effet macroscopique d'un champ électrique variable

Un milieu matériel soumis à une onde électromagnétique va se comporter comme une grande collection d'oscillateurs dipolaires avec une polarisation macroscopique complexe. Il s'ensuit que la susceptibilité électrique comme la permittivité relative est aussi une fonction complexe de la pulsation de l'onde électrique appliquée au milieu.

L'effet d'un champ électrique variable va donc être pris en compte au travers de l'équation de Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon}, \quad (7.10)$$

avec une permittivité :

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = \varepsilon_0 [\varepsilon_r'(\omega) + i\varepsilon_r''(\omega)]. \quad (7.11)$$

C'est la permittivité relative qui rend compte du comportement électrique du milieu matériel. Cette permittivité intervient également dans l'expression du courant de déplacement de l'équation de Maxwell-Ampère. Dans un milieu matériel, le courant de déplacement est

$$\vec{j}_D = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (7.12)$$

Le calcul de la polarisabilité microscopique (7.9) montre que la partie imaginaire est proportionnelle à la pulsation. En posant $\omega = 0$, on retrouve la polarisabilité réelle obtenue pour un champ électrique constant. La permittivité est également réelle dans ce cas.

Dans les domaines d'application des diélectriques, il est courant d'écrire la permittivité relative sous la forme

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r' \left(1 + i \frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'} \right) = \varepsilon_r' + i\varepsilon_r' \tan \theta_p.$$

La quantité $\varepsilon_r' \tan \theta_p$ est appelée le **facteur de perte** car il caractérise l'aptitude du milieu matériel à absorber l'énergie électromagnétique, en général convertie en énergie thermique. L'angle θ_p est, lui, appelé l'**angle de perte**.



Encart 7.3 Le chauffage des diélectriques par micro-ondes

Avec les méthodes classiques de chauffage (convection, conduction, rayonnement infrarouge), l'énergie est absorbée en surface puis diffuse au sein du matériau. Comme les mauvais conducteurs électriques sont en général des mauvais conducteurs thermiques, il est souvent difficile de chauffer des diélectriques, en particulier les matériaux solides qui ne peuvent bénéficier de la convection.

Si une onde électromagnétique peut pénétrer au cœur d'un matériau, elle peut induire un chauffage par conversion de l'énergie électromagnétique en énergie thermique. Sous l'effet d'un champ électrique variable, les moments dipolaires variables vont induire des frottements interparticulaires responsables de l'échauffement.

Grâce à un facteur de perte élevé ($\varepsilon_r' \tan \delta \approx 12$ à une fréquence $\nu = 2450$ MHz), l'eau absorbe particulièrement bien l'énergie dans le domaine des micro-ondes. C'est à la suite de travaux sur le radar micro-ondes pendant la seconde guerre mondiale que des ingénieurs américains eurent l'idée d'utiliser cette technologie pour chauffer les aliments, particulièrement riches en eau.

7.4 INDUCTION MAGNÉTIQUE

7.4.1 Une force magnétique faible

Quand une charge q se déplaçant à une vitesse \vec{v} est placée dans un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) , elle subit une force qui est la somme d'une force électrique et d'une force magnétique :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Pour une onde électromagnétique plane, on a vu que les amplitudes des champs \vec{E} et \vec{B} sont reliés par $E = cB$. L'intensité de la force électromagnétique est donc, en ordre de grandeur

$$\|\vec{F}\| \approx qE \left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

et seule la force électrique qE est importante tant que la charge se déplace à une vitesse faible par rapport à la vitesse de la lumière ($v \ll c$). Dans les matériaux, le déplacement des charges libres (les électrons d'un conducteur par exemple) est donc essentiellement assuré par le champ électrique. Le champ magnétique apporte une contribution négligeable à ce mouvement.

7.4.2 Classification magnétique des matériaux

Les matériaux ont des propriétés magnétiques très variables. Les principales propriétés magnétiques sont résumées par les définitions suivantes :

Définitions

- Un matériau est **amagnétique** lorsqu'il ne possède pas de propriétés magnétiques.
- Un matériau est **ferromagnétique** quand il porte une aimantation permanente ou de longue durée plus importante que le champ inducteur.
- Un matériau est **paramagnétique** quand il présente une aimantation en présence d'un champ extérieur seulement. L'aimantation est alignée avec le champ extérieur.
- Un matériau est **diamagnétique** quand il présente une aimantation opposée au champ inducteur (exemples : bismuth, graphite, antimoine). L'aimantation est en général faible.

Pour rendre compte mathématiquement de ces différentes propriétés, on utilise la **susceptibilité magnétique**. Quand un milieu matériel est soumis à un champ d'excitation magnétique externe \vec{H} , il résulte une aimantation \vec{M} reliée linéairement au champ inducteur par

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad (7.13)$$

où χ_m est la susceptibilité magnétique du matériau. Elle est nulle pour les matériaux amagnétiques, négative pour les matériaux diamagnétiques, positive pour les matériaux paramagnétiques et ferromagnétiques.

Le champ magnétique induit se superpose au champ magnétique inducteur, ce qui donne pour le champ total

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 \mu_r \vec{H}. \quad (7.14)$$

On retrouve ici la constante μ_0 qui est la perméabilité magnétique du vide et on a introduit la **perméabilité relative** μ_r , nombre sans dimension. La perméabilité relative est très importante dans les matériaux ferromagnétiques ($\mu_r \approx 10^4$ pour le fer par exemple) et proche de l'unité pour les matériaux paramagnétiques.

7.4.3 Effet d'un champ magnétique variable

Quand le champ magnétique est variable, en présence d'une onde électromagnétique, on décrit formellement les effets de ce champ sur la matière par une perméabilité relative sous forme complexe, à l'image des effets électriques. On écrira donc

$$\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0 [\mu_r'(\omega) + i \mu_r''(\omega)] \quad (7.15)$$

avec des parties réelle et imaginaire fonctions de la pulsation de l'onde électromagnétique.

7.5 ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LA MATIÈRE

En présence d'un champ électromagnétique, un milieu matériel subit deux effets : un effet de polarisation dû au champ électrique et un effet d'aimantation dû au champ magnétique. Ces deux effets sont décrits par deux fonctions complexes ε et μ qui décrivent la relation entre le champ incident (\vec{E} , \vec{B}) et le milieu matériel.

Dans un milieu matériel homogène (c'est-à-dire que ε et μ ne dépendent pas de la position), les quatre équations de Maxwell ont une forme proche de celles établies précédemment :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon}, \quad (7.16)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (7.17)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (7.18)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \left(\gamma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (7.19)$$

La propagation des ondes électromagnétiques pourra être déterminée si on a connaissance de la conductivité γ , de la densité volumique de charges libres ρ_c , de la permittivité complexe ε et de la perméabilité complexe μ du matériau.



On peut remarquer ici que la forme des équations de Maxwell **dans le vide** et celle des équations de Maxwell dans un milieu matériel sont identiques. Du point de vue électromagnétique, le vide est donc assimilé à un cas particulier de la matière avec des propriétés électriques et magnétiques telles que

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \mu = \mu_0.$$

7.6 ÉQUATION DE PROPAGATION

7.6.1 Équations générales

La combinaison des équations (7.16) à (7.19) permet d'obtenir une équation de propagation pour le champ électromagnétique (\vec{E} , \vec{B}). En effet, le rotationnel de (7.18), en combinaison avec (7.19), donne une équation pour le champ électrique seul :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \text{grad } \rho_c + \mu \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (7.20)$$

De même, le rotationnel de (7.19) en combinaison avec (7.18) donne pour le champ magnétique

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \mu \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (7.21)$$



On remarque aisément la différence entre les équations de propagations (7.20) et (7.21) : l'équation de propagation du champ électrique comporte un terme supplémentaire sous la forme du gradient de la densité des charges libres.

En présence de charges libres (donc un milieu matériel globalement non neutre électriquement), l'équation de Maxwell-Gauss montre que pour une onde monochromatique de la forme

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)},$$

les vecteurs \vec{k} et \vec{E} ne sont pas perpendiculaires. Pour un milieu non neutre, il ne peut y avoir d'onde plane électromagnétique.

7.6.2 Équation de propagation en milieu neutre

Pour un milieu neutre ($\rho_c = 0$), l'équation de propagation pour le champ électrique est identique à celle du champ magnétique. On écrit celle pour le champ électrique :

$$\Delta \vec{E} = \mu \left(\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right). \quad (7.22)$$

Si l'onde est monochromatique et caractérisée par le couple (\vec{k}, ω) ,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

la relation de dispersion s'écrit

$$k^2 = \mu \varepsilon \omega^2 + i \mu \gamma \omega,$$

ou encore

$$k^2 = \mu \left(\varepsilon + i \frac{\gamma}{\omega} \right) \omega^2 = \mu \hat{\varepsilon} \omega^2, \quad (7.23)$$

avec l'introduction d'une **constante diélectrique généralisée**

$$\hat{\varepsilon} = (\varepsilon + i \gamma / \omega). \quad (7.24)$$

La fréquence ω de l'onde est un réel positif. En revanche, on considère le nombre d'onde k (et plus généralement le vecteur d'onde \vec{k}) comme une quantité complexe. Selon le signe et la nature du produit $(\hat{\varepsilon} \mu)$, on aura à considérer différents types de nombres d'ondes, et donc différents types de propagation.

Par identification avec la définition du facteur de perte, on peut écrire que dans un milieu neutre caractérisé par une conductivité γ et une permittivité relative ε'_r , l'**angle de perte** est calculé par

$$\tan \theta_p = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon'_r \omega}. \quad (7.25)$$

7.6.3 Onde progressive sans atténuation

Dans le cas où $(\hat{\varepsilon} \mu)$ est un **réel positif**, alors, k^2 est positif et k prend des valeurs réelles. La relation de dispersion est simplement

$$k = \sqrt{\hat{\varepsilon} \mu} \omega$$

et la propagation se fait sans atténuation : l'amplitude des champs \vec{E} et \vec{B} reste constante au cours de la propagation et l'onde électromagnétique a la structure d'une onde plane.

D'après la relation (7.23), la vitesse de phase est

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\hat{\varepsilon} \mu}},$$

et la propagation est dispersive : la vitesse de phase varie avec la pulsation.

7.6.4 Onde évanescente

Si $(\hat{\epsilon}\mu)$ est un **réel négatif**, $k^2 < 0$ et k est un imaginaire pur. Le champ électrique a donc comme écriture

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t}$$

et présente une décroissance spatiale exponentielle sans propagation : le champ \vec{E} oscille en phase dans tout l'espace. On parle dans ce cas d'une onde évanescente.

Remarque : en calculant la racine carrée de $k^2 < 0$, on a éliminé la solution $+ik$ qui correspond à une croissance exponentielle du champ (\vec{E}, \vec{B}) car ce n'est pas une solution acceptable physiquement.

7.6.5 Onde progressive atténuée

Dans le cas où $(\hat{\epsilon}\mu)$ est un nombre **complexe**, alors le vecteur d'onde $\vec{k} = \vec{k}_r + i\vec{k}_i$ est également un nombre complexe, et la propagation de l'onde est décrite par

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\vec{k}_i\cdot\vec{r}} e^{i(\vec{k}_r\cdot\vec{r} - \omega t)}.$$

La première exponentielle décrit l'atténuation de l'onde avec une distance caractéristique d'atténuation

$$\delta = 1/k_i$$

tandis que le second décrit une propagation avec une longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k_r$. Malgré la décroissance de l'amplitude au cours de la propagation, on peut quand même définir une vitesse de phase

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_r},$$

et la dispersion est possible. Dans ce cas, la partie réelle du nombre d'onde dépend de la fréquence : $k_r = k_r(\omega)$. La vitesse de groupe est définie par rapport à la partie réelle du nombre d'onde :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_r}.$$

7.7 PROPAGATION DANS LES MILIEUX MATÉRIELS HOMOGÈNES

On considère dans cette section des milieux électriquement **neutres** ($\rho_c = 0$), **homogènes** et **isotropes**. On suppose également que le matériau n'est soumis à aucun champ électrique constant ou champ magnétique constant. La seule sollicitation électromagnétique provient de l'onde qui traverse le matériau. Malgré la neutralité du milieu macroscopique, on peut envisager la présence de charges du point de vue microscopique : un électron libre, un ion, etc. La force magnétique étant négligeable par rapport à la force électrique, on choisira $\mu = \mu_0$ pour les différents milieux présentés ci-après.

7.7.1 Propagation dans les plasmas

Un plasma est un gaz ionisé : les atomes ou molécules du gaz sont chargés individuellement, mais le milieu est globalement neutre car il y a autant de charges positives que de charges négatives. Un plasma est un milieu dilué, avec de grandes distances entre chaque atome. Lorsqu'un plasma est soumis à une onde électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) , les particules de masse m portant une charge q ont comme équation de mouvement

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}. \quad (7.26)$$

Avec une onde caractérisée par une fonction de propagation à une dimension $\exp i(kx - \omega t)$, on peut supposer une même forme pour la vitesse de la charge. La relation entre la vitesse et le champ électrique est donc

$$-im\omega\vec{v} = q\vec{E},$$

et on peut, par identification avec la loi d'Ohm microscopique $\vec{j} = Nq\vec{v} = q\vec{E}$, calculer une conductivité

$$\gamma = i \frac{Nq^2}{m\omega}.$$

Cette conductivité est un imaginaire pur, ce qui indique que la vitesse des charges est toujours déphasée de $\pi/2$ par rapport au champ électrique. La relation de dispersion est donc

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad (7.27)$$

où on a introduit la **pulsation plasma**

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}. \quad (7.28)$$

Cette pulsation particulière sépare le domaine fréquentiel en deux régions :

- **Bande 1 : basses fréquences.** Pour $\omega \ll \omega_p$, la relation de dispersion est $k^2 = -\omega_p^2/c^2$, ce qui implique $k = i\omega_p/c$ avec $k_r = 0$. Il n'y a donc pas de propagation d'onde dans cette région.
- **Bande 2 : hautes fréquences.** Pour $\omega \gg \omega_p$, la relation de dispersion est identique à la relation de dispersion du vide : $k = \omega/c$ et la propagation est non dispersive.

Un gaz ionisé agit donc comme un filtre passe-haut : il n'autorise pas la propagation d'ondes de fréquences inférieures à la fréquence plasma.



Encart 7.4 La ionosphère

La ionosphère est une couche atmosphérique ionisée située entre 60 et 800 km d'altitude. Elle dispose de propriétés réfléchissantes pour le rayonnement basses fréquences, en particulier les ondes radio. Les liaisons radio de grande distance utilisent la réflexion des ondes sur la ionosphère pour transmettre des signaux malgré la courbure de la Terre.

7.7.2 Propagation dans les métaux

Les métaux sont caractérisés par une forte conductivité assurée par les électrons libres. Ces porteurs de charge peuvent se déplacer au sein d'une matrice d'atomes et sont influencés par le champ électrique véhiculé par l'onde électromagnétique. L'équation de mouvement d'un électron de masse m_e , de charge q_e et animé d'une vitesse instantanée \vec{v} , est donc

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m_e}{T_c} \vec{v} - q_e \vec{E}. \quad (7.29)$$

Dans cette relation, le terme de freinage est exprimé par un temps caractéristique T_c qui est relié à la fréquence des collisions entre les charges libres et les atomes de la structure solide du conducteur.

Si l'onde est caractérisée par une fonction de propagation à une dimension $\exp i(kx - \omega t)$, on suppose une même forme pour la vitesse de l'électron. La relation entre vitesse et champ électrique est donc

$$\vec{v} = -\frac{q_e}{m} \left(\frac{1}{T_c} - i\omega \right)^{-1} \vec{E},$$

et par identification avec la loi d'Ohm microscopique $\vec{j} = nq_e \vec{v} = \gamma \vec{E}$, on trouve une conductivité

$$\gamma = \frac{nq_e^2 T_c}{m} \left(\frac{1}{1 - i\omega T_c} \right) = \gamma_0 \left(\frac{1}{1 - i\omega T_c} \right). \quad (7.30)$$

Cette conductivité dépend de la densité numérique n des électrons libres dans la matrice du conducteur. La constante diélectrique généralisée

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0 \left[1 - \frac{nq_e^2}{m\epsilon_0} \left(\frac{T_c}{\omega^2 T_c + i\omega} \right) \right]$$

fait apparaître la pulsation plasma et la relation de dispersion $k^2 = (\hat{\epsilon}\mu_0)\omega^2$ se met sous la forme

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{i}{\omega T_c}} \right) \right]. \quad (7.31)$$

Cette expression fait apparaître deux fréquences caractéristiques : la pulsation plasma ω_p et la fréquence de collision T_c^{-1} des électrons avec les atomes de la matrice solide. D'une forme générale assez complexe, la relation de dispersion est plus facilement analysée en étudiant séparément des bandes de fréquences séparées par les deux fréquences caractéristiques du système : T_c^{-1} et $\omega_p/2\pi$:

- **Bande 1 : faibles fréquences** ($\omega T_c \ll 1$). Dans cette bande de fréquences, la conductivité (7.30) est indépendante de la fréquence et la relation de dispersion (7.31) se simplifie en

$$k^2 = i\omega\gamma_0\mu_0.$$

Le nombre d'onde complexe k a donc des parties réelle et imaginaire telles que

$$k = k_r + ik_i = \delta^{-1} - i\delta^{-1}$$

avec une distance caractéristique

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$$

qui correspond à une **épaisseur de peau**. Pour cette bande de fréquences, l'onde électromagnétique se propage en s'atténuant, la pénétration de l'onde dans le métal ne peut pénétrer dans le métal que sur une courte distance avant d'être atténuée exponentiellement. Cette épaisseur décroît quand la fréquence de l'onde augmente. La propagation est dispersive, comme le montre la **figure 7.7c**.

- **Bande 2 : fréquences intermédiaires** ($1/T_c \ll \omega < l\omega_p$). Dans cette bande de fréquences, la relation de dispersion (7.31) se simplifie en

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) < 0$$

et le nombre d'onde k est un imaginaire pur. Cette bande de fréquence correspond à des **ondes évanescentes** : il n'y a pas de propagation au sein du métal. Si on peut toujours calculer une vitesse de phase, la vitesse de groupe n'existe pas puisque dans ce régime il n'y a pas de propagation d'énergie. Pour les métaux, le domaine des fréquences optiques est inclus dans cette bande d'ondes évanescente : le métal est réfléchissant.

- **Bande 3 : hautes fréquences** ($1/T_c \ll \omega_p < l\omega$). Pour des pulsations supérieures à la pulsation plasma, la relation de dispersion (7.31) est

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) > 0$$

ce qui correspond à un nombre d'onde réel et donc une propagation dans le métal. La **propagation** dans ce domaine **n'est pas dispersive** : les vitesses de phase et de groupe sont égales à la vitesse c de la lumière. Plus la pulsation de l'onde augmente, plus l'épaisseur de peau augmente, comme le montre la **figure 7.7b**. À très haute fréquence, le métal est transparent.

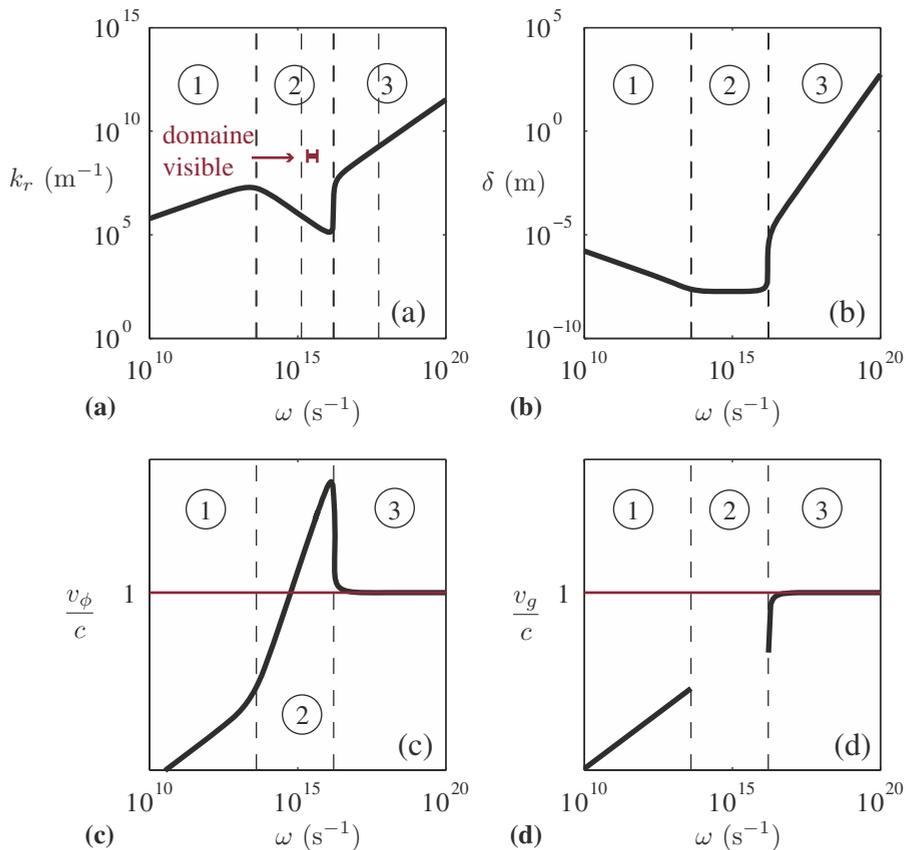


Figure 7.7 Relation de dispersion de la propagation d'une onde monochromatique dans le cuivre :

(a) $k_r(\omega)$, (b) épaisseur de peau $\delta = k_i^{-1}(\omega)$, (c) vitesse de phase $v_\phi(\omega)$ normalisée par c , (d) vitesse de groupe $v_g(\omega)$ normalisée par c .

Exemple : propagation dans le cuivre

Le cuivre est un très bon conducteur électrique car il dispose d'un électron libre par atome. La conductivité à 0°C est $\gamma = 5,9 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, et la densité numérique de charges libres est $N = 8,46 \cdot 10^{28} \text{m}^{-3}$. Pour ce matériau, les pulsations caractéristiques sont $T_c^{-1} = 4 \times 10^{13} \text{s}^{-1}$ et $\omega_p = 1,6 \cdot 10^{16} \text{s}^{-1}$. La relation de dispersion tracée sur la **figure 7.7** montre que la bande des fréquences optiques est totalement

incluse dans cette bande intermédiaire. Le métal est opaque dans ce domaine, car il ne peut y avoir de propagation d'onde électromagnétique au sein du matériau. En revanche, la propagation est possible sur une distance de 1 mm pour des ondes de fréquence égale à 10^{17} Hz, début du domaine des rayons X. Pour des pulsations très grandes devant la pulsation plasma ($\omega \gg \omega_p$), on retrouve la relation de dispersion de l'onde électromagnétique dans le vide : le milieu matériel est alors transparent pour ces fréquences.



Encart 7.5 Les miroirs

La conductivité des métaux empêche la propagation des ondes électromagnétiques dans le domaine optique. Cette propriété est depuis longtemps exploitée pour former des miroirs : comme l'énergie électromagnétique ne peut pénétrer le métal, elle doit être renvoyée.

Les premiers miroirs étaient faits de plaques de métal polies. Mais une surface approximativement plane ne renvoyait qu'une image imparfaite et déformée. Au XIV^e siècle, on commence à utiliser le verre comme un support plan sur lequel on dépose un amalgame de plomb et d'étain. Puis vint la technique de la déposition d'une fine couche de sels d'argent sur une surface de verre. Actuellement, pour les miroirs courants, on utilise de l'aluminium comme couche réfléchissante et on le double d'une couche de protection.

En introduisant dans le verre des atomes métalliques à faible concentration, on peut favoriser la réflexion du rayonnement infrarouge tout en laissant passer au mieux le rayonnement visible. Cette technique permet de fabriquer des vitrages dits athermiques, en fait des vitrages qui limitent le franchissement pour le rayonnement infrarouge. Ces vitrages sont utilisés dans l'automobile et le bâtiment.

L'effet de peau mis en évidence dans la bande 1, appelé aussi **effet Kelvin**, incite à la description suivante : la conduction électrique sous l'effet d'un champ électromagnétique n'a lieu que dans une fine épaisseur où toutes les charges de conduction sont concentrées. On peut alors définir une densité superficielle de charges σ , ainsi qu'une densité superficielle de courant \vec{j}_s . Dans la limite du métal parfaitement conducteur, ces quantités ne sont définies que dans le plan de l'interface du matériau.

7.7.3 Propagation dans un isolant parfait

Un isolant parfait est caractérisé par une conductivité nulle et une permittivité relative $\epsilon_r \geq 1$:

$$\gamma = 0, \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0.$$

Avec ces hypothèses, la relation de dispersion généralisée est

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r(\omega)} \quad (7.32)$$

et cette relation montre que la dispersion de l'onde est liée à la variation en fréquence de la permittivité relative $\varepsilon_r(\omega)$.

La vitesse de phase calculée par ω/k vaut

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r'}} = \frac{c}{n}, \quad (7.33)$$

et $n = \sqrt{\varepsilon_r'}$ est appelé l'**indice de réfraction** du milieu. Ce n'est pas une simple analogie avec la théorie de l'optique géométrique car les lois classiques de l'optique peuvent être obtenues à partir des équations de Maxwell.

7.7.4 Propagation dans un diélectrique imparfait sans pertes

Dans un diélectrique imparfait, la conduction n'est pas nulle même si elle est très faible ($\gamma \neq 0$). Si l'on ne tient pas compte de pertes au sein du matériau (l'absorption d'énergie électromagnétique par le matériau), la permittivité relative ε_r est réelle, et la relation de dispersion s'écrit

$$k^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega} \right). \quad (7.34)$$

Cette relation fait apparaître une pulsation caractéristique

$$\omega_c = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

qui sépare le domaine de fréquence en deux bandes :

- **Bande 1 : faibles fréquences** ($\omega \ll \omega_c$). On a dans ce cas un régime de propagation avec atténuation :

$$k^2 = i \frac{\gamma \omega}{\varepsilon_0 c^2}$$

et

$$k = \delta^{-1} - i \delta^{-1}$$

avec une profondeur de pénétration

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

identique à celle obtenue dans le cas du métal.

- **Bande 2 : hautes fréquences** ($\omega \gg \omega_c$). La relation de dispersion se simplifie en

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r}$$

et traduit une propagation de l'onde sans atténuation. Le milieu est donc transparent pour ces fréquences.

Exemple : propagation dans le verre

Le verre a une conductivité $\gamma \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ } \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ et une permittivité relative $\varepsilon_r \approx 4,8$. La fréquence caractéristique est donc $\omega_c = 9,4 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$. On voit donc que les fréquences du domaine optique sont largement supérieures à $\omega_c/2\pi$.

7.7.5 Propagation dans un diélectrique réel

Un diélectrique réel est caractérisé par une faible conductivité et une permittivité relative complexe dont la partie imaginaire caractérise l'absorption de l'onde par le matériau. La relation de dispersion est

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r' \left[1 + i \left(\frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r' \omega} \right) \right]. \quad (7.35)$$

Sous cette forme, on peut voir qu'à hautes fréquences et pour une faible absorption ($\varepsilon_r'' \ll \varepsilon_r'$), on retrouve une propagation non dispersive avec une vitesse de propagation

$$v_\varphi = v_g = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r'}}.$$

La partie imaginaire de la relation de dispersion (7.35) comporte deux termes. On peut comparer l'importance relative de ces deux termes en fonction de la pulsation ω . L'absorption de l'énergie électromagnétique sera faible si la pulsation est

$$\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r''}.$$

Au contraire, on aura une forte absorption pour

$$\omega \gg \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r''}.$$

À titre d'exemple, le [tableau 7.3](#) donne quelques valeurs des parties réelles et complexes de la permittivité pour des matériaux diélectriques courants. Cette permittivité est donnée pour une fréquence $\nu = 2,45 \text{ GHz}$, fréquence micro-onde utilisée pour le chauffage industriel et domestique.

Tableau 7.3 Permittivité pour quelques matériaux à 2 450 MHz.

Matériau	ε'_r	ε''_r	$\varepsilon''_r/\varepsilon'_r$
glace	3,2	0,003	10^{-3}
eau	76	12	0,16
papier	3,5	0,4	0,11
pvc	2,9	0,1	0,03
plexiglass	2,6	0,015	0,006
verre	4,82	0,026	0,005

7.8 ONDES ET INTERFACES

On considère dans cette partie deux milieux semi-infinis qui peuvent être diélectriques ou conducteurs. Chaque milieu est caractérisé par sa permittivité, sa perméabilité, sa conductivité. Les notations sont données dans le **tableau suivant**

Propriété	Milieu 1	Milieu 2
permittivité	$\varepsilon_1 = \varepsilon_{r1}\varepsilon_0$	$\varepsilon_2 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0$
perméabilité	$\mu_1 = \mu_{r1}\mu_0$	$\mu_2 = \mu_{r2}\mu_0$
conductivité	γ_1	γ_2
champ électromagnétique	(\vec{E}_1, \vec{B}_1)	(\vec{E}_2, \vec{B}_2)

Afin d'aborder les problèmes d'interfaces de manière simple, on va considérer dans la suite une propagation d'onde électromagnétique orientée suivant l'axe x (le vecteur d'onde est $\vec{k} = (k, 0, 0)$) perpendiculaire à l'interface plane qui sépare les deux milieux (le plan yz). Les champs \vec{E} et \vec{B} se décomposent en composantes normales ($E_N = E_x$ et $B_N = B_x$) et tangentielles ($\vec{E}_T = (E_y, E_z)$ et $\vec{B}_T = (B_y, B_z)$).

Nous ne démontrons pas ici les relations de passage entre deux milieux. Les quatre relations de passage pour les composantes normales et tangentielles des champs électrique et magnétique sont :

- Le franchissement de l'interface implique une discontinuité de la composante normale du champ électrique :

$$\varepsilon_1 E_{1N} - \varepsilon_2 E_{2N} = \sigma, \quad (7.36)$$

où σ est la densité surfacique de charges.

- Les composantes tangentielles du champ électrique sont continues à l'interface :

$$\vec{E}_{1T} = \vec{E}_{2T}. \quad (7.37)$$

- Les composantes normales du champ magnétique sont continues à l'interface :

$$B_{1N} = B_{2N}. \quad (7.38)$$

- Les composantes tangentielles du champ magnétiques sont discontinues :

$$\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{1T} - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{2T} = \vec{j}_s, \quad (7.39)$$

avec \vec{j}_s le vecteur densité superficielle de courant.

On peut facilement retrouver les relations de passage entre deux milieux diélectriques à partir de ce tableau en posant $\sigma = 0$ et $\vec{j}_s = 0$.

7.9 LOIS DE SNELL-DESCARTES

Les lois de Snell-Descartes sont les lois de transmission et de réflexion des ondes électromagnétiques au travers d'une interface entre deux diélectriques. Dans le domaine optique, une interface est appelée un **dioptré**. Ce dioptré sépare deux milieux (1) et (2) caractérisés par des indices de réfraction $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$ et $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$. L'onde incidente qui se dirige vers l'interface (\vec{E}_1, \vec{B}_1) a un vecteur d'onde \vec{k}_1 et une pulsation ω_1 . Elle génère deux ondes à l'interface (figure 7.8) :

- une onde transmise (\vec{E}_2, \vec{B}_2) dans le milieu (2) avec un vecteur d'onde \vec{k}_2 et une pulsation ω_2 ;
- une onde réfléchie (\vec{E}'_1, \vec{B}'_1) dans le milieu (1) avec un vecteur d'onde \vec{k}'_1 et une pulsation ω'_1 .

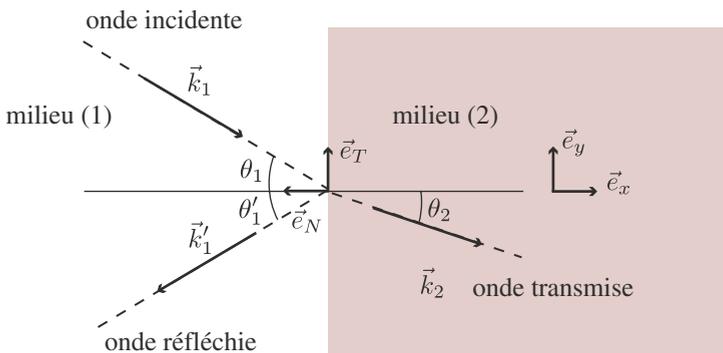


Figure 7.8 Réflexion et transmission d'une onde au travers d'une interface entre deux milieux.

Les charges liées du diélectrique (2) sont excitées par l'onde incidente à la pulsation ω_1 et émettent un rayonnement avec une pulsation identique. Les pulsations des ondes réfléchies et transmises sont donc égales :

$$\omega_1 = \omega'_1 = \omega'_2.$$

Les vitesses de phase dans les deux milieux ne sont pas égales mais dépendent des indices de réfraction. Comme la pulsation est constante, on a, d'après la relation (7.33),

$$\omega = \frac{\|\vec{k}_1\|c}{n_1} = \frac{\|\vec{k}'_1\|c}{n_1} = \frac{\|\vec{k}_2\|c}{n_2}.$$

Si on note λ_0 la longueur d'onde dans le vide, on a $\lambda_1 = \lambda_0/n_1$ et $\lambda_2 = \lambda_0/n_2$: l'onde parcourt des distances différentes pendant la même période suivant l'indice de réfraction du milieu.

Le champ électromagnétique dans le milieu (1) est composé de deux champs élémentaires : le champ incident et le champ réfléchi. Le champ électromagnétique dans le milieu (2) est composé du seul champ transmis. La continuité des composantes tangentielles du champ électrique impose

$$\vec{E}_{1T} + \vec{E}'_{1T} = \vec{E}_{2T}$$

soit à chaque instant

$$\vec{E}_{01T} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{E}'_{01T} e^{i(\vec{k}'_1 \cdot \vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_{02T} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

ce qui peut s'écrire

$$\vec{E}_{01T} + \vec{E}'_{01T} e^{i(\vec{k}'_1 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{02T} e^{i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}}.$$

Cette dernière relation doit être valable pour n'importe quel point \vec{r} du dioptre, ce qui impose la double égalité :

$$(\vec{k}'_1 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} = 0. \quad (7.40)$$

On peut tirer deux conclusions importantes de cette double relation :

- La première est que les différences entre les vecteurs d'onde $\vec{k}'_1 - \vec{k}_1$ et $\vec{k}_2 - \vec{k}_1$ sont orientées selon la normale \vec{e}_N unitaire à l'interface au point d'incidence :

$$\vec{k}'_1 - \vec{k}_1 = a\vec{e}_N \quad \text{et} \quad \vec{k}_2 - \vec{k}_1 = b\vec{e}_N,$$

où a et b sont des constantes sans dimension. C'est l'énoncé de la **première loi de Snell-Descartes** : les vecteurs d'ondes réfléchi et transmis \vec{k}'_1 et \vec{k}_2 sont dans le plan d'incidence formé par les vecteurs \vec{k}_1 et \vec{e}_N .

- La deuxième conclusion provient du produit scalaire entre les différences $\vec{k}'_1 - \vec{k}_1$ et $\vec{k}_2 - \vec{k}_1$ avec le vecteur unitaire tangent au dioptre au point d'incidence \vec{e}_T : comme $\vec{e}_N \cdot \vec{e}_T = 0$, on a

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{e}_T = \vec{k}'_1 \cdot \vec{e}_T = \vec{k}_2 \cdot \vec{e}_T.$$

Les vecteurs d'onde ont donc les mêmes composantes tangentielles ce qui donne les relations classiques qui forment la **deuxième loi de Snell-Descartes** :

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad \text{et} \quad n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (7.41)$$

L'ensemble des lois de Snell-Descartes sont à la base de l'optique géométrique utilisée pour comprendre la formation des images.

7.10 RÉFLEXION TOTALE SUR UNE INTERFACE

La réflexion totale d'une onde correspond à l'absence d'une onde transmise dans le milieu (2). Cette réflexion est possible quand l'indice n_2 est inférieur à l'indice n_1 . L'angle entre l'onde transmise et la perpendiculaire à l'axe d'incidence ne peut être supérieur à $\pi/2$, ce qui correspond à un angle d'incidence tel que

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2,$$

et la valeur limite de cet angle est

$$\theta_L = \theta_1 = \arcsin \frac{n_2}{n_1}.$$

Du point de vue électromagnétique, on peut analyser cette réflexion totale en prenant une valeur complexe pour l'angle $\theta - 2$. En effet, comme $\theta_1 > \theta_L$, alors $\sin \theta_2 > 1$. Cela correspond à une valeur de cosinus

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \pm i \theta^*, \quad \text{avec} \quad \theta^* = \sqrt{\sin^2 \theta_2 - 1}.$$

On peut donc écrire le champ électrique transmis sous la forme

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \text{avec} \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix},$$

soit

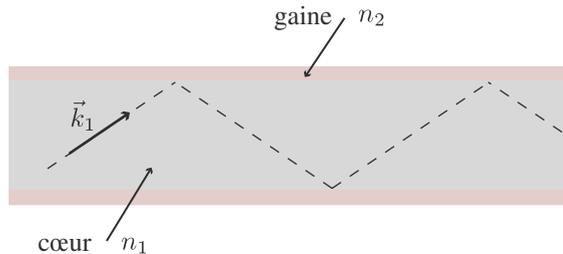
$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{-\frac{2\pi n_2}{\lambda_0} \theta^* x} e^{i(\frac{2\pi n_1}{\lambda_0} \sin \theta_1 y - \omega t)}.$$

C'est la description d'une onde progressive suivant l'axe y , mais évanescence suivant l'axe x . On doit noter ici que dans le calcul de θ_2 , seul le signe $-$ a été retenu, car le signe $+$ correspond à une croissance exponentielle de l'amplitude du champ électrique, ce qui n'est pas physiquement acceptable.



Encart 7.6 Les fibres optiques à saut d'indice

Une fibre optique est un guide d'onde coaxial conçu pour fonctionner avec le spectre visible. La fibre optique la plus simple, appelée fibre à saut d'indice, est constituée de deux matériaux isolants dont les indices de réfraction sont différents : le cœur a un indice n_1 et la gaine a un indice $n_2 < n_1$.



La propagation du signal le long de la fibre se fait grâce à des réflexions totales successives. La qualité d'une fibre optique est donnée en partie par la différence d'indice normalisée $\Delta = (n_1 - n_2)/n_1$. Pour des propagations sur de longues distances, l'absorption de l'onde par le matériau du cœur est un autre facteur déterminant.

7.11 PROPAGATION GUIDÉE

Le guidage des ondes électromagnétiques est d'un grand intérêt pour canaliser l'énergie électromagnétique et ainsi assurer le transport et l'utilisation de cette énergie. La technologie de guidage dépend essentiellement des fréquences et longueurs d'onde des ondes à transporter. Les fibres optiques utilisent les variations d'indice de réfraction des matériaux isolants pour transporter la lumière dans le domaine du visible ou du spectre proche, tandis que les ondes de fréquences micro-ondes sont canalisés par des guides métalliques.

7.11.1 Guide plan

Un guide plan est constitué de deux plans parallèles métalliques séparés d'une distance L_y (figure 7.9). Les plans sont parallèles au plan xz et la propagation de l'onde électromagnétique se fait dans la direction x . Le système est invariant par translation le long de l'axe z . Le champ électromagnétique étant transverse, le vecteur \vec{E} est dans le plan yz . De plus, comme le champ doit être nul dans le métal, la composante tangentielle E_y doit être nulle. Pour prendre en compte l'influence du guidage, on note le vecteur champ électrique

$$\vec{E} = E_z(x)\vec{e}_z e^{i(k_g x - \omega t)}.$$

Le nombre d'onde k_g est *a priori* différent du nombre d'onde k de l'onde dans le vide, l'indice g indique la présence du guide.

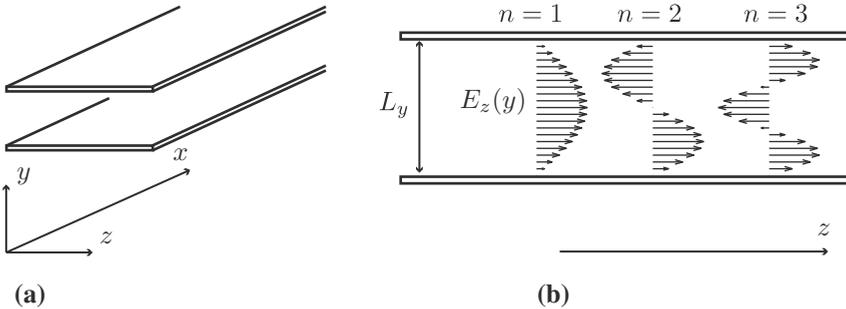


Figure 7.9 Guide plan constitué de deux plaques parallèles infiniment conductrices.

Dans le volume vide contenu dans le guide, l'équation de propagation est l'équation classique

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

avec un laplacien à deux dimensions $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$. L'équation de propagation s'écrit donc

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - k_g^2 E_z + \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 E_z = 0,$$

et en utilisant la relation de dispersion dans le vide $\omega = ck$, on a

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (k^2 - k_g^2) E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_c^2 E_z = 0.$$

Les solutions de cette équation dépendent du signe de $k^2 - k_g^2$:

- pour $k^2 - k_g^2 < 0$, la solution générale est de la forme $E_z(y) = A \exp(-k_c y) + B \exp(k_c y)$ et cette solution ne peut satisfaire les conditions aux limites $E_z(0) = E_z(L_y) = 0$.
- pour $k^2 - k_g^2 > 0$, la solution générale est de la forme $E_z(y) = A \cos(k_c y) + B \sin(k_c y)$ et les conditions aux limites imposent $A = 0$ et

$$k_c = n \frac{\pi}{L_y}, \quad \text{avec } n = 1, 2, \dots$$

Le nombre d'onde k_c est un **nombre d'onde de coupure**. Finalement, la relation de dispersion dans le guide d'onde plan est

$$k_g = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{nc\pi}{\omega L_y} \right)^2},$$

et la propagation est dispersive pour tout mode $n \geq 1$.

Le champ électrique dans le guide est maintenant complètement déterminé et il s'écrit

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) e^{i(k_g x - \omega t)}.$$

Le champ électrique est donc fonction de deux variables d'espace x et y . Par conséquent, le calcul du champ magnétique correspondant va donner des composantes selon x et y . Le champ \vec{B} reste bien perpendiculaire au champ électrique mais n'est plus perpendiculaire à la direction de propagation x . Il n'existe donc pas de mode transverse électromagnétique (TEM) dans un guide plan.



On doit remarquer ici la forte analogie avec le système mécanique de la corde vibrante tendue entre deux points distants d'une distance L_y . C'est ici le champ électrique qui joue le rôle du déplacement de la corde et les parois conductrices imposent un champ électrique nul sur deux plans parallèles. Il en résulte le même principe de sélection de modes que pour la corde vibrante, avec des modes discrets repérés par un entier n .

7.11.2 Guide rectangulaire

Le schéma du guide rectangulaire est proposé sur la [figure 7.10](#). On le suppose infiniment long dans la direction x et la section interne du guide est un rectangle de côtés L_y et L_z . On suppose également que l'intérieur du guide est entièrement vide.

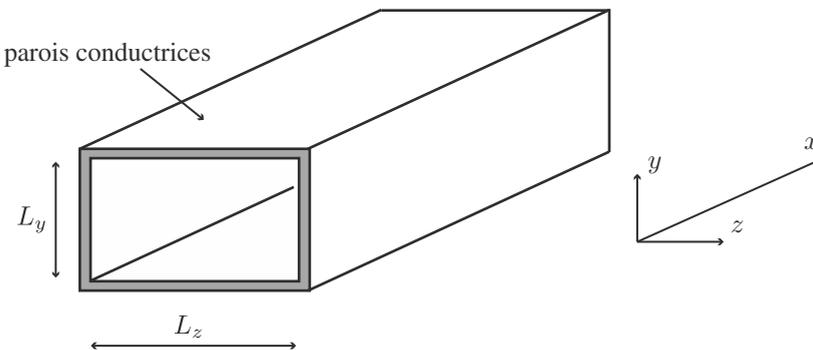


Figure 7.10 Schéma du guide d'onde de section rectangulaire : une cavité vide est fermée par des parois infiniment conductrices formant une section rectangulaire.

Grâce à l'invariance suivant x , on peut écrire que

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y) \exp[i(k_g x - \omega t)],$$

où k_g est le nombre d'onde dans le guide. Pour une onde monochromatique dans le vide, l'équation de propagation se réduit à

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0,$$

ce qui donne dans notre cas

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + (k^2 - k_g^2) \vec{E} = 0.$$

Comme pour le guide plan, on peut poser $k^2 - k_g^2 = k_c^2$, soit $k^2 - k_c^2 = k_g^2$. Plusieurs cas se présentent :

- si $k > k_c$, alors le nombre d'onde k_g est un réel positif et la propagation dans le guide se fait sans atténuation ;
- si $k = k_c$, on a $k_g = 0$, et donc une vibration en phase du champ électromagnétique dans toute la cavité du guide ;
- si $k < k_c$, alors k_g est un imaginaire pur et l'onde est évanescence : il n'y a pas de propagation dans le guide.

Ce raisonnement montre l'existence d'un nombre d'onde critique k_c que l'on va chercher à relier à la géométrie du guide d'onde.

Si on suppose que les parois du guide sont en matériau conducteur parfait ($\gamma = \infty$), le champ électrique doit être nul à l'intérieur du métal et donc à la paroi. Dans le cas d'un champ transverse électrique (TE), la composante tangentielle du champ électrique est nulle dans tout le guide : $E_x = 0$. Les conditions aux limites (annulation de \vec{E} sur les parois) imposent de choisir des fonctions périodiques pour les composantes normales E_x et E_y . En séparant les variables x et y , on peut écrire ces composantes sous la forme d'un produit de deux fonctions : $E_x = f(\beta x)g(\alpha y)$ où α et β sont des nombres d'onde transverses.

Ces nombres d'onde transverses ne sont pas arbitraires. La vérification des conditions aux limites impose des valeurs discrètes pour α et β . On peut faire ici l'analogie entre le champ électrique et l'amplitude de déplacement transverse d'une membrane vibrante fixée sur un cadre rectangulaire. On a donc l'existence de modes de vibration pour le champ électrique, ces modes étant caractérisés par un couple de deux entiers (m, n) . Ces modes de propagation sont notés TE_{mn} .

La relation de dispersion de la propagation dans le guide est

$$k_g = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega} \right)^2 \left(\frac{m^2}{L_z^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)}, \quad (7.42)$$

ce qui montre l'existence d'une fréquence de coupure

$$\nu_c = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{m^2}{L_z^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}.$$

En termes de fréquence, la propagation dans le guide d'onde n'est possible que pour des fréquences supérieures à une fréquence de coupure $\nu > \nu_c$.

SYNTHÈSE

Savoirs

- Les équations de Maxwell décrivant l'onde électromagnétique dans un milieu matériel introduisent la permittivité relative, la perméabilité relative et la conductivité du milieu. Ces quantités peuvent dépendre de la pulsation de l'onde.
- Les ondes électromagnétiques dans un milieu matériel peuvent prendre trois formes différentes : une onde progressive sans atténuation, une onde progressive avec atténuation, une onde évanescente.
- La fréquence d'une onde électromagnétique ne change pas lors d'un changement de milieu alors que la longueur d'onde et les vitesses de phase et de groupe varient.
- Les lois de Snell-Descartes de l'optique géométrique peuvent être dérivées des relations de passage entre deux milieux.
- Le guidage des ondes électromagnétiques induit le choix de modes et de fréquences de coupure.

Savoir-faire

- Connaître les principales propriétés électriques et magnétiques des matériaux.
- Écrire les équations de Maxwell dans un milieu matériel.
- Déterminer la constante diélectrique généralisée à partir d'un modèle microscopique.
- Déterminer les fréquences caractéristiques d'un milieu matériel.
- Déterminer les modes de propagation dans des guides d'onde simples.

Mots-clés

- Isolant, diélectrique, conducteur, conductivité, résistivité
- Polarisation, polarisabilité
- Relations de passage, dioptre, interface
- Constante diélectrique généralisée
- Permittivité relative, perméabilité relative, indice de réfraction

Exercices

Tester ses connaissances

- 1 La profondeur de pénétration d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique :
 - a. diminue quand la fréquence augmente.
 - b. est indépendante de la fréquence.
 - c. augmente quand la fréquence augmente.

- 2 Une onde évanescente :
 - a. se propage dans toutes les directions de l'espace.
 - b. se propage dans une seule direction.
 - c. ne se propage pas.

- 3 L'indice de réfraction d'un milieu matériel est :
 - a. un nombre réel supérieur ou égal à un.
 - b. un nombre réel quelconque.
 - c. un nombre complexe.

- 4 Un plasma est un milieu :
 - a. chargé négativement.
 - b. neutre.
 - c. chargé positivement.

Exercices d'application

- 5 Calculer la résistance d'un fil de cuivre de 100 m de longueur et de $1,5 \text{ mm}^2$ de section.

- 6 Pour les matériaux suivants, calculer le rapport entre le courant de déplacement et le courant de conduction ainsi que la valeur de $\tan \theta_p$ pour une onde de fréquence $\nu = 5 \text{ MHz}$.

Matériau	γ ($\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$)	ε'_r
cuivre	$5,9 \cdot 10^7$	1
aluminium	$3,6 \cdot 10^7$	1
carbone	$3 \cdot 10^4$	1
terre	$1,4 \cdot 10^{-4}$	1
bakélite	0,2	4,7

7 Dans un guide d'onde plan, le champ électrique est décrit par

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) e^{i(k_g x - \omega t)}.$$

Calculer les composantes du champ magnétique \vec{B} qui lui est associé.

Exercices d'approfondissement

8 Conduction dans le cuivre

Un conducteur métallique (le cuivre par exemple) est soumis à un champ électrique \vec{E} uniforme et constant. Les charges libres sont les électrons de conduction (masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, charge $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C), et on dénombre N électrons libres par unité de volume (il y a un électron de conduction par atome de cuivre). On adopte un modèle dans lequel chaque électron est soumis à la force électrique et à une force de résistance modélisée par une force de frottement $-m_e \vec{v}/T_c$, où \vec{v} est la vitesse de l'électron et T_c est une grandeur caractéristique du matériau.

- Écrire l'équation du mouvement d'un électron en régime permanent.
- En déduire l'expression de la conductivité γ du cuivre.
- Calculer la valeur de T_c , sachant que la conductivité est $\gamma = 5,9 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. La masse volumique du cuivre est $\rho = 8920 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et la masse d'un atome est $m_{Cu} = 1,05 \cdot 10^{-25}$ kg.

9 Fréquences de coupure dans un guide rectangulaire

Un guide rectangulaire de section $L_y \times L_z$ est rempli d'un diélectrique de permittivité relative $\varepsilon_r = \varepsilon'_r$ (on néglige les pertes).

- Écrire la relation de dispersion et déterminer les fréquences de coupures des différents modes.
- Le guide est un guide normalisé WR90 de dimensions $L_y = 22,9$ mm et $L_z = 10,2$ mm. Calculer les fréquences de coupure pour les modes TE_{10} , TE_{01} , TE_{20} et TE_{21} . On prendra $\varepsilon_r = 5$.

10 Propagation dans un milieu ionisé

Un gaz ionisé est un ensemble de N ions (charge $+q_e$, masse M) et N électrons (charge $-q_e$, masse m_e) par unité de volume (faible densité). On négligera les interactions entre particules et on suppose que le mouvement des ions et des électrons est seulement déterminé par le champ électrique \vec{E} associé à l'onde électromagnétique.

- Donner les équations de mouvement des ions et des électrons sous l'action d'une onde monochromatique (\vec{k}, ω) . En déduire la densité de courant \vec{j} et la conductivité γ du milieu.
- Déterminer la nature de l'onde électromagnétique qui se propage dans ce milieu ionisé.
- Définir la relation de dispersion du milieu ionisé. En déduire la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g .

11 Absorption dans un milieu diélectrique dense

Dans un milieu diélectrique dense (un liquide ou un solide), les atomes ou molécules sont proches, ce qui implique des interactions entre les dipôles voisins induits par le champ électrique. Cette interaction est modélisée par la présence d'un champ électrique local \vec{E}_{local} . Dans le modèle classique de l'électron élastiquement lié, soumis à une force de frottement « fluide », celui-ci acquiert un déplacement $\vec{\delta}$ donné par l'équation

$$m_e \frac{d^2 \vec{\delta}}{dt^2} = -m_e \omega_0^2 \vec{\delta} - \frac{m_e}{T_c} \frac{d\vec{\delta}}{dt} - q_e \vec{E}_{\text{local}}.$$

Dans un milieu dense (le verre par exemple), le champ électrique local est

$$\vec{E}_{\text{local}} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}.$$

- Sachant qu'il y a N électrons par unité de volume, écrire l'équation différentielle vérifiée par $\vec{P} = -Nq_e \vec{\delta}$ en fonction de \vec{E} (on utilisera $\omega_0^2 = \omega_0^2 - Nq_e^2/3\epsilon_0 m_e$).
- Le milieu est soumis à un champ électrique associé à une onde, écrit sous la forme

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}.$$

Calculer la susceptibilité complexe χ en séparant la partie réelle et la partie imaginaire et déduire les parties réelle ϵ_r' et imaginaire ϵ_r'' de la permittivité relative complexe en fonction de la susceptibilité χ_0 en régime statique ($\omega = 0$), de la pulsation réduite $w = \omega/\omega_0'$ et du coefficient $\beta = 1/\omega_0' T_c$ traduisant l'importance de l'amortissement.

- Tracer qualitativement les courbes ϵ_r' et ϵ_r'' en fonction de ω .
- L'absorption de l'onde par le milieu est la plus forte quand ϵ_r'' est extremal. Déterminer la pulsation d'absorption pour une faible amortissement.

Corrigés

Tester ses connaissances

	a.	b.	c.
1	X		
2			X
3	X		
4		X	

Exercices d'application

- 5 La résistance R d'un fil conducteur est donnée par la formule $R = L/\gamma S$, ce qui donne pour l'application numérique

$$R = \frac{100}{5,88 \cdot 10^7 \times 1,5 \times 10^{-6}} = 1,13 \Omega.$$

- 6 L'équation de Maxwell-Ampère montre deux contributions de courant : le courant de conduction $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ et le courant de déplacement $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \varepsilon_r \partial \vec{E} / \partial t$. Dans le formalisme monochromatique, le rapport entre ces quantités est

$$\frac{\|\vec{j}_d\|}{\|\vec{j}\|} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega \|\vec{E}\|}{\gamma \|\vec{E}\|} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega}{\gamma}.$$

Cette quantité est l'inverse de la tangente de l'angle de perte $\tan \theta_p = \gamma / (\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega)$. Avec les données numériques, on calcule

Matériau	$\ \vec{j}_d\ /\ \vec{j}\ $	$\tan \theta_p$
cuivre	$4,7 \cdot 10^{-12}$	$12,1 \cdot 10^{11}$
aluminium	$7,7 \cdot 10^{-12}$	$1,3 \cdot 10^{11}$
carbone	$9,26 \cdot 10^{-9}$	$1,1 \cdot 10^8$
terre	2,0	0,5
bakélite	$4,1 \cdot 10^5$	$2,4 \cdot 10^{-6}$

- 7** On détermine le champ \vec{B} par la relation $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$. Le rotationnel du champ électrique est

$$\text{rot } \vec{E} = E_0 \left[\vec{e}_x \left(\frac{n\pi}{L_y} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) - ik_g \vec{e}_y \sin \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \right] e^{i(k_g x - \omega t)}$$

et après intégration par rapport au temps, on trouve

$$\vec{B} = -\frac{E_0}{\omega} \left[i\vec{e}_x \left(\frac{n\pi}{L_y} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) + k_g \vec{e}_y \sin \left(\frac{n\pi y}{L_y} \right) \right] e^{i(k_g x - \omega t)}.$$

Le champ magnétique dans le guide d'onde n'est pas perpendiculaire au vecteur d'onde si le champ électrique est transverse.

Exercices d'approfondissement

8 Conduction dans le cuivre

- a. En régime permanent, on suppose que la vitesse est constante, et la force électrique est en équilibre avec la force de frottement :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 = q_e \vec{E} - \frac{m_e}{T_c} \vec{v}.$$

- b. L'équation du mouvement permet d'écrire la vitesse $\vec{v} = T_c q_e \vec{E} / m_e$, et la conductivité est obtenue par l'écriture de la loi d'Ohm microscopique $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, avec $\vec{j} = N q_e \vec{E}$ la densité de courant. Ainsi, on trouve

$$\gamma = \frac{N T_c q_e^2}{m_e}.$$

- c. Comme chaque atome de cuivre porte un électron de conduction, la densité N des charges libres est égale à la densité numérique des atomes. Cette densité est déterminée par $N = \rho / m_{Cu} = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$. On trouve donc

$$T_c = \frac{m_e \gamma}{N q_e^2} = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s}.$$

9 Fréquences de coupure dans un guide rectangulaire

- a. En présence du diélectrique, une onde électromagnétique se propage à une vitesse $c / \sqrt{\epsilon_r'}$. La relation de dispersion (7.42) devient donc simplement

$$k_g = \frac{\sqrt{\epsilon_r'} \omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\sqrt{\epsilon_r'} \omega} \right)^2 \left(\frac{m^2}{L_z^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)}.$$

La fréquence de coupure est obtenue pour un nombre d'onde nul dans le guide. On obtient

$$\nu_c = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_r'}} \left[\left(\frac{m}{L_z} \right)^2 + \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 \right].$$

- b. Avec les données proposées, on peut calculer les fréquences de coupures suivantes :

Mode	ν_c (GHz)
TE ₁₀	2,93
TE ₀₁	5,86
TE ₂₀	6,58
TE ₂₁	7,20

10 Propagation dans un milieu ionisé

- a. Si on note \vec{v}_i et \vec{v}_e les vitesses instantanées des ions et des électrons, les équations du mouvement sont (en supposant la force magnétique négligeable)

$$M \frac{d\vec{v}_i}{dt} = q_e \vec{E} \quad \text{et} \quad m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -q_e \vec{E}.$$

Ces charges sont soumises à un champ électrique variable qui varie comme $\exp -i\omega t$. On trouve donc

$$\vec{v}_i = \frac{i q_e \vec{E}}{M \omega} \quad \text{et} \quad \vec{v}_e = \frac{-i q_e \vec{E}}{m_e \omega}.$$

La densité de courant est la somme des densités de courant produites par les ions et les électrons, soit

$$\vec{j} = \vec{j}_i + \vec{j}_e = N q_e \vec{v}_i - N q_e \vec{v}_e = i \frac{N q_e^2}{\omega} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m_e} \right).$$

La conductivité du milieu ionisé est donc

$$\gamma = i \frac{N q_e^2}{m \omega}$$

avec $m = M m_e / (M + m_e)$ la masse réduite des deux espèces de charges.

- b. Malgré la ionisation, le milieu reste globalement neutre car il y a autant d'ions que d'électrons. La divergence nulle du champ électrique est donc toujours valable, ce qui implique $\vec{E} \perp \vec{k}$. Comme le champ magnétique \vec{B} est lui aussi perpendiculaire au vecteur d'onde ($\text{div } \vec{B} = 0$), et que la loi de Faraday impose que $\vec{E} \perp \vec{B}$, alors les trois vecteurs \vec{k} , \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires deux à deux. L'onde électromagnétique a donc la structure d'une onde plane.

- c. La conductivité du milieu ionisé est la même que celle d'un plasma. En effet, les atomes ionisés sont très lourds comparativement aux électrons. La masse réduite m est donc très proche de la masse des électrons m_e . À partir de la relation de dispersion généralisée, on peut trouver

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0}.$$

On en déduit la vitesse de phase

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}},$$

qui n'existe que pour $\omega > \omega_p$. Plutôt que d'utiliser une dérivée directe pour calculer la vitesse de groupe, il est plus facile d'écrire la relation de dispersion sous la forme

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2},$$

et de différencier cette expression :

$$2k dk = \frac{2\omega d\omega}{c^2},$$

ce qui donne

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}.$$

11 Absorption dans un milieu diélectrique dense

- a. Après avoir mis l'équation de mouvement de l'électron lié sous la forme

$$\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} = -\omega_0^2\vec{\delta} - \frac{1}{T_c} \frac{d\vec{\delta}}{dt} - \frac{q_e}{m_e} \left(\vec{E} - \frac{Nq_e}{3\epsilon_0} \right),$$

on multiplie cette relation par $-Nq_e$ pour écrire l'équation pour la polarisation macroscopique \vec{P} :

$$\frac{d^2\vec{P}}{dt^2} + \frac{1}{T_c} \frac{d\vec{P}}{dt} + \omega_0^2\vec{P} - \frac{Nq_e^2}{m_e} \vec{E} = 0.$$

Cette équation a la même forme que l'équation (2.26) de l'oscillateur harmonique amorti et forcé décrit au chapitre 2. Le forçage est ici assuré par le champ électrique associé à l'onde.

- b. La susceptibilité est donnée par la relation $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ et ses dérivées première et seconde en temps sont $d\vec{P}/dt = -i\omega\varepsilon_0\chi\vec{E}$ et $d^2\vec{P}/dt^2 = -\omega^2\varepsilon_0\chi\vec{E}$. L'équation pour la polarisation \vec{P} se met donc naturellement sous la forme

$$\left(\omega_0'^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{T_c}\right)\chi = \frac{Nq_e^2}{\varepsilon_0 m_e}.$$

En régime statique ($\omega = 0$), la susceptibilité vaut $\chi_0 = Nq_e^2/(\varepsilon_0 m_e \omega_0'^2)$, et la susceptibilité se met finalement sous la forme

$$\chi = \frac{\chi_0}{1 - w^2 + i\beta w},$$

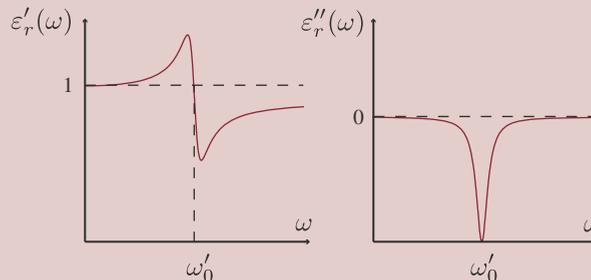
avec $w = \omega/\omega_0'$ et $\beta = 1/\omega_0' T_c$. Cette susceptibilité est complexe et s'écrit

$$\chi = \frac{\chi_0(1 - w^2)}{(1 - w^2)^2 + w^2\beta^2} - i\frac{\chi_0 w\beta}{(1 - w^2)^2 + w^2\beta^2}.$$

On en déduit la permittivité relative $\varepsilon_r = \varepsilon_r' + i\varepsilon_r'' = 1 + \chi$, avec

$$\varepsilon_r' = 1 + \frac{\chi_0(1 - w^2)}{(1 - w^2)^2 + w^2\beta^2} \quad \text{et} \quad \varepsilon_r'' = -\frac{\chi_0 w\beta}{(1 - w^2)^2 + w^2\beta^2}.$$

- c. La fonction $\varepsilon_r'(\omega)$ passe par la valeur 1 pour $\omega = \omega_0'$ et la fonction $\varepsilon_r''(\omega)$ décrit un pic centré sur une pulsation proche de ω_0' .



- d. Pour un faible amortissement ($\beta \ll 1$), on peut négliger les termes en β^2 et la partie imaginaire de la permittivité devient

$$\varepsilon_r'' \approx -\frac{\chi_0 \beta w}{(1 - w^2)^2}.$$

Cette fonction admet un extremum pour $1 - 3w^4 + 2w^2 = 0$ et la seule valeur positive acceptable est $w = 1$. L'absorption de l'onde est donc maximale pour une pulsation $\omega = \omega_0'$.

Ondes et vibrations non linéaires

8

Plan

Cours

- 8.1 Pendule pesant faiblement non linéaire
- 8.2 Oscillations de relaxation
- 8.3 Frottement solide
- 8.4 Optique non linéaire
- 8.5 L'oscillateur de Van der Pol

Synthèse

Exercices

Corrigés

Objectifs

- Montrer les limites de la linéarisation des équations
- Présenter les principaux effets des non linéarités
- Comprendre la différence entre les oscillations de relaxation et les oscillations intrinsèques.

Cours

Tous les problèmes abordés jusqu'ici sont des problèmes linéaires. Soit parce qu'ils sont intrinsèquement linéaires (les équations de Maxwell par exemple), soit parce qu'ils ont été rendus linéaires par le biais d'approximations et d'hypothèses (le pendule pesant par exemple). Certains phénomènes physiques ne peuvent être décrits sans faire appel à des relations non linéaires entre une cause et un effet. Ces non linéarités empêchent d'utiliser la superposition de solutions indépendantes mais produisent une grande variété de comportements. Ce chapitre aborde quelques exemples de phénomènes non linéaires dans le domaine de la mécanique ou de l'électromagnétisme.

8.1 PENDULE PESANT FAIBLEMENT NON LINÉAIRE

L'étude classique du pendule pesant présentée au chapitre 2 utilise uniquement le premier terme du développement en série de Taylor de la fonction $\sin \theta$ pour rendre l'équation linéaire. La solution obtenue est une solution harmonique dont la fréquence dépend de la construction du pendule et dont l'amplitude est déterminée par

les conditions initiales. Pourtant l'approximation n'est valable que pour les petits angles $\theta \ll 1$ et cette hypothèse limite considérablement la plage d'amplitude utile. Pour de plus grandes amplitudes d'oscillation, on peut tenir compte d'un terme supplémentaire dans le développement en série de Taylor :

$$\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + O(\theta^5).$$

L'apport de ce développement est illustré sur la figure 8.1 : le terme cubique donne une courbe en cloche qui se rapproche de la courbe $\sin \theta$ (a). L'erreur relative va diverger pour un angle plus important que pour le développement du premier ordre (b).

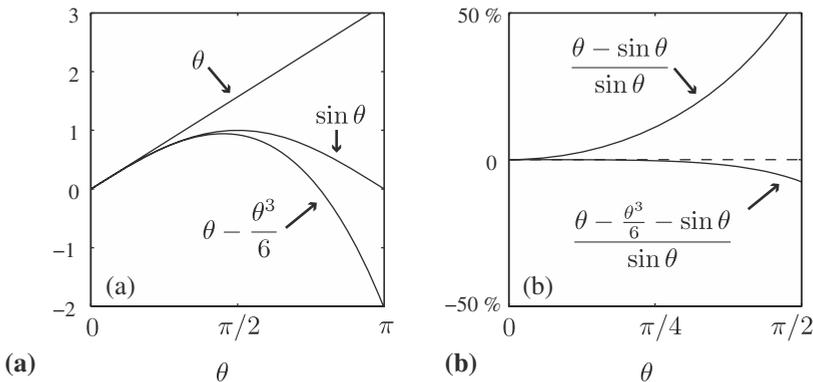


Figure 8.1 (a) Comparaison de différentes approximations de la fonction $\sin \theta$ autour du point $\theta = 0$. (b) Erreur relative des deux approximations polynômes.

Avec ce développement à l'ordre 3, l'équation du mouvement du pendule faiblement non linéaire est donc

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\theta + \omega_0^2\frac{\theta^3}{6}. \tag{8.1}$$

L'observation d'un pendule réel montre que même pour des amplitudes importantes d'oscillation, le mouvement est périodique et reste proche d'un mouvement sinusoïdal. Si on cherche des solutions périodiques de la forme $\cos \omega_0 t$, l'équation (8.1) présente alors un terme en $\cos^3 \omega_0 t$. Comme

$$\cos^3 \omega_0 t = \frac{1}{4} \cos 3\omega_0 t + \frac{3}{4} \cos \omega_0 t,$$

on va chercher pour l'équation (8.1) une solution de la forme

$$\theta = a \cos \omega t + b \cos 3\omega t,$$

où a et b sont des coefficients inconnus. L'équation faiblement non linéaire du pendule est donc

$$\left(-a\omega^2 + a\omega_0^2 - \frac{a^3}{8}\omega_0^2\right) \cos \omega t + \left(-9b\omega^2 + b\omega_0^2 - \frac{a^3}{24}\omega_0^2\right) \cos 3\omega t = 0.$$

et cette équation est vérifiée à chaque instant t si

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{a^2}{8}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{a^2}{16}\right),$$

et

$$b = -\frac{a^3}{24(8 - \frac{9}{8}a^2)} \approx -\frac{a^3}{192}.$$

La solution faiblement non linéaire est donc de la forme

$$\theta(t) = a \cos \omega t - \frac{a^3}{192} \cos 3\omega t \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0 \left(1 - \frac{a^2}{16}\right). \quad (8.2)$$

Le mouvement n'est donc plus harmonique. En effet il résulte de la composition de deux fréquences : ω et 3ω . De plus, la fréquence d'oscillation dépend du coefficient d'amplitude a : la fréquence diminue quand l'amplitude augmente.

On vérifie ce calcul par la résolution numérique de l'équation (8.1). La **figure 8.2** compare la solution harmonique de l'équation linéarisée (courbe bleue) à la solution faiblement non linéaire (courbe pointillée). La période de la solution faiblement non linéaire est bien supérieure à la période de la solution harmonique et cette solution est proche de la solution de l'équation du pendule simple (2.6), avec le terme en $\sin \theta$. Les portraits de phase de ces différentes solutions (**figure 8.2b**) sont toujours des courbes fermées puisqu'on a supposé l'absence de dissipation.

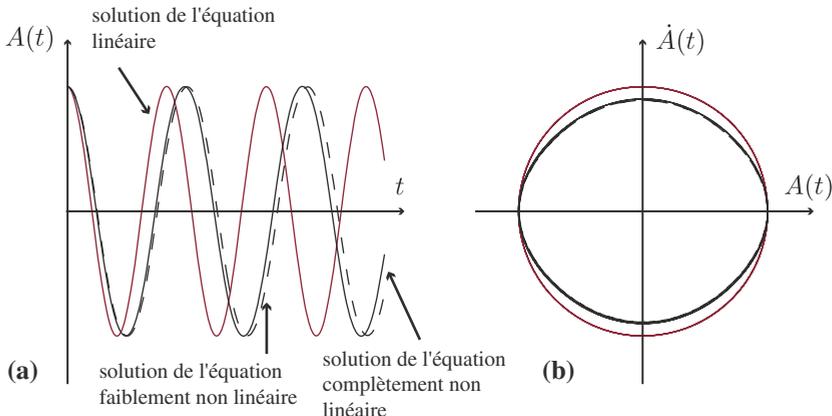


Figure 8.2 Comparaison des solutions pour le pendule pesant

(a) La courbe bleue est la solution de l'équation linéarisée. La courbe en pointillés est la solution faiblement non linéaire et la courbe continue noire est la solution exacte complètement non linéaire. Les portraits de phase (b) montrent la relation entre l'amplitude A et la vitesse \dot{A} .

8.2 OSCILLATIONS DE RELAXATION

Certains systèmes admettent une solution périodique mais ne sont pas des oscillateurs. C'est le cas du réservoir dit de Tantale, en référence au roi de la mythologie grecque puni par les dieux et placé au milieu d'un fleuve mais ne pouvant en boire l'eau car elle s'éloigne dès qu'il se penche. Le réservoir est alimenté par un débit continu et comporte une évacuation via un siphon vertical connecté à la cote z_1 et dont le sommet est à la cote z_2 (figure 8.3a). Tant que le niveau d'eau n'a pas atteint la cote z_2 nécessaire pour amorcer le siphon, le débit de sortie est nul. Une fois le siphon amorcé, le débit devient non nul et le niveau du réservoir baisse. Le siphon va se désamorcer et le réservoir retrouve son niveau d'origine.

La courbe du niveau d'eau $z(t)$ (figure 8.3b) est une courbe périodique dont la période dépend du débit d'alimentation Q_E du réservoir. Son amplitude d'oscillation $z_2 - z_1$ dépend de la construction du système, elle est donc constante. Le débit de sortie $Q_S(t)$ est une fonction intermittente (figure 8.3c) : le débit est nul pendant la phase de remplissage et devient brutalement non nul pendant la décharge du siphon.

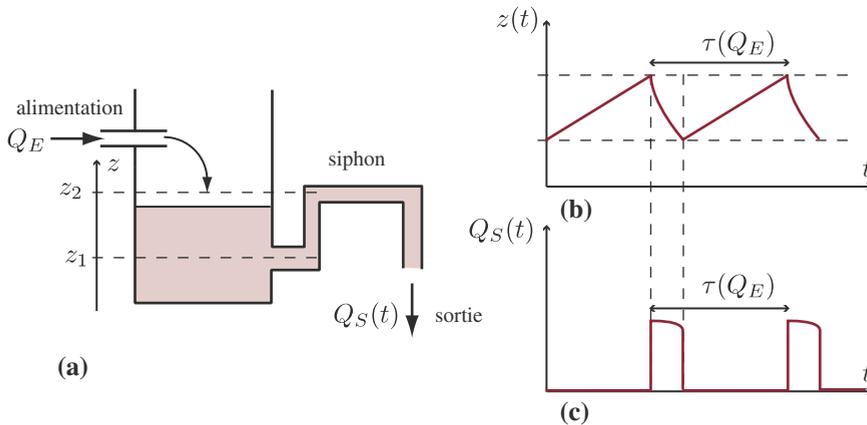


Figure 8.3

(a) Principe du réservoir de Tantale : un réservoir relié à un siphon est connecté dans sa partie inférieure à un siphon vertical. **(b)** Courbe du niveau d'eau dans le réservoir en fonction du temps. **(c)** Courbe du débit de sortie en fonction du temps.

Ce système mécanique simple est très différent d'un oscillateur tel que ceux rencontrés au chapitre 2 :

- la fréquence d'un oscillateur est imposée par sa construction. Dans le cas du pendule pesant, c'est sa longueur et la constante d'accélération de la gravité qui déterminent la fréquence. Son amplitude est, elle, fixée par les conditions initiales ;
- la fréquence de relaxation est déterminée par les conditions extérieures au système. Dans le cas du réservoir de Tantale, c'est le débit d'alimentation qui fixe la

fréquence. Et contrairement à un oscillateur, c'est l'amplitude de l'oscillateur de relaxation qui est fixée par construction.

La fréquence d'oscillation du réservoir de Tantale est décrite par la relation (8.3) calculée ci-après. Cette fréquence varie en fonction du débit d'alimentation Q_E mais également en fonction des positions de l'entrée et du sommet du siphon.



Encart 8.1 Modélisation du réservoir de Tantale

Durant la phase de **remplissage**, siphon désamorçé, la variation de niveau d'eau dans le réservoir est telle que $dz/dt = Q_E/S_R$, où Q_E est le débit d'alimentation, et S_R la section du réservoir. Comme le niveau varie entre z_1 et z_2 , la variation du niveau d'eau est $z_r(t) = z_1 + (Q_E/S_R)t$ et la **durée du remplissage** est

$$t_r = \frac{S_R}{Q_E}(z_2 - z_1).$$

Durant la phase de **vidange**, l'eau s'évacue par le siphon à une vitesse v_T mais le remplissage continue. La variation de niveau est donc

$$dz/dt = Q_E/S_R - (S_S/S_R)v_S,$$

où S_S est la section du siphon. Le problème de la vidange est relié à la relation entre la hauteur d'eau dans le réservoir et la vitesse de vidange. Il est réaliste de choisir une loi de Poiseuille (loi d'écoulement d'un liquide visqueux dans un tuyau) telle que la vitesse v_S est proportionnelle à la hauteur z . En effet, l'écoulement est créé par une différence de pression $\Delta P = \rho g z$ entre l'entrée et la sortie du siphon (ρ est la masse volumique du liquide). Si le siphon a une longueur L et le liquide une viscosité dynamique η , la relation est

$$v_T = \frac{\rho g S_S h}{8\pi\eta L} = \frac{h}{T_S}.$$

L'équation différentielle pour le niveau d'eau pendant la vidange est donc $dh/dt = Q_E/S_R - h/T_S$ dont la solution est

$$z = T_S \frac{Q_E}{S_R} + \left(z_2 - T_S \frac{Q_E}{S_R} \right) e^{-t/T_S}.$$

La durée de la vidange est obtenue à l'instant $t = t_v$ tel que $z = z_1$ et on trouve

$$t_v = T_S \ln \left(\frac{z_2 - T_S \frac{Q_E}{S_R}}{z_1 - T_S \frac{Q_E}{S_R}} \right).$$

Finalement, la période d'un cycle remplissage/vidange est $t_r + t_v$ et la fréquence de l'oscillation de relaxation est

$$\nu = \left[\frac{S_R}{Q_E} (z_2 - z_1) + T_S \ln \left(\frac{z_2 - T_S \frac{Q_E}{S_R}}{z_1 - T_S \frac{Q_E}{S_R}} \right) \right]^{-1}. \quad (8.3)$$

La relation $\nu(Q_E)$ n'est pas monotone, comme le montre la **figure 8.4**. Il existe une fréquence maximum ν_{max} associée à un débit Q_E^* . En effet l'augmentation du débit d'alimentation implique une vidange plus lente du réservoir bien que la pression soit augmentée par le maintien d'un niveau important. La fréquence est nulle pour le débit $Q_E = S_R z_1 / T_S$ car, à partir de ce débit, l'évacuation par le siphon ne suffit plus à vidanger le réservoir. Le système n'est alors plus oscillant.

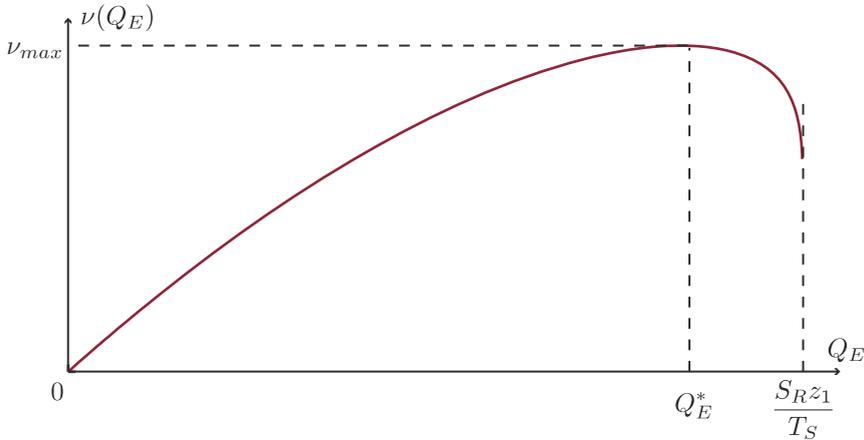


Figure 8.4 Fréquence de relaxation du réservoir de Tantale en fonction du débit d'alimentation.

8.3 FROTTEMENT SOLIDE

Le frottement mécanique solide est très différent du frottement fluide de type visqueux. La force de frottement visqueux (**encart 8.2**) est linéaire avec la vitesse du solide en mouvement. C'est donc aussi une fonction linéaire de la position, donc de l'amplitude de l'oscillateur.

Après les travaux de G. Amontons (1663–1705) au XVII^e siècle, Coulomb s'est intéressé au frottement solide et la loi d'Amontons-Coulomb qui décrit cette force de frottement porte maintenant son nom. Cette loi décrit formellement plusieurs observations expérimentales :

- la force de frottement s'oppose au mouvement ;
- la force de frottement entre deux objets solides est une force tangentielle qui s'applique sur la surface de contact ;
- la force de frottement est indépendante de la vitesse relative de glissement entre les objets ;
- la force de frottement est proportionnelle à la force normale (perpendiculaire) F_N à la surface de contact.

Mathématiquement, on écrit donc

$$\vec{F} = -\mu F_N \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}. \quad (8.4)$$

Cette force de frottement fait intervenir le coefficient de frottement μ , un nombre sans dimension qu'il est très difficile de prédire théoriquement. Cette écriture cache en fait deux coefficients :

- le coefficient de friction **statique** μ_s ;
- le coefficient de friction **dynamique** μ_d lorsque le patin est en mouvement.

En général le coefficient de friction statique est supérieur au coefficient de friction dynamique :

$$\mu_s \geq \mu_d.$$

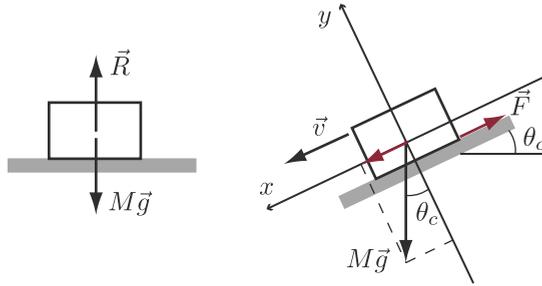
Ces coefficients de friction dépendent principalement de la nature des matériaux en contact et des états de surface. Toutefois μ_s est un coefficient assez facile à mesurer (voir l'**encart 8.2**).



Encart 8.2 Le coefficient de frottement

Le coefficient de frottement entre deux matériaux peut être mesuré par un dispositif de plan incliné. On pose sur une plaque plane de matériau (1) un échantillon de matériau (2) de masse M . Quand le plan est horizontal, les seules forces sont le poids $M\vec{g}$ et la réaction \vec{R} du support. Si on incline légèrement le plan, la masse reste statique : la force de frottement compense la force de pesanteur et empêche la masse de glisser.

En inclinant de plus en plus la plaque jusqu'à un angle critique θ_c , la masse se met en mouvement et glisse vers le bas.



Si on peut mesurer précisément l'angle θ_c , on peut alors écrire l'équilibre des forces en projection sur l'axe x :

$$\vec{F} + Mg \sin \theta_c \vec{e}_x = 0.$$

D'après la loi d'Amontons-Coulomb (8.4), $\vec{F} = -\mu_s \|\vec{F}_N\| \vec{e}_x$ et la force normale est telle que $\|\vec{F}_N\| = Mg \cos \theta_c$. Finalement l'équilibre des forces relie simplement le coefficient de friction à la tangente de l'angle critique :

$$\mu_s = \tan \theta_c.$$

Comme la force de frottement solide est indépendante de la vitesse — donc de la position de l'objet — l'équation du mouvement de l'objet devient non linéaire. La [figure 8.5](#) illustre la différence entre le frottement solide et le frottement visqueux.

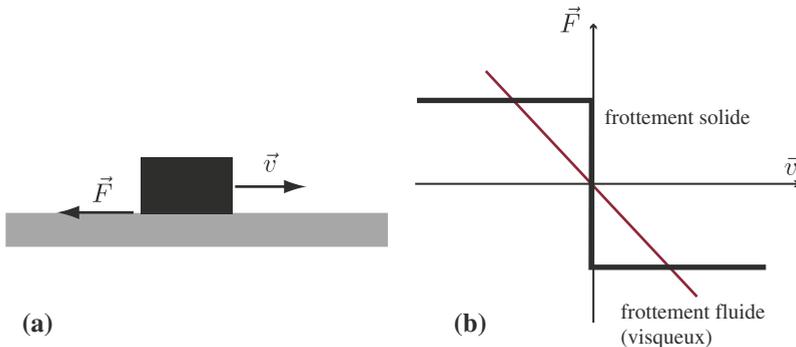


Figure 8.5

- (a) Quand deux solides sont en contact et en mouvement relatif à la vitesse \vec{v} , il existe une force de frottement \vec{F} qui s'oppose au mouvement.
 (b) Cette force de frottement est non linéaire et indépendante de la norme de la vitesse. On peut comparer cette force avec une force de frottement visqueux simplement opposée au vecteur vitesse.

La non-linéarité peut être illustrée très simplement avec un solide sur un plan horizontal que l'on déplace avec un ressort. L'extrémité libre du ressort est tirée à vitesse

constante U (figure 8.6a). Au début, le ressort s'allonge car la force de friction maintient le solide immobile. Quand l'énergie potentielle stockée dans le ressort est suffisante, le solide bouge et va glisser en frottant jusqu'à ce que la force de rappel du ressort soit plus faible que la force de frottement. Le solide redevient statique. Le mouvement est donc saccadé avec une alternance de temps d'arrêt et de temps de mouvement, l'évolution de la longueur du ressort est en dents de scie (figure 8.6b).

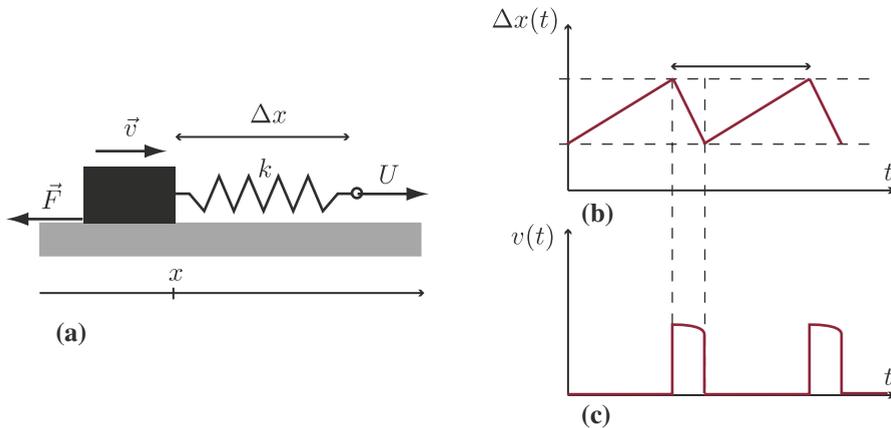


Figure 8.6

(a) Modèle mécanique pour réaliser le phénomène de collé-glissé : une masse est déplacée par l'intermédiaire d'un ressort dont l'extrémité est déplacée à vitesse constante U . **(b)** La force élastique de rappel du ressort $k\Delta x$ augmente avant de chuter brutalement lorsque la masse se déplace. **(c)** La vitesse de la masse est une fonction périodique mais discontinue : il y a alternance entre des phases d'accrochage (le collé) et de glissement (le glissé).

Ce mouvement est connu sous le nom de collé-glissé, en anglais *stick-slip* et se trouve dans de nombreux phénomènes mécaniques.

Exemple 1 : le grincement

Le grincement, bruit désagréable, est produit par le frottement relatif de pièces solides. C'est le cas d'un gond de porte mal lubrifié, d'une craie sur un tableau noir ou encore d'une fourchette sur une assiette.

Exemple 2 : l'archet du violon

Bien contrôlé, un grincement peut être un son musical. On trouve le phénomène de collé-glissé dans les instruments à cordes frottées (violon, violoncelle, contrebasse), lorsqu'une corde est mise en vibration par le frottement produit par un archet. Les cordes étaient initialement en boyaux de mouton puis furent remplacées par de l'acier utilisé seul ou avec de l'aluminium, matériau plus résistant et plus stable. L'archet est un arc sur lequel sont tendus une centaine de crins de cheval.

Exemple 3 : le tremblement de terre

Dans les zones de faille, le déplacement relatif des plaques continentales accumule de l'énergie potentielle élastique. Cette énergie peut se relâcher brutalement lorsque la force élastique dépasse la force de friction solide. Le déplacement des plaques se fait alors sous forme saccadée, caractéristique d'un phénomène de collé-glissé. Il en résulte des vibrations qui se transmettent dans la croûte terrestre et génèrent des tremblements de terre.

8.4 OPTIQUE NON LINÉAIRE

L'optique classique repose sur une théorie linéaire : les équations de Maxwell sont linéaires et la relation constitutive

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

qui traduit la réponse du milieu à la sollicitation de l'onde électromagnétique est linéaire. Mais cette linéarité entre la polarisation induite \vec{P} et le champ électrique \vec{E} cesse d'être valable lorsque le champ électrique devient important, et en particulier lorsqu'il n'est plus négligeable devant le champ électrique intra-atomique.

Ce champ intra-atomique E_{ia} peut être estimé par le modèle d'atome le plus simple : l'atome d'hydrogène. Dans ce modèle, le champ créé par le noyau de charge $+q_e$ à une distance r est

$$E_{ia} = \frac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Si on prend comme distance le rayon de Bohr de l'atome

$$r = a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e q_e^2} \approx 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m},$$

on trouve un champ électrique intra-atomique de l'ordre de $5 \cdot 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Quand un milieu est excité par un champ fort, la polarisation induite peut être développée comme une série de puissances du champ électrique :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_L \vec{E} + \varepsilon_0 (\chi_2 E + \chi_3 E^2 + \dots) \vec{E} = \vec{P}_L + \vec{P}_{NL},$$

avec une partie linéaire (\vec{P}_L) et une partie non linéaire (\vec{P}_{NL}). La quantité $\vec{P}_2 = \chi_2 \varepsilon_0 E^2$ est la polarisation du second ordre et $\vec{P}_3 = \chi_3 \varepsilon_0 E^3$ est la polarisation du troisième ordre. Les susceptibilités du second et troisième ordre sont estimées par

$$\chi_2 \approx \frac{\chi_L}{E_{ia}} \approx 2 \cdot 10^{-12} \text{ m} \cdot \text{V}^{-1}, \quad \chi_3 \approx \frac{\chi_L}{E_{ia}^2} \approx 4 \cdot 10^{-24} \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-2}$$

avec $\chi_L \approx 1$.

Si le champ extérieur au milieu est monochromatique

$$\vec{E}_{ext} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

alors la partie réelle du champ électrique dans le milieu comporte un terme en

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2}$$

si $\chi_2 \neq 0$. Il apparaît donc un terme de fréquence double. L'onde électromagnétique en sortie de ce milieu va donc avoir deux composantes en fréquence : la fréquence imposée par l'onde incidente ainsi qu'une fréquence double. Pour obtenir expérimentalement un tel effet, il faut disposer d'une source électromagnétique capable de développer un champ électrique suffisamment fort.

L'apparition du laser en 1960 a de ce fait bouleversé le développement de l'optique en créant une nouvelle discipline : l'optique non linéaire. Le laser permet d'obtenir des champs électriques oscillants très intenses par la focalisation d'une onde électromagnétique monochromatique et cohérente. L'expérience fondatrice de l'optique non linéaire a été réalisée en 1961 par Franken, Hill, Peters et Weinreich : à la sortie d'un cristal de quartz éclairé par un laser à rubis focalisé ($\lambda = 694 \text{ nm}$) de 3 J, on a détecté un faisceau ultraviolet de fréquence double ($\lambda = 347 \text{ nm}$). Actuellement, il est courant d'utiliser un laser Nd:Yag, source de rayonnement dans le proche infrarouge ($\lambda = 1060 \text{ nm}$), couplé à un dispositif doubleur de fréquence pour obtenir une source laser dans le domaine visible ($\lambda = 530 \text{ nm}$).

8.5 L'OSCILLATEUR DE VAN DER POL

L'oscillateur entretenu proposé par B. Van der Pol, scientifique néerlandais (1889–1959), est un oscillateur dont l'équation d'amplitude contient un terme de régulation non linéaire. Cet oscillateur est caractérisé par sa pulsation propre ω_0 et un coefficient de non-linéarité ϵ . L'équation de Van der Pol est

$$\frac{d^2 A}{dt^2} - \epsilon \omega_0 (1 - A^2) \frac{dA}{dt} + \omega_0^2 A = 0. \quad (8.5)$$

En l'absence de non-linéarité ($\epsilon = 0$), on retrouve l'équation d'amplitude de l'oscillateur harmonique non amorti décrite au chapitre 2.

Le terme d'amortissement non linéaire peut être positif ou négatif : ce terme permet d'augmenter l'amplitude lorsqu'elle est trop faible, de la diminuer lorsqu'elle est trop importante. Une fois le transitoire dissipé, l'oscillateur atteint un cycle limite représenté par une courbe fermée dans le portrait de phase (A, \dot{A}). La **figure 8.7a** montre l'amplitude de l'oscillateur de Van der Pol et son portrait de phase pour un coefficient $\epsilon = 0,05$. À partir d'une faible amplitude initiale ($A_0 = 0,1$) et d'une vitesse nulle, l'amplitude croît lentement de manière oscillante puis atteint une enveloppe limite

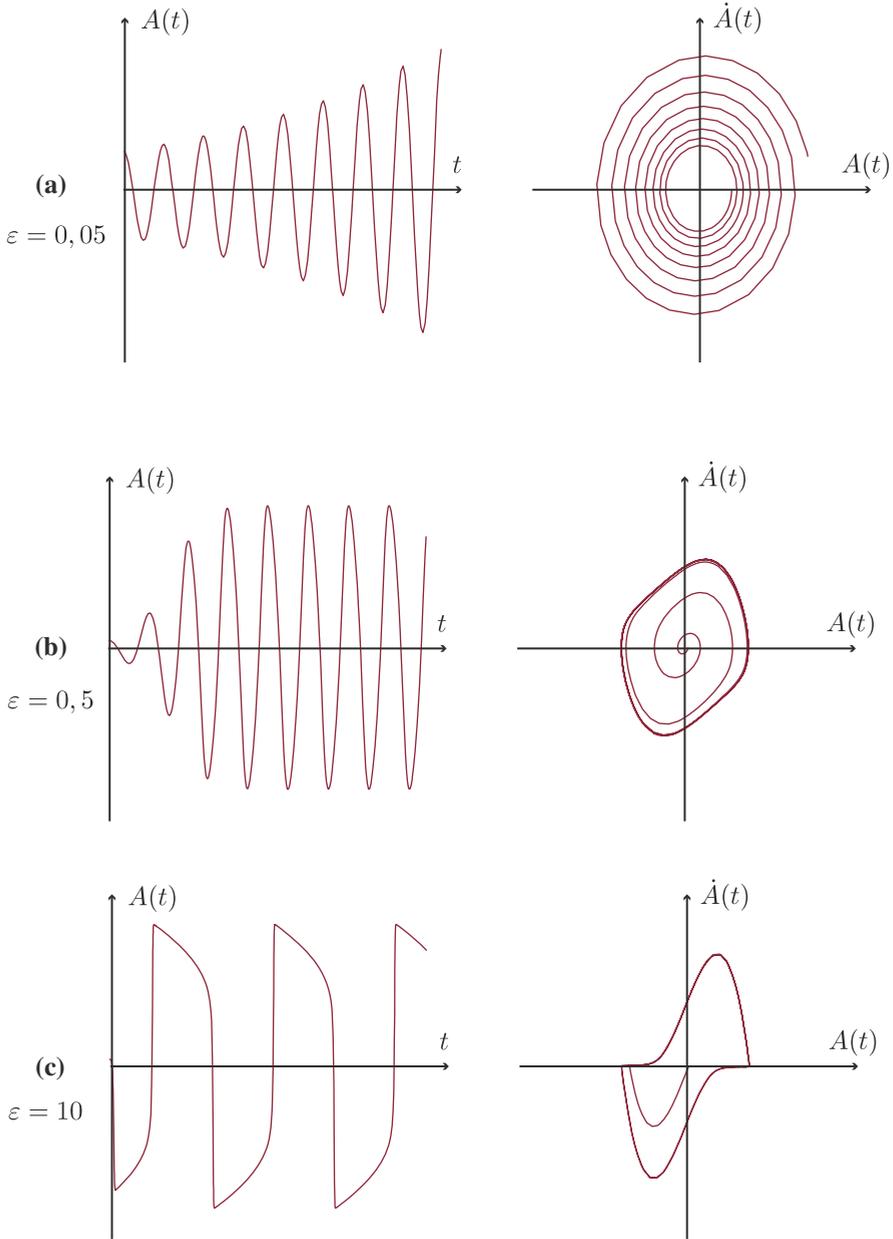


Figure 8.7 Évolution de l'amplitude (gauche) et portraits de phase (droite) de l'oscillateur de Van der Pol décrit par l'équation (8.5).

Les conditions initiales sont $A(t = 0) = 0,1$ et $\dot{A}(t = 0) = 0$. Attention : les échelles de vitesse des portraits de phase ne sont pas identiques entre les trois cas.

au cours du temps. La saturation est plus rapide pour un coefficient $\epsilon = 0,5$ comme montré sur la **figure 8.7b**. Enfin, si le coefficient ϵ est très grand (par exemple $\epsilon = 10$ sur la **figure 8.7c**), l'oscillateur atteint très vite son cycle limite.

L'observation des différentes évolutions de l'amplitude de la **figure 8.7** montre que la période de l'oscillateur dépend du coefficient de non-linéarité. Pour un faible coefficient de non-linéarité ($\epsilon \ll 1$), l'oscillateur a une pulsation proche de la pulsation propre calculée en l'absence de non-linéarité : $\omega \approx \omega_0$. Le comportement est oscillatoire et la variation de l'enveloppe au cours du temps montre le caractère non linéaire de l'équation. Au contraire, pour un fort coefficient de non-linéarité ($\epsilon \gg 1$), la pulsation est déterminée par ce coefficient, et le comportement est proche d'un oscillateur de relaxation. La grande richesse de l'équation de Van der Pol (8.5) est de présenter de nombreux comportements en fonction d'un seul paramètre ajustable.

L'oscillateur de Van der Pol est beaucoup étudié comme modèle simple de systèmes dynamiques. C'est un des modèles de base de la théorie du chaos.

SYNTHÈSE

Savoirs

- Les effets non linéaires modifient la pulsation d'un oscillateur.
- La fréquence d'un oscillateur non linéaire est influencée par son amplitude.
- Pour un oscillateur à comportement relaxatif, c'est la construction de l'oscillateur qui fixe son amplitude d'oscillation. Sa fréquence est déterminée par les conditions extérieures imposées.
- Pour un oscillateur intrinsèque, c'est la construction de l'oscillateur qui fixe sa fréquence. Son amplitude d'oscillation est déterminée par les conditions initiales.

Savoir-faire

- Différencier un système oscillant d'un système à relaxation.
- Développer des solutions faiblement non linéaires à partir d'une solution linéaire.

Mots-clés

- Oscillations de relaxation, oscillation non harmonique
- Frottement solide, optique non linéaire, oscillateur non linéaire

Exercices

Tester ses connaissances

- 1 L'équation du pendule pesant **réel** est :
 - a. une équation linéaire avec amortissement
 - b. une équation non linéaire sans amortissement
 - c. une équation non linéaire avec amortissement

- 2 Un oscillateur non linéaire excité à une pulsation ω va osciller avec :
 - a. cette même pulsation ω
 - b. une combinaison de plusieurs pulsations.
 - c. la pulsation double 2ω

- 3 La loi d'Amontons-Coulomb qui décrit la force de friction entre deux solides est proportionnelle à :
 - a. la vitesse
 - b. la force tangentielle
 - c. la force normale

Exercices d'application

- 4 À partir d'un développement d'ordre 5 de la fonction $\sin \theta$ au voisinage de $\theta = 0$, donner la valeur de l'erreur relative pour $\theta = \pi/2$.

- 5 À quelle condition la période d'oscillation du réservoir de Tantale devient-elle nulle ?

- 6 Proposer une équation de Van der Pol valable pour les très petites amplitudes. Préciser la nature de la solution.

Exercices d'approfondissement

- 7 **Angle d'arrêt d'un pendule pesant frottant**
 Un pendule pesant se déplace en frottant sur une surface semi-circulaire avec un coefficient de friction μ_s . Déterminer l'angle maximum d'arrêt du pendule une fois son énergie initiale dissipée.

8 Estimation de la fréquence de grincement

En reprenant le modèle de patin (masse M) frottant tiré par un ressort de raideur k avec un coefficient de friction μ , estimer la fréquence du mouvement saccadé d'avancée du patin. On supposera que le temps statique nécessaire à l'allongement du ressort est très grand comparé au temps de déplacement du patin lors d'un cycle de collé-glissé.

9 Harmonique 3 d'un oscillateur forcé

Un oscillateur non amorti subit une force de rappel comportant une correction anharmonique

$$\vec{F} = -m\omega_0^2 A + \beta\omega_0^3 A^3,$$

où A est l'amplitude de l'oscillateur et a la dimension d'une longueur, m est une masse et ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur en l'absence de correction anharmonique ($\beta = 0$). Le forçage est assuré par une force de la forme $ma \cos \omega t$.

- Préciser la dimension du coefficient β .
- Écrire l'équation pour la fonction $A(t)$.
- On cherche des solutions $A(t)$ sous la forme $A_L(t) + \beta A_1(t)$, où A_L est la solution linéaire et A_1 la perturbation non linéaire. On suppose $\beta A_1 \ll A_L$. Calculer la solution linéaire A_L puis A_1 et montrer l'apparition de l'harmonique d'ordre 3 dans la solution.

Corrigés

Tester ses connaissances

	a.	b.	c.
1			X
2		X	
3			X

Exercices d'application

- 4 Le développement à l'ordre 5 est

$$y = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120},$$

et l'erreur relative est

$$\frac{y - \sin \theta}{\sin \theta} = 0,45 \%$$

- 5 D'après la relation (8.3), la période d'oscillation devient nulle quand les hauteurs z_1 et z_2 sont égales. Le débit de sortie n'est plus une fonction périodique.
- 6 Pour les très petites amplitudes ($A \ll 1$), le terme quadratique A^2 devient négligeable. L'équation de Van der Pol se réduit alors à

$$\frac{d^2 A}{dt^2} - \epsilon \omega_0 \frac{dA}{dt} + \omega_0^2 A = 0.$$

Cette équation correspond à un oscillateur amorti mais avec un coefficient d'amortissement négatif, donc une croissance exponentielle de l'enveloppe de l'amplitude.

Exercices d'approfondissement

- 6 Angle d'arrêt d'un pendule pesant frottant

L'angle maximum d'arrêt du pendule θ_a est celui pour lequel il y a équilibre entre la force de pesanteur et la force de friction. Comme la force de frottement est tangente à la trajectoire et dépend de la force normale $Mg \cos \theta$, la condition d'arrêt est

$$\mu_s Mg \cos \theta \geq Mg \sin \theta,$$

soit $\tan \theta \leq \mu_s$. L'angle maximum d'arrêt est donc $\theta_a = \arctan(\mu_s)$.

7 Estimation de la fréquence de grincement

Si on suppose que le temps statique où le patin reste immobile est très grand comparé au temps de mouvement du patin, la fréquence est l'inverse du temps nécessaire pour allonger le ressort jusqu'à ce que la force élastique devienne égale à la force de friction. Si l'extrémité du ressort est tiré avec une vitesse constante U et si on suppose la masse à une position initiale $x = 0$, la force élastique du ressort est égale à kUt . La force de frottement solide est μMg et le temps où ces deux forces sont égales est

$$t = \tau_{statique} = \frac{\mu Mg}{kU} = \frac{\mu g}{\omega_0^2 U},$$

où $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ est la pulsation propre du système masse ressort. La fréquence de grincement, dans cette approximation, est donc

$$\nu = \frac{\omega_0^2 U}{\mu g}.$$

8 Harmonique 3 d'un oscillateur forcé

a. Le terme $\beta\omega^3 A^3$ a la dimension d'une force, on a donc $[\beta]\mathcal{L}^3\mathcal{T}^{-3} = \mathcal{L}^2\mathcal{M}\mathcal{T}^{-2}$, soit $[\beta] = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{T}$.

b. L'équation de l'amplitude $A(t)$ est

$$m \frac{d^2 A}{dt^2} = -m\omega_0^2 A + \beta\omega_0^3 A^3 + ma \cos \omega t,$$

soit

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \omega_0^2 A - \frac{\beta}{m} \omega_0^3 A^3 = a \cos \omega t.$$

c. En injectant la solution $A = A_L + \beta A_1$ dans l'équation différentielle, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_L}{dt^2} + \beta \frac{d^2 A_1}{dt^2} + \omega_0^2 A_L + \beta \omega_0^2 A_1 \\ + \frac{\beta}{m} \omega_0^3 (A_L^3 + 3A_L^2 \beta A_1 + 3A_L \beta^2 A_1^2 + \beta^3 A_1^3) = a \cos \omega t, \end{aligned}$$

et en hiérarchisant cette équation en fonction du paramètre non linéaire β , on a à l'ordre 1 en développement en β

$$\frac{d^2 A_L}{dt^2} + \omega_0^2 A_L + \beta \left(\frac{d^2 A_1}{dt^2} + \omega_0^2 A_1 - \frac{\omega_0^3}{m} A_L^3 \right) = a \cos \omega t.$$

La solution linéaire est obtenue en posant $\beta = 0$. Cette solution correspond à un oscillateur harmonique forcé non amorti décrit par l'amplitude

$$A_L(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

Pour $\beta \neq 0$, la fonction A_1 doit vérifier

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} + \omega_0^2 A_1 - \frac{\omega_0^3}{m} A_L^3 = 0,$$

ce qui correspond à une équation d'un oscillateur forcé avec une fonction proportionnelle à A_L^3 :

$$\frac{d^2 A_1}{dt^2} + \omega_0^2 A_1 = \frac{\omega_0^3}{m} \left(\frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^3 \cos^3 \omega t.$$

La fonction $\cos^3 \omega t = \frac{1}{4} \cos 3\omega t + \frac{3}{4} \cos \omega t$ fait apparaître un double forçage pour la fonction A_1 : un forçage à la pulsation ω , et un forçage à la pulsation triple 3ω . Comme l'équation pour A_1 est linéaire, on peut superposer les solutions obtenues pour les deux forçages, et finalement :

$$A_1 = \frac{\omega_0^3}{4m} \left(\frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^3 \left(\frac{\cos 3\omega t}{\omega_0^2 - 9\omega^2} + \frac{\cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2} \right).$$

La solution $A = A_L + \beta A_1$ montre bien une composante en $\cos 3\omega t$, harmonique d'ordre 3 dû à la force de rappel non linéaire.

A.1 FONCTIONS CIRCULAIRES

Quelle que soit la nature de la périodicité (temps ou espace), les fonctions périodiques de base sont les fonctions circulaires sinus et cosinus. Comme la parfaite maîtrise de ces fonctions est nécessaire pour aborder les phénomènes vibratoires et ondulatoires, quelques rappels mathématiques s'imposent.

Les fonctions $\sin \theta$ et $\cos \theta$ sont périodiques de période 2π . Les représentations graphiques de ces fonctions sont identiques, à un décalage de $\pi/2$ près (figure A.1b). En effet :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta.$$

Les fonctions sin et cos peuvent être traduites en notation complexe :

$$\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta,$$

ou encore

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}),$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

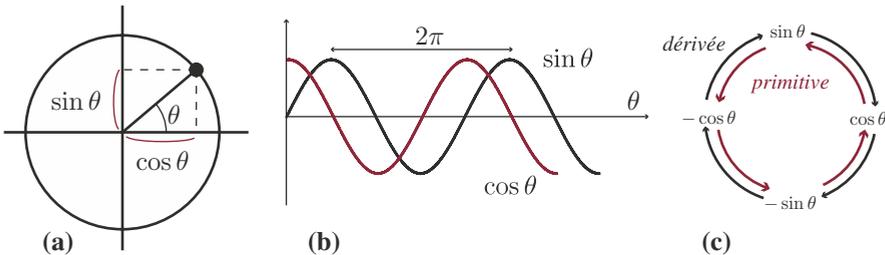


Figure A.1 (a) Le cercle trigonométrique : un point sur un cercle de rayon 1 a comme coordonnées $x = \cos \theta$ et $y = \sin \theta$. (b) Fonctions sinus (trait noir) et cosinus (trait bleu). (c) Dérivées et primitives des fonctions sin et cos. Les flèches noires indiquent la dérivée et les flèches bleues les primitives.

Enfin, on peut rappeler les dérivées de ces fonctions :

$$\frac{d}{d\theta} \sin \theta = \cos \theta \quad \text{et} \quad \frac{d}{d\theta} \cos \theta = -\sin \theta.$$

Cela implique que la dérivée seconde d'une fonction circulaire est égale à l'opposé de la fonction, et que la dérivée d'ordre 4 est égale à la fonction de départ. Ceci est illustré sur le cercle de dérivation de la **figure A.1**.

A.2 CHAMPS DE VECTEURS

Un vecteur est un objet mathématique doté d'une norme et d'une direction. Dans un repère cartésien (x, y, z) un vecteur \vec{A} a trois composantes A_x , A_y et A_z . Un **champ de vecteurs** désigne une quantité vectorielle qui dépend de l'espace.

- En coordonnées cartésiennes (**figure A.2a**), on note

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{pmatrix} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$

le champ de vecteur dont les trois composantes dépendent du point localisé par le triplet de coordonnées (x, y, z) .

- En coordonnées cylindriques (**figure A.2b**) :

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{e}_z \\ A_r &= A_x \cos \theta + A_y \sin \theta \\ A_\theta &= -A_x \sin \theta + A_y \cos \theta \end{aligned}$$

- En coordonnées sphériques (**figure A.2c**) :

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi.$$

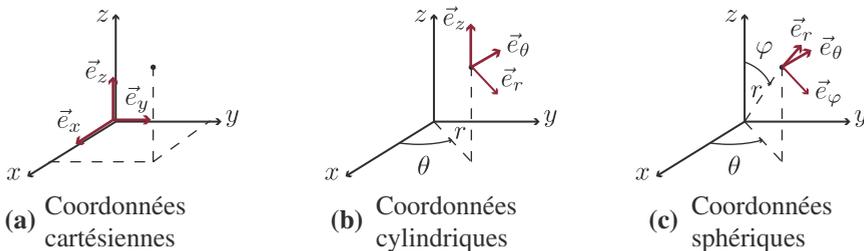


Figure A.2 Les trois systèmes de coordonnées.

A.3 OPÉRATIONS VECTORIELLES

Flux à travers une surface

Le flux d'un champ de vecteurs \vec{A} au travers d'une surface S (figure A.3) est

$$\Phi = \iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}.$$

Le vecteur $d\vec{S}$ est un vecteur unitaire ($\|d\vec{S}\| = 1$) normal à la surface.

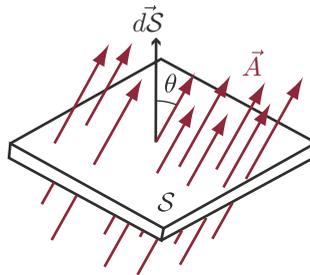


Figure A.3 Flux d'un champ de vecteur \vec{A} à travers une surface S .

Produit scalaire

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Produit vectoriel

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

A.4 OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

Vecteur nabla

En coordonnées cartésiennes, il est parfois commode d'utiliser l'opérateur vectoriel différentiel $\vec{\nabla}$ défini par

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}.$$

Divergence

- En coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- En coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\sin \varphi A_\varphi)$$

Rotationnel

- En coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial A_z / \partial y - \partial A_y / \partial z \\ \partial A_x / \partial z - \partial A_z / \partial x \\ \partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y \end{pmatrix}$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r \\ &+ \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

- En coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial (\sin \varphi A_\theta)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \right) \vec{e}_r \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Gradient

- En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{pmatrix}$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

- En coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

Laplacien

L'opérateur laplacien Δ est égal à la divergence du gradient d'une fonction scalaire $f(\vec{r})$.

- En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f = \text{div}(\vec{\text{grad}} A) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- En coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

A.5 RELATIONS UTILES

$$\text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\text{rot}(\vec{\text{grad}} f) = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{\text{grad}}(fg) = f\vec{\text{grad}}g + g\vec{\text{grad}}f \quad (\text{A.3})$$

$$\text{div}(f\vec{A}) = f\text{div}\vec{A} + (\vec{\text{grad}}f) \cdot \vec{A} \quad (\text{A.4})$$

$$\vec{\text{rot}}(f\vec{A}) = f\vec{\text{rot}}\vec{A} + (\vec{\text{grad}}f) \wedge \vec{A} \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A} \quad (\text{A.6})$$

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\vec{\text{rot}}\vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\vec{\text{rot}}\vec{B}) \quad (\text{A.7})$$

$$(\vec{\text{rot}}\vec{A}) \cdot \vec{B} = (\vec{\text{rot}}\vec{B}) \cdot \vec{A} + \vec{\text{grad}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) \quad (\text{A.8})$$

A.6 THÉORÈMES

- Théorème de Green-Ostrogradski : le flux d'un champ de vecteur \vec{A} au travers d'une surface fermée est égal à l'intégrale de volume de la divergence de ce champ.

$$\iint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iiint \text{div}\vec{A} dV, \quad (\text{A.9})$$

- Théorème de Stokes : l'intégrale de contour d'un champ de vecteur est égale à l'intégrale de surface du rotationnel de ce champ sur une surface portée par ce contour.

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\text{rot}}\vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad (\text{A.10})$$

Index des symboles

B

ALPHABET LATIN

Symbole	Quantité	Unité	Chapitres
A	amplitude	variable	2
\vec{B}	champ magnétique	T	6, 7
c	vitesse (célérité) de propagation des ondes	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	tous
c_a	vitesse des ondes acoustiques	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	4
c_c	vitesse des ondes de compression	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	4
c_m	vitesse des ondes transverses d'une membrane	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	4
c_s	vitesse des ondes transverses d'une corde	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	4
\mathcal{E}	énergie	J	2
E	module d'élasticité (module d'Young)	Pa	4
\vec{E}	champ électrique	$\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$	6, 7
F	force	N	4
g	constante d'accélération de la gravité	$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$	1–5
h	hauteur	m	3
i	nombre imaginaire pur		
I	moment d'inertie	m^4	4
I	intensité acoustique	$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$	5
I	courant électrique	A	6
\vec{j}	densité de courant	$\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$	6, 7
\vec{j}_d	densité de courant de déplacement	$\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$	6, 7
\vec{j}_s	densité superficielle de courant	$\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$	7
k	raideur de ressort	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$	2
k	nombre d'onde	m^{-1}	3, 6, 7
k_c	nombre d'onde de coupure	m^{-1}	7
k_g	nombre d'onde de l'onde guidée	m^{-1}	7
L	longueur	m	4
L_{dB}	niveau acoustique		5

m	nombre entier indice des modes stationnaires		4, 7
m	masse	kg	
m_e	masse de l'électron	kg	6, 7
M	masse	kg	
n	nombre entier indice des modes stationnaires		4, 7
n	indice de réfraction		7
N	nombre d'oscillateurs couplés		2
N	densité numérique d'atomes	m^{-3}	6, 7
p	pression	Pa	5
p	moment dipolaire	$\text{C}\cdot\text{m}$	7
q, Q	charge électrique	C	6
Q	facteur de qualité		2
Q_E, Q_S	débit volumique	$\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$	8
r_g	rayon de giration	m	4
\vec{r}	vecteur position en coordonnées sphériques ou polaires	m	
S	section, surface	m^2	4
t	variable temps	s	tous
T	tension	N	4
T_c	temps caractéristique	s	7
U	potentiel électrique	V	6
U	vitesse	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	8
\mathcal{U}	densité d'énergie électromagnétique	$\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$	6
\vec{v}	vecteur vitesse	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	5
v_φ	vitesse de phase	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	3–7
v_g	vitesse de groupe	$\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	3–7
x, y, z	variables d'espace	m	tous
Z	nombre électronique		7

ALPHABET GREC

Symbole	Quantité	Unité	Chapitres
α	polarisabilité atomique	m^3	7
γ	coefficient d'amortissement de l'oscillateur	s^{-1}	2
γ	conductivité électrique	$\Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$	7
ε_0	permittivité électrique du vide	$\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$	6, 7
ε_r	permittivité électrique relative		7
η_f	viscosité dynamique d'un fluide	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$	4
θ	angle		2
θ_L	angle limite de réflexion totale		7

λ	longueur d'onde	m	tous
μ_0	perméabilité magnétique du vide	$\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$	6, 7
μ_d	coefficient de friction dynamique		8
μ_r	perméabilité magnétique relative		7
μ_s	coefficient de friction statique		8
ρ	masse volumique	$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	4
ρ_e	résistivité	$\Omega\cdot\text{m}$	7
ρ_c	densité volumique de charges	$\text{C}\cdot\text{m}^{-3}$	6, 7
σ	contrainte	Pa	4
σ	densité surfacique de charges	$\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$	6, 7
ν	fréquence	Hz	tous
ϕ	phase de l'onde	rad	3
τ	période	s	1
χ	compressibilité	Pa^{-1}	5
ψ	paramètre de développement		5
ω	pulsation	s^{-1}	tous
ω_c	pulsation caractéristique	s^{-1}	7
ω_p	pulsation plasma	s^{-1}	7

Bibliographie et références

LIVRES

Ouvrages historiques

Ces ouvrages ont été numérisés et sont consultables en format pdf à partir du site Gallica (www.gallica.fr), la bibliothèque numérique de la Bibliothèque Nationale de France.

LAMÉ G. *Cours de physique de l'école polytechnique*. Tome 2 : *Acoustique, théorie physique de la lumière*. Deuxième édition. Bachelier, Paris, 1840.

LAMÉ G. *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Gauthier-Villars, Paris, 1866.

MAXWELL J. C. *A treatise on electricity and magnetism*. Volume II. Clarendon Press, Oxford, 1873.

RAYLEIGH (J. W. Strutt) *The theory of sound*. MacMillan, Londres, 1877.

Ouvrages de physique générale

ALONSO, FINN *Physique générale*, Tome.1 : Mécanique et thermodynamique, 2^e éd., Dunod, Paris, 2004.

ALONSO, FINN *Physique générale*, Tome.2 : Champs et ondes, 2^e éd., Dunod, Paris, 2005.

FEYNMAN R. *Le Cours de physique de Feynman : Électromagnétisme 1 et 2*. Dunod, Paris, 1979.

FEYNMAN R. *Le Cours de physique de Feynman*, Tome 1 : Mécanique 1 et 2. Dunod, Paris, 1998.

PURCELL E.M., GUTHMANN C., LALLEMAND *Cours de physique de Berkeley*, Tome 2 : *Électricité et magnétisme*. Dunod, Paris, 1998.

Ouvrages spécialisés

BERGÉ P., POMEAU Y., VIDAL C. *L'ordre dans le chaos*. Hermann, Paris, 1984.

BOYD R. *Nonlinear optics*, Academic Press, 3^e édition, 2008.

FLETCHER, H.N. et ROSSING, T.D. *The physics of musical instruments*, second edition. Springer-Verlag, New York, 1998.

GARING, C. *Milieux diélectriques*. Ellipses, Paris, 1995.

HARRIS C.M., PIERSOL A.G. *Shock and vibration handbook*. MacGraw-Hill, 2001.

LANDAU L., LIFCHITZ E., *Physique théorique, Tome 6 : Mécanique des fluides*. Ellipses, Paris, 1998.

LIGHTILL J. *Wave in fluids*. Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

SITES WEB

Cours en ligne

On ne peut que conseiller de consulter le site de cours en ligne du Massachusetts Institute of Technology (MIT) : <http://ocw.mit.edu> qui rassemble plusieurs cours de physique qui traitent des ondes :

Cours 8.01 : *Physics I : Classical mechanics* ;

Cours 8.02 : *Physics II : Electricity and magnetism* ;

Cours 8.03 : *Physics III : Vibration and waves* ;

Cours 8.311 : *Electromagnetic theory* ;

Cours 6.013 : *Electromagnetism and applications*.

Index

A

AMPÈRE (théorème d'), 141
angle de perte, 171, 175
antisymétrique, (mode), 36

B

battements, 37
cardiaques, 4

C

chaînette, (équation de la), 80
champ
électrique, 135
magnétique, 139
charge, 134
conservation de la, 139
constante diélectrique, 134
corde
forme d'une, 80
sympathique, 39
vibrante, 82
COULOMB, (loi de), 135
courant, (densité de), 138

D

déformation
élastique, 75
plastique, 75
densité
d'énergie, 87, 152
de courant, 138
volumique de charges, 137
déphasage de l'oscillateur forcé, 30
dimension, 2
dioptré, 185
diphase, 120

E

effet Kelvin, 181

F

facteur de qualité, 29
flèche
d'une corde, 81
d'une poutre, 102
force électrique, 135
FOURIER
série de, 56
transformée de, 56
fréquence(s), 3
dénégréescence des —, 93
séparation de —, 36
frottement
solide, 206
visqueux, 26

G

GAUSS, (théorème de), 137
giration, (rayon de), 103
groupe, (vitesse de), 67

H

harmonique, 86
HOOKE, (loi de), 75

I

inertie, (moment d'), 99

K

KELVIN, (effet), 181

L

laser, 58
liaison atomique, 21
longueur d'onde, 6
LORENTZ, (force de), 142

M

masse-ressort, 16
 MAXWELL, (équations de), 144
 mode
 antisymétrique, 36
 symétrique, 35
 moment d'inertie, 99
 monochromatique, 58

N

nombre d'onde, 7

O

OHM, (loi d'), 162
 onde
 acoustique, 118
 convergente, 61
 de compression, 76
 divergente, 61
 monochromatique, 58
 plane, 59, 147
 sismique, 78
 sphérique, 60
 stationnaire, 65
 optique non linéaire, 210
 oscillateur(s), 15
 amorti, 26
 chaîne d'—, 39
 couplés, 33
 de relaxation, 204
 de Van der Pol, 211
 électronique, 19
 forcé, 29
 harmonique, 23

P

pendule
 non linéaire, 201
 simple, 17

période, 3
 perméabilité magnétique, 134
 perturbations, (méthode des), 117
 phase, (vitesse de), 62, 63
 PLANCK, (relation de), 152
 POISSON, (équation de), 137
 potentiel, 136
 poutre
 forme d'une —, 102
 vibrante, 102
 POYNTING, (vecteur de), 152
 pulsation, 3

Q

qualité, (facteur de), 29

R

rayon de giration, 103
 résonance, 31

S

SNELL-DESCARTES, (lois de), 185
 spectroscopie, 23

T

Tantale, (réservoir de), 204
 TAYLOR, (série de), 18
 tension
 d'une corde, 79
 d'une membrane, 89

V

VAN DER POL, (oscillateur de), 211
 vibrations, (pathologie des), 32
 vitesse
 de groupe, 67
 de phase, 63
 du son, 118, 119

Maxime NICOLAS

Ondes et électromagnétisme

Cet ouvrage de la série « *Parcours ingénieur* » s'adresse aux élèves en 1^{ère} et 2^e années des écoles d'ingénieurs en 5 ans (Parcours des écoles d'ingénieurs Polytech (PeiP), 1^{er} cycle ingénieur, prépas intégrées...) et pourra aussi intéresser les étudiants en licences 1 et 2 universitaires classiques.

Il fournit les bases en ondes et électromagnétisme nécessaires à la formation des élèves-ingénieurs. Son originalité est d'allier une théorie rigoureuse à de nombreuses applications concrètes afin de la rendre rapidement accessible.

Chaque chapitre contient :

- un cours synthétique, illustré d'exemples et d'applications,
- une synthèse de ce qu'il faut retenir,
- des QCM pour tester sa compréhension du cours,
- des exercices avec corrigés détaillés

Cet ouvrage a été réalisé en partenariat avec le réseau Polytech, le réseau des écoles d'ingénieurs polytechniques des universités.

MAXIME NICOLAS
est professeur
à Polytech' Marseille.