

LP201

Ondes Mécaniques et Lumineuses

Dan ISRAËL

Université Pierre et Marie Curie



Figure : Ondes orographiques créées dans le sillage d'îles de l'Océan Pacifique.

Préambule

Ce document contient les notes que j'ai rédigées pour accompagner le cours d'ondes mécaniques et lumineuses que j'ai donné en licence de physique à l'UPMC de 2006 à 2011.

Les équations importantes, à connaître ou à savoir redémontrer, sont encadrées. À l'inverse, les paragraphes encadrés sont des compléments, non indispensables en première lecture.

Bibliographie

En principe le cours se suffit à lui-même, néanmoins il peut être utile de se référer à d'autres ouvrages pour avoir un éclairage différent :

- *Physique pour les sciences de la vie, tome 3 : les ondes*, Bouissy, Davier et Gatty, éditeur Belin. Ouvrage bien adapté.
- *Physique des ondes*, Halliday, Resnick et Walker
- *Physique*, Hecht, éditeur De Boeck. Beaucoup d'exemples et d'applications, mais niveau mathématique trop facile pour LP201.

Table des matières

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Phénomènes ondulatoires | 5 |
| 2 | Équation d'onde et propagation | 9 |
| 3 | Superposition d'ondes, ondes stationnaires | 23 |
| 4 | Cordes vibrantes | 29 |
| 5 | Ondes acoustiques | 47 |
| 6 | Ondes lumineuses | 67 |
| 7 | Interférences et diffraction | 75 |
| 8 | Effet Doppler | 97 |

Chapitre 1

Phénomènes ondulatoires

Les phénomènes ondulatoires sont omniprésents en physique. L'étude des ondes que nous aborderons ici concerne un grand éventail de systèmes physiques différents, qui peuvent néanmoins se prêter — dans le cadre de certaines approximations que nous indiquerons lorsque cela sera possible — à une analyse commune. De manière générale nous nous intéressons à des perturbations locales d'un système par rapport à son état d'équilibre ; lorsque cette perturbation se propage à partir de sa source en fonction du temps, dans les différentes directions spatiales du système, sans néanmoins que les constituants du milieu subissent un mouvement d'ensemble, nous avons affaire à une onde. L'onde, qui ne transporte donc pas de matière, transporte donc de l'énergie.¹

1.1 Quelques phénomènes ondulatoires dans la Nature

Il est possible d'emblée de séparer les phénomènes ondulatoires en deux catégories distinctes suivant leur nature physique.

La première d'entre elles est constituée d'*ondes mécaniques* générées par de petites perturbations d'un milieu matériel. Ces ondes sont naturellement conditionnées par la nature physique de celui-ci, et se décrivent le plus simplement dans le référentiel attaché à ce milieu. Donnons quelques exemples d'ondes mécaniques :

- les *ondes acoustiques* ou *ondes sonores* dans les fluides, dont nous avons l'expérience quotidienne, sont générées par de petits déplacements des molécules du fluide autour de leur position statistique d'équilibre, ou de manière équivalente par de petites variations de pression. Ces perturbations peuvent se propager dans les trois dimensions du fluide ;
- les *ondes acoustiques dans les solides* sont de nature assez voisine. La structure du solide est formée de manière schématique de noyaux atomiques (ou d'ions) ordonnées suivant un réseau de manière rigide (contrairement aux molécules de fluide, libres de se déplacer). Un déplacement de ces noyaux par rapport à leur position d'équilibre dans le réseau engendrera la production d'une onde. Leur étude peut être plus complexe que celle des ondes dans les fluides car un solide possède souvent des directions ou axes privilégiés — spécialement dans le cas d'un cristal — qui influenceront la propagation des ondes ;
- les *ondes sismiques* correspondent à un cas particulier d'ondes acoustiques, à la fois dans les solides (dans les roches) et les fluides (le manteau qui est assimilable à un fluide très visqueux), dont l'analyse permet de sonder la composition interne de la Terre ;
- en biologie et médecine, la propagation des *ondes ultrasonores dans les tissus biologiques* est impliquée par exemple dans les échographies. Les tissus biologiques étant majoritairement constitués d'eau elles sont assimilables à des ondes se propageant dans les fluides (mais néanmoins non homogènes) ;

1. Un bon exemple est donné par le rayonnement solaire, constitué d'ondes électromagnétiques.

- les *ondes sur les cordes vibrantes* sont dues au déplacement transversal d'une corde tendue par rapport à sa position d'équilibre ;
- les *ondes de gravité*, ou ondes de surface, sont des ondes à deux dimensions se propageant à l'interface de deux fluides, en présence de la gravité. L'exemple le plus commun de telles ondes est donné par les vagues à la surface de la mer, ou à une échelle plus réduite les rides émises par le jet d'un objet dans l'eau. Dans ce cas l'onde est évidemment confinée à deux dimensions car elle est liée au déplacement de la position de l'interface. La force responsable du retour à l'équilibre de l'interface est la poussée d'Archimède, générée en la présence du champ de pesanteur ;
- les *ondes océaniques et atmosphériques*. Ces ondes ne sont pas de nature fondamentalement différente de celles évoquées plus haut mais ont lieu à des très grandes échelles, telles que la rotondité de la terre et son mouvement de révolution agissent de manière significative. Les exemples les plus connus sont les ondes de Rossby, qui influencent grandement la circulation de l'atmosphère aux latitudes tempérées, et les ondes de Kelvin qui sont des ondes de gravité sur l'océan parallèles aux côtes.

Il est courant de devoir tenir compte de plusieurs types d'ondes mécaniques pour décrire complètement un phénomène. Prenons l'exemple d'une guitare. En pinçant la corde le joueur produit une onde sur la corde vibrante. Ces vibrations seront transmises à la table de la guitare par le chevalet. Il faut alors considérer des ondes mécaniques dans le bois de la table. Les vibrations de la table mettront alors l'air en mouvement, générant des ondes sonores dans l'air.

Les phénomènes ondulatoires de la deuxième catégorie ne nécessitent pas de milieu matériel pour se propager. Elles diffèrent donc des ondes précédentes dans le sens où elles ne correspondent pas aux perturbations d'un système matériel. Il existe essentiellement deux sortes d'ondes de ce type :

- les *ondes électromagnétiques* correspondent aux variations locales, conjointes, des champs électriques et magnétiques. Ces ondes peuvent parfaitement se propager dans le vide, mais également dans les milieux matériels pourvu que ceux-ci soient suffisamment transparents. Lorsque ces ondes sont détectables par l'œil, c.-à.-d. dans le domaine de longueur d'onde *visible*, elles sont communément appelées *ondes lumineuses*. Il s'agit d'un des domaines principaux d'application de la physique ondulatoire ;
- les *ondes gravitationnelles* sont de nature nettement plus exotique. Elles sont prédites par la théorie de la relativité générale d'Einstein et correspondent à la propagation de déformations de l'espace-temps, générées par des objets massifs sous certaines conditions. Bien que non encore détectées directement, leur existence est confirmée par plusieurs phénomènes astrophysiques.

1.2 Caractéristiques d'une onde

Après avoir mentionné quelques systèmes physiques dans lesquels se produisent des phénomènes ondulatoires, essayons maintenant d'en donner quelques caractéristiques générales. Nous ne pouvons au stade actuel définir ces notions avec une grande précision, mais elles réapparaîtront naturellement par la suite lorsque nous aurons mis en place le formalisme nécessaire à la description mathématique des ondes. Cette liste n'est certainement pas exhaustive mais contient plusieurs notions très importantes qui seront développées par la suite.

Une onde est caractérisée par :

1. sa *dimensionnalité*. Elle est fixée par celle du milieu dans lequel l'onde peut se propager (que l'onde y soit liée, dans le cas des ondes mécaniques, ou non). Une onde sur une corde ne peut naturellement se propager qu'à une dimension, le long de la corde. Une onde de gravité à la surface de l'eau est naturellement bidimensionnelle. Une onde acoustique dans un fluide ou une onde électromagnétique sont a priori des ondes tridimensionnelles car elles existent dans

un milieu qui a trois dimensions. Cependant des situations particulières peuvent contraindre, avec une bonne approximation, l'onde se propager à une ou deux dimensions. Nous pouvons évoquer la propagation d'ondes sonores dans un rail de chemin de fer (exemple bien connu des amateurs de western) ou bien des ondes lumineuses dans une fibre optique. Dans ces deux exemples l'onde est contrainte de ne se propager qu'à une dimension ;

2. la *vitesse* à laquelle elle se propage. La définition de cette vitesse est plus subtile qu'il n'y paraît comme cela sera expliqué par la suite. La notion de vitesse la plus simple est la suivante. On génère en un point donné une perturbation de courte durée (appelée alors impulsion), qui va ensuite se propager sous la forme d'une onde ; on peut alors mesurer la vitesse à laquelle l'impulsion se propage. La vitesse définie de cette manière s'appelle *vitesse de groupe* de l'onde. De manière générale, plus le milieu dans lequel se propage une onde mécanique « résiste » à des perturbations, plus cette vitesse sera élevée ;
3. la *grandeur physique* qui oscille autour de sa valeur d'équilibre lors de son passage. En général il existe plusieurs grandeurs associées à une onde, qui en fournissent des descriptions équivalentes ; par exemple la surpression et la vitesse dans le cas des ondes acoustiques, ou les champs électriques et magnétiques pour les ondes lumineuses ;
4. sa *direction de propagation*. Certaines ondes ont une direction de propagation unique et bien définie, comme le faisceau d'un laser. D'autres ondes se propagent dans toutes les directions, comme l'onde de gravité créée à la surface de l'eau lorsqu'on y jette un caillou. La direction de propagation de l'onde n'est pas nécessairement identique à la direction selon laquelle a lieu la perturbation. Lorsque ces deux directions sont orthogonales, l'onde est dite *transverse*. Dans le cas où ces directions sont parallèles, l'onde est dite *longitudinale*. Nous étudierons par la suite des représentants de ces deux familles d'ondes ;
5. Une notion étroitement liée à la précédente est celle de la *géométrie*, ou « forme » de l'onde. Dans l'exemple précédent des ondes à la surface de l'eau, l'onde à une géométrie circulaire, avec la source de l'onde en son centre. L'équivalent d'une telle onde à trois dimensions est une *onde sphérique*, qui se propage à partir d'une source ponctuelle située au centre des « sphères emboîtées » correspondant à l'onde. Un autre type d'onde courant à trois dimensions est l'*onde plane* qui se propage dans une même et unique direction, quel que soit le point de l'espace où on l'observe. De manière générale la géométrie de l'onde est liée à la géométrie de la source, du moins si l'onde est libre de se propager dans toutes les directions jusqu'à l'infini ;
6. les ondes dans un certain système sont caractérisées par le fait qu'une perturbation, en se propageant, va ou non conserver sa forme initiale. Si la forme n'est pas conservée, nous sommes en présence du phénomène de *dispersion*. L'équation permettant de caractériser ce phénomène est appelée relation de dispersion.

1.3 À quelles conditions une onde peut-elle se propager ?

Il ne suffit pas de perturber un milieu matériel pour qu'une onde mécanique puisse se propager, ou du moins se propager efficacement. Il faut tout d'abord que le système se trouve en chaque point traversé par l'onde dans un état d'équilibre ; dans le cas contraire le passage de l'onde peut entraîner une brusque modification du milieu.

Ce système est maintenant perturbé localement. Son nouvel état peut être aussi un état d'équilibre ; il n'y a alors pas de propagation. Dans le cas contraire, il existe une *force de rappel* qui tend à ramener le système dans son état original. Dans le cas d'une corde vibrante, il s'agit simplement de la tension de la corde.²

2. Le cas d'une onde acoustique dans un gaz est plus subtil. La force de rappel est due aux forces de pression qui s'opposent à la compression du fluide, plus précisément aux variations locales de la pression par rapport à sa valeur

Si la force de rappel va tendre à ramener le système à l'équilibre au point où il a été perturbé, propageant la perturbation de proche en proche, il faut que l'énergie contenue dans la perturbation ne soit pas « perdue » en étant transmise au milieu. Ce phénomène, appelé *dissipation*, est toujours présent lors de la propagation d'ondes mécaniques, lié par exemple à la viscosité des fluides (à l'exception notable de l'Helium superfluide). Il existe aussi pour les ondes lumineuses, sauf dans le vide.

On pourra négliger ce phénomène si l'atténuation de l'onde qui en résulte est faible à des échelles caractéristiques correspondant à l'expérience considérée. Lorsque ces conditions ne peuvent pas être remplies (si la dissipation est trop importante) il n'y a alors pas de propagation d'ondes.³

1.4 Régime de validité

Lors de l'étude des ondes mécaniques nous supposons toujours que la perturbation est de faible amplitude. Dans ce régime les ondes sont alors de nature linéaire, car différentes ondes peuvent se « croiser » sans interagir entre elles. L'équation régissant la propagation des ondes est alors soluble en toute généralité.

Les ondes électromagnétiques dans le vide sont toujours de nature linéaire, quelle que soit leur amplitude; par contre dans un milieu matériel ce n'est plus nécessairement vrai, car une onde électromagnétique de grande amplitude peut interagir suffisamment avec le milieu pour que celui-ci perturbe la forme de l'onde.

En analysant un système physique donné il faut toujours s'assurer que nous restons dans le régime de validité de cette approximation, en d'autres termes il faut vérifier que les ondes restent toujours d'amplitude plus faible qu'une valeur caractéristique au-delà de laquelle l'onde devient *non-linéaire*.

L'apparition de phénomènes non-linéaires dans les ondes mécaniques est relativement courante, et ne remet pas en compte leur nature ondulatoire, même si elle en change la nature. Un exemple très intéressant est constitué par les *ondes de choc* qui apparaissent en particulier lorsqu'un avion se meut à une vitesse supérieure à celle du son. Le long d'une onde de choc, la perturbation de l'air engendrée par l'avion est comprimée dans une zone extrêmement petite. Les gradients importants de vitesse et de pression rendent l'onde non-linéaire.

au repos. Ces forces sont dans un gaz parfait d'origine thermodynamique (elles sont dues uniquement à l'agitation thermique).

3. Une bonne analogie est fournie par l'étude de l'oscillateur harmonique amorti. Lorsque le coefficient d'amortissement est faible, nous avons un régime pseudo-périodique, tel que le mouvement du système est approximativement périodique lorsqu'il est étudié sur une petite période de temps. Par contre, au-delà d'une valeur critique, le système est dans le régime aperiodique et n'oscille plus.

Chapitre 2

Équation d'onde et propagation

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les phénomènes ondulatoires décrivent la propagation de perturbations à travers l'espace en fonction du temps. L'objectif de ce chapitre est d'en donner une description quantitative, en termes d'une *équation d'onde* dont les solutions décrivent les phénomènes ondulatoires qu'ils soient de nature mécanique ou lumineuse.

L'équation d'onde étudiée dans ce chapitre, appelée *équation de d'Alembert*, est exacte dans le cas des ondes électromagnétiques dans le vide mais n'est valable que pour de petites perturbations dans le cas des ondes mécaniques. Par hypothèse les perturbations se propagent sans atténuation (c.-à.-d. sans dissipation d'énergie) et sans dispersion. Les modifications à apporter pour tenir compte de ces effets seront évoquées à la fin du cours.

2.1 Équation d'onde

Nous nous restreindrons dans un premier temps aux ondes se propageant dans une seule dimension spatiale x . On considère que les variations d'une grandeur physique en jeu dans le phénomène ondulatoire sont décrites par une fonction $f(x, t)$ de l'espace et du temps. Par convention, en l'absence de perturbation, $f(x, t) = 0, \forall x, t$.

L'équation d'onde linéaire décrivant la propagation de l'onde est alors l'*équation de d'Alembert* à une dimension, donnée par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = 0} \quad (2.1)$$

Il s'agit d'une *équation aux dérivées partielles* linéaire, du second ordre, à coefficients constants. Elle ne dépend que d'un paramètre réel positif c , dont la nature physique est donnée ci-dessous.

Il est commode d'introduire un opérateur différentiel \square appelé *d'alembertien*, défini par

$$\square f(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.2)$$

en termes duquel l'équation d'onde s'écrit simplement $\square f = 0$.

Ondes transverses et longitudinales

La même équation d'onde (2.1) peut correspondre à des réalités différentes, suivant le problème physique étudié. La grande majorité des phénomènes ondulatoires peut être classifié selon deux catégories :

- dans le premier cas, la grandeur $f(x, t)$ correspond à une perturbation dans une direction orthogonale à la direction de propagation de l'onde Ox . L'onde est alors dite *transverse*. Par exemple les ondes lumineuses et les ondes sur les cordes vibrantes sont de ce type.

— Dans un deuxième cas, la perturbation est parallèle à la direction de propagation. Une telle onde est une *onde longitudinale*. Les ondes acoustiques dans les fluides sont de ce type. Notons que dans le cas des ondes mécaniques dans les solides, qui ne sera pas étudié ici, ces deux types d'ondes coexistent.

2.2 Célérité des ondes

L'équation d'onde dépend d'un unique paramètre c . Effectuons l'analyse dimensionnelle de l'éq. (2.1). Nous obtenons :

$$\frac{1}{[c]^2 T^2} = \frac{[f]}{L^2} \implies [c] = \frac{L}{T} \quad (2.3)$$

Le paramètre c a donc la dimension du rapport d'une longueur sur un temps, soit une vitesse. Il est appelé *célérité* de l'onde.¹ Il dépendra des caractéristiques physiques du système considéré.

La célérité des ondes peut prendre des valeurs très différentes, selon le type d'ondes considéré. Donnons quelques exemples. Les ondes lumineuses dans le vide se propagent à la célérité $c \simeq 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Les ondes sonores dans l'atmosphère ont une célérité de l'ordre de $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette dernière valeur dépend des conditions comme nous le verrons plus loin. Une onde mécanique dans le fer se propage à $c = 5950 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

2.3 Solution générale de l'équation d'onde

Pour trouver la solution générale de l'éq. (2.1), nous remarquons tout d'abord que l'opérateur d'Alembertien (2.2) peut se factoriser comme suit :²

$$\square = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right). \quad (2.4)$$

Introduisons maintenant les variables $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, définies en fonction de x et t par

$$\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ t = \frac{v-u}{2c} \end{cases} \quad (2.5)$$

Les dérivées partielles par rapport aux nouvelles variables sont données par :

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (2.6a)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (2.6b)$$

de telle sorte que le d'Alembertien peut s'écrire en fonctions de u et v comme :

$$\square = 4 \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \quad (2.7)$$

Nous considérons maintenant f comme une fonction de u et de v :

$$\hat{f}(u, v) \equiv f(x, t) \quad \forall (x, t, u, v) \in \mathbb{R}^4 \quad (2.8)$$

1. Notons que. l'équation étant linéaire, nous n'avons pas besoin de connaître la dimension de f pour arriver à ce résultat.

2. Strictement, cette opérateur ne peut se factoriser de la sorte que s'il est appliqué à des fonctions deux fois dérivables dans les variables x, t , dont les dérivées secondes sont continues, c.-à.-d. à $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Cela implique l'identité des dérivées croisées (dite *identité de Schwarz*) : $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t \partial x}$. Nous considérons à partir de maintenant que les solutions de l'équation d'onde font partie de cet espace de fonctions.

Il est maintenant très simple de résoudre l'équation d'onde pour \hat{f} , qui s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \hat{f}(u, v)}{\partial v \partial u} = 0 \quad (2.9)$$

Nous avons premièrement :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial \hat{f}(u, v)}{\partial v} \right] = 0 \implies \frac{\partial \hat{f}(u, v)}{\partial v} = g(v) \quad (2.10)$$

avec g une fonction dérivable quelconque. En intégrant cette équation par rapport à la variable v , on trouve que la solution générale de cette équation est donnée par la somme d'une fonction de u uniquement et d'une fonction de v uniquement :

$$\hat{f}(u, v) = \hat{f}_-(u) + \hat{f}_+(v) \quad (2.11)$$

avec $\hat{f}_\pm \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Ces deux fonctions sont *arbitraires* et indépendantes entre elles.

En termes des variables originales du problème, la solution générale de l'équation d'onde (2.1) s'écrit

$$\boxed{f(x, t) = f_-(x - ct) + f_+(x + ct)} \quad (2.12)$$

Nous obtenons que la somme de deux fonctions à une variable deux fois dérivables *quelconques*, la première dépendant de $x - ct$ uniquement et la deuxième de $x + ct$ uniquement, est une solution de l'équation d'onde. Ainsi une onde générique n'est pas donnée par une simple vibration sinusoïdale.

Nous allons maintenant donner l'interprétation physique de cette solution générale de l'équation d'onde, en particulier élucider la signification des deux termes apparaissant dans la solution.

2.4 Ondes progressives

Considérons tout d'abord le premier terme de la solution, noté $f_-(x - ct)$. Il ne dépend que de la combinaison $x - ct$ de la coordonnée spatiale x et de la coordonnée temporelle t .

En un point et un instant arbitraire (x_1, t_1) , la fonction f_- prend une certaine valeur, $f_-(x_1 - ct_1)$. À un instant ultérieur $t_2 > t_1$, la fonction va reprendre la même valeur en un point de coordonnée x_2 tel que l'argument de f_- soit identique, c.-à.-d. tel que :

$$x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2 \implies x_2 = x_1 + c(t_2 - t_1) > x_1 \quad (2.13)$$

Cela correspond simplement à « décaler » la fonction f_- selon l'axe Ox , voir la figure 2.1. Le temps s'écoulant toujours vers les t croissants, on s'aperçoit que le profil de la fonction f_- se décale vers les x *croissants*.

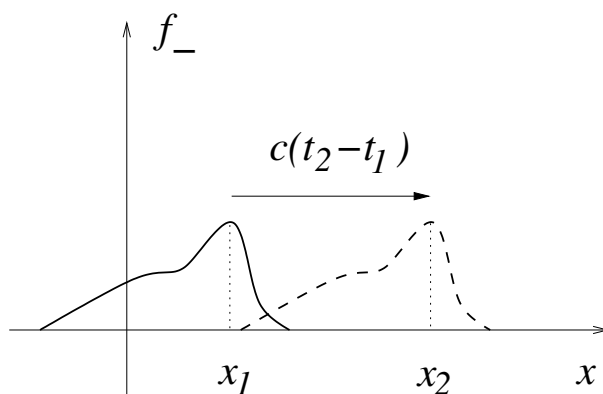
Une telle solution est une onde *progressive*. Elle décrit une perturbation se déplaçant vers les x croissants. Une propriété cruciale de l'équation d'onde (2.1) est que la perturbation f_- se propage sans déformation. Cela correspond au fait que la propagation s'effectue sans *dispersion*. Le profil initial de la perturbation, spécifié par la fonction $f(x, t = 0) = f_-(x)$ subit simplement une translation vers les x croissants d'une distance $c\Delta t$, pendant un intervalle de temps Δt donné.

Le deuxième terme de la solution générale de l'équation d'onde (2.12) a une interprétation similaire. La fonction f_+ subit dans ce cas une translation de x_1 à x_2 entre les instants t_1 et t_2 donnée par :

$$x_1 + ct_1 = x_2 + ct_2 \implies x_2 = x_1 - c(t_2 - t_1) < x_1 \quad (2.14)$$

Nous voyons ainsi que la perturbation représentée par f_+ se déplace vers les x *décroissants*. Une telle onde est appelée *onde régressive*.³

3. On utilise parfois le terme d'onde progressive pour l'un ou l'autre cas.


 FIGURE 2.1 – Évolution d'une onde progressive entre deux instants t_1 et t_2 .

2.5 Ondes sinusoïdales

Une catégorie particulièrement importante de solutions de l'équation d'onde (2.1) correspond aux ondes sinusoïdales. Ces dernières sont données par des fonctions trigonométriques et présentent donc des propriétés de périodicité.

Une onde *progressive sinusoïdale* à une dimension est de la forme générique :

$$f(x, t) = \mathcal{A} \cos [\omega t - kx + \phi] \quad (2.15)$$

Insistons sur le fait qu'une onde progressive générique n'est *pas* une onde sinusoïdale de la forme (2.15). Ce n'est qu'un exemple particulier parmi une infinité d'autres.

Détaillons les différents paramètres ω , k , \mathcal{A} et ϕ entrant dans l'expression de l'onde sinusoïdale (2.15) :

1. la quantité ω , exprimée en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, est la *pulsation* de l'onde (positive par convention) ;
2. le *nombre d'onde* k , exprimé en $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$, qui est l'analogie spatial de la pulsation. Pour une onde à une dimension il s'agit d'une quantité algébrique (positive ou négative) ;
3. l'*amplitude* de l'onde \mathcal{A} qui quantifie la « taille » de la perturbation ;
4. la quantité ϕ est le *déphasage* de l'onde par rapport à une phase de référence.

Relation de dispersion

Parmi les paramètres de l'onde progressive sinusoïdale (2.15), seul le nombre d'onde n'est pas choisi librement. Vérifions en effet à quelle condition la fonction (2.15) est une solution de l'équation d'onde (2.1). On obtient la contrainte suivante :

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 \right) \mathcal{A} \cos [\omega t - kx + \phi] = 0 \quad \forall t, \quad \forall x \quad (2.16)$$

Nous en déduisons que, pour une pulsation donnée, le nombre d'onde et la pulsation sont liés par l'équation

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}} \quad \Longrightarrow \quad k = \pm \frac{\omega}{c}, \quad (2.17)$$

qui constitue la *relation de dispersion* du système. Pour une onde à une dimension, cette équation a deux solutions, une positive et une négative (nous rappelons que le nombre d'onde est une grandeur algébrique dans ce cas).

L'onde *progressive* correspond à la racine positive de l'équation (2.17), donnée par $k = \omega/c$. Nous pouvons alors réécrire la fonction (2.15) comme

$$f(x, t) = \mathcal{A} \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \phi \right] = f_-(x - ct) \quad (2.18)$$

On reconnaît bien la forme caractéristique d'une onde progressive, correspondant à la propagation de la perturbation vers les x croissants.

On obtient une onde régressive en choisissant la solution négative de l'équation (2.17), c.-à.-d. $k = -\omega/c$. On peut alors écrire la solution comme

$$f(x, t) = \mathcal{A} \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{c} \right) + \phi \right] = f_+(x + ct) \quad (2.19)$$

La superposition d'une onde progressive sinusoïdale et d'une onde régressive sinusoïdale n'est ni une onde progressive ni une onde régressive.

Amplitude et phase

Le coefficient constant \mathcal{A} , qui est *toujours positif*, est l'amplitude de l'onde et donne l'échelle de la perturbation considérée. Il a la même dimension que la perturbation $f(x, t)$ elle-même, le cosinus étant sans dimension. Par convention, l'amplitude d'une onde est toujours *positive*.

La phase de l'onde, qui dépend du temps et de l'espace, correspond à l'argument du cosinus dans l'équation (2.15). Elle est donnée par

$$\boxed{\Phi(x, t) = \omega t - kx + \phi} \quad (2.20)$$

et est définie modulo 2π . La partie constante ϕ de cette quantité correspond au *déphasage* de l'onde par rapport à la phase d'une onde de référence (qui est choisie arbitrairement).

Périodicités

Ces solutions sont à la fois périodiques dans le temps et dans l'espace, en raison de leur forme sinusoïdale. Il s'agit de leur propriété principale.

Par définition, la *période* temporelle de l'onde est la plus petite solution positive T de l'équation

$$f(x, t + T) = f(x, t), \quad \forall t, \quad \forall x. \quad (2.21)$$

On obtient à partir de (2.15) que la période est donnée en termes de la pulsation suivant

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}, \quad (2.22)$$

qui a bien la dimension d'un temps. La *fréquence* de l'onde est donnée par l'inverse de sa période :

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}, \quad (2.23)$$

et s'exprime en Hertz (Hz), équivalents à des s^{-1} . L'une de ces trois quantités (période, fréquence, pulsation) peut être indifféremment utilisée pour caractériser l'onde sinusoïdale.

La période spatiale, appelée *longueur d'onde* λ , est définie de manière analogue à la période temporelle comme la plus petite solution positive de l'équation

$$f(x + \lambda, t) = f(x, t), \quad \forall t, \quad \forall x. \quad (2.24)$$

On obtient à partir de (2.15)

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{|k|}}. \quad (2.25)$$

On vérifie dans cette équation que λ a bien la dimension d'une longueur. En utilisant la relation de dispersion (2.17), ou de manière équivalente en partant des formes (2.18,2.19) de la solution, on peut exprimer la longueur d'onde en fonction de la période et de la fréquence :

$$\boxed{\lambda = cT = \frac{c}{\nu}}. \quad (2.26)$$

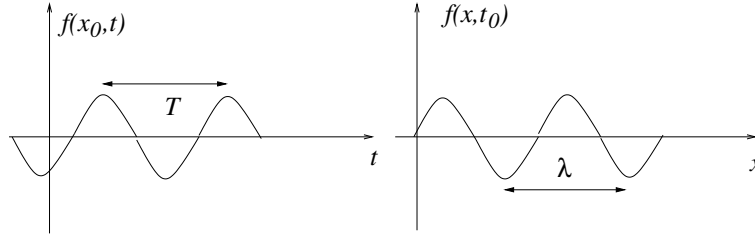


FIGURE 2.2 – Représentation d'une onde sinusoïdale à x fixé (gauche) et t fixé (droite).

Pour illustrer ces périodicités nous pouvons représenter premièrement l'onde mesurée en une position précise x_0 , en fonction du temps. Alternativement nous pouvons représenter l'onde figée à un instant t_0 , en fonction de la position x . Dans les deux cas nous obtenons des sinusoïdes, dont les périodes sont données ci-dessus, voir fig. 2.2.

Vitesse de phase

On considère une onde sinusoïdale, progressive ou régressive. La vitesse à laquelle se « déplace » la phase de l'onde est appelée *vitesse de phase* v_ϕ .

Cherchons la position x telle que, à un instant donné, la phase de l'onde $\Phi(x, t)$ soit égale à une constante Φ_0 :

$$\Phi(x, t) = \phi_0 \implies x = \frac{\omega}{k}t + \frac{\phi - \phi_0}{k} \quad (2.27)$$

On en déduit la vitesse de phase

$$v_\phi = \frac{\omega}{|k|} = c \quad (2.28)$$

On obtient donc, en utilisant la relation de dispersion (2.17), que la vitesse de phase est égale à la célérité de l'onde c .

Représentation complexe

Bien que la fonction $f(x, t)$ décrivant l'onde soit un nombre réel, il est commode de décrire l'onde sinusoïdale en notation complexe.⁴

Nous considérons donc des solutions complexes de l'équation d'onde, dénotées $\tilde{f}(x, t)$. Nous insistons sur le fait que les quantités physiques qui nous intéressent sont réelles; les quantités complexes sont uniquement un intermédiaire de calcul. À la fin du calcul, la solution physique est déterminée en prenant la partie réelle de \tilde{f} :

$$f(x, t) = \text{Re} \left[\tilde{f}(x, t) \right] \quad (2.29)$$

4. Cette notation favorise en particulier l'étude de la superposition d'ondes sinusoïdales.

Une onde complexe sinusoïdale progressive ou régressive est en toute généralité de la forme :

$$\tilde{f}(x, t) = \tilde{\mathcal{A}}e^{i(\omega t - kx)} \quad (2.30)$$

L'amplitude complexe $\tilde{\mathcal{A}}$ se décompose en module et argument selon :

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}e^{i\phi}, \quad (2.31)$$

de telle sorte que son module est l'amplitude réelle \mathcal{A} et son argument le déphasage ϕ . Nous vérifions bien que

$$\operatorname{Re} [\tilde{f}(x, t)] = \operatorname{Re} [\tilde{\mathcal{A}}e^{i(\omega t - kx)}] = \operatorname{Re} [\mathcal{A}e^{i(\omega t - kx + \phi)}] = \mathcal{A} \cos[\omega t - kx + \phi], \quad (2.32)$$

qui est similaire à (2.15). Ainsi la représentation complexe contient bien la même information que l'onde réelle.

2.6 Ondes à trois dimensions

Nous avons jusqu'à présent considéré des ondes se propageant uniquement à une dimension, le long d'un axe Ox . Cette description, si elle est suffisante pour décrire les ondes sur les cordes vibrantes, est trop restrictive concernant les ondes acoustiques et lumineuses. Dans ces deux cas les ondes peuvent a priori se propager dans toutes les directions. Nous introduisons ici la généralisation de l'équation d'onde à trois dimensions et ses solutions.

Équation d'ondes à trois dimensions

L'équation d'onde (2.1) se généralise naturellement à trois dimensions. On considère maintenant que la grandeur physique concernée est décrite par une fonction $f(\vec{x}, t)$ de la position \vec{x} dans l'espace et du temps.⁵ Cette fonction est alors solution d'une équation aux dérivées partielles appelée équation de d'Alembert à trois dimensions :

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 f(\vec{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(\vec{x}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(\vec{x}, t)}{\partial z^2} \right) = 0} \quad (2.33)$$

Nous pouvons reconnaître dans le second membre de cette équation l'opérateur Laplacien défini en coordonnées cartésiennes par $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Il généralise la dérivée seconde par rapport à x qui apparaît dans l'équation (2.1) à une dimension.

La forme de la solution générale de l'équation d'onde à trois dimensions dépend des symétries du problème, liées à la forme de la source émettrice de l'onde.

Ondes planes

Le premier type d'onde correspond à une onde se déplaçant selon un axe particulier, que nous pouvons choisir selon l'axe Ox . Elle ne dépend pas alors de la position dans le plan (Oy, Oz) tangent à cet axe, c.-à.-d. des coordonnées y et z .

Cela revient à ne donner à la fonction f décrivant la perturbation qu'une dépendance en x :

$$f(\vec{x}, t) = f(x, t) \implies \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.34)$$

5. Dans le cas des ondes lumineuses la quantité physique est elle-même un vecteur. Ce point sera développé plus loin.

Nous nous ramenons donc au cas de l'équation d'onde à une dimension (2.1), étudiée plus haut. La solution générale est alors

$$f(\vec{x}, t) = f_-(x - ct) + f_+(x + ct) \quad (2.35)$$

indépendamment de y et z . Les deux termes représentent respectivement une onde progressive et une onde régressive.

Ondes sphériques

Le deuxième type d'onde est une onde à symétrie sphérique. Ce type d'ondes intervient lorsque nous considérons une source ponctuelle, ou bien une source sphérique.⁶ Nous pouvons alors choisir un système de coordonnées sphériques, tel que l'origine des coordonnées $r = 0$ est confondu avec le centre de la source.

Il est naturel de chercher des solutions à l'équation d'onde (2.33) respectant les symétries du problème, c.-à.-d. ne dépendant que de la coordonnée radiale r des coordonnées sphériques, qui représente la distance à la source située à l'origine. Nous avons alors

$$f(\vec{x}, t) = f(r, t). \quad (2.36)$$

Pour trouver la forme de l'équation d'onde à trois dimensions en coordonnées sphériques il faut exprimer le laplacien dans ces coordonnées. Lorsque comme ici la fonction considérée ne dépend que de la coordonnée radiale r on peut montrer qu'on obtient l'équation d'onde radiale (qui n'a bien sur pas de sens pour $r = 0$) :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(r, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right] = 0 \quad (2.37)$$

Nous voyons que la dépendance spatiale de cette équation est plus compliquée que dans le cas précédent. Néanmoins il est toujours possible de trouver la solution générale.

Pour résoudre l'équation d'onde (2.33), introduisons une fonction auxiliaire $g(r, t)$ définie par

$$f(r, t) = \frac{1}{r} g(r, t), \quad \forall t, \quad \forall r > 0. \quad (2.38)$$

La fonction g obéit alors à l'équation

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial g(r, t)}{\partial r} - g(r, t) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2} \quad (2.39)$$

En multipliant finalement par r , on obtient l'équation d'ondes à une dimension (2.1), dans les variables (r, t) :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 g(r, t)}{\partial r^2} = 0 \quad (2.40)$$

En utilisant la solution (2.12) de l'équation d'ondes à une dimension, on obtient la solution générale pour une onde sphérique

$$g(r, t) = g_-(r - ct) + g_+(r + ct) \implies \boxed{f(r, t) = \frac{1}{r} g_-(r - ct) + \frac{1}{r} g_+(r + ct)} \quad (2.41)$$

où les fonctions g_{\pm} sont arbitraires. Notons que cette solution n'est naturellement définie que pour r strictement positif.

Le premier terme de la solution correspond à une onde dite *sortante*, se propageant vers les r croissants. Elle représente l'onde émise par une source ponctuelle située en $r = 0$.

Par contre, le deuxième terme, qui correspond à une onde *rentrante* se propageant vers les r décroissants n'est pas physique dans la majorité des situations. Il faut en effet imaginer qu'on prépare une onde à l'infini très précisément pour qu'elle converge en un point précis de l'espace.

6. Nous obtenons aussi une onde sphérique, mais confinée à l'intérieur d'un cône, pour une source en forme de calotte sphérique comme un haut-parleur (en négligeant les effets de diffraction au bord).

Ondes sinusoïdales tridimensionnelles

Pour les deux types d'ondes considérées au-dessus, ondes planes et sphériques, il est possible de définir l'analogue des ondes sinusoïdales étudiées dans le cas unidimensionnel. Elles sont caractérisées par une périodicité temporelle, mais pas nécessairement spatiale.

Ondes planes sinusoïdales

Commençons par définir une onde plane sinusoïdale. Une onde plane sinusoïdale progressive est obtenue, en notation complexe, en choisissant le premier terme de la solution (2.35) avec une exponentielle complexe :

$$\tilde{f}(\vec{x}, t) = \tilde{\mathcal{A}}e^{i(\omega t - kx)} \quad (2.42)$$

Cette onde se propage selon les x croissants. Tous les points situés à une valeur donnée de x , c.-à.-d. dans le plan (y, z) correspondent à la même phase de l'onde ; il s'agit des *plans d'ondes*.

Nous pouvons généraliser la forme de l'onde plane pour autoriser une direction arbitraire de propagation. Nous avons alors

$$\tilde{f}(\vec{x}, t) = \tilde{\mathcal{A}}e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (2.43)$$

où le vecteur \vec{k} est appelé *vecteur d'onde*. Sa norme est contrainte par l'équation d'onde à trois dimensions (5.33) à obéir à la *relation de dispersion*

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \|\vec{k}\|^2 \quad (2.44)$$

La direction donnée par le vecteur d'onde \vec{k} correspond à la direction de propagation de l'onde.

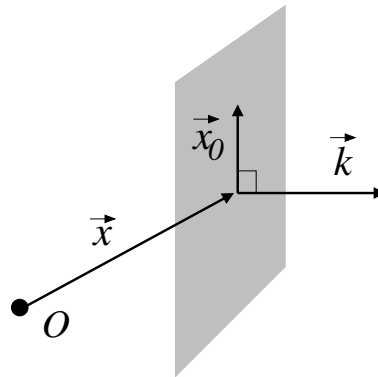


FIGURE 2.3 – Représentation d'un plan d'onde.

Un plan orthogonal au vecteur d'onde est appelé *plan d'onde*. Il est tel que la phase de l'onde sinusoïdale en tout point d'un tel plan est identique.

Pour démontrer cette propriété nous pouvons chercher l'ensemble (connexe) des points tels que la phase de l'onde $\Phi(\vec{x}, t)$ soit constante à un instant donné. Nous avons pour cela à résoudre (avec ϕ_0 constant) :

$$\Phi(\vec{x}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} = \phi_0 \implies \vec{k} \cdot \vec{x} = \omega t - \phi_0 \quad (2.45)$$

Si on ajoute au vecteur \vec{x} un vecteur \vec{x}_0 orthogonal au vecteur \vec{k} (tel que $\vec{k} \cdot \vec{x}_0 = 0$), cette relation est inchangée, voir fig. 2.3. Ainsi la phase de l'onde reste constante par translation orthogonale au vecteur \vec{k} , c.-à.-d. le long d'un plan d'onde. Remarquons que l'onde plane possède une infinité de plans d'onde.

Périodicités L'onde plane définie par l'équation (2.43) est périodique dans le temps, avec une période $T = 2\pi/\omega$, mais également dans l'espace. Comme précédemment, nous cherchons une translation du vecteur \vec{x} d'un vecteur de la plus petite norme possible non nulle, telle que la fonction f prenne la même valeur. Naturellement cette translation sera choisie dans la direction du vecteur d'onde \vec{k} , qui est la seule direction privilégiée du problème.

Nous pouvons alors vérifier que, pour une onde plane donnée par l'éq. (2.43), nous avons

$$\tilde{f}\left(\vec{x} + \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|^2}\vec{k}, t\right) = \tilde{f}(\vec{x}, t) \quad \forall \vec{x}, t \quad (2.46)$$

définissant la longueur d'onde

$$\lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|} \quad (2.47)$$

Ondes sphériques sinusoïdales

En examinant la solution générale de l'équation d'onde pour une onde sphérique, il est naturel de considérer des solutions sinusoïdales de la forme (en notation complexe)⁷

$$\tilde{f}(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} \tilde{\mathcal{A}} e^{i(\omega t - \kappa r)} \quad (2.48)$$

qui fait apparaître le nombre d'onde radial κ . La forme réelle de cette onde est donnée par :

$$f(\vec{x}, t) = \text{Re} \left[\tilde{f}(\vec{x}, t) \right] = \frac{1}{r} \mathcal{A} \cos(\omega t - \kappa r + \phi). \quad (2.49)$$

Comme la fonction $\tilde{g}(r, t) = r\tilde{f}(\vec{x}, t)$ satisfait l'équation d'onde à une dimension (2.1), la relation de dispersion s'écrit :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \kappa^2. \quad (2.50)$$

Les *surfaces d'ondes*, c.-à.-d. pour lesquelles la phase de l'onde est constante à un instant donné, sont données par

$$\Phi(r, t) = \omega t - \kappa r + \phi = \phi_0 \implies r = \frac{\omega t + \phi - \phi_0}{\kappa} = ct + \frac{\phi - \phi_0}{\kappa} \quad (2.51)$$

Ce sont donc des sphères, centrées en $r = 0$.

Le vecteur d'onde est parallèle au vecteur normé radial \vec{e}_r des coordonnées sphériques :

$$\vec{k}(M) = \kappa \vec{e}_r, \quad \|\vec{k}\| = \kappa. \quad (2.52)$$

Sa direction dépend donc du point M de l'espace où l'on se situe. Le vecteur d'onde est orthogonal au plan tangent à la surface d'onde passant par ce même point M ; en effet ce vecteur est radial, alors que les surfaces d'onde sont des sphères centrées à l'origine, voir figure 2.4.

Contrairement à l'onde plane, l'onde sphérique n'est *pas* périodique dans l'espace. Si l'exponentielle complexe dans l'équation (2.48) est bien sûr périodique en r , l'amplitude décroît comme $1/r$. Nous verrons plus loin une interprétation naturelle de ce phénomène, en considérant l'énergie contenue dans cette onde.⁸

7. Avec ces conventions, si $f(r, t)$ est de dimensions D , l'amplitude \mathcal{A} est de dimension $D \times L$.

8. Dans la limite statique $\omega \rightarrow 0$, nous retrouvons le potentiel électrostatique dû à une charge ponctuelle.

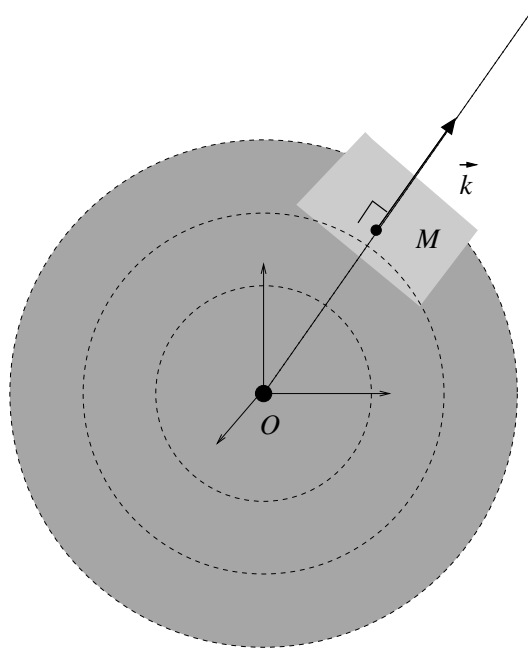


FIGURE 2.4 – Surfaces d’onde d’une onde sphérique. Le plan tangent à la surface d’onde au point M , orthogonal au vecteur d’onde \vec{k} passant par ce point, est aussi représenté.

Notion de surface d’onde

La notion de surface d’onde que nous avons rencontrée dans ces deux exemples particuliers est généralisable à n’importe quelle forme d’onde de pulsation donnée. On considère une onde progressive sinusoïdale dans le temps, dont la dépendance par rapport aux coordonnées spatiales peut être compliquée. On peut toujours définir en notation complexe la phase de l’onde, comme l’argument du nombre complexe $\tilde{f}(\vec{x}, t)$. Une surface d’onde est alors décrite comme une surface \mathcal{S} *connexe* telle que

$$\Phi(\vec{x}, t) = \Phi_0 \quad \forall t, \quad \forall M \in \mathcal{S} \quad (2.53)$$

où le point M a pour coordonnées $\overrightarrow{OM} = \vec{x}$. Cette définition signifie qu’en se déplaçant le long d’une surface d’onde à un instant fixé, la phase de l’onde ne change pas. Le vecteur d’onde \vec{k} en un point donné de l’espace est toujours orthogonal à la surface d’onde passant par ce point.

Approximation d’une onde sphérique par une onde plane

Une onde sphérique est générée par une source ponctuelle, ou plus généralement à symétrie sphérique. Du point de vue d’un observateur situé à très grande distance, les surfaces d’onde provenant de cette source sont des sphères de très grand rayon.⁹ Il est alors légitime, localement, de se placer dans l’approximation où les surfaces d’ondes sont des plans d’ondes, tangents à la sphère correspondant à la surface d’onde véritable en ce point.

Examinons ce phénomène de manière quantitative. On considère une source d’ondes progressives sphériques sinusoïdales, de la forme (2.49), placée à l’origine des coordonnées sphériques, en $r = 0$. L’observateur est placé à une grande distance R , au point M . La surface d’onde passant par l’observateur à un instant donné est alors une sphère de rayon R centrée à l’origine. Pour une onde plane, nous aurions à la place un plan d’onde contenant l’observateur, que nous choisissons naturellement tangent à la sphère de rayon R centrée à l’origine.

9. Si on observe une étoile avec un télescope, ce rayon se compte en années-lumière !

Nous considérons maintenant que l'observateur se déplace d'une distance $\delta\ell$ parallèlement à ce plan, jusqu'au point noté M' . L'approximation d'onde plane est correcte à cette échelle $\delta\ell$ si la phase de l'onde ne diffère pas significativement de celle obtenue pour l'onde sphérique au nouveau point d'observation M' .

La phase de l'onde sphérique au point M , à une distance R de la source, est donnée par :

$$\Phi_s(M, t) = \omega t - \kappa R + \phi \quad (2.54)$$

Si on se déplace d'une distance $\delta\ell$ le long du plan tangent, on se retrouve à une distance $R + \delta R$

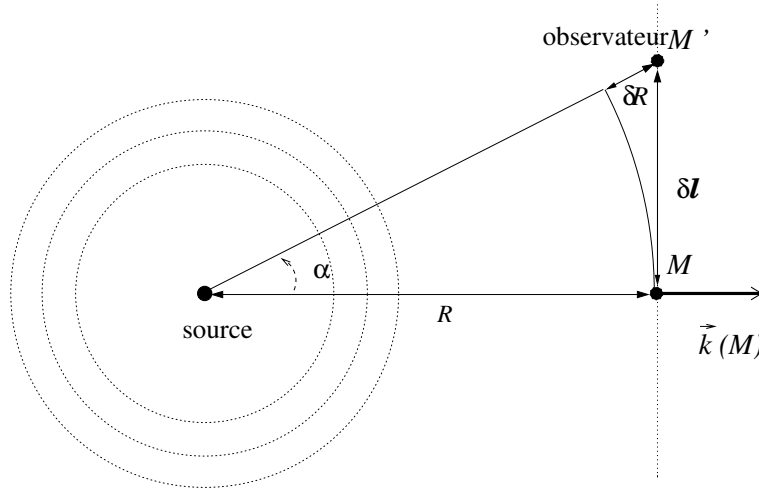


FIGURE 2.5 – Approximation d'une onde sphérique par une onde plane.

de l'origine des coordonnées. Dans la limite $\delta\ell \ll R$ (voir figure 2.5) nous avons :

$$R^2 + (\delta\ell)^2 = (R + \delta R)^2 \simeq R^2 + 2R\delta R \quad (2.55)$$

On obtient donc

$$\delta R \simeq \frac{(\delta\ell)^2}{2R} \quad (2.56)$$

La différence de phase de l'onde sphérique entre ces deux points est donnée, à tout instant, par

$$\delta\Phi = \Phi_s(M', t) - \Phi_s(M, t) = -\kappa\delta R \simeq -\frac{\pi(\delta\ell)^2}{\lambda R} \quad (2.57)$$

où nous avons introduit la longueur d'onde λ .

Si l'onde considérée était plane au lieu d'être sphérique, la phase de l'onde ne changerait pas lorsque l'observateur se déplace du point M au point M' , car ces deux points sont situés dans le même plan d'onde (les plans d'onde de cette onde plane étant orthogonaux au vecteur d'onde au point M , noté $\vec{k}(M)$ sur la figure 2.5).

Le déphasage entre l'onde sphérique et l'onde plane qui en est *localement* une approximation est donc donné par l'équation (2.57).

On en déduit que l'onde plane est une bonne approximation de l'onde sphérique si cette différence de phase est petite devant π . Ainsi, à une distance R de la source, cette approximation est valable dans une zone de dimension linéaire $\delta\ell$ vérifiant

$$\boxed{\delta\ell \ll \sqrt{\lambda R}} \quad (2.58)$$

On pourra remarquer que nous ne nous sommes pas préoccupés du fait que l'amplitude de l'onde sphérique va aussi changer lorsqu'on se déplace le long d'un plan tangent. Cette correction est de

manière générale moins importante que la variation de phase que nous avons calculée. En effet la variation relative d'amplitude est donnée par $\delta R/R \simeq (\delta\ell/R)^2/2$. Si l'équation (2.58) est satisfaite nous avons

$$\frac{\delta R}{R} \ll \frac{\lambda}{2R}, \quad (2.59)$$

qui est en pratique négligeable.

Chapitre 3

Superposition d'ondes, ondes stationnaires

Une propriété majeure de l'équation d'onde (2.1), ainsi que de sa généralisation à trois dimensions, est d'être une équation *linéaire*. Cette propriété implique que n'importe quelle combinaison linéaire de solutions est elle-même une solution :

$$\begin{cases} \square f(x, t) = 0 \\ \square g(x, t) = 0 \end{cases} \implies \square[\alpha f(x, t) + \beta g(x, t)] = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

Ce principe extrêmement important est appelé *principe de superposition*.

Dans ce chapitre, nous allons étudier plus en détail les propriétés de l'onde résultant de la superposition de deux ondes progressives ou régressives.

3.1 Superposition de deux ondes progressives de même pulsation

Nous considérons le cas le plus simple de superposition d'ondes, l'addition de deux ondes progressives sinusoïdales. On considèrera les deux ondes de *même pulsation*, dont le déphasage en un point donné est le même à tout instant¹

En notation complexe, on écrit alors l'onde totale, somme des deux ondes f_1 et f_2 comme (avec la convention $k > 0$)

$$\tilde{f}(x, t) = \tilde{f}_1(x, t) + \tilde{f}_2(x, t) = (\tilde{\mathcal{A}}_1 + \tilde{\mathcal{A}}_2) e^{i(\omega t - kx)} \quad (3.2)$$

Nous observons immédiatement que, comme il se doit, la somme de ces deux ondes progressives est elle-même une onde progressive.

Remarquons aussi que la relation de dispersion (2.17) garantit que, les pulsations étant égales, les nombre d'ondes sont égaux en valeur absolue.

On peut obtenir alors l'onde résultante sous la forme canonique en utilisant la décomposition (2.31) :

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 + \tilde{\mathcal{A}}_2 = \mathcal{A}_1 e^{i\phi_1} + \mathcal{A}_2 e^{i\phi_2} \quad (3.3)$$

Le module de l'amplitude complexe résultante est donné par

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathcal{A}}|^2 &= (\mathcal{A}_1 e^{i\phi_1} + \mathcal{A}_2 e^{i\phi_2}) (\mathcal{A}_1 e^{-i\phi_1} + \mathcal{A}_2 e^{-i\phi_2}) \\ &= \mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + 2\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

1. Cette dernière hypothèse est liée à la notion de *cohérence* qui sera développée lors de l'étude des interférences.

Calculons maintenant la phase de l'onde. Nous avons

$$\tan \phi = \frac{\text{Im}(\tilde{\mathcal{A}})}{\text{Re}(\tilde{\mathcal{A}})} = \frac{\mathcal{A}_1 \sin \phi_1 + \mathcal{A}_2 \sin \phi_2}{\mathcal{A}_1 \cos \phi_1 + \mathcal{A}_2 \cos \phi_2} \quad (3.5)$$

Considérons maintenant le cas particulier où $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$. Dans ce cas le calcul explicite de la superposition est simple. Nous avons

$$\tilde{\mathcal{A}}^2 = 2\mathcal{A}_1^2 [1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)] = 4\mathcal{A}_1^2 \cos^2 \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \quad (3.6)$$

L'amplitude réelle dépend donc du *déphasage* entre les deux ondes progressives ou régressives, défini par

$$\Delta\Phi(x, t) = \Phi_2(x, t) - \Phi_1(x, t) = \phi_2 - \phi_1. \quad (3.7)$$

Notons que, pour des ondes à une dimension, le déphasage (3.7) est constant ; il est indépendant de la position x et de l'instant t .

On écrit finalement l'amplitude réelle de l'onde obtenue par superposition de deux ondes progressives sinusoïdales en fonction de leur déphasage :

$$\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_1 \left| \cos \left(\frac{\Delta\Phi}{2} \right) \right| \quad (3.8)$$

Nous avons rajouté une valeur absolue comme l'amplitude doit être toujours positive.

3.2 Ondes stationnaires

Considérons maintenant un autre cas important de superposition d'ondes sinusoïdales. La première onde est choisie uniquement *progressive*, la seconde uniquement *régressive*, et toutes deux de même amplitude réelle.

L'onde complexe résultant de cette superposition a la forme suivante :

$$\tilde{f}(x, t) = \mathcal{A}e^{i\phi_1} e^{i(\omega t - kx)} + \mathcal{A}e^{i\phi_2} e^{i(\omega t + kx)} \quad (3.9)$$

Nous pouvons réécrire cette expression comme

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x, t) &= \mathcal{A}e^{i\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)} \left(e^{i\left(-kx + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)} + e^{i\left(kx + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right)} \right) \\ &= 2\mathcal{A}e^{i\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)} \cos \left(kx + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

On observe ainsi que l'onde est le produit d'une fonction de t uniquement et d'une fonction de x uniquement :

$$f(x, t) = \text{Re} \left[\tilde{f}(x, t) \right] \implies f(x, t) = 2\mathcal{A} \cos \left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \cos \left(kx + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) \quad (3.11)$$

Cette onde se présente sous une forme factorisée, par rapport à ses dépendances spatiale et temporelle :

$$\exists g, h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \quad \boxed{f(x, t) = g(x) h(t)} \quad \forall x, \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.12)$$

Une telle onde est appelée *onde stationnaire* ; elle correspond à une onde qui ne se propage pas.

La « forme » de l'onde, vue comme une fonction de x , est indépendante de t . Nous observons en effet que l'amplitude locale de la vibration sinusoïdale associée à l'onde, pour une valeur de x donnée, est $2\mathcal{A} \left| \cos \left(kx + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \right) \right|$, indépendamment de t . Ainsi au cours du temps l'onde ne change pas de forme, mais oscille *globalement* de manière sinusoïdale.

Ventres et nœuds d'une onde stationnaire

Nous pouvons distinguer deux types de points remarquables de l'onde stationnaire, voir fig. 3.1. La position de ces points particuliers ne change pas au cours du temps en raison du caractère stationnaire de cette onde. Pour simplifier la discussion, considérons le cas particulier $\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \equiv 0[2\pi]$.

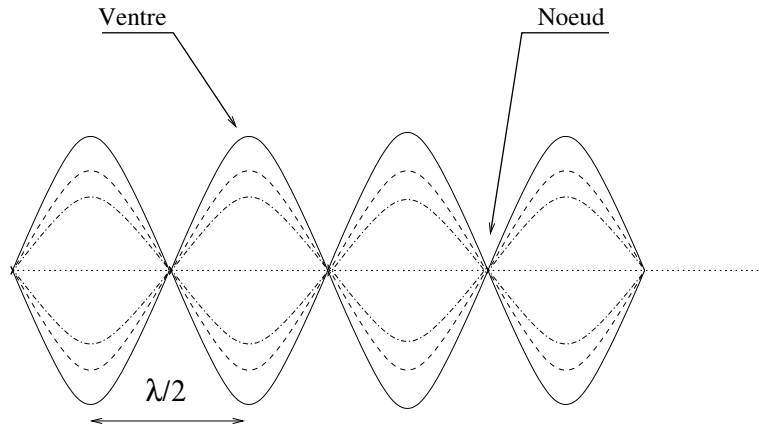


FIGURE 3.1 – Nœuds et ventres d'une onde stationnaire.

On distingue alors :

- les *nœuds* sont tels que $f(x, t) = 0 \forall t$, c.-à.-d. qu'ils ne sont jamais en mouvement. Ils se situent aux points x_n tels que $kx_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Les *ventres* correspondent à des extrema de l'onde à tout instant, alternativement maxima et minima selon la valeur de t . Ils sont situés aux points x_m tels que $kx_m = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Il faut distinguer deux séries de ventres. Les ventres pour m pair d'une part, et pour m impair d'autre part, sont les uns maxima et les autres minima de $f(x, t)$ pour une valeur de t donnée.

La distance entre deux nœuds successifs (ou entre deux ventre successifs) est donnée par

$$x_{n+1} - x_n = x_{m+1} - x_m = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2} \quad (3.13)$$

Insistons finalement sur le fait qu'une onde stationnaire n'est *pas* une onde progressive. Une onde stationnaire est obtenue par la superposition d'une onde progressive sinusoïdale et d'une onde régressive sinusoïdale, toutes les deux de même amplitude réelle.

3.3 Battements

Jusqu'ici nous avons considéré la superposition de deux signaux sinusoïdaux de *même fréquence* temporelle.²

Il est intéressant considérer la superposition de deux signaux de fréquences ν_1 et ν_2 très voisines, mais non identiques :

$$\frac{|\nu_2 - \nu_1|}{\nu_2 + \nu_1} \ll 1 \quad (3.14)$$

Cette situation apparaît lorsqu'on cherche à aligner la fréquence d'un système sur celle d'un système de référence.

Dans le cadre de la propagation d'ondes, on mesure le signal en *un point donné* de l'espace, tel que les deux ondes y aient respectivement des phases ϕ_1 et ϕ_2 à l'instant $t = 0$. Nous supposons pour simplifier que les deux signaux sont de même amplitude réelle \mathcal{A} .

² Par exemple, lorsque deux hauts-parleurs, sources d'ondes sonores, sont reliés à un même générateur de courant alternatif.

En notation complexe la superposition des deux signaux est alors donnée par

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_2(t) = \mathcal{A}e^{i(\omega_1 t + \phi_1)} + \mathcal{A}e^{i(\omega_2 t + \phi_2)} \quad (3.15)$$

nous définissons maintenant

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad , \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (3.16a)$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad , \quad \phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \quad (3.16b)$$

où ω correspond à la pulsation moyenne. En termes de ces paramètres, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \mathcal{A}e^{i(\omega t + \phi)} \left[e^{i\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\phi}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\phi}{2}\right)} \right] \\ &= 2\mathcal{A}e^{i(\omega t + \phi)} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\phi}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

L'onde réelle est alors simplement donnée par

$$y(t) = \text{Re}[\tilde{y}(t)] \implies \boxed{y(t) = 2\mathcal{A} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\phi}{2}\right) \cos(\omega t + \phi)} \quad (3.18)$$

Intéprétons maintenant le résultat lorsque les deux pulsations sont proches, soit pour

$$|\Delta\omega| \ll \omega \quad (3.19)$$

Dans cette limite, la période $2\pi/|\Delta\omega|$ associée au premier terme de (3.18) est beaucoup plus grande que la période moyenne $2\pi/\omega$, qui apparaît dans le second cosinus.

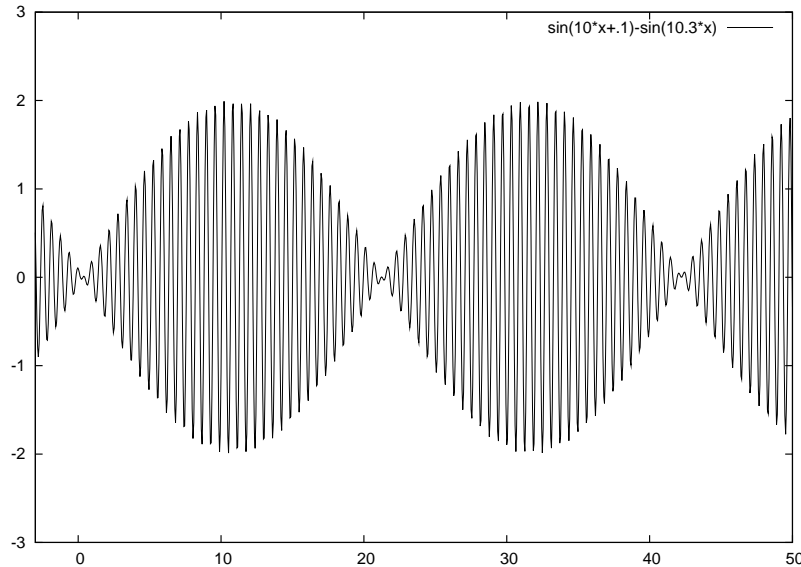


FIGURE 3.2 – Phénomène de battements.

L'allure du signal obtenu en fonction du temps est donnée par la fig. 3.2. On peut considérer que nous avons un signal périodique de pulsation ω , dont l'amplitude varie lentement avec le temps comme³

$$\mathcal{A}(t) \sim 2|\mathcal{A} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta\phi}{2}\right)| \quad (3.20)$$

3. Remarquons que, comme l'amplitude varie avec le temps, ce n'est pas strictement un signal sinusoïdal.

Cette variation constitue l'*enveloppe* du signal. La largeur temporelle d'un *lobe* de l'enveloppe (voir la figure 3.2) est donnée par la demi-période de $\mathcal{A}(t)$, soit $\pi/|\Delta\omega|$.

Lorsque la pulsation des deux signaux se rapproche, cette demi-période devient de plus en plus grande, ce qui se traduit auditivement par une *modulation* de plus en plus lente de l'amplitude du signal. L'écoute de ce phénomène permet d'accorder très précisément les instruments de musique.

3.4 Figures de Lissajous

En complément de ce chapitre nous donnons ici une méthode permettant de représenter géométriquement la superposition de deux signaux sinusoïdaux. Dans le cas des ondes, cette méthode sont utiles pour représenter l'addition deux deux solutions de l'équation d'onde *en un point donné* d'abscisse x_0 . On considère donc la superposition de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation, en représentation complexe :

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}_1(t) + \tilde{f}_2(t) = \tilde{A}_1 e^{i\omega t} + \tilde{A}_2 e^{i\omega t} \quad (3.21)$$

où les amplitudes complexes

$$\tilde{A}_\ell = \mathcal{A}_\ell e^{i\phi_\ell} \quad , \quad \ell = 1, 2 \quad (3.22)$$

des signaux sinusoïdaux prennent en compte dans la phase ϕ_ℓ les contributions $e^{\pm ikx_0}$ dues à la propagation des ondes.

Dans la représentation appelée *figure de Lissajous*, on considère une courbe paramétrique dans le plan (x, y) , de paramètre t

$$\begin{cases} x(t) = f_1(t) = \mathcal{A}_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ y(t) = f_2(t) = \mathcal{A}_2 \cos(\omega t + \phi_2) \end{cases} \quad (3.23)$$

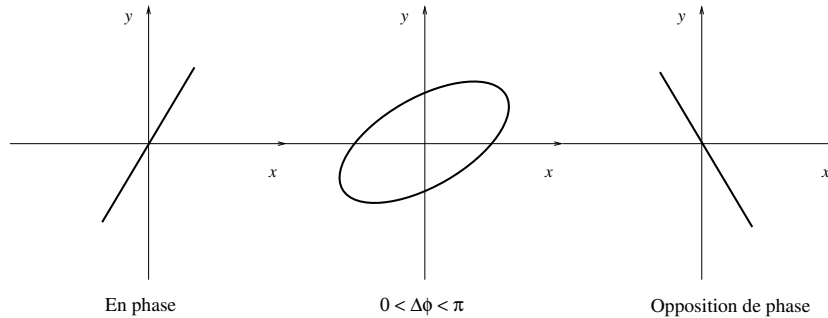


FIGURE 3.3 – Figures de Lissajous, signaux de fréquences égales.

Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ étant périodiques de période T , cela définit une courbe fermée du plan. On peut montrer que dans le cas général, cette courbe est une *ellipse* dont l'orientation des axes dépend du *déphasage* $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

On considère pour simplifier la discussion que $\mathcal{A}_1 \geq \mathcal{A}_2$. Considérons quelques exemples simples :

1. vibrations *en phase*, avec $\phi_1 = \phi_2$. Dans ce cas $x(t)$ et $y(t)$ sont proportionnels :

$$y(t) = \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} x(t) \quad \forall t \quad (3.24)$$

La figure correspondante est un segment de droite, de pente $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2$, contenu dans le rectangle délimité par $(x, y) = (-\mathcal{A}_1, -\mathcal{A}_2)$ et $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$.

2. vibrations *en opposition de phase*, cad avec $\phi_1 = \phi_2 + \pi$. Dans ce cas $x(t)$ et $y(t)$ également proportionnels. La figure correspondante est un segment de droite, de pente $-\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2$, contenu dans le rectangle délimité par $(x, y) = (-\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ et $(\mathcal{A}_1, -\mathcal{A}_2)$.
3. vibrations *en quadrature de phase*, cad avec $\phi_2 = \phi_1 + \pi/2$. Dans ce cas la courbe de Lissajous est une *ellipse* de grand axe selon Ox et de petit axe selon Oy . La longueur du demi grand-axe est \mathcal{A}_1 et celle du demi petit-axe \mathcal{A}_2 . Dans le cas particulier où les amplitudes sont égales ($\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$) l'ellipse devient un cercle.

Ainsi, pour déterminer si deux signaux sont en phase, il suffit de se placer dans la configuration où l'ellipse se dégrade en un segment de droite de pente positive, voir fig. 3.3.

Cette représentation est très utile en pratique, car elle est observable avec un oscilloscope en mode XY, lorsque l'onde est convertie en signal électrique.

Chapitre 4

Cordes vibrantes

Le premier problème physique pour lequel nous allons rencontrer l'équation d'onde est celui des vibrations transverses d'une corde. Il s'agit de l'exemple le plus simple à décrire afin d'illustrer la physique des ondes. Il s'applique naturellement à l'étude des instruments à cordes que nous évoquerons à la fin de ce chapitre.

4.1 Établissement de l'équation d'onde

Dans cette section nous verrons que dans l'hypothèse de petites perturbations, le principe fondamental de la dynamique pour le déplacement transverse d'un élément de la corde est régi par l'équation d'onde (2.1).

Description de la corde vibrante

On considère une corde de longueur L tendue selon l'axe Ox , de section d'aire constante s (voir la figure 4.1), telle que la dimension linéaire caractéristique de cette section soit très petite par rapport à la longueur L .

La corde est supposée être composée d'un matériau de masse volumique uniforme, et sans raideur, c.-à.-d. qui ne résiste pas à la déformation. Cette dernière hypothèse assure que la direction de la force de tension en un point de la corde est donnée par la droite tangente à la corde en ce point.¹

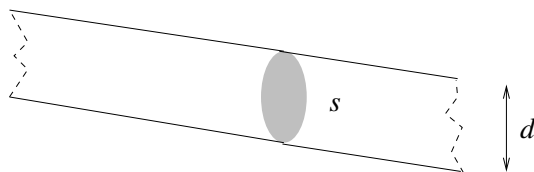


FIGURE 4.1 – Description de la corde.

La corde est caractérisée par sa *masse linéique* μ , c.-à.-d. par unité de longueur :

$$\boxed{\mu = \frac{M}{L}} \quad (4.1)$$

où M est la masse totale de la corde. La masse linéique peut s'exprimer aussi en fonction de la masse volumique ρ . La masse totale de la corde est donnée par

$$M = \rho L s \quad (4.2)$$

1. Dans le cas contraire, la composante perpendiculaire de la force de tension signifierait la réaction de l'élément de corde où s'applique la force à la déformation.

en termes de la surface d'une section de la corde s . Nous avons alors

$$\mu = \rho s \tag{4.3}$$

dans le cas d'une corde cylindrique de diamètre d , la surface de la section est simplement $s = \frac{\pi}{4}d^2$.

Dynamique de la corde

L'équation du mouvement de la corde vibrante est obtenue en appliquant judicieusement le principe fondamental de la dynamique (abrégé en PFD). La corde étant considérée comme fixée à ses extrémités, elle ne subit pas de mouvement d'ensemble. Il faut alors « découper » le système en un ensemble de sous-systèmes qui pourront se déplacer les uns par rapport aux autres.

On considère alors le système constitué d'un élément de corde infinitésimal, de longueur $\delta\ell$, très petite devant les échelles caractéristiques du problème, en particulier par rapport à la longueur totale de la corde L . La projection des deux extrémités de cet élément de corde sur l'axe Ox correspond aux abscisses x et $x + \delta x$ respectivement. La masse de ce système est alors $\delta M = \mu\delta\ell$.

On fait l'hypothèse, qui sera développée plus bas, que le mouvement de la corde est *uniquement* transverse, sans composante longitudinale, c.-à.-d. parallèle à l'axe de la corde au repos Ox .

Le déplacement transverse de la corde est considéré comme confiné dans le plan (x, y) , ce qui revient à choisir en conséquence les conditions initiales de la corde dans ce même plan (sans composante selon Oz).

Ce déplacement est alors donné par une fonction² $y(x, t)$. La corde au repos est considérée comme alignée selon l'axe Ox , soit $y(x, t) = 0 \forall x, t$, voir fig. 4.2 ; nous négligeons donc l'influence de la force de pesanteur.

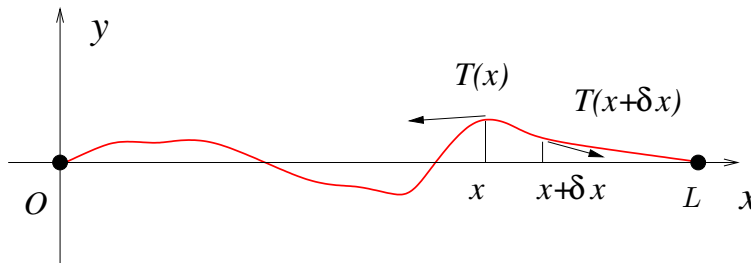


FIGURE 4.2 – Corde vibrante.

La force entrant en jeu dans la dynamique du système est la *tension* de la corde, notée \vec{T} , qui est définie localement en tout point de la corde.

Approximation des petits angles

On fera par la suite l'hypothèse des petits déplacements de la cordes par rapport à sa position d'équilibre. De manière quantitative, cela revient à dire que l'angle $\alpha(x)$ que fait la tension \vec{T} en tout point la corde par rapport à l'axe Ox , exprimé en radians, est infinitésimal :

$$|\alpha(x, t)| = \left| \arctan \left(\frac{T_y(x, t)}{T_x(x, t)} \right) \right| \ll 1 \quad \forall x \in [0, L], \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{4.4}$$

On peut alors considérer la portion de corde comme un segment dont les extrémités ont pour coordonnées $(x, y(x, t))$ et $(x + \delta x, y(x + \delta x, t))$. La masse de la portion de corde est alors donnée au premier ordre en δx par

$$\delta M \simeq \mu \delta x. \tag{4.5}$$

2. Cela suppose que la corde ne fait pas de boucles, ce qui est raisonnable pour une corde bien tendue !

Principe fondamental de la dynamique

Appliquons maintenant le principe fondamental de la dynamique au segment de corde considéré (voir fig. 4.3), dans le référentiel attaché au support de la corde, supposé galiléen.

Les forces s'appliquant au système sont uniquement les forces de tension, si nous négligeons le poids ainsi que les diverses forces de frottement. On a alors :

$$\boxed{\mu \delta x \vec{a}(x, t) = \vec{T}(x) + \vec{T}(x + \delta x)} \quad (4.6)$$

où la force $\vec{T}(x)$ (resp. $\vec{T}(x + \delta x)$) est la force exercée à l'extrémité gauche (resp. droite) du segment de corde considéré. On utilisera par la suite la notation $T(\vec{x}, t) = \|\vec{T}(\vec{x}, t)\|$ pour le module de la tension. Dans l'hypothèse d'une corde sans raideur, la tension est tangente à la corde en tout point.

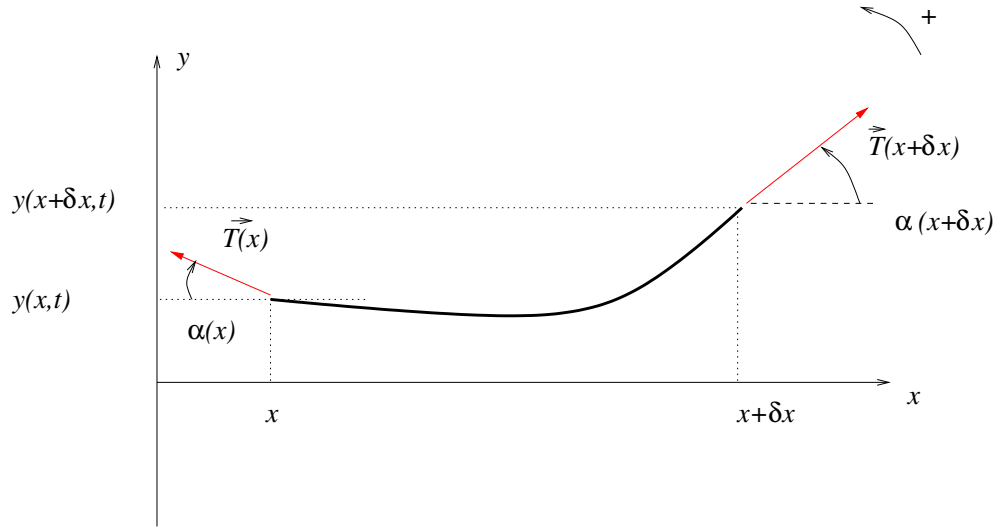


FIGURE 4.3 – Principe fondamental de la dynamique pour un segment infinitésimal de corde vibrante. Les angles sont orientés par rapport au sens trigonométrique ; sur la figure $\alpha(x) < 0$ et $\alpha(x + \delta x) > 0$ (les angles sont très exagérés pour une plus grande clarté de la figure).

Pour de faibles perturbations, le déplacement est supposé transverse. L'accélération $\vec{a}(x, t)$ de l'élément de corde ne comporte alors pas de composante selon \vec{e}_x et est donnée par

$$\vec{a}(x, t) = \ddot{y}(x, t) \vec{e}_y, \quad (4.7)$$

au premier ordre en δx (c.-à.-d. en assimilant l'élément de corde à un segment, dont les constituants se déplacent à une vitesse identique en tout point).

La somme des forces de tension appliquées au segment s'écrit (voir la figure 4.3 pour les conventions sur les angles) :

$$\begin{aligned} \vec{T}(x) + \vec{T}(x + \delta x) &= \left(T(x + \delta x, t) \cos[\alpha(x + \delta x)] - T(x, t) \cos[\alpha(x)] \right) \vec{e}_x \\ &\quad + \left(T(x + \delta x, t) \sin[\alpha(x + \delta x)] - T(x, t) \sin[\alpha(x)] \right) \vec{e}_y \end{aligned} \quad (4.8)$$

En utilisant l'hypothèse des petits angles, nous avons les développements limités suivants :

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \tan \alpha(x, t) \simeq \alpha(x, t) \simeq \sin \alpha(x, t) \quad (4.9a)$$

$$\frac{\partial y(x + \delta x, t)}{\partial x} = \tan \alpha(x + \delta x, t) \simeq \alpha(x + \delta x, t) \simeq \sin \alpha(x + \delta x, t) \quad (4.9b)$$

ainsi que

$$\cos \alpha(x, t) \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 \quad (4.10a)$$

$$\cos \alpha(x + \delta x, t) \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y(x + \delta x, t)}{\partial x} \right)^2 \quad (4.10b)$$

La projection de l'équation (4.6) sur l'axe Ox donne au premier ordre en δx et en $\partial y/\partial x$ (approximation des petits angles)

$$0 = T(x + \delta x, t) - T(x, t) = \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \delta x \quad (4.11)$$

Nous obtenons donc que, dans l'hypothèse du déplacement transverse de la corde, *le module de la tension est constant le long de la corde*, soit

$$||\vec{T}(x, t)|| = T(x, t) = T \quad \forall x \in [0, L] \text{ et } \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.12)$$

Il suffira donc de connaître sa valeur à une extrémité de la corde.

Corde tendue par une masse

Un moyen possible de tendre une corde est d'y suspendre un poids de masse m , voir fig. 4.4. Le module de la tension de la corde à son extrémité est alors donné par

$$T = mg \quad (4.13)$$

où g est l'accélération due à la pesanteur. En vertu du résultat précédent, le module de la tension est égal à cette valeur *en tout point de la corde*.

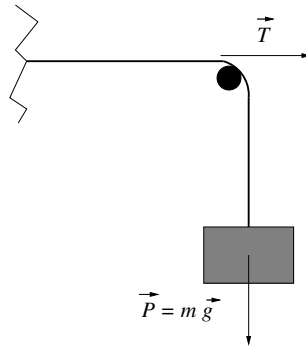


FIGURE 4.4 – Corde tendue par une masse.

Équation d'onde pour la corde

La projection de l'équation (4.6) sur l'axe Oy donne, en utilisant le fait que le module de la tension est constant

$$\mu \delta x \ddot{y}(x, t) = T \left\{ \sin[\alpha(x + \delta x)] - \sin[\alpha(x)] \right\} \simeq T \left[\frac{\partial y(x + \delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right] \quad (4.14)$$

Nous pouvons faire finalement un développement de Taylor du premier ordre du membre de droite

$$\frac{\partial y(x + \delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \delta x + \mathcal{O}(\delta x^2) \quad (4.15)$$

Nous obtenons donc, en simplifiant par δx (ce qui est possible car tous les termes sont du premier ordre en δx)

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}} \quad (4.16)$$

L'équation (4.16) n'est rien d'autre que l'équation d'onde à une dimension (2.1).

Les ondes considérées dans le problème des cordes vibrantes sont des *ondes transverses*, comme la perturbation correspondant à l'onde, donnée par la fonction $y(x, t)$, est transverse à la direction de propagation (qui coïncide avec l'axe Ox).

Célérité de l'onde

En comparant l'équation précédente avec l'équation d'onde générique (2.1), nous pouvons identifier la célérité des ondes transverses sur une corde vibrante :

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}} \quad (4.17)$$

La tension s'exprime en Newtons, soit en $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ et la masse linéique en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$. La célérité est donc bien exprimée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ comme il se doit. Nous observons que la célérité des ondes sur la cordes est d'autant plus grande que la corde est tendue et qu'elle de faible masse linéique.

Pour donner un ordre de grandeur, considérons une corde en acier de diamètre $d = 1,0 \text{ mm}$. Premièrement, l'aire de la section de corde est

$$s = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 7,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \quad (4.18)$$

La masse volumique de l'acier étant de $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ on trouve la masse linéique

$$\mu = \rho s = 6,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \quad (4.19)$$

Cette corde est tendue en y suspendant une masse de $5,0 \text{ kg}$. La tension correspondante est de

$$T = mg = 5,0 \times 9,8 = 49 \text{ N} \quad (4.20)$$

On trouve finalement la célérité des ondes sur cette corde

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{49}{6,1 \cdot 10^{-3}}} = 90 \text{ m s}^{-1} \quad (4.21)$$

4.2 Conditions aux limites

L'équation d'onde (4.16) gouverne la dynamique en tout point de la corde vibrante. Nous n'avons cependant encore rien dit des *conditions aux limites* aux extrémités de la corde, en $x = 0$ et $x = L$. Celles-ci doivent être spécifiées pour que le problème mathématique soit bien posé. Physiquement, il faut définir ce qui « arrive » à une onde se propageant sur la corde lorsqu'elle en atteint une des extrémités.

Nous supposons que la corde est fixée aux deux extrémités, de telle manière que son déplacement transverse soit impossible :

$$\boxed{y(0, t) = 0 \quad , \quad y(L, t) = 0 \quad \forall t} \quad (4.22)$$

De telles conditions aux limites sont appelées *conditions de Dirichlet*. Elles sont naturelles dans ce problème physique.

Cherchons maintenant quelles restrictions aux solutions de l'équation d'onde sont dictées par les conditions aux limites (4.22). Une solution générale de l'équation s'écrit comme nous l'avons montré

$$y(x, t) = y_-(x - ct) + y_+(x + ct) \quad (4.23)$$

Les conditions aux limites (4.22) imposent alors les relations fonctionnelles suivantes, aux points $x = 0$ et $x = L$:

$$y(0, t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_-(-ct) = -y_+(ct), \quad (4.24a)$$

$$y(L, t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_-(L - ct) = -y_+(L + ct). \quad (4.24b)$$

Ces relations doivent être vérifiées à tout instant t .

En combinant les relations (4.24a, 4.24b), nous obtenons que les fonctions y_{\pm} doivent être périodiques de période $2L$, car elles vérifient :

$$y_{\pm}(u + 2L) = y_{\pm}(L + (u + L)) = -y_{\mp}(L - (u + L)) = y_{\mp}(-u) = y_{\pm}(u) \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (4.25)$$

Il est donc naturel de développer les deux fonctions y_{\pm} de la solution en série de Fourier.

Fréquences propres

Pour analyser le problème d'une manière légèrement différente, nous cherchons une solution de l'équation d'onde de type sinusoïdal, voir l'éq. (2.15). En utilisant la notation complexe, nous cherchons des solutions $\tilde{y}(x, t)$ de la forme

$$\tilde{y}(x, t) = \tilde{\mathcal{A}}_- e^{i(\omega t - kx)} + \tilde{\mathcal{A}}_+ e^{i(\omega t + kx)} \quad (4.26)$$

où la pulsation ω et le module du nombre d'onde k sont reliés par la relation de dispersion (2.17), faisant intervenir la célérité donnée par l'éq. (4.17).

Les conditions aux limites (4.24) imposent alors les relations algébriques suivantes :

$$\tilde{\mathcal{A}}_+ e^{i\omega t} = -\tilde{\mathcal{A}}_- e^{i\omega t} \quad \forall t \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tilde{\mathcal{A}}_+ = -\tilde{\mathcal{A}}_-} \quad (4.27a)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_+ e^{i(\omega t + kL)} = -\tilde{\mathcal{A}}_- e^{i(\omega t - kL)} \quad \forall t \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tilde{\mathcal{A}}_+ e^{ikL} = -\tilde{\mathcal{A}}_- e^{-ikL}} \quad (4.27b)$$

La relation (4.27a) impose à l'onde sinusoïdale complexe d'être de la forme

$$\tilde{y}(x, t) = \tilde{\mathcal{A}} \left[e^{i(\omega t - kx)} - e^{i(\omega t + kx)} \right] = -2i\tilde{\mathcal{A}} e^{i\omega t} \sin(kx) \quad (4.28)$$

où on a posé $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{A}}_-$.

Cette fonction s'annule évidemment en $x = 0$ comme prévu. On observe que la dépendance en x et la dépendance en t de cette solution sont factorisées. Il s'agit donc d'un exemple d'*onde stationnaire* (voir la section 3.2 du chapitre précédent). Notons qu'une seule des deux conditions aux limites est nécessaire pour aboutir à cette conclusion.

La deuxième relation, éq. (4.27b), impose quand à elle une condition sur le nombre d'onde k . En effet, en exprimant $\tilde{\mathcal{A}}_-$ en fonction de $\tilde{\mathcal{A}}_+$ à l'aide de (4.27a) nous trouvons :

$$\boxed{\sin(kL) = 0} \iff kL \equiv 0 \pmod{\pi} \quad (4.29)$$

Nous en déduisons que les seules ondes qui peuvent exister sur la corde en régime stationnaire ont un nombre d'onde bien déterminé. Il est quantifié selon

$$k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.30)$$

Chaque valeur de n spécifie un nombre d'onde propre de la corde, correspondant à une longueur d'onde (pour $n \neq 0$)

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \quad (4.31)$$

La plus grande longueur d'onde possible est $2L$ ce qui est compatible avec la périodicité (4.25) trouvée plus haut.

Il est plus commun de parler des *fréquences propres* de la corde vibrante, obtenues en utilisant la relation de dispersion (2.17) :

$$\boxed{\nu_n = \frac{nc}{2L} \quad , \quad n \in \mathbb{N}} \quad (4.32)$$

Finalement, en décomposant, pour un entier n donné, l'amplitude complexe d'une solution en module et argument suivant la forme commode

$$\tilde{\mathcal{A}} = \frac{i}{2} \mathcal{C}_n e^{i\phi_n} \quad , \quad \mathcal{C}_n \in \mathbb{R}_+ \quad , \quad (4.33)$$

une solution sinusoïdale de fréquence ν_n s'écrit comme :

$$y_n(x, t) = \operatorname{Re} \left[\mathcal{C}_n e^{i(\omega_n t + \phi_n)} \sin(k_n x) \right] = \mathcal{C}_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x) \quad (4.34)$$

Modes propres

Une telle solution est appelé un *mode propre* de la corde vibrante, correspondant à la fréquence propre ν_n . Il s'agit d'une onde stationnaire telle que les points $x = 0$ et $x = L$ soient des nœuds de vibration.

Les positions des nœuds et des ventres du mode propre associé à la fréquence propre ν_n sont (voir fig. 3.1) :

- les *nœuds* de la corde sont tels que $y_n(x, t) = 0 \quad \forall t$. D'après l'éq. (4.34) ils se situent en

$$\sin(k_n x_a) = 0 \implies x_a = \frac{a}{n} L \quad , \quad a = 0, \dots, n \quad (4.35)$$

Naturellement, les deux extrémités de la corde en $x = 0$, et $x = L$ sont toujours des nœuds car la corde est attachée en ces points ;

- Les *ventres* de la corde sont obtenus pour

$$|\sin(k_n x_b)| = 1 \implies x_b = \frac{b + \frac{1}{2}}{n} L \quad , \quad b = 0, \dots, n - 1 \quad (4.36)$$

Solution générale pour la corde vibrante

La solution générale de l'équation d'onde sur la corde vibrante de longueur L , fixée aux deux extrémités, s'obtient comme une superposition générale de tous les modes propres (4.34) associés :

$$\boxed{y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x)} \quad (4.37)$$

Ce développement ressemble à un développement en série de Fourier. Les coefficients \mathcal{C}_n sont donnés par les conditions initiales du problème, par exemple en $t = 0$.

Plus précisément, les coefficients du développement en série de Fourier de la fonction $F(x) = y(x, t = 0)$ sont donnés par $\{\mathcal{C}_n \cos \phi_n, n = 1, \dots, +\infty\}$ et les coefficients du développement de la fonction $G(x) = \partial_t y(x, t)|_{t=0}$ par $\{-\omega_n \mathcal{C}_n \sin \phi_n, n = 1, \dots, +\infty\}$.

Ainsi il faut développer en série de Fourier à la fois la fonction correspondant au profil initial de la corde, et la fonction donnant la distribution initiale de vitesse aux différents points de la corde, afin de spécifier complètement la forme de l'onde stationnaire. Dans les cas les plus courants, la corde est initialement au repos, ce qui implique que $\phi_n \equiv 0 \text{ } [\pi], \forall n = 1, \dots, +\infty$.

Harmoniques

Il est utile, en particulier dans le domaine du son musical, d'introduire la notion d'harmoniques pour classer les différents modes de vibration (voir fig. 4.5). D'après cette terminologie, les solu-

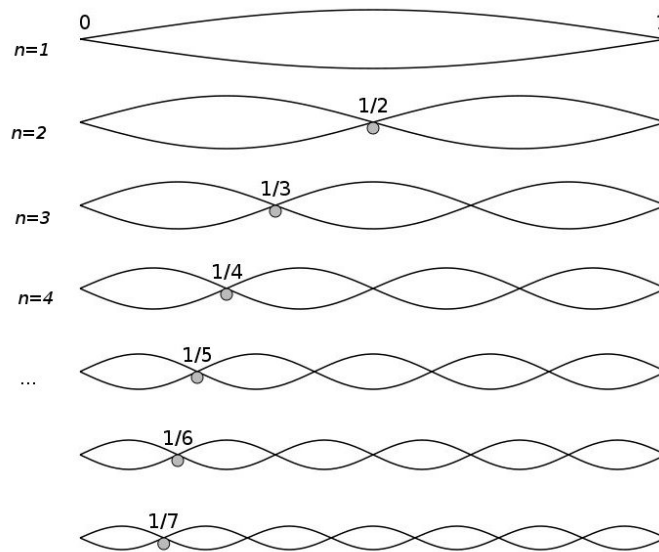


FIGURE 4.5 – Harmoniques de la corde vibrante.

tions (4.34) sont appelées

- *mode fondamentale*, ou premier harmonique, pour $n = 1$, soit $\lambda = 2L$ ou $\nu_1 = c/2L$. Il s'agit de la plus petite fréquence non nulle possible sur la corde fixée aux deux extrémités, donc du son le plus grave possible sur cette corde en régime stationnaire. Ce mode comporte deux nœuds en $x = 0, L$ et un seul ventre en $x = L/2$;
- *deuxième harmonique* pour $n = 2$, soit $\lambda = L$. Sa fréquence est $\nu_2 = 2\nu_1$. Ce mode comporte trois nœuds en $x = 0, L/2, L$ et deux ventres en $x = L/4, 3L/4$;
- *troisième harmonique* pour $n = 3$, soit $\lambda = 2L/3$. Sa fréquence est $\nu_3 = 3\nu_1$. Ce mode comporte quatre nœuds en $x = 0, L/3, 2L/3, L$ et trois ventres en $x = L/6, L/2, 5L/6$;
- ...

Cordes vibrantes et musique

L'étude des modes de vibration d'une corde a permis dans l'histoire de développer des théories mathématiques régissant les intervalles des gammes musicales, c.-à.-d. les rapports entre les fréquences des notes. En voici quelques exemples.

- Pour une note donnée par le mode fondamental de la corde (par exemple un do1), le deuxième harmonique correspond à l'intervalle d'une octave (le do2), définissant l'*ambitus* de la gamme. La relation entre les fréquences associées est $\nu_2 = 2\nu_1$, ν_1 étant la fréquence du do1 (fondamental).
- Le troisième harmonique correspond à une octave additionnée d'une *quinte* (le sol2). Sa fréquence est donnée par $\nu_3 = 3\nu_1$. En descendant le sol2 d'une octave (c.-à.-d. en divisant sa fréquence par 2, donnant le sol1), on obtient un intervalle de quinte (do1-sol1) appelé *quinte pythagoricienne*. Le rapport des fréquences de ces deux notes est de $3/2$.

La succession d'intervalles de quinte, en partant du do1 : do1→sol1→re2→la2,⋯ permet de construire une gamme majeure, dite gamme pythagoricienne, car proposée par l'école des Pythagoriciens dans l'antiquité.

- Un autre type de gamme, la gamme *naturelle* de Zarlino (XVIe siècle), utilise non seulement l'intervalle de quinte issu du troisième harmonique, mais aussi l'intervalle de tierce majeure issu du cinquième harmonique. En partant du do1, le cinquième harmonique, de fréquence $\nu_5 = 5\nu_0$, est le mi3. Descendu de deux octaves, on obtient le mi1 de fréquence $5\nu_1/4$. De manière générale, les intervalles issus des harmoniques sont appelés *naturels*.

- Dans la musique occidentale moderne, la gamme utilisée, dite *tempérée*, n'utilise pas les intervalles harmoniques, à l'exception de l'octave. L'octave est alors divisé en 12 intervalles égaux appelés demi-tons. Le rapport des fréquences de deux notes séparées par un octave étant $\nu_2/\nu_1 = 2$, le rapport des fréquences de deux notes séparées par un demi-ton est de $2^{1/12}$. Cette simplification se fait au prix de la justesse des intervalles, qui n'est qu'approximative.

Ainsi la quinte tempérée correspond alors à un intervalle de sept demi-tons, qui est légèrement plus petit que la quinte pythagoricienne (comme $2^{7/12} \simeq 1,498 < 3/2$). Les différences entre ces deux gammes persistent pour tous les autres intervalles (quarte, tierce, seconde...).

- Les intervalles naturels continuent cependant de jouer un rôle important dans les musiques non-européennes (musiques arabe, indienne,...).

Analyse spectrale

L'analyse spectrale d'une onde, plus particulièrement d'un son musical, consiste à étudier la proportion relative des différents harmoniques dans le son émis. Pour une corde vibrante, dont la solution générale est donnée par (4.37), cela revient à tracer l'amplitude réelle C_n des différents harmoniques en fonction de n .

Lorsque la corde vibre librement, le spectre ne dépend comme nous l'avons vu que des conditions initiales imposées à $t = 0$. Pour obtenir un son *pur*, composé uniquement du mode fondamental, il faut choisir les conditions initiales suivantes (difficiles à obtenir!) :

$$y(x, t = 0) = A \sin(\pi x/L). \quad (4.38)$$

nous avons alors $C_1 = A$ et $C_n = 0, \forall n > 1$.

Un cas plus réaliste correspond à une corde pincée, par exemple sur une guitare (voir figure 4.6). Si la corde est pincée en son milieu, nous avons les conditions initiales

$$\begin{aligned} y(x, t = 0) &= Ax, & 0 < x < L/2 \\ y(x, t = 0) &= A(L - x), & L/2 < x < L \end{aligned} \quad (4.39)$$

ainsi que $\partial y/\partial t|_{x,t=0} = 0$, voir figure 4.6. Le calcul explicite est laissé en exercice. On obtient, en

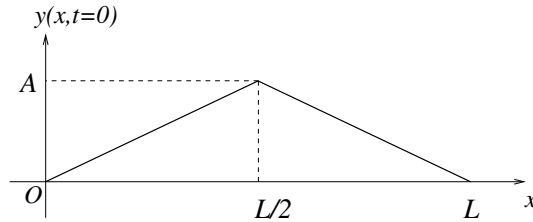


FIGURE 4.6 – Corde pincée.

identifiant terme à terme la série de Fourier pour $y(x, t = 0)$ avec la forme générale de l'onde (4.37) :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{4AL}{\pi^2 n^2} \text{ pour } n \text{ impair} \\ C_n &= 0 \quad \text{pour } n \text{ pair} \end{aligned}$$

et $\phi_n = 0 \forall n$. On voit que le spectre contient tous les harmoniques impairs (mais pas les harmoniques pairs) avec une amplitude décroissant comme $1/n^2$, voir la figure 4.7.

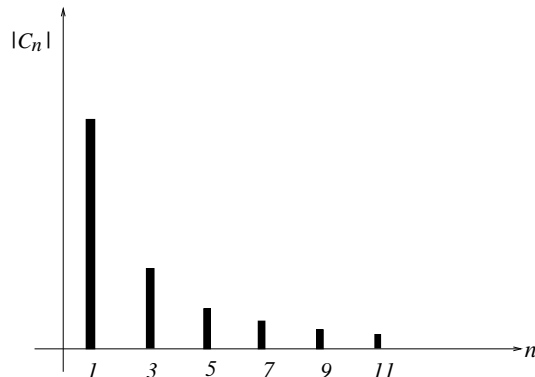


FIGURE 4.7 – Spectre de la corde pincée.

Dans la réalité, la corde vibrante d'un instrument de musique est couplée à une caisse de résonance. Cette dernière amplifie sélectivement certaines harmoniques au détriment d'autres, modifiant le spectre obtenu. Nous obtenons ainsi le *timbre* spécifique de l'instrument. Le timbre est caractérisé par les proportions relatives des différentes harmoniques pour une note donnée. Si le timbre est bien équilibré, ces proportions sont semblables pour toutes les notes accessibles à l'instrument.

Résonance

Il est possible de faire vibrer, à une certaine fréquence ν_e , une des extrémités de la corde par un dispositif mécanique. Lorsque cette fréquence est égale à une des fréquences propres du système ν_n , il se produit alors le phénomène de *résonance*. Ce mode propre est alors spécifiquement excité de manière continue, et son amplitude devient importante.

Le dispositif expérimental associé est appelé *corde de Melde*. Il est étudié en travaux dirigés.

4.3 Considérations énergétiques

Une onde sur une corde vibrante contient une certaine énergie mécanique. Cette énergie n'étant a priori pas répartie uniformément le long de la corde, il est naturel de considérer la *densité linéique d'énergie mécanique* de l'onde par unité de longueur, associée à un élément infinitésimal de la corde situé autour d'un point $x \in]0, L[$.

Cette densité d'énergie se compose d'une densité d'énergie cinétique et d'une densité d'énergie potentielle. En l'absence de dissipation – ce que nous avons supposé ici, ne prenant pas en compte par exemple les forces de frottement fluide – l'énergie mécanique totale de la corde est *conservée* au cours du temps.

Cette conservation de l'énergie s'appliquera dès que la dynamique du système sera régie par l'équation d'onde (2.1), qui ne contient pas de terme de dissipation. Par contre la densité d'énergie peut varier avec le temps car il peut exister un courant d'énergie mécanique entre les segments infinitésimaux voisins de la corde.

Énergie cinétique

La *densité linéique d'énergie cinétique* est aisée à obtenir. Dans l'hypothèse des petits déplacements considérons l'énergie cinétique d'une fraction infinitésimale de la corde de longueur $d\ell$, dont la projection sur l'axe Ox est de longueur dx avec $dx \simeq d\ell$ au premier ordre en dx . Dans cette approximation du premier ordre, la vitesse de l'élément de corde peut être considérée comme uniforme. Elle est donnée par

$$v(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \quad (4.40)$$

La masse de cet élément de corde étant $\delta M = \mu dx$, nous avons alors l'énergie cinétique :

$$\delta E_c = \frac{1}{2} \delta M v(x, t)^2 = \frac{1}{2} \mu dx \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (4.41)$$

La densité linéique d'énergie cinétique s'obtient en divisant ce résultat par la longueur de l'élément de corde infinitésimal. Nous avons alors :

$$e_c(x, t) = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 \quad (4.42)$$

L'énergie cinétique totale contenue dans la corde vibrante est alors, en supposant la masse linéique constante :

$$E_c(t) = \int \delta E_c(x, t) = \int_0^L e_c(x, t) dx = \frac{\mu}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (4.43)$$

Énergie potentielle élastique

Cherchons maintenant l'expression de la densité linéique d'énergie potentielle élastique. Nous allons pour cela calculer le travail associé à l'allongement de la corde.

La longueur de la corde au repos est donnée par L par définition. Lorsque la corde est parcourue par une onde, sa forme à un instant donné est décrite par la fonction $y(x, t)$. Sa longueur totale va alors nécessairement changer. Elle se calcule de la manière suivante.

Un déplacement infinitésimal le long de la corde, d'une quantité dx selon l'axe Ox , s'accompagne d'un déplacement selon l'axe Oy d'une valeur $(\partial y(x, t)/\partial x)dx$, au premier ordre en dx .

La longueur du segment infinitésimal correspondant est alors, d'après le théorème de Pythagore (voir fig. 4.8) :

$$d\ell = \sqrt{1 + (\partial y(x, t)/\partial x)^2} dx, \quad (4.44)$$

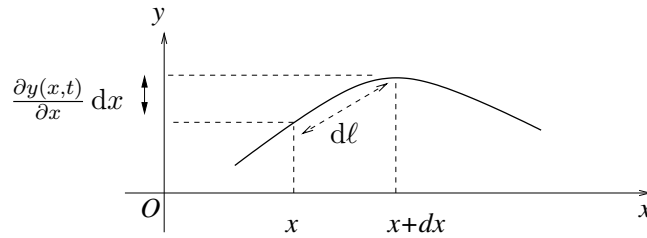


FIGURE 4.8 – Allongement infinitésimal de la corde.

La longueur complète de la corde à l'instant t est alors obtenue comme

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^L dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\right)^2} \quad (4.45)$$

Dans l'approximation des petits angles on peut développer ce résultat selon

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &\simeq \int_0^L dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\right)^2 \right) \\ &\simeq L + \frac{1}{2} \int_0^L dx \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\right)^2 \\ &\equiv L + \delta\mathcal{L} \end{aligned} \quad (4.46)$$

L'*allongement* de la corde $\delta\mathcal{L}$ défini à la dernière ligne est responsable d'un travail mécanique pour les forces de tension. donné par (on rappelle que le module de la tension est constant le long de la corde) :

$$W = -T\delta\mathcal{L} \quad (4.47)$$

Le travail étant égal à l'opposé de la variation d'énergie potentielle nous avons, à une constante additive près

$$E_p(t) = T\delta\mathcal{L}(t) \quad (4.48)$$

La densité d'énergie potentielle est alors donnée par l'intégrande de cette expression

$$\boxed{e_p(x, t) = \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\right)^2} \quad (4.49)$$

Énergie mécanique

La densité linéique d'énergie mécanique est obtenue comme la somme de la densité d'énergie cinétique et de la densité d'énergie potentielle :

$$e_m(x, t) = e_c(x, t) + e_p(x, t) = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 \quad (4.50)$$

L'énergie mécanique totale s'obtient alors comme

$$\begin{aligned} E_m &= \int_0^L e_m(x, t) dx = \int_0^L dx \left[\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{T}{2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= \frac{T}{2} \int_0^L dx \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

Cette énergie est bien conservée. En effet nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} &= \frac{T}{2} \int_0^L dx \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= T \int_0^L dx \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

Effectuons maintenant une intégration par parties du second membre. On obtient alors

$$\frac{dE_m}{dt} = T \int_0^L dx \frac{\partial y}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + T \left[\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right]_0^L = 0 \quad (4.53)$$

En effet, le premier terme s'annule grâce à l'équation d'onde (2.1) et le second en raison des conditions aux limites (4.22) aux extrémités de la corde.

Nous voyons que les conditions aux limites que nous avons choisies — la corde est immobile à ses deux extrémités — sont telles que l'énergie de l'onde sur la corde est constante; en d'autres termes, il n'y a pas de fuites d'énergie aux bords.

Équation locale de conservation

Nous pouvons aussi obtenir une forme locale de l'équation de conservation de l'énergie. Nous prenons comme point de départ

$$\frac{\partial e_m(x, t)}{\partial t} = T \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \right] \quad (4.54)$$

En utilisant l'équation d'onde (2.1) nous pouvons réécrire cette équation comme

$$\frac{\partial e_m(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial j_m(x, t)}{\partial x} \quad (4.55)$$

où nous avons défini un *courant d'énergie mécanique*

$$j_m(x, t) = -T \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \quad (4.56)$$

qui représente la différence entre l'énergie entrante et l'énergie sortante par unité de temps, pour l'élément de corde infinitésimal.

Son équation aux dimensions donne (T étant une force)

$$[j_m] = \frac{ML}{T^2} \times \frac{L}{L} \times \frac{L}{T} = \frac{ML^2}{T^3} \quad (4.57)$$

il s'agit donc d'une énergie divisée par un temps, soit d'une *puissance*.

L'élément de corde infinitésimal considéré n'étant pas un système fermé, son énergie n'est pas constante, mais la variation de son énergie doit être donnée par la différence des énergies entrant aux deux extrémités; c'est précisément la signification de l'équation (4.55), qui apparaît dans nombre de problèmes physiques non dissipatifs.

Densité d'énergie dans une onde stationnaire

Considérons maintenant les expressions prises par l'énergie mécanique et le courant d'énergie pour une onde stationnaire sinusoïdale, de la forme

$$y(x, t) = C_n \cos \omega_n t \sin k_n x, \quad (4.58)$$

composée d'un seul mode de vibration. On s'intéresse à la valeur moyenne sur une période temporelle des différentes quantités, définie par

$$\langle f \rangle_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t) dt \quad (4.59)$$

Rappelons tout d'abord que (*formules à connaître impérativement!*)

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \left(\frac{2\pi t}{T} \right) dt = \frac{1}{2} \quad (4.60a)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \left(\frac{2\pi t}{T} \right) dt = \frac{1}{2} \quad (4.60b)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) dt = 0 \quad (4.60c)$$

En appliquant ces formules pour la densité d'énergie mécanique, nous avons premièrement :

$$\begin{aligned} e_m(x, t) &= \frac{T}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= \frac{T C_n^2}{2} \left[\frac{\omega_n^2}{c^2} \sin^2(\omega_n t) \sin^2(k_n x) + k_n^2 \cos^2(\omega_n t) \cos^2(k_n x) \right] \end{aligned} \quad (4.61)$$

Calculons maintenant la valeur moyenne dans le temps. On obtient

$$\langle e_m \rangle_T(x) = \frac{T C_n^2}{4} \left[\frac{\omega_n^2}{c^2} \sin^2(k_n x) + k_n^2 \cos^2(k_n x) \right] = \frac{T C_n^2 k_n^2}{4} \quad (4.62)$$

Nous observons que la densité d'énergie mécanique moyenne est indépendante de la position x . À un ventre de l'onde, cette densité d'énergie est uniquement sous forme d'énergie cinétique (car alors $\cos k_n x = 0$) alors qu'à un nœud elle est uniquement sous forme d'énergie potentielle (car $\sin k_n x = 0$).

Il est aussi intéressant de calculer la valeur moyenne du courant d'énergie mécanique. Ce dernier est donné par :

$$j_m(x, t) = -T \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = T C_n^2 \omega_n k_n \cos(\omega_n t) \sin(\omega_n t) \sin(k_n x) \cos(k_n x) \quad (4.63)$$

On obtient donc que

$$\langle j_m \rangle_T(x) = \frac{TA^2\omega_n^2}{c} \langle \cos(\omega_n t) \sin(\omega_n t) \rangle_T \sin(k_n x) \cos(k_n x) = 0 \quad (4.64)$$

La valeur moyenne du courant d'énergie est donc nulle.

Ces résultats se généralisent à la solution générale (4.37) pour l'onde stationnaire sur la corde vibrante. On obtient que la valeur moyenne dans le temps de la densité d'énergie mécanique est constante le long de la corde, et égale à la somme des densités d'énergie correspondant aux différents modes :

$$\langle e_m \rangle_T = \frac{T}{4} \sum_{n=0}^{\infty} k_n^2 C_n^2 \quad (4.65)$$

Remarquons que les différents modes contribuent de manière additive à cette expression.

4.4 Interfaces

Jusqu'à maintenant nous avons considéré que la corde est constituée d'un seul matériau, et de section constante. Ainsi, comme les propriétés de la corde vibrante sont les mêmes en chaque point, une onde progressive peut se propager continûment d'une extrémité à l'autre de la corde. S'il se produit un changement des caractéristiques de la corde en un point donné, on s'attend à une discontinuité de l'onde en ce point.

Considérons la jonction de deux cordes de masse linéique différente, attachées en un point où le mouvement est libre. On choisit les coordonnées telles que la corde de masse linéique μ_1 soit située en $x < 0$ et la corde de masse linéique μ_2 soit située en $x > 0$, voir figure 4.9.

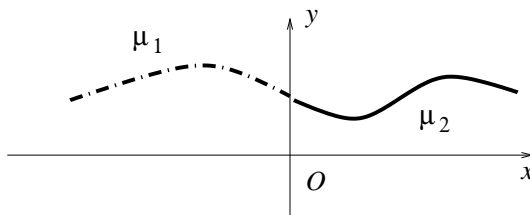


FIGURE 4.9 – Jonction de deux cordes vibrantes.

Sur chaque demi-corde, nous avons vu que le module de la tension était le même en tout point. Qu'en est-il à la jonction des deux cordes ?

Dans le cadre des approximations effectuées jusqu'à maintenant, la jonction est d'épaisseur négligeable donc sa masse peut être considérée comme nulle. La somme des forces qui s'y applique doit être nulle, en appliquant le principe fondamental de la dynamique. On en déduit le principe de *continuité de la tension*.

Il implique tout d'abord que les modules des tensions de part et d'autre de l'interface sont identiques. On appellera cette tension T .

On considère qu'une onde progressive, pas nécessairement sinusoïdale, est émise sur la première corde, c.-à.-d. à partir d'une certaine position $x_0 < 0$ (en deçà de la zone étudiée), se propageant vers les x croissants. Elle s'écrit

$$y_i(x, t) = f_i(t - x/c_1) \quad , \quad x < 0 \quad (4.66)$$

Nous l'appellerons *onde incidente*. La célérité des ondes transverse sur la corde est, pour $x < 0$

$$c_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \quad (4.67)$$

en fonction de la masse linéique μ_1 de la demi-corde située en $x < 0$.

À l'interface, de manière générale, une partie de l'onde va être réfléchiée. On obtient alors une onde régressive appelée *onde réfléchiée* :

$$y_r(x, t) = f_r(t + x/c_1) \quad , \quad x < 0 \quad (4.68)$$

L'onde présente sur la corde pour $x < 0$ est donc donnée par la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchiée :

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_i(x, t) + y_r(x, t) \\ &= f_i(t - x/c_1) + f_r(t + x/c_1) \quad \forall x < 0, \quad \forall t \end{aligned} \quad (4.69)$$

Une autre partie de l'onde va être transmise à l'autre demi-corde. Bien évidemment, cette onde est progressive (elle se propage vers les x croissants); elle s'appelle *onde transmise*

$$y_t(x, t) = f_t(t - x/c_2) \quad , \quad x > 0 \quad (4.70)$$

La célérité des ondes transverses sur la corde est, pour $x > 0$,

$$c_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} \quad (4.71)$$

en fonction de la masse linéique μ_2 de la demi-corde située en $x > 0$. Nous cherchons maintenant à exprimer l'onde transmise et l'onde réfléchiée, connaissant l'onde incidente.

Conditions de raccordement à la jonction

Premièrement, les deux morceaux de cordes étant attachés, le déplacement de la corde le long de l'axe Oy doit être le même des deux côtés de la jonction en $x = 0$. On obtient une première condition :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [y_i(x, t) + y_r(x, t)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} y_t(x, t) \quad , \quad \forall t \quad (4.72)$$

Utilisant la forme explicite des ondes, eqs (4.66,4.68,4.70) on obtient

$$f_i(t) + f_r(t) = f_t(t) \quad \forall t \quad (4.73)$$

Deuxièmement, nous pouvons invoquer ici aussi le fait que la somme des forces appliquées à la jonction doit être nulle, car la somme des forces appliquées à un système de masse nulle (comme c'est le cas pour la jonction supposée infiniment fine) doit être nulle.

Nous avons déjà utilisé le fait que le module de la tension est le même des deux côtés de la jonction. Nous voulons maintenant imposer en plus que les vecteurs correspondant aux forces de tension appliquées de part et d'autre de la jonction sont de même direction, et de sens opposés.

En utilisant les expressions des forces utilisées pour l'équation (4.14), dans la limite d'épaisseur nulle $x \rightarrow 0^-$ et $\delta x \rightarrow 0^+$, on obtient la condition

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \quad \forall t \quad (4.74)$$

On obtient alors, en n'oubliant pas que $c_1 \neq c_2$ a priori

$$-\frac{f'_i(t)}{c_1} + \frac{f'_r(t)}{c_1} = -\frac{f'_t(t)}{c_2} \quad \forall t \quad (4.75)$$

Nous avons alors obtenu les deux contraintes suivantes à la jonction :

$$\boxed{\begin{array}{l} f_i(t) + f_r(t) = f_t(t) \\ f'_i(t) - f'_r(t) = \frac{c_1}{c_2} f'_t(t) \end{array}} \quad \forall t \quad (4.76)$$

Considérons maintenant le cas particulier d'une onde incidente sinusoïdale. Les ondes réfléchies et transmises seront aussi bien sûr sinusoïdales, et de même pulsation (on peut se convaincre que dans le cas contraire le système (4.76) n'a pas de solutions). Nous avons en notation complexe

$$\tilde{y}_i(x, t) = \tilde{\mathcal{A}}_i e^{i\omega(t-x/c_1)} \quad (4.77a)$$

$$\tilde{y}_r(x, t) = \tilde{\mathcal{A}}_r e^{i\omega(t+x/c_1)} \quad (4.77b)$$

$$\tilde{y}_t(x, t) = \tilde{\mathcal{A}}_t e^{i\omega(t-x/c_2)} \quad (4.77c)$$

On obtient alors à partir des relations (4.76) le système algébrique suivant (après avoir simplifié par le facteur commun $e^{i\omega t}$) :

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{A}}_i + \tilde{\mathcal{A}}_r = \tilde{\mathcal{A}}_t \\ \tilde{\mathcal{A}}_i - \tilde{\mathcal{A}}_r = \frac{c_1}{c_2} \tilde{\mathcal{A}}_t \end{cases} \quad (4.78)$$

Coefficients de réflexion et transmission en amplitude

Le rapport τ entre l'amplitude de l'onde transmise et l'onde incidente s'appelle *coefficient de transmission en amplitude*. En faisant la somme des deux équations du système (4.78), on trouve

$$\tau = \frac{\tilde{\mathcal{A}}_t}{\tilde{\mathcal{A}}_i} \implies \boxed{\tau = \frac{\tilde{\mathcal{A}}_t}{\tilde{\mathcal{A}}_i} = \frac{2}{1 + \frac{c_1}{c_2}} = \frac{2c_2}{c_1 + c_2}} \quad (4.79)$$

Le rapport ϱ entre l'amplitude de l'onde réfléchie et l'onde incidente s'appelle *coefficient de réflexion en amplitude*. En utilisant la première équation de (4.78) et l'équation (4.79) ci-dessus, on trouve

$$\varrho = \frac{\tilde{\mathcal{A}}_r}{\tilde{\mathcal{A}}_i} \implies \boxed{\varrho = \tau - 1 = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}} \quad (4.80)$$

On note que ces deux coefficients sont réels. Alors que τ est toujours positif, le signe de ϱ dépend du fait que la célérité c_2 soit plus petite ou plus grande que c_1 .

Coefficients de réflexion et transmission en énergie

Nous pouvons aussi définir des coefficients similaires pour le courant d'énergie mécanique. Le courant d'énergie mécanique de l'onde incidente (4.77a) s'obtient, en utilisant l'éq. (4.56) comme

$$j_m^i = \mathcal{A}_i^2 \frac{T\omega^2}{c_1} \sin^2(\omega(t - x/c_1) + \phi_i) \quad (4.81)$$

Dont l'amplitude est donc

$$\mathcal{J}_i = \mathcal{A}_i^2 \frac{T\omega^2}{c_1} \quad (4.82)$$

On trouve de même pour les ondes réfléchies et transmises :

$$\mathcal{J}_r = \mathcal{A}_r^2 \frac{T\omega^2}{c_1} \quad , \quad \mathcal{J}_t = \mathcal{A}_t^2 \frac{T\omega^2}{c_2} \quad (4.83)$$

On obtient ainsi pour le *coefficient de transmission en énergie*

$$\mathfrak{T} = \frac{\mathcal{J}_t}{\mathcal{J}_i} = \frac{c_1 \mathcal{A}_t^2}{c_2 \mathcal{A}_i^2} = \frac{c_1}{c_2} \tau^2 \implies \boxed{\mathfrak{T} = \frac{4c_1 c_2}{(c_1 + c_2)^2}} \quad (4.84)$$

et pour le *coefficient de réflexion en énergie*

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathcal{J}_r}{\mathcal{J}_i} = \frac{\mathcal{A}_r^2}{\mathcal{A}_i^2} = \varrho^2 \implies \boxed{\mathfrak{R} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{(c_1 + c_2)^2}} \quad (4.85)$$

On vérifie la relation importante

$$\mathfrak{R} + \mathfrak{T} = 1 \quad (4.86)$$

qui exprime la conservation du courant d'énergie mécanique à travers l'interface.

Impédance de la corde

Pour réécrire les résultats précédents d'une manière plus indépendante du système physique étudié, on peut introduire une *impédance* caractéristique correspondant à chacune des portions de la corde.

De manière générale on appelle impédance d'une onde *progressive* le coefficient de proportionnalité entre la force de tension orthogonale à la corde et sa vitesse de déplacement transverse (la convention de signe est choisie telle que $Z > 0$ pour une onde progressive) :

$$T_y(x, t) = -Z \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \quad (4.87)$$

On utilise alors le fait que, dans l'approximation des petits angles

$$T_y(x, t) = T \sin \alpha(x, t) = T \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \quad (4.88)$$

et que, pour une onde progressive

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -c \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (4.89)$$

On obtient, pour une onde progressive de célérité $c_i = \sqrt{T/\mu_i}$

$$Z_i = \frac{T}{c_i} = \sqrt{\mu_i T}. \quad (4.90)$$

Notons que, pour une onde régressive, on a la relation $T_y = +Z \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$ (car alors $\partial_t y = +c \partial_x y$).

On peut réécrire les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude et en énergie comme

$$\tau = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad \varrho = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (4.91a)$$

$$\mathfrak{T} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}, \quad \mathfrak{R} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad (4.91b)$$

Cette impédance a une interprétation un peu analogue à celle de l'impédance en électricité. Plus la corde a une impédance grande, plus elle « résiste » au passage de l'onde. Contrairement à une résistance électrique, la corde vibrante idéalisée possède une énergie mécanique, mais ne la dissipe pas ; elle correspond donc dans cette analogie à un dipôle ayant une impédance purement imaginaire.

Chapitre 5

Ondes acoustiques

Un deuxième exemple important d'ondes mécaniques est donné par les *ondes acoustiques*, correspondant à la propagation de petites perturbations dans un fluide. L'onde sera alors caractérisée indifféremment par le déplacement des éléments de fluide ou par la variation de pression autour de la pression moyenne. Cet exemple permettra aussi d'aborder la propagation des ondes à trois dimensions, ce qui n'est évidemment pas possible sur une corde vibrante.

5.1 Description d'un fluide

On considère que les propriétés d'un fluide considéré varient continuellement d'un point à l'autre de son volume ; on se place ainsi dans l'approximation des *milieux continus*. Cette approximation sera correcte lorsque les phénomènes décrits auront des échelles caractéristiques très grandes devant le libre parcours moyen des particules constituant le fluide.

Les différentes quantités physiques caractérisant le fluide sont donc des *champs*, c.-à.-d. des fonctions de la position \vec{x} et du temps t (description dite *eulérienne*). Les différents champs à considérer par la suite sont

- le champ de densité $\rho(\vec{x}, t)$ qui donne la masse volumique locale du fluide dans un volume infinitésimal centré au point \vec{x} , à l'instant t
- le champ de température $T(\vec{x}, t)$
- le champ de pression $P(\vec{x}, t)$, qui sera défini plus en détail dans la suite du texte
- le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{x}, t)$ qui donne la vitesse moyenne de l'écoulement pour volume infinitésimal de fluide centré au point \vec{x} , à l'instant t

toutes ces quantités sont des moyennes statistiques effectuées à l'instant t sur les particules présentes dans un volume infinitésimal centré autour du point \vec{x} .

Pour écrire le principe fondamental de la dynamique, on considèrera plutôt le système constitué d'un petit volume de fluide, dont on va suivre les déplacements et déformations au cours du temps (description dite *lagrangienne*). Cet élément de fluide, qui se trouvait à une position moyenne $\vec{x} \equiv \vec{x}(0)$ à l'instant initial $t = 0$, se trouve à la position $\vec{x}(t)$ à un instant ultérieur. Cette dernière est donc une fonction du temps, correspondant à la position moyenne des particules de l'élément de fluide considéré, à l'instant t .

On peut alors définir le *déplacement* de cet élément de fluide comme

$$\vec{\psi}(\vec{x}, t) = \vec{x}(t) - \vec{x}(0), \quad (5.1)$$

qui donne le déplacement du petit volume de fluide qui se trouvait au point \vec{x} à $t = 0$ (c.-à.-d. que $\vec{\psi}(\vec{x}, 0) = 0$).

Ondes acoustiques à une dimension

Dans la suite de cette partie, pour simplifier mathématiquement l'étude des ondes acoustiques, nous supposons que tous les champs caractérisant l'onde ne dépendent que d'une seule coordonnée x . Dans le cas où le milieu de propagation est infini, cela s'applique naturellement dans le cas où nous considérons uniquement une onde plane ; il suffit alors de prendre l'axe Ox parallèle au vecteur d'onde \vec{k} .

Cette hypothèse est aussi valable si nous considérons la propagation des ondes acoustiques dans un tuyau de section petite devant sa longueur, en négligeant les effets de bord provenant de la viscosité du fluide. Il suffit là encore de prendre l'axe Ox parallèle à l'axe du tuyau.

Forces de pression

Négligeant l'influence des forces visqueuses (frottements fluides) et de la gravitation, les forces s'exerçant sur un élément de fluide infinitésimal sont uniquement des forces de pression. Comme expliqué précédemment, on considère un tuyau, rempli de fluide, tel que l'aire de sa section est donnée par s . À une dimension, toutes les quantités vectorielles, comme les forces, deviennent des quantités *algébriques*, c.-à.-d. des nombres positifs ou négatifs.

En tout point du fluide on définit le champ de pression $P(x, t)$ de la manière habituelle. On note $F(x, t)$ la force (algébrique) au point x et à l'instant t exercée par la partie du fluide située dans la région $y < x$ sur le fluide dans la région $y > x$. Le champ de pression est alors défini par $F(x, t) = s \times P(x, t)$.

Force nette appliquée à un élément de fluide

Considérons un élément de volume de fluide d'épaisseur infinitésimale dx , délimité par deux faces d'aire s , situées en $x - \frac{dx}{2}$ et $x + \frac{dx}{2}$.

La somme des forces appliquées au système sera alors donnée par la somme des forces de pression sur les deux faces, voir figure 5.1. Ces forces appliquées au fluide seront dirigées vers l'intérieur de

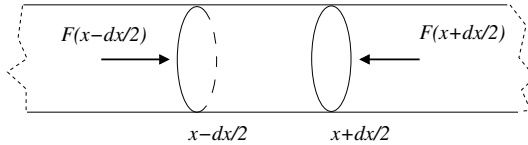


FIGURE 5.1 – Forces pressantes appliquées à l'élément de fluide.

l'élément de fluide. La force de pression sur la face située en $x - \frac{dx}{2}$ est donnée en termes du champ de pression par

$$F|_{x - \frac{dx}{2}} = P(x - \frac{dx}{2}, t) s \quad (5.2)$$

La force de pression sur la face opposée, située en $x + \frac{dx}{2}$, est orientée vers les x décroissants (car vers l'intérieur de l'élément de fluide) :

$$F|_{x + \frac{dx}{2}} = -P(x + \frac{dx}{2}, t) s \quad (5.3)$$

Additionnant les deux contributions des deux faces nous obtenons

$$F|_{x - \frac{dx}{2}} + F|_{x + \frac{dx}{2}} = [P(x - \frac{dx}{2}, t) - P(x + \frac{dx}{2}, t)]s \simeq -\frac{\partial P(x, t)}{\partial x} dx s \quad (5.4)$$

où nous avons supposé l'épaisseur de la tranche de fluide infinitésimale.

Principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique, à une dimension, pour l'élément de fluide soumis à des forces (algébriques) F_i s'écrit donc, dans le cas où les perturbations ne dépendent que d'une dimension :¹

$$m \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \sum_i F_i \quad (5.5)$$

La masse du système, constante par définition, est donnée par

$$m = \rho(x, t) \delta V = \rho s dx \quad (5.6)$$

en fonction de la masse volumique du fluide $\rho(x, t)$. En utilisant l'expression (5.4) pour les forces de pression s'exerçant sur l'élément de fluide, le principe fondamental de la dynamique donne l'équation suivante d'évolution :

$$\rho(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \quad (5.7)$$

Équation de conservation de la masse

Naturellement, l'écoulement du fluide doit être tel qu'il conserve le nombre de particules, c.-à.-d. qu'il conserve la masse. On peut considérer alors l'évolution de la masse de fluide contenue dans un élément de volume fixe infinitésimal, pendant un intervalle de temps infinitésimal. Par un raisonnement analogue à celui de la sous-section 5.1, on obtient l'équation locale de la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(x, t)v(x, t)] = 0 \quad (5.8)$$

Cette équation stipule que la variation de la masse dans l'élément infinitésimal est égale à la différence entre la masse entrante et la masse sortante.

La quantité $\rho(x, t)v(x, t)$, qui a la dimension d'une masse par unité de surface et par unité de temps, est identifiée avec le *flux de masse* de fluide à travers une section transverse du tuyau sonore.

Les équations fondamentales de la dynamique du fluide, éq. (5.7) et éq. (5.8), ne sont pas suffisantes pour caractériser complètement le fluide. Si toutes deux font intervenir le champ de vitesse, la première fait intervenir le champ de pression et la seconde le champ de densité. Pour obtenir une caractérisation complète du système il faut introduire une *équation d'état* liant la pression, la densité et la température du fluide.

1. En toute rigueur, le terme de gauche contient une dérivée *particulaire* par rapport au temps, qui comporte un terme supplémentaire dit d'*advection* : $dv/dt = \partial v/\partial t + (\partial v/\partial x)v$. En effet pour appliquer le PFD il est naturel de suivre l'évolution d'un élément de fluide, de contenu en particules et masse constantes, donc d'adopter la description lagrangienne. La dérivée particulaire correspond à la dérivée d'un champ lié à la description eulérienne (champ de vitesse) en description lagrangienne. Notons que, pour une onde se propageant dans un fluide statique dans l'approximation linéaire, ce terme supplémentaire ne joue pas de rôle.

La variation de masse pendant dt due à l'écoulement est donnée par la somme des flux de masse *entrants* à travers les deux faces pendant cet intervalle de temps. La masse proprement dite est donnée par (5.6). Considérons la face située en $x - \frac{dx}{2}$. Pendant un intervalle de temps dt la masse de fluide *entrant* par cette face est donnée par

$$\delta m \Big|_{x - \frac{dx}{2}} = \rho(x - \frac{dx}{2}, t) \times \underbrace{sv(x - \frac{dx}{2}, t)dt}_{\text{volume de fluide entrant pendant } dt} \quad (5.9)$$

en termes du champ de vitesse v , qui est orthogonal à la face considérée. De même la masse entrant par la face située en $x + \frac{dx}{2}$ est donnée par ^a

$$\delta m \Big|_{x + \frac{dx}{2}} = -\rho(x + \frac{dx}{2}, t) sv(x + \frac{dx}{2}, t)dt \quad (5.10)$$

Additionnant également les contributions des autres faces nous obtenons pour la variation de la masse pendant dt :

$$\begin{aligned} \frac{s \partial \rho(x, t) dx}{\partial t} dt &= [\rho(x - \frac{dx}{2}, t)v(x - \frac{dx}{2}, t) - \rho(x + \frac{dx}{2}, t)v(x + \frac{dx}{2}, t)] s dt \\ &\simeq -\frac{\partial [\rho(x, t)v(x, t)]}{\partial x} s dx dt \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement l'équation locale de la conservation de la masse (5.8).

^a. Le signe négatif est nécessaire pour prendre en compte le fluide entrant par cette face qui se déplace vers les x décroissants.

Perturbations linéaires d'un fluide au repos

Pour établir l'équation d'onde, considérons un fluide initialement au repos, c'est à dire tel que les champs de vitesse, pression et densité sont donnés en l'absence de perturbation par

$$\vec{v}_0(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad , \quad P(\vec{x}, t) = P_0 \quad , \quad \rho(\vec{x}, t) = \rho_0 \quad (5.11)$$

parcouru par une petite perturbation correspondant à un déplacement de fluide longitudinal à cette perturbation. Les champs de pression et densité sont alors paramétrés comme

$$P(\vec{x}, t) = P_0 + p(\vec{x}, t) \quad , \quad \rho(\vec{x}, t) = \rho_0 + \delta\rho(\vec{x}, t) \quad (5.12)$$

où nous supposons que $|p/P| \ll 1$, $|\delta\rho/\rho_0| \ll 1$.

Revenons maintenant à la propagation à une dimension. L'équation du mouvement (5.7) pour le champ de vitesse donne :

$$\left(\rho_0 + \delta\rho(x, t)\right) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \quad (5.13)$$

En linéarisant au premier ordre dans le champ de vitesse $v(x, t)$ et la surdensité $\delta\rho(x, t)$ on obtient simplement

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(x, t)}{\partial x}} \quad (5.14)$$

et la conservation de la masse donne

$$\boxed{\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0} \quad (5.15)$$

Ces relations ne sont plus valables lorsque le fluide s'écoule (par exemple en présence de vent).

5.2 Compressibilité et équation d'onde

Les équations fondamentales de la dynamique du fluide, éq. (5.14) et éq. (5.15), ne sont pas suffisantes pour caractériser complètement le fluide. Si toutes deux font intervenir le champ de vitesse, la première fait intervenir le champ de pression et la seconde le champ de densité. Pour obtenir une caractérisation complète du système il faut introduire une *équation d'état* liant la pression et la masse volumique du fluide. Cela nécessite d'introduire une description *thermodynamique* du fluide. Ces aspects sortant du cadre de ce cours, ils sont donnés uniquement en complément, dans l'encadré ci-dessous.

La quantité caractéristique du fluide nécessaire à l'établissement de son équation d'onde est sa *compressibilité*, autrement dit la manière dont un volume fluide réagit à une compression exercée sur les parois qui le bornent ; il s'agit d'une quantité analogue à la raideur d'un ressort. Il est donné par :

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_s \quad (5.16)$$

Où, en toute rigueur, nous devons préciser que l'entropie est maintenue constante lors du processus, voir l'encadré. Ce coefficient est considéré comme une constante caractérisant le fluide en question.

Pour obtenir une expression explicite du membre de droite de l'équation (5.16) nous considérons ici encore une tranche infinitésimale de fluide, d'épaisseur dx .

Pour cet élément de fluide la variation de pression correspond à la surpression $p(x, t)$. Le volume initial de fluide est donné par $\delta V_0 = s dx$. En présence d'un champ de déplacement $\psi(x, t)$ le volume devient

$$\begin{aligned} \delta V(x, t) &= s \left[x + \frac{dx}{2} + \psi\left(x + \frac{dx}{2}, t\right) - \left(x - \frac{dx}{2} + \psi\left(x - \frac{dx}{2}, t\right)\right) \right] \\ &\simeq \delta V_0 \left[1 + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

La variation relative de volume est donc donnée au premier ordre par

$$\frac{\delta V(x, t) - \delta V_0}{\delta V_0} = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \quad (5.18)$$

On obtient donc d'après la définition de la compressibilité isentropique que, pour les petites perturbations, la quantité suivante est constante

$$\chi_s = -\frac{1}{p(x, t)} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \quad (5.19)$$

Cela implique en particulier, en dérivant une fois par rapport au temps, que

$$\boxed{\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}} \quad (5.20)$$

Thermodynamique du fluide

Nous devons utiliser des relations thermodynamiques pour relier la surpression, les variations de densité et de température, et caractériser ainsi complètement le système.

On considère comme système un élément infinitésimal de fluide (description lagrangienne). Comme tout système thermodynamique, il est caractérisé par son énergie interne U . Sa variation infinitésimale est liée à la quantité de chaleur reçue et au travail exercé par les forces de pression appliquées au fluide :

$$dU = \delta Q - PdV \quad (5.21)$$

Si de plus la transformation est *réversible* la variation infinitésimale de son entropie est à la chaleur reçue par le système selon

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (5.22)$$

Cette hypothèse est raisonnable pour les ondes sonores qui n'impliquent pas de changement extrêmement brutaux dans le fluide. Nous pouvons faire aussi l'hypothèse que la faible perturbation induite par l'onde sonore n'induit pas de transfert de chaleur dans le fluide, c.-à.-d. que la transformation thermodynamique associée est adiabatique. Comme elle est en plus réversible, nous avons une transformation à entropie constante, ou *isentropique*. En effet

$$\delta Q = 0 \Leftrightarrow dS = 0 \quad (5.23)$$

dans ce cas. Pour une telle tranformation nous avons alors $dU + PdV = 0$.

Compressibilité

Il nous reste maintenant à introduire une relation entre les variables d'état du système, ou en d'autres termes une *équation d'état*. Nous choisissons comme variable d'état du système la pression P , le volume V et l'entropie S . Nous pouvons alors exprimer par exemple le volume en fonction de la pression et de l'entropie :

$$V = V(P, S) \implies dV = \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S dP + \left. \frac{\partial V}{\partial S} \right|_P dS \quad (5.24)$$

Lors d'une transformation isentropique, tel que nous l'avons supposé, nous avons $dS = 0$, ce qui implique que la variation infinitésimale de volume est simplement

$$dV = \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S dP \quad (5.25)$$

Nous pouvons alors introduire le coefficient de *compressibilité isentropique*^a, ou en d'autres termes la variation du volume du fluide en réponse à une variation de pression, par

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_s \quad (5.26)$$

On suppose que ce coefficient est une constante, ce qui est raisonnable pour les petites perturbations du fluides considérées ici.

^a. Pour une transformation à température fixée, on peut aussi définir une compressibilité isotherme.

Équation d'onde

Nous avons appris dans les pages précédentes qu'une onde sonore *de faible amplitude* à une dimension, dans un fluide au repos, est caractérisée par les trois équations fondamentales (PFD,

conservation de la masse, compressibilité) :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.27a)$$

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.27b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.27c)$$

Dérivons une fois par rapport au temps l'équation (5.27c). Au premier ordre dans le champ de vitesse nous obtenons la relation

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right) \quad (5.28)$$

En utilisant l'équation du mouvement (5.27a), on obtient alors

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \right] \quad (5.29)$$

Soit finalement

$$\boxed{\rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = 0} \quad (5.30)$$

Cette équation est identique à l'équation d'onde (ou de d'Alembert) à une dimension, pour la surpression. La célérité des ondes sonores, ou vitesse du son, est alors identifiée comme

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}} \quad (5.31)$$

Nous pouvons donc réécrire l'équation précédente comme :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (5.32)$$

Remarquons que la perturbation correspondant à une onde sonore est liée au déplacement $\vec{\psi}(\vec{x}, t)$ des éléments de fluide. Ce déplacement est parallèle à la direction de propagation de l'onde. Il s'agit donc d'un exemple d'*onde longitudinale*.

Contrairement aux ondes se propageant sur une corde, les ondes sonores sont de nature tridimensionnelle. En considérant des perturbations qui dépendent des trois coordonnées spatiales, on obtient naturellement l'équation de d'Alembert à trois dimensions :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta p(\vec{x}, t) = 0 \quad (5.33)$$

La forme de la solution générale dépend des symétries du problème, liées à la forme de la source émettrice de l'onde.

Considérons maintenant la dérivée par rapport au temps de l'équation (5.27a) et utilisons ensuite (5.27b) :

$$\partial_t^2 v = -\frac{1}{\rho_0} \partial_x (\partial_t p) = -\frac{1}{\rho_0} \partial_x \left(-\frac{1}{\chi_s} \partial_x v \right) = c^2 \partial_x^2 v \quad (5.34)$$

Ainsi nous observons que $v(x, t)$ satisfait également l'équation d'onde :

$$\boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0} \quad (5.35)$$

Remarquons cependant que cela n'est pas valable pour les ondes à trois dimensions comme les ondes sphériques.

Une autre conséquence importante des équations (5.27) est la relation suivante :

$$\partial_x v = -\chi_s \partial_t p = -\frac{1}{\rho_0} \partial_t \delta \rho \implies \partial_t \delta \rho = \rho_0 \chi_s \partial_t p \quad (5.36)$$

On obtient donc la relation $p(x, t) = c^2 \delta \rho(x, t) + \alpha(x)$. En imposant que l'onde s'annule pour $t \rightarrow \pm\infty$ (c.-à.-d. qu'elle n'existe que durant un intervalle fini de temps), on a $\alpha(x) = 0$. La relation obtenue

$$\boxed{p(x, t) = c^2 \delta \rho(x, t)} \quad (5.37)$$

est une manière de définir la vitesse du son.

Gaz parfait

Considérons maintenant le cas particulier d'un gaz parfait. Il satisfait l'équation d'état bien connue :

$$PV = Nk_B T \quad (5.38)$$

en fonction de la constante de Boltzmann k_B , et pour N particules. De plus, on peut montrer que lors d'une transformation à entropie constante, le gaz parfait vérifie la *loi de Laplace* :

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad (5.39)$$

Nous pouvons aisément calculer le coefficient de compressibilité isentropique. Nous avons

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{\gamma P} \quad (5.40)$$

Pour une onde sonore, la surpression p est faible devant la pression au repos P_0 . Nous avons donc

$$\chi_s \simeq \frac{1}{\gamma P_0} = \frac{1}{\gamma} \frac{V}{Nk_B T} \quad (5.41)$$

La célérité des ondes sonores est alors donnée par :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}} = \sqrt{\gamma k_B T \frac{N}{\rho_0 V}} \quad (5.42)$$

Cette expression fait apparaître la masse au repos $\rho_0 V$ de l'élément de fluide. En introduisant la masse molaire M des particules constituant le fluide, ainsi que la constante des gaz parfaits

$$R = N_A k_B \quad (5.43)$$

nous avons finalement

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}} \quad (5.44)$$

Nous voyons que plus la température est basse, plus la célérité du son est faible. C'est pour cela qu'il est plus facile pour les avions de passer les murs du son à haute altitude !

Donnons un ordre de grandeur de cette quantité. L'air est constitué d'un mélange de plusieurs gaz différents mais peut être modélisé comme un gaz parfait avec $\gamma = 1,4$ et de masse molaire $M = 28,95 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. À la température de $T = 293 \text{ Kelvins}$, on trouve une célérité de $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Loi de Laplace pour un gaz parfait Lors d'une transformation isentropique, nous avons

$$dU = -PdV = C_v dT \quad (5.45)$$

On considère aussi un deuxième potentiel thermodynamique, l'enthalpie H , approprié pour décrire les transformations à pression constante (plutôt qu'à volume constant) défini par $H = U + PV$. Il vérifie donc

$$dH = TdS + VdP \quad (5.46)$$

Pour une transformation isentropique nous avons simplement :

$$dH = VdP = C_p dT. \quad (5.47)$$

Nous avons introduit les capacités thermiques à volume constant et à pression constante définies par

$$C_v = T\partial S/\partial T|_V \quad \text{et} \quad C_p = T\partial S/\partial T|_P \quad (5.48)$$

En introduisant le coefficient

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad (5.49)$$

qui est constant pour un gaz parfait, on déduit de ces relations l'équation suivante

$$\gamma = -\frac{dP/P}{dV/V} \quad (5.50)$$

Ce qui implique $C_v(\gamma - 1)dT = d(PV) = Nk_B T$. Donc nous trouvons la relation

$$C_v(\gamma - 1) = Nk_B \quad (5.51)$$

On peut montrer que pour un gaz parfait monoatomique nous avons $C_v = \frac{3}{2}Nk_B$, alors que pour un gaz diatomique, $C_v = \frac{5}{2}Nk_B$. Dans les deux cas, le coefficient est égal à la moitié du nombre de degrés de liberté des constituants du gaz. Il s'en suit que γ est une constante, donc en intégrant (5.50) on trouve qu'une transformation isentropique d'un gaz parfait est telle que

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad (5.52)$$

le long de la transformation.

5.3 Tuyaux sonores

Nous abordons maintenant le problème des conditions aux limites pour les ondes acoustiques. Nous avons déjà fait cette étude pour la corde vibrante, mais dans le présent contexte on peut s'autoriser des conditions aux limites différentes. Dans toute la suite, on considèrera un écoulement à une dimension, dans un tuyau sonore de section d'aire s , voir fig. 5.2.

Si on considère que le tuyau est orienté selon l'axe Ox , et que la propagation s'effectue selon le même axe, la surpression $p(x, t)$ satisfait l'équation d'onde (2.1) à une dimension. L'onde est également caractérisée par le champ de déplacement $\psi(x, t)$ et le champ de vitesse $v(x, t)$. Toutes ces quantités ne dépendent pas des coordonnées y et z transverses à l'onde. Le champ de vitesse satisfait alors également l'équation d'onde

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (5.53)$$

où la célérité c de l'onde sonore est donnée par l'éq. (5.31), comme nous l'avons démontré plus haut.

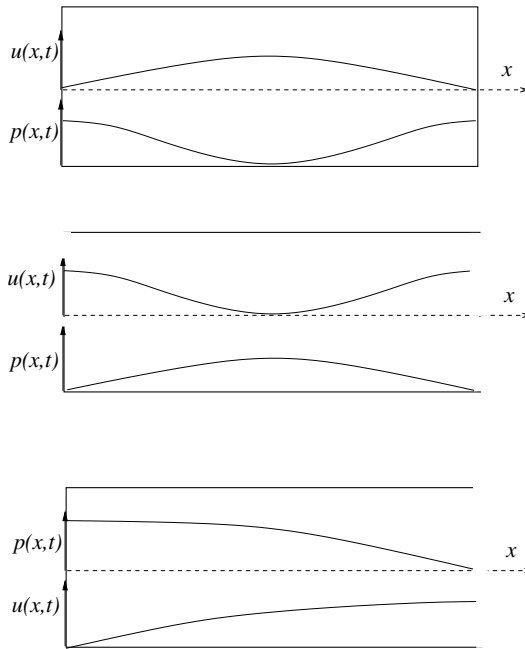


FIGURE 5.2 – Tuyau fermé (haut), ouvert (milieu) et semi-ouvert (bas).

La présence des parois latérales du tube n'impose pas de conditions sur l'onde qui se propage selon Ox , mais nous avons évidemment une discontinuité de l'écoulement car l'onde ne se propage pas en dehors du tube.² Nous pouvons distinguer alors trois types de tuyaux sonores possibles :

Tuyau fermé

On considère un tuyau dont les deux extrémités, en $x = 0$ et $x = L$, sont fermées par une paroi rigide. Comme celle-ci ne peut être mise en mouvement, le champ de déplacement est naturellement nul :

$$\psi(x = 0, t) = 0, \quad \psi(x = L, t) = 0 \quad \forall t \quad (5.54)$$

² Nous avons en effet négligé les effets des frottements, qui dans la pratique vont coupler l'onde sonore aux parois du tube.

Ces relations étant vérifiées à tout instant, nous avons également pour le champ de vitesse

$$v(x = 0, t) = 0, \quad v(x = L, t) = 0 \quad \forall t \quad (5.55)$$

Nous avons donc obtenu des *nœuds* aux deux extrémités de la corde. Partant d'une solution générale de l'équation d'onde pour le champ de vitesse

$$v(x, t) = v_-(x - ct) + v_+(x + ct) \quad (5.56)$$

l'analyse est strictement identique à celle effectuée pour la corde vibrante, voir sec. 4.2. Nous obtenons des *ondes stationnaires*, dont les fréquences propres ν_n sont données par l'éq. (4.32). La solution générale du problème est une superposition de modes de la forme :

$$v_n(x, t) = A_n \sin(2\pi\nu_n t + \phi_n) \sin\left(\frac{2\pi\nu_n}{c} x\right) \quad (5.57)$$

Comme précédemment les nœuds pour le champ de vitesse sont situés en $x_a = aL/n$, $\ell = 0, \dots, n$ et les ventres en $x_a = (a + \frac{1}{2})L/n$, $\ell = 0, \dots, n - 1$. La relation (5.20) nous apprend que le champ de supression satisfait pour ce mode

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{2\pi\nu_n}{\chi_{sc}} A_n \sin(2\pi\nu_n t + \phi_n) \cos\left(\frac{2\pi\nu_n}{c} x\right) \quad (5.58)$$

Nous savons que la valeur moyenne dans le temps de la supression doit être nulle en tout point, car l'onde est sinusoïdale. En intégrant cette dernière équation par rapport au temps, et en utilisant l'expression (5.31) pour la célérité, on trouve

$$p(x, t) = \rho_0 c A_n \cos(2\pi\nu_n t + \phi_n) \cos\left(\frac{2\pi\nu_n}{c} x\right) \quad (5.59)$$

Nous observons alors que les nœuds pour le champ de vitesse $u(x, t)$ sont des ventres pour le champ de supression, et inversement. Le premier satisfait des conditions aux limites dites *de Dirichlet*, et le second des conditions aux limites dites *de von Neumann*. Ces dernières imposent que

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0, t} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=L, t} = 0 \quad (5.60)$$

Elles indiquent qu'il n'y a pas de force pressante nette appliquée à l'élément de fluide situé contre la paroi.

Tuyau ouvert

Nous considérons maintenant un tuyau ouvert aux deux extrémités. L'onde est alors mise en contact avec un grand réservoir de pression (au sens thermodynamique du terme) à la pression atmosphérique P_0 . Il est alors naturel d'imposer que la supression s'annule :

$$p(x = 0, t) = 0, \quad p(x = L, t) = 0 \quad (5.61)$$

Nous avons donc des conditions de *Dirichlet* pour la supression – et non pour la vitesse comme dans le cas précédent. On peut utiliser les résultats précédents pour écrire les modes propres de supression

$$p_n(x, t) = B_n \sin(2\pi\nu_n t + \phi_n) \sin\left(\frac{2\pi\nu_n}{c} x\right) \quad (5.62)$$

ainsi que ceux de vitesse :

$$v_n(x, t) = \frac{B_n}{\rho_0 c} \cos(2\pi\nu_n t + \phi_n) \cos\left(\frac{2\pi\nu_n}{c} x\right) \quad (5.63)$$

Nous voyons que le champ de vitesse satisfait des conditions aux limites de von Neumann, même si ce n'est pas nécessairement très intuitif.

Tuyau semi-ouvert

Considérons maintenant le dernier cas, le plus intéressant. On choisit un tuyau sonore dont l'une des extrémités, en $x = 0$, est fermée et l'autre, en $x = L$ est ouverte. Le champ de vitesse satisfait alors des conditions aux limites mixtes : Dirichlet en $x = 0$ et von Neumann en $x = L$:

$$v(x = 0, t) = 0 \quad (5.64a)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=L,t} = 0 \quad (5.64b)$$

De manière équivalente, nous imposons que $v(x = 0, t) = 0$ et $p(x = L, t) = 0$.

L'analyse des solutions sinusoïdales de ces conditions est similaire à celle des autres exemples. Partons en notation complexe d'une solution sinusoïdale monochromatique générique

$$\tilde{v}(x, t) = \tilde{A}_- e^{i(\omega t - kx)} + \tilde{A}_+ e^{i(\omega t + kx)} \quad (5.65)$$

La première condition, éq (5.64a), impose $\tilde{A}_- = -\tilde{A}_+ = \tilde{A}$, soit que nous ayons une onde stationnaire de la forme

$$\tilde{v}(x, t) = 2i\tilde{A} e^{i\omega t} \sin(kx) \quad (5.66)$$

La deuxième condition, éq (5.64b), se réduit à

$$\cos(k_n L) = 0 \implies k_n = \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{L}, n \in \mathbb{N} \quad (5.67)$$

Les fréquences propres sont alors

$$\nu_n = \frac{(n + \frac{1}{2})c}{2L} \quad (5.68)$$

Nous observons que la plus petite fréquence possible est deux fois plus petite que dans le cas d'un tuyau ouvert ou fermé. Dans le contexte musical, c'est intéressant pour obtenir des sons graves sans allonger démesurément la taille du tuyau (par exemple pour un orgue).

Il est facile de voir que le point $x = 0$ est un nœud de vitesse et un ventre de surpression. De manière analogue le point $x = L$ est un nœud de surpression et un ventre de vitesse.

5.4 Énergie

Comme pour les cordes vibrantes, nous pouvons, au lieu de la dynamique du système, considérer l'énergie mécanique contenue dans l'onde sonore. Cette énergie, supposant le système conservatif, se compose d'une partie cinétique et d'une partie potentielle. Dans l'hypothèse de l'hydrodynamique linéaire que nous avons adoptée, l'énergie cinétique d'un élément infinitésimal de fluide située en \vec{x} , parcourue par une onde sonore mais initialement au repos, est donnée par :

$$\delta E_c(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0}{2} \|\vec{v}(\vec{x}, t)\|^2 dx dy dz \quad (5.69)$$

En divisant par le volume $dx dy dz$ on trouve la *densité volumique d'énergie cinétique* :

$$e_c(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0}{2} \|\vec{v}(\vec{x}, t)\|^2 \quad (5.70)$$

La *densité volumique d'énergie potentielle* du fluide est plus délicate à obtenir. On admettra qu'elle est donnée par :

$$e_p(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \chi_s p^2(\vec{x}, t) \quad (5.71)$$

On en déduit alors la densité volumique d'énergie mécanique :

$$e_m(\vec{x}, t) = \frac{\rho_0}{2} \|\vec{v}(\vec{x}, t)\|^2 + \frac{1}{2} \chi_s p^2(\vec{x}, t) \quad (5.72)$$

Dans le cas où les ondes se propagent à une seule dimension, on vérifie aisément que

$$\frac{\partial}{\partial t} e_m(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [p(x, t) v(x, t)] \quad (5.73)$$

ce qui définit le courant d'énergie mécanique de l'onde sonore, appelé aussi *puissance transportée par unité de surface d'onde*

$$j_m(x, t) = p(x, t) v(x, t) \quad (5.74)$$

cette quantité s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. Il s'agit donc d'un flux d'énergie.

Un calcul similaire à trois dimensions donne la formule

$$\vec{j}_m(\vec{x}, t) = p(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) \quad (5.75)$$

La conservation de l'énergie mécanique globale de l'onde, définie par l'intégrale de la densité d'énergie sur le volume

$$E_m = \iiint (e_c(\vec{x}) + e_p(\vec{x})) dV, \quad (5.76)$$

est assurée par le théorème d'Ostrogradski, si les conditions aux limites sont bien choisies.

Impédance acoustique

Les deux grandeurs caractérisant une onde acoustique, surpression $p(\vec{x}, t)$ et vitesse de déplacement moyenne des molécules de fluide $\vec{v}(\vec{x}, t)$, peuvent être employées indifféremment pour décrire sa propagation.

Considérons une onde *progressive* à une dimension, se propageant selon Ox dont la surpression et la vitesse sont notées respectivement $p_-(x, t)$ et $v_-(x, t)$. La surpression étant de la forme $p_-(x, t) = f(x - ct)$, on remarque alors que

$$\begin{cases} \frac{\partial p_-(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial f(x-ct)}{\partial x} = f'(x-ct) \\ \frac{\partial p_-(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(x-ct)}{\partial t} = -c f'(x-ct) \end{cases} \implies \frac{\partial p_-}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial p_-}{\partial t} \quad (5.77)$$

Le principe fondamental de la dynamique (5.27a) implique alors que

$$\frac{\partial v_-}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_-}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 c} \frac{\partial p_-}{\partial t} \implies \frac{\partial}{\partial t} \left[v_-(x, t) - \frac{1}{\rho_0 c} p_-(x, t) \right] = 0 \quad (5.78)$$

En supposant que l'onde s'annule en $t = \pm\infty$, on en déduit que

$$p_-(x, t) = Z v_-(x, t) \quad (5.79)$$

où nous avons introduit l'*impédance acoustique caractéristique* du fluide définie par

$$Z = \rho_0 c = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s}}, \quad (5.80)$$

qui est comme son nom l'indique caractéristique du milieu de propagation.

Insistons sur le fait que la relation (5.79) est valable *uniquement pour une onde progressive*, indépendamment du fait qu'elle soit sinusoïdale ou non (il est aisé de le montrer). Pour une onde régressive, on trouve la relation suivante :

$$p_+(x, t) = -Zv_+(x, t) \quad (5.81)$$

En termes de cette impédance acoustique, on peut réécrire la densité d'énergie mécanique d'une onde *progressive* de la façon suivante :

$$e_m = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\chi_s p^2 = \frac{1}{2}[\rho_0 + \chi_s Z^2] v^2 \implies \boxed{e_m = \rho_0 v^2} \quad (5.82)$$

qui peut aussi s'écrire

$$e_m = \frac{\rho_0}{Z^2} p^2 = \chi_s p^2 \quad (5.83)$$

nous voyons que l'énergie mécanique est distribuée également entre énergie potentielle et cinétique dans le cas d'une onde progressive.

Onde sinusoïdale

Considérons maintenant le cas d'une onde progressive et sinusoïdale. Nous avons alors en notation complexe et réelle :

$$\tilde{p}_-(x, t) = \tilde{\mathcal{P}} e^{i(\omega t - kx)} \implies p_-(x, t) = \mathcal{P} \cos(\omega t - kx + \phi) \quad (5.84)$$

La relation (5.27c) implique alors que le champ de vitesse s'écrit

$$\tilde{v}_-(x, t) = \chi_s \frac{i\omega}{ik} \tilde{\mathcal{P}} e^{i(\omega t - kx)} \implies v_-(x, t) = \chi c \mathcal{P} \cos(\omega t - kx + \phi) \quad (5.85)$$

et on retrouve bien la relation (5.79).

Intensité acoustique

Pour une onde progressive sinusoïdale, la quantité importante physiquement est la valeur moyenne dans le temps de la puissance transportée par unité de surface $\vec{j}_m(\vec{x}, t)$. Cette quantité s'appelle *vecteur intensité acoustique*, notée \vec{I} .

Commençons par considérer une onde plane progressive, dont le vecteur d'onde est orienté selon Ox . Nous avons

$$I = \langle j_m \rangle_t = \langle p(x, t) v_x(x, t) \rangle_t = \frac{1}{Z} \langle p(x, t)^2 \rangle_t \quad (5.86)$$

En utilisant la forme (5.84) on obtient

$$I = \langle j_m \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathcal{P}^2 \cos^2(\omega t - kx + \phi) \implies \boxed{I = \frac{\mathcal{P}^2}{2Z}} \quad (5.87)$$

où \mathcal{P} est l'amplitude de la surpression. En termes de l'amplitude \mathcal{U} de la vitesse on peut réécrire ce résultat comme

$$\boxed{I = \frac{1}{2} Z \mathcal{U}^2} \quad (5.88)$$

On remarque que la quantité obtenue est *indépendante* de la position x où celle-ci est mesurée. C'est une caractéristique particulière des ondes planes.

Ondes sphériques

Considérons le cas des ondes sphériques. La surpression associée à une onde sphérique sortante sinusoïdale est de la forme

$$p(r, t) = \frac{\mathcal{A}}{r} \cos(\omega t - \kappa r + \phi) \quad (5.89)$$

La puissance transportée est toujours donnée par l'équation (5.75), mais la relation entre surpression et vitesse est différente, sauf à des distances grandes devant λ . En suivant l'analyse donnée en complément de cette partie, on obtient

$$\boxed{\vec{I}(r) = \frac{\mathcal{A}^2}{2Z} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r} \quad (5.90)$$

Contrairement à une onde plane, l'intensité acoustique dépend de la distance à la source comme $1/r^2$. On oubliera souvent la nature vectorielle de cette quantité en s'intéressant à sa norme $I(r)$.

Pour comprendre la signification de ce résultat, calculons la puissance totale acoustique contenue dans une sphère \mathcal{S} de rayon r_0 centrée à l'origine où se trouve la source des ondes. Cette puissance \mathfrak{P} est donnée par³

$$\mathfrak{P} = \iint_{\mathcal{S}} I(r_0) dS = r_0^2 \int d\Omega I(r_0) = 4\pi \frac{\mathcal{A}^2}{2Z} \quad (5.91)$$

Nous trouvons que cette puissance est *indépendante* de la distance à la source, ce qui reflète naturellement la conservation de l'énergie (comme l'onde n'est pas atténuée par sa propagation dans le milieu). Ce résultat explique que l'intensité acoustique décroisse comme $1/r^2$ avec la distance à la source.

3. À une distance r_0 de l'origine, l'angle solide $d\Omega$ est défini comme $d\Omega = \frac{dS}{r_0^2}$, où dS est l'aire de l'élément de surface sur la sphère de rayon r_0 . L'angle solide total pour la sphère est 4π .

Ondes sphériques acoustiques

On considère une onde progressive sphérique quelconque, de la forme

$$p(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} f(t - r/c) \quad (5.92)$$

Le champ de vitesse étant radial, il est relié à la surpression par :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \operatorname{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\chi_s} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 v_r(r, t)] \quad (5.93)$$

On en déduit l'équation

$$\frac{\partial}{\partial r} [r^2 v_r(r, t)] = -\chi_s r f'(t - r/c) \quad (5.94)$$

Considérons maintenant le cas d'une onde sinusoïdale, c.-à.-d. telle que

$$f(t - r/c) = \mathcal{A} \cos [\omega(t - r/c) + \phi] \quad (5.95)$$

On obtient alors en intégrant l'expression suivante pour le champ de vitesse :

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{1}{Z} \mathcal{A} \frac{1}{r} \left\{ \cos [\omega(t - r/c) + \phi] + \frac{\lambda}{2\pi r} \sin [\omega(t - r/c) + \phi] \right\} \vec{e}_r \quad (5.96)$$

Cette expression contient deux termes qui sont en quadrature de phase. Dans la *zone de rayonnement*, telle que $r \gg \lambda$, le deuxième terme est négligeable et on retrouve une relation analogue au cas unidimensionnel :

$$\vec{v}(\vec{x}, t) \stackrel{r \gg \lambda}{\simeq} \frac{1}{Z} p(\vec{x}, t) \vec{e}_r \quad (5.97)$$

Calculons maintenant l'intensité acoustique associée à cette onde. Partant de (5.95) et de (5.97) on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{I} = \langle p\vec{v} \rangle_t = \vec{e}_r \frac{\mathcal{A}^2}{Z} \frac{1}{r^2} \left\{ \langle \cos^2 [\omega(t - r/c) + \phi] \rangle_t \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{2\pi r} \langle \cos [\omega(t - r/c) + \phi] \sin [\omega(t - r/c) + \phi] \rangle_t \right\} \end{aligned}$$

la valeur moyenne du premier terme donne 1/2 et celle du deuxième terme donne zéro.

Niveau d'intensité sonore

Les intensités acoustiques mises en jeu par les ondes sonores varient sur plusieurs ordre de grandeur, même dans la vie courante. Cela se reflète dans la réponse logarithmique de l'appareil auditif au son. Il est donc commode d'utiliser une échelle logarithmique pour exprimer l'intensité sonore. On introduit ainsi le niveau d'intensité sonore L défini comme :

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (5.98)$$

où nous utilisons le logarithme *décimal*. L'intensité acoustique est définie par rapport à une intensité de référence I_0 . Conventionnellement, celle-ci est choisie comme

$$I_0 = 10^{-12} \text{W} \cdot \text{m}^2 \quad (5.99)$$

et correspond à peu près au seuil d'audibilité humain à une fréquence de 1000 Hz. Le niveau d'intensité sonore L est sans dimension, néanmoins il s'exprime dans une unité appelée le *décibel* (dB). Donnons quelques ordres de grandeur :

- pièce très calme : 20 dB
- conversation à une distance d'un mètre : 50 dB
- grande route à 10 m de distance : 80 dB
- atteinte de l'appareil auditif à court terme : 120 dB

5.5 Interface entre deux fluides

Pour finir ce chapitre sur les ondes acoustiques, nous allons examiner le problème de la transmission d'ondes acoustiques à travers une interface entre deux fluides. Nous avons déjà abordé ce phénomène pour les cordes vibrantes, voir la sous-section 4.4. De manière générale on considèrera

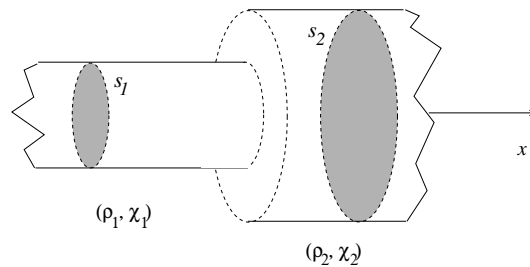


FIGURE 5.3 – Jonction de deux tuyaux sonores.

une interface entre deux tuyaux, voir figure 5.3. Les ondes acoustiques se propagent alors uniquement selon l'axe Ox , et sont caractérisées par la surpression $p(x, t)$ et $v(x, t)$, la composante de la vitesse selon Ox . Pour $x < 0$ l'onde se propage dans un tuyau de section s_1 contenant un fluide de masse volumique au repos ρ_1 et de compressibilité isentropique χ_1 , et pour $x > 0$ dans un tuyau de section s_2 contenant un fluide de masse volumique ρ_2 et de compressibilité χ_2 .

Comme pour les cordes vibrantes, nous supposons qu'une onde plane sinusoïdale est émise en une valeur de x négative, dans la direction des x croissants. Cette onde, l'onde incidente, s'écrit en notation complexe

$$\tilde{p}_1(x, t) = \tilde{A}_1 e^{i\omega(t-x/c_1)} \quad \text{pour } x < 0 \quad (5.100)$$

en termes de la célérité de l'onde dans le premier fluide :

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \chi_1}} \quad (5.101)$$

Au niveau de l'interface une onde réfléchie et une onde transmise sont naturellement générées :

$$\tilde{p}_R(x, t) = \tilde{A}_R e^{i\omega(t+x/c_1)} \quad \text{pour } x < 0 \quad (5.102a)$$

$$\tilde{p}_T(x, t) = \tilde{A}_T e^{i\omega(t-x/c_2)} \quad \text{pour } x > 0 \quad (5.102b)$$

où naturellement la célérité des ondes dans le deuxième fluide $c_2 = 1/\sqrt{\rho_2\chi_2}$ intervient pour l'onde transmise (5.102b).

En utilisant les équations (5.79,5.81) nous en déduisons simplement les expressions des champs de vitesse correspondants :

$$\tilde{v}_I(x, t) = \frac{1}{Z_1} \tilde{p}_I(x, t), \quad \tilde{v}_R(x, t) = -\frac{1}{Z_1} \tilde{p}_R(x, t), \quad \tilde{v}_T(x, t) = \frac{1}{Z_2} \tilde{p}_T(x, t), \quad (5.103)$$

Conditions de raccordement

Il nous faut maintenant comprendre quelles sont les *conditions de raccordement* reliant les ondes présentes pour $x < 0$ (ondes incidentes et réfléchies) et pour $x > 0$ (onde transmise).

Premièrement, les deux fluides étant en contact à travers une interface de masse nulle (comme dans le cas des cordes vibrantes) et rigide, la somme des forces appliquées à tout élément de surface de l'interface doit être nulle, donc la pression est la même des deux côtés. Nous obtenons donc la condition de *continuité de la supression*

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} P(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} P(x, t) \implies \tilde{A}_I + \tilde{A}_R = \tilde{A}_T} \quad (5.104)$$

Conservation du débit

La puissance transportée par une onde acoustique dans un tuyau de section s est donnée par

$$\mathfrak{P}(x, t) = s j_m(x, t) = s v(x, t) \times p(x, t) \quad (5.105)$$

Il est naturel de considérer que la puissance transportée est conservée à travers l'interface, car nous supposons que cette dernière ne dissipe pas d'énergie. La supression étant continue comme nous venons de le voir, nous voyons que la quantité appelée *débit acoustique*

$$D(x, t) = s v(x, t) \quad (5.106)$$

est conservée à travers l'interface entre les deux fluides. Notons que $\rho_0 D(x_0, t) dt$ représente (dans l'approximation acoustique) la masse de fluide passant à travers la surface de section s située en $x = x_0$, pendant un intervalle de temps infinitésimal dt .

Nous imposons maintenant la conservation du débit acoustique à travers l'interface entre les deux fluides. On obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} D_1(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} D_2(x, t) \implies \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} s_1 v(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} s_2 v(x, t)} \quad (5.107)$$

En utilisant les relations (5.103) entre les champs de vitesse et de supression On obtient que la supression satisfait une deuxième relation de continuité :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{s_1}{Z_1} (\tilde{p}_i(x, t) - \tilde{p}_r(x, t)) = \frac{s_2}{Z_2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{p}_t(x, t)} \quad (5.108)$$

Ce qui donne pour les amplitudes complexes

$$\boxed{\frac{s_1 \tilde{A}_i}{Z_1} - \frac{s_1 \tilde{A}_r}{Z_1} = \frac{s_2 \tilde{A}_t}{Z_2}} \quad (5.109)$$

Impédance hydraulique

Nous pouvons réécrire ce résultat en introduisant une notion d'*impédance hydraulique*, qui est spécifique aux ondes acoustiques se propageant dans un tuyau. Appelant s la section de ce tuyau elle est définie par

$$\mathfrak{z} = \frac{Z}{s} = \frac{\rho_0 c}{s} \quad (5.110)$$

En termes de cette quantité la relation de continuité précédente s'écrit

$$\frac{\tilde{P}_i}{\mathfrak{z}_1} - \frac{\tilde{P}_r}{\mathfrak{z}_1} = \frac{\tilde{P}_t}{\mathfrak{z}_2} \quad (5.111)$$

Cette notion est importante car à l'interface de deux tuyaux de section différente, mais composés du même fluide, il existe un phénomène de réflexion des ondes acoustiques.

Coefficients de réflexion et transmission

Finalement, en combinant les relations (5.104,5.109) nous obtenons les coefficients de réflexion r et transmission t en amplitude *pour la surpression* :

$$r = \frac{\tilde{A}_r}{\tilde{A}_i} = \frac{\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \quad (5.112a)$$

$$\tau = \frac{\tilde{A}_t}{\tilde{A}_i} = \frac{2\mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \quad (5.112b)$$

Lorsque nous considérons le passage d'une onde plane entre deux milieux infinis, la surface de la section est évidemment introduite artificiellement et n'apparaît pas dans le résultat final. En égalant la surface (fictive) dans chacun des deux milieux, on obtient les coefficients de réflexion et transmission en fonction des impédances caractéristiques des deux fluides :

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (5.113a)$$

$$t = \frac{\tilde{A}_t}{\tilde{A}_i} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (5.113b)$$

Remarquons que le calcul des coefficients de réflexion et transmission pour la vitesse donne un résultat différent :

$$r_v = \frac{\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \quad (5.114a)$$

$$\tau_v = \frac{2\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \quad (5.114b)$$

qui se démontre de manière similaire.

Prenons l'exemple de l'interface entre deux tuyaux, de diamètres respectifs d et αd , contenant le même fluide. À la position du changement de diamètre, on trouve les coefficients de réflexion et transmission suivants :

$$r = \frac{\frac{4\rho_0 c}{\pi(\alpha d)^2} - \frac{4\rho_0 c}{\pi d^2}}{\frac{4\rho_0 c}{\pi(\alpha d)^2} + \frac{4\rho_0 c}{\pi d^2}} = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \quad (5.115a)$$

$$\tau = \frac{2\frac{4\rho_0 c}{\pi(\alpha d)^2}}{\frac{4\rho_0 c}{\pi(\alpha d)^2} + \frac{4\rho_0 c}{\pi d^2}} = \frac{2}{1 + \alpha^2} \quad (5.115b)$$

$$(5.115c)$$

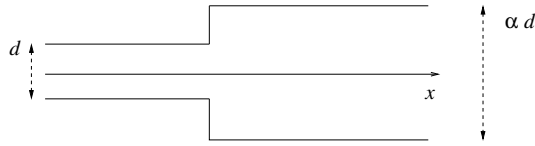


FIGURE 5.4 – Changement de section dans un tuyau sonore.

Le résultat ne dépend que de α qui est le seul paramètre sans dimension du système. Lorsque le diamètre du deuxième tuyau tend vers l'infini, on trouve $r \rightarrow -1$ et $\tau \rightarrow 0$, ce qui correspond aux conditions aux limites pour la surpression aux extrémités d'un tuyau ouvert comme il se doit.

Coefficients de réflexion et transmission en énergie

Il est souvent utile de considérer les coefficients de réflexion et transmission pour la puissance transportée par l'onde acoustique dans le tuyau, donnée par (5.105).

Les amplitudes des puissances acoustiques incidente, réfléchie et transmise sont respectivement notées \mathfrak{P}_i , \mathfrak{P}_r et \mathfrak{P}_t .

En utilisant la relation (5.87) entre l'intensité acoustique et l'amplitude de surpression, on obtient les coefficients de réflexion \mathcal{R} et de transmission \mathcal{T} en intensité :

$$\mathcal{R} = \frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_i} = \frac{A_r^2/\mathfrak{z}_1}{A_i^2/\mathfrak{z}_1} = \frac{A_r^2}{A_i^2} = r^2 = \left(\frac{\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2} \right)^2 \quad (5.116a)$$

$$\mathcal{T} = \frac{\mathfrak{P}_t}{\mathfrak{P}_i} = \frac{A_t^2/\mathfrak{z}_2}{A_i^2/\mathfrak{z}_1} = \frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2} \frac{A_t^2}{A_i^2} = \frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_2} \tau^2 = \frac{4\mathfrak{z}_1\mathfrak{z}_2}{(\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2)^2} \quad (5.116b)$$

Ces coefficients de réflexion et de transmission en énergie satisfont naturellement la relation $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$.

Interface eau-air

Prenons comme exemple l'interface entre l'air atmosphérique et l'eau. En utilisant les valeurs de la masse volumique et de la célérité des ondes sonores dans l'air (on peut utiliser l'approximation des gaz parfaits pour cela), l'ordre de grandeur de l'impédance acoustique de l'air est

$$Z_{\text{AIR}} \simeq 430 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1} \quad (5.117)$$

L'impédance acoustique de l'eau est de l'ordre de

$$Z_{\text{EAU}} \simeq 1,5 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1} \quad (5.118)$$

On trouve donc pour les coefficients de réflexion et transmission (de l'air vers l'eau)

$$\mathcal{R} \simeq 0,999 \quad , \quad \mathcal{T} \simeq 0,001 \quad (5.119)$$

Une très faible fraction de l'énergie de l'onde incidente est donc transmise dans l'eau. C'est pour cela que l'on entend si mal ce qui se passe en surface lorsqu'on est dans l'eau.

Chapitre 6

Ondes lumineuses

Le dernier exemple physique d'ondes étudié dans ce cours est donné par les ondes lumineuses. Ces dernières correspondent à des combinaisons d'ondes électromagnétiques sinusoïdales, lorsque leur longueur d'onde se situe dans le *domaine visible* où l'œil est sensible :

$$400 \text{ nm} < \lambda < 700 \text{ nm}, \quad (6.1)$$

ou un peu au-delà (proche infrarouge et proche UV), ce qui permet de les « manipuler » avec des composants optiques. Dans le cadre de ce cours nous considérerons peu les conséquences de la nature vectorielle des ondes électromagnétiques (polarisation) donc nous pourrions réutiliser la plupart des résultats obtenus lors de l'étude des ondes acoustiques. Les calculs étant similaires, seuls les différences physiques entre les deux contextes seront mises en avant.

6.1 Description physique des ondes lumineuses

Le champ électromagnétique est décrit par deux grandeurs vectorielles, le champ électrique noté $\vec{E}(\vec{x}, t)$ et le champ magnétique $\vec{B}(\vec{x}, t)$. Leur dynamique est donnée par les *équations de Maxwell*, qui sortent du programme de ce cours. On peut montrer que ces équations impliquent que les champs électriques et magnétiques dans le vide obéissent chacun à l'équation de d'Alembert à trois dimensions :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad (6.2a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{0} \quad (6.2b)$$

Nous pouvons donc utiliser les techniques développées dans ce cours pour les étudier.

La nature vectorielle des champs électriques et magnétiques rend leur étude délicate. On peut montrer à l'aide des équations de Maxwell dans le vide ($\text{div} \vec{E} = 0$ et $\text{div} \vec{B} = 0$) que ces ondes sont *transverses*, c.-à.-d. que les vecteurs \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux à la direction de propagation, et orthogonaux entre eux.

Particularités des ondes électromagnétiques

Il est à noter plusieurs différences fondamentales entre les ondes électromagnétiques et les ondes mécaniques :

- les ondes électromagnétiques n'ont pas besoin de support matériel, elles se propagent en particulier dans le vide ;

- les équations d'onde dans le vide (6.2) pour le champ électromagnétique sont *exactes*, contrairement aux ondes mécaniques pour lesquelles nous avons fait l'approximation de petites perturbations du milieu matériel¹ ;
- alors que les ondes mécaniques correspondent à un comportement collectif, au niveau macroscopique, d'un système microscopique complexe (composé d'atomes, de molécules...) les ondes électromagnétiques correspondent à de véritables degrés de liberté « microscopiques » de la physique ;
- la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide est la même dans tout référentiel d'inertie, en cohérence avec l'absence de référentiel privilégié lié à un milieu de propagation.

Célérité des ondes électromagnétiques

La célérité des ondes électromagnétiques dans le vide, appelée communément *vitesse de la lumière*, est une constante fondamentale de la Nature. Elle est environ égale à

$$c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (6.3)$$

Nous observons que l'ordre de grandeur de cette célérité est bien supérieur à ceux correspondant aux ondes mécaniques comme les ondes sur les cordes vibrantes ou les ondes acoustiques.

Indice optique d'un milieu

La propagation des ondes électromagnétique dans un milieu matériel est un sujet extrêmement riche et complexe. En effet les champs électriques et magnétiques de l'onde vont interagir avec les noyaux et électrons composant la matière. Pour simplifier les choses nous considérons seulement la propagation dans les milieux dits *dielectriques* (pour lesquels le déplacement macroscopique de charges électriques est impossible).² Lorsque l'amplitude des ondes électromagnétiques n'est pas trop élevée, les équations d'ondes (6.2) sont toujours satisfaites, mais avec une célérité différente.

La célérité \hat{c} dans un milieu matériel est liée à la célérité dans le vide c par :

$$\hat{c} = \frac{c}{n} \quad , \quad n > 1 \quad (6.4)$$

La quantité n , qui est un nombre sans dimension, est l'*indice* du milieu considéré. La célérité dans le vide étant la plus grande possible, cette quantité est toujours supérieure à un. Donnons quelques exemples :

- pour l'air dans les conditions normales de température et de pression, l'indice est $n = 1,0002926$
- pour de l'eau, $n = 1,3$
- pour du verre ordinaire, $n \simeq 1,5$
- verres speciaux au lanthane pour l'optique, $n \simeq 1,8$

L'indice d'un milieu dépend en principe de la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique sinusoidale qui le traverse. Ce phénomène, appelé *dispersion*, est plus ou moins prononcé selon les matériaux. Il sert à expliquer en particulier le mécanisme de séparation des couleurs par un prisme. Cet effet ne sera pas considéré dans ce cours. Un autre effet négligé est l'absorption des ondes lumineuses car le milieu n'est jamais parfaitement transparent.

1. Par contre pour des ondes électromagnétiques dans un milieu matériel une telle approximation est nécessaire car des phénomènes non-linéaires peuvent apparaître pour des amplitudes élevées.

2. Nous supposons que ce milieu est isotrope, de telle sorte que la vitesse de propagation soit indépendante de la direction de propagation et de la polarisation de l'onde.

6.2 Ondes lumineuses planes dans le vide et polarisation

Considérons une onde électromagnétique plane dans le vide. Les champs électriques et magnétiques étant liés entre eux par les équations de Maxwell, il suffit de considérer l'un d'entre eux pour avoir une description complète du système ; nous choisissons ici le champ électrique.

L'équation d'onde (6.2) pour le champ électrique admet des solutions d'ondes planes vectorielles. En notation complexe on obtient :

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{x}, t) = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad (6.5)$$

de telle sorte que la direction de propagation est donnée par le vecteur d'onde \vec{k} . Une onde lumineuse progressive sinusoidale est appelée *onde monochromatique*.

La relation de dispersion qui lie la pulsation et le vecteur d'onde est sans surprise

$$\frac{\omega^2}{\|\vec{k}\|^2} = c^2 \quad (6.6)$$

L'amplitude complexe de l'onde est maintenant un vecteur $\tilde{\vec{E}}_0$ dont les 3 composantes sont des nombres complexes constants. La condition de transversalité des ondes électromagnétiques évoquée plus haut s'écrit alors comme³

$$\vec{k} \cdot \tilde{\vec{E}}(\vec{x}, t) = 0 \implies \vec{k} \cdot \tilde{\vec{E}}_0 = 0 \quad (6.7)$$

Pour simplifier nous pouvons considérer une onde se propageant selon Ox , c.-à.-d. telle que $\vec{k} = k\vec{e}_x$ avec $k > 0$. L'onde est alors caractérisée par un vecteur à deux dimensions dans le plan (Oy, Oz) :

$$\tilde{\vec{E}}_0 = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad \|\vec{p}\|^2 = 1 \quad (6.8)$$

Le vecteur complexe bidimensionnel \vec{p} , de norme un, définit la *polarisation* de l'onde électromagnétique plane.

Polarisations rectilignes et circulaires

Considérons des cas particuliers de polarisation, qui constituent une « base » de toutes les polarisations possibles. Nous avons d'abord la catégorie de polarisations dites *rectilignes*, dont l'orientation est constante dans le temps.

- Polarisation rectiligne selon y : $\vec{p}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Polarisation rectiligne selon z : $\vec{p}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

En prenant par exemple le premier cas, l'onde est de la forme

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \text{Re} \left[\tilde{\vec{E}}(\vec{x}, t) \right] = E_0 \vec{e}_y \cos(\omega t - kx) \quad (6.9)$$

Un autre type de polarisation, très intéressant, correspond aux polarisations circulaires. Elles correspondent à un champ électrique dont la direction « tourne » au cours du temps. Les deux modes de polarisation circulaires sont les suivants.

- Polarisation circulaire gauche : $\vec{p}_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

3. En termes du champ magnétique nous avons aussi $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$.

- Polarisation circulaire droite : $\vec{p}_d = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

En prenant par exemple le premier cas, l'onde est de la forme

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \text{Re} \left[\tilde{\vec{E}}(\vec{x}, t) \right] = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\omega t - kx + \phi) \\ -\sin(\omega t - kx + \phi) \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

À un instant t donné, cette configuration décrit un vecteur tournant dans le plan (Oy, Oz) , dans le sens trigonométrique, lorsque la position x selon l'axe Ox varie.

On remarque que la superposition d'une onde de polarisation circulaire gauche et d'une onde de polarisation circulaire droites, de même amplitude et de même phase, donne une polarisation rectiligne selon y .

Polarisation en optique

La propriété qu'ont les ondes lumineuses monochromatiques (c.-à.-d. sinusoïdales) de posséder une polarisation est apparente dans de nombreux phénomènes optiques. Notons tout d'abord que la majorité des sources lumineuses produisent des ondes lumineuses *non polarisées*, qui sont la superposition aléatoire de différentes ondes sinusoïdales avec des polarisations distinctes. Lorsqu'une polarisation particulière est plus probable que les autres, la lumière est partiellement polarisée.

Donnons quelques exemples de phénomènes liés à la polarisation des ondes lumineuses :

- Certains matériaux, qui possèdent une propriété de *biréfringence*, sont tels que la vitesse de la lumière pour les ondes lumineuses se propageant dans le matériau (ou de manière analogue, l'indice) dépend de la polarisation de l'onde ;
- Un *filtre polariseur* absorbe sélectivement les ondes lumineuses de manière à ne laisser passer que la polarisation rectiligne parallèle à l'axe du filtre ;
- certains matériaux, composés chimiquement de composés *chiraux*, possèdent un *pouvoir rotatoire*. Une onde lumineuse entrant dans ce matériau avec une polarisation rectiligne donnée ressort avec une polarisation rectiligne faisant un angle avec la polarisation d'entrée⁴ ;
- les écrans à cristaux liquides sont fondés sur la propriété des cristaux liquides d'influencer la polarisation des ondes lumineuses différemment suivant qu'une tension leur est appliquée ou non.

Optique scalaire

Il existe cependant un grand nombre de situations pour lesquelles la polarisation ne joue pas directement de rôle important, et constitue donc une complication inutile. On peut dans ce cas modéliser les ondes lumineuses par une quantité scalaire $\Psi(\vec{x}, t)$ que nous appellerons *vibration lumineuse*. Cette quantité obéit naturellement à l'équation d'onde à trois dimensions :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta \Psi(\vec{x}, t) = 0 \quad (6.11)$$

Nous nous retrouvons alors dans une situation analogue à celle des ondes acoustiques.

Considérant l'énergie contenue dans cette onde lumineuse scalaire, nous pouvons introduire l'*intensité* qui lui est associée. Cette quantité, qui comme pour les ondes acoustiques est une puissance par unité de surface, ou en d'autres termes un flux d'énergie, est de la forme

$$I = \alpha \langle \Psi(\vec{x}, t)^2 \rangle_t, \quad (6.12)$$

4. On peut comprendre ce phénomène en décomposant la polarisation rectiligne en polarisations circulaires, comme indiqué plus haut, et en considérant la propagation de ces deux polarisations avec des célérités différentes.

donc proportionnelle à la valeur moyenne dans le temps de $\Psi(\vec{x}, t)^2$. Nous avons introduit une constante de normalisation α dans la définition. Ce paramètre n'a pas réellement d'importance car seules les variations d'intensité nous intéressent.

Optique géométrique Nous pouvons encore d'avantage simplifier la description d'une onde lumineuse. Considérons une onde de pulsation ω donnée. L'approximation de l'*optique géométrique* est valable lorsque les caractéristiques du milieu de propagation varient uniquement sur des distances beaucoup plus grandes que c/ω . Une onde scalaire générique se propageant, de pulsation déterminée, peut être décomposée comme (en notation complexe)

$$\tilde{\Psi}(\vec{x}, t) = a(\vec{x})e^{i\omega(t-S(\vec{x})/c)} \quad (6.13)$$

où la quantité $a(\vec{x})$, réelle et positive, est la généralisation de l'amplitude.

Écrivons maintenant l'équation d'onde (6.11) pour une onde de cette forme, dans le vide. Pour simplifier les choses on considère pour des ondes ne dépendant que de x . Sans faire d'approximations, on obtient, après avoir simplifié par $e^{i\omega(t-S(\vec{x})/c)}$:

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 - 1 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{a} \frac{d^2a}{dx^2} - \frac{i\lambda}{2\pi} \left[\frac{d^2a}{dx^2} - \frac{2}{a} \frac{da}{dx} \frac{dS}{dx} \right] \quad (6.14)$$

avec $\lambda = 2\pi c/\omega$. On fait maintenant l'approximation que, sur des échelles de l'ordre de λ , les caractéristiques de l'onde (et du milieu de propagation) varient peu. On obtient alors l'équation $(S'(x))^2 = 1$. Elle se généralise facilement à trois dimensions en

$$\left(\frac{\partial S(\vec{x})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(\vec{x})}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(\vec{x})}{\partial z}\right)^2 = 1 \quad (6.15)$$

Cette équation, appelée *équation eikonale*, est l'équation fondamentale de l'optique géométrique. C'est elle qui permet d'étudier la propagation des rayons lumineux. La direction de propagation d'un rayon lumineux est donnée *localement* par le vecteur $\vec{\text{grad}}(S) = (\partial_x S, \partial_y S, \partial_z S)$. Les surfaces d'ondes \mathcal{S} correspondent à

$$S(\vec{x}) = \text{constante} \quad , \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{S} \quad (6.16)$$

Notons que dans le cas d'une onde plane, $S(\vec{x}) = \vec{k} \cdot \vec{x}$ et on retrouve la relation de dispersion (6.6). Dans le vide, on obtient une propagation en ligne droite.

La généralisation de cette équation à un milieu quelconque (qui peut être non homogène) permet d'étudier des effets comme la réfraction. Il suffit alors, dans l'approximation où les propriétés du milieu de propagation varient peu sur des échelles de l'ordre de cT , de remplacer la célérité des ondes lumineuses dans le vide par celle dans le milieu considéré, au point \vec{x} . En termes de l'indice optique n introduit plus haut on a

$$\left(\frac{\partial S(\vec{x})}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(\vec{x})}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S(\vec{x})}{\partial z}\right)^2 = n^2(\vec{x}) \quad (6.17)$$

Il s'agit de l'équation fondamentale de l'optique géométrique.

6.3 Sources d'ondes lumineuses

Il est à noter un aspect pratique très important des ondes lumineuses. Contrairement aux ondes acoustiques, il n'est pas possible d'émettre une onde électromagnétique sinusoïdale à la fréquence désirée en « commandant » une source avec un générateur électrique réglé sur cette fréquence. Ainsi une source lumineuse émet une radiation dont les propriétés sont liées à la nature physique du phénomène d'émission mais qui ne peuvent être imposées de l'extérieur par un signal électrique.

Nous devons tenir compte de deux propriétés importantes des sources physiques de lumière, qui apparaissent même lorsqu'elles sont monochromatiques à une bonne approximation :

1. les sources n'émettent pas des ondes sinusoïdales de durée infinie, mais uniquement par « bouffées » (appelées paquets d'ondes) pendant des intervalles de temps finis. Chacun de ces paquets d'ondes possède une phase constante Φ_0 aléatoire, qui n'est pas corrélé à celui des autres paquets. Ainsi, si on note δt la durée caractéristique d'un paquets d'onde, la mesure (hypothétique) de la phase de l'onde en un point donné, aux instants t et $t + \alpha$, donnera des résultats corrélés pour $\alpha \ll \delta t$ et décorrélés pour $\alpha \gg \delta t$.

On peut montrer (à l'aide d'une transformation de Fourier), qu'une onde sinusoïdale de fréquence ν , émise pendant un intervalle de temps δt , est en fait composé de plusieurs fréquences dans un intervalle $[\nu - \frac{\delta\nu}{2}, \nu + \frac{\delta\nu}{2}]$ avec $\delta\nu \sim 1/\delta t$. Ainsi le *spectre* d'une source monochromatique est en réalité composé d'un ensemble de fréquences dans un intervalle donné. Plus cet intervalle est petit, plus la source est monochromatique.⁵

2. les différents points de l'espace composant la source peuvent être considérés comme autant de générateurs d'ondes lumineuses indépendants, tels que le déphasage entre deux quelconques de ces points est aléatoire. Ainsi lorsque nous considérons l'onde lumineuse émise par une source physique, il faudra la modéliser comme un *ensemble* de sources. En chaque point \vec{x}_s appartenant à la surface de la source, nous avons une source ponctuelle dont la phase constante $\Phi(\vec{x}_s)$ de l'onde qu'il émet est spécifique.

Naturellement ces deux effets sont présents simultanément dans toute expérience. Ces propriétés sont déterminantes dans l'étude du phénomène d'interférences qui sera l'objet du prochain chapitre.

Notons qu'un *laser* est une source pour laquelle ces deux effets sont extrêmement limités, et qui est donc en bonne approximation une source d'ondes planes monochromatiques, cependant avec une extension spatiale limitée par la taille du faisceau.

Une autre propriété importante des ondes lumineuses est qu'il n'est pas possible de détecter directement la vibration lumineuse $\Psi(\vec{x}, t)$, plus particulièrement sa phase, car les fréquences des ondes lumineuses (de l'ordre de 500 THz) sont trop élevées pour tout dispositif électronique. On peut donc seulement détecter l'intensité associée, donnée par l'équation (6.12). Nous n'avons donc pas accès à la phase de l'onde mais, sous certaines conditions, nous pouvons mesurer la différence de phase, ou *déphasage*, entre deux ondes. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

6.4 Principe de Huygens-Fresnel

Pour étudier la propagation des ondes lumineuses nous avons besoin d'un principe très important, appelé principe de Huygens-Fresnel.

Considérons une source ponctuelle d'ondes lumineuses. Cette source va émettre des ondes sphériques, que l'on peut décomposer en ondes sinusoïdales sortantes. Les surfaces d'ondes sont des sphères centrées sur la source. Choisissons une de ces surfaces d'ondes, placée à une distance arbitraire R_1 .

Nous considérons maintenant une autre surface d'onde placée à une distance plus grande, $R_2 > R_1$. La propagation des ondes de la surface d'onde en R_1 vers la surface d'onde en R_2 peut se comprendre de la manière illustrée sur la figure 6.1.

Tout point de la sphère de rayon R_1 , ayant reçu l'onde émise par la source, peut être considéré à son tour comme une *source secondaire* ponctuelle d'ondes sphériques. La sphère de rayon R_1 étant une surface d'onde, toutes les sources secondaires sont *en phase* les unes avec les autres. Les amplitudes des ondes sphériques émises sont naturellement aussi égales.

5. Pour une raie émise par une lampe spectrale, nous avons typiquement $\delta\nu/\nu \sim 10^{-4}$. Les sources les plus monochromatiques connues sont les lasers, pour lesquelles $\delta\nu/\nu \sim 10^{-13}$ dans le meilleur des cas.

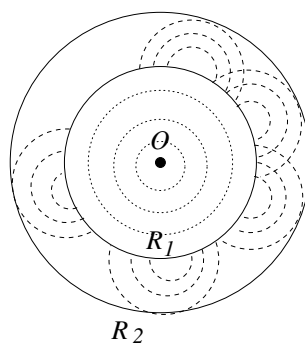


FIGURE 6.1 – Illustration du principe de Huygens-Fresnel.

Dans cette description de l'onde un observateur situé sur la sphère de rayon R_2 recevra une onde correspondant à la superposition de toutes ces sources secondaires. Ces sources étant en phase et de même fréquence, il existera alors un phénomène d'*interférences*. On peut montrer que les interférences entre les sources secondaires placées tout autour de la sphère de rayon R_1 reconstituent précisément l'onde sphérique émise par la source primaire située à l'origine. Ce point de vue (qui est valable aussi pour les ondes acoustiques) est particulièrement utile pour comprendre les phénomènes d'interférences et de diffraction.

Notons pour finir que ce principe est aussi valable pour une onde plane. Dans ce cas tous les points situés dans un plan d'onde sont des sources secondaires d'ondes sphériques.

Chapitre 7

Interférences et diffraction

Dans le chapitre 3 nous avons étudié la superposition de deux ondes progressives unidimensionnelles de même pulsation. Nous avons vu que le déphasage entre deux ondes progressives, se propageant dans la même direction, est constant ; il en résulte une onde sinusoïdale progressive d'amplitude constante. Cela est dû au fait que le déphasage induit par la propagation depuis les deux sources produisant ces ondes est indépendant de la position x où l'onde est observée.

Pour les ondes tridimensionnelles comme les ondes sonores, la superposition d'ondes produit des phénomènes nettement plus intéressants, car le déphasage va maintenant dépendre du point de l'espace où l'onde est observée. Ainsi, en utilisant les résultats de la partie 3.1, nous voyons que son amplitude va varier entre les différents points de l'espace.

Ce phénomène, appelé génériquement *interférences*, se produit lorsque des ondes sinusoïdales de même pulsation se superposent, du moment que leur déphasage est constant au cours du temps. En acoustique on considèrera deux (ou plus) générateurs d'ondes sonores (haut-parleurs ou transducteurs) alimentés par un même générateur de courant alternatif, à une pulsation ω . Cela garantit que la condition ci-dessus est satisfaite. Nous y reviendrons plus en détail dans le cadre des ondes lumineuses, car elle est beaucoup plus délicate à satisfaire.

7.1 Interférences acoustiques à deux ondes

Pour bien identifier le phénomène d'interférences, on considère l'expérience suivante. On place deux sources d'ondes acoustiques (haut-parleurs ou transducteurs) à une distance d l'une de l'autre, alimentées par un même générateur sinusoïdal de pulsation ω .

À l'intérieur de leur cône d'émission, on pourra assimiler ces sources à des sources ponctuelles, émettant des ondes sphériques *sortantes* sinusoïdales. On désigne par le vecteur $\vec{r}_a = \overrightarrow{S_a M}$ le vecteur liant la source numéro a , située au point S_a de coordonnées \vec{x}_a , avec l'observateur, situé au point M de coordonnées \vec{x} . Il s'écrit naturellement

$$\vec{r}_a = \vec{x} - \vec{x}_a \quad (7.1)$$

Le vecteur d'onde correspondant à chacune de ces ondes est radial, dans les coordonnées sphériques ayant pour origine la source considérée. Il peut s'écrire

$$\vec{k}_a = \kappa \frac{\vec{r}_a}{\|\vec{r}_a\|} \quad (7.2)$$

avec $\kappa = \omega/c$. L'équation (4.119), donnant la forme d'une onde sinusoïdale en coordonnées sphériques, permet alors d'écrire la suppression correspondant à l'onde de pulsation ω émise en A et reçue au point M , en notation complexe, comme :

$$\tilde{p}_a(M, t) = \frac{\mathcal{A}_a}{\|\vec{r}_a\|} e^{i(\omega t - \vec{k}_a \cdot \vec{r}_a + \phi_a)} \quad (7.3)$$

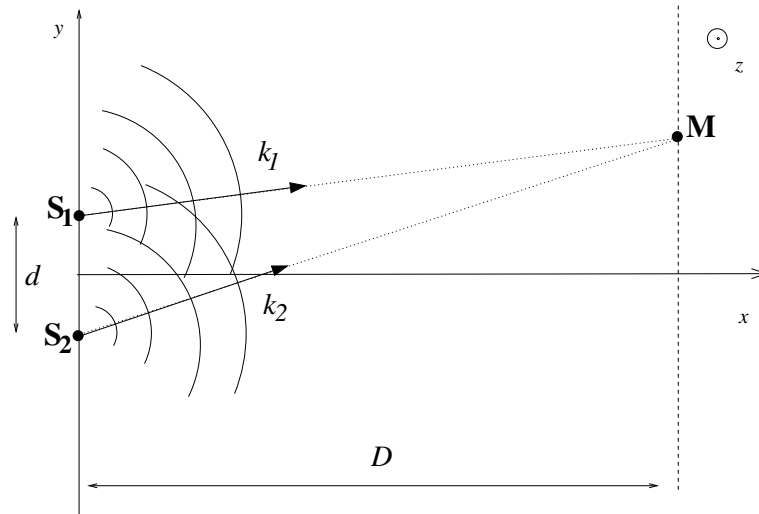


FIGURE 7.1 – Expérience d'interférences à deux ondes.

On observe l'onde résultante de la superposition des deux ondes émises par les sources dans un plan parallèle à l'axe liant les sources, à une grande distance $D \gg d$, voir fig. 7.1. Ce plan est choisi comme plan (y, z) dans les coordonnées cartésiennes. On note \vec{x} la position du point d'observation. En choisissant l'origine des coordonnées dans ce plan entre les deux sources, les coordonnées des sources et du récepteur sont :

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ d/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -d/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} D \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

On souhaite trouver le signal obtenu par la superposition des ondes lorsqu'on se déplace d'une distance y parallèlement à l'axe des sources. Les distances entre le point \vec{x} et les sources sont données par :

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} D \\ y - d/2 \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} D \\ y + d/2 \\ z \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

Calculons de manière générique le déphasage entre les deux ondes au point d'observation. Il est donné par

$$\Delta\Phi_{12} = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{\omega}{c} (|\vec{r}_1| - |\vec{r}_2|) + \phi_2 - \phi_1 \quad (7.6)$$

Ce déphasage est constant sur des surfaces où $|\vec{r}_1| - |\vec{r}_2| = \text{constante}$. De telles surfaces sont des *hyperboloïdes de révolution*, de foyers S_1 et S_2 , voir la figure 7.2. Il existe deux catégories de surfaces remarquables :

- les hyperboloïdes pour lesquels $\Delta\Phi_{12} \equiv 0 \pmod{2\pi}$ sont des *franges brillantes*. Les amplitudes des deux ondes s'additionnent, les ondes étant en phase ;
- les hyperboloïdes pour lesquels $\Delta\Phi_{12} \equiv \pi \pmod{2\pi}$ sont des *franges sombres*. Les amplitudes des deux ondes se retranchent, les ondes étant en opposition de phase.

On notera que ces surfaces ne sont pas a priori des surfaces d'onde de l'une ou l'autre onde (il faudrait alors que $\Phi_1 = \text{constante}$ ou $\Phi_2 = \text{constante}$, séparément).

Franges d'interférence à grande distance

Pour simplifier l'étude des franges d'interférences, on se place sur l'écran situé à grande distance D des sources. Les franges deviennent alors en première approximation rectilignes, comme nous

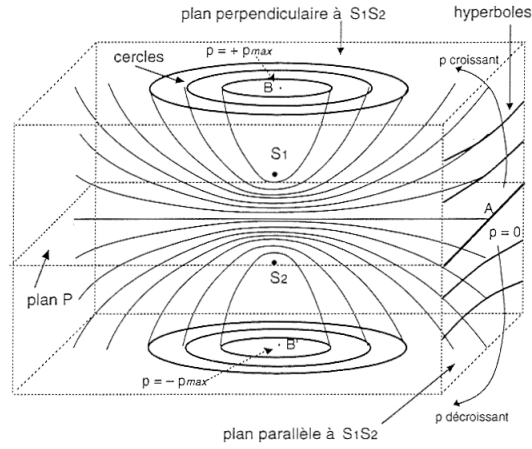


FIGURE 7.2 – Franges d’interférences pour deux ondes sphériques.

allons le voir.

Dans l’approximation où $y \ll D$ et $z \ll D$ (soit près du centre de l’écran), l’amplitude de chacune des ondes va peu varier lors du déplacement dans le plan. Comme nous l’avons vu précédemment, pour des longueurs d’ondes faibles petites la distance D les variations de phase seront beaucoup plus significatives que celles de l’amplitude. On fait donc l’approximation

$$\frac{\mathcal{A}_a}{\|\vec{r}_a\|} \simeq \frac{\mathcal{A}_a}{D}, \quad a = 1, 2 \quad (7.7)$$

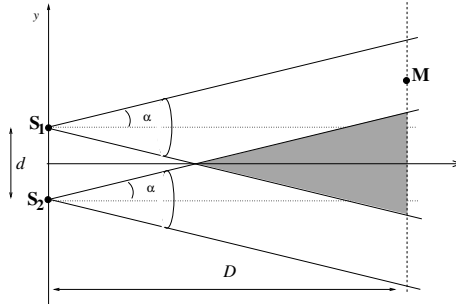
On obtient ainsi une onde résultante donnée, en notation complexe, par

$$\tilde{p}(M, t) = \tilde{p}_1(M, t) + \tilde{p}_2(M, t) \simeq \frac{\mathcal{A}_1}{D} e^{i\omega(t - \|\vec{r}_1\|/c) + i\phi_1} + \frac{\mathcal{A}_2}{D} e^{i\omega(t - \|\vec{r}_2\|/c) + i\phi_2} \quad (7.8)$$

Dans la réalité les sources d’ondes sonores n’émettent pas dans toutes les directions. Si nous supposons que chaque source émet dans un cône de demi-angle au sommet α , dont l’axe est confondu avec Ox cette expression est valable lorsque le point M reçoit une onde de chacune des sources, soit pour

$$y \in \left] \frac{d}{2} - D \tan \alpha; \frac{d}{2} + D \tan \alpha \right[\cap \left] -\frac{d}{2} - D \tan \alpha; -\frac{d}{2} + D \tan \alpha \right[\quad (7.9)$$

En pratique, comme $d \ll D$, il suffit de se placer dans la zone $|y| < D \tan \alpha$.



Dans la limite $d, y, z \ll D$, nous pouvons faire les développements limités au premier ordre :

$$\begin{aligned} \|\vec{r}_1\| &= \sqrt{D^2 + (y - d/2)^2 + z^2} \simeq D + \frac{(y - d/2)^2 + z^2}{2D} \\ \|\vec{r}_2\| &= \sqrt{D^2 + (y + d/2)^2 + z^2} \simeq D + \frac{(y + d/2)^2 + z^2}{2D} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Dans cette approximation les phases des deux ondes au point \vec{x} sont

$$\begin{cases} \Phi_1(y, t) = \omega t - \kappa \left(D + \frac{(y-d/2)^2 + z^2}{2D} \right) + \phi_1 \\ \Phi_2(y, t) = \omega t - \kappa \left(D + \frac{(y+d/2)^2 + z^2}{2D} \right) + \phi_2 \end{cases} \quad (7.11)$$

Nous en déduisons que le déphasage $\Delta\Phi_{12}$ entre les signaux sinusoïdaux est donné par :

$$\Delta\Phi_{12}(y) = \Phi_2(y, t) - \Phi_1(y, t) \implies \boxed{\Delta\Phi_{12}(y) = -\frac{\kappa y d}{D} + \Delta\phi_{12}} \quad (7.12)$$

où $\Delta\phi_{12} = \phi_2 - \phi_1$ est une constante. À cet ordre, le résultat est indépendant de z donc la figure obtenue sera inchangée par translation selon l'axe Oz .

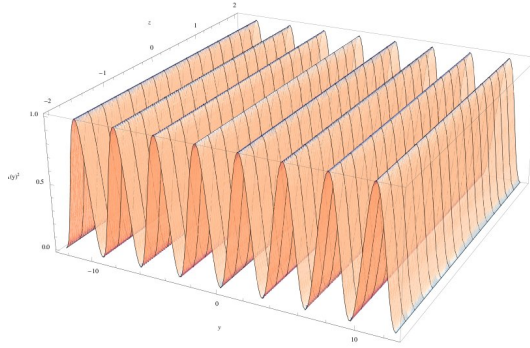


FIGURE 7.3 – Franges rectilignes d'interférences pour deux ondes.

Finalement, les deux ondes étant de même pulsation on peut trouver l'amplitude de l'onde résultante comme pour l'équation (2.35). Notant cette amplitude comme $\mathcal{P}(y)$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(y)^2 &= \left| \frac{\mathcal{A}_1}{D} e^{i\Phi_1(y)} + \frac{\mathcal{A}_2}{D} e^{i\Phi_2(y)} \right|^2 \\ &= \frac{1}{D^2} \left(\mathcal{A}_1 e^{i\Phi_1(y)} + \mathcal{A}_2 e^{i\Phi_2(y)} \right) \left(\mathcal{A}_1 e^{-i\Phi_1(y)} + \mathcal{A}_2 e^{-i\Phi_2(y)} \right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

ce qui donne

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{D} \sqrt{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + 2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \cos[\Delta\Phi_{12}(y)]} \quad (7.14)$$

Soit

$$\boxed{\mathcal{P}(y) = \frac{1}{D} \sqrt{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + 2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \cos\left(\frac{\kappa y d}{D} - \Delta\phi_{12}\right)}} \quad (7.15)$$

Minima et maxima d'amplitude

Considérons maintenant pour simplifier les choses que le déphasage constant entre les deux sources est nul, soit que $\Delta\phi_{12} = 0$.

L'amplitude (7.15) de l'onde acoustique résultante de la superposition est maximale lorsque le cosinus vaut +1, soit pour

$$\cos \Delta\Phi_{12}(y_{\max}) = 1 \implies \boxed{y_{\max} = \frac{\lambda D}{d} \ell, \quad \ell \in \mathbb{Z}} \quad (7.16)$$

L'amplitude maximale est alors

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{1}{D} \sqrt{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 + 2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2} = \frac{1}{D}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) \quad (7.17)$$

L'amplitude est minimale lorsque le cosinus vaut -1 , soit pour

$$\cos \Delta\Phi_{12}(y_{\max}) = -1 \implies y_{\max} = \frac{\lambda D}{d}(\ell + 1/2), \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (7.18)$$

L'amplitude maximale est alors

$$\mathcal{P}_{\min} = \frac{1}{D} \sqrt{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2 - 2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2} = \frac{1}{D}|\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2| \quad (7.19)$$

Nous obtenons alors alternativement des franges « brillantes » et « sombres »¹ rectilignes, étendues selon l'axe des z , en se déplaçant le long de l'axe y , voir fig. 7.3. Les franges sont centrées autour de $y = 0$ lorsque les sources sont en phase, soit pour $\phi_1 = \phi_2$. Dans ce cas nous avons une frange brillante pour $y = 0$ ce qui est naturel car nous sommes alors à égale distance des deux sources.

Interfrange

L'écart entre deux franges brillantes successives selon Oy est appelé *interfrange* ι . D'après l'équation (7.18) son expression est donnée par :

$$\boxed{\iota = \frac{\lambda D}{d}} \quad (7.20)$$

On s'aperçoit par exemple que, toutes choses étant égales par ailleurs, plus les sources sont proches l'une de l'autre, plus l'interfrange est grand.

Alternativement, à une distance D donnée, plus la longueur d'onde est grande plus les franges sont écartées les unes des autres.

Contraste

Les franges sont d'autant mieux contrastées que la différence d'amplitude entre les franges brillantes et les franges sombres est grande. Il est plus naturel de raisonner avec les contrastes d'intensité qu'avec les contrastes d'amplitude, spécialement dans le contexte des ondes lumineuses. De manière générale l'intensité d'une onde sinusoïdale est proportionnelle au carré de son amplitude. On définit alors le contraste \mathfrak{c} des franges comme le rapport

$$\mathfrak{c} = \frac{\mathcal{P}_{\max}^2 - \mathcal{P}_{\min}^2}{\mathcal{P}_{\max}^2 + \mathcal{P}_{\min}^2} \quad (7.21)$$

qui est un nombre sans dimension entre zéro et un. En utilisant les formules ci-dessus, on obtient

$$\mathfrak{c} = \frac{2\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2} \quad (7.22)$$

Regardons deux cas particuliers. Lorsque les amplitudes sont égales, on trouve $\mathfrak{c} = 1$. Le contraste est alors maximal (comme l'amplitude des franges sombre est nulle). Si l'amplitude d'une des deux ondes tend vers zéro, on obtient $\mathfrak{c} \rightarrow 0$. Dans cette limite il n'y a en effet plus de phénomène d'interférences puisqu'il ne reste qu'une onde.

1. Nous employons ici une terminologie adaptée aux interférences d'ondes lumineuses.

Remarquons pour finir que lorsque les amplitudes des deux ondes sont égales la formule (7.15) donnant l'amplitude de l'onde résultante se simplifie :

$$\mathcal{P}(y) = \frac{\mathcal{A}}{D} \sqrt{2(1 + \cos \Delta\Phi_{12}(y))} = \frac{2\mathcal{A}}{D} \left| \cos \frac{\Delta\Phi_{12}(y)}{2} \right| \quad (7.23)$$

et on observe bien que l'amplitude s'annule pour les franges « sombres » .

7.2 Interférences d'ondes lumineuses à distance finie : trous de Young

Le phénomène d'interférences à deux ondes, étudié pour les ondes acoustiques dans la partie précédente, s'observe aussi pour les ondes lumineuses. Les calculs étant les mêmes que pour les ondes acoustiques, nous soulignerons essentiellement les différences liées à la réalisation de l'expérience. Historiquement, cette expérience, réalisée par Thomas Young en 1801, est une des premières preuves irréfutables de la nature ondulatoire de la lumière.

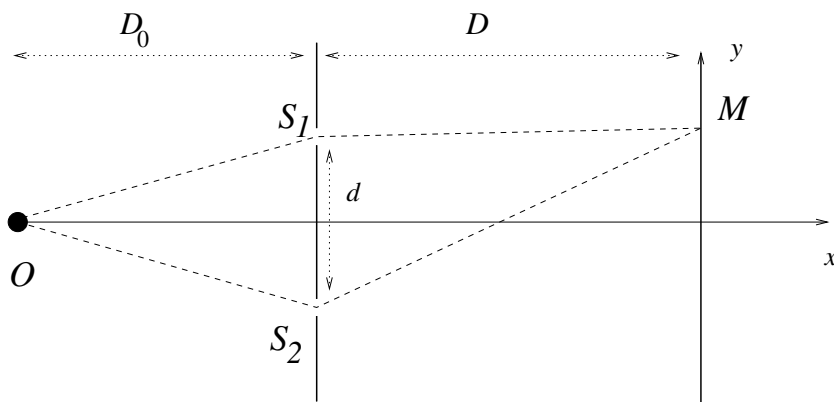


FIGURE 7.4 – Expérience des trous de Young.

En raison de l'impossibilité d'obtenir deux sources d'ondes sinusoïdales avec un déphasage constant dans le temps, il est nécessaire d'obtenir les deux sources requises pour l'expérience d'interférences à deux ondes comme deux *sources secondaires* provenant de la même source primaire, en tirant parti du principe de Huygens-Fresnel. On considère alors une source primaire d'ondes sphériques sinusoïdales au point O , éclairant un écran situé à une distance D_0 , voir figure 7.4. Cet écran est percé de trous très petits, alignés selon l'axe Oz , situés à une distance d l'un de l'autre, aux points S_1 et S_2 .

En première approximation, les trous sont de diamètre infiniment petit ; les sources secondaires au niveau de ces deux ouvertures peuvent alors être considérées comme deux sources d'ondes sphériques sinusoïdales de même fréquence, dont le déphasage de l'une par rapport à l'autre est constant dans le temps. Si la source est placée à égale distance des deux trous, comme sur la figure, les deux sources secondaires sont *en phase*.

Notion de chemin optique

On considère pour le moment une source parfaitement ponctuelle d'ondes sphériques sinusoïdales située en O . Au niveau de l'ouverture située au point S_1 on obtient la vibration lumineuse (en notation complexe) :

$$\tilde{\Psi}(S_1, t) = \frac{\tilde{\mathcal{A}}}{\|\overrightarrow{OS_1}\|} e^{i(\omega t - \kappa \|\overrightarrow{OS_1}\|)} \quad (7.24)$$

Par rapport à la source, l'onde acquiert donc un déphasage supplémentaire

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(S_1, t) &= \kappa \|\overrightarrow{OS_1}\| = \frac{\omega}{c} \|\overrightarrow{OS_1}\| \\ &= \frac{\omega}{c} n \|\overrightarrow{OS_1}\|,\end{aligned}\tag{7.25}$$

où n est l'indice optique du milieu, par exemple l'air, dans lequel se produit la propagation.

On est ainsi amené à définir le *chemin optique* entre deux points A et B par

$$\boxed{C_{AB} = (AB) = n \|\overrightarrow{AB}\|}.\tag{7.26}$$

Il permet d'exprimer de manière simple le changement de phase d'une onde entre deux points situés sur des surfaces d'ondes différentes, en tenant compte de l'indice du milieu traversé. On peut représenter le trajet de l'onde entre ces deux points sous la forme d'un *rayon lumineux*. Si l'indice n du milieu est constant, ce trajet est simplement le segment joignant les deux points (la lumière se propage alors en ligne droite). Si plusieurs milieux sont traversés, il faut « découper » le trajets en segments comme :

$$C = n_1 \|\overrightarrow{A_1 A_2}\| + n_2 \|\overrightarrow{A_2 A_3}\| + \dots + n_N \|\overrightarrow{A_N A_{N+1}}\|\tag{7.27}$$

Notons que, localement, la direction du chemin suivi par le rayon lumineux est donnée par son vecteur d'onde \vec{k} .

Franges d'interférences

Pour obtenir les franges d'interférence on mesure l'intensité lumineuse obtenue par la superposition des ondes passant par S_1 et S_2 sur un deuxième écran situé à une distance D du premier. Au point M les chemins optiques des rayons lumineux passant par les ouvertures S_1 et S_2 sont :

$$C_1 = (OS_1) + (S_1M)\tag{7.28a}$$

$$C_2 = (OS_2) + (S_2M),\tag{7.28b}$$

en les décomposant en deux parties distinctes : de la source à l'une des ouvertures du premier écran puis du premier au deuxième écran. Si la source est placée exactement sur l'axe Ox , nous avons $(OS_1) = (OS_2)$. Le déphasage entre les ondes passant par S_1 et S_2 est alors donné simplement par

$$\Delta\Phi_{12} = -\frac{\omega}{c} [(S_2M) - (S_1M)] = -\frac{\omega}{c} \Delta C\tag{7.29}$$

proportionnel à la *différence de marche*

$$\Delta C = (S_2M) - (S_1M)\tag{7.30}$$

entre les deux rayons.

Dans l'approximation où l'écran se situe à une distance très grande par rapport à la distance entre les trous, soit $D \gg d$, nous pouvons faire les mêmes approximations que nous avons faites pour les interférences d'ondes acoustiques, voir eq. (7.12) :

$$\Delta\Phi_{12}(y) \simeq -\frac{n\omega}{c} \frac{yd}{D}\tag{7.31}$$

en fonction de l'ordonnée y sur l'écran d'observation. On observe, qu'à cet ordre, le déphasage ne dépend pas de z .

On obtient alors l'amplitude de l'onde résultante avec l'équation (7.15) établie pour les ondes acoustiques. L'intensité lumineuse observée, proportionnelle à $\langle \Psi^2 \rangle$ est donc donnée par

$$I(y) = I_0 (1 + \cos \Delta\Phi_{12}(y)) = 2I_0 \cos^2 \left(\frac{\Delta\Phi_{12}(y)}{2} \right) \quad (7.32)$$

donnant des franges alternativement sombres et lumineuses ; nous avons absorbé l'amplitude de Ψ ainsi que le paramètre α dans la constante I_0 . Comme pour les ondes acoustiques, l'*interfrange*, ou distance entre deux franges brillantes successives, est donné par

$$\iota = \frac{c}{\nu} \frac{D}{nd} = \frac{\lambda D}{d} \quad (7.33)$$

Une source d'ondes lumineuses est réellement caractérisée par sa fréquence ν (la longueur d'onde λ n'est pas réellement un paramètre intrinsèque de l'onde car elle dépend du milieu traversé). On observe donc que si on réalise la même expérience de trous de Young dans des milieux d'indices optiques n différents, on mesurera des valeurs différentes de l'interfrange.

Déphasage dû à la position de la source

Si la source lumineuse est déplacée d'une distance $\epsilon \ll D_0, D$ parallèlement à l'écran, nous observons les mêmes franges d'interférences, mais décalées. En effet on a alors

$$(OS_2) - (OS_1) \simeq \frac{n\epsilon d}{D_0} \quad (7.34)$$

ce qui implique que

$$\Delta\Phi_{12}(y) \simeq -\frac{n\omega d}{c} \left(\frac{y}{D} + \frac{\epsilon}{D_0} \right) \quad (7.35)$$

Lorsque $\epsilon > 0$ (c.-à.-d. que la source se déplace vers les y croissants), la frange brillante centrale, auparavant en $y = 0$, se décale vers les y négatifs. Il est facile de se convaincre que ce résultat est logique ; il faut s'assurer en effet que les deux chemins optiques soient égaux au niveau de la frange centrale.

7.3 Interférences à grande distance : fentes de Young

Nous allons reprendre l'expérience des interférences lumineuses à deux ondes, dans des conditions un peu différentes. Premièrement, on considère que la source est placée à très grande distance, en amont de l'écran ; on peut donc l'assimiler à une onde plane.

On considère un écran percé de deux fentes, prises parallèles à l'axe Oz . La physique est donc invariante par translation selon z . On appelle θ_i l'angle entre le vecteur d'onde \vec{k}_i de l'onde incidente et l'axe Ox (ou de manière équivalente entre les plans d'onde et l'axe Oy). Pour chaque valeur de z on peut considérer un point sur la fente, prise infiniment fine, comme une source secondaire d'ondes sphériques. Le problème étant invariant par translation selon z , les sources résultantes sont « étalées » le long de l'axe Oz .

Il existe un déphasage entre les sources secondaires correspondant aux fentes S_1 et S_2 , lié à la différence de parcours entre les ondes provenant de la source, notée δ_i sur la figure. Il en résultera une différence de marche $\Delta C = n\delta_i$. En effet une surface d'onde donnée « arrive » en S_2 avant d'arriver en S_1 , lorsque θ_i est positif. D'après la géométrie de la figure le déphasage entre les sources secondaires est

$$\Delta\Phi_{12}^i = \frac{n\omega}{c} \delta_i = \frac{n\omega}{c} d \sin \theta_i \quad (7.36)$$

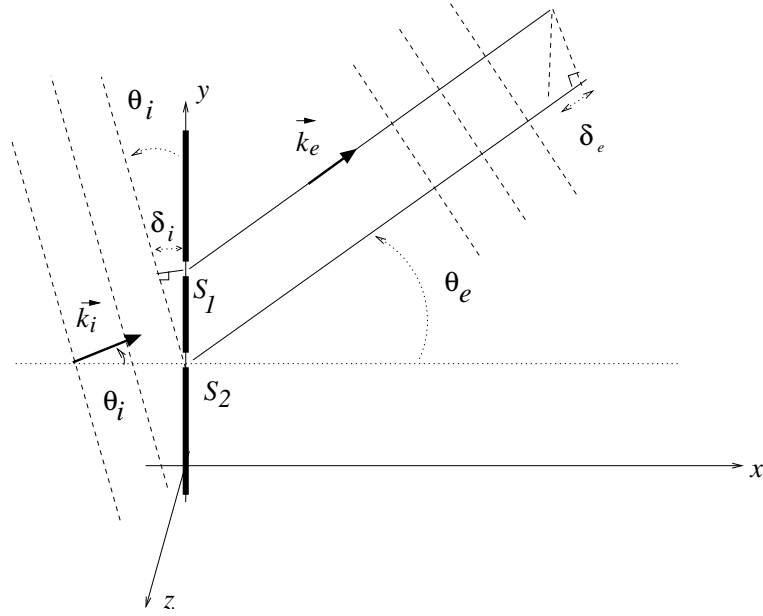


FIGURE 7.5 – Expérience des fentes de Young.

L'observateur est aussi situé à une très grande distance, à l'infini en aval de l'écran; les ondes sphériques provenant de chacune des deux fentes sont alors assimilables à des ondes planes; dans cette approximation les rayons lumineux issus des deux fentes proviennent de la même direction, et partagent donc un même vecteur d'onde noté \vec{k}_e (pour onde émergente). On note θ_e l'angle entre ce vecteur d'onde et l'axe Ox , voir la figure 7.5.

Il existe une différence de marche entre ces deux ondes, liée à la différence de parcours entre les rayons provenant de S_1 et S_2 , notée δ_e sur la figure. Nous avons

$$\delta_e = d \sin \theta_e \quad (7.37)$$

correspondant au déphasage

$$\Delta\Phi_{12}^e = -\frac{n\omega}{c}\delta_e = -\frac{n\omega}{c}d \sin \theta_e \quad (7.38)$$

La convention est telle que pour θ_e positif, l'onde émise de la source en S_1 est en avance par rapport à l'autre.²

Le déphasage total entre les ondes provenant des fentes S_1 et S_2 est donc donné par la somme des deux déphasages (7.36) et (7.38) :

$$\Delta\Phi_{12} = \Delta\Phi_{12}^i + \Delta\Phi_{12}^e \implies \boxed{\Delta\Phi_{12} = \frac{n\omega}{c}d (\sin \theta_i - \sin \theta_e)} \quad (7.39)$$

On observe ainsi des franges d'interférences rectilignes en faisant varier l'angle d'observation θ_e . Les franges brillantes sont caractérisées par :

$$\Delta\Phi_{12} = -2\pi\ell, \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (7.40)$$

et apparaissent donc pour les directions angulaires

$$\boxed{\sin \theta_e = \frac{\lambda\ell}{d} + \sin \theta_i, \quad \ell \in \mathbb{Z}} \quad (7.41)$$

Il est bien sûr possible de considérer un cas intermédiaire aux deux situations étudiées :

2. La phase acquise par une onde progressive sinusoïdale se déplaçant d'une distance L est $\text{Arg}(e^{-ikL}) = -kL$. L'onde ayant la phase la plus grande est donc celle ayant parcouru le chemin le plus court. Cela explique le signe négatif dans l'équation (7.38).

- source à distance finie, assimilable à une source ponctuelle d’ondes sphériques, observation à l’infini ;
- source à l’infini, assimilable à une source d’ondes planes, observation à distance finie.

Il faut alors calculer le déphasage en amont et en aval de l’écran percé (de trous ou de fentes) à l’aide des formules appropriées parmi celles données plus haut.

Ainsi si l’écran d’observation est à distance grande mais finie, nous obtenons à partir de (7.41), la position des franges brillantes :

$$y = D \tan \theta_e \simeq D \sin \theta_e \implies y = \frac{\ell \lambda D}{d} + D \sin \theta_i \quad (7.42)$$

Notons pour finir que les franges obtenues pour les fentes ou les trous d’Young sont dans les deux cas *rectilignes* au centre de l’écran d’observation.

7.4 Notion de cohérence, interférences en lumière polychromatique

Pour que le phénomène d’interférences se produise, il faut idéalement une source d’ondes parfaitement sinusoïdales, pour laquelle les contributions des différents points de la source soient en phase. Ces conditions sont simples à satisfaire pour les ondes acoustiques mais le sont beaucoup moins pour des ondes lumineuses. Il faut distinguer deux notions de *cohérence*, correspondant à deux obstructions possibles au phénomène d’interférences.

Cohérence temporelle

Il est impossible de créer une source d’ondes lumineuses parfaitement sinusoïdale, c.-à.-d. parfaitement *monochromatique*. Les sources physiques émettent toutes les fréquences contenues dans un intervalle $[\nu - \delta\nu/2; \nu + \delta\nu/2]$ comme nous l’avons vu.

Pour une source non monochromatique, chaque fréquence dans cet intervalle va produire son propre système d’interférences, car des fréquences différentes n’interfèrent pas entre elles.

Pour une différence de chemins optiques ΔC donnée, le déphasage entre les ondes ayant suivi les chemins optiques passant par S_1 et par S_2 va donc varier entre

$$\Delta\phi_{\nu-\delta\nu/2} = \frac{2\pi(\nu - \delta\nu/2)}{c} \Delta C \quad \text{et} \quad \Delta\phi_{\nu+\delta\nu/2} = \frac{2\pi(\nu + \delta\nu/2)}{c} \Delta C \quad (7.43)$$

Lorsque la variation de déphasage entre ces deux valeurs extrêmes devient de l’ordre de 2π , les franges d’interférences se brouillent car il va y avoir une superposition de plusieurs systèmes de franges d’interfrange très différents. Cela survient pour

$$\frac{\delta\nu}{c} \Delta C \sim 1 \quad (7.44)$$

Pour une source de largeur spectrale $\delta\nu$ donnée, cela fixe une limite supérieure sur la différence de marche possible entre deux rayons pour obtenir le phénomène d’interférences. Cette borne supérieure pour la différence de marche est appelée *longueur de cohérence* l_c :

$$l_c = \frac{\delta\nu}{c} \quad (7.45)$$

Une lampe spectrale a une longueur de cohérence $l_c \sim 3\text{mm}$ et un laser standard $l_c \sim 30\text{ cm}$. Des lasers spécialisés peuvent avoir des longueurs de cohérence de plusieurs mètres.

Cohérence spatiale

La notion de cohérence spatiale est plus simple à comprendre. Une source physique d'ondes lumineuses n'est pas réellement ponctuelle. Il faut alors considérer chaque point de la source comme une source à part entière. Pour une source classique, ces différents points ne sont pas en phase les uns par rapport aux autres. Si les rayons lumineux passant par S_1 et S_2 , dans l'expérience des trous d'Young, ne sont pas issus du même point de la source, il ne pourront donc pas interférer entre eux. ainsi chacun de ces points donnera un système de franges indépendant. Nous disons alors que la source n'a pas de *cohérence spatiale*.³ Nous obtenons ainsi une superposition de franges d'interférences créées par toutes ces sources, qui seront a priori décalées entre elles. Lorsque la source physique d'ondes lumineuses a une dimension trop grande, les franges sont alors brouillées. C'est pour cela qu'il est utile de placer un *diaphragme* en aval de la source primaire, pour que celle-ci soit le plus proche possible d'une source ponctuelle.

Interférences en lumière polychromatique

Reprenons maintenant plus en détail le phénomène d'interférences pour une source émettant des ondes de toutes les pulsations dans un certain domaine, pas nécessairement petit. Nous supposons que l'amplitude de l'onde lumineuse émise est constante dans le domaine le domaine de pulsations $\omega_1 < \omega < \omega_2$. On note

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad , \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad , \quad (7.46)$$

la pulsation moyenne et la largeur du domaine.

Prenons par exemple l'expérience des trous d'Young avec une source sur l'axe, dans le vide. L'intensité observée sur l'écran, résultant de la superposition des franges d'interférences correspondant aux différentes longueurs d'ondes, est

$$I(y) = I_0 \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \left[1 + \cos \left(\frac{n\omega_0}{c} \frac{d}{D} y \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{n\Delta\omega}{c} \frac{d}{2D} y \right) \right] \quad (7.47)$$

où nous avons introduit la fonction *sinus cardinal*

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (7.48)$$

qui tend vers 1 lorsque $x \rightarrow 0$. L'allure du carré de cette fonction, qui apparaîtra dans l'étude de la diffraction, est donnée figure 7.9.

L'intensité lumineuse sur l'écran, pour une pulsation dans un intervalle infinitésimal $]\omega - d\omega/2,]\omega + d\omega/2[$, est

$$dI(y|\omega) = I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{n\omega}{c} \frac{yd}{D} \right) \right] \frac{d\omega}{\omega_0} \quad (7.49)$$

La résultante de la superposition des figures d'inteférences pour toutes les pulsations est alors :

$$I(y) = \frac{I_0}{\omega_0} \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \left[1 + \cos \left(\frac{n\omega}{c} \frac{yd}{D} \right) \right] \quad (7.50)$$

On obtient ainsi

$$\frac{I(y)}{I_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \frac{c}{n\omega_0} \frac{D}{d} \frac{1}{y} \left[\sin \left(\frac{n\omega_2}{c} \frac{yd}{D} \right) - \sin \left(\frac{n\omega_1}{c} \frac{yd}{D} \right) \right] \quad (7.51)$$

ce qui donne finalement l'équation (7.47).^a

^a. Nous avons choisi dès le départ de normaliser la différentielle de l'intensité (7.49) avec la pulsation ω_0 , pour des raisons dimensionnelles.

3. Le cas du laser est différent, puisque à l'intérieur du faisceau tous les points sont en relation de phase les uns avec les autres, donc il s'agit d'une source cohérente spatialement.

L'étude de la fonction sinc (x) montre que celle-ci comporte un « lobe central » de largeur 2π , autour du maximum $x = 0$, et de « lobes secondaires », pour des valeurs de $|x|$ plus grandes (voir figure 7.9). Le lobe central concentre la grande majorité de l'intensité lumineuse.

Le résultat obtenu n'est pas sans rappeler le phénomène de battements, lorsque $\Delta\omega \ll \omega$. En effet le terme en cosinus dans l'équation (7.47) correspond à des franges sinusoïdales dont l'interfrange

$$\iota = \frac{2\pi c D}{n\omega_0 d} \quad (7.52)$$

dépend uniquement de la pulsation moyenne ω_0 .

L'intensité de la figure d'interférences est modulée par le sinus cardinal. Elle décroît comme $1/y$ en s'éloignant du centre de la figure. La largeur du lobe central, concentrant la plus grande partie de l'intensité lumineuse, est donnée par

$$\zeta = \frac{2\pi c 2D}{n\Delta\omega d} \quad (7.53)$$

qui vérifie $\iota/\zeta = \Delta\omega/2\omega_0 \ll 1$. Cette décroissance est liée naturellement à la longueur de cohérence ; en effet la zone où l'amplitude est significative a une taille de l'ordre du ζ défini au-dessus. Les points en bordure de cette zone correspondent à une différence de marche entre les deux ondes de $\Delta C = \frac{nd\zeta}{D}$, comparable à la longueur de cohérence définie par l'équation (7.45).

Observation en couleurs

Le calcul précédent suppose que le récepteur d'ondes lumineuses n'est sensible qu'à l'intensité, comme par exemple une photodiode. Cependant beaucoup de récepteurs d'ondes lumineuses, en premier lieu l'œil, sont capables de détecter des *couleurs*, c.-à.-d. de distinguer entre plusieurs plages de longueurs d'onde.⁴ On considère alors une expérience de trous d'Young éclairée par une source de lumière blanche, composée de toutes les longueurs d'onde du spectre visible. L'observateur voit alors la figure suivante.

La frange centrale (autour de $y = 0$ lorsque la source est sur l'axe), appelée frange d'*ordre zéro*, correspond à des ondes en phases pour toutes les longueurs d'onde. On observe donc une frange brillante de couleur blanche.

La frange suivante, appelée *premier ordre*, est située à un interfrange de la première. La valeur de l'interfrange, équation (7.20), dépend de la longueur d'onde. Les franges sont donc décalées entre les différentes couleurs. L'interfrange le plus petit correspond au violet et le plus grand au rouge. On observe ainsi des franges irisées, en « arc en ciel » : le bord intérieur (vers $y = 0$ des franges est violet alors que le bord extérieur est rouge.

Notons que les contributions des différentes couleurs ne sont pas nettement séparées car les franges brillantes, de forme sinusoïdale, sont relativement larges. Une généralisation de l'expérience va permettre de remédier à ce problème.

7.5 Interférences à N ondes

Une généralisation intéressante de l'expérience des trous de Young est obtenue en remplaçant les deux ouvertures du premier écran, sources secondaires d'ondes lumineuses, par un ensemble de N ouvertures. Pour N pair posons $N = 2m$ et plaçons les ouvertures en

$$\vec{x}_\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{2} + \ell d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ell = -m \cdots m - 1 \quad (7.54)$$

4. On a approximativement les gammes de longueur d'onde suivantes : rouge (630-780 nm), orange (630-570 nm) vert (520-570 nm) bleu (440-520 nm) violet (380-440 nm).

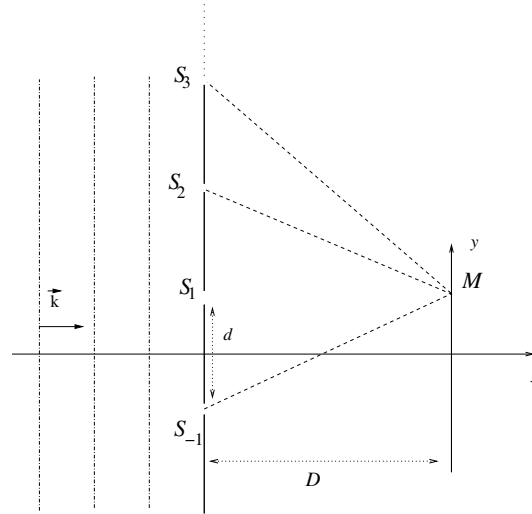


FIGURE 7.6 – Interférences à N ondes.

Elles sont placées uniformément selon l'axe Oy , séparées par une distance d , voir la figure 7.6.

On considère aussi que la source est à l'infini, sur l'axe Ox , pour simplifier les calculs. Les ouvertures sont donc situées sur le même plan d'onde et les sources secondaires associées sont en phase.

Les calculs sont similaires au cas de deux ondes. L'onde obtenue au point M est, en notation complexe, considérant les sources d'amplitude égale :

$$\tilde{\Psi}(M, t) \simeq \frac{A}{D} e^{i\omega t} \sum_{\ell=-m}^{m-1} e^{-i\kappa \|\vec{r}_\ell\|} \quad (7.55)$$

avec comme précédemment $\vec{r}_\ell = \vec{x} - \vec{x}_\ell$.

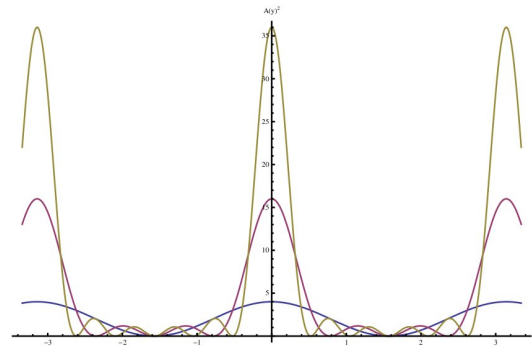


FIGURE 7.7 – Franges d'interférences pour N ondes, avec $N = 2, 4, 6$.

L'amplitude de l'onde résultante de la superposition des contributions venant des N ouvertures est donnée par :

$$\mathcal{A}(y)^2 = \frac{A^2}{D^2} \left| \sum_{\ell=-m}^{m-1} e^{-i\kappa \left(D + \frac{(y+d/2+\ell d)^2 + z^2}{2D} \right)} \right|^2 = \frac{A^2}{D^2} \left| \sum_{\ell=-m}^{m-1} e^{-\frac{2i\pi y \ell d}{\lambda D} - \frac{i\pi}{\lambda D} (\ell d)^2} \right|^2 \quad (7.56)$$

Tout les phases indépendantes de ℓ ont pu être sorties de la somme, et ne contribuent pas au module.

Afin de simplifier le résultat de ce calcul, on souhaite observer les franges d'interférences à grande distance de l'écran percé par les ouvertures ; nous souhaitons ainsi négliger, dans l'argument

de l'exponentielle de l'éq. (7.56), le terme en $\frac{i\pi}{\lambda D}(ld)^2$. Sa contribution est négligeable à la condition

$$\frac{\pi}{\lambda D}(ld)^2 \ll \pi, \quad \forall \ell = -N/2, \dots, N/2 \quad \Longrightarrow \quad D \gg \frac{(Nd)^2}{4\lambda} \quad (7.57)$$

Nous voyons que cette condition, dite de *champ lointain*, fait intervenir la « taille » totale Nd du réseau de trous de Young, ainsi que la longueur d'onde λ .

Dans le cadre de l'approximation (7.57), on obtient une série géométrique qui se calcule aisément :

$$\mathcal{A}(y)^2 = \frac{A^2}{D^2} \left| \sum_{\ell=-m}^{m-1} e^{-\frac{2i\pi y \ell d}{\lambda D}} \right|^2 = \frac{A^2}{D^2} \left| \sum_{u=0}^{2m-1} e^{-\frac{2i\pi y u d}{\lambda D}} \right|^2 = \frac{A^2}{D^2} \left| \frac{1 - e^{-\frac{4i\pi y m d}{\lambda D}}}{1 - e^{-\frac{2i\pi y d}{\lambda D}}} \right|^2 \quad (7.58)$$

On en déduit donc que l'amplitude prend la forme :

$$\mathcal{A}(y) = \frac{A}{D} \left| \frac{\sin \frac{\pi N y d}{\lambda D}}{\sin \frac{\pi y d}{\lambda D}} \right| \quad (7.59)$$

et pour l'intensité lumineuse on obtient :

$$I(y) = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\pi N y d}{\lambda D}}{\sin \frac{\pi y d}{\lambda D}} \right)^2 \quad (7.60)$$

Dans le cas $N = 2$ cela se ramène bien sûr au résultat pour les interférences à deux ondes. L'amplitude est maximale lorsque

$$\sin \frac{\pi N y d}{\lambda D} = 0 \text{ et } \sin \frac{\pi y d}{\lambda D} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_\ell = \frac{\lambda D}{d} \ell, \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (7.61)$$

est alors égale à

$$\mathcal{A}_{\text{MAX}} = \frac{AN}{D}. \quad (7.62)$$

L'écart entre ces franges brillantes est donné par le même interfrange (7.33) que pour les interférences à deux ondes.⁵

En visualisant graphiquement la fonction (7.59), voir fig. 7.7, on s'aperçoit que les franges brillantes sont de plus en plus « étroites » à mesure que N augmente. Dans la limite $N \rightarrow \infty$ elles deviennent infiniment fines ; nous y reviendrons pour étudier les réseaux.

7.6 Diffraction des ondes

L'étude des ondes lumineuses par l'optique géométrique, qui ne prend pas en compte leur nature ondulatoire, n'est plus valable lorsque les variations des propriétés des milieux traversés par ces ondes varient sur des échelles comparables à celle de leur longueur d'onde. Par exemple, lorsque des obstacles, au contours bien définis, sont placés sur leur trajet, la limite entre la partie éclairée et la partie restant dans l'ombre en amont de cet objet n'est pas très nette. Ce type d'effets est génériquement appelé *diffraction* des ondes. Ils apparaissent naturellement aussi pour des ondes acoustiques.

La compréhension de ce phénomène se fonde sur le principe de Huygens-Fresnel et le phénomène d'interférences.

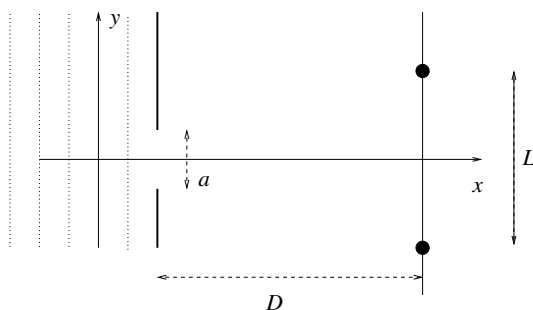


FIGURE 7.8 – Diffraction par une fente.

Diffraction par une fente infinie en champ lointain

Une expérience particulièrement simple permettant de visualiser le phénomène de diffraction est représentée sur la figure 7.8. On considère un écran éclairé par une source monochromatique, sur l'axe Ox . Si cette source est à grande distance, comme sur la figure, on peut considérer que l'écran reçoit une onde plane progressive sinusoïdale. Cet écran est percé d'une fente unique, de largeur a , étendue selon l'axe Oz . On observe l'intensité lumineuse sur un deuxième écran situé à une distance D du premier. Du point de vue de l'optique géométrique, nous aurions simplement sur le deuxième écran une zone éclairée de largeur a , le reste de l'écran n'étant pas éclairé du tout.

En utilisant le principe de Huygens-Fresnel nous savons que nous pouvons découper fictivement la fente en source ponctuelles, qui vont alors interférer entre elles. Une manière simple d'aborder le problème est d'utiliser les résultats précédents sur les interférences par N fentes infiniment fines, séparées entre elles par une distance d . On choisit d pour que la distance entre la première et la $N^{\text{ième}}$ fente soit

$$a = Nd \quad (7.63)$$

On considère maintenant la limite où le nombre de fentes tend vers l'infini, soit

$$N \rightarrow \infty, \quad d/\lambda \rightarrow 0, \quad Nd/\lambda \text{ fixé.} \quad (7.64)$$

Dans cette limite on garde la taille totale a du réseau de N fentes fixée (en unités de la longueur d'onde λ). De cette manière on obtient effectivement une fente unique de largeur a , obtenue par « coalescence » d'une infinité des fentes infinitésimales.

On se place toujours dans l'approximation de champ lointain (7.57), qui revient à observer à grande distance de la fente. Dans le contexte de la diffraction, cette condition s'appelle *condition de Fraunhofer* et se réécrit comme :

$$\boxed{D \gg \frac{a^2}{4\lambda}} \quad (7.65)$$

Cette condition de *diffraction en champ lointain* est satisfaite uniquement très loin de la fente.⁶

Reprenons maintenant l'expression obtenue pour la répartition d'intensité lumineuses pour les interférences à N ondes en champ lointain, équation (7.60), dans la limite continue (7.64). L'argument du sinus au dénominateur tend vers zéro dans la limite (7.64), à valeur de y fixée. On peut alors faire un développement limité de ce sinus au premier ordre. En redéfinissant le préfacteur I_0 ,

5. L'étude de la fonction (7.59) montre l'existence d'autres maxima locaux secondaires mais leur amplitude est bien plus faible que celle des maxima donnés par l'équation (7.61).

6. Pour $\lambda = 550 \text{ nm}$ et une fente de largeur 1 mm , on trouve la condition $D > 45 \text{ cm}$.

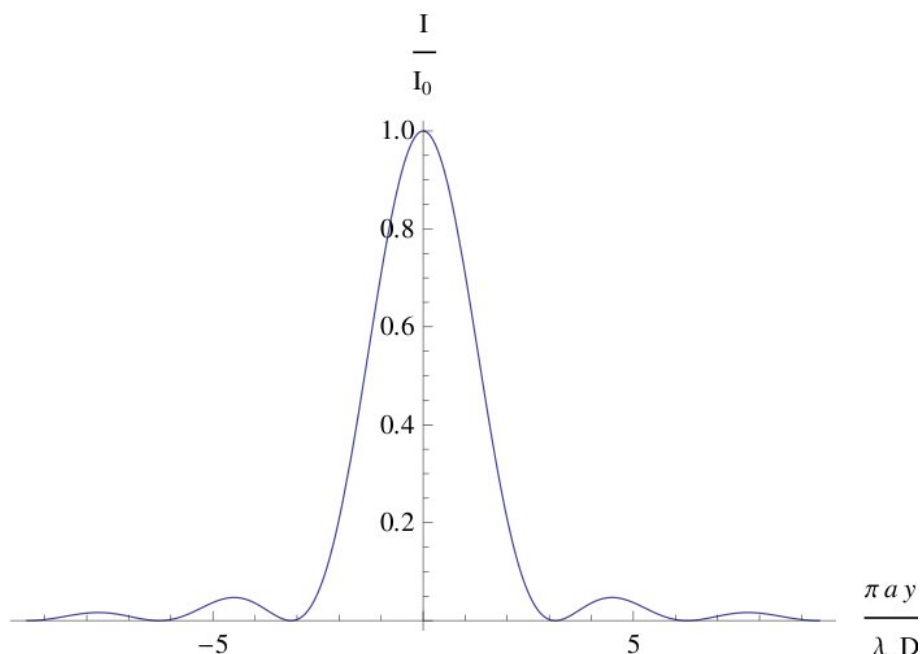


FIGURE 7.9 – Répartition d'intensité pour la diffraction par une fente infinie.

on obtient le résultat :⁷

$$I(y) = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\pi a y}{\lambda D}}{\frac{\pi a y}{\lambda D}} \right)^2 = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a y}{\lambda D} \right) \quad (7.66)$$

La répartition d'intensité obtenue, équation (7.66), est représentée sur la figure 7.9. L'intensité s'annule pour

$$\operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a y}{\lambda D} \right) = 0 \implies y_\ell = \frac{\ell \lambda D}{a}, \quad \ell \neq 0 \quad (7.67)$$

On obtient un « lobe » central, dont la largeur L est donnée par la différence entre les premières valeurs de y pour lesquelles l'intensité est nulle :

$$L = \frac{2\lambda D}{a} \quad (7.68)$$

qui concentre la grande majorité de l'énergie contenue dans l'onde lumineuse. Ce lobe central est entouré d'une infinité de lobes latéraux, de largeur $\lambda D/a$, dont l'amplitude décroît rapidement avec la distance à l'axe optique. Nous remarquons que la largeur du lobe central est d'autant plus grande (donc l'approximation d'optique géométrique d'autant plus mauvaise) que la largeur de la fente diminue, toutes choses étant égales par ailleurs.

Si on considère une fente rectangulaire, ayant une taille a selon l'axe Oy et b selon l'axe Oz , un calcul similaire nous donne la superposition des figures de diffraction par une fente selon les deux axes :

$$I(y, z) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a y}{\lambda D} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b z}{\lambda D} \right) \quad (7.69)$$

La répartition d'intensité est représentée figure 7.10.

7. On trouve sinon un préfacteur $N^2 I_0$ qui tend vers l'infini. Cela vient du fait que l'intensité de l'onde provenant de chaque fente doit être infinitésimale car elle vient de la division d'une intensité finie en une infinité de composantes, voir plus loin.

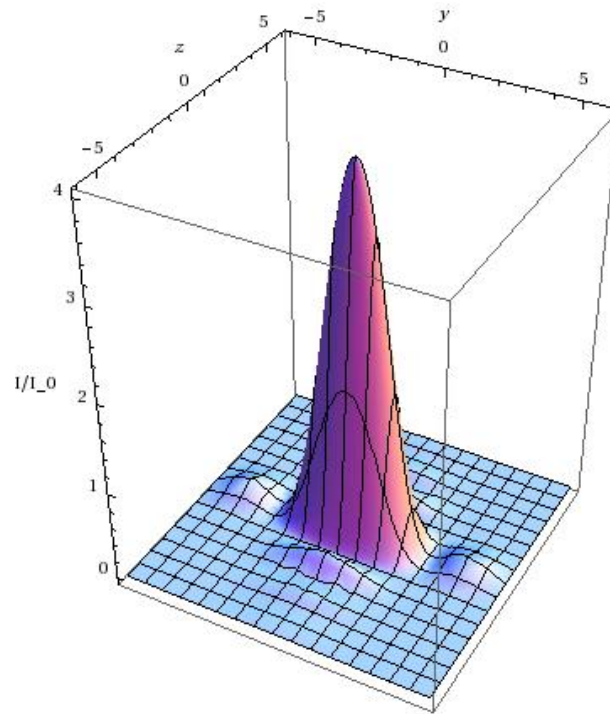


FIGURE 7.10 – Répartition d'intensité pour la diffraction par une fente rectangulaire.

Calcul continu de la diffraction par une fente

On découpe fictivement la fente en intervalles infinitésimaux selon Oy , de largeur dy . Suivant le principe de Huygens-Fresnel chacun de ces intervalles peut être assimilé à une source d'ondes sphériques sinusoïdales.^a La fente étant éclairée par une onde plane se propageant orthogonalement à Oy , toutes ces sources secondaires sont en phase car elles se situent dans un même plan d'onde. On cherche à exprimer la vibration lumineuse provenant d'une telle source secondaire située au point S d'ordonnée \hat{y} , reçue sur le deuxième écran au point M d'ordonnée y . On se place, comme pour les interférences, dans la limite où l'écran est placé à grande distance, soit $D \gg a$. L'expression de la vibration lumineuse est de la forme :

$$d\tilde{\Psi}(M, t) = \tilde{A} e^{i\omega\left(t - \frac{(SM)}{c}\right)} dy \quad (7.70)$$

en termes du chemin optique (SM) ; on néglige là aussi les variations de l'amplitude de l'onde avec la distance. Cette contribution est naturellement proportionnelle à la « taille » dy de l'intervalle considéré comme source secondaire. Les contributions des différents intervalles à la vibration lumineuses étant en relation de cohérence par construction, leur superposition va conduire à un phénomène d'interférences. Le chemin optique est donné par :

$$(SM) = n\sqrt{D^2 + (\hat{y} - y)^2} \stackrel{D \gg a}{\simeq} nD + \frac{n(\hat{y} - y)^2}{2D} \quad \text{pour} \quad |\hat{y}| < a \quad (7.71)$$

La contribution totale des différentes sources secondaires le long de la fente, observée au point M sur le deuxième écran, donne donc une vibration lumineuse

$$\tilde{\Psi}(M, t) = \int d\tilde{\Psi}(M, t) = \int_{-a/2}^{a/2} d\hat{y} \tilde{A} e^{i\omega t - \frac{2i\pi}{\lambda} \left(D + \frac{(\hat{y} - y)^2}{2D}\right)} = \tilde{A} e^{i\omega t - \frac{2i\pi}{\lambda} \left(D + \frac{y^2}{2D}\right)} \int_{-a/2}^{a/2} d\hat{y} e^{\frac{i\pi}{\lambda D} (2y\hat{y} - \hat{y}^2)} \quad (7.72)$$

Diffraction de Fraunhofer

Lorsque l'écran d'observation se situe à une grande distance nous pouvons simplifier le calcul en négligeant le terme en \hat{y}^2 dans l'intégrale devant le terme en $y\hat{y}$. Cela est possible si la condition de Fraunhofer (7.65) est satisfaite.

Dans cette approximation le calcul de l'intégrale (7.72) est aisé. On trouve

$$\tilde{\Psi}(M, t) = \tilde{A} e^{i\omega t - \frac{2i\pi}{\lambda} \left(D + \frac{y^2}{2D}\right)} \int_{-a/2}^{a/2} d\hat{y} e^{\frac{2i\pi}{\lambda D} y\hat{y}} = \tilde{A} e^{i\omega t - \frac{2i\pi}{\lambda} \left(D + \frac{y^2}{2D}\right)} \frac{\lambda D}{\pi y} \sin\left(\frac{\pi a y}{\lambda D}\right) \quad (7.73)$$

On retrouve alors une repartition d'intensité similaire à (7.66).

^a. En toute rigueur il faudrait aussi découper la fente en intervalles infinitésimaux selon Oz , mais la symétrie du problème garantit que le résultat ne dépendra pas de z .

Résolution des instruments d'optique

Les effets de la diffraction vont imposer une limitation fondamentale à la résolution des instruments d'optique. Considérons un télescope observant une étoile. Cette dernière, étant à très grande distance et de diamètre apparent sur le ciel très faible (10^{-2} secondes d'arc), peut être assimilée à une source (polychromatique) ponctuelle d'ondes planes, située à l'infini. En bonne approximation, le télescope est donc éclairé par une superposition d'ondes planes de diverses longueurs d'ondes, se propageant dans la même direction.

D'après les lois de l'optique géométrique, l'image de cette étoile au foyer image du télescope doit être ponctuelle, c.-à.-d. de diamètre infiniment petit (en négligeant les diverses aberrations liées au système optique).

Pour comprendre l'effet de la diffraction sur l'image, considérons pour commencer que l'ouverture du télescope dirigée vers le ciel a une forme carrée, de côté a . D'après les calculs précédents, nous savons que nous obtenons alors une figure de diffraction par une fente rectangulaire. La largeur du lobe central, selon chacun des axes, si on se place sur un écran à une distance D de l'ouverture, est de $L = 2\lambda D/a$, pour chaque longueur d'onde composant la lumière de l'étoile.

Si on observe à l'infini (ce qui est similaire à observer au foyer image d'un télescope), la largeur angulaire $\Delta\theta$ est telle que $\Delta\theta \simeq 2 \tan(\Delta\theta/2) = L/D$. On obtient alors, pour une longueur d'onde λ donnée :

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a} \quad (7.74)$$

Au lieu d'observer un objet parfaitement ponctuel, tout se passe comme si l'étoile correspondait à une source étendue de forme carrée, de dimension angulaire $\Delta\theta$.

Dans la réalité, l'ouverture du télescope est un cercle, de diamètre d . Cela rend le calcul de la figure de diffraction associée plus compliqué. On obtient que l'image de l'étoile est un petit disque (*disque de Airy*) dont le diamètre angulaire est donné par

$$\Delta\theta \simeq \frac{1,2 \lambda}{d}, \quad (7.75)$$

avec bien sûr un résultat en radians. Avec une longueur d'onde typique de 600 nm, on obtient qu'un télescope de 200 mm de diamètre (matériel amateur) a une résolution maximale de l'ordre de 0,7 secondes d'arc.

7.7 Réseau de diffraction

Pour faire la synthèse des différents phénomènes étudiés dans ce cours, nous conclurons par l'analyse d'un réseau de diffraction. Ce dispositif, qui met en jeu à la fois les interférences et la diffraction, permet de séparer les différentes longueurs d'ondes composant une onde lumineuse de manière beaucoup plus efficace qu'un prisme.

Considérons une expérience similaire à celle de la diffraction par une fente de largeur finie a , mais avec un très grand nombre N de fentes séparées par une distance d au lieu d'une seule, voir fig. 7.11. Nous considérons ce système dans le régime où la taille de chaque fente est très inférieure à la distance entre deux fentes successives :

$$a \ll d \quad (7.76)$$

À la différence des calculs faits dans la section 7.5, nous considérons que chaque fente est de largeur finie a , et non infinitésimale. Nous combinons ainsi les effets de la *diffraction* avec ceux des *interférences* à N ondes.

L'onde lumineuse passant par chaque fente va donner sur l'écran une figure de diffraction comme étudiée au dessus, qui au lieu d'être centrée en $y = 0$ va être centrée en l'ordonnée y correspondant

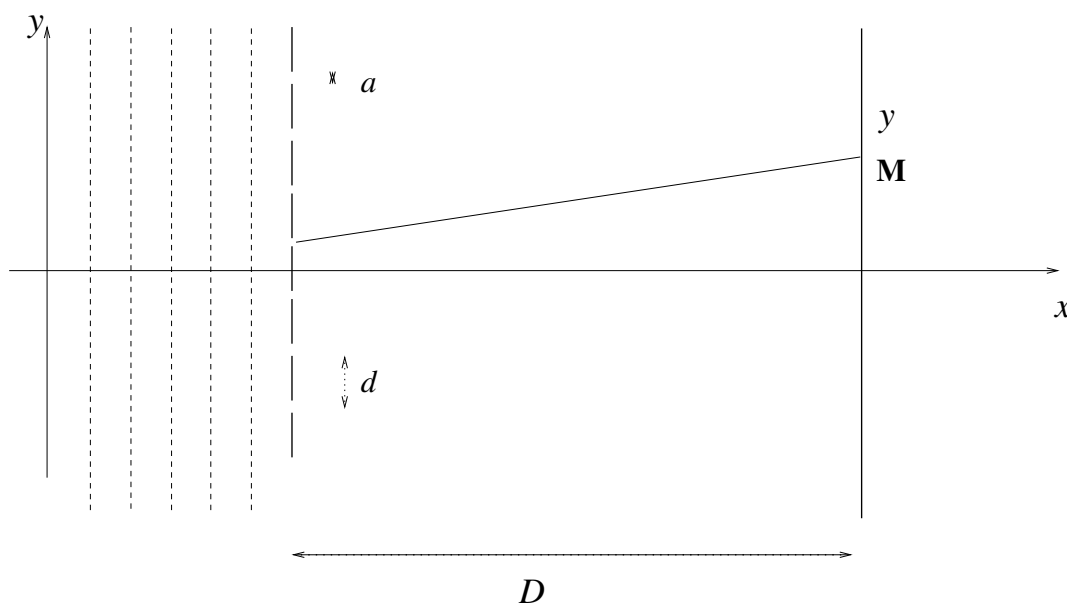


FIGURE 7.11 – Réseau de diffraction.

à celle de la fente elle-même, c'est à dire « en face » de celle-ci. Chacune de ces figures de diffraction a un lobe central de largeur

$$L = \frac{2\lambda D}{a} \quad (7.77)$$

Les vibrations lumineuses issues des différentes fentes, de la forme (7.73), étant en relation de cohérence, vont interférer entre elles. Nous avons ainsi la superposition du phénomène de diffraction et d'interférences à N fentes, avec un interfrange

$$\iota = \frac{\lambda D}{d} \quad (7.78)$$

Si $L \gg d$ nous pouvons négliger le « décalage » selon Oy entre les figures de diffraction issues des différentes fentes. En outre, dans le régime étudié, tel que $a \ll d$, nous avons

$$\iota \ll L \quad (7.79)$$

donc l'interfrange est beaucoup plus petit que la largeur des lobes de diffraction. La figure de diffraction commune à toutes les fentes peut alors être vue comme une « enveloppe » qui va moduler l'amplitude des franges d'interférences en fonction de y . Chaque lobe de diffraction va ainsi contenir un grand nombre de franges d'interférences.

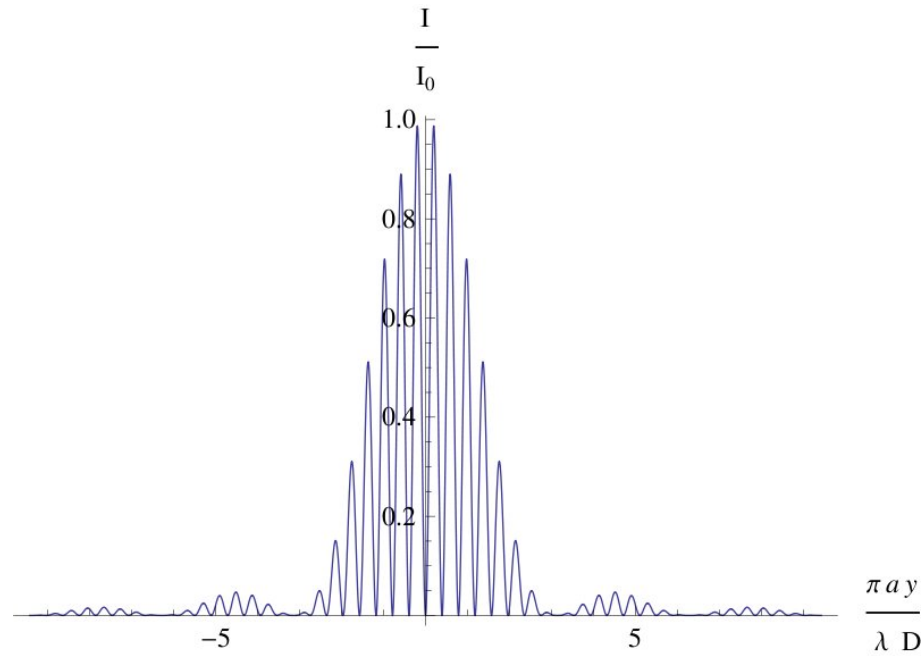
Combinant l'équation (7.60) donnant la figure d'interférences à N ondes et l'équation (7.66) donnant la figure de diffraction par une fente on obtient la répartition d'intensité suivante :

$$I(y) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a y}{\lambda D}\right) \left(\frac{\sin \frac{\pi N y d}{\lambda D}}{\sin \frac{\pi y}{\lambda D}}\right)^2 \quad (7.80)$$

Une représentation graphique est donnée par la figure 7.12.

Analyse spectrale

Dans la limite où le nombre de fentes par unité de longueur du réseau, habituellement donné en *nombre de traits par millimètre* est très élevé, un grand nombre de fentes vont être éclairées par la

FIGURE 7.12 – Répartition d'intensité pour un réseau de diffraction, avec $d = 8a$.

source d'onde lumineuses, et donc le nombre N de fentes participant au phénomène d'interférence sera très grand. Nous avons vu alors que les franges brillantes d'interférences sont extrêmement fines, c'est à dire que leur largeur à mi-hauteur selon l'axe Oy est très petite. Si nous considérons une lumière composée d'une superposition d'ondes monochromatiques à différentes longueurs d'ondes, chacune d'entre elles va donner une répartition d'intensité de la forme (7.12), avec un interfrange (7.78) dépendant de la longueur d'onde en question. Donc, à part pour la frange centrale en $y = 0$ (lorsque la source est sur l'axe) où les contributions des différentes longueurs d'ondes se superposent, on obtient des franges brillantes distinctes pour les différentes longueurs d'onde, à l'intérieur du lobe central de la figure de diffraction. Ceci permet d'analyser en détail la composition de l'onde lumineuse, c.-à.-d. l'intensité en fonction de la longueur d'onde. De tels réseaux sont utilisés de manière courante dans de nombreux domaines de la physique.

Chapitre 8

Effet Doppler

Une onde sinusoïdale est caractérisée par sa pulsation ω ou de manière équivalente par sa fréquence ν ou sa période T . Cette dernière grandeur correspond à l'intervalle temporel entre deux crêtes (ou maxima) de la grandeur représentant l'onde. Ces notions ne sont pas invariantes mais dépendent du référentiel de l'observateur et de celui de la source. La variation de ces grandeurs observée en passant d'un référentiel à l'autre s'appelle *effet Doppler*.

8.1 Effet Doppler en acoustique

Le raisonnement que nous allons conduire ci-dessous concerne uniquement les ondes mécaniques dans un milieu matériel. Considérons la propagation d'ondes sonores dans un fluide statique (c.-à.-d. qui ne subit pas d'écoulement). Il faut considérer trois référentiels galiléens distincts :

1. le référentiel \mathcal{R} lié au fluide, dans lequel se propage l'onde. L'équation d'onde (2.1), dans le cas des ondes sonores, s'applique dans ce référentiel-ci uniquement.
2. le référentiel \mathcal{E} lié à l'émetteur, c.-à.-d. à la source d'ondes sonores. Ce référentiel galiléen est animé d'une vitesse constante \vec{v}_E par rapport au référentiel \mathcal{R} .
3. le référentiel \mathcal{O} lié à l'observateur, qui détecte les ondes sonores. Ce référentiel galiléen est animé d'une vitesse constante \vec{v}_O par rapport au référentiel \mathcal{R} .

Pour simplifier on considère que la propagation et les translations uniformes des référentiels ont lieu selon une seule et même direction. Les vitesses v_E et v_O sont maintenant des grandeurs algébriques et non vectorielles, voir fig. 8.1. Les coordonnées sont données dans le repère attaché au référentiel \mathcal{R} lié au fluide.

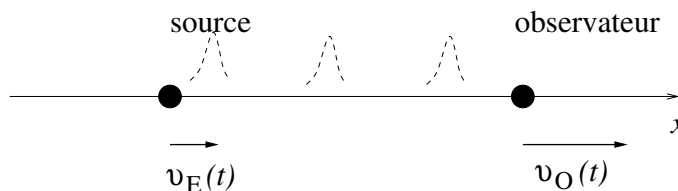


FIGURE 8.1 – Effet Doppler-Fizeau.

À un instant t quelconque, les coordonnées de la source et de l'observateur dans ce repère sont données par :

$$x_E(t) = X_E + v_E t \quad (8.1a)$$

$$x_O(t) = X_O + v_O t \quad (8.1b)$$

Considérons qu'à l'instant $t = 0$, la source – qui se situe alors en $x_E(0) = X_E$ – émet une première impulsion, c.-à.-d. un signal de durée très brève (négligeable devant le temps de propagation du signal), se propageant vers les x croissants; il s'agit donc d'onde *progressive*. Ce signal se propage alors dans le fluide vers les x croissants à une vitesse égale à la célérité c . À un instant $t > 0$ l'impulsion se situe en

$$x_1(t) = x_E(0) + ct = X_E + ct \quad (8.2)$$

En comparant avec l'éq (8.1b) on en déduit que le signal sera reçu par l'observateur à l'instant t_1 tel que

$$x_o(t_1) = x_1(t_1) \implies X_o + v_o t_1 = X_E + ct_1 \quad (8.3)$$

On en déduit que

$$t_1 = \frac{X_o - X_E}{c - v_o} \quad (8.4)$$

On voit que le signal ne pourra être réceptionné que si la vitesse de l'observateur est inférieure à la célérité des ondes sonores, c.-à.-d. si $v_o < c$.

On considère qu'à l'instant t_2 , la source – qui se situe alors en $x_E(t_2) = X_E + v_E t_2$ – émet une seconde impulsion, toujours vers les x croissants. À un instant $t > t_2$ l'impulsion qui se propage dans le fluide se situe en

$$x_1(t) = x_E(t_2) + c(t - t_2) = X_E + v_E t_2 + c(t - t_2) \quad (8.5)$$

Ce signal est alors reçu par l'observateur en $t_3 > t_2$ tel que

$$x_o(t_3) = x_1(t_3) \implies X_o + v_o t_3 = X_E + v_E t_2 + c(t_3 - t_2) \quad (8.6)$$

On en déduit que

$$t_3 = \frac{X_o - X_E + (c - v_E)t_2}{c - v_o} \quad (8.7)$$

Si l'émetteur continue à émettre des impulsions à intervalles réguliers, nous obtiendrons une onde périodique – mais non sinusoïdale – dont la période fixée par l'émetteur est

$$T_E = t_2 - 0 = t_2 \quad (8.8)$$

Par définition, la période du signal telle qu'elle est perçue par l'observateur est

$$T_o = t_3 - t_1 \quad (8.9)$$

En utilisant les équations (8.4,8.7) on en déduit que

$$T_o = \frac{(c - v_E)t_2}{c - v_o} \implies \boxed{T_o = \frac{1 - \frac{v_E}{c}}{1 - \frac{v_o}{c}} T_E} \quad (8.10)$$

Ce résultat montre clairement que la période du signal observée diffère de la période d'émission si les vitesses de la source ou de l'observateur sont non nulles par rapport au référentiel du fluide. Notons que ces deux vitesses apparaissent de manière dissymétrique.

La formule (8.10) est valable pour toute forme d'onde périodique, en particulier sinusoïdale. Il est plus usuel de présenter le résultat en termes de fréquences plutôt que de périodes. D'après l'éq. (2.23) on obtient la relation entre la fréquence émise ν_E et la fréquence perçue par l'observateur ν_o :

$$\boxed{\nu_o = \frac{1 - \frac{v_o}{c}}{1 - \frac{v_E}{c}} \nu_E} \quad (8.11)$$

Considérons comme un cas particulier le célèbre exemple de la sirène de pompiers. Dans ce cas l'observateur est fixe par rapport au fluide – en l'absence de vent ! – donc $v_o = 0$. Lorsque le camion de pompiers s'approche à une vitesse v , nous avons $v_E = v > 0$. On a donc $\nu_o = (1 - \frac{v}{c})^{-1} \nu_E$, qui est une fréquence supérieure à la fréquence émise ; la sirène apparaît alors plus aigüe. Lorsque le camion s'éloigne, nous avons $v_E = -v < 0$. La fréquence perçue par l'observateur est alors $\nu_o = (1 + \frac{v}{c})^{-1} \nu_E$, qui est une inférieure à la fréquence émise ; la sirène apparaît alors plus grave.¹

8.2 Effet Doppler-Fizeau

L'étude de l'effet Doppler appliquée aux ondes lumineuses est plus délicate et plus intéressante puisqu'elle est liée à la découverte de la théorie de la relativité restreinte. Nous savons maintenant – ce qui n'était pas acceptable à la fin du XIX^e siècle – qu'il n'y a pas de milieu assurant la propagation des ondes lumineuses ; en d'autres termes il n'y a pas de référentiel privilégié pour considérer leur propagation, contrairement à ce que nous avons vu ci-dessus pour les ondes sonores. L'équation d'ondes (2.1) est valable pour *tout référentiel d'inertie*. Il est hors du cadre de ce cours de dériver la formule de l'*effet Doppler-Fizeau relativiste*. La formule (8.11) établie plus haut pour des ondes mécaniques est fautive pour les ondes lumineuses,² mais devient une bonne approximation de la réalité si les vitesses de l'émetteur et de l'observateur sont petites devant la célérité des ondes lumineuses, c.-à.-d. pour $|v_E|/c \ll 1$ et $|v_o|/c \ll 1$. Dans ce cadre le développement limité de la relation (8.11) donne la formule pour l'effet Doppler non-relativiste des ondes lumineuses :

$$\boxed{\nu_o \stackrel{v_E, v_o \ll c}{\simeq} \left(1 - \frac{v_o - v_E}{c}\right) \nu_E} \quad (8.12)$$

Ce résultat ne dépend que de la vitesse *relative* $v_o - v_E$ de l'observateur par rapport à l'émetteur, ce qui est cohérent avec l'absence de référentiel privilégié.

1. Dans le cas où la direction de propagation et les mouvements sont quelconques dans l'espace, il est facile d'obtenir une formule similaire, qui fait apparaître les composantes *radiales* des vitesses, c.-à.-d. le long de la direction de propagation. Il faut faire attention au fait que même si les vitesses sont de normes constantes, leurs composantes radiales changent au cours du temps.

2. En particulier les vitesses de la source et de l'observateur apparaissent de manière dissymétrique, signalant l'existence d'un référentiel privilégié pour la propagation des ondes. Ceci est contraire aux postulats de la relativité restreinte concernant les ondes électromagnétiques.