

Leçons de physique - Agrégation de physique

Pierre-Henry SUET

3 juillet 2018

Table des matières

1	Contacts entre deux solides. Frottement	1
1.1	Contacts entre deux solides	2
1.1.1	Liaisons de contact	2
1.1.2	Contact ponctuel	3
1.2	Frottement de glissement	5
1.2.1	Lois phénoménologiques de G. Amontons et C.A. Coulomb	5
1.2.2	Détermination de μ et μ_S	6
1.3	Applications	8
1.3.1	Archet de violon	8
1.3.2	Expérience de Timochenko	11
1.3.3	Autres exemples	12
2	Gravitation	15
2.1	La gravitation : une forces centrale conservative	16
2.1.1	Expression de la force gravitationnelle	16
2.1.2	Définition	16
2.2	Mouvement général d'un point M soumis à la gravitation	17
2.2.1	Moment cinétique	17
2.2.2	Énergie mécanique	18
2.2.3	Étude des mouvements possibles et conditions d'existence	20
2.2.4	Équation polaire de la trajectoire	20
2.2.5	Energie mécanique et trajectoires	21
2.3	Études de trajectoires particulières	21
2.3.1	Trajectoire parabolique et vitesse de libération	21
2.3.2	Trajectoire elliptique et lois de Kepler	22
3	Caractère non galiléen du référentiel terrestre	25

3.1	Référentiels non galiléens	25
3.1.1	Théorème de la résultante cinétique dans un référentiel galiléen . . .	25
3.1.2	Différents référentiels	27
3.2	Rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique sup- posé galiléen	28
3.2.1	Variation du champ de gravitation terrestre avec la latitude	28
3.2.2	Déviations à l'Est	29
3.2.3	Pendule de Foucault	31
3.2.4	Autres exemples	33
3.3	Mouvement du référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocen- trique supposé galiléen	33
3.3.1	Terme de marée	34
3.3.2	Expression du terme de marée, ordre de grandeur	35
4	Précession dans les domaines macroscopique et microscopique	37
4.1	Approximation gyroscopique	38
4.1.1	Généralités	38
4.1.2	Approximation gyroscopique	39
4.1.3	Gyroscopie déséquilibré	39
4.1.4	Gyroscopie équilibré	41
4.2	Précession dans les domaines macroscopiques	43
4.2.1	Précession des équinoxes	43
4.2.2	Compas gyroscopique ou gyrocompas	47
4.3	Précession dans les domaines microscopiques	49
4.3.1	Précession d'un moment magnétique	49
4.3.2	Résonance magnétique	50
5	Lois de conservation en dynamique	53
5.1	Conservation de l'énergie	53
5.1.1	Forces conservatives	54
5.1.2	Exemples d'application	54
5.1.3	Forces de contact non conservatives	57
5.2	Conservation du moment cinétique	58
5.2.1	Mouvement à accélération centrale	58
5.2.2	Moment cinétique par rapport à un axe, solide en rotation	59
5.3	Conservation de la quantité de mouvement	59
5.3.1	Systèmes isolés, chocs élastiques	60
5.3.2	Système pseudo isolés	61
5.3.3	Systèmes ouverts, propulsion	61
5.3.4	Référentiels non galiléens, apesanteur	63

6 Cinématique relativiste	65
6.1 Rappels historiques	65
6.1.1 Mécanique classique et transformation de Galilée	65
6.1.2 Mise en défaut de la transformation de Galilée	67
6.2 Postulats de la relativité restreinte et transformation de Lorentz	69
6.2.1 Postulats de la relativité restreinte	69
6.2.2 Expériences de pensée, conséquences immédiates	70
6.2.3 Événements et intervalles	71
6.2.4 Transformation de spéciale de Lorentz	75
6.2.5 Composition des vitesses	77
6.3 Temps propre, longueur propre	78
6.3.1 Temps propre	78
6.3.2 Longueur propre	79
6.3.3 Exemples	80
6.4 Interprétation géométrique et quadrivecteurs	82
6.4.1 Interprétation géométrique et quadrivecteur "position"	82
6.4.2 Quadrivecteur vitesse	83
7 Dynamique relativiste	87
7.1 Dynamique relativiste	87
7.1.1 Quadrivecteur énergie impulsion	87
7.1.2 Quadrivecteur force	90
7.1.3 Le photon, particule de masse nulle	92
7.1.4 Le référentiel du centre de masse	93
7.2 Chocs élastiques	95
7.2.1 Définitions et propriétés générales	95
7.2.2 Effet Compton	96
7.2.3 Choc élastique de deux particules identiques, l'une en mouvement, l'autre immobile	98
7.3 Chocs inélastiques	103
7.3.1 Définition et propriétés générales	103
7.3.2 Energie de seuil	104
7.3.3 Désintégration d'une particule instable	106
7.3.4 Etude des noyaux	108
8 Notion de viscosité d'un fluide. Ecoulement d'un fluide	115
8.1 Notion de viscosité	116
8.1.1 Fluides newtoniens	116
8.1.2 Mesure de viscosité	118
8.1.3 Fluides non newtoniens	118
8.2 Dynamique d'un écoulement visqueux	121

8.2.1	Bilan des forces	121
8.2.2	Équation de Navier-Stokes	122
8.2.3	Le nombre de Reynolds	122
8.2.4	Exemple : Loi de Poiseuille	124
8.2.5	Trainée et portance	126
9	Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide	131
9.1	Écoulement d'un fluide parfait	132
9.1.1	Forces de contact	132
9.1.2	Écoulement parfait ; validité	133
9.2	Equation d'Euler et Théorème de Bernoulli	134
9.2.1	Equation d'Euler	134
9.2.2	Relations de Bernoulli	136
9.3	Applications	139
9.3.1	Effet Venturi	140
9.3.2	Vidange d'un réservoir ; formule de Torricelli	145
9.3.3	Autres applications	147
10	Phénomènes interfaciaux impliquant les fluides	149
10.1	Énergie de surface	150
10.1.1	Notion de tension de surface	150
10.1.2	Conséquences expérimentales	151
10.1.3	Rôle des tensio-actifs	152
10.2	Forces capillaires	153
10.2.1	Expression de la force capillaire	153
10.2.2	Mesure et propriétés de la tension superficielle	154
10.2.3	Théorème de Laplace	155
10.3	Mouillage	158
10.3.1	Angle de contact	158
10.3.2	Ascension capillaire	160
11	Gaz parfaits, gaz réels	163
11.1	L'état gazeux	163
11.1.1	Caractérisation expérimentale des gaz à basse pression	163
11.1.2	Caractérisation des gaz réels	164
11.1.3	Définition d'un gaz parfait	165
11.2	Grandeurs macroscopiques et équation d'état du gaz parfait	165
11.2.1	Pression cinétique P_C	165
11.2.2	Température cinétique T_C	167
11.2.3	Equation d'état d'un gaz parfait	168
11.2.4	Energie interne U	168

11.3 Du gaz parfait au gaz réel	169
11.3.1 Les limites du gaz parfait	169
11.3.2 Le modèle des sphères dures	170
12 Premier principe de la thermodynamique	173
12.1 Travail W	174
12.1.1 Travail reçu, travail fourni	174
12.1.2 Transformation quasi-statique	177
12.2 Chaleur Q	178
12.3 Energie interne d'un système U	180
12.3.1 Définition	180
12.3.2 U : Fonction d'état du système	181
12.4 Premier principe de la Thermodynamique	182
12.5 Transformations remarquables d'un gaz parfait	183
12.5.1 Transformation isochore d'un gaz parfait (à volume constant)	183
12.5.2 Transformation isobare d'un gaz parfait (à pression constante)	185
12.5.3 Transformation isotherme d'un gaz parfait (à température constante)	187
12.5.4 Transformation adiabatique d'un gaz parfait	188
12.6 Calorimétrie	190
13 Evolution et condition d'équilibre d'un système thermodynamique fermé	193
13.1 Rappel sur la notion de potentiel	194
13.1.1 En mécanique	194
13.1.2 Exemple de l'entropie	195
13.2 Définition des potentiels thermodynamiques F^* et G^* et des fonctions d'état F et G	196
13.2.1 Evolutions monothermes, potentiel thermodynamique F^* et fonction énergie libre F	198
13.2.2 Système soumis à des transformations monothermes	198
13.2.3 Evolutions monothermes et monobares, potentiel thermodynamique G^* et fonction enthalpie libre G	202
13.2.4 Exemple 2 :	206
13.3 Quelques exemples et applications	207
13.3.1 Etude d'une pile isobare et isotherme (travail utile)	207
13.3.2 Equilibre chimique et condition d'équilibre	208
13.3.3 Application au corps pur sous deux phases	210
14 Machines thermiques réelles	213
14.1 Les machines thermiques : définitions et équations utiles	213
14.1.1 Caractérisation expérimentale des gaz à basse pression	213

14.1.2	Application du premier principe de la thermodynamique aux machines thermiques	214
14.1.3	Application du deuxième principe aux machines thermiques	214
14.2	Types de machines thermiques	215
14.2.1	Les machines monothermes	215
14.2.2	Les machines thermique	216
14.3	Etude des machines thermiques	217
14.3.1	Les moteurs dithermes	217
14.3.2	Les récepteurs	218
14.4	Exemples de machines thermiques réelles	220
14.4.1	Le cycle Beau de Rochas	220
14.4.2	Le cycle Diesel	225
14.4.3	Réfrigérant à ammoniac	229
15	Transition de phases	233
15.1	Généralités	233
15.1.1	Mise en évidence expérimentale	233
15.1.2	Les états de la matière	234
15.1.3	Définitions	235
15.1.4	Variance	236
15.1.5	Les différentes diagrammes	237
15.2	Retards aux transitions de phase	241
15.2.1	Retard à la solidification (surfusion)	242
15.2.2	Retard à la liquéfaction (vapeur sursaturante)	242
15.2.3	Retard à la vaporisation (surchauffe)	242
15.2.4	Compatibilité avec le 2ème principe - Exemple de la glace	242
15.3	Equilibre d'un corps pur sous plusieurs phases	243
15.3.1	Equilibre d'un corps pur sous deux phases	244
15.3.2	Fonctions d'état d'un corps pur diphasé	245
15.3.3	Equilibre d'un corps pur sous trois phases	247
15.4	Classification de Ehrenfest des transitions de phase	248
15.4.1	Les dérivées de la fonctions enthalpie libre massique	248
15.4.2	Transitions de phase de 1ère espèce	249
15.4.3	Transitions de phase de 2ème espèce et au delà	251
15.4.4	Exemple de la transition liquide-vapeur d'un fluide	253
16	Facteur de Boltzmann	255
16.1	Atmosphère en équilibre isotherme	255
16.1.1	Modèle	255
16.1.2	Equation de nivellement barométrique	256
16.1.3	Ordres de grandeur et limites du modèle isotherme	257

16.2	Le facteur de Boltzmann	258
16.2.1	Interprétation statistique de l'équation de nivellement barométrique	258
16.2.2	Généralisation du facteur de Boltzmann	259
16.2.3	Limites d'utilisation du facteur de Boltzmann	261
16.3	Applications du facteur de Boltzmann	262
16.3.1	Système à deux niveaux : paramagnétisme de Brillouin	262
16.3.2	Distribution des vitesses des particules dans un gaz	264
16.3.3	Séparation isotopique des configurations	265
17	Rayonnement d'équilibre thermique. Corps noir	269
17.1	Rayonnement d'équilibre thermique	269
17.1.1	Corps transparents, corps opaques, notion de flux	269
17.1.2	Rayonnement d'équilibre thermique dans une enceinte isotherme fermée	271
17.1.3	Densité spectrale du rayonnement d'équilibre thermique	271
17.2	Corps noir	274
17.2.1	Définition du corps noir	274
17.2.2	Corps noir à l'équilibre thermique local	275
17.2.3	Corps opaques quelconques	275
17.3	Applications	276
17.3.1	Applications de la vie courante	276
17.3.2	Pyrométrie à disparition de filament	276
17.3.3	Refroidissement des fusées	276
17.3.4	Rayonnement à 3 K	276
18	Phénomènes de transport	279
18.1	Diffusion moléculaire	279
18.1.1	Mise en évidence expérimentale	280
18.1.2	Approche macroscopique	281
18.1.3	Approche microscopique de la diffusion gazeuse	287
18.1.4	Diffusion moléculaire dans les liquides	290
18.2	Diffusion thermique	291
18.2.1	Approche macroscopique	292
18.2.2	Applications	298
18.3	Diffusion de charges	301
18.3.1	Diffusion de quantité de mouvement	302
18.3.2	Définition macroscopique de la viscosité	302
18.3.3	Equation de diffusion de la quantité de mouvement	303
18.4	Résumé sur les phénomènes de diffusion	303
18.4.1	Généralités	303
18.4.2	Phénomènes de transport et irréversibilité	304
18.4.3	Remarque sur les phénomènes de propagation et par ondes	304

19 Bilans thermiques : flux diffusifs, convectifs et radiatifs	307
19.1 Flux diffusif	308
19.1.1 Mise en évidence expérimentale	308
19.1.2 Loi de Fourier	308
19.2 Flux convectif	309
19.2.1 Description et modélisation	309
19.2.2 La loi de Newton	311
19.3 Flux radiatif	311
19.3.1 Mise en évidence expérimentale	312
19.3.2 Loi de Stefan-Boltzmann	313
19.4 Applications	314
19.4.1 Équation de la chaleur	314
19.4.2 Notion de résistance thermique	317
20 Conversion de puissance électromécanique	323
20.1 Mise en évidence du couplage électromécanique	324
20.1.1 Définition	324
20.2 Le haut parleur électrodynamique	325
20.2.1 Description du système	325
20.2.2 Mise en équation	326
20.3 Bilan énergétique	327
20.4 La machine à courant continu	328
20.4.1 Modélisation	328
20.4.2 Spire en rotation dans un champ magnétique statique	329
20.4.3 Le moteur à excitation indépendante : application à l'entraînement d'une charge	330
21 Induction électromagnétique	333
21.1 Le phénomène d'induction	333
21.1.1 Faits expérimentaux	333
21.1.2 Loi de Lenz	334
21.1.3 Loi expérimentale de Faraday	334
21.2 Champ électromoteur et force électromotrice sur une portion de circuit	334
21.2.1 Loi d'Ohm	334
21.2.2 Force électromotrice induite sur une portion de circuit	335
21.3 Cas d'un circuit fixe dans un champ variable (Cas de Neumann)	336
21.3.1 Loi de Faraday	336
21.3.2 Application pour les circuits filiformes : Induction mutuelle	337
21.3.3 Application au chauffage par induction	337
21.4 Cas d'un circuit mobile dans un champ variable	338
21.4.1 Application : cas du haut-parleur/ microphone électrodynamique	338

21.4.2 Freinage par induction	339
22 Rétroaction et oscillations	341
22.1 Systèmes bouclés linéaires, invariants	342
22.1.1 Définition	342
22.1.2 Comportement et stabilité d'un système	343
22.1.3 Cas des systèmes bouclés	344
22.2 Systèmes asservis	345
22.2.1 Définition	345
22.2.2 Critères d'asservissement	345
22.2.3 Correcteurs	347
22.3 Systèmes oscillants - oscillateurs	348
22.3.1 Système oscillant et pertes	348
22.3.2 Système oscillant et démarrage	349
23 Traitement d'un signal. Etude spectrale	351
23.1 Analyse fréquentielle d'un signal électrique	352
23.1.1 Système électrique linéaire invariant dans le temps	352
23.1.2 Fonction de transfert harmonique	353
23.1.3 Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier	353
23.1.4 Exemple de décomposition : le signal créneau	355
23.2 Les filtres linéaires	355
23.2.1 Définitions	355
23.2.2 Comment représenter la fonction de transfert d'un filtre : diagramme de Bode	355
23.2.3 Le filtre passe-bas du 1er ordre : exemple du circuit RC	356
23.2.4 Le filtre passe-bande du 2nd ordre	357
23.3 Application : détection synchrone	357
23.3.1 Principe de la détection synchrone	357
23.3.2 Application à la mesure d'une fonction de transfert d'un système linéaire	358
23.3.3 Action d'une non linéarité sur le filtrage	358
24 Ondes progressives. Ondes stationnaires	361
24.1 Etude de la corde vibrante	362
24.1.1 Modèle	362
24.1.2 Etude du mouvement	362
24.1.3 Solution de l'équation de d'Alembert	363
24.1.4 Aspects énergétiques de la propagation	365
24.2 Systèmes discrets	369
24.2.1 Chaîne infinie d'oscillateurs couplés	369

24.2.2	Chaîne de pendules couplés	371
25	Ondes acoustiques	373
25.1	Approximation acoustique	373
25.1.1	Hypothèses	373
25.1.2	Linéarisation des équations de mécanique des fluides	374
25.2	Equation de propagation	376
25.2.1	Equation de propagation	376
25.2.2	Célérité des ondes sonores	377
25.2.3	Aspect énergétique : bilan local	378
25.2.4	Solution générale de l'équation de propagation	379
25.3	Ondes acoustiques planes monochromatiques progressives monochromatiques	379
25.3.1	Structure longitudinale	380
25.3.2	Aspect énergétique	380
25.3.3	Ordres de grandeurs et validité de l'approximation acoustique	381
26	Propagation avec dispersion	383
26.1	Propagation dans un milieu dispersif	383
26.1.1	Mise en défaut de l'équation de D'Alembert	383
26.1.2	Equation de dispersion	384
26.2	Paquet d'ondes planes	388
26.2.1	OPPM = outil mathématique	388
26.2.2	Représentation de la propagation d'un paquet d'ondes	388
26.2.3	Vitesse de groupe et évolution	389
27	Propagation guidée des ondes	391
27.1	Le guide d'ondes	391
27.1.1	Description des guide d'ondes	391
27.1.2	Propagation de modes TE dans un guide d'ondes à section rectangulaire	393
27.2	La fibre optique	397
27.2.1	Mise en équation et résolution	397
27.2.2	Discussion des solutions - notion de mode	399
27.2.3	Distribution de l'amplitude et de l'intensité	400
27.2.4	Atténuation et dispersion	400
28	Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques	403
28.1	Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques	404
28.1.1	Rappels des équations de Maxwell dans les milieux	404
28.1.2	Approximation des milieux linéaires, homogènes et isotropes	404
28.1.3	Equation de propagation dans un milieu diélectrique linéaire, homo- gène et isotrope	406

28.2	Modélisations microscopiques	408
28.2.1	Autres types de polarisation	413
28.3	Applications	413
28.3.1	Spectroscopie : dispersion de la lumière dans un prisme	414
29	Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs	417
29.1	Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur	417
29.1.1	Equation de propagation	417
29.1.2	Effet de peau	419
29.1.3	Le modèle du conducteur parfait	419
29.2	Réflexion sur un conducteur parfait	420
29.2.1	Onde incidente et onde réfléchie	420
29.2.2	Courant de surface	422
29.2.3	Onde stationnaire	422
29.2.4	Bilan de puissance	423
29.2.5	Conducteur réel	423
29.3	Cavité électromagnétique	424
29.3.1	Introduction	424
29.3.2	Cavité à une dimension sans perte	424
30	Rayonnement dipolaire électrique	429
30.1	Caractéristiques du rayonnement dipolaire électrique	430
30.1.1	Cadre de l'étude - Approximations	430
30.1.2	Expression des champs	430
30.1.3	Propriétés remarquables du rayonnement dipolaire électrique	432
30.1.4	Calcul de la puissance rayonnée	433
30.2	Application aux antennes	434
30.2.1	Approximation dipolaire de l'antenne	434
30.2.2	Résistance au rayonnement	435
30.2.3	Réseaux d'antennes linéaires	436
30.3	Diffusion de la lumière solaire	437
30.3.1	Résultats expérimentaux	437
30.3.2	Diffusion de la lumière par les molécules de l'air	437
30.3.3	Atténuation de la lumière	438
30.3.4	Polarisation par diffusion	439
31	Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat	441
31.1	Le modèle du rayon lumineux	442
31.1.1	Approche expérimentale	442
31.1.2	Notion de rayon lumineux	442
31.2	Principe de Fermat et conséquences	442

31.2.1	Enoncé du principe de Fermat (1650)	443
31.2.2	Formulation mathématique	443
31.2.3	Conséquences	443
31.3	Lien avec le modèle ondulatoire	446
31.4	Applications	448
31.4.1	Réflexion totale	448
31.4.2	Mirages et principe des lentilles	448
31.4.3	Fabrication d'un système rigoureusement stigmatique	449
32	Microscopies optiques	451
32.1	Présentation du microscope et étude géométrique	452
32.1.1	Caractéristique d'un instrument d'optique	452
32.1.2	Éléments constitutifs	452
32.1.3	Schéma des rayons	452
32.1.4	Conjugaison et latitude de mise au point	453
32.1.5	Grossissement, grandissement et puissance	453
32.2	Luminosité, résolution et champ	455
32.2.1	Eclairage et luminosité	455
32.2.2	Pouvoir de résolution	456
32.2.3	Champ transverse et longitudinal	457
32.3	Correction des aberrations géométrique et chromatique	458
32.3.1	Condition de stigmatisme rigoureux	458
32.3.2	Correction de l'aberration chromatique	458
32.3.3	Autres aberrations à corriger	459
33	Interférences à deux ondes en optique	461
33.1	Obtention d'interférences à deux ondes en optique	462
33.1.1	Les détecteurs en optique	462
33.1.2	Superposition de deux ondes monochromatiques	462
33.1.3	Condition d'obtention d'interférences	464
33.1.4	Notion de contraste	465
33.1.5	Exemple : expérience des trous d'Young	466
33.2	Cohérence temporelle	467
33.2.1	Modèle des trains d'onde (point de vue temporel)	467
33.2.2	Largeur de raie (point de vue spectral)	469
33.3	Introduction à la cohérence spatiale	471
34	Interférométrie à division d'amplitude	475
34.1	Interféromètre à 2 ondes	476
34.1.1	Interférences sur des lames	476
34.1.2	Interféromètre de Michelson	478

34.1.3 Applications de l'interféromètre de Michelson	480
34.2 Interféromètre à N ondes	483
34.2.1 Lames à N ondes	483
34.2.2 Interféromètre de Fabry-Pérot	485
34.2.3 Applications de l'interféromètre de Fabry-Pérot	486
35 Diffraction de Fraunhofer	489
35.1 Interprétation ondulatoire	489
35.2 Diffraction de Fraunhofer	490
35.2.1 Définition	490
35.2.2 Méthode d'observation	491
35.2.3 Formule de Fraunhofer	492
35.2.4 Exemple du trou rectangulaire	493
35.3 Rôle de la diffraction dans la formation d'images	494
35.4 Applications	496
35.4.1 Filtrage spatial	496
35.4.2 Effet Speckle	496
35.4.3 Autres exemples possibles	497
36 Diffraction par des structures périodiques	499
36.1 Diffraction par un réseau sinusoïdal - décomposition en ondes planes	500
36.1.1 Réseau sinusoïdal	500
36.1.2 Diffraction par un réseau 1D quelconque	501
36.1.3 Application	502
36.2 Diffraction d'électrons de basse énergie	504
36.3 Diffraction de rayons X et cristallographie	505
36.3.1 Présentation	505
36.3.2 Observation	505
36.3.3 Calcul	505
36.4 Application à la détermination de l'orientation d'un cristal	506
37 Emission et absorption de lumière	507
37.1 Interaction matière - rayonnement : modèle d'Einstein	507
37.1.1 Processus élémentaires	508
37.1.2 Absorption	508
37.1.3 Bilan des populations	510
37.1.4 Equilibre thermodynamique matière - rayonnement	510
37.1.5 Bilan de puissance	511
37.1.6 Limites du modèle	511
37.2 Le LASER	511
37.2.1 Système à trois niveaux	512

37.2.2	Cavité résonante	513
37.2.3	Une application : refroidissement d'atomes par LASER	513
37.2.4	Le Lidar	514
38	Aspects corpusculaires du rayonnement. Notion de photon	515
38.1	L'apparition de la quantification de l'énergie	516
38.1.1	Expérience de Hertz (1887) et Halbwachs (1888)	516
38.1.2	Rayonnement du corps noir	516
38.2	L'apparition du photon, ses caractéristiques	518
38.2.1	Einstein et l'effet photoélectrique	518
38.2.2	Effet Compton	520
38.2.3	Caractéristiques du photon	523
38.3	Interaction rayonnement-matière	524
38.3.1	Absorption de photon	524
38.3.2	Emission de photon	524
39	Aspects ondulatoires de la matière. Notion de fonction d'onde	527
39.1	Comportement ondulatoire de la matière	528
39.1.1	Rappels	528
39.1.2	L'expérience de Franck et Hertz	528
39.1.3	Les ondes de De Broglie	530
39.2	Description quantique ondulatoire de la matière	531
39.2.1	Expérience de pensée : interférences d'électrons	531
39.2.2	Description en termes de probabilité de présence : notion de fonction d'onde	532
39.3	Dynamique de la fonction d'onde	533
39.3.1	Equation de Schrödinger	533
39.3.2	Paquet d'onde	535
39.3.3	Inégalités d'Heisenberg	536
40	Confinement d'une particule et quantification de l'énergie	539
40.1	Les débuts de la mécanique quantique	540
40.1.1	Faits expérimentaux et lois empiriques	540
40.1.2	Le modèle de Bohr	541
40.2	L'apport de la mécanique quantique	544
40.2.1	Description de l'atome	544
40.2.2	Quantification des niveaux	545
40.2.3	Classification	546
40.3	Preuve expérimentale	547
40.3.1	Expérience de Franck et Hertz	547
40.3.2	Application : horloges à atomes froids	548

41 Effet tunnel	549
41.1 Traversée d'une barrière de potentiel	549
41.1.1 Généralités : barrière quelconque	549
41.1.2 Transparence d'une barrière rectangulaire	551
41.2 Applications	553
41.2.1 Traversée classique	553
41.2.2 Microscope à effet tunnel	553
41.2.3 Radioactivité α	554
42 Fission, Fusion	557
42.1 Caractéristiques du noyau	557
42.1.1 Composition	557
42.1.2 Les isotopes	558
42.1.3 L'énergie de liaison nucléaire	558
42.1.4 Le modèle de la goutte liquide	560
42.2 Fission	561
42.3 Fusion	564
43 Evolution temporelle d'un système quantique à deux niveaux	567
43.1 Résonance magnétique nucléaire (RMN)	568
43.1.1 Spin 1/2 dans un champ magnétique périodique	568
43.1.2 Oscillations de Rabi	571
43.1.3 Principes de l'IRM et de la RMN	574
43.2 La molécule d'ammoniac	577
43.2.1 La molécule d'ammoniac comme système à deux niveaux	577
43.2.2 La molécule dans un champ électrique : le maser à ammoniac	579
43.2.3 Transitions hors résonance	584
43.3 Atome à deux niveaux	587
43.3.1 Absorption et émission des photons	587
44 Capacités thermiques : description, interprétations microscopiques	593
44.1 Rappels de thermodynamique classique	593
44.1.1 La capacité thermique	593
44.1.2 Loi de distribution de Boltzmann	594
44.1.3 Le système à deux niveaux	595
44.2 Capacité thermique des gaz	597
44.2.1 Théorème d'équipartition de l'énergie	597
44.2.2 Capacité thermique molaire des gaz parfaits	598
44.2.3 Données expérimentales	599
44.3 Capacité thermique des solides	600
44.3.1 Loi de Dulong et Petit	600

44.3.2	Comportement à basse température	600
45	Paramagnétisme, ferromagnétisme : approximation du champ moyen	605
45.1	Origine du magnétisme microscopique : moments magnétiques	607
45.1.1	Moment magnétique d'origine orbital	607
45.1.2	Moment magnétique dû au spin	608
45.1.3	Moment magnétique orbital	609
45.2	Interprétation microscopique du paramagnétisme	609
45.2.1	Modèle semi-classique de Langevin	609
45.2.2	Prise en compte de la quantification : modèle de Brillouin	611
45.2.3	Application : refroidissement par désaimantation adiabatique	613
45.3	Ferromagnétisme à l'échelle microscopique. Approximation du champ moyen	614
45.3.1	Modèle phénoménologique de Weiss	614
45.3.2	Origine du champ moléculaire	616
46	Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques	619
46.1	Description macroscopique des milieux ferromagnétiques	620
46.1.1	Rappel : magnétisme dans la matière	620
46.1.2	Aperçu expérimental	620
46.1.3	Généralisation : description d'un milieu ferromagnétique	621
46.1.4	Aspect énergétique	622
46.2	Milieux ferromagnétiques doux	624
46.2.1	Confinement des lignes de champ	624
46.2.2	Application : l'électroaimant	625
46.3	Milieux ferromagnétiques durs	626
46.3.1	Aimant permanent	626
46.3.2	Les mémoires magnétiques	627
47	Mécanisme de la conduction électrique dans les solides	629
47.1	Le courant électrique	630
47.2	Loi d'Ohm	631
47.2.1	Modèle	631
47.2.2	Conducteurs, semi-conducteurs, isolants	634
47.2.3	Expression intégrale de la loi d'Ohm	634
47.2.4	Effet Hall	635
47.3	Notion de structure de bandes	636
47.3.1	Description	636
47.3.2	Rôle de T et des impuretés	637
48	Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique	639
48.1	Etude d'un système mécanique résonant	640

48.1.1 Etude en position	640
48.1.2 Etude en vitesse	644
48.1.3 Aspect énergétique	645
48.1.4 Lien avec l'oscillateur libre	647
48.2 Généralisation	648
48.2.1 Analogie formelle	648
48.2.2 Application au RLC série	648
48.2.3 Extension de la définition	653
48.3 Du macroscopique au microscopique : du discret au continu	653
48.3.1 Oscillateurs couplés	653
48.3.2 Cavité Fabry-Pérot	654
49 Oscillateurs : portraits de phase et non linéarités	661
49.1 Anharmonicité des oscillations libres du pendule pesant	662
49.1.1 Portraits de phase	662
49.1.2 Harmonicit� du régime linéaire	662
49.1.3 Anharmonicité du régime non linéaire	663
49.2 Oscillations forc�es d'un oscillateur non linéaire	664
49.2.1 Rappel : régime linéaire	664
49.2.2 Régime non linéaire	665
49.3 Oscillations auto entretenues	666
49.3.1 L'équation de Van de Pol	666
49.3.2 Réalisation expérimentale	667
49.3.3 Comportement dynamique	668

Contacts entre deux solides. Frottement



Bibliographie

- *Mécanique*, Pérez, Masson
- *Mécanique 1 et 2*, Bertin, Faroux, Renault, Dunod

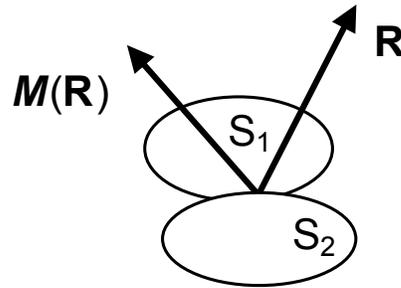
Introduction

Dans cette leçon nous utiliserons les théorèmes fondamentaux de la mécanique ; le théorème de la résultante cinétique (TRC) et le théorème du moment cinétique (TMC). Dans de nombreux systèmes physiques, il arrive que des solides soient en contact. Les forces qui s'exercent sur chaque solide dépendent d'un grand nombre de paramètres liés à la surface de contact et il est impossible d'en donner un modèle simple comme on le fait pour les forces de gravitation et électromagnétiques agissant à distance. Nous allons donc utiliser des lois empiriques qui vont nous permettre de montrer l'importance du frottement et son utilité dans différents problèmes.

1.1 Contacts entre deux solides

1.1.1 Liaisons de contact

Deux solides peuvent être en contact de façon ponctuel (bille sur un plan), linéaire (cylindre sur un plan) ou surfacique (plan sur plan). Dans chaque cas la nature des forces de contact est complexe et ne peut être déterminée précisément qu'en prenant en compte l'interaction microscopique des atomes ou molécules à la surface de contact.



On peut néanmoins modéliser grossièrement ces forces à l'aide de lois empiriques. Mais l'expression du torseur \mathcal{T} des forces de contact en un point de la surface de contact, reste inconnu.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{array} \right\}_O$$

C'est pourquoi la simple donnée des six équations scalaires obtenues en écrivant le TRC et le TMC et en les projetant sur une base orthonormé \mathcal{B} ne suffit pas en général pour résoudre complètement un problème de mécanique.

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{O,\mathcal{B}}$$

C'est le type de la liaison ; pivot glissant, pivot, sphérique ou simplement, unilatérale ou bilatérale, qui permet de réduire le nombre de degrés de liberté du problème (six au départ), de façon à ce que le nombre de paramètres soit identique aux nombres d'équations.

Par exemple, pour une liaison pivot il y a un degré de liberté qui est l'angle de rotation θ , six inconnues correspondant aux composantes scalaires de R et $M_O(R)$ calculés en un point O de l'axe de rotation Oz . Si l'on suppose la liaison parfaite, $M_{Oz}(R)$ est nul et il reste six inconnues pour six équations.

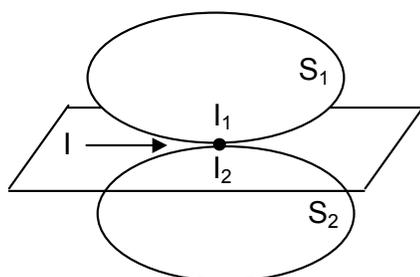
1.1.2 Contact ponctuel

Vitesse de glissement

Dans un référentiel galiléen R , on considère deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel au point géométrique I .

Le point I_1 est le point coïncidant à I et appartient au solide S_1 .

Le point I_2 est le point coïncidant à I et appartient au solide S_2 .



En appliquant la relation de composition des vitesses au point I_1 par rapport à R et au référentiel relatif S_2 , la vitesse d'entraînement étant celle du point coïncidant I_2 , il vient :

$$\vec{v}_{I_1/R} = \vec{v}_{I_1/S_2} + \vec{v}_{I_2/R}$$

La vitesse de glissement de S_1 sur S_2 est :

$$\vec{v}_g = \vec{v}_{I_1/S_2} = \vec{v}_{I_1/R} - \vec{v}_{I_2/R}$$

Cette vitesse est contenue dans le plan tangent en I aux deux solides. En effet, la vitesse du point I par rapport à R s'exprime de deux façons différentes suivant que le référentiel relatif est S_1 ou S_2 :

$$\vec{v}_{I/R} = \vec{v}_{I/S_2} + \vec{v}_{I_2/R} = \vec{v}_{I/S_1} + \vec{v}_{I_1/R}$$

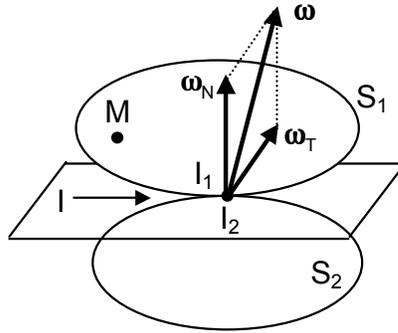
et puisque \vec{v}_{I/S_1} et \vec{v}_{I/S_2} appartiennent au plan tangent, la vitesse de glissement $\vec{v}_g = \vec{v}_{I/S_2} - \vec{v}_{I/S_1}$ est également contenue dans ce plan.

Mouvement de roulement et de pivotement

On suppose S_2 fixe dans le référentiel galiléen R et on considère un point M du solide S_1 . La vitesse de ce point par rapport à S_2 est :

$$\vec{v}_{M/S_2} = \vec{v}_{I_1/S_2} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{I_1M}$$

$\vec{\omega}$ est le vecteur vitesse instantanée de rotation de S_1 par rapport à S_2 ou R .



Suivant la figure il se décompose en deux vecteurs, l'un normal au plan tangent et l'autre dans ce plan, tel que $\vec{\omega} = \vec{\omega}_N + \vec{\omega}_T$.

La vitesse du point M s'écrit donc :

$$\vec{v}_{M/S_2} = \vec{v}_{I_1/S_2} + \vec{\omega}_N \wedge \overrightarrow{I_1M} + \vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{I_1M}$$

Le premier terme de cette expression décrit le glissement dans le plan tangent.

Le deuxième terme décrit le mouvement de pivotement autour d'un axe perpendiculaire au plan tangent.

Le troisième décrit le mouvement de roulement autour d'un axe contenu dans le plan tangent.

Travail des actions de contact

Le solide S_2 exerce sur S_1 une action de contact que l'on suppose réduite à une force \vec{R} appliquée en I_1 . L'expression générale du travail de cette force est

$$\delta W = \vec{v}_{I_1/S_2} \cdot \vec{R} dt + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_1(R) dt$$

Mais puisque le contact a lieu au point I_1 ; $\vec{M}_1(R) = \vec{0}$ et $\delta W = \vec{v}_{I_1/S_2} \cdot \vec{R} dt$

Ce travail est nul dans deux cas :

1° : S'il n'y a pas de frottement de glissement, la réaction de S_2 sur S_1 est normale au plan tangent; $\vec{v}_{I_1} \cdot \vec{R} = 0$

2° : Le solide S_1 roule sans glisser sur S_2 ; $\vec{v}_{I_1/S_2} = \vec{0}$

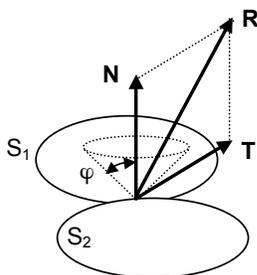
On dit alors que la liaison est parfaite.

Dans le cas contraire, $\delta W = \vec{v}_{I_1/S_2} \cdot \vec{R} dt < 0$ s'il y a des frottements de glissement car la composante tangentielle de R est opposée à \vec{v}_{I_1/S_2} . Le cas $\delta W > 0$ existe aussi lorsqu'il y a entraînement par frottement. Par exemple quand les roues d'une voiture patinent et avancent en même temps. Mais attention, les actions de contact ne sont pas pour autant moteur du mouvement.

1.2 Frottement de glissement

1.2.1 Lois phénoménologiques de G. Amontons et C.A. Coulomb

Considérons à nouveau deux solides S_1 et S_2 en contact, pas nécessairement ponctuel. S_2 exerce sur S_1 une force $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ où \vec{N} et \vec{T} sont ses composantes normale et tangentielle.



1ère loi : Le solide S_1 ne glisse pas sur S_2 tant que :

$$\vec{T} \leq \mu_S \vec{N}$$

où μ_S est le coefficient de frottement statique qui ne dépend que de l'état et de la nature des surfaces en contact. Ses valeurs numériques sont de l'ordre de 0,2 pour un contact bois sur bois et 0,7 pour un contact fer sur bois. Géométriquement, R se situe à l'intérieur d'un cône de révolution de demi-angle au sommet : $\varphi = \arctan \mu_S$.

2ème loi : Lorsque le solide S_1 glisse sur S_2 :

$$\vec{T} = \mu \vec{N}$$

où μ est le coefficient de frottement dynamique tel que $\mu < \mu_S$ et \vec{T} est opposé à \vec{v}_{I_1/S_2} . Les valeurs numériques de μ sont du même ordre de grandeur que celles de μ_S .

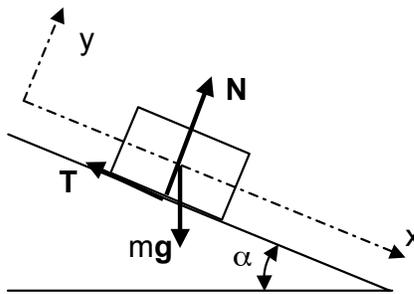
Rq : Pour les frottements de roulement et pivotement, on doit tenir compte du moment du couple qu'il faut exercer sur le solide S_1 pour le faire rouler (\vec{M}_T) ou pivoter (\vec{M}_N). Le même type de lois s'appliquent :

Il n'y a pas de pivotement ou de roulement tant que $\vec{M}_N \leq \mu_{PS} \vec{N}$ ou $\vec{M}_T \leq \mu_{RS} \vec{N}$.

Quand il y a pivotement ou roulement $\vec{M}_N = \mu_P \vec{N}$ ou $\vec{M}_T = \mu_R \vec{N}$.

1.2.2 Détermination de μ et μ_S

Considérons un solide de masse m immobile sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.



Le TRC s'écrit : $m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$

En projetant cette relation sur les axes Ox et Oy il vient :

$$mg \sin \alpha - T = 0$$

$$mg \cos \alpha - N = 0$$

et puisque le solide est immobile $T/N = \tan \alpha \leq \mu_S$. C'est le phénomène d'arc-boutement. Quelle que soit la masse du solide, il ne glisse pas tant que $\alpha < \alpha_S$ avec $\alpha > \alpha_S$. Ceci explique aussi que l'on ne peut pas enfoncer une vis en appuyant simplement dessus (même avec un marteau !) car l'inclinaison des filets n'est pas suffisante pour autoriser le glissement. Considérons maintenant le solide mobile sur le plan incliné. Le TRC s'écrit cette fois :

$$mg\vec{e} + \vec{R} = m\vec{a}$$

et la projection de cette relation sur les axes Ox et Oy :

$$mg \sin \alpha - T = m\ddot{x}$$

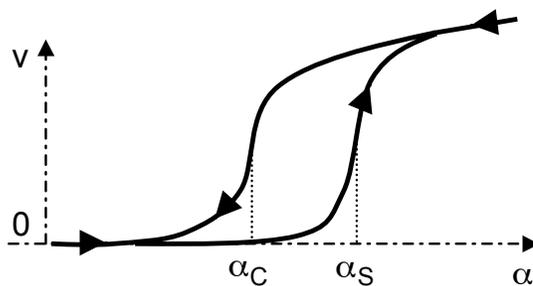
$$mg \cos \alpha - N = 0$$

Le solide glisse et donc $T/N = \mu$. En remplaçant T dans la première équation il vient :

$$\ddot{x} = g \cos \alpha (\tan \alpha - \mu)$$

Pour un angle α très grand le solide a un mouvement accéléré, puis pour $\alpha = \alpha_C$ tel que $\tan \alpha_C = \mu$ le solide glisse à vitesse constante et enfin pour $\alpha < \alpha_C$ le solide ralentit.

On peut alors tracer un cycle d'hystérésis en partant de $\alpha < \alpha_C$ et en augmentant l'inclinaison, puis de $\alpha > \alpha_S$ en diminuant l'inclinaison.



Expérience

Reprenons l'exemple précédent en utilisant un livre posé sur une table. On veut déterminer les coefficients μ et μ_S .

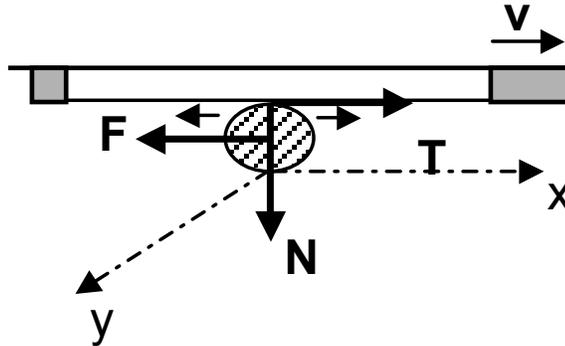
Le livre étant immobile sur la table horizontale, on incline celle-ci jusqu'à ce que le livre se mette à glisser. On note alors la position de la table (contre un mur par exemple) et on en déduit α_S puis $\mu_S = \tan \alpha_S$.

Le livre glissant sur la table, on réduit doucement l'inclinaison et on note la position de la table dès que le livre commence à ralentir. On déduit α_C et $\mu = \tan \alpha_C$

1.3 Applications

1.3.1 Archet de violon

Considérons un archet de violon de masse m , glissant à vitesse constante v sur une corde représentée en coupe transversale sur la figure. La corde tendue à ses extrémités est soumise à une force de rappel $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$ (k est proportionnelle à la tension T_0 de la corde), à la réaction de l'archet qui se décompose en une force normale $\vec{N} = m\vec{g}$ et tangentielle \vec{T} . Le coefficient de frottement statique est μ_S et le coefficient de frottement dynamique μ quasiment nul grâce à l'emploi de colophane sur l'archet.



A l'instant initial $t = 0$, la corde se trouve en position $x = 0$. L'archet se met en mouvement à la vitesse v et entraîne la corde avec lui. A l'instant t la position de la corde est : $x = vt$.

Le mouvement est linéaire. Cette situation de non-glissement persiste tant que $T/N \leq \mu_S$ l'instant t_1 où :

$$\frac{T}{N} = \frac{kx}{mg} = \frac{kvt_1}{mg} = \mu_S$$

D'où

$$t_1 = \frac{mg\mu_S}{kv}$$

Pour $t > t_1$, $T = \mu_N \approx 0$. Le mouvement de la corde est régi par l'équation des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} - \frac{\xi}{T_0} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$$

où ξ est la masse linéique de la corde et T_0 sa tension. La vitesse de propagation des ondes le long de cette corde est $c = \sqrt{\frac{T_0}{\xi}}$. On pose $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$. La corde étant attachée à ses deux extrémités, les ondes sont stationnaires (la longueur de la corde est égale à $\lambda/2$) et l'on remarque que plus la corde est tendue ou courte, plus la fréquence d'émission du son est élevée.

L'allongement x de la corde en une position y fixée (position de l'archet) s'écrit :

$$x = A \sin [\omega(t - t_1) + \varphi]$$

Les constantes d'intégration A et φ sont déterminées par les relations de continuité de x et \dot{x} à l'instant t_1 :

$$\begin{cases} vt_1 = A \sin \varphi \\ v = A\omega \cos \varphi \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \tan \varphi = \omega t_1 \\ A = v \sqrt{t_1^2 + 1/\omega^2} \end{cases}$$

Le mouvement est sinusoïdal jusqu'à l'instant t_2 où la vitesse de la corde est à nouveau égale à celle de l'archet. L'instant t_2 se calcule en résolvant l'équation $\dot{x} = v$ pour $t \neq t_1$, soit :

$$\cos [\omega(t_2 - t_1) + \varphi] = \cos \varphi$$

On déduit :

$$\omega(t_2 - t_1) + \varphi = 2\pi - \varphi$$

et

$$t_2 = t_1 + 2\frac{\pi - \varphi}{\omega} = \frac{A \sin \varphi}{V} + 2\frac{\pi - \varphi}{\omega}$$

A cet instant, l'allongement du ressort est : $x = A \sin [\omega(t_2 - t_1)] = -A \sin \varphi$

Pour $t > t_2$ la corde suit l'archet à la vitesse \vec{v} .

L'allongement s'écrit :

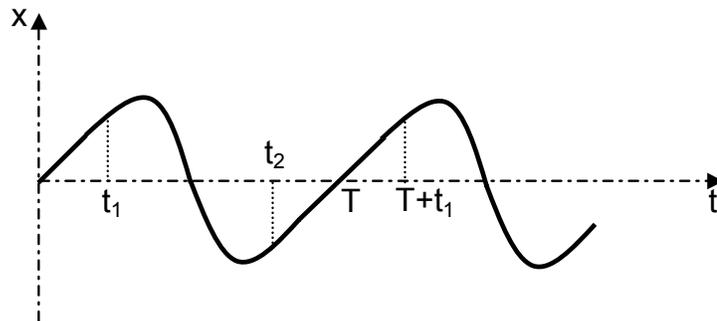
$$x = v(t - t_2) - A \sin \varphi$$

Le mouvement est linéaire tant qu'il y a non-glissement de la corde sur l'archet. Le phénomène est donc périodique de période T . Pour $t = T$, $x = 0$, soit :

$$0 = v(T - t_2) - A \sin \varphi$$

Finalement :

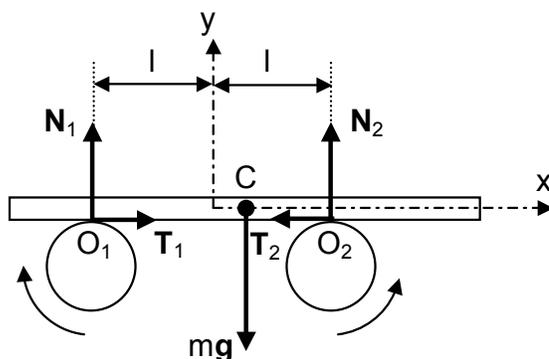
$$T = 2\frac{\pi - \varphi}{\omega} + 2\frac{A \sin \varphi}{v}$$



Dans ce problème, nous avons résolu deux équations différentielles; une pour le non-glissement et une pour le glissement. Les solutions n'étant pas du même type dans les deux cas, le mouvement n'est ni linéaire, ni sinusoïdal mais malgré tout périodique. La solution peut donc se mettre sous la forme d'une série de Fourier. C'est pourquoi dans le son du violon il existe des harmoniques à des fréquences multiple de $f = 1/T$.

1.3.2 Expérience de Timochenko

Une plaque de masse m , d'épaisseur négligeable, est posée sur deux rouleaux tournant en sens inverse à vitesse suffisante pour que la plaque glisse constamment avec un coefficient de frottement dynamique μ . A l'instant initial le centre de masse C de la plaque est décalé vers la droite comme sur la figure à l'abscisse x .



Le TRC appliquée à la plaque s'écrit :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2$$

En projetant cette relation sur les axes Ox et Oy on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= T_1 - T_2 \\ 0 &= -mg + N_1 + N_2 \end{cases}$$

Puisque la plaque se déplace horizontalement, TMC s'écrit :

$$\frac{d\sigma_C}{dt} = \vec{CO}_1 \wedge (\vec{T}_1 + \vec{N}_1) + \vec{CO}_2 \wedge (\vec{T}_2 + \vec{N}_2)$$

ce qui donne une seule relation scalaire :

$$l(N_2 - N_1) = x(N_2 - N_1)$$

qui s'écrit aussi compte tenu des relations précédentes :

$$N_2 - N_1 = \frac{mgx}{l}$$

La condition de glissement nous donne deux relations supplémentaires : $T_1 = \mu N_1$ et $T_2 = \mu N_2$ où :

$$m\ddot{x} = T_1 - T_2 = \mu(N_1 - N_2) = -\frac{\mu mg}{l}x$$

et

$$\ddot{x} + \frac{\mu g}{l}x = 0$$

La plaque effectue des oscillations de période :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$$

Contrairement au problème de l'archet de violon il n'y a ici qu'une seule équation différentielle pour décrire le mouvement complet et une solution parfaitement sinusoïdale. Ceci vient du fait que l'on n'a pas pris en compte les frottements statiques.

Expérience

On peut si le matériel est disponible, réaliser cette expérience et en déduire la valeur du coefficient de frottement dynamique en mesurant la période des oscillations de la plaque.

1.3.3 Autres exemples

Il existe bien sûr de nombreux autres exemples permettant d'illustrer cette leçon. On peut citer :

- La roue motrice sur un plan incliné : démarrage en côte puis vitesse constante. Freinage d'une voiture sans dérapage.
- Oscillations amorties par frottement solide.
- Cylindre roulant sur l'arête rectiligne d'une table.
- Boule de billard roulant et glissant sur une table.

Conclusion

Nous avons vu dans cette leçon que les lois phénoménologiques du frottement ne sont pas les mêmes s'il y a glissement ou non-glissement. Il faut remettre le problème en équation chaque fois que l'on passe d'une situation à l'autre. La solution est donc à priori plus complexe que celle d'un problème sans frottement à une équation différentielle.

D'autre part les actions de contact ne sont pas connues au départ. Ce sont les lois empiriques du frottement qui permettent de relier les composantes de ces forces et de réduire le nombre de paramètres.

Leçon de physique n° 2

Gravitation



Bibliographie

- *Physique Tout-en-un MPSI PCSI PTSI*, Sanz, Dunod
- *Précis Mécanique PCSI*, Clerc, Bréal

Introduction :

Cette leçon va être l'occasion de revoir une force que l'on connaît bien, la force gravitationnelle (dite de Newton). Il s'agit d'une force qui varie en $\frac{1}{r^2}$.

Nous verrons que la gravitation est tant que force centrale conservative, et ses caractéristiques; puis nous étudierons le mouvement d'un point M soumis à la gravitation en remarquant la constance de certaines grandeurs.

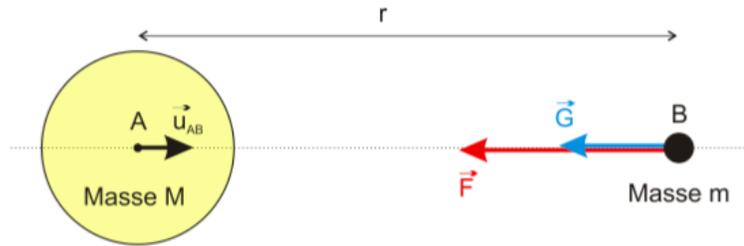
2.1 La gravitation : une forces centrale conservative

2.1.1 Expression de la force gravitationnelle

La force de Newton s'écrit :

$$\vec{F} = -G \frac{m_O m_M}{r^2} \vec{u}_{AB} \iff \vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{u}_{AB}$$

avec $K = -Gm_O m_M$ ($K < 0$)



2.1.2 Définition

Une force centrale est une force qui s'écrit $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques. Cela signifie :

- que sa valeur ne dépend pas du temps ;
- que sa valeur dépend que de r , la distance de M (point qui subit la force) à O (point appelé centre de force) ;
- que sa droite d'action a la même direction que le vecteur \vec{OM} .

Cette force est conservative (le calcul de son travail ne dépend pas du chemin suivi), elle dérive donc d'une énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_P \quad \text{et ainsi} \quad F(r) = -\frac{dE_P}{dr}$$

En utilisant le K défini ci-dessus, on pourra écrire l'énergie potentielle dont dérive cette force de la manière suivante :

$$E_P = \frac{K}{r} + \text{cste}$$

où la constante sera définie en fonction de l'origine des énergies potentielles (souvent on choisira que $E_P(r \rightarrow \infty) = 0$).

2.2 Mouvement général d'un point M soumis à la gravitation

Nous allons voir que cette notion de force centrale a des conséquences quant à la conservation de certaines grandeurs physiques, que l'on peut traduire en terme de mouvement.

2.2.1 Moment cinétique

Nous allons montrer que le fait que le point M ne soit soumis qu'à une force centrale rend son moment cinétique constant.

Appliquons le théorème du moment cinétique en O dans le référentiel galiléen $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{e}_r \wedge F(r)\vec{e}_r = \vec{0}$$

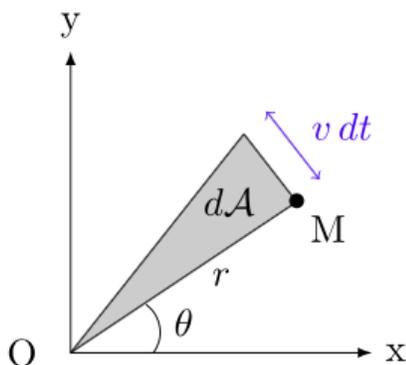
Le fait que le moment cinétique soit constant à deux conséquences :

La première est que le mouvement du point M est plan : en effet,

$$\vec{L}_O(M) = m\vec{OM} \wedge \vec{v}(M) = \text{csté}$$

implique que le point M se déplace constamment dans un plan perpendiculaire à $\vec{L}_O(M)$ (plan défini par le vecteur \vec{OM} et le vecteur \vec{v}).

La deuxième conséquence est que l'aire balayée par le rayon vecteur \vec{OM} est proportionnelle au temps : c'est la loi des aires.



Trouvons tout d'abord l'expression de la constante des aires C , liée au moment cinétique, en exprimant le moment cinétique en coordonnées cylindriques :

$$\vec{L}_O(M) = m \vec{OM} \wedge \vec{v}(M) = m r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

On note généralement $\vec{L}_O(M) = m C \vec{e}_z$ avec $C = r^2 \dot{\theta}$.

Exprimons maintenant l'aire balayée par le rayon vecteur pendant un temps dt :

$$d\mathcal{A} = \frac{1}{2} OM \times v dt = \frac{1}{2} r \times r \dot{\theta} dt$$

car on peut voir cette portion infinitésimale d'aire comme un triangle de hauteur r et de base $v dt$. Ainsi :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{C}{2}$$

Donc :

$$\mathcal{A}(t) = \frac{C}{2} t + \text{cste}$$

Remarque : La grandeur $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ se nomme parfois vitesse aréolaire, vitesse de balayage d'une aire.

2.2.2 Énergie mécanique

Conservation de l'énergie mécanique

Le fait que la force centrale soit conservative implique que l'énergie mécanique du point M est conservée au cours du mouvement. En effet, d'après le théorème de l'énergie cinétique, pour le point M qui se déplace entre la position A et la position B :

$$E_C(B) - E_C(A) = W_{AB}(\vec{F})$$

Or comme la force \vec{F} est conservative, on peut définir une énergie potentielle telle que :

$$W_{AB}(\vec{F}) = E_P(A) - E_P(B)$$

En effet :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B F(r)dr = \int_A^B \frac{K}{r^2} dr = \left[-\frac{K}{r} \right]_A^B = E_P(A) - E_P(B)$$

Donc en deux positions quelconques A et B du point M :

$$E_C(A) + E_P(A) = E_C(B) + E_P(B) = \text{cste}$$

On peut donc écrire :

$$E_M = E_C + E_P = \text{cste}$$

Si cette énergie est constante c'est qu'elle a à tout instant la valeur qu'elle avait dans l'instant initial : on peut donc déterminer sa valeur à partir des conditions initiales.

Définition d'une énergie potentielle effective

On peut exprimer cette énergie mécanique en fonction de l'unique variable r . On a :

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + E_P(r)$$

Car nous avons dit que l'énergie potentielle ne dépendait que de r ($E_P = \frac{K}{r} + \text{cste}$). On peut exprimer la vitesse en coordonnées polaires :

$$E_M = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_P(r)$$

Car $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, si on porte cette expression au carré, le terme fait apparaître le produit scalaire $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta$ qui est nul.

Enfin on peut faire apparaître la constante des aires et ainsi définir une nouvelle énergie potentielle :

$$E_M = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + E_P(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{\text{Peff}}(r)$$

$E_{\text{Peff}}(r) = E_P(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$ est appelée énergie potentielle effective, elle comprend l'énergie potentielle et une partie de l'énergie cinétique du point M .

Le problème se résume alors à l'étude d'un point matériel de masse m dont la position est décrite par un seul degré de liberté, r ; et soumis à une force conservative dont l'énergie potentielle est E_{peff} .

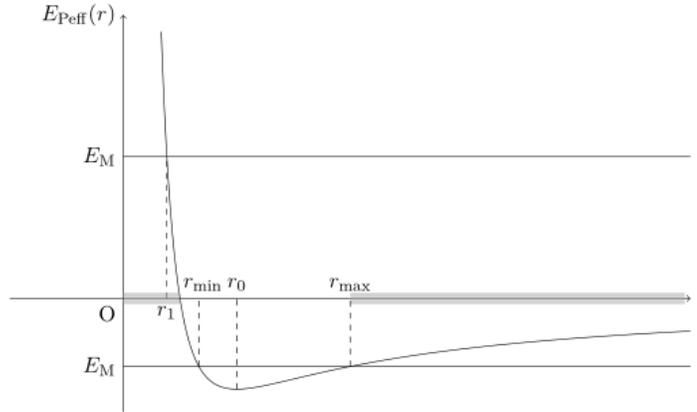
Pourquoi définir une énergie potentielle effective ?

Cette énergie, qui n'a pas réellement de sens physique, va permettre par son étude, de trouver les formes de mouvements possibles pour le point M en fonction du signe de K et de la valeur de la constante E_M .

2.2.3 Étude des mouvements possibles et conditions d'existence

Nous allons utiliser l'énergie potentielle effective définie précédemment pour identifier les mouvements possibles.

Regardons la forme de la courbe $E_{\text{Peff}} = f(r)$:



Plusieurs cas sont possibles selon le signe de l'énergie mécanique du point M :

Si $E_M > 0$, le seul mouvement possible s'effectue entre r_1 et $l'∞$, on a encore à faire à un état de diffusion.

Si $E_M < 0$, le mouvement est borné entre r_{\min} et r_{\max} , on parle alors d'un état lié. le mouvement est dans ce cas elliptique. r_{\min} et r_{\max} sont solutions de l'équation du second degré :

$$E_M r^2 - K r - \frac{mC^2}{2} = 0$$

Il existe un cas particulier, où l'équation précédente admet une solution double (discriminant du polynôme nul) ; dans ce cas l'état est toujours lié, avec un $r = r_0 = \text{cste}$: le mouvement est circulaire autour de O .

2.2.4 Équation polaire de la trajectoire

En repartant de l'expression de l'énergie mécanique, il est possible, à l'aide d'un changement de variable et de quelques astuces, de trouver l'équation $r = f(\theta)$ des trajectoires évoquées ci-dessus. On utilise notamment le changement de variable $u = \frac{1}{r}$ qui nous permet d'obtenir une équation différentielle en u que nous savons résoudre.

Nous nous contenterons de donner ici les équations polaires finalement obtenues :

Dans le cas de la gravitation :

$$\text{Si } K < 0, r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \text{ avec } p = \left| \frac{mC^2}{K} \right| \text{ et } e = \left| \frac{AmC^2}{K} \right| (A = \text{cste})$$

Cette équation polaire est celle d'une conique, la valeur de l'excentricité e donne la forme de la conique :

- Si $e = 0$, la trajectoire est un cercle de centre O de rayon p (r_0 trouvé précédemment, état lié).
- Si $0 < e < 1$, la trajectoire est une ellipse de foyer O (état lié).
- Si $e = 1$, La trajectoire est une parabole (état de diffusion).
- Si $e > 1$, La trajectoire est une hyperbole (état de diffusion).

2.2.5 Énergie mécanique et trajectoires

En manipulant l'énergie mécanique, il est possible de l'exprimer en fonction des paramètres déjà utilisés pour décrire l'équation polaire de la trajectoire. On obtient :

$$E_M = -\frac{|K|}{2p}(1 - e^2) = \frac{K^2}{2mC^2}(e^2 - 1)$$

Etant donné que les valeur de E_M dépendent directement des valeurs de e , la valeur de E_M nous indique directement la nature de la trajectoire :

$e < 1 \iff E_M < 0$: trajectoire elliptique (voir circulaire) ;

$e = 1 \iff E_M = 0$: trajectoire parabolique ;

$e > 1 \iff E_M > 0$: trajectoire hyperbolique.

2.3 Études de trajectoires particulières

2.3.1 Trajectoire parabolique et vitesse de libération

On parle de vitesse de libération lorsqu'un corps, soumis à l'attraction gravitationnelle d'un autre corps et distant de r , a une vitesse suffisante pour s'échapper de cette attraction. On se place donc dans le cas d'une force Newtonienne attractive. Cette vitesse de libération

est atteinte si le corps est dans un état de diffusion, donc sur une trajectoire parabolique. Ainsi, $e = 1$ et d'après l'expression de l'énergie mécanique vue précédemment, $E_M = 0$. Ce qui donne :

$$\frac{1}{2} m v_l^2 + \frac{K}{r} = 0 \iff v_l = \sqrt{\frac{-2K}{m r}}$$

Plaçons nous dans le cas de la Terre et d'un satellite de masse m , sa vitesse de libération depuis la surface terrestre est :

$$v_l = \sqrt{\frac{2 G m_T m}{m R_T}} = \sqrt{\frac{2 G m_T}{R_T}} = 11 \text{ km.s}^{-1}$$

2.3.2 Trajectoire elliptique et lois de Kepler

Cette trajectoire est importante : les lois de Kepler et en particulier la première explique que chaque planète du système solaire décrit une orbite elliptique autour du soleil qui constitue un des foyers de l'ellipse. D'après ce qui a été vu, on a

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

Ainsi : La planète se rapproche du soleil jusqu'au périhélie, position de la planète la plus proche du soleil sur l'orbite, définie par :

$$r_p = \frac{p}{1 + e}$$

La planète s'éloigne du soleil jusqu'à aphélie, position de la planète la plus éloignée du soleil sur l'orbite, définie par :

$$r_a = \frac{p}{1 - e}$$

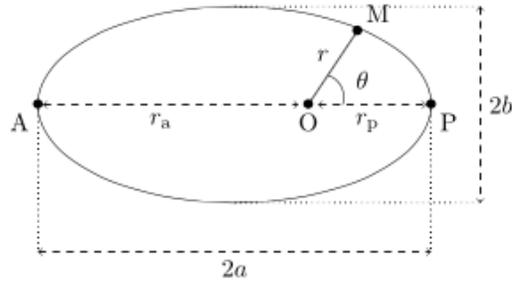
Expression de la vitesse sur la trajectoire

On peut tout d'abord exprimer l'énergie mécanique en fonction du demi-grand axe de l'ellipse : d'après le schéma ci-contre :

$$\begin{aligned} 2a &= r_p + r_a \\ \iff 2a &= \frac{p}{1 + e} + \frac{p}{1 - e} = \frac{2p}{1 - e^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$p = a(1 - e^2)$$



Remplaçons ceci dans l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_M = -\frac{|K|}{2a} = \frac{K}{2a}$$

Ce résultat est important : dans une trajectoire elliptique, l'énergie mécanique ne dépend que du demi grand-axe de l'ellipse.

Écrivons à présent l'expression donnant l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{K}{r} = \frac{K}{2a}$$

Donc :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{K}{m} \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r} \right)} \\ &= \sqrt{G m_O \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \\ &= \sqrt{G m_O \left(\frac{2a - r}{a r} \right)} \end{aligned}$$

Ainsi au périhélie et à l'aphélie, on a :

$$v_P = \sqrt{G m_O \left(\frac{2a - r_P}{a r_P} \right)} \quad v_A = \sqrt{G m_O \left(\frac{2a - r_A}{a r_A} \right)}$$

On retrouve bien, comme $r_P < r_A$, le fait que $v_P > v_A$.

Troisième loi de Kepler

Cherchons à retrouver l'expression de la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_O}$.

La loi des aires établie précédemment a été exprimée mathématiquement sous la forme :

$$\mathcal{A}(t) = \frac{C}{2} \times t$$

Donc sur la période T de parcourt de l'ellipse, le point M a balayé une aire égale à l'aire de l'ellipse soit $\mathcal{A} = \pi a b$. On a donc :

$$\pi a b = \frac{C}{2} \times T \iff \frac{T^2}{a^2} = \frac{4\pi^2 b^2}{C^2}$$

Enfin, on peut démontrer que $b^2 = p a$ et on sait que $p = \frac{mC^2}{|K|}$.

$$\frac{T^2}{a^2} = \frac{4\pi^2 a m C^2}{|K| C^2} \iff \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{|K|}$$

Finalement sachant que $K = -G m_O$ dans le cas d'un mouvement elliptique (force attractive), on obtient :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_O} \tag{2.1}$$

qui est bien l'expression de la troisième loi de Kepler (qui ne dépend que de masse du point attracteur m_O).

Cette loi de Kepler est valable dans le cas de la trajectoire circulaire, on remplace alors a par r_0 , rayon de la trajectoire circulaire.

Caractère non galiléen du référentiel terrestre



Bibliographie

- *Mécanique*, Pérez, Masson
- *Mécanique 1 et 2*, Bertin, Faroux, Renault, Dunod

Introduction :

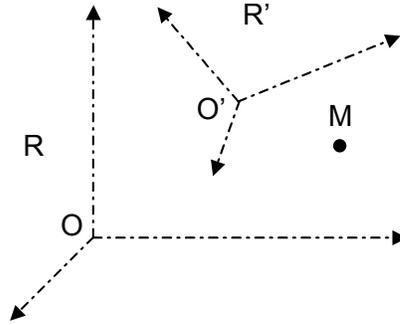
Dans cette leçon nous appliquerons le théorème de la résultante cinétique (TRC) dans un référentiel galiléen, puis par un changement de référentiel nous déduirons son écriture dans un référentiel non galiléen. Ce résultat nous permettra d'étudier le mouvement d'un corps dans le référentiel terrestre non galiléen et d'observer les phénomènes liés à la rotation de la terre et à son mouvement autour du soleil. Inversement, ce sont ces phénomènes qui ont permis historiquement, de mettre en évidence le caractère non galiléen du référentiel terrestre.

3.1 Référentiels non galiléens

3.1.1 Théorème de la résultante cinétique dans un référentiel galiléen

Considérons un référentiel non galiléen R' en mouvement par rapport à un référentiel galiléen R et un point M de masse m mobile dans R' et R . Dans R le TRC s'écrit :

$$m\vec{a}_{M/R} = \vec{R}$$



D'après la loi de composition des accélérations à la résultante des forces

$$\vec{a}_{M/R} = \vec{a}_{M/R'} + \vec{a}_E + \vec{a}_C$$

le TRC s'applique dans R' en ajoutant à R la force d'inertie d'entraînement $-m\vec{a}_E$ et la force d'inertie de Coriolis $-m\vec{a}_C$, et :

$$m\vec{a}_{M/R'} = \vec{R} - m\vec{a}_E - m\vec{a}_C$$

L'accélération d'entraînement \vec{a}_E est l'accélération par rapport à R , du point coïncidant avec M à l'instant considéré, fixe dans R' :

$$\vec{a}_E = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_R = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right)_R + \left(\frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2} \right)_R$$

On appelle $\vec{\Omega}$ le vecteur vitesse instantané de rotation du référentiel R' par rapport à R . En utilisant la relation de dérivation d'un vecteur dans un référentiel mobile, le deuxième terme de \vec{a}_E s'écrit :

$$\left(\frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2} \right)_R = \left(\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{d \overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} \right] \right)_R$$

Comme M est fixe dans R' , $\left(\frac{d \overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{R'} = \vec{0}$ et il vient :

$$\vec{a}_E = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right)_R + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_R \wedge \overrightarrow{O'M}$$

L'accélération de Coriolis \vec{a}_C est donnée par :

$$\vec{a}_C = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R'}$$

3.1.2 Différents référentiels

Le référentiel de Copernic ou référentiel héliocentrique noté R_\odot

Le référentiel géocentrique noté R_G est en translation par rapport à R_\odot et a pour origine le centre de la terre T .

Le référentiel terrestre noté R_T est lié à la terre et a aussi pour origine le centre de la terre T . Ce référentiel est en rotation à la vitesse Ω par rapport à R_G et R_\odot . En une année de 365,25 jours solaires de durée

$T_j = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$ la terre fait 366,25 tours sur elle-même.

Le temps qu'il lui faut pour tourner de 360° est la durée du jour sidéral :

$$T = 86164 \text{ s.}$$

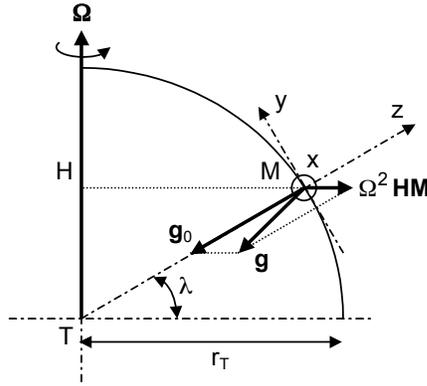
On en déduit sa vitesse de rotation :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3.2 Rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique supposé galiléen

Dans ce paragraphe le référentiel géocentrique R_G est supposé galiléen et le référentiel terrestre R_T non galiléen est en rotation à la vitesse Ω constante, par rapport à R_G .

3.2.1 Variation du champ de gravitation terrestre avec la latitude



Pour un point M de masse m , fixe dans R_T , $\vec{v}_{M/R_T} = \vec{0}$ et la force d'inertie de Coriolis est nulle. Le TRC s'écrit dans le référentiel non galiléen R_T :

$$m\vec{a}_{M/R_T} = \vec{R} - m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{TM})$$

Le point M est uniquement soumis à son poids $m\vec{g}_0 = \vec{R}$ et on note $\vec{g} = \vec{a}_{M/R_T}$ à la latitude λ . En développant le double produit vectoriel on obtient :

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

La variation du champ de gravitation terrestre est due à un terme d'inertie $\Omega^2 \overrightarrow{HM}$ provenant de la rotation de la terre. La projection sur les axes T_y et T_z donne :

$$g_y = -r_T \Omega^2 \cos \lambda \sin \lambda$$

$$g_z = -g_0 + r_T \Omega^2 \cos^2 \lambda$$

On remarque que $r_T \Omega^2 \approx 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \ll g_0$. En ne conservant que les termes du premier ordre dans le calcul de $g = \sqrt{g_y^2 + g_z^2}$ on obtient :

$$g \simeq g_0 \left(1 - \frac{r_T \Omega^2 \cos^2 \lambda}{g_0} \right)$$

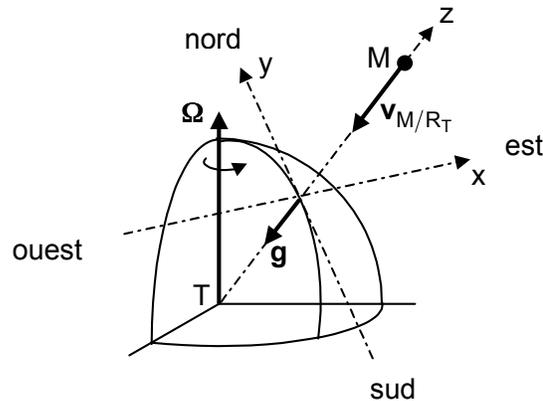
Dans cette expression le second terme de la parenthèse est de l'ordre de 10^{-3} . La variation de g en fonction de la latitude est faible. Calculons les valeurs numériques de g dans trois cas :

A l'équateur $\lambda = 0$; $g = 9,78 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

A Paris $\lambda = 48^\circ 51'$; $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Aux pôles $\lambda = \pm 90$; $g = 9,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

3.2.2 Déviation à l'Est



Nous allons voir ici l'effet de la force de Coriolis sur un objet de masse m en chute libre à la surface de la terre. Cet objet est uniquement soumis à son poids $m\vec{g} = m(\vec{g}_0 - \vec{a}_E)$ qui dépend de la latitude comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent. Nous supposons néanmoins que le vecteur g est dirigé vers le centre de la terre T . Dans le référentiel terrestre non galiléen le TRC s'écrit :

$$m\vec{a}_{M/R_T} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R_T}$$

Supposons aussi que la force de Coriolis fasse peu dévier l'objet dans la direction T_x , soit $v_{zM/R_T} \gg v_{xM/R_T}$ et $\vec{v}_{M/R_T} = \dot{z}\vec{e}_z$.

En projection sur les axes T_x et T_z :

$$\ddot{x} = -2\Omega\dot{z} \cos \lambda$$

$$\ddot{z} = -g$$

A l'instant initial $t = 0$, on lâche l'objet sans vitesse initiale d'une hauteur h . On a alors :

$$\dot{z} = -gt$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + r_T + h$$

D'autre part à $t = 0$, $x = \dot{x} = 0$. L'intégration de $\ddot{x} = 2\Omega g \cos \lambda t$ donne :

$$\dot{x} = \Omega g \cos \lambda t^2$$

Soit

$$x = \Omega g \cos \lambda \frac{t^3}{3}$$

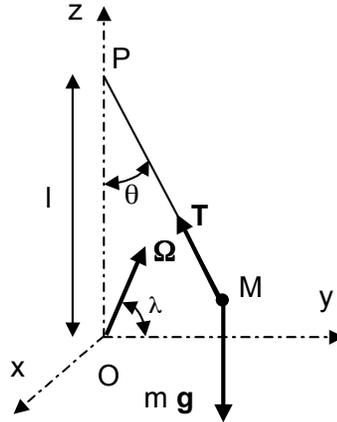
Le temps que met l'objet pour atteindre le sol ($z = r_T$) est $t = \sqrt{2h/g}$ et la déviation à l'est, suivant l'axe T_x :

$$x = \frac{\Omega \cos \lambda}{3\sqrt{g}} (2h)^{\frac{3}{2}}$$

Si on lâche une bille du haut de la tour Montparnasse à une hauteur $h = 209$ m, elle est déviée de $x_0 = 4,36$ cm et met un temps $t_0 = 6,53$ s pour arriver jusqu'au sol. On vérifie l'approximation sur la vitesse relative : $h/t_0 \gg x_0/t_0$ donc $v_{zM/R_T} \gg v_{xM/R_T}$.

L'ordre de grandeur de l'accélération de Coriolis s'obtient en calculant : $2\Omega v_{M/R_T}/g_0 \approx 4,76 \cdot 10^{-4}$ contribution est plus faible que celle de l'accélération d'entraînement.

3.2.3 Pendule de Foucault



Ce pendule simple installé au Panthéon a permis à Foucault de mettre en évidence la rotation de la terre. Au point M , une masse $m = 30$ kg est attachée à un fil de longueur $l = 67$ m relié par son autre extrémité à un point P fixe dans R_T .

Nous allons étudier le mouvement du point M dans le référentiel terrestre non galiléen R_T . En M , la masse m est soumise à son poids $m\vec{g} = m(\vec{g}_0 - \vec{a}_E)$ et à la tension du fil \vec{T} . LeTRC s'écrit :

$$m\vec{a}_{M/R_T} = \vec{T} + m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R_T}$$

Dans le référentiel T_{xyz} les coordonnées du point M sont (x, y, z) et celles du vecteur \overrightarrow{MP} $(-x, -y, l - z)$. Puisque $\|MP\| = l$, les coordonnées du vecteur \vec{T} sont $T/l(-x, -y, l - z)$. Donc :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{T}{l}x - 2m\Omega(\dot{z} \cos \lambda - \dot{y} \sin \lambda) \\ m\ddot{y} &= -\frac{T}{l}y - 2m\Omega\dot{x} \sin \lambda \\ m\ddot{z} &= -\frac{T}{l}(z - l) - mg + 2m\Omega\dot{x} \cos \lambda \end{aligned}$$

Pour de faibles amplitudes :

$$\begin{aligned} z &= l(1 - \cos \theta) \approx l(1 - (1 - \theta^2/2)) = l\theta^2/2 \\ x &\propto l \sin \theta \approx l\theta \\ y &\propto l \sin \theta \approx l\theta \end{aligned}$$

La coordonnée z est d'ordre deux en θ alors que x et y sont d'ordre un. En première approximation le mouvement du point M se fait dans le plan O_{xy} , donc $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$ et puisque le terme mg est d'ordre zéro en θ , la troisième équation du TRC s'écrit $T = mg$.

En posant : $\Omega_0 = \Omega \sin \lambda$ et $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

les équations du mouvement dans le plan O_{xy} s'écrivent :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - 2\Omega_0 \dot{y} = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\Omega_0 \dot{x} = 0$$

Pour résoudre ces équations on utilise les nombres complexes. En posant $u = x + iy$ le système précédent devient :

$$\ddot{u} + 2\Omega_0 i \dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

Le discriminant réduit de l'équation caractéristique est $\Delta' = -(\Omega_0^2 + \omega_0^2)$. Mais $\omega_0 = 0,38 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\Omega_0 = 5,49 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

L'approximation au premier ordre en Ω_0/ω_0 conduit à $\Delta' = -\omega_0^2$. Les racines sont $r_{\pm} = i(\pm\omega_0 - \Omega_0)$ et

$$u = e^{-i\Omega_0 t} (A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t})$$

A et B sont deux constantes d'intégration que l'on détermine à partir des conditions initiales. A $t = 0$, si $u = u_0$ et $\dot{u} = 0$ on obtient :

$$A = \frac{u_0}{2} \left(1 + \frac{\Omega_0}{\omega_0}\right)$$

$$B = \frac{u_0}{2} \left(1 - \frac{\Omega_0}{\omega_0}\right)$$

et la solution complexe :

$$u = u_0 e^{-i\Omega_0 t} \left(\cos \omega_0 t + i \frac{\Omega_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right)$$

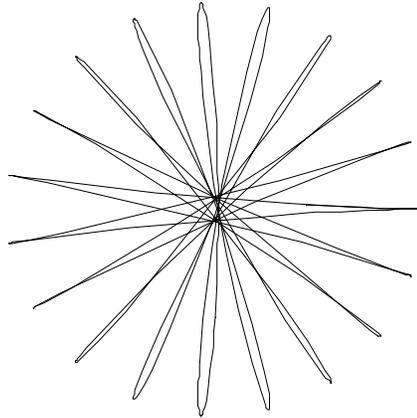
En supposant $u_0 = x_0$ réel, la solution réelle s'écrit :

$$x = x_0 \left(\cos \Omega_0 t \cos \omega_0 t + \frac{\Omega_0}{\omega_0} \sin \Omega_0 t \sin \omega_0 t \right)$$

$$y = x_0 \left(-\sin \Omega_0 t \cos \omega_0 t + \frac{\Omega_0}{\omega_0} \cos \Omega_0 t \sin \omega_0 t \right)$$

Le pendule oscille avec une période $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 16,4$ s et effectue en même temps un mouvement de rotation avec une période $T = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 31$ h 47 min.

Pour plus de clarté, la représentation graphique de la solution dans le plan O_{xy} , a été tracée pour une valeur de $\Omega_0 = 0,02$ rad \cdot s $^{-1}$, la pulsation ω_0 restant inchangée. Dans ce cas, on vérifie toujours $\omega_0^2 \gg \Omega_0^2$



Le pendule effectue alors $T/\tau = 19$ oscillations au lieu de 5211 dans une rotation complète.

3.2.4 Autres exemples

On peut illustrer l'effet de la force de Coriolis sur de nombreux exemples. Citons :

- La déviation des fusées vers l'est.
- Le sens de rotation des cyclones et des alizés (hémisphères Nord et Sud inversés).!
Le sens de rotation de l'eau dans les lavabos.
- L'usure dissymétrique des rails de train et des lits de fleuves.

3.3 Mouvement du référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique supposé galiléen

Dans ce paragraphe nous prenons en compte le mouvement du référentiel géocentrique R_G qui n'est plus galiléen. Nous étudions le mouvement d'un point M de masse m par rapport au référentiel terrestre non galiléen R_T , en supposant cette fois que le référentiel galiléen est le référentiel héliocentrique R_{\odot} .

3.3.1 Terme de marée

A la surface de la terre, le point M est soumis au champ de gravitation terrestre \vec{g}_0 et aux champs de gravitation des autres astres, $\vec{g}_i(M)$ pour l'astre n°i. La résultante des forces est :

$$\vec{R} = m\vec{g}_0 + \sum m\vec{g}_i(M)$$

L'accélération d'entraînement est :

$$\vec{a}_E = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{SM}}{dt^2} \right)_{R_\odot} = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{ST}}{dt^2} \right)_{R_\odot} + \left(\frac{d^2 \overrightarrow{TM}}{dt^2} \right)_{R_\odot}$$

Le dernier terme est identique à l'accélération d'entraînement calculée dans R_G . Le champ de gravitation mesuré dans R_T est donc :

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \left(\frac{d^2 \overrightarrow{TM}}{dt^2} \right)_{R_\odot}$$

et le TRC dans le référentiel terrestre :

$$m\vec{a}_{M/R_T} = m\vec{g} - m\vec{a}_C + \sum m\vec{g}_i(M) - m \left(\frac{d^2 \overrightarrow{ST}}{dt^2} \right)_{R_\odot}$$

Appliquons le TRC à la terre de masse m_T , dans le référentiel héliocentrique :

$$m_T \left(\frac{d^2 \overrightarrow{ST}}{dt^2} \right)_{R_\odot} = \sum m_T \vec{g}_i(T)$$

Finalement, dans le référentiel terrestre le TRC appliqué au point M s'écrit :

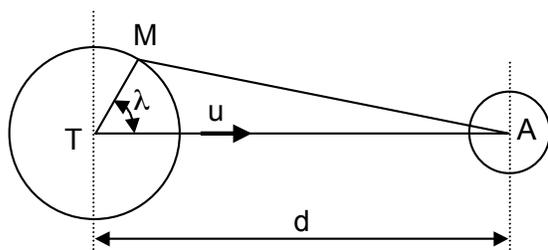
$$m\vec{a}_{M/R_T} = m\vec{g} - m\vec{a}_C + \sum m [\vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T)]$$

Le dernier terme est la somme des termes de marée $\vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T)$ relatif à chaque astre.

3.3.2 Expression du terme de marée, ordre de grandeur

Considérons l'astre n°i de centre A de masse m_A , à une distance d de la terre. La constante gravitationnelle est G . Le terme de marée s'écrit :

$$\vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T) = Gm_A \left(\frac{\vec{MA}}{MA^3} - \frac{\vec{TA}}{TA^3} \right)$$



Notons r_T le rayon de la terre. Exprimons les distances MA et TA en fonction de d et r_T et décomposons le vecteur \vec{MA} en $\vec{MT} + \vec{TA}$. On obtient alors l'expression :

$$\vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T) = \frac{Gm_A}{d^3} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{r_T \cos \lambda}{d}\right)^3} - 1 \right] \vec{TA} + \frac{\vec{MT}}{\left(1 - \frac{r_T \cos \lambda}{d}\right)^3}$$

Mais $r_T/d \ll 1$ et au premier ordre r_T/d , il vient :

$$\vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T) = \frac{Gm_A}{d^3} \left[\frac{3r_T \cos \lambda}{d} \vec{MA} + \vec{MT} \right]$$

Pour avoir l'ordre de grandeur de ce terme de marée, plaçons-nous à l'équateur. $\lambda = 0$ et au premier ordre en r_T/d :

$$\vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T) = \frac{2r_T Gm_A}{d^3} \vec{u}$$

Or $G = gr_T^2/m_T$ et :

$$\vec{g}_i(M) - \vec{g}_i(T) = 2g_0 \frac{r_T^3}{d^3} \frac{m_a}{m_T} \vec{u}$$

Voyons quelle est l'influence de la lune et du soleil sur la terre.

Pour la lune : $m_L/m_T=181$ et $d = 60 r_T$. On obtient : $\|\vec{g}_L(M)-\vec{g}_L(T)\| = 1,1 \cdot 10^{-7} g_0$.

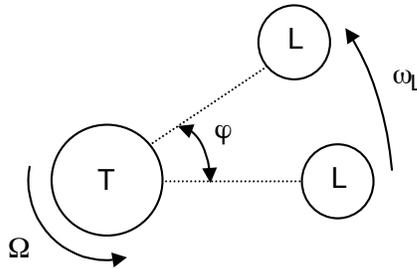
Pour le soleil : $m_S/m_T=332000$ et $d = 23400 r_T$. On obtient : $\|\vec{g}_S(M) - \vec{g}_S(T)\| = 5,2 \cdot 10^{-8} g_0$.

Ces termes sont très faibles par rapport à l'accélération d'entraînement $\Omega^2 r_T = 3,4 \cdot 10^{-3} g_0$. On voit aussi que la lune a plus d'influence sur la terre que le soleil.

A la pleine lune et à la nouvelle lune, lorsque la terre est dans l'alignement de la lune et du soleil les termes de marée des deux astres s'ajoutent, ce sont les marées de vives-eaux. Par contre aux premier et deuxième quartiers les termes s'opposent, ce sont alors les marées de mortes-eaux.

Aux équinoxes de printemps et automne la distance terre-soleil est à son minimum, l'influence du soleil est importante ; ce sont les marées d'équinoxes.

La lune tourne autour de la terre en 27,3 jours, sa vitesse de rotation est donc $\omega_L = 2,67 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. La position particulière de la terre par rapport à la lune à l'instant $t = 0$ se reproduit à l'instant t lorsque la lune s'est déplacée d'un angle $\varphi = \omega_L t$ et que la terre a tournée sur elle-même d'un angle $\varphi + 2\pi = \Omega t$. On en déduit $t = 2\pi/(\Omega - \omega_L) \approx 24$ h 51 min. Chaque jour les marées sont décalées de 51 min.



Conclusion :

Pour écrire le TRC dans un référentiel non galiléen on doit ajouter à la résultante des forces, les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis. Mais attention, ces forces sont particulières ; elles ne vérifient pas le principe d'action et de réaction. D'autre part elles font intervenir des masses inertes que l'on identifie aux masses graves qui apparaissent dans les forces de gravitation : c'est le principe d'équivalence. Il est alors impossible de savoir si l'on se trouve dans un référentiel accéléré non galiléen ou si l'on est soumis à des forces gravitationnelles dans un référentiel galiléen.

Précession dans les domaines macroscopique et microscopique



Bibliographie

- *Mécanique*, Pérez, Masson
- *Mécanique*, Bertin, Faroux, Dunod

Introduction :

L'étude du mouvement d'un gyroscope est un problème formel de mécanique. Pour en simplifier la mise en équation nous allons faire une approximation : l'approximation gyroscopique. Elle nous permettra néanmoins de mettre en évidence les propriétés essentielles du gyroscope.

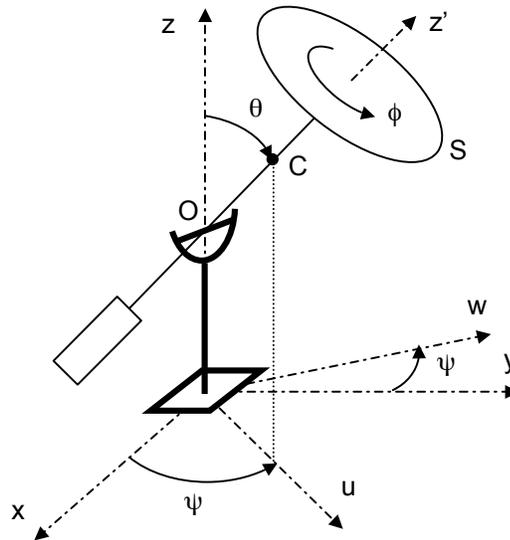
Pour y parvenir nous utiliserons principalement, le théorème du moment cinétique (TMC), appliqué à un solide S en rotation.

Nous donnerons ensuite plusieurs exemples de systèmes physiques dans lesquels se manifeste l'effet gyroscopique.

4.1 Approximation gyroscopique

4.1.1 Généralités

Un gyroscope est un solide de révolution S , mobile autour d'un point fixe O . Dans notre exemple, S est constitué d'un volant, d'une tige et d'un contrepoids. Le volant peut être mis en rotation autour de l'axe Oz et le contrepoids permet d'équilibrer le gyroscope en plaçant le centre de masse C du solide S , au point O .



Le solide S a donc trois degrés de liberté représentés par les angles d'Euler ; ψ l'angle de précession, θ l'angle de mutation et ϕ l'angle de rotation propre. La liaison est sphérique. Pratiquement, on la réalise par une liaison Cardan en combinant trois liaisons pivots ou par une liaison rotule.

Dans le référentiel terrestre $R = Oxyz$ supposé galiléen, la vitesse de rotation du volant est :

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_w + \dot{\psi}\vec{e}_z$$

Dans la suite, nous identifions le solide S avec son volant, leurs moments d'inertie étant pratiquement égaux.

4.1.2 Approximation gyroscopique

Dans le référentiel galiléen $R = Oxyz$, on étudie le mouvement de S autour du point fixe O , lorsque sa vitesse de rotation $\dot{\phi}$ autour de son axe de révolution Oz' est très grande par rapport aux autres vitesses de rotation $\dot{\psi}$ et $\dot{\theta}$. Ceci se traduit par ; $|\dot{\phi}| \gg |\dot{\psi}|$ et $|\dot{\phi}| \gg |\dot{\theta}|$. L'approximation gyroscopique s'écrit alors :

$$\vec{\Omega} \approx \dot{\phi} \vec{e}_{z'} = \Omega \vec{e}_{z'}$$

D'autre part, S possède une symétrie de révolution. Appelons $R' = Ox'y'z'$ le référentiel lié au solide. Les trois axes orthonormés de R' , sont des axes principaux d'inertie. Dans R' , la matrice d'inertie de S en O est donc diagonale et s'écrit :

$$[I]_O = \begin{pmatrix} I_{Ox'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Oy'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Oz'} \end{pmatrix}$$

La relation vectorielle $\sigma_O = [I]_O \Omega$ donnant l'expression du moment cinétique de S , prend la forme scalaire, suivant l'axe Oz' :

$$\sigma_O \approx I_{Oz'} \Omega$$

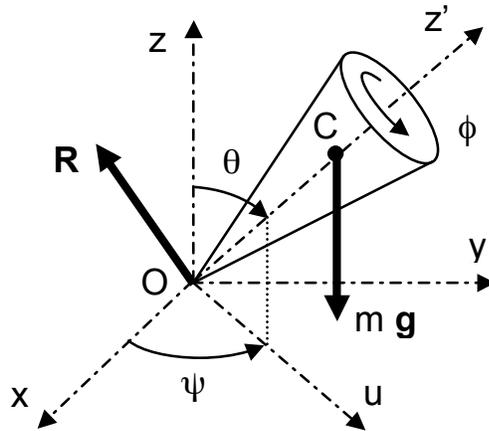
4.1.3 Gyroscope déséquilibré

Expérience

Le contrepois du gyroscope est réglé de façon à ce que le centre de masse C ne soit pas confondu avec O . Lorsque le volant est en rotation à la vitesse $\dot{\phi}$ autour de l'axe Oz' , on observe un mouvement de précession du solide S , à la vitesse $\omega = \psi$, autour de l'axe vertical Oz' . La mesure de cette vitesse avec un chronomètre permet de vérifier l'approximation $|\dot{\phi}| \gg |\dot{\psi}|$.

Ce mouvement de précession s'accompagne d'un mouvement de nutation, c'est à dire de petites variations de l'angle θ . Pour éliminer la nutation, on empêche θ de varier tout en accompagnant le gyroscope dans son mouvement de précession. Ceci implique $|\dot{\phi}| \gg |\dot{\theta}|$, et l'approximation gyroscopique est vérifiée.

On peut également utiliser une toupie. Le point fixe O est alors le point de contact entre la toupie et son support. La mesure de $\omega = \psi$ est néanmoins plus difficile.



Interprétons cette expérience dans l'approximation gyroscopique, sur le modèle d'une toupie (le même raisonnement s'applique au gyroscope utilisé précédemment).

Considérons une toupie conique de masse m , de centre de masse C , posée sur sa pointe. Elle est soumise à son poids et à la réaction du support sur la pointe au point O . Le moment de la réaction en O est nul et dans R , le TMC s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right)_R = \vec{M}_O = \vec{OC} \wedge m\vec{g} = \frac{mga}{\sigma_O} \vec{e}_z \wedge \vec{\sigma}_O$$

où $a = \|\vec{OC}\|$, car le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ est parallèle au vecteur \vec{OC} . Projétons cette équation sur $\vec{\sigma}_O$ et \vec{e}_z . Il vient d'après les propriétés du produit mixte :

$$\vec{\sigma}_O \cdot \left(\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\vec{\sigma}_O}{dt^2}\right)_R = \vec{0} \text{ donc } \|\vec{\sigma}_O\| = \text{Cte}$$

et

$$\vec{e}_z \cdot \left(\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\sigma_{Oz}}{dt}\right)_{R'} = \vec{0} \text{ donc } \sigma_{Oz} = \text{Cte}$$

Ainsi, le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ décrit un cône d'axe Oz , d'angle au sommet constant. La toupie précessionne autour de l'axe Oz .

Appliquons la relation de dérivation d'un vecteur dans un référentiel mobile. La dérivée du moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ dans le référentiel terrestre R , supposé galiléen, s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_O$$

Dans R' , avec l'approximation gyroscopique, le moment cinétique $\vec{\sigma}_O = I_{Oz'}\Omega\vec{e}_{z'}$ est constant (en supposant $\Omega = \text{Cte}$). Sa dérivée est nulle et donc :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right)_R = \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_O = \frac{mga}{\sigma_O}\vec{e}_z \wedge \vec{\sigma}_O$$

On déduit la vitesse de précession :

$$\vec{\omega} = \frac{mga}{I_{Oz'}\Omega}\vec{e}_z$$

Les mesures expérimentales de ω et Ω permettent de vérifier cette relation.

Application

Une toupie de rayon de base $r = 5$ cm et de hauteur $h = 10$ cm, tourne à la vitesse $\Omega = 50$ tr/s. Son moment d'inertie est $I_{Oz'} = 3mr^2/10$ et son centre de masse tel que $a = 3h/4$. Sa vitesse de précession est :

$$\omega = \frac{mga}{I_{Oz'}} = \frac{5gh}{2r^2\Omega} = 3,12 \text{ rad.s}^{-1}$$

et sa période :

$$T = \frac{2}{\pi}\omega = 2 \text{ s.}$$

Rq : La masse de la toupie n'intervient pas dans l'expression de la vitesse de précession. D'autre part, l'approximation gyroscopique est vérifiée car ; $\Omega = 314 \text{ rad.s}^{-1} \gg \omega = 3,12 \text{ rad.s}^{-1}$.

4.1.4 Gyroscopie équilibré

Le contrepoids du gyroscope est placé de façon à ce que le centre de masse C soit confondu avec O . Le gyroscope est placé sur un plateau tournant, le plus loin possible de l'axe de rotation. Lorsque le volant est en rotation, on fait tourner lentement le plateau. L'axe Oz de S garde alors une direction fixe.

42 çon de physique n° 4. Précession dans les domaines macroscopique et microscopique

De même, en considérant la rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel de Copernic, l'axe Oz' , du gyroscope posé sur une table, reste pointé vers une étoile fixe dans le ciel. Mais ceci ne s'observe qu'au bout de plusieurs heures...

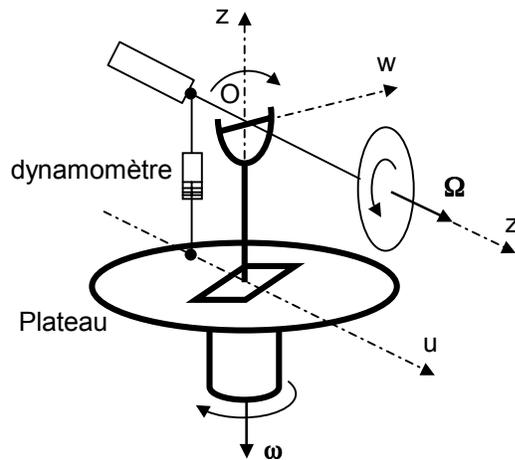
Pour interpréter cette expérience, il suffit d'écrire le TMC dans un référentiel galiléen. En O , les moments des forces appliquées à S sont nuls et :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right)_R = \vec{M}_O = \vec{0} \text{ donc } \vec{\sigma}_O = \vec{Cte}$$

Dans l'approximation gyroscopique, l'axe Oz' garde une direction fixe.

Expérience

Maintenant, le gyroscope est placé au centre du plateau tournant. La rotation d'axe Oz de S par rapport au plateau est bloquée. Le gyroscope un axe peut tourner autour de l'axe Ow (et bien sur, autour de Oz'). Lorsque le volant est en rotation, on fait tourner le plateau très lentement à la vitesse ω et on observe une rotation de S autour de l'axe Ow . Le couple de force qu'exerce le gyroscope sur son support s'appelle le couple gyroscopique. Il apparaît lorsqu'on impose au gyroscope, une rotation autour d'un axe autre que l'axe Oz' . Le moment de ce couple se mesure à l'aide d'un dynamomètre lorsque S est horizontal (voir figure).



Interprétons l'expérience.

Le support, constitué par le plateau tournant, exerce sur le gyroscope, un couple de moment $\vec{M}_{O,s \rightarrow g}$. Dans le référentiel terrestre R supposé galiléen le TMC s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right)_R = \vec{M}_{O,s \rightarrow g}$$

D'autre part, le référentiel RS lié au support (le plateau tournant), tourne à la vitesse ω dans R , et :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right)_{R_S} + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_O$$

On en déduit :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}\right)_{R_S} = \vec{M}_{O,s \rightarrow g} - \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_O$$

A l'équilibre dans R_S , la somme des moments des forces est nulle et le gyroscope exerce sur son support un couple gyroscopique de moment :

$$\vec{M}_{O,s \rightarrow g} = -\vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_O$$

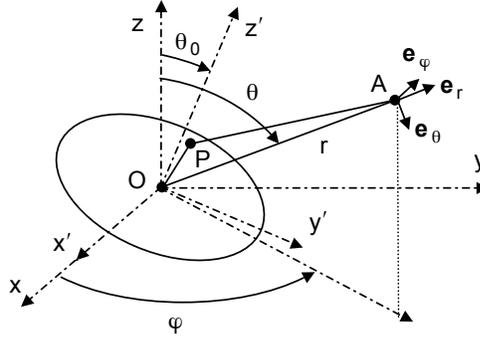
On vérifie cette relation avec les mesures expérimentales de ω , $\vec{M}_{O,s \rightarrow g}$ et Ω permettant d'obtenir $\vec{\sigma}_O$.

4.2 Précession dans les domaines macroscopiques

4.2.1 Précession des équinoxes

La terre est un gyroscope déséquilibré. Elle tourne autour de son axe de révolution Sud-Nord à la vitesse Ω_T . Mais elle n'est pas parfaitement sphérique, et de ce fait, les astres exercent sur elle un couple de forces gravitationnelles.

(On pourra ne donner que les principaux résultats de ce calcul un peu long, éventuellement à faire en exercice).



Evaluons le moment MO du couple de forces qu'un astre A exerce sur la terre.

Pour cela commençons par déterminer le potentiel puis le champ de gravitation créé par la terre au point A , centre de l'astre. On note $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{R} = \overrightarrow{OP}$ et :

$$PA = \|\vec{r} - \vec{R}\| = r \left(1 - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{R}}{r^2} + \frac{R^2}{r^2} \right)^{1/2}$$

En effectuant un développement au deuxième ordre en $R/r \ll 1$, il vient :

$$\frac{1}{PA} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{r^2} - \frac{R^2}{2r^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{2\vec{r} \cdot \vec{R}}{r^2} \right)^2 \right]$$

Le potentiel de gravitation en A , s'écrit :

$$\phi = -G \iiint \frac{dm}{PA} = -\frac{G}{r} \iiint dm - \frac{G}{r^2} \vec{r} \cdot \iiint \vec{R} dm - \frac{G}{2r^5} \iiint [3(\vec{r} \cdot \vec{R}) - r^2 R^2] dm$$

L'intégration porte sur les coordonnées x, y et z du point P (dans le référentiel $R = Oxyz$) à l'intérieur de la Terre. Le terme unipolaire est égale à $-Gm_T/r$ et le terme dipolaire est nul car O est le centre de masse de la terre. Il reste à évaluer le terme quadrupolaire.

Dans R , les coordonnées du point A sont $(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$, et donc :

$$\phi_3 = -\frac{G}{2r^5} \iiint [3(xr \sin \theta \cos \varphi + yr \sin \theta \sin \varphi + zr \cos \theta)^2 - R^2 r^2] dm$$

L'intégration porte sur les coordonnées x , y et z du point P (dans le référentiel $R = Oxyz$) à l'intérieur de la terre. Le terme unipolaire est égale à $-GmT/r$ et le terme dipolaire est nul car O est le centre de masse de la terre. Il reste à évaluer le terme quadrupolaire.

Passons dans le référentiel principal d'inertie $R = Ox'y'z'$ lié à la terre, en effectuant une rotation d'axe Ox et d'angle $-\theta_0$. Le changement de coordonnées s'écrit :

$$\begin{aligned}x &= x' \\y &= y' \cos \theta_0 + z' \sin \theta_0 \\z &= -y' \sin \theta_0 + z' \cos \theta_0\end{aligned}$$

On reporte ces coordonnées dans l'expression de ϕ_3 où les variables d'intégration sont x' , y' et z' .

D'après la symétrie de révolution de la terre, les intégrales de $x'y'$, $y'z'$ et $z'x'$ sont nulles. Ce qui revient à dire que dans le repère principal d'inertie R' , les produits d'inertie sont nuls. D'autre part les moments d'inertie vérifient les égalités : $I_1 = I_{Ox'} = I_2 = I_{Oy'} \neq I_3 = I_{Oz'}$. Les intégrales de x'^2 et y'^2 sont donc identiques. En tenant compte de ces remarques et en utilisant la relation de transformation du sinus en cosinus on obtient l'expression de ϕ_3 dans laquelle $I_1 - I_3 = \iiint (z'^2 - y'^2) dm$, puis celle du potentiel de gravitation :

$$\phi = -\frac{GmT}{r} - \frac{G}{2r^3}(I_1 - I_3) [1 - 3(\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \sin \varphi)^2]$$

Le champ de gravitation est :

$$\vec{G} = G_r \vec{e}_r + G_\theta \vec{e}_\theta + G_\varphi \vec{e}_\varphi$$

où

$$G_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad G_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad G_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}$$

Le moment \vec{M}_O du couple de forces que l'astre exerce sur la terre est l'opposé du moment $\vec{O}\vec{A} \wedge m_A \vec{G}$ que la terre exerce sur l'astre :

$$\vec{M}_O = -\vec{O}\vec{A} \wedge m_A \vec{G} = -r \vec{e}_r \wedge m_A (G_r \vec{e}_r + G_\theta \vec{e}_\theta + G_\varphi \vec{e}_\varphi)$$

Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ du repère $R = Oxyz$, ce moment s'écrit :

$$\vec{M}_O = rm_A(G_\theta \sin \varphi \vec{e}_x + (G_\varphi \cos \theta - G_\theta \cos \varphi) \vec{e}_y - G_\varphi \sin \theta \vec{e}_z)$$

Si l'on suppose que l'astre se déplace dans le plan de l'écliptique, $\theta = \pi/2$. Dans ce cas, le calcul de G_θ et G_φ conduit à :

$$G_\theta = \frac{3G}{2r^4}(I_3 - I_1) \sin 2\theta_0 \sin \varphi$$

et

$$G_\varphi = -\frac{3G}{2r^4}(I_3 - I_1) \sin^2 \theta_0 \sin 2\varphi$$

Le moment s'écrit alors :

$$\vec{M}_O = \frac{3}{2}G \frac{m_A}{r^3}(I_3 - I_1) \left[\sin 2\theta_0 \sin \varphi^2 \vec{e}_x - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \sin 2\varphi \vec{e}_y + \sin^2 \theta_0 \sin 2\varphi \vec{e}_z \right]$$

Prenons la valeur moyenne de ce moment lorsque l'angle φ varie. Puisque $\langle \sin^2 \varphi \rangle = 1/2$ et $\langle \sin 2\varphi \rangle = 0$:

$$\langle \vec{M}_O \rangle = \frac{3G}{4}(I_3 - I_1) \frac{m_A}{r^3} \sin 2\theta_0 \vec{e}_x$$

Revenons à l'effet gyroscopique. Par analogie avec le gyroscope déséquilibré, dans le référentiel de Copernic R , le TMC s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right)_R = \langle \vec{M}_O \rangle = \omega \wedge \vec{\sigma}_O$$

où ω est la vitesse de rotation de $\vec{\sigma}_O$ dans R . Or $\langle \vec{M}_O \rangle = \langle M_O \rangle \vec{e}_x = -(\langle M_O \rangle / \sin \theta_0) \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z'$. On déduit la vitesse de précession de l'axe des pôles de la terre :

$$\vec{\omega} = -\frac{\langle M_O \rangle}{\sigma_O \sin \theta_0} \vec{e}_z$$

Il en résulte que chaque année, la position apparente du soleil dans le ciel est modifiée. C'est ce que l'on appelle la précession des équinoxes. Evaluons cette vitesse lorsque l'on tient compte de la contribution du soleil et de la lune.

$$\langle M_{O,S+L \rightarrow T} \rangle = \frac{3G}{4}(I_3 - I_1) \left(\frac{m_S}{r_S^3} + \frac{m_L}{r_L^3} \right) \sin 2\theta_0$$

Sachant que $m_L/d_L^3 = 2,17m_S/d_S^3$ la vitesse de précession s'écrit :

$$\vec{\omega} = -\frac{3(I_3 - I_1)}{4I_3} \frac{2G \cos \theta_0}{\Omega_T} \left(\frac{3,17m_S}{d_S^3} \right) \vec{e}_z$$

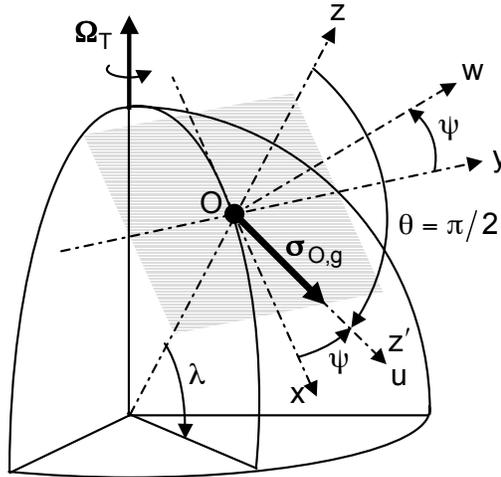
En utilisant les valeurs $\Omega_T = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, $\theta = 23^\circ 27'$, et $3(I_3 - I_1)/4I_3 \approx 1/408$ ainsi que la troisième loi de Kepler $T^2/d_S^3 = 4\pi^2/Gm_S$ on obtient :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 25699 \times T_A \approx 257 \text{ siècles}$$

L'approximation gyroscopique est bien vérifiée.

4.2.2 Compas gyroscopique ou gyrocompas

Le gyrocompas est un gyroscope équilibré qui permet d'indiquer la direction du Nord et la latitude en un point de la surface terrestre.



Les deux expériences proposées sont délicates. Elles nécessitent un bon gyroscope.

48 çon de physique n° 4. Précession dans les domaines macroscopique et microscopique

Imposons une position horizontale à l'axe Oz' du gyroscope. Pour cela on fixe $\theta = \pi/2$ en bloquant la rotation horizontale de la liaison Cardan. Appliquons le TMC au gyroscope et à son support, dans le référentiel de Copernic R :

$$\left(\frac{d(\vec{\sigma}_{O,g} + \vec{\sigma}_{O,s})}{dt} \right)_R = \left(\frac{d(\vec{\sigma}_{O,g} + \vec{\sigma}_{O,s})}{dt} \right)_{R'} + \vec{\Omega}_T \wedge (\vec{\sigma}_{O,g} + \vec{\sigma}_{O,s}) = \vec{M}_O$$

où R_T est le référentiel terrestre, Ω_T la vitesse de rotation de la terre et \vec{M}_O le moment des forces que le socle, lié à la terre, exerce sur le support. On note J_{Oz} le moment d'inertie suivant l'axe Oz du support. Les moments cinétiques en O s'écrivent :

$$\sigma_{O,g} = I_{Oz'} \Omega \vec{e}_{z'} \quad \text{et} \quad \sigma_{O,s} = J_{Oz} \psi \vec{e}_z$$

En projetant le TMC sur l'axe Oz , on obtient l'équation scalaire :

$$\left(\frac{d\sigma_{O,s}}{dt} \right)_R + \vec{e}_z \cdot [\Omega_T \wedge (\vec{\sigma}_{O,g} + \vec{\sigma}_{O,s})] = M_{Oz}$$

Or

$$\vec{e}_z \cdot [\Omega_T \wedge (\vec{\sigma}_{O,g} + \vec{\sigma}_{O,s})] = \vec{\Omega}_T \cdot [\vec{\sigma}_{O,g} \wedge \vec{e}_z] = -\sigma_{O,g} \vec{\Omega}_T \cdot \vec{e}_w$$

De plus

$$\vec{\Omega}_T = \Omega_T (-\cos \lambda \vec{e}_x + \sin \lambda \vec{e}_z) \quad \text{et} \quad \vec{e}_w = -\sin \psi \vec{e}_x + \cos \psi \vec{e}_y$$

On obtient finalement en faisant apparaître l'angle $\psi - \pi$, l'équation du pendule :

$$J_{Oz} \frac{d^2(\psi - \pi)}{dt^2} + \Omega \Omega_T I_{Oz'} \cos \lambda \sin(\psi - \pi) = M_{Oz}$$

Si $M_{Oz} = 0$, le gyroscope et son support oscillent autour de la position stable $\psi = \pi$. Pour de petites oscillations la période est :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{Oz}}{\Omega \Omega_T I_{Oz'} \cos \lambda}}$$

En réalité $M_{Oz} \propto \psi \neq 0$ car en tournant le support frotte sur son socle. L'oscillateur s'amortit et l'axe Oz' finit par pointer vers le nord, dans le plan du méridien.

Le gyrocompas donne aussi la latitude du lieu. Suite à l'expérience précédente, il suffit de bloquer la rotation d'angle ψ du gyroscope, l'axe Oz' étant dans le plan du méridien, et de laisser libre la rotation d'angle θ . Le gyroscope va osciller autour de la direction donnée par l'axe des pôles. La latitude est représentée par l'angle λ que fait le vecteur $\vec{\Omega}_T$ avec l'horizontale dans le plan du méridien.

L'équation pendulaire s'obtient en projetant le TMC sur l'axe Ow mais cette fois le support est simplement constitué par la partie en rotation suivant cet axe. On appelle son moment d'inertie K_{Ow} . Le calcul conduit à :

$$K_{Ow} = \frac{d^2 \left[\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \lambda \right) \right]}{dt^2} + \Omega \Omega_T I_{Oz'} \sin \left[\theta - \left(\frac{\pi}{2} - \lambda \right) \right] = M_{Ow}$$

4.3 Précession dans les domaines microscopiques

4.3.1 Précession d'un moment magnétique

A l'échelle microscopique, les atomes constituant la matière possèdent un moment magnétique qui englobe le moment magnétique orbital que l'on explique classiquement par la rotation des électrons autour du noyau (diamagnétisme) et le moment magnétique intrinsèque, ou spin des particules introduit par la théorie quantique relativiste (paramagnétisme).

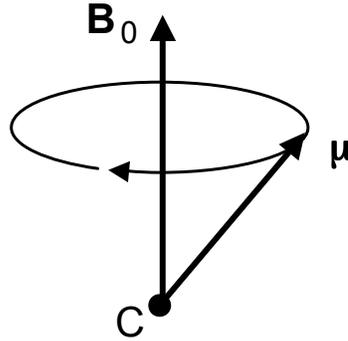
Notons $\vec{\mu}$ le moment magnétique d'un dipôle magnétique et $\vec{\sigma}_C$ son moment cinétique calculé en son centre de masse C . Ils sont reliés par la relation $\vec{\mu} = \gamma \vec{\sigma}_C$ où γ est le facteur gyromagnétique.

Placé dans un champ magnétique uniforme \vec{B}_0 le moment magnétique est soumis à un couple de forces de moment :

$$\vec{M}_C = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0 = -\gamma \vec{B}_0 \wedge \vec{\sigma}_C$$

Dans le référentiel terrestre R , le TMC appliqué au dipôle s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} \right)_R = -\gamma \vec{B}_0 \wedge \vec{\sigma}_C$$



Par analogie avec le gyroscope déséquilibré, le dipôle magnétique précessionne autour de \vec{B}_0 à la vitesse angulaire :

$$\vec{\omega}_L = -\gamma \vec{B}_0$$

Cette vitesse est appelée la pulsation de Larmor.

Ainsi, pour un moment magnétique d'origine purement intrinsèque, l'image classique la plus simple du spin est celle d'une particule en rotation sur elle-même, constituant un gyroscope.

4.3.2 Résonance magnétique

En plus du champ magnétique uniforme \vec{B}_0 on soumet des échantillons de matière et donc des dipôles magnétiques, à un champ magnétique \vec{B}_1 d'intensité beaucoup plus faible, perpendiculaire à \vec{B}_0 , tournant à la vitesse $\vec{\omega} = -\omega \vec{e}_z$.

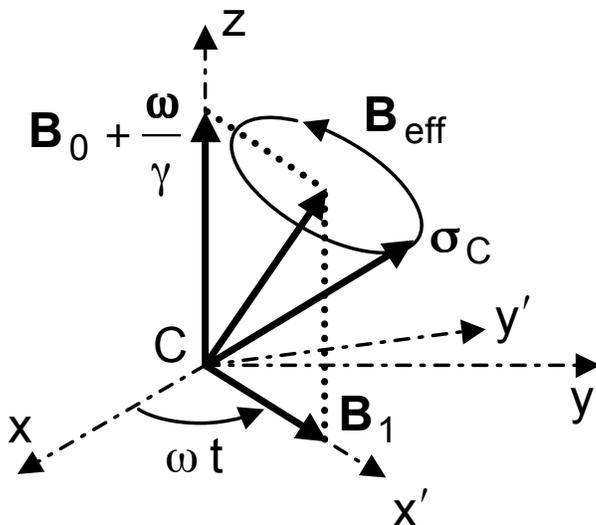
Le référentiel terrestre est noté $R = Cxyz$ et le référentiel tournant $R' = Cx'y'z'$. Dans R le TMC appliqué au dipôle, s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} \right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_C = -\gamma(\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \wedge \vec{\sigma}_C$$

De même que $\vec{\omega}_L = -\gamma B_0 \vec{e}_z = \omega_L \vec{e}_z$, la vitesse de précession du dipôle autour du champ tournant est $\omega_1 = -B_1 \vec{e}_{x'} = \omega_1 \vec{e}_{x'}$, et si $\Delta\omega = \omega_L - \omega$, dans le référentiel R' on obtient :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} \right)_{R'} = (\Delta\omega \vec{e}_z + \omega_1 \vec{e}_{x'}) \wedge \vec{\sigma}_C = -\gamma \vec{B}_{eff} \wedge \vec{\sigma}_C$$

Le champ \vec{B}_{eff} est le champ magnétique efficace vu par le dipôle dans R' .



Lorsque $\Delta\omega \gg \omega_1$, dans R' le précessionne pratiquement à la vitesse :

$$\Delta\omega\vec{e}_z = -\left(\vec{B}_0 + \frac{\vec{\omega}}{\gamma}\right)$$

autour du champ magnétique vertical $\vec{B}_0 + \frac{\vec{\omega}}{\gamma}$.

Lorsque $\Delta\omega = 0$, dans R' le moment magnétique précessionne à la vitesse ω_1 autour du champ \vec{B}_1

En réalité, le moment magnétique est quantifié et sa projection sur l'axe Oz est $\mu_z = \gamma\hbar m$ où \hbar est la constante de Planck réduite et m le nombre quantique magnétique. Dans le champ \vec{B}_{eff} l'énergie de ce moment magnétique $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{eff}$ est donc aussi quantifiée. Supposons que m prenne deux valeurs ($m = \pm 1/2$). Le moment se retourne et passe à un état d'énergie supérieur avec une variation $\Delta E = h\nu$. Il absorbe un photon de fréquence ν .

La résonance magnétique correspond à une absorption de photons de fréquence ν pour une valeur particulière de ω . Si l'environnement du moment magnétique change, c'est à dire si la constitution de la matière varie, un champ magnétique \vec{b} se superpose à \vec{B}_0 et l'absorption du photon n'a plus lieu à la pulsation de Larmor mais à $\omega = -\gamma(\vec{B}_0 + \vec{b})$.

La résonance magnétique nucléaire (R.M.N.) fait intervenir les moments magnétiques des

52çon de physique n° 4. Précession dans les domaines macroscopique et microscopique

noyaux des atomes. La fréquence d'absorption ν se situe dans le domaine des radiofréquences entre 1 Mhz et 500 Mhz. Cette technique est très utilisée dans le domaine biomédical.

La résonance paramagnétique électronique (R.P.E.) utilise les moments magnétiques des électrons des atomes. La fréquence d'absorption varie entre 10 Ghz et 200 Ghz.

Conclusion

Que le gyroscope soit équilibré ou déséquilibré, lorsqu'on lui impose un mouvement de rotation par rapport à un axe, il répond par un couple de forces lui donnant une rotation perpendiculaire à cet axe. C'est le couple gyroscopique lorsqu'il est équilibré et le couple qui lui donne son mouvement de précession lorsqu'il ne l'est pas.

Les applications du gyroscope équilibré utilisent le couple gyroscopique. Ainsi le gyrocompas permet à des avions, des sous-marins, ou tout autre appareil ayant une carcasse métallique, de s'orienter alors que l'utilisation de la boussole magnétique n'est plus possible.

Le gyroscope déséquilibré se rencontre dans des systèmes physiques macroscopiques tels que la terre ou microscopiques tels que le moment magnétique des particules.

Leçon de physique n° 5

Lois de conservation en dynamique



Bibliographie

- *Mécanique*, Pérez, Masson
- *Mécanique*, Bertin, Faroux, Dunod
- *La physique de tous les jours*, Berkès

Introduction :

Dans cette leçon, on suppose connu les théorèmes fondamentaux de la mécanique du point et du solide, c'est-à-dire le théorème de la résultante cinétique (TRC), le théorème du moment cinétique (TMC) et le théorème de l'énergie cinétique (TEC).

L'intérêt de cette leçon est de montrer que les lois de conservation de la dynamique peuvent s'écrire sous la forme d'intégrales premières des équations du mouvement (quantités constantes au cours du temps ne faisant intervenir que les dérivées premières des coordonnées par rapport au temps) ce qui permet de résoudre simplement un grand nombre de problèmes de mécanique.

5.1 Conservation de l'énergie

Dans un référentiel galiléen et pour un système quelconque le TEC s'écrit :

$$dE_C = \delta W + \delta W_{NC}$$

où E_C est l'énergie cinétique, δW le travail élémentaire des forces dérivant d'une énergie potentielle E_P et δW_{NC} le travail élémentaire des forces non conservatives ne dérivant pas d'une énergie potentielle.

5.1.1 Forces conservatives

Considérons un système dans un champ de force conservatif \vec{F} . L'énergie potentielle d'un point dans ce champ est notée E_P . Donc :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p \quad \text{et} \quad \delta W = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p \cdot \vec{v}dt$$

or

$$dE_P = \overrightarrow{\text{grad}}E_p \cdot \vec{v}dt + \frac{\partial E_P}{\partial t}$$

Puisque $dE_C = \delta W$, on en déduit :

$$d(E_C + E_P) = \frac{\partial E_P}{\partial t}$$

Si l'énergie potentielle E_P ne dépend pas explicitement du temps l'énergie mécanique se conserve et on obtient une intégrale première de l'énergie :

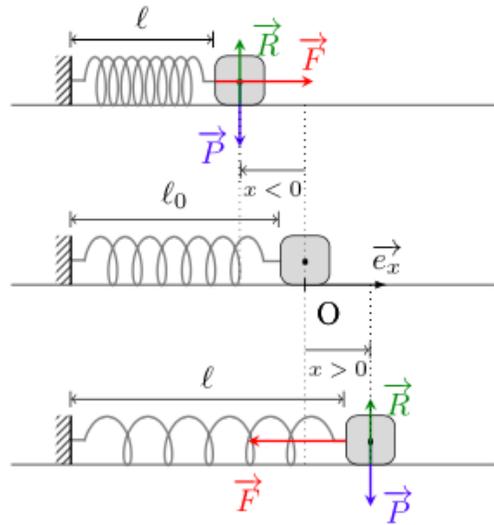
$$E_M = E_C + E_P$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, alors que l'équation différentielle obtenue par l'application du principe fondamental de la dynamique est du deuxième ordre, d'où son nom d'intégrale première. On peut ainsi obtenir simplement l'équation du mouvement d'un point de vue énergétique, sans passer par un bilan des forces.

5.1.2 Exemples d'application

L'oscillateur { masse + ressort }

Un mobile de masse m se déplaçant sans frottement sur un plan horizontal est relié à un ressort de raideur k . A l'équilibre, il se trouve à l'abscisse $x = 0$.



Lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre, il est soumis à une force de rappel conservative qui dérive de l'énergie potentielle

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2$$

Son énergie cinétique est

$$E_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

et l'intégrale première s'écrit :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{Cte}$$

La constante est déterminée par les conditions initiales. Si on lâche le mobile sans vitesse de l'abscisse x_0 :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$$

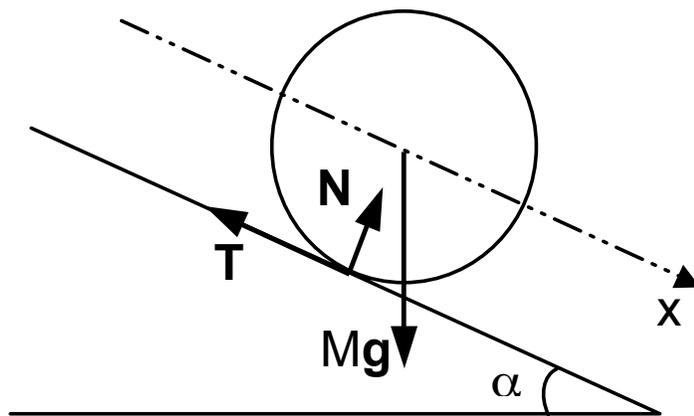
La dérivée par rapport au temps de cette relation permet d'obtenir l'équation du mouvement d'un oscillateur non amorti :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Dans le cas où l'oscillateur est amorti, il existe des forces de frottement non conservatives. L'énergie mécanique totale ne se conserve pas et il n'y a plus d'intégrale première comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

Roulement d'un cylindre

Un cylindre de masse M et de rayon R est soumis à son poids et à la réaction du plan incliné qui se décompose en \vec{T} et \vec{N} . Sa vitesse initiale suivant l'axe Ox est v_0 .



Si l'on suppose qu'il roule sans glisser sur le plan, la liaison est parfaite et le travail des forces de contact est nul. Il existe alors une intégrale première de l'énergie.

D'après le théorème de Koenig :

$$E_C = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

et puisque $v = \dot{x} = R\dot{\theta}$ et $I = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$

$$E_C = \frac{3}{4}Mv^2$$

L'intégrale première s'écrit :

$$\frac{3}{4}Mv^2 - Mgx \sin \alpha = \frac{3}{4}Mv_0^2$$

et en dérivant par rapport au temps :

$$\dot{v} = \frac{2}{3}g \sin \alpha$$

Le centre de masse du cylindre est uniformément accéléré.

D'autres exemples sont possibles en remplaçant le cylindre par un cerceau ou une sphère et/ou le plan incliné par une sphère.

5.1.3 Forces de contact non conservatives

Lorsque deux solides 1 et 2 sont en contact en un point P appartenant au solide 1, le solide 2 exerce sur celui-ci une action de contact que l'on suppose réduite à une force \vec{R} appliquée en P . Le travail de cette force est

$$\delta W_{NC} = \vec{v}_P \cdot \vec{R} dt + \omega \vec{M}_P(\vec{R}) dt$$

Mais puisque le contact est au point P ; $\vec{M}_P(\vec{R}) = \vec{0}$.

Si la liaison est parfaite, $\delta W_{NC} = 0$. Ceci est possible s'il y a roulement sans glissement; $\vec{v}_P = \vec{0}$ ou absence de frottement; $\vec{v}_P \cdot \vec{R} = 0$. On retrouve le cas précédent où il existe une intégrale première de l'énergie.

Si la liaison n'est pas parfaite, $\delta W_{NC} = \vec{v}_P \cdot \vec{R} dt < 0$ car la composante tangentielle de \vec{R} est opposée à \vec{v}_P . En réintroduisant des forces conservatives dans le TEC avec un potentiel ne dépendant pas explicitement du temps il vient;

$$\frac{d(E_C + E_P)}{dt} = \frac{\delta W_{NC}}{dt} < 0$$

Les forces de frottements non conservatives dissipent l'énergie sous forme de chaleur et l'énergie mécanique totale diminue. Il n'y a plus d'intégrale première.

C'est le cas de l'oscillateur amorti ou du cylindre qui roule en glissant sur un plan incliné. Bien sur, ces situations représentent plus fidèlement la réalité.

5.2 Conservation du moment cinétique

Considérons un point fixe O dans un référentiel galiléen. Pour un système quelconque le TMC s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{R})$$

où le moment cinétique en O et le moment en O des forces extérieures agissant sur le système sont définis par :

$$\vec{\sigma}_0 = \iiint \overrightarrow{OM} \wedge \rho \vec{v} d\tau \quad \text{et} \quad \vec{M}_0(\vec{R}) = \iiint \overrightarrow{OM} \wedge \rho \vec{a} d\tau$$

Si le moment en O des forces extérieures est nul, le moment cinétique est constant. L'intégrale première du moment cinétique s'écrit alors :

$$\vec{\sigma}_0 = \overrightarrow{\text{Cte}}$$

5.2.1 Mouvement à accélération centrale

Le mouvement d'un point matériel M est à accélération centrale lorsque à chaque instant son accélération passe par un point fixe O , ce qui se traduit par : $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \vec{0}$. Le moment cinétique O qui est constant fournit une intégrale première.

Problème à deux corps

Considérons un système isolé constitué de deux points matériels en interaction, de masse m_1 et m_2 . Dans le référentiel du centre de masse galiléen, puisque le système est isolé, l'étude du mouvement des deux points se ramène à celle d'un point fictif M de masse réduite $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ soumis à une force centrale.

La conservation de son moment cinétique permet d'affirmer que le mouvement est plan. En notant r et θ les coordonnées polaires de M , on obtient :

$$\vec{\sigma}_0 = r \vec{e}_r \wedge \mu (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

où \vec{e}_z est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan du mouvement de M . Le module du moment cinétique $\mu r^2 \dot{\theta}$ est constant. C'est la deuxième loi de Kepler, ou loi des aires.

Le problème peut être complètement résolu en utilisant une deuxième intégrale première ; celle de l'énergie.

5.2.2 Moment cinétique par rapport à un axe, solide en rotation

Soit un solide tournant à la vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe Oz porté par un vecteur unitaire \vec{e}_z . La vitesse d'un point M de ce solide est $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ et le moment cinétique par rapport à l'axe est $\sigma_{Oz} = \vec{e}_z \cdot \vec{\sigma}_0$. On en déduit :

$$\sigma_{Oz} = I_{Oz}\omega \quad \text{avec} \quad I_{Oz} = \iiint (\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{OM})^2 d\tau$$

I_{Oz} est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Oz . Le TMC s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_{Oz}}{dt} = \vec{M}_{Oz}(\vec{R})$$

Si le solide tourne librement et si sa rotation n'est pas amortit par frottement alors $\vec{M}_{Oz}(\vec{R}) = 0$ et $\vec{\sigma}_{Oz} = cte$ au cours du mouvement même lorsque le moment d'inertie du solide varie.

5.3 Conservation de la quantité de mouvement

Dans un référentiel galiléen, le TRC s'écrit :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}$$

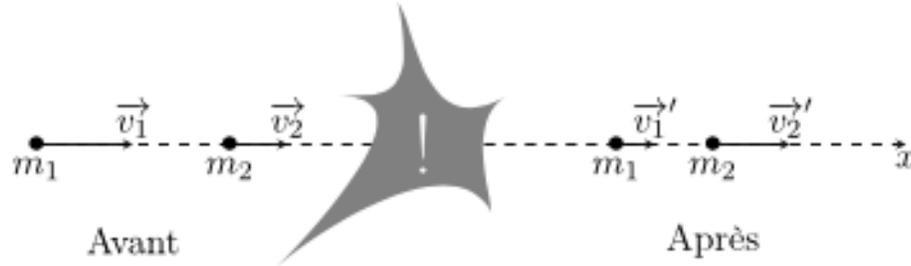
où \vec{P} est la résultante cinétique du système et \vec{R} la résultante des forces extérieures agissant sur le système. Si $\vec{R} = \vec{0}$ l'intégrale première de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{P} = \vec{Cte}$$

5.3.1 Systèmes isolés, chocs élastiques

Pour un système isolé, \vec{R} est nulle et $\vec{P} = \overline{Ct\vec{e}}$ est une intégrale première.

Considérons deux particules de masses m_1 et m_2 en interaction dans un référentiel galiléen. La première ayant une vitesse \vec{v}_1 rentre en collision avec la deuxième de vitesse \vec{v}_2 .



Dans ce problème à deux corps, il y a conservation du moment cinétique et comme on l'a vu au paragraphe précédent le mouvement est plan. La conservation de la quantité de mouvement nous donne donc deux équations scalaires. De plus le choc est élastique et l'énergie cinétique se conserve, ce qui permet d'avoir une troisième équation.

Le problème comporte quatre inconnues scalaires correspondant aux coordonnées de \vec{v}_1' et \vec{v}_2' après la collision. Il y a donc un paramètre indéterminé.

Ecrivons les équations de conservation dans le référentiel du centre de masse qui est galiléen puisque le système est isolé :

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{p}_1^{*'} + \vec{p}_2^{*'} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{p_1^*}{2m_1} + \frac{p_2^*}{2m_2} = \frac{p_1^{*'}}{2m_1} + \frac{p_2^{*'}}{2m_2}$$

On en déduit ;

$$\vec{p}_1^* = \vec{p}_2^* = \vec{p}_1^{*'} = \vec{p}_2^{*'} = \vec{p}$$

avec $p^* = \mu \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\| = \mu \vec{v}_1$, la norme de la quantité de mouvement de la particule fictive de masse réduite $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$.

On fixe un paramètre supplémentaire en se donnant la direction de \vec{v}_1^* portée par un vecteur \vec{n} dans le référentiel du centre de masse.

L'expression des vitesses dans le référentiel du laboratoire se déduit de la loi de composition des vitesses. En remarquant que la vitesse du centre de masse est $\vec{v}_C = m_1\vec{v}_1/(m_1 + m_2) = \mu\vec{v}_1/m_2$ puisque $\vec{v}_2 = \vec{0}$ il vient :

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1^* + \vec{v}_C = \frac{m_2}{m_1 + m_2}v_1\vec{n} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

et

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2^* + \vec{v}_C = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}v_1\vec{n} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1$$

d'où

$$\vec{v}_1' = \mu \left(\frac{v_1}{m_1}\vec{n} + \frac{1}{m_2}\vec{v}_1 \right) \quad \text{et} \quad \vec{v}_2' = \mu \left(-\frac{v_1}{m_1}\vec{n} + \frac{1}{m_2}\vec{v}_1 \right)$$

5.3.2 Système pseudo isolés

La résultante des forces \vec{R} agissant sur le système, est nulle même s'il existe des forces extérieures non nulles.

Cette situation se produit lorsque le poids s'oppose à la réaction. On peut exploiter la conservation de la composante horizontale de la quantité de mouvement sur plusieurs exemples ;

- Les chocs de boules de billard.
- Les palets sur une table à coussin d'air.
- Le recul d'un fusil ou d'un canon.

Expérience

La table à coussin d'air permet de vérifier la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique lors d'un choc élastique entre deux palets.

L'obtention des points est rapide mais il est plus commode d'avoir analysé une feuille et tracé les vecteurs quantité de mouvement avant la présentation.

5.3.3 Systèmes ouverts, propulsion

Considérons un système ouvert qui échange de la matière à travers une surface fermée S (surface de contrôle) fixe dans un référentiel galiléen.

A l'instant t , sa masse est m et sa vitesse \vec{v} .

Entre les instants t et $t + dt$, il rentre dans ce système une masse dm_E à la vitesse relative \vec{v}_E et il sort une masse dm_S à la vitesse relative \vec{v}_S .

A l'instant $t + dt$, la masse du système est $m + dm_E - dm_S$ et sa vitesse $v + dv$. Pour le système fermé de masse constante m :

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}$$

$$\vec{p}(t + dt) = (m + dm_E - dm_S)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm_S(\vec{v}_S + \vec{v} + d\vec{v}) - dm_E(\vec{v}_E + \vec{v} + d\vec{v})$$

et donc

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm_S}{dt} \vec{v}_S - \frac{dm_E}{dt} \vec{v}_E = \vec{R}$$

Propulsion

Considérons un mobile de masse totale M , équipé d'un réservoir contenant une masse M_0 de gaz sous pression et pouvant se déplacer sans frottement sur un plan horizontal. A l'instant initial $t = 0$ le gaz est éjecté avec une vitesse horizontale relative v_S et un débit massique $D = dm_S dt$. La résultante des forces extérieures R étant nulle ainsi que le débit massique entrant $dm_E dt$, l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\vec{a} + D\vec{v}_S = \vec{0}$$

où $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ est l'accélération du mobile.

La variation de la masse du mobile dm est égale à la variation de la masse du gaz dm_S . On en déduit donc, puisqu'il y a diminution de la masse m au cours du temps :

$$m = M - Dt \quad \text{avec} \quad D > 0$$

Et le module de l'accélération est :

$$a = \frac{D}{M - Dt} v_S$$

Cette relation s'intègre en tenant compte du fait qu'à l'instant initial la vitesse du mobile est nulle. On obtient alors l'expression de la vitesse :

$$v = v_S \ln \frac{M}{M - Dt}$$

Quand il n'y a plus de gaz $m = M - M_0$ et $Dt_F = M_0$. La vitesse finale du mobile est :

$$v_F = v_S \ln \frac{M}{M - M_0}$$

Elle est indépendante du débit D . Pour augmenter sa valeur il faut augmenter celle de v_S ou la masse de gaz M_0 .

En conclusion, bien que la résultante des forces extérieures \vec{R} soit nulle, le mobile est accéléré avant d'atteindre une vitesse limite. Sa vitesse n'est pas constante contrairement aux systèmes fermés.

5.3.4 Référentiels non galiléens, apesanteur

Considérons un point matériel M de masse m . Dans un référentiel non galiléen, il est soumis à la résultante des forces \vec{R} , à la force d'inertie d'entraînement $-m\vec{a}_E$ et à la force d'inertie de Coriolis $-m\vec{a}_C$. Dans ce référentiel non galiléen le TRC s'écrit :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R} - m\vec{a}_E - m\vec{a}_C$$

Apesanteur

Une cabine d'ascenseur est en chute libre (cas peu fréquent, heureusement !). Son accélération d'entraînement est $\vec{a}_E = \vec{g}$ et son accélération de Coriolis est nulle car le mouvement est rectiligne. Par rapport au référentiel de l'ascenseur :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{g} - m\vec{a}_E = \vec{0}$$

La résultante cinétique du point M est constante et localement la gravité est nulle. Dans l'ascenseur les objets sont en apesanteur. Ils sont animés de mouvements rectilignes uniformes.

Cet exemple montre qu'il existe des référentiels dans lesquels la quantité de mouvement d'un point matériel est constante bien que la résultante des forces extérieures agissant sur ce point soit non nulle.

Conclusion

Dans de nombreux problèmes de physique il existe des grandeurs constantes au cours du temps. La connaissance de ces lois de conservation est importante car au travers des

intégrales premières que l'on peut alors écrire facilitent la compréhension du problème et permettent de l'aborder plus simplement que par l'utilisation du principe fondamental de la dynamique.

Leçon de physique n° 6

Cinématique relativiste



Bibliographie

- *Relativité restreinte*, Pérez, Masson
- *Relativité restreinte*, Hulin, Dunod
- *Mécanique 1 et 2*, Bertin, Faroux, Renault, Dunod

Introduction :

Lorsque l'on parle de relativité, il faut bien distinguer le "principe de relativité", commun à Galilée et à Einstein, des théories de la relativité, en particulier la "théorie de la relativité restreinte" qui s'appuie entre autre sur le principe de relativité. Nous commencerons par rappeler ce qu'est la relativité galiléenne et la transformation de Galilée. Puis, en tenant compte des expériences historiques sur la vitesse de la lumière et les lois de Maxwell, nous verrons apparaître la relativité restreinte associée à une nouvelle transformation, celle de Lorentz.

6.1 Rappels historiques

6.1.1 Mécanique classique et transformation de Galilée

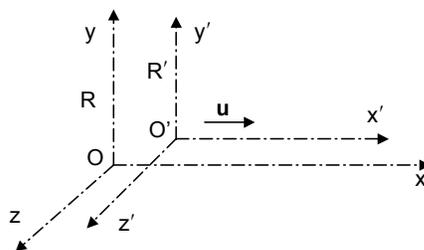
En cinématique classique, le mouvement d'un point M par rapport à un référentiel galiléen R est défini par trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ représentant sa position à l'instant t . Un événement est donc défini par la donnée de trois coordonnées d'espace plus le temps.

Le carré de l'intervalle entre deux points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$, dans un repère orthogonal est :

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

De même entre deux points infiniment proches $M(x, y, z)$ et $M + dM(x + dx, y + dy, z + dz)$:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$



Cette quantité est indépendante du système de repérage des points et est invariante vis à vis d'un changement de référentiel galiléen. Cela signifie que dans un autre référentiel galiléen R' en translation rectiligne uniforme à la vitesse u par rapport à R , le carré de l'intervalle entre $M(x', y', z')$ et

$M + dM(x' + dx', y' + dy', z' + dz')$ est le même que dans R , et donc :

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

Notons que l'on peut toujours positionner les axes Ox et Ox' de R et R' parallèlement à u sans restreindre la généralité du problème.

La forme quadratique qui à tout vecteur dM associe le scalaire ds^2 a pour signature $(+, +, +)$. Elle est définie positive et permet de définir une norme euclidienne. L'espace à trois dimensions est donc euclidien.

Le temps s'écoule de façon identique dans R et R' . Deux événements simultanés dans R le sont également dans R' . Ainsi il existe aussi un invariant temporel vis à vis d'un changement de référentiel galiléen :

$$dt = dt'$$

La transformation permettant de passer des coordonnées (x, y, z) d'un point M dans R , à ses coordonnées (x', y', z') dans R' au même instant, est la transformation de Galilée :

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Les lois de composition des vitesses s'obtiennent en dérivant les relations précédentes par rapport au temps. Elles s'écrivent :

$$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

En dérivant une nouvelle fois on obtient les lois de composition de l'accélération :

$$\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

Il y a invariance de l'accélération par changement de référentiel galiléen. En mécanique classique la masse est un invariant. Pour un point matériel M de masse m , soumis à une force \vec{F} , le principe fondamental de la mécanique classique s'écrit $\vec{F} = m\vec{a}$. La force doit donc être invariante pour que le principe de relativité soit vérifié. Ce principe qui stipule que toutes les lois physiques de la nature sont les mêmes dans tous les référentiels galiléen est satisfait lorsque l'on associe à la mécanique classique la transformation de Galilée. Si l'on essayait d'associer d'autres lois physiques, de l'électromagnétisme par exemple, à la transformation de Galilée, ce principe ne serait plus vérifié comme nous allons le voir.

6.1.2 Mise en défaut de la transformation de Galilée

Incompatibilité avec l'électromagnétisme

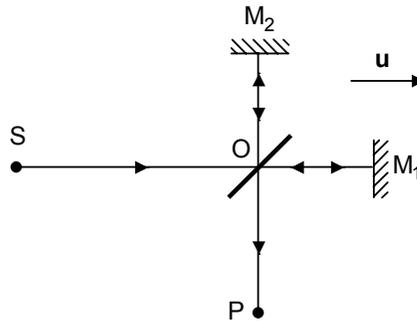
Les équations de Maxwell, à la base de l'électromagnétisme, prévoient la propagation d'ondes dans le vide à la vitesse $c = 300000 \text{ km/s}$. Cette vitesse est indépendante de

la source de l'onde et donc du référentiel d'étude. La question est alors de savoir dans quel référentiel on mesure cette vitesse. A la fin du XIX siècle, la plupart des scientifiques supposaient l'existence d'un milieu baignant tout l'univers : L'éther. Par analogie avec les ondes sonores se propageant dans l'air, l'éther devait avoir une structure rigide permettant la propagation des ondes électromagnétiques. Il devenait alors naturel de définir la vitesse des ondes électromagnétiques par rapport à l'éther. Mais de ce fait on mettait en évidence l'existence d'un référentiel absolu, contrairement au principe de relativité.

Expérience de Michelson et Morley

De nombreuses expériences ont essayé de mettre en évidence la variation de la vitesse de la lumière dans le vide suivant le référentiel d'observation, conformément à la transformation de Galilée. L'une d'elle, la plus connue, commença en 1881 et acquit une précision adéquate en 1887. C'est l'expérience de Michelson et Morley que nous allons décrire.

Nous appellerons c la vitesse de la lumière mesurée dans le référentiel absolu de l'éther R , et c' cette vitesse mesurée dans un référentiel R' en translation rectiligne uniforme par rapport à R . La difficulté de l'expérience était de trouver un référentiel mobile R' se déplaçant suffisamment vite par rapport à l'éther pour obtenir un écart net entre c et c' . L'ingéniosité de Michelson et Morley a été d'utiliser la terre elle-même, supposée se déplacer dans l'éther, et dont la vitesse orbitale autour du soleil est $u \approx 30$ km/s. Si la transformation de Galilée est valable, un faisceau qui se propage parallèlement au déplacement de la terre à une vitesse $c' = c \pm u$ et si sa direction est perpendiculaire au déplacement $c' = c$.



Pour vérifier cela, Michelson et Morley ont utilisé un interféromètre constitué de deux bras OM_1 et OM_2 de longueurs $l = 10$ m perpendiculaires entre eux. Le bras OM_1 est parallèle au déplacement de la terre et par une rotation de 90° il peut prendre une direction perpendiculaire à u . Un faisceau lumineux émis par une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 5 \mu\text{m}$ en S , est divisé en deux par le miroir semi-réfléchissant placé en O . Après réflexion sur les miroirs M_1 et M_2 les faisceaux viennent interférer en P . En

pratique, on réalise un coin d'air. La différence de marche étant très faible, les interférences correspondantes s'observent en lumière non parallèle.

Le calcul de la variation de l'ordre d'interférence lorsque les miroirs tournent de 90° donne $\Delta p = 2lu^2/\lambda c^2 = 0,4$. Or le déplacement observé était de 0,02 frange. Le résultat de l'expérience était donc négatif et aucune expérience similaire n'a jamais permis de détecter un net décalage des franges.

Cette expérience vient confirmer les lois de Maxwell prédisant une vitesse de la lumière constante. Beaucoup de scientifiques de l'époque, dont Lorentz, essayèrent de restaurer la théorie de l'éther en imaginant qu'au voisinage de la terre par exemple, l'éther était entraîné par celle-ci. Mais aucun cadre théorique cohérent ne permettait sérieusement de prendre en compte ces hypothèses. Il s'agissait alors de faire un choix parmi les trois assertions suivantes, incompatibles entre elles.

- La vitesse de la lumière dans le vide est constante et ne dépend pas du référentiel d'étude.
- Toutes les lois physiques sont identiques dans tous les référentiels galiléens.
- La transformation de Galilée permet de passer d'un référentiel galiléen à un autre.

C'est Einstein, n'ayant jamais vraiment cru à l'existence de l'éther, qui proposa d'abandonner la transformation de Galilée et de ne conserver que le principe de relativité et l'invariance de c . Ce seront les deux postulats de la relativité restreinte.

6.2 Postulats de la relativité restreinte et transformation de Lorentz

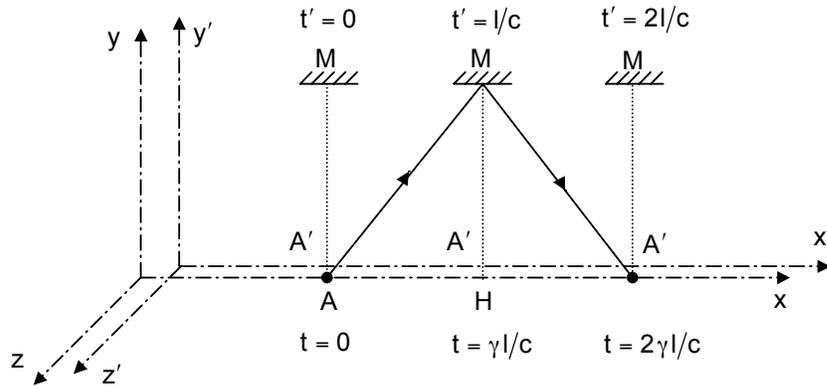
6.2.1 Postulats de la relativité restreinte

1er postulat : Toutes les lois physiques de la nature prennent la même forme dans tous les référentiels galiléens (ou inertiels) en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres et dans lesquels l'espace est homogène, isotrope et le temps uniforme. Ce premier postulat correspond au principe de relativité, évoqué en mécanique classique.

2ème postulat : La vitesse de la lumière dans le vide est constante ($c = 299\,792\,458$ m/s) dans tous les référentiels galiléens. C'est la vitesse limite de propagation des interactions.

6.2.2 Expériences de pensée, conséquences immédiates

A première vue, le deuxième postulat est en contradiction totale avec la transformation de Galilée. Mais la mécanique classique newtonienne associée à cette transformation avait donné de très bons résultats notamment dans l'étude du mouvement des planètes, avec les lois de Kepler. On remarque que même si la vitesse orbitale des planètes est importante (comme on l'a vu pour la terre), elle reste très faible devant la vitesse de la lumière comme dans la plupart des systèmes mécaniques étudiés. Le champ d'application de la transformation de Galilée se situe donc dans le domaine des faibles vitesses devant c , alors que le deuxième postulat concerne uniquement c . Ainsi il n'y a plus de contradiction. La relativité galiléenne est un cas limite de la relativité restreinte pour des vitesses $v \ll c$. Voyons maintenant sur deux expériences de pensée, les conséquences du second postulat. Considérons deux référentiels galiléens R et R' . Le référentiel R' se déplace à la vitesse u par rapport à R , les axes Ox et Ox' étant parallèles à \vec{u} . Dans la première expérience, un observateur A' lié à R' envoie un signal lumineux suivant l'axe Oy' . Ce signal est réfléchi par un miroir M fixe dans R' à une distance l de A' , et revient en A' au bout d'un temps $t' = 2l/c$ puisque la vitesse de la lumière est c dans R' .



La figure représente les différentes positions du miroir, vu par un observateur A immobile dans R . Supposons que A coïncide avec A' lorsque le signal est émis. Ce signal revient en A au bout d'un temps $t = 2AM/c$. Or :

$$AM = \sqrt{AH^2 + l^2} \quad \text{avec} \quad AH = u \frac{AM}{c}$$

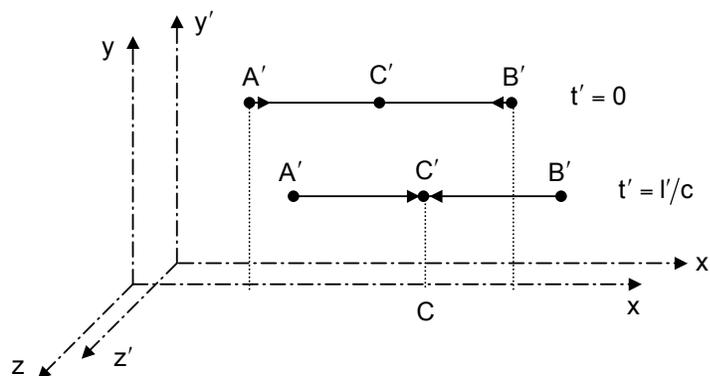
On obtient :

$$AM = \gamma l \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

D'où

$$t = \gamma t'$$

La durée de l'expérience est plus courte pour un observateur de R' que pour un observateur de R car $\gamma > 1$. Le temps ne s'écoule pas de la même façon dans R et R' , contrairement à l'hypothèse du temps absolu de la cinématique classique. Bien sûr, si $u \ll c$, $\gamma \approx 1$ et le temps peut être à nouveau considéré comme universel. Dans la deuxième expérience, deux observateurs A' et B' immobiles dans R' , situés à la même distance l' (et non l , car nous verrons que la distance mesurée dans R et dans R' n'est pas la même, sur cet exemple) d'un troisième observateur C' également fixe dans R' , émettent chacun un signal lumineux suivant la direction Ox à l'instant $t' = 0$, qui arrive en C' au même instant $t' = l'/c$. Préalablement, pour synchroniser les horloges de A' et B' , C' peut leur envoyer un signal.

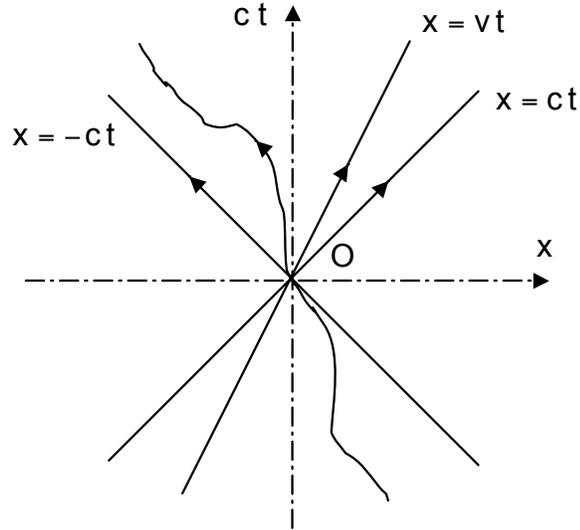


La figure représente les trois observateurs liés à R' , vus de R , à l'émission et à la réception des signaux. A la réception des signaux, un observateur C lié à R se trouve en face de C' . Lorsque A' et B' ont émis leur signaux, B' était plus proche de C que A' . Pour C , B' a donc envoyé son signal après A' car la vitesse de la lumière est la même dans R et R' . L'émission des signaux est simultanée dans R' mais ne l'est pas dans R . Nous verrons plus tard comment calculer cet écart en temps dans le référentiel R . Ainsi, le temps doit être défini dans chaque référentiel galiléen.

6.2.3 Événements et intervalles

Désormais, une expérience (par exemple l'émission d'un signal) sera décrite dans l'espace-temps quadridimensionnel par un événement appelé aussi point d'univers. Il se caractérise

par la donnée de trois coordonnées spatiales et une coordonnée temporelle dans un référentiel galiléen. Au cours du temps un point d'univers se déplace dans l'espace-temps et décrit une ligne d'univers. Une particule animée d'un mouvement rectiligne uniforme a une ligne d'univers rectiligne. En particulier, si sa vitesse est c , les lignes d'univers partant d'un événement O forment le cône de lumière de cet événement.



Pour visualiser graphiquement ces notions, il est commode d'utiliser l'espace-temps à une dimension spatiale. Sur la figure, nous avons représenté un événement O (un point en $x = 0$ et $t = 0$), le cône de lumière de cet événement formé par les droites $x = \pm ct$, et deux lignes d'univers; la première, quelconque issue de O et la deuxième, rectiligne, correspondant à une particule de vitesse $v = ct_e < c$. Les lignes sont orientées du passé vers le futur car le temps s'écoule toujours dans le même sens. D'autre part, les lignes d'univers issues de O se situent à l'intérieur de son cône de lumière. Ceci va permettre de préciser ce qu'est la causalité en relativité restreinte, en définissant l'intervalle entre deux événements. Nous voyons déjà qu'en plus du principe de causalité en relativité galiléenne (tout effet précède la cause), deux événements ne peuvent avoir de relation causale que si l'un est dans le cône de lumière de l'autre et inversement. Considérons un événement M_1 de coordonnées (ct_1, x_1, y_1, z_1) dans un référentiel galiléen R , correspondant à l'émission d'un signal lumineux, et un événement M_2 de coordonnées (ct_2, x_2, y_2, z_2) dans R , correspondant à la réception de ce signal. On a alors la relation :

$$c^2(t_2 - t_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Les événements M_1 et M_2 sont respectivement sur le cône de lumière de M_2 et M_1 . Dé-

finissons maintenant l'intervalle $s_{1,2}$ entre deux évènements quelconques $M_1(ct_1, x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(ct_2, x_2, y_2, z_2)$ par :

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Si M_1 et M_2 sont sur leur cône de lumière réciproque l'intervalle est nul. Mais dans le cas général $s'_{1,2} = s_{1,2}$ peut être positif ou négatif. Plaçons-nous dans un autre référentiel R' où les coordonnées de M_1 et M_2 sont (ct', x', y', z') et $(ct'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$. Dans R' , l'intervalle s' entre M_1 et M_2 est tel que :

$$s'^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2$$

Si M_1 et M_2 peuvent être reliés par un signal lumineux, alors $s'^2 = s^2 = 0$. Dans le cas contraire, nous ne savons rien à priori sur l'éventuelle relation liant s' et s tant que nous n'avons pas la transformation qui permet de passer des coordonnées de R à celles de R' . Essayons malgré tout de voir, sans démonstration rigoureuse, comment sont reliés les intervalles entre deux évènements infiniment voisins $M(ct, x, y, z)$ et $M + dM(c(t + dt), x + dx, y + dy, z + dz)$ dans R et dans R' . Dans R , l'intervalle ds est tel que :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

et dans R' :

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

Supposons que ds^2 et ds'^2 soient des infiniment petits du même ordre. Cette hypothèse se traduit par la relation :

$$ds^2 = \alpha(u) ds'^2$$

où α est une fonction ne pouvant dépendre que du module de la vitesse de R' par rapport à R , u , puisque l'espace est isotrope. Elle ne peut pas dépendre des coordonnées spatiales car l'espace est supposé homogène, pas plus que des coordonnées temporelles car le temps est uniforme. De plus, en considérant un troisième référentiel galiléen R'' à la vitesse v par rapport à R' et w par rapport à R , il vient :

$$ds''^2 = \alpha(v) ds'^2 = \alpha(w) ds^2 = \alpha(w) \alpha(u) ds'^2$$

d'où :

$$\alpha(u) = \alpha(v)/\alpha(w)$$

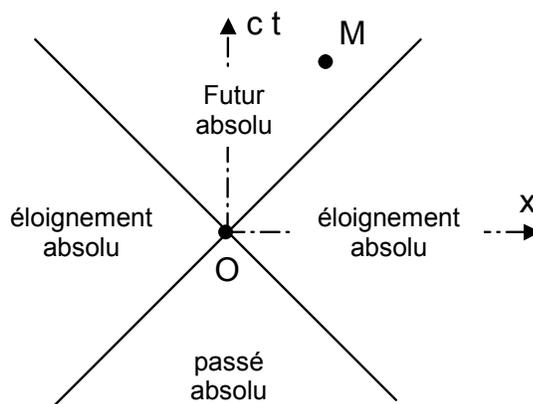
Mais u doit aussi dépendre de l'angle que font les vecteurs v et w entre eux. Cet angle n'apparaît pas dans le rapport $\alpha(v)/\alpha(w)$. On en déduit que α ne dépend pas de u , donc $\alpha = \alpha/\alpha$ et $\alpha = 1$. Finalement :

$$ds^2 = ds'^2$$

Cette relation exprime l'invariance de l'intervalle par changement de référentiel galiléen. On dit que l'intervalle est un invariant relativiste. Pour un intervalle fini entre deux événements M_1 et M_2 :

Nous sommes donc en mesure de définir le passé et le futur d'un événement indépendamment du référentiel d'étude. Trois cas se présentent.

- $s^2 > 0$: L'intervalle est du genre temps. Les événements M_1 et M_2 peuvent être reliés par un signal se propageant moins vite que la lumière. Ils sont dans leur cône de lumière réciproque.
- $s^2 < 0$: L'intervalle est du genre espace. La distance spatiale entre M_1 et M_2 est trop grande pour que les événements puissent être reliés par un signal à la vitesse c pendant le temps $t_2 - t_1$. Il n'existe pas de relation causale entre M_1 et M_2 .
- $s^2 = 0$: L'intervalle est du genre lumière. Les événements M et M ne peuvent être reliés que $s'^2 = s^2$ par un signal lumineux de vitesse c .



La figure représente deux évènements $O(0,0)$ et $M(ct,x)$ dans un espace-temps à deux dimensions. Le point M se situe dans le cône de lumière de O pour $t > 0$. Nous allons montrer que l'évènement M a lieu après l'évènement O . Il n'existe pas de référentiel dans lequel M et O aurait lieu simultanément. En effet, en considérant un référentiel R' , où M a pour coordonnées (ct', x') , l'invariance relativiste de l'intervalle du genre temps entre O et M permet d'écrire $c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2 > 0$. Si $t' = 0$ alors $-x'^2 > 0$, ce qui est impossible. Donc M ne peut pas être antérieur à O , car dans ce cas il devrait obligatoirement "passer" par O , du fait qu'il doit rester dans le cône de lumière. Un raisonnement identique peut être mené pour $t < 0$. Ainsi la notion de causalité est invariante relativiste.

En revanche, si M se situe à l'extérieur du cône de lumière de O , il existe des référentiels où M a lieu avant, pendant ou après l'évènement O .

6.2.4 Transformation de spéciale de Lorentz

Nous cherchons maintenant à établir de façon explicite la loi de transformation permettant de passer des coordonnées d'un évènement M , (ct, x, y, z) dans un référentiel galiléen R , à ses coordonnées (ct', x', y', z') dans un autre référentiel galiléen R' . Supposons, comme nous l'avons fait jusqu'à maintenant, que R' se déplace à la vitesse u par rapport à R , les axes Ox et Ox' restant parallèles. A l'instant initial $t = 0$, les évènements origine O et O' coïncident. Dans ces conditions, la transformation cherchée s'appelle la transformation spéciale de Lorentz. Remarquons tout d'abord que les coordonnées y et z ne sont pas affectées. Nous y reviendrons lorsque nous aurons compris comment interpréter la transformation en terme de rotation. Il en résulte :

$$y' = y \text{ et } z' = z$$

Supposons la transformation linéaire. Le temps étant uniforme, l'espace homogène et isotrope, il nous reste à déterminer quatre coefficients, a, b, d et e en fonction de u tels que :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(u) & b(u) \\ d(u) & e(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Pour cela, utilisons l'invariance relativiste de l'intervalle entre O et M :

$$c^2t'^2 - x'^2 = (a^2 - d^2)c^2t^2 + (b^2 - e^2)x^2 + 2(ab - ed)ctx = c^2t^2 - x^2$$

On déduit trois relations par identification :

$$\begin{cases} a^2 - d^2 = 1 \\ b^2 - e^2 = -1 \\ ab - ed = 0 \end{cases}$$

Une quatrième relation s'obtient avec l'origine O' dans R' en $x' = 0$, qui se transforme en O dans R en $x = ut$, d'où $0 = dct + eut$. En posant $\beta = u/c$, il vient :

$$d = -\beta e$$

On reporte d et on obtient : $b = -\beta e^2/a$. Puis d et b dans (1) et (2) donne :

$$a^2 - \beta^2 e^2 = 1$$

$$\beta^2 e^4 - e^2 a^2 = -a^2$$

Finalement, en posant $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ on obtient :

$$e = \pm \gamma$$

D'où

$$d = \pm \beta \gamma$$

De (1) et (2) on déduit :

$$a = \pm \gamma \text{ et } b = \pm \beta \gamma$$

de signes opposés. Lorsque u tend vers 0, la transformation correspond à la matrice identité. On lève ainsi l'indétermination des signes et il vient :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

La transformation spéciale de Lorentz s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Pour $\beta \ll 1$, nous retrouvons immédiatement, au premier ordre en β , la transformation de Galilée.

La transformation spéciale de Lorentz s'interprète comme une rotation hyperbolique dans le plan xOz . En effet si nous définissons la rapidité φ , prenant des valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ par $\tanh \varphi = \beta$, la transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

D'une façon générale, les transformations préservant l'invariance relativiste de l'intervalle ne peuvent être que des rotations (ou des translations qui ne présentent pas d'intérêt). Elles se décomposent en trois rotations ordinaires dans les plans xOy , xOz et yOz et trois rotations hyperboliques dans les plans xOz , yOz et zOz . Dans chacune de ces rotations, les coordonnées orthogonales au plan de rotation restent inchangées.

6.2.5 Composition des vitesses

A partir de la transformation spéciale de Lorentz, on obtient par différentiation :

$$\begin{cases} dt' &= \gamma(dt - udx/c^2) \\ dx' &= \gamma(dx - udt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{cases}$$

Et puisque dans R' les composantes de la vitesse d'un point M sont $v'_x = dx'/dt'$, $v'_y = dy'/dt'$ et $v'_z = dz'/dt'$, la loi de composition des vitesses s'écrit :

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_z = v_z \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

Conformément au deuxième postulat de la relativité restreinte, si $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$ alors $v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 = c^2$ et réciproquement. On retrouve également la loi de composition classique pour $\beta \ll 1$

6.3 Temps propre, longueur propre

6.3.1 Temps propre

Considérons une particule M en mouvement par rapport à un référentiel galiléen R . Son mouvement n'étant pas forcément rectiligne uniforme, il n'existe pas un seul référentiel galiléen lié à la particule dans lequel elle serait au repos au cours du temps. Par contre, à chaque instant, on peut introduire un référentiel galiléen R' où la particule est immobile, appelé référentiel propre ou référentiel tangent de la particule. Il a la vitesse v de celle-ci à l'instant considéré et nous supposons que l'origine O' de son repère, coïncide avec M . Dans R , l'intervalle entre deux évènements infiniment proches, $M(ct, x, y, z)$ et $M + dM(c(t + dt), x + dx, y + dy, z + dz)$ est :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Pendant le temps dt , la particule s'est déplacée de dl tel que :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = v^2 dt^2$$

D'où :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - v^2 dt^2 = c^2 dt^2 (1 - v^2/c^2)$$

Dans le référentiel propre R' , la vitesse de la particule est nulle et l'intervalle de temps propre dt' est défini par la relation :

$$ds'^2 = c^2 dt'^2$$

L'intervalle dt' est un invariant relativiste au même titre que $ds' = ds$. Le temps propre de la particule t' , s'obtient par intégration de dt' dans les différents référentiels propres introduit au cours du temps. D'après les deux relations précédentes :

$$dt = \gamma dt' \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

L'intervalle de temps propre dt' , mesuré dans R' est plus court que l'intervalle dt mesuré dans R car $\gamma > 1$. Autrement dit, le temps s'écoule moins vite dans le référentiel propre que dans R . On dit qu'il y a dilatation du temps. Il est facile de retrouver ce résultat à l'aide de la transformation spéciale de Lorentz. Considérons une horloge (ou une particule) qui émet des signaux à intervalles de temps réguliers $\Delta t'$, mesurés dans son référentiel propre R' . Dans ce référentiel, l'horloge est immobile et donc $\Delta x' = 0$. Mais la transformation spéciale de Lorentz, inversée (la matrice de passage s'obtient en remplaçant \vec{v} par $-\vec{v}$) donne :

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + v \frac{\Delta x'}{c^2} \right)$$

et :

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Cette conséquence surprenante de la relativité restreinte se vérifie expérimentalement. Une particule susceptible de se désintégrer a une durée de vie moyenne déterminée dans son référentiel propre par son horloge interne. Si sa durée de vie est très courte, elle sera néanmoins observable si sa vitesse est proche de c car γ sera très grand devant 1 de même que le temps de son observation dans R avant sa désintégration. C'est dans les accélérateurs de particules que l'on peut vérifier ce phénomène, ou comme l'ont fait Frish et Smith en 1963, en étudiant la désintégration des muons produit dans la haute atmosphère.

6.3.2 Longueur propre

Considérons une barre en mouvement par rapport à un référentiel galiléen R . A chaque instant, définissons son référentiel propre R' et plaçons l'axe Ox' parallèle à la barre. A l'instant t dans R , supposons comme nous l'avons toujours fait, que les axes Ox et Ox' sont parallèles.

La longueur propre d'une barre est la longueur de cette barre dans son référentiel propre. Nous la notons $\Delta x'$. Pour connaître la longueur de la barre dans R , il suffit de déterminer la distance Δx séparant les deux évènements correspondant aux extrémités de la barre au même instant, c'est à dire pour $\Delta t = 0$. Or la transformation spéciale de Lorentz nous donne :

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$

D'où :

$$\Delta x' = \gamma\Delta x \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dans la direction du mouvement, la longueur mesurée dans R est plus petite que celle mesurée dans R' . On dit qu'il y a contraction des longueurs. Mais dans une direction perpendiculaire au mouvement, la longueur est la même puisque $\Delta y' = \Delta y$ et $\Delta z' = \Delta z$.

En conséquence, tout objet volumique subit une contraction. Par exemple, en électromagnétisme, la densité volumique de charge dans le référentiel propre, s'écrit :

$$\rho' = \frac{dq}{dV'} = \frac{dq}{dx'dy'dz'}$$

Et dans le référentiel R :

$$\rho = \frac{dq}{dv} = \frac{dq}{dxdydz} = \frac{\gamma dq}{dx'dy'dz'} = \gamma\rho'$$

6.3.3 Exemples

Expérience de Michelson et Morley

Reprenons l'expérience précédente. Considérons le référentiel héliocentrique galiléen R et le référentiel propre de l'interféromètre de Michelson R' , lié à la terre. Dans R' , les faisceaux lumineux issus du miroir semi-réfléchissant en O , parcourent les distances OM_1O et OM_2O en un temps identique :

$$t' = t'_1 = t'_2 = \frac{2l'}{c}$$

où l' est la longueur propre des deux bras de l'interféromètre. Dans R , d'après la dilatation du temps, le temps mis par les faisceaux lumineux pour revenir en O , dans chacun des bras est :

$$t = t_1 = t_2 = \gamma t' = \gamma \frac{2l'}{c}$$

L'ordre d'interférence est donc nul et il n'y a pas de décalage des franges. Mais attention, la distance parcourue par les faisceaux dans chacun des bras n'est pas la même car il y a uniquement contraction de la longueur du bras parallèle à la direction du déplacement de la terre. Ainsi, la théorie de la relativité restreinte permet d'expliquer le résultat de l'expérience de Michelson et Morley.

Expérience de pensée

La première expérience de pensée que nous avons abordée, à savoir la réflexion d'un signal lumineux sur un miroir mobile, nous avait permis de mettre en évidence le phénomène de dilatation du temps. Elle correspond à la réflexion du faisceau transverse dans l'expérience de Michelson et Morley. Nous n'y reviendrons pas. La seconde expérience nous avait fait entrevoir la non simultanéité de deux événements dans un référentiel R , alors qu'ils le sont dans un référentiel R' que nous appelons maintenant référentiel propre, sans pouvoir toutefois déterminer le décalage temporel dans R . Nous allons pouvoir calculer maintenant, ce décalage, à l'aide de la transformation spéciale de Lorentz. Considérons les deux événements A' et B' de coordonnées dans R' , ($t'_A = 0, x'_A = -l'$) et ($t'_B = 0, x'_B = l'$), correspondant à l'émission simultanée des signaux lumineux. La transformation spéciale de Lorentz permet d'écrire :

$$t_A = \gamma(t'_A + \frac{vx'_A}{c^2})$$

$$t_B = \gamma(t'_B + \frac{vx'_B}{c^2})$$

D'où :

$$t_A = -\frac{\beta\gamma l'}{c}$$

$$t_B = \frac{\beta\gamma l'}{c}$$

On retrouve bien le fait que t_A soit antérieur à t_B . La contraction des longueurs s'exprime par la relation $l' = \gamma l$. Finalement, le décalage est :

$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{2\beta\gamma^2 l}{c}$$

Autres exemples

- Expérience de Frish et Smith
- Effet Doppler longitudinal et transversal
- Paradoxe des jumeaux
- Aberration des étoiles

6.4 Interprétation géométrique et quadrivecteurs

6.4.1 Interprétation géométrique et quadrivecteur "position"

Considérons les coordonnées (ct, x, y, z) d'un événement M , dans un référentiel galiléen R , comme les composantes $OM_i, i = 0, 1, 2, 3$, d'un quadrivecteur OM dans un espace vectoriel à quatre dimensions. En notant $x_i, i = 0, 1, 2, 3$, ces composantes :

$$OM_i = (x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$$

Puisque x, y, z sont les composantes du vecteur $OM = r$ dans l'espace ordinaire à trois dimensions, nous écrirons également :

$$OM = (ct, \vec{r})$$

On appelle parfois OM , le quadrivecteur position, bien que quadrivecteur événement soit plus adapté.

Il est possible de munir l'espace vectoriel à quatre dimensions, d'une forme quadratique non définie positive, qui à tout quadrivecteur OM associe le scalaire :

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

C'est sa pseudo-norme. Elle est égale à :

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

et est donc invariante relativiste. La métrique est pseudo-euclidienne de signature $(+, -, -, -)$ et l'espace correspondant s'appelle l'espace de Minkowski.

Rq : Si nous avons défini l'intervalle entre O et M par $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$, la signature de la métrique aurait été $(-, +, +, +)$. Ce choix est purement conventionnel.

Signalons enfin que le produit scalaire entre deux quadrivecteurs OM et OP de composantes x_i et y_i est :

$$OM \cdot OP = x_i y_i = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$

En toute rigueur, le terme produit scalaire n'est pas exacte puisque la forme quadratique n'est pas définie positive. Il est facile de se convaincre, en utilisant la transformation spéciale de Lorentz, que c'est un invariant relativiste.

6.4.2 Quadrivecteur vitesse

Définissons maintenant le quadrivecteur vitesse V d'une particule en mouvement à une vitesse arbitraire v , par rapport à un référentiel galiléen R . A un instant t dans R , il existe un référentiel propre R' où la particule est au repos. La vitesse de la particule est le déplacement élémentaire de l'événement M associé à la particule, pendant le temps propre dt' . Le quadrivecteur vitesse s'écrit alors :

$$V = \frac{dOM}{dt'}$$

Mais dans R , $dt = \gamma dt'$, donc

$$V = \gamma \frac{dOM}{dt}$$

En utilisant la notation $OM = (ct, \vec{r})$, le quadrivecteur vitesse V s'écrit :

$$V = \gamma(c, \vec{v})$$

Et ses composantes :

$$V_i = (v_0 = \gamma c, v_1 = \gamma v_x, v_2 = \gamma v_y, v_3 = \gamma v_z)$$

La pseudo-norme de V est :

$$V^2 = V_i V_i = \gamma^2 (c^2 - v^2) = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2$$

Elle est invariante relativiste.

Enfin, vérifions que les composantes du quadrivecteur vitesse se transforment conformément à la transformation spéciale de Lorentz, lors d'un changement de référentiel galiléen. Notons u , la vitesse d'un référentiel galiléen R' , par rapport à un autre référentiel galiléen R . La vitesse de la particule dans R est v et dans R' , v' . Nous avons :

$$\begin{pmatrix} \gamma' c \\ \gamma v'_x \\ \gamma v'_y \\ \gamma v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta \gamma_u & 0 & 0 \\ -\beta \gamma_u & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma v_x \\ \gamma v_y \\ \gamma v_z \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \beta = u/c, \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ et } \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}.$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \gamma' &= \gamma \gamma_u \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right) \\ v'_x &= \frac{\gamma \gamma_u}{\gamma'} (v_x - u) \\ v'_y &= \gamma \frac{v_y}{\gamma'} \\ v'_z &= \gamma \frac{v_z}{\gamma'} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v'_y &= v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\ v'_z &= v_z \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \end{aligned}$$

en accord avec ce que nous avons obtenu précédemment.

Conclusion :

La relativité restreinte a émergé suite à l'étude de l'électromagnétisme par Maxwell et de l'incompatibilité de l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide avec la transformation de Galilée. Cette théorie s'est révélée parfaitement adaptée à l'étude de l'électro-

magnétisme, puis de toutes les autres lois fondamentales de la nature, à l'exception de la gravitation. En effet, il n'est pas possible d'appliquer la relativité restreinte à la gravitation de Newton. Pour remédier à cela, Einstein proposa en 1915, la théorie de la relativité générale, dans laquelle la géométrie de l'espace-temps n'est plus pseudo-euclidienne mais variable suivant le champ de gravitation existant dans cet espace.

Dynamique relativiste



Bibliographie

- *Mécanique 1 et 2*, Faroult, Renault, Dunod
- *Physique théorique : Théorie des champs*, Landau, Mir
- *Relativité restreinte et structure atomique de la matière*, Grossetête, Ellipses

Introduction :

Nous commencerons par poser les bases de la dynamique relativiste en nous appuyant sur les résultats obtenus en cinématique relativiste, préalable indispensable à l'étude des collisions.

Nous appliquerons les lois de conservation à l'étude des chocs élastiques et inélastiques des particules élémentaires et noyaux atomiques. Nous verrons enfin quelles sont les modifications apportées par la relativité restreinte par rapport au traitement classique.

7.1 Dynamique relativiste

7.1.1 Quadrivecteur énergie impulsion

En cinématique relativiste, nous savons que le quadrivecteur vitesse d'une particule en mouvement à la vitesse v par rapport à un référentiel galiléen R est :

$$V = \gamma(c, \vec{v}) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Si m est la masse de la particule (dans R pour le moment), le quadrivecteur énergie impulsion P est défini par :

$$P = mV = m\gamma(c, \vec{v})$$

Lorsque la vitesse de la particule est faible devant c , nous pouvons développer γ à l'ordre le plus bas en v/c et il vient :

$$\gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

Le quadrivecteur énergie impulsion s'écrit alors :

$$P = \left(\frac{1}{c}(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2), m\vec{v} \right)$$

La première composante de P est un terme d'énergie divisé par c . En plus de l'énergie cinétique de la particule, $\frac{1}{2}mv^2$, il apparaît une énergie au repos, mc^2 . Les trois autres composantes de P sont celles de l'impulsion de la particule, dans l'espace ordinaire à trois dimensions.

C'est pourquoi nous postulons dans le cas général (v pouvant être proche de c) :

$$P = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

où E est l'énergie relativiste de la particule dans R et p sa quantité de mouvement relativiste. Ceci est simplement une interprétation de l'expression du quadrivecteur énergie impulsion, dont nous comprenons au passage la dénomination. Les expressions de E et p sont :

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ \vec{p} &= \gamma m\vec{v} \end{aligned}$$

L'expression de l'énergie relativiste E peut se mettre sous la forme :

$$E = mc^2 + (\gamma - 1)mc^2$$

L'énergie cinétique relativiste de la particule est alors définie de façon naturelle par :

$$E_c = (\gamma - 1)mc^2$$

Voyons maintenant quelles sont les expressions de l'énergie E' et de l'impulsion \vec{p}' de la particule dans son référentiel propre R' défini à l'instant t dans R . Nous supposons que les axes Ox et Ox' de R et R' sont parallèles. Par définition d'un quadrivecteur les composantes de P se transforment suivant la transformation spéciale de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} E'_x = \gamma(E - vp_x) \\ p'_x = \gamma(p_x - v\frac{E}{c^2}) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \end{cases}$$

Mais dans R' , $p'_x = p'_y = p'_z = 0$ puisque la particule est au repos. Donc :

$$p_x = v\frac{E}{c^2}$$

$$E' = \gamma\left(E - \frac{v^2}{c^2}E\right) = \frac{\gamma m^2 c^4}{c^2} - \gamma m^2 v^2 = m^2 c^2$$

Finalement :

$$E' = mc^2 \quad \text{et} \quad \vec{p}' = \vec{0}$$

Ce résultat était évident à partir des expressions générales de E' et \vec{p}' lorsque R est le référentiel propre et $v=0$.

La pseudo-norme du quadrivecteur énergie impulsion est :

$$P^2 = P_i P_j = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{\gamma m^2 c^4}{c^2} - \gamma m^2 v^2$$

La masse m de la particule ainsi que son énergie propre E' ou énergie de masse ne dépendent pas du référentiel d'étude. Ce sont des invariants relativistes.

On donne la masse d'une particule en unité d'énergie divisée par c^2 ou en unité de masse atomique. Pour le proton, le neutron et l'électron.

	m_p	m_n	m_e
En MeV/ c^2	938,28	939,57	0,5110
En u	1,007276 u	1,008665 u	$0,54858 \cdot 10^{-3}$ u

L'expression de la pseudo-norme du quadrivecteur énergie impulsion permet d'écrire la relation fondamentale de la dynamique :

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

que l'on représente graphiquement par un triangle rectangle.

Pour un système isolé de N particules il est possible de définir le quadrivecteur énergie impulsion de l'ensemble des particules par :

$$P = \left(\frac{1}{c} \sum E_i, \sum \vec{p}_i \right)$$

à condition qu'il n'existe aucune interaction entre ces particules. Dans le cas contraire, l'énergie E_i et l'impulsion p_i de la particule i ne seraient pas des constantes. Il faudrait alors sommer les énergies et les impulsions à un instant donné dans un référentiel galiléen R . Mais dans un autre référentiel galiléen R' , du fait de la non simultanée des événements, les sommes ne seraient pas identiques.

7.1.2 Quadrivecteur force

Définissons le quadrivecteur force de la particule de masse m , dans un référentiel galiléen R par :

$$F = m \frac{dP}{dt'}$$

où dP est la variation élémentaire du quadrivecteur énergie impulsion pendant le temps propre dt' mesuré dans le référentiel propre de la particule. Le phénomène de dilatation du temps permet d'écrire :

$$F = \gamma \frac{dP}{dt}$$

avec

où t est le temps mesuré dans R . On en déduit :

$$F = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

Supposons que la vitesse v de la particule, dans R , soit faible devant c . A l'ordre le plus bas en v/c :

$$F = 1 + \frac{v^2}{2c^2} \quad \text{et} \quad E = \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) mc^2$$

puis :

$$\frac{dE}{dt} = m \frac{dv}{dt} v$$

On voit que la dérivée de l'énergie par rapport au temps correspond à un terme de puissance. Les trois autres composantes de F sont celles de la force \vec{f} multipliée par dans l'espace ordinaire à trois dimensions.

Dans le cadre général de la mécanique relativiste (v pouvant être proche de c), nous postulons que dans un référentiel galiléen R :

$$F = \gamma \left(\frac{\vec{f} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{f} \right)$$

avec :

$$\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{f} \cdot \vec{v} = \frac{dE}{dt}$$

Si la particule est isolée, $\vec{f} = 0$ entraîne la conservation du quadrivecteur énergie impulsion P . Pour un système de N particules isolées :

$$\sum_{i=1}^N E_i = \text{cte} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{ct\hat{e}}$$

7.1.3 Le photon, particule de masse nulle

L'expérience d'Einstein sur l'effet photoélectrique a permis de montrer que le rayonnement monochromatique de fréquence ν est quantifié. Les particules élémentaires associées à cette quantification du champ électromagnétique sont les photons. Par ailleurs, d'après les lois de Maxwell, les ondes électromagnétiques se déplacent dans le vide à la vitesse de la lumière c . Ainsi, les photons ont une vitesse $v = c$ dans le vide. Dans ces conditions γ est infiniment grand et les composantes du quadrivecteur énergie impulsion du photon ne restent finies que si sa masse est nulle. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors :

$$E = pc$$

Mais l'énergie E et l'impulsion p restent indéterminés par cette approche. Ce sont les travaux de Planck puis d'Einstein qui ont permis de définir l'énergie d'un photon par :

$$E = h\nu$$

où ν est la fréquence du rayonnement électromagnétique et $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ J.s la constante de Planck.

De ces deux dernières expressions de l'énergie on déduit la relation de De Broglie traduisant la dualité onde-corpuscule :

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

où $\lambda = c/\nu$ est la longueur d'onde du rayonnement. Cette relation établie pour le photon se généralise à toutes autres particules de masse non nulle.

Une autre façon d'écrire l'énergie et l'impulsion du photon est :

$$E = \hbar\omega \quad \text{et} \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite, $\omega = 2\pi\nu$ la pulsation et \vec{k} le vecteur d'onde de module $2\pi/\lambda$. Le quadrivecteur énergie impulsion se note :

$$P = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\vec{k} \right)$$

Sa pseudo-norme est :

$$P^2 = P_i P_i = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \hbar^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) = 0$$

en accord avec le fait que la masse du photon est nulle.

7.1.4 Le référentiel du centre de masse

Considérons un système isolé de N particules indépendantes, en mouvement dans un référentiel galiléen R . Dans ce cas il est possible de définir la somme des énergies et la somme des impulsions des différentes particules dans R :

$$E = \sum_{i=1}^N E_i \quad \text{et} \quad \vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

et donc le quadrivecteur énergie impulsion du système.

Le référentiel du centre de masse de ce système est le référentiel R' en translation par rapport à R , dans lequel l'impulsion du système est nulle :

$$\vec{p}^* = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i^*$$

Le quadrivecteur énergie impulsion du système dans R^* s'écrit alors :

$$P^* = \left(\frac{E^*}{c}, \vec{0} \right)$$

où

$$E^* = \sum_{i=1}^N E_i^*$$

est l'énergie du système dans R .

Rq : Le terme "centre de masse" peut prêter à confusion car des particules comme le photon n'ont pas de masse. Il est donc impossible de définir comme en mécanique classique, la position du centre de masse. Cette position sera définie par :

$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^N E_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N E_i}$$

La transformation de Lorentz permet de passer de P à P' . Appelons u la vitesse de R' par rapport à R (parallèle à son axe Ox). Si p n'a qu'une composante suivant cet axe Ox , ce qui se produit effectivement dans les accélérateurs de particules, alors :

$$\begin{pmatrix} E^*/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta_u \gamma_u & 0 & 0 \\ -\beta_u \gamma_u & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

On déduit la vitesse de R^* par rapport à R :

$$\vec{u} = \frac{c^2}{E} \vec{p}$$

qui est constante car E et p sont constants puisque le système est isolé. Le référentiel du centre de masse est donc galiléen.

On obtient également l'expression de l'énergie du système dans R^* :

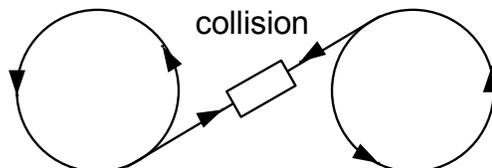
$$E' = \frac{E}{\gamma_u}$$

La valeur de cette énergie est inférieure à celle que l'on mesure dans R . On peut aussi écrire directement la pseudo-norme du quadrivecteur énergie impulsion du système :

$$\frac{E^*}{c^2} = \frac{E}{c^2} - p^2$$

On voit que l'énergie du système est minimum dans le référentiel du centre de masse.

Ceci a une application dans la collision de particules. Pour fournir le minimum d'énergie dans le référentiel du laboratoire R à deux particules entrant en collision, il faut s'arranger pour que R et R^* coïncident. Ceci est possible en utilisant des anneaux collisionneurs dont le principe est indiqué sur la figure. Dans ce cas les particules ont des vitesses opposées, et si $\vec{p} = \vec{u} = 0$ alors $E = E^*$



7.2 Chocs élastiques

7.2.1 Définitions et propriétés générales

Définition : Un choc entre particules est élastique si la nature et le nombre des particules avant la collision, sont conservés après la collision.

Considérons un système de N particules entrant en collision et supposons qu'avant et après la collision, les particules soient indépendantes les unes des autres. Elles suivent donc des trajectoires rectilignes à des vitesses uniformes. Pendant le choc, il y a interaction entre les particules et en toute rigueur il n'est pas possible de calculer la somme des énergies et des impulsions de ces particules. Nous allons alors supposer que la durée du choc est très courte, et que même si le quadrivecteur énergie impulsion n'est pas défini pendant ce temps, il se conserve avant et après le choc. Cela se traduit, dans un référentiel galiléen R , par :

$$P^{av} = P^{ap}$$

où E_{Ci} est l'énergie cinétique de la particule i . Nous en déduisons la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement du système :

$$\sum_{i=1}^N E_{Ci}^{av} = \sum_{i=1}^N E_{Ci}^{ap}$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i^{ab} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i^{ap}$$

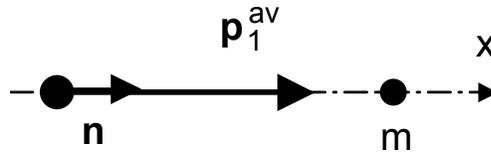
Rq : Très souvent, il est commode d'écrire la conservation du quadrivecteur énergie impulsion avant et après le choc, dans le référentiel du centre de masse R^* :

$$P^{*av} = P^{*ap}$$

car l'impulsion du système y est nulle.

7.2.2 Effet Compton

Nous voulons étudier la collision d'un photon de grande énergie et d'un électron immobile de masse m dans un référentiel galiléen R .



Dans l'expérience originale de Compton en 1922, les photons sont émis par un tube à rayons X , avec une longueur d'onde $\lambda = 0,71 \text{ \AA}$ correspondant à la raie K_α du molybdène. Ils possèdent donc une énergie $E = hc/\lambda = 17,5 \text{ keV}$. Ils entrent en collision avec les électrons de la couche externe des atomes d'une cible en graphite. Ceux-ci sont faiblement liés (quelques électrons-volt) et donc considérés comme libres. Compton détecta deux longueurs d'onde. La première, λ , correspondant au rayonnement incident, et la deuxième, λ' , supérieure à λ , dépendant de l'angle θ d'observation.

Déterminons λ' en fonction de l'angle de diffusion θ du photon après le choc.

Avant le choc dans R

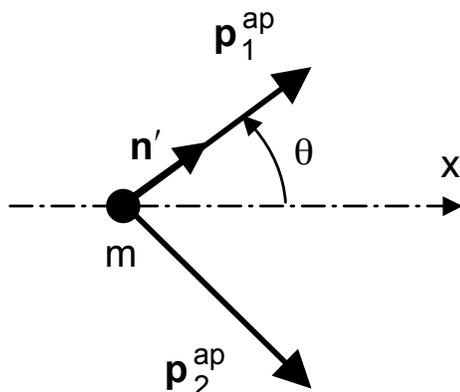
Si \vec{n} est un vecteur unitaire porté par la direction du photon incident, et ν la fréquence de ce rayonnement, le quadrivecteur énergie impulsion du photon est :

$$P_i^{av} = \left(\frac{E_1^{av}}{c}, \vec{p}_1^{av} \right) = \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c} \vec{n} \right)$$

et celui de l'électron :

$$P_2^{av} = \left(\frac{E_2^{av}}{c}, \vec{p}_2^{av} \right) = \left(\frac{mc^2}{c}, \vec{0} \right)$$

Après le choc dans R



On note \vec{n}' le vecteur unitaire porté par la direction du photon diffusé sous l'angle θ et ν' la fréquence associée à son rayonnement. Le quadrivecteur énergie impulsion de ce photon est :

$$P_1^{ap} = \left(\frac{E_1^{ap}}{c}, \vec{p}_1^{ap} \right) = \left(\frac{h\nu'}{c}, \frac{h\nu'}{c} \vec{n}' \right)$$

et celui de l'électron :

$$P_2^{ap} = \left(\frac{E_2^{ap}}{c}, \vec{p}_2^{ap} \right)$$

La conservation du quadrivecteur énergie impulsion du système, avant et après le choc, permet d'écrire :

$$\begin{cases} \vec{p}_2^{ap} &= \vec{p}_1^{av} - \vec{p}_1^{ap} \\ E_2^{ap} &= E_1^{av} + E_2^{av} - E_1^{ap} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} \vec{p}_2^{ap} &= h\nu\vec{n} - h\nu'\vec{n}' \\ E_2^{ap} &= h(\nu - \nu') + mc^2 \end{cases}$$

Et puisque $E_2^{ap} = p^{ap2}c^2 + m^2c^4$, on obtient :

$$[h(\nu - \nu') + mc^2] = h^2(\nu\vec{n} - \nu'\vec{n}') + m^2c^4$$

Mais $\lambda = c/\nu$. Après simplification il vient :

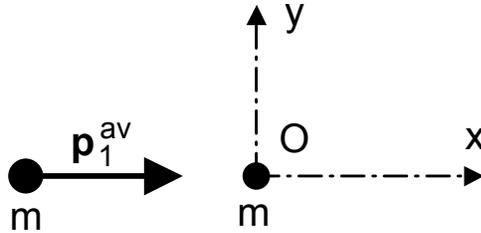
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

La longueur $h/mc = 0,024 \text{ \AA}$ s'appelle la longueur d'onde Compton de l'électron. Le résultat du calcul en accord avec l'expérience, confirme que le photon possède une quantité de mouvement de module $h\nu/c$.

Pour cette expérience, Compton obtint le prix Nobel en 1927.

7.2.3 Choc élastique de deux particules identiques, l'une en mouvement, l'autre immobile

Considérons deux particules identiques de masse m , l'une en mouvement, l'autre au repos, entrant en collision. On note R le référentiel du laboratoire et R' le référentiel du centre de masse. Nous voulons connaître dans R , la quantité de mouvement des deux particules après le choc, soit quatre composantes scalaires dans le plan formé par les directions des deux particules.



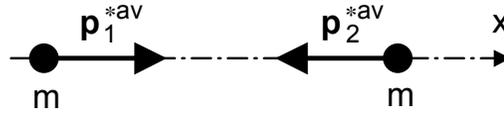
La particule en mouvement possède une énergie E^{av} . Le module de son impulsion p^{av} est donné par la relation :

$$p_1^{ac} c = \sqrt{E_1^{av} - m^2 c^4}$$

et sa direction est celle de l'axe Ox . La particule immobile se trouve à l'origine O du repère Oxy lié à R . Son énergie est E^{av} son impulsion système. Le quadrivecteur énergie impulsion s'écrit :

$$P^{av} = \left(\frac{E^{av}}{c}, \vec{p}^{ab} \right) = \left(\frac{E_1^{av} + mc^2}{c}, p_1^{ab} \right)$$

Avant le choc dans R^*



A l'aide de la transformation de Lorentz, nous avons obtenu l'expression de l'énergie du système dans R^* :

$$E^{*av} = \frac{E^{av}}{\gamma} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{cp_1^{av}}{E^{av}}$$

On en déduit :

$$\beta = \frac{\sqrt{E_1^{av2} - m^2 c^4}}{E_1^{av} + mc^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{\frac{E_1^{av} + mc^2}{2mc^2}}$$

puis :

$$E^{*av} = \sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}$$

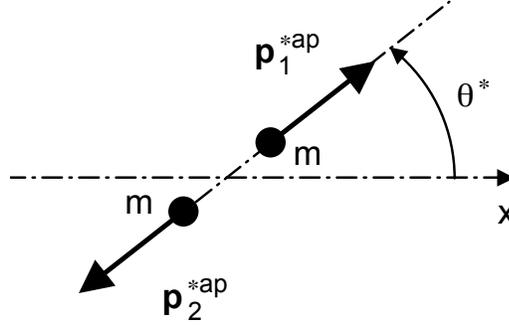
L'impulsion du système étant nulle dans R^* son quadrivecteur énergie impulsion s'écrit :

$$P^{*av} = \left(\frac{E^{*av}}{c}, \vec{p}^{*ab} \right) = \left(\frac{\sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}}{c}, \vec{0} \right)$$

Après le choc dans R^*

La conservation du quadrivecteur énergie impulsion avant et après le choc, $P^{*av} = P^{*ap}$ permet d'écrire :

$$P^* = \left(\frac{E^{*ap}}{c}, \vec{p}^{*ap} \right) = \left(\frac{\sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}}{c}, \vec{0} \right)$$



La conservation de l'impulsion fournit deux équations scalaires et la conservation de l'énergie une troisième équation :

$$\vec{p}_1^{*ap} + \vec{p}_2^{*ap} = \vec{0}$$

$$E_1^{*ap} + E_2^{*ap} = \sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}$$

Mais nous avons déjà noté que le problème comporte quatre 2 inconnues. Donnons-nous alors un paramètre supplémentaire; l'angle d'éjection de la particule 1, dans R^* . Nous l'appelons θ' .

Puisque $\vec{p}_2^{*ap} = -\vec{p}_1^{*ap}$, l'angle d'éjection de la particule 2 est $\theta' - \pi$

L'égalité $p_1^{*ap} = p_2^{*ap}$ implique :

$$E_1^{*ap2} = p_1^{*ap2} + m^2c^4 = p_2^{*ap2}c^2 + m^2c^4 = E_2^{*ap2}$$

et donc :

$$E_1^{*ap} = E_2^{*ap} = \sqrt{\frac{mc^2(E_1^{av} + mc^2)}{2}}$$

En utilisant la relation $p_1^{*ap}c = \sqrt{E_1^{*ap2} - m^2c^4}$ il vient :

$$p_1^{*ap} = p_2^{*ap} = \sqrt{\frac{mc^2(E_1^{av} - mc^2)}{2}}$$

Les composantes du quadrivecteur énergie impulsion de chaque particule s'écrivent :

$$(P_1^{*ap})_i = \left(\frac{E_1^{*ap}}{c}, p_1^{*ap} \cos \theta^*, p_1^{*ap} \sin \theta^*, 0 \right)$$

$$(P_2^{*ap})_i = \left(\frac{E_2^{*ap}}{c}, -p_2^{*ap} \cos \theta^*, -p_2^{*ap} \sin \theta^*, 0 \right)$$

Après le choc dans R^*

Pour obtenir les quadrivecteurs énergie impulsion des particules dans le référentiel du laboratoire, il suffit d'utiliser la transformation de Lorentz inverse, donnant les composantes de P_1^{ap} et P_2^{ap} en fonction de celles de P_1^{*ap} et P_2^{*ap} . Pour la première particule cette transformation s'écrit :

$$E_1^{ap} = \gamma(E_1^{*ap} + up_{1x}^{*ap}) = \frac{E_1^{av} + mc^2}{2} + \frac{E_1^{av} - mc^2}{2} \cos \theta^*$$

$$p_{1x}^{ap} = \gamma \left(p_1^{*ap} + \frac{u}{c^2} E_1^{*ap} \right) = \frac{1 + \cos \theta^*}{2c} \sqrt{E_1^{av2} - m^2c^4}$$

$$p_{1y}^{ap} = p_{1y}^{*ap} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{mc^2(E_1^{av} - mc^2)}{2}}$$

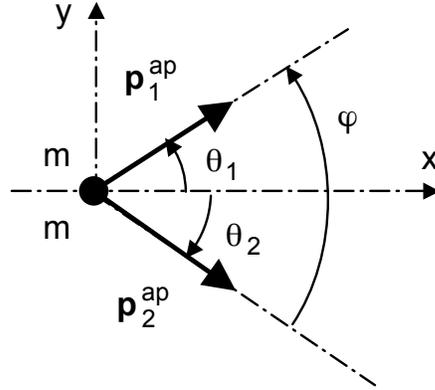
$$p_{1z}^{ap} = p_{1z}^{*ap} = 0$$

Le module de l'impulsion de la particule 1 est donné par la relation fondamentale de la dynamique :

$$p_1^{ap} = \frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{E_1^{av} + mc^2}{2} + \frac{E_1^{av} - mc^2}{2} \cos \theta' \right)^2 - m^2c^4}$$

et sa direction, par l'angle d'éjection θ_1 mesuré dans R et tel que :

$$\tan \theta_1 = \frac{p_{1y}^{ap}}{p_{1x}^{ap}} = \frac{\sin \theta^*}{1 + \cos \theta^*} \sqrt{\frac{2mc^2}{E_1^{av} + mc^2}}$$



Pour la particule 2, le raisonnement est le même. On obtient :

$$p_2^{ap} = \frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{E_1^{av} + mc^2}{2} - \frac{E_1^{av} - mc^2}{2} \cos \theta' \right) - m^2 c^4}$$

et :

$$\tan \theta_2 = \frac{p_{2y}^{ap}}{p_{2x}^{ap}} = \frac{-\sin \theta^*}{1 - \cos \theta^*} \sqrt{\frac{2mc^2}{E_1^{av} + mc^2}}$$

L'angle d'éjection entre les deux particules est $\varphi = \theta_1 - \theta_2$. A l'aide de la relation :

$$\tan \varphi = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

il vient après calcul :

$$\tan \varphi = \frac{2\sqrt{2mc^2(E_1^{av} + mc^2)}}{(E_1^{av} - mc^2) \sin \theta^*}$$

En relativité restreinte $0 < \varphi < \pi/2$ alors que, à la limite classique $v \ll c$, $E_1^{av} = mc^2$ et $\varphi = \pi/2$.

7.3 Chocs inélastiques

7.3.1 Définition et propriétés générales

Définition : Un choc entre particules est inélastique si la nature ou le nombre des particules avant la collision n'est pas conservé après la collision.

Considérons un système isolé de N particules de masse m_i , $1 \leq i \leq N$, pouvant entrer en collision. Après le choc, nous aurons un système de Q particules (avec a priori $Q \neq N$) de masse m_j , $1 \leq j \leq Q$. Si ces particules sont indépendantes les unes des autres, nous pouvons définir la somme des énergies et la somme des impulsions des particules, puis le quadri-vecteur énergie impulsion du système avant et après le choc, dans un référentiel galiléen R . Le système étant isolé, ce quadri-vecteur se conserve et nous pouvons écrire :

$$P^{av} = P^{ap}$$

D'où

$$\sum_i^N (m_i c^2 + E_{Ci}^{av}) = \sum_j^Q (m_j c^2 + E_{Cj}^{av}) \quad \text{et} \quad \sum_i^N \vec{p}_i^{ab} = \sum_j^Q \vec{p}_j^{ab}$$

L'énergie cinétique du système n'est plus conservée puisque :

$$\sum_i^N m_i c^2 \neq \sum_j^Q m_j c^2$$

Appelons "défaut de masse" la quantité :

$$\Delta m = \sum_i^N m_i - \sum_j^Q m_j$$

et la variation d'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \sum_i^N E_{Ci}^{av} - \sum_j^Q E_{Cj}^{av}$$

La loi de conservation de l'énergie relativiste s'écrit alors :

$$\Delta E_C = \Delta mc^2$$

C'est la formule très célèbre qu'Einstein découvrit en 1905. Elle traduit l'équivalence entre la masse et l'énergie. Dans une réaction (collision ou désintégration), si la masse totale des particules formées augmente, l'énergie cinétique totale de ces particules diminue, et inversement. Il y a conversion de l'énergie de masse en énergie cinétique.

7.3.2 Energie de seuil

L'énergie minimum des particules émises après une collision, est la somme des énergies de masse de chacune de ces particules. L'énergie cinétique du système est alors nulle, ainsi que son impulsion. De ce fait, le référentiel d'étude est le référentiel du centre de masse.

Définition : L'énergie de seuil, de production de Q particules lors d'une collision inélastique, est l'énergie cinétique minimum des N particules incidentes, permettant de créer des particules au repos dans leur référentiel du centre de masse.

Calculons l'énergie cinétique minimum que doit posséder une particule de masse m_1 entrant en collision avec une particule immobile de masse m_2 , pour former Q particules de masse m_j . Pour cela écrivons l'invariance de la pseudo-norme du quadrivecteur énergie impulsion du système dans R et R' , avant le choc :

$$P^{av2} = P^{*av2}$$

Dans R^* , il y a conservation de ce quadrivecteur avant et après le choc, donc également conservation de sa pseudo-norme :

$$P^{*av2} = P^{*ap2}$$

D'où :

$$P^{av2} = P^{*ap2}$$

relation qui s'écrit aussi :

$$E^{av2} - p^{av2}c^2 = E^{*ap2}$$

avec :

$$E^{av} = E_1^{av} + mc^2$$

$$p^{av2}c^2 = p_1^{av2}c^2 = E_1^{av2} - m_1c^4$$

$$E^{*ap} = \sum_j^Q m_j c^2$$

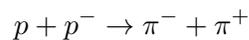
En notant $E_1^{av} = (E_{C1}^{av})_{min} + m_1c^2$

$$(E_{C1}^{av})_{min} = \frac{\left(\sum_j^Q m_j c^2\right)^2 - (m_1c^2 + m_2^2c^2)^2}{2m_2c^2}$$

Applications

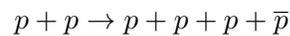
- Si $m_1 + m_2 \geq \sum_j^N m_j$

Il n'y a pas d'énergie de seuil. La réaction est toujours possible. Les particules émises posséderont une énergie cinétique dans R^* . C'est le cas de la réaction proton-antiproton de même masse, $938,3 \text{ MeV}/c^2$, donnant naissance à un méson π^- et son antiparticule π^+ de même masse, égale à $139,6 \text{ MeV}/c^2$



- Si $m_1 + m_2 < \sum_j^N m_j$

Il y a une énergie de seuil. C'est le cas de la réaction entre deux protons, l'un accéléré et l'autre immobile, permettant de créer une paire proton-antiproton suivant :



Toutes les particules ont la même masse $938,3 \text{ MeV}/c^2$. L'énergie de seuil ou énergie cinétique minimum du proton incident est :

$$(E_1^{av})_{min} = 6mc^2 = 5,63 \text{ GeV}$$

L'énergie minimum totale du système avant la collision dans R est donc :

$$(E_1^{av})_{min} = 8mc^2 = 7,51 \text{ GeV}$$

On peut calculer sa valeur dans le référentiel du centre de masse R' en utilisant les relations déjà rencontrées :

$$E^{*av} = \frac{E^{av}}{\gamma} \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{\frac{E_1^{av} + mc^2}{2mc^2}}$$

On obtient $\gamma = 2$ et :

$$(E_{1av})_{min} = 4mc^2 = 3,75 \text{ GeV}$$

Dans les anneaux collisionneurs, il suffira d'apporter à chaque proton l'énergie cinétique mc^2 , soit au total $E_C^{av} = 2mc^2$. Cette valeur reste inférieure à $6mc^2$, énergie cinétique qu'il faut donner à un proton lorsque l'autre est fixe.

Si l'on veut obtenir des particules prévues par les théories, dévoilant la structure profonde de la matière, l'énergie de seuil des réactions mises en jeu devient considérable. Actuellement, la recherche du boson de Higgs dont la masse est estimée à environ $150 \text{ GeV}/c^2$ est de toute première importance, car cette particule (du nom de son inventeur) serait à l'origine de la masse des constituants de la matière. Elle a été aperçue au L.E.P. (Large Electron-Positron collider) de Genève en l'an 2000, pour une énergie de collision de 200 GeV dans R^* . Mais les données n'ont pas permis une interprétation statistique claire en faveur de son existence. Il faudra donc attendre la transformation du L.E.P. en L.H.C. (Large Hadron Collider) vers 2008 pour peut-être mettre en évidence expérimentalement cette particule.

7.3.3 Désintégration d'une particule instable

Considérons une particule instable de masse m , immobile dans le référentiel du laboratoire R . Elle peut se désintégrer spontanément et donner naissance à Q particules de masse m_j , dont le référentiel du centre de masse R' s'identifie avec le référentiel du laboratoire R . Avant et après la désintégration, il y a conservation du quadrivecteur énergie impulsion :

$$P^{av} = P^{ap}$$

D'où

$$mc^2 = \sum_j^Q E_j^{ap}$$

$$\vec{0} = \sum_j^Q \vec{p}_j^{ap}$$

Si toutes les particules formées sont au repos dans R :

$$m = \sum_j^Q m_j$$

La réaction est donc énergétiquement possible si :

$$m \geq \sum_j^Q m_j \quad \text{ou} \quad \Delta m = \sum_j^Q m_j - m \leq 0$$

Dans le cas particulier où la désintégration d'une particule au repos dans R , donne naissance à deux autres particules, calculons leur énergie relativiste dans R . La conservation du quadrivecteur énergie impulsion s'écrit :

$$mc^2 = E_1^{ap} + E_2^{ap}$$

$$\vec{0} = \vec{p}_1^{ap} + \vec{p}_2^{ap}$$

La deuxième relation donne $p_1^{ap} = p_2^{ap}$, et la relation fondamentale de la dynamique :

$$E_1^{ap2} = p_1^{ap2} c^2 + m_1^2 c^4$$

$$E_2^{ap2} = p_2^{ap2} c^2 + m_2^2 c^4$$

Par soustraction :

$$E_1^{ap2} - E_2^{ap2} = (m_1^2 - m_2^2) c^4$$

et en divisant par $mc^2 = E_1^{ap} + E_2^{ap}$ il vient :

$$E_1^{ap} - E_2^{ap} = \frac{m_1c^2 - m_2c^2}{m}c^2$$

Finalement :

$$E_1^{ap} = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m}c^2$$

$$E_2^{ap} = \frac{m^2 + m_2^2 - m_1^2}{2m}c^2$$

La diminution de la masse du système $|\Delta m| = m - m_1 - m_2$ libère l'énergie cinétique :

$$|\Delta m|c^2 = mc^2 - m_1c^2 - m_2c^2 = E_1^{ap} + E_2^{ap} - m_1c^2 - m_2c^2 = E_{C1}^{ap} + E_{C2}^{ap}$$

Applications

La désintégration du méson K^+ de masse $493,7 \text{ MeV}/c^2$ en méson π^+ et π^0 de masse $139,6 \text{ MeV}/c^2$:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$$

ou en méson π^- et π^+ de masse $139,6 \text{ MeV}/c^2$:

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+$$

La désintégration du neutron ($m_n = 939,6 \text{ MeV}/c^2$), en proton ($m_p = 938,3 \text{ MeV}/c^2$), électron $m_e = 0,5110 \text{ MeV}/c^2$) et antineutrino électronique de masse considérée comme nulle :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

7.3.4 Etude des noyaux

Jusqu'à présent, nous avons étudié des systèmes constitués de particules indépendantes, ce qui nous a permis de définir un quadrivecteur énergie impulsion.

Considérons maintenant un système de particules en interaction. Nous pouvons définir la somme des énergies et la somme des impulsions des particules puis le quadrivecteur énergie impulsion du système s'il y a simultanéité des événements dans différents référentiels

galiléens. Ceci est possible lorsque le système est concentré en un point de l'espace. Pratiquement, ces systèmes sont des atomes, des noyaux atomiques ou même des particules tel que le proton constitué de trois quarks, tous confinés dans un très petit volume d'espace.

Le quadrivecteur d'un tel système, constitué de N particules de masse m_i en interaction, s'écrit :

$$P^{av} = \left(\frac{E^{av}}{c}, \vec{p}^{ab} \right) \text{ avec } E^{av} = \sum_i^{av} E_i^{av} + \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N E_{j,k}^{av} \text{ et } \vec{p}^{ab} = \sum_i^N \vec{p}_i^{ab}$$

où $E_{i,k}^{av}$ est l'énergie potentielle d'interaction entre la particule i et la particule k . La masse M du système est définie par la relation :

$$Mc^2 = \sqrt{E^{av2} - p^{av2}c^2}$$

Si dans une réaction, les N particules de ce système lié se libèrent et donnent naissance à Q particules indépendantes de masse m , la somme des énergies de masse de toutes les particules après la réaction est :

$$\sum_i^Q m_j c^2 = \sum_i^Q \sqrt{E_j^{ap2} - p_j^{ap2} c^2}$$

La masse M du système lié n'est pas égale a priori, à la somme des masses des particules après la réaction. Cela dépend de l'énergie potentielle d'interaction et de l'énergie cinétique des particules. Deux cas se présentent suivant que le défaut de masse :

$$\sum_j^Q m_j c^2 = \sum_j^Q \sqrt{E^{av2} - p^{av2} c^2}$$

est positif ou négatif.

Pour aller plus loin, concentrons-nous sur l'étude du noyau atomique. Rappelons que l'on note ${}^A_Z X$ un noyau formé de Z protons, A nucléons et $N = A - Z$ neutrons. Il est également appelé nucléide. La cohésion des nucléons est assurée par l'interaction forte attractive. Le rayon du noyau est de l'ordre du fermi ($1 \text{ f}_m = 10^{-15} \text{ m}$).

Noyaux stables

Un noyau est stable si :

$$\Delta m > 0$$

On note m_p la masse du proton, m_n la masse du neutron et M la masse du noyau.

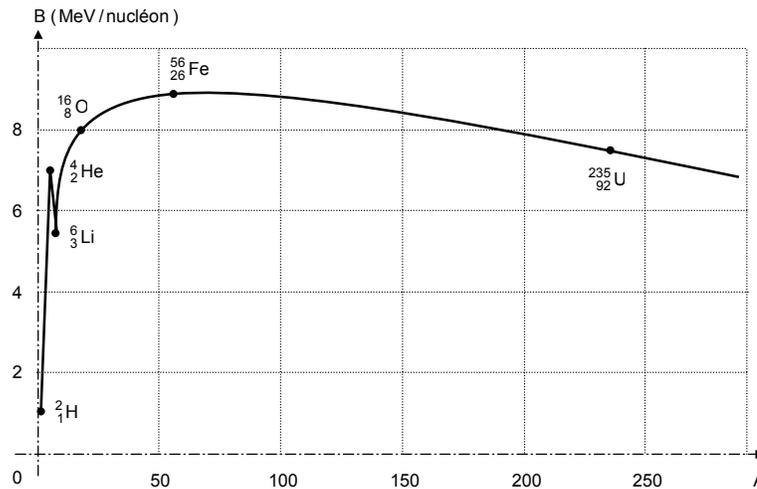
$$\Delta m = (A - Z)m_n + Zm_p - M$$

L'énergie minimum nécessaire à briser le noyau en ses différentes particules est l'énergie de liaison :

$$E_l = \Delta mc^2$$

Elle ne donne pas d'énergie cinétique aux particules indépendantes ainsi libérées. On définit également l'énergie moyenne de liaison par nucléon :

$$B = \frac{E_l}{A}$$



La courbe d'Aston représente B en fonction de A pour tous les noyaux. Le noyau ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ est le plus stable pour une énergie de liaison par nucléon de 8,8 MeV.

Applications

Il est alors possible d'obtenir de l'énergie à partir de réactions nucléaires formant des produits plus stables que les réactifs utilisés. L'énergie produite correspond à la perte de

masse entre les nucléides produits et les nucléides réagissants initialement. D'après la courbe d'Aston, deux types de réactions sont possibles : la fission et la fusion nucléaire.

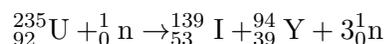
Les réactions de fission nucléaire

Un neutron est capté par un noyau lourd pour former un noyau instable. Celui-ci se scinde et donne des noyaux plus légers et plus stables.

Par exemple, un noyau d'Uranium peut capter un neutron et produire du Strontium et du Xénon :



L'énergie de liaison par nucléon de l'Uranium est de 7,7 MeV. Si celles des produits formés sont proches du maximum, 8,8 MeV, alors l'énergie libérée est égale à la différence, environ 1 MeV nucléon. Et au total pour 235 nucléons, la réaction fournit environ 235 MeV. Un calcul plus précis tenant compte de l'énergie de liaison exacte des nucléides formés (ou de façon équivalente, de leur masse) montre que cette réaction libère 187 MeV. Cette énergie est considérable. A titre de comparaison, 1 g d'Uranium dégage une énergie équivalente à la combustion de 1,8 t de pétrole. D'autres réactions sont possibles. Si les produits sont de l'Iode et de l'Yttrium :



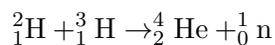
ou du Lanthane et du Brome :



C'est ce type de réaction qui est mis en œuvre dans les centrales nucléaires et les bombes atomiques. Malheureusement, les produits de fission sont radioactifs et polluent.

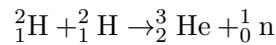
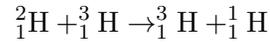
Les réactions de fusion nucléaire

Deux éléments légers fusionnent pour donner un élément plus lourd et plus stable. Par exemple, la fusion du deutérium et du tritium produit de l'hélium et un neutron :



L'énergie à fournir est environ de 2 MeV pour scinder ${}_1^2\text{H}$ en ses particules et de 9 MeV pour ${}_1^3\text{H}$, donc au total 11 MeV. L'énergie produite par la formation de ${}_2^4\text{He}$ à partir de ses particules élémentaires est de 28 MeV. La réaction libère la différence d'énergie, soit 17 MeV.

Citons d'autres exemples :



Ce sont des réactions thermonucléaires qui se produisent à l'intérieur des étoiles. Elles sont aussi à l'origine de la bombe H. Mais actuellement, on ne sait pas les contrôler.

Noyaux instables

Un noyau est instable si

$$\Delta m \leq 0$$

Dans ce cas, le noyau se désintègre spontanément et libère une énergie :

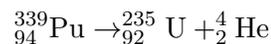
$$E = |\Delta m|c^2$$

qui correspond à l'énergie cinétique des produits de fission et à l'énergie rayonnée ; c'est la radioactivité.

Applications

Il existe trois types de radioactivité α , β et γ , correspondant à l'émission de particules α (noyau de ${}^4_2\text{He}$), de particules α (électrons e^- pour la radioactivité β^- et positons e^+ pour la radioactivité β^+) et de rayonnement γ accompagnant les deux précédentes.

Prenons l'exemple de la désintégration du Plutonium par radioactivité α :



Cette situation est analogue à la désintégration d'une particule traitée avant, les noyaux remplacent les particules. Les relations que nous avons obtenues permettent de calculer l'énergie cinétique des noyaux d'Uranium et d'Hélium. On identifie les masses atomiques à celles des noyaux, car la masse d'un électron est faible devant celle d'un nucléon, et avec les masses des noyaux :

$$M_{Pu} = 222,6771 \text{ GeV}/c^2$$

$$M_U = 218,9434 \text{ GeV}/c^2$$

$$M_{He} = 4,0026 \text{ GeV}/c^2$$

les énergies relativistes des noyaux d'Uranium et d'Hélium sont :

$$E_U = \frac{M_{Pu}^2 + M_U^2 + -M_{He}^2}{2M_{Pu}} c^2 = 218,9435 \text{ GeV}$$

$$E_{He} = \frac{M_{Pu}^2 + M_{He}^2 + -M_U^2}{2M_{Pu}} c^2 = 3,7336 \text{ GeV}$$

On en déduit les énergies cinétiques :

$$E_{cU} = E_U - M_U c^2 = 0,0888 \text{ MeV}$$

$$E_{cHe} = E_{He} - M_{He} c^2 = 5,2206 \text{ MeV}$$

Elles sont très inférieures aux énergies de masse. L'approximation classique aurait donc suffi pour le calcul. Le noyau d'Hélium plus léger que le noyau d'Uranium est bien sur éjecté avec une vitesse plus grande. La somme de ces énergies est :

$$E_{cU} + E_{cHe} = 5,3094 \text{ MeV}$$

Elle devrait correspondre à la perte de masse :

$$|\Delta m| = M_{Pu} - M_U - M_{He} = 5,3095 \text{ MeV}/c^2$$

En réalité, l'énergie cinétique de la particule α est plus faible car l'Uranium est créé dans un état excité. Il revient à un niveau stable en émettant un rayonnement γ d'un ou plusieurs photons. La réaction s'écrit :



Conclusion

La conservation du quadrivecteur énergie impulsion exprime la conservation de l'énergie et la conservation de l'impulsion. L'énergie relativiste comprend un terme de masse, un terme

cinétique et éventuellement un terme d'interaction potentielle pour un système lié. Sa conservation au cours d'une collision ou d'une réaction permet la création ou l'annihilation de particules massives. La variation de l'énergie de masse est compensée par la variation d'énergie cinétique et potentielle du système. C'est l'équivalence masse-énergie, dont on peut tirer profit dans les centrales nucléaires. Mais ces lois de conservation ne sont pas les seules. Il en existe d'autres telles que la conservation de la charge ou du nombre leptonique $L = \pm 1$ attribué aux leptons (fermions légers e^- et μ^-).

Notion de viscosité d'un fluide. Ecoulement d'un fluide



Bibliographie

- *Hydrodynamique*, Guyon, CNRS éditions
- *Toute la mécanique*, Bocquet, Faroux, Renault, Dunod
- *Mécanique*, Pérez, Masson
- *H-prépa : Mécanique des fluides*, Hachette
- *Physique expérimentale*, Fruchart, p. 432
- *Montages de physique*, Charmont, p. 9

Prérequis :

- Cinématique des fluides
- Dynamique des fluides parfaits

Introduction :

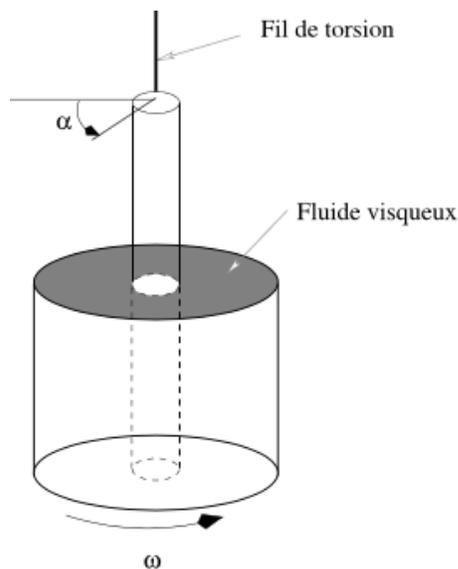
D'après leur structure tous les fluides sont visqueux. Le modèle du fluide parfait ne peut donc décrire de façon satisfaisante que certains types d'écoulements bien particuliers. En

fait, il ne fait pas de différence entre l'huile et l'eau, alors que ces deux fluides ne s'écoulent pas de la même manière dans un tuyau. Nous allons donc introduire la notion de viscosité, avec toutes ses conséquences, puis étudier la caractérisation des écoulements visqueux avec notamment l'introduction du nombre de Reynolds.

8.1 Notion de viscosité

8.1.1 Fluides newtoniens

Expérience de Couette



Considérons un fluide enfermé entre deux cylindres, l'un mobile, l'autre fixé via un fil de torsion. On constate que lorsque la cavité cylindrique extérieure est mise en rotation à la vitesse angulaire ω , le cylindre intérieur tourne d'un angle α par rapport à sa position d'équilibre.

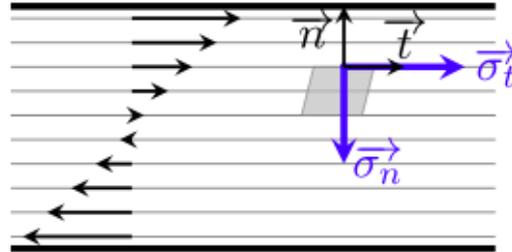
Analysons en détail le phénomène :

La torsion du fil conduit à l'existence d'un couple dont les forces de pression ne peuvent pas être responsables. On est donc obligé d'admettre l'existence d'efforts tangentiels.

On observe que les particules de fluide adhèrent aux parois. Il existe donc un gradient de vitesse au sein de l'écoulement.

Pour les fluides simples, l'angle α augmente proportionnellement à ω . Les efforts tangentiels augmentent donc proportionnellement au gradient de vitesse.

Interprétation :



L'expérience montre que, lors de l'écoulement d'un fluide, la pression ne suffit pas à expliquer les phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées forces de viscosité. La contrainte (force par unité de surface) $\vec{\sigma}$ qu'exerce une couche de fluide supérieure sur un élément de surface d'une couche de fluide inférieure, s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{1 \rightarrow 2} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \sigma_n \vec{n} + \sigma_t \vec{t} \quad \text{avec} \quad \sigma_n = -p$$

Fluide newtonien

Entre deux couches successives de fluide en écoulement unidimensionnel à la vitesse \vec{v} , il existe des contraintes tangentielles à l'écoulement qui accélèrent la couche la plus lente et ralentissent la couche la plus rapide. Par définition d'un fluide newtonien, les forces visqueuses sont proportionnelles à la différence de vitesse c'est-à-dire au gradient de vitesse.

Définition :

$$\sigma_t = \eta \frac{\partial v}{\partial n} = \eta \dot{\gamma}$$

où $\frac{\partial v}{\partial n}$ désigne le gradient de vitesse dans la direction normale à la surface. De manière générale, la contrainte visqueuse varie comme la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$. La constante de proportionnalité η est caractéristique du fluide et désigne la viscosité dynamique du fluide.

8.1.2 Mesure de viscosité

L'analyse dimensionnelle de la relation donne

$$[\eta] = \frac{[F]}{L^2} \frac{[v]}{L} = \frac{[F]}{L^2} [T]$$

Ainsi, la viscosité est homogène à une pression \times temps. On l'exprime indifféremment en pascal.seconde (Pa.s) ou en poiseuille (Pℓ) en hommage à Jean-Louis Marie Poiseuille (1797-1869) fut élève de l'École Polytechnique avant d'étudier la médecine. Les recherches de Poiseuille ont porté principalement sur l'hémodynamique, c'est-à-dire l'étude de la circulation sanguine et lui ont permis de dégager une loi sur l'écoulement des fluides visqueux dans des tubes capillaires. Le viscosimètre est l'appareil de mesure de la viscosité. Différents types de viscosimètre existent suivant le type de fluide utilisé. Pour les liquides, on utilise essentiellement le viscosimètre de Couette ou le viscosimètre à tube capillaire.

Ordres de grandeur

Pour les liquides, la viscosité varie fortement avec la température (elle diminue lorsque la température augmente). Pour des liquides purs, elle suit une loi du type

$$\eta \propto e^{b/T}$$

Quant aux gaz, leur viscosité est plus difficile à mesurer Sa détermination peut se faire à l'aide d'une :

- mesure de vitesse (viscosimètre à bille roulante, viscosimètre à tube capillaire)
- mesure de fréquence de résonance d'une onde de cisaillement (viscosimètre à cristal piézo-électrique de torsion) car beaucoup plus faible que celle des liquides. Elle dépend peu de la pression et augmente légèrement avec la température (à peu près comme \sqrt{T}).

8.1.3 Fluides non newtoniens

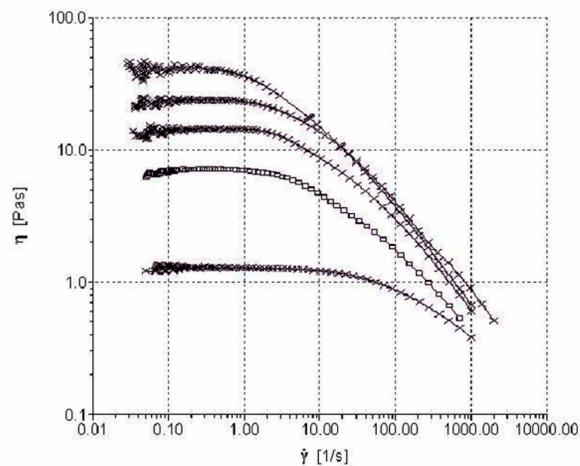
Le comportement newtonien ($\sigma = \eta\dot{\gamma}$) s'observe :

- dans tous les gaz ;
- dans les liquides simples constitués de petites molécules (l'eau par exemple)
- dans les solutions contenant des ions ou molécules à symétrie sphérique.

Cependant la rhéologie Étude du comportement des fluides en écoulement montre qu'il existe des fluides pour lesquels la relation entre contrainte tangentielle et cisaillement est plus complexe.

Liquide (20°C)	Viscosité (mPa.s)
Eau	1,0
Mercure	1,5
Huile d'olive	840
Glycérine pure	1500
Gaz	Viscosité (μPa.s)
Vapeur d'eau (20°C)	9,7
Air sec (20°C)	18,2
He (25°C)	19,9
N ₂ (25°C)	17,7

Comportement non linéaire



Certains fluides vérifient la relation

$$\sigma_t = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}$$

où $\eta(\dot{\gamma})$ représente une viscosité apparente. Lorsque $\eta(\dot{\gamma})$ diminue avec $\dot{\gamma}$, le fluide coule d'autant plus facilement qu'il est cisailé. On parle alors de fluide rhéofluidifiant (sang, polymère fondu, etc.). Le comportement inverse est désigné par le terme rhéoépaississant

(amidon+eau). Il existe également des liquides, comme les peintures, qui ne coulent que si la contrainte dépasse une valeur seuil.

Comportement visco-élastique

Tout fluide se caractérise par un temps de relaxation viscoélastique τ_{ve} . Lorsque un fluide est soumis à une contrainte, on distingue trois types de comportement en fonction du temps d'observation t .

- si $t \ll \tau_{ve}$ le fluide adopte un comportement élastique (déformation proportionnelle à la contrainte),
- si $t \gg \tau_{ve}$ le fluide adopte un comportement visqueux (vitesse de cisaillement proportionnelle à la contrainte $\sigma = \eta \dot{\gamma}$).
- si $t \simeq \tau_{ve}$, le comportement est alors plus complexe ; il est dit visco-élastique,

C'est pourquoi, du point de vue mécanique, la distinction entre un solide et un liquide est artificielle. Ce que l'on appelle communément un liquide est un fluide viscoélastique de petit temps de relaxation ($\tau_{ve} = 1$ ns pour l'eau) et ce que l'on appelle un solide peut être vu comme un fluide viscoélastique de grand temps de relaxation ($\tau_{ve} = 10^6$ ans pour le manteau de la croûte terrestre). τ_{ve} dépend fortement de la température ce qui confère à certains systèmes un comportement fluide ou solide suivant la température (bitume par exemple).

Matériaux	τ_{ve} (s)
eau (20°C)	1 ns
verre à vitre (400°C)	32 ans
verre à vitre (20°C)	$10^{26} - 10^{30}$ s
bitume (-5°C)	10 s
bitume (40°C)	1 ms

Un exemple de fluide viscoélastique est la pâte de silicone connue sous le nom de silly-putty. Une boule de silly-putty rebondit sur le sol comme une balle élastique (aux temps courts) mais s'étale comme un fluide visqueux (aux temps longs) si on la pose sur une surface horizontale.

8.2 Dynamique d'un écoulement visqueux

Lorsque le fluide est newtonien et incompressible, les équations de Newton appliquées à chaque particule de fluide prennent la forme des équations de Navier-Stokes

8.2.1 Bilan des forces

Plaçons nous dans un référentiel galiléen et effectuons un bilan des forces sur une particule de fluide située en M à l'instant t , de masse $dm = \mu(M, t) d\tau$. En plus des forces de pression et des forces extérieures volumiques, il faut ajouter la résultante des forces visqueuses :

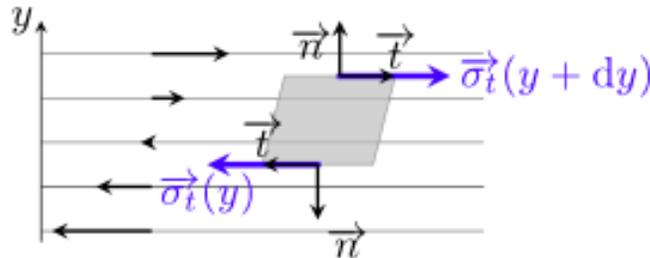
$$d\vec{F} = \left(\vec{f}_{v,ext} - \vec{\nabla}p \right) d\tau + d\vec{F}_\eta$$

L'expression de $d\vec{F}_\eta$ est en général assez compliquée mais elle se simplifie dans le cas des fluides newtoniens et incompressibles.

Cas d'un écoulement parallèle unidimensionnel

Calculons la résultante des forces visqueuses dans le cas particulier simple d'un écoulement suivant (Ox) avec un gradient de vitesse suivant (Oy) :

$$\vec{v} = v(y)\vec{u}_x$$



On remarque ici que $\text{div} \vec{v} = 0$. L'écoulement est donc bien incompressible. Dans ce cas, la résultante des forces visqueuses s'exerçant sur une particule de fluide, s'écrit :

$$d\vec{F}_\eta = \eta \left[\frac{dv}{dy}(y+dy) - \frac{dv}{dy}(y) \right] dx dz \vec{u}_x = \eta \frac{d^2 \vec{v}}{dy^2} d\tau$$

On voit apparaître une force volumique qui s'exprime comme le laplacien de la vitesse. Cette formule obtenue dans un cas particulier se généralise aux écoulements incompressibles des fluides newtoniens.

On admettra que pour un fluide newtonien incompressible, la résultante des forces visqueuses s'écrit

$$d\vec{F}_\eta = \eta \Delta \vec{v} d\tau$$

où Δ est l'opérateur laplacien.

8.2.2 Équation de Navier-Stokes

D'après la seconde loi de Newton appliquée à une particule de fluide, on a :

$$\mu d\tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p d\tau + \vec{f}_{v,\text{ext}} d\tau + d\vec{F}_\eta \quad \text{avec} \quad d\vec{F}_\eta = \eta \Delta \vec{v} d\tau$$

En divisant par $d\tau$, on obtient l'équation de Navier-Stokes.

Équation de Navier-Stokes :

Pour un fluide incompressible newtonien, la dynamique de l'écoulement vérifie l'équation

$$\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_{v,\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v}$$

Il s'agit donc d'une équation aux dérivées partielles du second ordre et non linéaire. Cette équation recelle encore quelques mystères qui résistent à la sagacité de nos meilleurs mathématiciens puisque l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation de Navier-Stokes est l'un des 7 problèmes du millénaire mis à prix 1 000 000 dollars par l'Institut Clay

Conditions aux limites

L'équation de Navier-Stokes étant une équation du second ordre, sa résolution introduit deux constantes d'intégration pour la pression p et pour la vitesse \vec{v} . On les détermine en appliquant les conditions aux limites suivantes :

- continuité de la vitesse à la traversée d'une interface
- continuité de la contrainte normale et donc de la pression
- continuité de la contrainte tangentielle.

8.2.3 Le nombre de Reynolds

La complexité provient essentiellement de la présence, dans l'équation de Navier-Stokes, d'un terme non linéaire le terme convectif et d'un terme du second ordre le terme de viscosité. Dans de nombreux cas, on peut négliger l'un des deux termes devant l'autre. On définit alors un facteur sans dimension, qui estime l'importance du terme convectif devant le terme de viscosité. On peut estimer l'ordre de grandeur du terme convectif et du terme visqueux

à partir de l'échelle caractéristique D du problème, de la vitesse moyenne d'écoulement v , de la masse volumique μ du fluide et de sa viscosité η .

$$\left\| \mu \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right\| \approx \mu \frac{v^2}{D} \quad \text{et} \quad \left\| \eta \Delta \vec{v} \right\| \approx \eta \frac{v}{D^2}$$

D'où le nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds

$$\mathcal{Re} = \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme visqueux}} = \frac{\mu v D}{\eta}$$

Type d'écoulement	Nombre de Reynolds
Écoulement atmosphérique	$\mathcal{Re} \approx 10^{11}$
Écoulement sanguin dans l'aorte	$\mathcal{Re} \approx 10^4$
Écoulement sanguin dans les capillaires	$\mathcal{Re} \approx 10^{-3}$
Domaine de l'aéronautique	$\mathcal{Re} \approx 10^7$
Domaine de la microfluidique	$\mathcal{Re} \approx 10^{-3} - 1$

Ce nombre joue un rôle très important en mécanique des fluides car il permet de distinguer deux types d'écoulement.

L'écoulement à petit nombre de Reynolds $\mathcal{Re} \ll 1$: L'écoulement est laminaire et essentiellement gouverné par la viscosité. Le terme d'inertie est négligeable et l'équation de Navier-Stokes devient

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_{v,\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v}$$

équation qui a le bon goût d'être linéaire. Si l'écoulement est permanent, on obtient le régime de Stokes.

L'écoulement à grand nombre de Reynolds $\mathcal{Re} \gg 1$: On montre dans ce cas que les effets visqueux sont concentrés sur les bords, dans une fine couche appelée couche limite, et dans le sillage des obstacles. Hors de ces zones, le terme visqueux est négligeable et l'on retrouve l'équation d'Euler

$$\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_{v,\text{ext}}$$

Écoulement turbulent

La viscosité stabilise et régularise les écoulements de façon générale. Ainsi, quand le nombre de Reynolds augmente le régime laminaire devient instable voire turbulent. La transition entre le régime laminaire et turbulent se produit dans une certaine gamme de valeur du nombre de Reynolds qui dépend du problème. On peut retenir qu'en général, lorsque $\mathcal{R} \gg 10^5$, l'écoulement devient turbulent, c'est-à-dire que la vitesse en un point M varie dans le temps de façon erratique. Dans ce cas, le problème étant analytiquement insoluble, on utilise souvent des lois phénoménologiques associées à une analyse dimensionnelle.

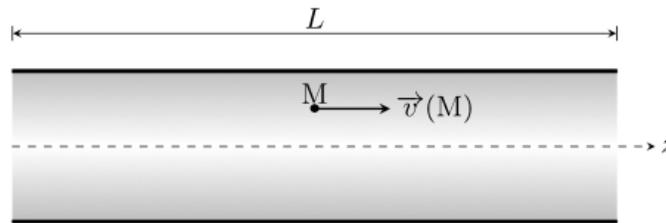
Exercice :

Quel est l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé à l'écoulement autour d'une balle de tennis allant à la vitesse $v = 100 \text{ km.h}^{-1}$ dans l'air ?

Le diamètre d'une balle de tennis est de l'ordre de 7 cm, la masse volumique de l'air de l'ordre de 1 kg.m^{-3} et sa viscosité de l'ordre de 2.10^{-5} de sorte que

$$\mathcal{R}_e = \frac{\mu v D}{\eta} \simeq \frac{1 \times 100/3,6 \times 0,07}{2.10^{-5}} \simeq 10^5$$

L'écoulement est turbulent.

8.2.4 Exemple : Loi de Poiseuille

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux dans un long tube cylindrique de rayon R et de longueur $L \gg R$. Le tube est horizontal (orienté suivant Oz) et l'écoulement est assuré grâce à l'existence d'une différence de pression Δp entre l'entrée du tube et la sortie du tube.

Hypothèses de travail

- L'écoulement est permanent donc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$.
- L'écoulement est incompressible, par conséquent $\text{div } \vec{v} = 0$.
- Le nombre de Reynolds est suffisamment petit pour supposer un régime d'écoulement laminaire. En pratique, on considère que c'est le cas, quand $\mathcal{R} \sim 2000$.

— L'écoulement est parallèle à Oz et invariant par rotation autour de l'axe Oz, d'où $\vec{v} = v(r, z)\vec{u}_z$.

Enfin, on néglige la pesanteur car $\mu g R \ll \Delta p$.

Calcul du champ de vitesse

Commençons par écrire l'équation de continuité :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial(rv_r)}{r\partial r} + \frac{\partial(v_\theta)}{r\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = v(r)\vec{u}_z$$

La vitesse ne dépend pas de z . Calculons l'accélération :

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_z(r)\vec{u}_z = \vec{0}$$

L'accélération est nulle. En effet, les lignes de champ sont des droites horizontales et se confondent avec la trajectoire des particules (régime stationnaire). Or si la vitesse ne dépend pas de z cela signifie que les particules de fluide se déplacent avec une vitesse constante en direction et en intensité. L'accélération est donc nulle. On peut aussi ajouter que chaque particule de fluide est soumise à deux forces qui se compensent : les forces de pression et les forces de viscosité. Sans force de pression, c'est-à-dire sans différence de pression il ne peut pas avoir d'écoulement stationnaire.

L'équation de Navier-Stokes se réduit donc à l'équation de Stokes : $\vec{\nabla} p = \eta \Delta \vec{v}$. Projetons cette relation dans la base cylindrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial p}{r\partial\theta} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

Ainsi, la pression ne dépend que de z . Le terme de gauche de la dernière équation ne dépend donc que de z alors que celui de droite ne dépend que de r . Cette équation apparemment paradoxale se résout si les deux termes sont constants.

$$\frac{dp}{dz} = K = -\frac{\Delta p}{L} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

où $\Delta p = p_1 - p_2$ est la différence de pression entre l'entrée et la sortie.

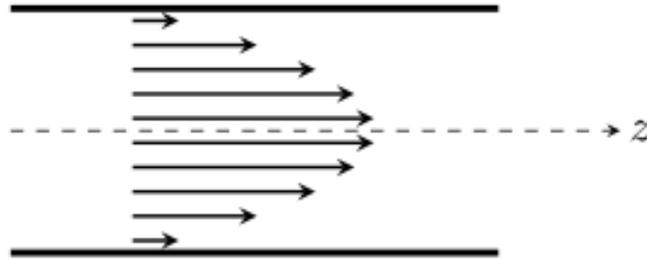
En intégrant deux fois on obtient

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta L} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration. La vitesse doit être définie en $r = 0$ ce qui implique $C_1 = 0$. Enfin, les conditions aux limites imposent $v(R) = 0$ d'où

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

Le profil des vitesses est parabolique.



Calcul du débit volumique

Le débit volumique est le flux du vecteur vitesse à travers une section de la canalisation :

$$Q_V = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R v(r) 2\pi r \, dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{L}$$

Ainsi, la différence de pression est directement reliée au débit volumique par la formule

Formule de Poiseuille

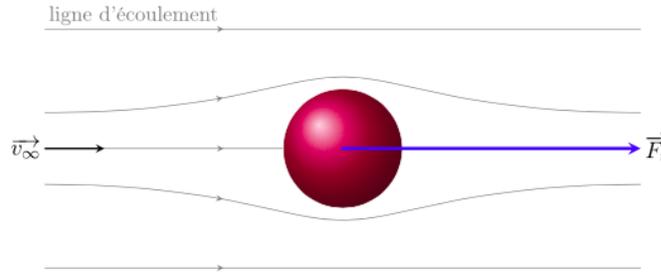
$$\Delta p = \frac{8\eta L}{\pi R^4} Q_V$$

8.2.5 Trainée et portance

Si l'on met de côté la poussée d'Archimède, la force que ressent un solide plongé dans un écoulement stationnaire tridimensionnelle est nulle si le fluide n'est pas visqueux. En revanche, l'écoulement visqueux autour d'un obstacle solide produit une force qui présente deux composantes : la composante dans le sens de l'écoulement est appelée force de trainée, la composante perpendiculaire est la force de portance.

Formule de Stokes

Stokes s'est intéressé à la force de trainée qu'un écoulement visqueux produit autour d'une sphère. Il s'est placé dans le cas où l'écoulement est gouverné par la viscosité c'est-à-dire



pour les petits nombres de Reynolds. La résolution complète est assez longue et nous allons nous contenter de la solution sans chercher à la justifier. Stokes obtient qu'une sphère de rayon r , immobile, soumise à un écoulement permanent incompressible et visqueux, ressent une force de traînée \vec{F}_t proportionnelle à la vitesse d'écoulement et à la taille de la sphère

Loi de Stokes :

$$\vec{F}_t = 6\pi\eta r \vec{v}_\infty$$

où \vec{v}_∞ représente la vitesse de l'écoulement par rapport à la sphère et loin de la sphère.

Vitesse de sédimentation

La physique des suspensions (particules solides mélangées à un liquide) et des émulsions (gouttelettes liquides dispersées dans un autre liquide non miscible) utilise la loi de Stokes car le nombre de Reynolds est assez petit. Lorsqu'on laisse reposer un liquide contenant de petites particules solides (comme par exemple un mélange eau-argile), les particules vont décanter c'est-à-dire sédimenter au fond du récipient avec une vitesse qui dépend de leur dimension caractéristique. Le temps de décantation donne alors un renseignement sur la taille des grains. En effet, les grains tombent à une vitesse constante pour laquelle le poids apparent (poids moins la poussée d'Archimède) compense la force de traînée :

$$6\pi\eta r v_{\text{sed}} = \frac{4}{3}\pi r^3 (\mu_s - \mu_l) g$$

d'où

$$v_{\text{sed}} = \frac{2}{9\eta} (\mu_s - \mu_l) r^2$$

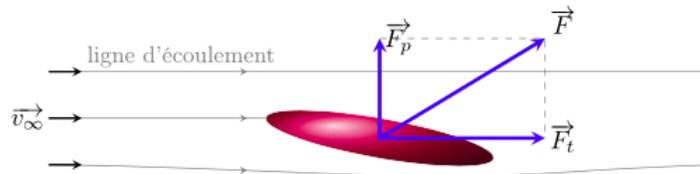
Cette force de traînée est liée d'une part à un champ de pression plus important en avant de la bille et d'autre part aux forces visqueuses.

Si l'on étudie la chute d'une bille sphérique dans un fluide visqueux au repos (loin de la bille), il faut écrire

$$\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$$

où \vec{v} représente la vitesse de la bille dans le référentiel du laboratoire. Cette loi est vérifiée avec une précision meilleure que 1 % pour $\mathcal{R} \simeq 0,3$. Cette contrainte reste cependant assez forte. En effet, pour une bille de 1 cm de diamètre tombant dans l'air cela impose $v \simeq 0,5 \text{ mm.s}^{-1}$ ce qui signifie que la loi du frottement linéaire n'est pas valable (sauf au tout début) dans ce cas. En revanche, si la chute s'effectue dans un liquide visqueux tel le glycérol (grosso modo mille fois plus dense que l'air et un million de fois plus visqueux), la contrainte devient $v \simeq 0,5 \text{ m.s}^{-1}$. Dans ce cas, la loi de Stokes peut être utilisée si la bille n'est pas trop pesante.

Coefficients aérodynamiques



La force qu'exerce un fluide en écoulement autour d'un obstacle peut se décomposer en deux composantes.

Une composante parallèle à \vec{v}_∞ : c'est la traînée \vec{F}_t .

Une composante perpendiculaire : c'est la portance \vec{F}_p .

Ces deux forces s'expriment comme le prévoit la formule. On définit alors deux coefficients de frottement, le C_x et le C_z .

Coefficient de traînée

La formule peut se réécrire :

$$F_t = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2 S C_x(\mathcal{R}e)$$

où S représente une surface caractéristique, en générale, la surface frontale projetée. On constate expérimentalement que le C_x est quasi constant en régime turbulent ($\mathcal{R}e$ grand) ce qui correspond aux situations courantes de l'aéronautisme, le nautisme, le cyclisme etc. La traînée peut se décomposer en trois termes :

- la traînée visqueuse qui est liée aux frottements du fluide sur l'obstacle
- la traînée de pression qui est liée à l'existence d'une dépression dans le sillage de l'obstacle quand la couche limite se décolle
- la traînée induite par la portance.

La force de traînée que subit un véhicule (en l'air ou au sol) étant opposée à sa vitesse, elle dissipe de l'énergie. La puissance dissipée s'écrit :

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2}\mu SC_x v^3$$

où v est la vitesse du véhicule. La puissance dissipée est une fonction cubique de la vitesse, elle ne devient donc importante qu'à haute vitesse grosso modo, en dessous de 60 km.h^{-1} pour une voiture, les frottements de roulement l'emportent sur le frottement aérodynamique. Pour minimiser la consommation à grande vitesse, le concepteur aura intérêt à agir sur le produit SC_x . Le tableau ci-dessous donne quelques exemples.

Coefficient de portance

Lorsque que l'obstacle solide présente trois axes équivalents il ne peut pas exister de portance. C'est le cas de la sphère et du cube. Dans le cas contraire, la portance fait intervenir le coefficient de portance C_z qui dépend de la forme du solide et de l'écoulement :

$$F_p = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2 S C_z(\mathcal{R}e)$$

Par exemple, une aile d'avion présente un coefficient de portance qui dépend

de l'angle d'attaque α . Lorsque cet angle augmente, la portance augmente jusqu'à un angle α_{\max} pour lequel la portance est maximum. Une fois cet angle dépassé, la portance s'effondre, c'est le décrochage.

du profil de l'aile, notamment de sa cambrure. Une aile symétrique d'angle d'attaque nul (la corde est parallèle à \vec{v}_∞) ne présente pas de portance. Notez que les hélices d'un hélicoptère sont symétriques : leur portance est liée à leur inclinaison.

Pour un avion en vol, on cherche à avoir une faible traînée (pour consommer moins de carburant) et un maximum de portance c'est-à-dire un rapport $\frac{C_z}{C_x}$ maximum. Ce rapport, appelé finesse de l'aile, est maximum pour un certain angle.

Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide



Bibliographie

- *Mécanique*, Pérez, Masson
- *Hydrodynamique physique*, Guyon, CNRS éditions

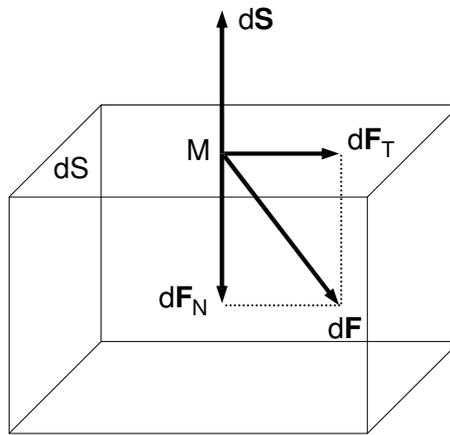
Introduction :

Nous commencerons par définir ce qu'est un écoulement parfait. Dans cette hypothèse, nous appliquerons le principe fondamental de la dynamique à un élément de fluide et nous établirons l'équation d'Euler qui régit localement le mouvement du fluide. Pour un écoulement stationnaire et un écoulement irrotationnel, l'intégration de l'équation d'Euler nous donnera la relation de Bernoulli, traduisant l'aspect énergétique de l'écoulement. En application, nous étudierons l'effet Venturi et donnerons quelques exemples simples de sa manifestation dans diverses situations puis nous traiterons le problème de la vidange d'un réservoir et établirons ainsi la formule de Torricelli.

9.1 Ecoulement d'un fluide parfait

9.1.1 Forces de contact

Considérons un élément de fluide à l'intérieur d'un fluide quelconque. Les particules microscopiques extérieures à l'élément de fluide, exercent sur celui-ci des forces de contact. Notons $d\vec{F}$ la force élémentaire qui s'exerce sur la surface dS de l'élément de fluide. Dans le cas général, cette force possède une composante normale à dS que l'on notera $d\vec{F}_N$ et une composante tangentielle $d\vec{F}_T$. Ainsi $d\vec{F} = d\vec{F}_N + d\vec{F}_T$.



La composante normale $d\vec{F}_N$ est la force élémentaire de pression. Si la pression du fluide en M est $P(M, t)$, cette force s'écrit : $d\vec{F}_N = -P(M, t) \cdot dS$. Elle est dirigée vers l'intérieur de l'élément de fluide. On peut montrer que le travail total des forces de pression à l'intérieur du fluide est nul. Ces forces ne génèrent donc pas de dissipation d'énergie.

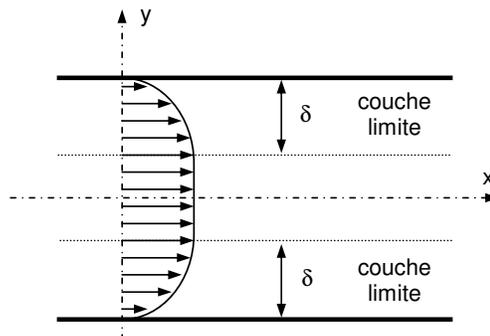
La composante tangentielle $d\vec{F}_T$ est la force élémentaire de viscosité, également appelée force de cisaillement. Elle est caractéristique des fluides réels visqueux au sens courant du terme. Si les particules microscopiques extérieures à l'élément de fluide ont une vitesse supérieure aux particules microscopiques à l'intérieur de l'élément de fluide, elles vont entraîner les particules microscopiques à l'intérieur de l'élément de fluide dans leur mouvement. Cette force modélise donc un transfert de quantité de mouvement. Dans l'étude de la statique des fluides visqueux, les seules forces de pression suffisent. A l'intérieur du fluide, ces forces de cisaillement s'opposent aux déformations des éléments de fluide. A la surface de l'élément de fluide que nous avons considéré, la force de cisaillement s'oppose au déplacement de cet élément de fluide par rapport au reste du fluide. Par conséquent, le travail des forces de viscosité dans le fluide est négatif. Il y a dissipation de l'énergie. C'est pourquoi ces

forces sont parfois appelées forces de frottement. Il existe également des forces de tension superficielles à l'interface entre deux fluides différents. Proche d'une surface où il n'y a plus d'isotropie de l'espace, les particules sont attirées vers l'intérieur du fluide par les autres particules, ce qui tend ainsi à réduire la surface au minimum. Si l'on veut augmenter une surface S de dS , il faut exercer une force qui s'oppose à la force de tension superficielle et dont le travail est $\delta W = AdS$, où A est le coefficient de tension superficielle caractéristique des deux fluides en contact. Dans toute la suite, nous négligerons cette force, même s'il est impératif d'en tenir compte pour les systèmes de petites dimensions.

9.1.2 Écoulement parfait ; validité

L'écoulement d'un fluide est parfait si les forces de viscosité sont nulles

Les forces de contact se réduisent aux forces de pression et il n'y a pas de déperdition d'énergie dans le fluide en mouvement. Cette situation est bien sur un cas limite de l'écoulement réel. Au contact d'un solide, même un fluide de très faible viscosité a une vitesse nulle. L'écoulement n'est pas rigoureusement parfait car il existe des forces de frottements entre le fluide et le solide.



Considérons deux plaques parallèles entre lesquelles s'écoule un fluide réel en régime permanent. Loin des parois intérieures, la vitesse du fluide ne dépend pas des variables d'espace. Par contre, proche des parois, cette vitesse diminue et s'annule sur les parois comme l'indique la figure représentant le profil des vitesses. On définit ainsi deux zones :

- La zone centrale où $\vec{v} = v\vec{e}_x$ avec v constant. Dans cette zone, le profil des vitesses d'un fluide parfait serait le même que celui du fluide réel considéré.
- La zone périphérique où $v = v(y)\vec{e}_x$ que l'on appelle la couche limite. L'épaisseur δ de cette couche limite est variable et dépend de la vitesse du fluide mais aussi de sa viscosité, de sa masse volumique et des dimensions caractéristiques de la conduite. Dans cette zone, le profil des vitesses d'un fluide parfait serait différent. La vitesse du fluide parfait sur les parois serait non nulle et tangente aux plaques.

L'écoulement d'un fluide peut donc être considéré comme parfait dans la zone centrale, en dehors de la couche limite.

9.2 Equation d'Euler et Théorème de Bernoulli

9.2.1 Equation d'Euler

Un élément de fluide de volume $d\tau$ et de masse dm est soumis à deux types de forces :

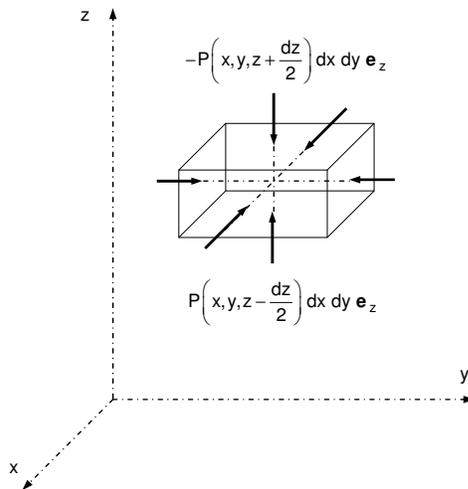
Les forces volumiques qui s'appliquent à toutes les particules de l'élément de fluide :

$$d\vec{F} = \vec{f}_v d\tau$$

où \vec{f}_v est la représentation volumique de ces forces. En notant $\mu = dm/d\tau$ la masse volumique du fluide, on peut également écrire :

$$d\vec{F} = \frac{\vec{f}}{\mu} = \vec{f}_m dm$$

avec \vec{f}_m la représentation massique de ces forces. Ainsi, pour les forces de pesanteur ; $\vec{f}_v = \mu\vec{g}$ et $\vec{f}_m = \vec{g}$.



Les forces de contact qui se réduisent aux forces de pression dans le cas d'un écoulement parfait. Déterminons la résultante $d\vec{F}_P$ des forces qui s'exercent sur un élément de fluide parallélépipédique de côté dx, dy, dz .

La composante de $d\vec{F}_P$ suivant l'axe Oz , s'écrit :

$$dF_{pz} = P(x, y, z - \frac{dz}{2})dxdy - P(x, y, z + \frac{dz}{2})dxdy = -\frac{\partial P}{\partial z}dxdydz$$

De même, suivant les directions Ox et Oy :

$$dF_{Px} = -\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz$$

$$dF_{Py} = -\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz$$

Finalement :

$$d\vec{F}_P = -\overrightarrow{\text{grad}}P d\tau$$

Les équivalents volumiques et massiques des forces de pression sont :

$$\vec{f}_{Pv} = -\overrightarrow{\text{grad}}P$$

$$\vec{f}_{Pm} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}P}{\mu}$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique, ou théorème de la résultante cinétique, à l'élément de fluide de volume $d\tau$ et de masse dm . On obtient l'équation d'Euler :

$$dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = d\vec{F} + d\vec{F}_P$$

où $D\vec{v}/Dt$ est la dérivée particulière de la vitesse de l'élément de fluide, avec :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} \wedge \vec{v}$$

L'équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\mu}$$

ou encore :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{f}_m - \frac{\overrightarrow{\text{grad}} P}{\mu}$$

Les grandeurs inconnues sont la vitesse $\vec{v}(M, t)$, la pression $P(M, t)$ et la masse volumique $\mu(M, t)$, soit cinq inconnues scalaires. La résolution du problème nécessite donc cinq équations scalaires. Trois de ces relations scalaires sont données par l'équation vectorielle d'Euler, une par la relation traduisant la conservation de la masse et la dernière par une équation d'état. Mais l'équation d'état introduit une grandeur inconnue supplémentaire ; la température $T(M, t)$. Une sixième relation scalaire est donc nécessaire. Elle est donnée par la loi de l'écoulement thermodynamique, par exemple isotherme, incompressible ou encore adiabatique.

9.2.2 Relations de Bernoulli

Dans de nombreux cas, les forces massiques \vec{f}_m dérivent d'une énergie potentielle massique e_{pm} , et donc $\vec{f}_m = -\overrightarrow{\text{grad}} e_{pm}$. Pour les forces de pesanteur, $e_{pm} = gz$.

Écoulement stationnaire

Lorsque l'écoulement est stationnaire :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

Multiplions scalairement l'équation d'Euler par le déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM} = \vec{v} dt$ le long d'une ligne de courant afin de faire disparaître le terme $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$ dans la deuxième expression de cette équation. Il vient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + e_{pm} \right) \cdot d\overrightarrow{OM} + \frac{\overrightarrow{\text{grad}} P \cdot d\overrightarrow{OM}}{\mu} = \vec{0}$$

et

$$d\left(\frac{v^2}{2} + e_{pm} - \frac{dP}{\mu}\right) = 0$$

Après intégration, le long d'une ligne de courant, on obtient la relation de Bernoulli :

$$\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \int \frac{dP}{\mu} = \text{constante}$$

Faisons deux hypothèses sur le fluide :

- Le fluide est barotrope : $\mu = \mu(P)$. Dans ce cas, la primitive de $dP/\mu(P)$ ne dépend que de P . On la note $\varphi(P)$. La relation de Bernoulli, valable le long d'une ligne de courant s'écrit :

$$\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \varphi(P) = \text{constante}$$

- Le fluide est incompressible et homogène : $\rho = \text{cte}$ et $\varphi = P/\rho$. Toujours le long d'une ligne de courant, la relation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \frac{P}{\rho} = \text{constante}$$

Rq : Si l'on note H l'enthalpie du fluide, U son énergie interne, P sa pression, V son volume et m sa masse :

$$dH = VdP + TdS$$

La variation infinitésimale d'enthalpie massique h est :

$$dh = \frac{V}{m}dP + \frac{TdS}{m}$$

Et donc pour un écoulement isentropique : $dh = \frac{dP}{\rho}$

La relation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{v^2}{2} + e_{pm} + h = \text{constante}$$

Écoulement irrotationnel

Dans un écoulement irrotationnel, $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} = \vec{0}$. Il existe alors une fonction scalaire ϕ telle que $v = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$. L'équation d'Euler s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{pm} \right) + \frac{\overrightarrow{\text{grad}}P}{\mu} = 0$$

Reprenons les deux hypothèses du paragraphe précédent :

Le fluide est barotrope : $\mu = \mu(P)$ et $\varphi(P) = \int_{P_0}^P \frac{du}{\mu(u)}$. Puisque φ ne dépend que de la pression P :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial P} \overrightarrow{\text{grad}}P = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}P}{\mu(P)}$$

L'équation d'Euler prend la forme suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{pm} + \varphi(P) \right) = 0$$

Par intégration, on obtient la relation de Bernoulli valable dans tout le fluide :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{pm} + \varphi(P) = \text{constante}(t)$$

Le fluide est incompressible et homogène : $\mu = \text{cte}$ et $\varphi = P/\mu$. la relation de Bernoulli valable dans tout le fluide, s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{pm} + \frac{P}{\mu} = \text{constante}(t)$$

Dans les deux cas, si l'écoulement est en plus stationnaire : $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$.

Interprétation

Nous venons de voir que dans le cas le plus simple, c'est à dire pour un écoulement stationnaire et irrotationnel d'un fluide incompressible homogène, la relation de Bernoulli, valable dans tout le fluide, s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + e_{pm} + \frac{P}{\mu} = \text{constante}$$

Cette relation traduit la conservation de l'énergie mécanique dans un écoulement parfait.

- $\frac{v^2}{2}$ est l'énergie cinétique massique du fluide.
- $\frac{P}{\mu}$ est l'énergie potentielle massique associée aux forces massiques de pression $\vec{f}_{Pm} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P/\mu)$.
- e_{pm} est l'énergie potentielle massique associée aux autres forces que les forces de pression $\vec{f}_m = -\overrightarrow{\text{grad}}e_{pm}$.

La relation de Bernoulli s'écrit également :

$$\mu \frac{v^2}{2} + \mu e_{pm} + P = \text{constante}$$

- $\mu \frac{v^2}{2}$ homogène à une pression s'appelle la pression dynamique.
- $\mu e_{pm} + P$ est la pression statique.

La somme de ces deux pressions est la pression totale. La relation de Bernoulli exprime le fait que cette pression soit constante.

9.3 Applications

La relation de Bernoulli, la plus simple, s'applique dans le cadre très contraignant d'un écoulement stationnaire, irrotationnel et incompressible. Voyons dans quelle mesure nous pouvons l'appliquer à un fluide faiblement compressible, tel que $\Delta\mu \ll \mu$. Le coefficient de compressibilité isentropique du fluide s'écrit :

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P} = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta\mu}{\Delta P}$$

De $\Delta\mu \ll \mu$, on déduit $\chi\Delta P \ll 1$. Appliquons la relation de Bernoulli $\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \frac{P}{\mu} = cte$ entre deux points du fluide ; le premier où la vitesse est minimum et la pression maximum et le deuxième où la vitesse est maximum et la pression minimum. On suppose que l'énergie potentielle massique e_{pm} ne varie pas entre ces deux points. On obtient :

$$\Delta \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{\Delta P}{\mu} \quad \text{avec} \quad \Delta \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{v_{max}^2}{2} - \frac{v_{min}^2}{2} \quad \text{et} \quad \Delta P = P_{max} - P_{min}$$

Puisque $\chi\Delta P \ll 1$, on a :

$$\chi\mu\Delta\left(\frac{v^2}{2}\right) \ll 1$$

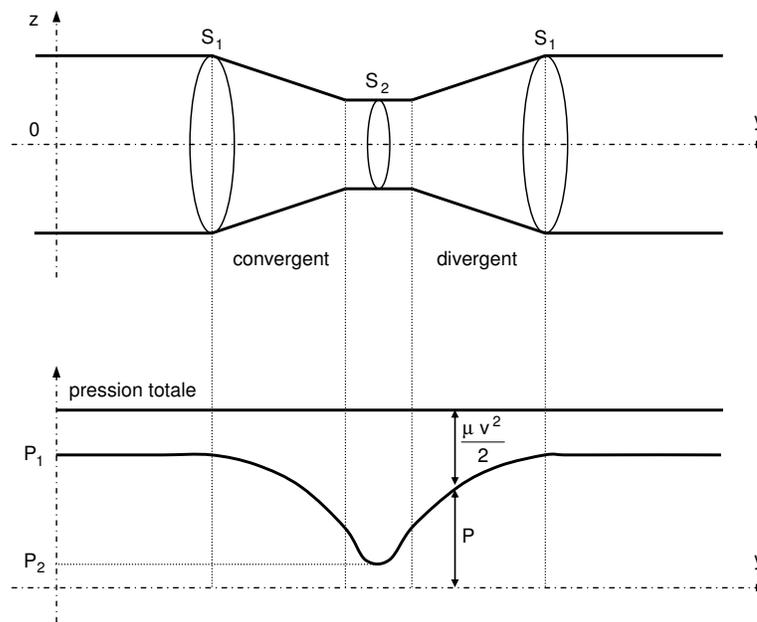
Or, la vitesse des ondes acoustiques dans les fluides est $c = \frac{1}{\sqrt{\chi\mu}}$. En supposant que $v_{min} = 0$, on déduit la condition :

$$v_{max} \ll c$$

Nous pourrions donc appliquer la relation de Bernoulli relative à un écoulement stationnaire et irrotationnel, à un fluide compressible, tant que sa vitesse est très inférieure à celle du son dans ce fluide.

9.3.1 Effet Venturi

Principe de l'effet Venturi



Considérons un fluide homogène et incompressible en écoulement stationnaire et irrotationnel dans un tube de Venturi, c'est à dire dans une conduite dont la section diminue (convergent) puis augmente (divergent). Cette conduite à une symétrie de révolution autour de l'axe Oy et nous supposons que la vitesse du fluide est uniforme dans une section droite de la conduite. Dans ces conditions, la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant s'écrit entre les sections S_1 et S_2 :

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

En appliquant la relation de Bernoulli entre S_1 et S_2 , avec $e_{pm} = gz$, on a :

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\mu} = \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\mu}$$

Mais le long de l'axe Oy , $z_1 = z_2$

D'où :

$$P_2 = P_1 + \frac{\mu v_1^2}{2} \left(1 - \frac{v_2^2}{v_1^2} \right)$$

et

$$P_2 = P_1 + \frac{\mu v_1^2}{2} \left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2} \right)$$

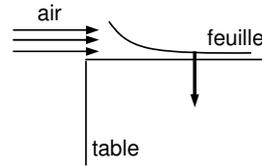
Comme $S_1 > S_2$, $P_1 > P_2$ et $v_1 < v_2$. Dans les régions de faible section, le fluide s'écoule plus vite et sa pression est plus faible que dans les régions de grande section : c'est l'effet Venturi.

La figure montre l'évolution de la pression statique, réduite à P pour $z = 0$, et de la pression dynamique $\frac{\mu v^2}{2}$.

Expériences

Feuilles de papier

Prenons une feuille de papier format A4 en la tenant par ses extrémités et soufflons horizontalement au-dessus de cette feuille. La vitesse de l'air étant plus rapide au-dessus de la feuille qu'en dessous, il se crée une dépression qui soulève la feuille.

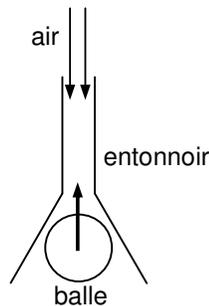


Le même phénomène se produit sur les ailes d'avion. Ces ailes étant inclinées, l'air qui y circule au-dessus va plus vite que l'air qui passe en dessous. Il y a donc une dépression au-dessus des ailes et une surpression en dessous. Ces deux effets indissociables s'additionnent pour maintenir l'avion en l'air.

Les voitures de course utilisent cet effet pour rester plaquer au sol. L'air qui passe sous la voiture traverse une faible section. Sa vitesse y est plus grande qu'au-dessus de la voiture et la pression plus faible. C'est l'effet de sol.

Balle de ping-pong

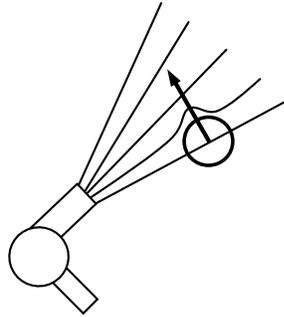
Soufflons dans un entonnoir et plaçons une balle de ping-pong sous cet entonnoir comme l'indique la figure. Entre l'entonnoir et la balle, la vitesse de l'air est importante car la section est faible. Il se crée une dépression qui aspire la balle dans l'entonnoir.



En utilisant un sèche-cheveux, il est possible de maintenir en l'air, une balle de ping-pong. Le sèche-cheveux crée un déplacement d'air plus important d'un côté de la balle que de l'autre, et donc une pression plus faible du côté de l'air en mouvement. La balle est en équilibre sous l'action de trois forces : son poids, la force de pression de l'air et la force due à la dépression.

Autres exemples :

- La trompe à eau
- Le pulvérisateur.

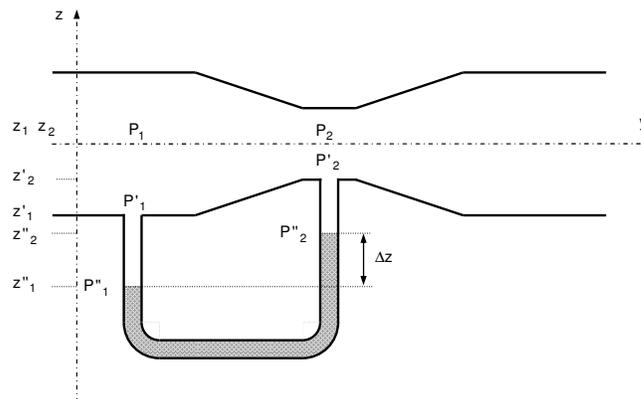


Mesure d'un débit avec un tube de Venturi

La vitesse du fluide à travers la section S_1 du tube de Venturi est :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\mu \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}}$$

Pour obtenir cette vitesse et le débit volumique du fluide $D_v = S_1 v_1$ il suffit de déterminer la variation de pression $P_1 - P_2$. Utilisons un tube en U rempli d'un fluide de masse volumique μ_0 , disposé comme l'indique la figure.



Dans le tube en U , le fluide est en équilibre statique. Il n'y a pas de pression dynamique. La relation de Bernoulli donne :

$$P''_1 - P'_1 = \mu g(z'_1 - z''_1)$$

et

$$P''_2 - P'_2 = \mu g(z'_2 - z''_2)$$

Par soustraction il vient :

$$P''_1 - P''_2 - (P'_1 - P'_2) = \mu g [z'_1 - z'_2 - (z''_1 - z''_2)]$$

Or, dans le tube en U on peut aussi écrire :

$$P''_1 - P''_2 = \mu_0 g(z''_2 - z''_1) = \mu_0 g \Delta z$$

En reportant cette relation dans la précédente on obtient une première expression de $P'_1 - P'_2$:

$$P'_1 - P'_2 = (\mu_0 - \mu)g \Delta z - \mu g(z'_1 - z'_2)$$

Dans le tube de Venturi, appliquons la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant. Sur l'axe, puisque $z_1 = z_2 = 0$:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\mu} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\mu}$$

Au bord du tube :

$$\frac{v_1'^2}{2} g z'_1 + \frac{P'_1}{\mu} = \frac{v_2'^2}{2} g z'_2 + \frac{P'_2}{\mu}$$

En supposant que $v_1 = v_1'$ et $v_2 = v_2'$, la soustraction des deux dernières équations permet d'éliminer v_1 et v_2 et on obtient une deuxième expression de $P'_1 - P'_2$:

$$P'_1 - P'_2 = P_1 - P_2 - \mu g(z'_1 - z'_2)$$

En combinant les deux expressions on déduit :

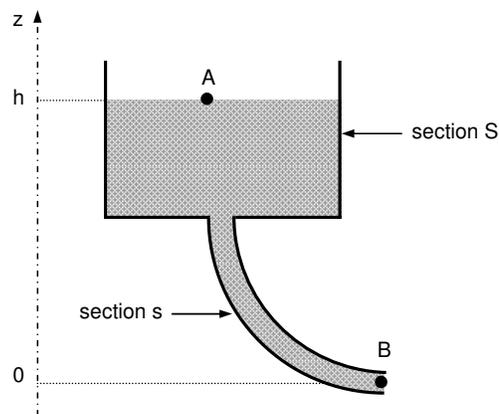
$$P_1 - P_2 = (\mu_0 - \mu)g \Delta z$$

Et le débit volumique :

$$D_v = S_1 v_1 = \frac{S_1 S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{\frac{2(\mu_0 - \mu)}{\mu}} g \Delta z$$

9.3.2 Vidange d'un réservoir ; formule de Torricelli

Considérons un réservoir de section S , contenant un fluide homogène et incompressible. Un tube de vidange de longueur L et de section $s \ll S$, raccordé sur le fond du réservoir, permet d'évacuer le fluide.



Dans ce problème, nous cherchons à déterminer la vitesse d'éjection du fluide v_B au point B .

Écoulement laminaire

Supposons dans un premier temps que l'écoulement soit parfaitement stationnaire. Entre les points A et B d'une ligne de courant, la relation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{P_A}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{P_B}{\mu}$$

Mais lorsque le fluide s'écoule, $P_A = P_B$ et $v_B \gg v_A$ car $S \gg s$ et $v_A = v_B$. Nous obtenons ainsi la formule de Torricelli :

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

Écoulement en régime non stationnaire

À l'instant initial $t = 0$, le fluide commence de s'écouler au point B . On cherche ici à déterminer l'évolution de la vitesse d'éjection du fluide au cours du temps. Repartons de l'équation d'Euler, avec

$$\vec{f}_m = -\overrightarrow{\text{grad}}gz :$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\mu} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \wedge \vec{v} = 0$$

Projetons cette équation sur le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM} = \vec{v}dt$ et intégrons le long d'une ligne de courant entre les points A et B . On obtient :

$$\int_A^B \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\mu} \right) \cdot d\overrightarrow{OM} \right] = 0$$

En tenant compte du fait que $P_A = P_B$ et $v_B \gg v_A$ car $S \gg s$ et $v_A S = v_B s$, la relation de Bernoulli s'écrit :

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\overrightarrow{OM} + \frac{v_B^2}{\mu} - gh = 0$$

De plus, avec les hypothèses précédentes, nous pouvons considérer que l'accélération du fluide dans le réservoir est négligeable par rapport à son accélération dans le tube de vidange et que le module de la vitesse du fluide est uniforme dans tout le tube de vidange. En notant v , la vitesse du fluide dans le tube et en particulier au point B :

$$L \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} - gh = 0$$

La vitesse v tend vers une limite $v_\infty = \sqrt{2gh}$ donnée par la stationnaire. Avec cette notation :

$$\frac{dv}{v_\infty^2 - v^2} = \frac{dt}{2L}$$

En remarquant que :

$$\frac{2dv}{v_\infty^2 - v^2} = \frac{1}{v_\infty} \left(\frac{dv}{v_\infty - v} + \frac{dv}{v_\infty + v} \right)$$

l'intégration de l'équation différentielle conduit, avec la condition initiale $v(t = 0) = 0$ à :

$$v_B = v = v_\infty \tanh\left(\frac{t}{T}\right)$$

avec $T = \frac{2L}{v_\infty}$

9.3.3 Autres applications

- Le tube de Pitot simple et double.
- Le tube de Prandtl.

Conclusion :

L'écoulement parfait d'un fluide est décrit par l'équation locale d'Euler qui relie le champ vectoriel des vitesses, les champs scalaires des pressions et des masses volumiques. La relation de Bernoulli est la traduction énergétique de l'équation d'Euler. Pour un écoulement stationnaire, elle s'applique le long d'une ligne de courant et pour un écoulement irrotationnel, dans tout le fluide. Cette relation a été établie dans le cas d'un fluide barotrope et d'un fluide incompressible homogène, mais son expression la plus simple obtenue pour un écoulement stationnaire et irrotationnel d'un fluide incompressible homogène peut être appliquée à un fluide compressible dans la mesure où sa vitesse d'écoulement est très inférieure à la vitesse du son dans ce fluide. Ceci permet d'expliquer de nombreuses situations où le fluide considéré est l'air.

Phénomènes interfaciaux impliquant les fluides



Bibliographie

- *Gouttes, bulles, perles, ondes*, de Gennes, Belin
- *Mécanique physique*, Fleury, Mathieu
- *Montages de physique*, Charmont, p. 5
- *Physique expérimentale*, Fruchart, p. 466
- *Expériences de physique*, Bellier, p. 459

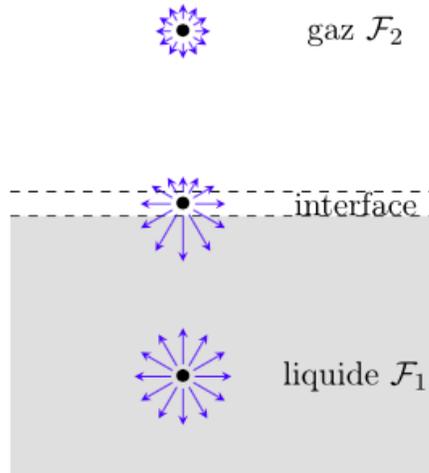
Introduction :

De nombreuses expériences de la vie quotidienne ne peuvent pas trouver d'explication avec les lois vues jusqu'ici. C'est en tenant compte des propriétés des interfaces que l'on peut les justifier notamment grâce au concept de tension superficielle. La capillarité est la science qui s'intéresse à ces phénomènes et qui joue un rôle majeur dans de nombreux domaines scientifiques (climat, chimie de formulation, industrie du verre etc.). On propose ici une présentation classique de la capillarité ; pour les aspects dynamiques et une vision plus moderne de cette science.

10.1 Énergie de surface

10.1.1 Notion de tension de surface

Jusqu'ici nous avons considéré le fluide comme un milieu continu contraint par des conditions aux limites que l'on a traité de façon simpliste (continuité de la vitesse et des contraintes pour un fluide visqueux). En réalité, pour décrire correctement la physique aux interfaces il faut tenir compte des interactions moléculaires à courte portée qui s'exercent de part et d'autre de l'interface. La théorie classique de la capillarité consiste à modéliser une interface comme une surface mathématique auquel on associe une certaine élasticité représentée par la propriété physique que nous appellerons tension superficielle



Essayons de justifier cette notion par un modèle simple (voire simpliste). Considérons un liquide \mathcal{F}_1 en contact avec sa vapeur \mathcal{F}_2 . Au sein de chaque fluide les molécules subissent des interactions de très courte portée (interaction de Van Der Waals attractives). Ainsi, dans \mathcal{F}_1 , chaque molécule possède une énergie d'interaction ϵ_1 résultat de l'interaction attractive avec son voisinage immédiat. De même on définira une énergie d'interaction ϵ_2 au sein du fluide \mathcal{F}_2 . Par contre, il existe une couche de fluide dans laquelle les molécules sont soumises à l'action des deux fluides. L'épaisseur de ce film moléculaire est de l'ordre de la dimension a d'une molécule. Appelons alors ϵ_{12} l'énergie d'interaction d'une molécule interfaciale. Bien entendu, on a $|\epsilon_{12}|$ compris entre $|\epsilon_1|$ et $|\epsilon_2|$. Si N est le nombre de molécules et N_s le nombre de molécules à l'interface, l'énergie du liquide \mathcal{F}_1 vaut

$$E_1 = (N - N_s)\epsilon_1 + N_s\epsilon_{12} = N\epsilon_1 + E_s$$

où $E_s = N_s(\epsilon_{12} - \epsilon_1)$ représente l'énergie de l'interface. On voit donc que l'on peut associer à l'interface une énergie liée à l'anisotropie des forces d'interaction moléculaire. Le terme

d'anisotropie $\epsilon_{12} - \epsilon_1$ est positif. Enfin le nombre de molécules à l'interface est proportionnel à l'aire \mathcal{S} de l'interface. On a approximativement $N_s \simeq \mathcal{S}/a^2$ de sorte que l'on peut écrire

$$E_s = \gamma \mathcal{S} \quad \text{avec} \quad \gamma \simeq \frac{\epsilon_{12} - \epsilon_1}{a^2}$$

γ est par définition la tension superficielle.

La tension superficielle est une grandeur positive qui caractérise une interface. Ainsi la tension de surface de l'interface eau-air n'est pas la même que celle de l'interface eau-huile. Elle s'exprime en J.m^{-2} .

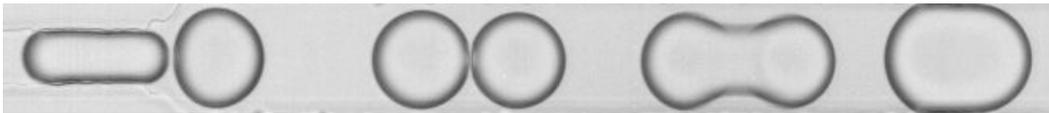
10.1.2 Conséquences expérimentales

Forme des bulles et gouttes

Augmenter la surface d'un liquide coûte donc de l'énergie. Ainsi un liquide adoptera une forme qui minimise la surface compte tenu des contraintes. On montre que pour un volume donné la surface qui minimise l'énergie est une sphère. Par exemple une goutte d'huile dans un mélange eau-alcool de densité identique sera sphérique. De la même manière, les bulles de gaz carbonique dans le champagne sont sphériques.

Coalescence

On montre aussi que deux gouttes sphériques auront intérêt à former une goutte plus grosse. Ainsi quand on agite énergiquement un mélange eau-huile on obtient une émulsion de petites gouttes d'huile dans l'eau. Cette émulsion est instable : les petites gouttes coalescent (on parle du phénomène de coalescence) et l'on obtient après un certain temps de l'huile avec de l'eau au dessous.



Exercice

Considérons deux gouttes d'eau sphériques de rayon r qui coalescent pour ne former qu'une seule goutte de rayon r' . Montrer que cette transformation s'accompagne d'un gain d'énergie.

Le volume des deux gouttes vaut $\mathcal{V} = 8/3\pi r^3$ et l'interface eau-air possède une aire totale $S = 8\pi r^2$. Le volume se conservant, le rayon de la goutte obtenu après coalescence vaut $r' = \sqrt[3]{2}r$ et son interface mesure $S' = 4(\sqrt[3]{2})^2\pi r^2 \simeq 6,3\pi r^2 S$. La transformation s'accompagne donc d'un gain d'énergie.

Retard des changements d'état

Lorsque l'on détend un liquide de façon isotherme, la thermodynamique prévoit qu'en dessous d'une pression dite pression de vapeur saturante, le liquide change de phase pour se vaporiser. Cependant la formation de la première bulle de vapeur coûte de l'énergie de sorte que le liquide peut exister dans une phase métastable en dessous de la pression de vapeur saturante. On parle de retard à la vaporisation. Une simple perturbation locale peut suffire à déclencher la formation d'une première bulle de vapeur. C'est ce phénomène qui fut employé dans les détecteurs de particules du milieu du XXème siècle (chambres à bulles).

De manière analogue, il y a retard à la liquéfaction pour la vapeur sursaturante (phénomène utilisé dans un autre détecteur de particule : la chambre à Wilson).

10.1.3 Rôle des tensio-actifs

Les tensioactifs sont constitués de molécules amphiphiles c'est-à-dire munies d'un pôle hydrophile et d'une longue chaîne hydrophobe. Lorsqu'un tensioactif est ajouté à de l'eau il vient se placer immédiatement à la surface, avec la queue hydrophobe pointant à l'extérieur de la surface. Ce processus s'accompagne d'une stabilisation de la surface et donc d'une chute de la tension superficielle. Ce n'est qu'une fois la surface saturée, et n'offrant plus d'espace disponible à de nouvelles molécules amphiphiles, que les tensioactifs vont former des structures organisées au sein du liquide : ce sont les micelles. Les micelles sont des structures sphériques ou ellipsoïdales dont la surface est constituée des têtes hydrophiles des tensioactifs, alors que les queues hydrophobes de ces derniers sont regroupées à l'intérieur. L'effet nettoyant des tensioactifs découle du fait que les substances hydrophobes, telles que les matières grasses, peuvent être contenues à l'intérieur des micelles. La concentration de tensioactifs au-dessus de laquelle les micelles commencent à se former est connue comme la concentration micellaire critique (CMC). Elle s'obtient en déterminant la concentration à partir de laquelle la tension superficielle cesse de chuter.

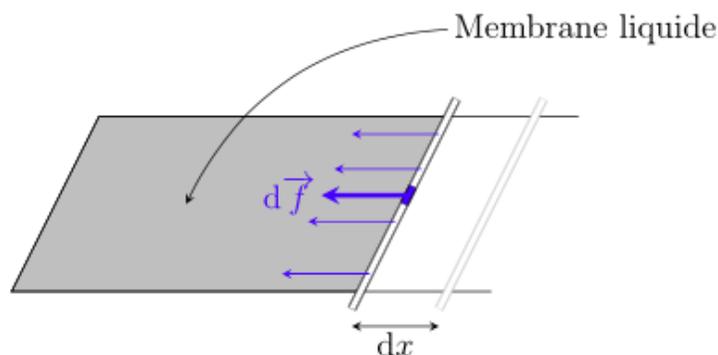
10.2 Forces capillaires

10.2.1 Expression de la force capillaire

Expérience : Plongeons un contour métallique dans de l'eau savonneuse puis retirons le. Il se forme alors une membrane liquide plane qui s'appuie sur le contour. Auparavant, nous avons pris soin de fixer un fil souple formant une boucle qui adopte une forme quelconque. Lorsque l'on crève au moyen d'une aiguille la membrane située dans la boucle, celle-ci adopte aussitôt une géométrie circulaire.

Cette expérience montre que la boucle est soumise à des forces dites forces capillaires aux propriétés suivantes :

- Ces forces sont perpendiculaires en chaque point du contour et tendent à minimiser l'aire du film d'eau savonneuse.
- Ces forces sont tangentes à l'interface.
- Elles sont réparties de façon uniforme. on peut donc définir une densité linéique de force $d\vec{f}/d\ell$.



De la même façon, si l'on forme une lame d'eau savonneuse sur un cadre rectangulaire dont un des cotés est mobile, le liquide cherchant à minimiser sa surface, il faut exercer une force sur la tige mobile pour maintenir la surface constante. On peut obtenir l'expression de cette force à l'aide d'un raisonnement énergétique (méthode des travaux virtuels) : Supposons qu'un opérateur déplace de façon quasi-statique la tige de longueur ℓ en produisant une force F_{op} . Si l'on note dx le déplacement, le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la tige donne

$$dE_c = 0 = \delta W = F_{\text{op}} dx + \delta W_s$$

où δW_s est le travail résistant des forces capillaires. Or ces forces dérivent d'une énergie potentielle :

$$\delta W_s = -dE_S = -2\gamma\ell dx \quad \text{donc} \quad F_{\text{op}} = 2\gamma\ell$$

D'après le principe des actions réciproques (troisième loi de Newton), cette force s'identifie à la résultante des forces capillaires s'exerçant sur la tige. Finalement, la tension superficielle est une force par unité de longueur, c'est pourquoi on l'exprime couramment en N.m^{-1} .

De façon générale, on peut traiter une interface comme une membrane tendue : chaque portion de surface est le siège de forces capillaires réparties sur le contour \mathcal{C} délimitant la portion de surface. Ces forces sont tangentes à l'interface, perpendiculaires en tout point de \mathcal{C} et données par la relation

$$d\vec{f} = \gamma d\ell \vec{n}$$

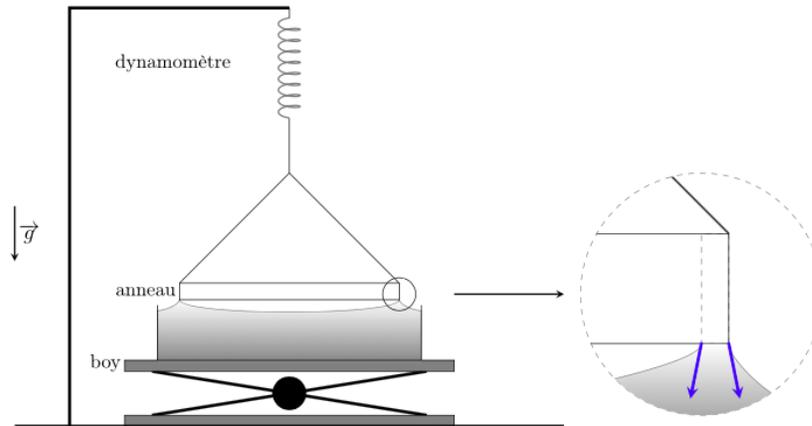
Remarque

Lorsque que l'on traite une membrane d'eau savonneuse, il ne faut pas oublier qu'il y a deux interfaces liquide-gaz ce qui explique la présence du facteur deux dans l'expression des forces capillaires.

10.2.2 Mesure et propriétés de la tension superficielle

Méthode de l'anneau

Historiquement la méthode de l'anneau a été la première à être développée. Il s'agit de plonger un anneau (en platine en général) dans le liquide à étudier puis de le remonter délicatement de façon à étirer un film au-dessous de l'anneau.



Au cours de l'étirement du film de liquide la force exercée sur l'anneau est mesurée à l'aide d'un dynamomètre et le système passe par un seuil où la force est maximale : dans ce cas

les forces capillaires sont verticales. Si l'on note r_1 le rayon intérieur de l'anneau et r_2 son rayon extérieur, on a la relation.

$$F_{\max} = 2\pi(r_1 + r_2)\gamma \simeq 4\pi r\gamma \quad \text{si } r_1 \simeq r_2$$

Sa mesure permet donc de déterminer la tension superficielle du liquide.

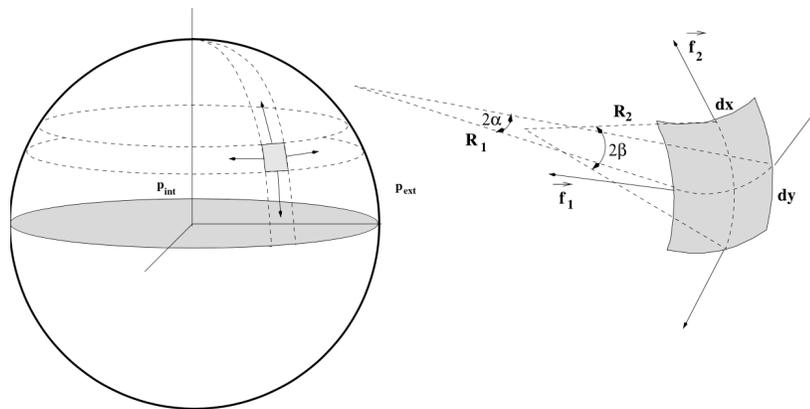
Ordre de grandeur

À température ordinaire, pour les liquides, la tension superficielle vaut quelques $\text{mN}\cdot\text{m}^{-1}$.

Liquide	Température	Tension superficielle mN/m
Mercure	18°C	475
Eau	20°C	73
Eau	80°C	62
Huile d'olive	20°C	32

La tension superficielle varie avec la température; γ diminue quand la température augmente jusqu'à s'annuler à la température critique.

10.2.3 Théorème de Laplace



Un petit contour circulaire pris dans la surface libre plane d'un liquide en équilibre est soumis à des forces de tension superficielle situées dans son plan et dont la résultante est nulle. Par contre, pour une surface sphérique, les forces exercées sur ce même contour ont

une résultante orientée vers l'intérieur de la sphère ; il faut donc une surpression Δp pour maintenir l'équilibre. On voit immédiatement que plus la courbure est importante et plus Δp sera grand.

On peut facilement obtenir l'expression de la différence de pression à l'aide d'un raisonnement énergétique. Considérons une bulle de gaz contenue dans un liquide et appelons γ la tension superficielle de l'interface gaz-liquide. Supposons que l'on fasse subir à la bulle une transformation quasi-statique en augmentant son rayon de dR . L'aire de l'interface augmente donc de $dS = 8\pi R dR$ et le volume de la bulle de $dV = 4\pi R^2 dR$. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique en choisissant comme système l'interface :

$$dE_c = 0 = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}}$$

Les forces extérieures sont les forces de pression p_{int} et p_{ext} de sorte que

$$\delta W_{\text{ext}} = -p_{\text{ext}} dV + p_{\text{int}} dV$$

Par ailleurs, les forces internes sont les forces de tension superficielles qui dérivent d'une énergie potentielle :

$$dW_{\text{int}} = -\gamma dS = -8\gamma\pi R dR$$

On a donc

$$\Delta p 4\pi R^2 dR - 8\gamma\pi R dR = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta p = p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \frac{2\gamma}{R}$$

De la même manière, à l'intérieur d'une bulle de savon, il règne une surpression

$$\Delta p = p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \frac{4\gamma}{R}$$

où le facteur 4 est dû au fait que la bulle de savon présente deux interfaces liquide-gaz. Ainsi la surpression est d'autant plus importante que la courbure moyenne $C = 2/R$ est importante. La généralisation à une géométrie quelconque est donnée par la loi de Laplace-Young :

La différence de pression entre deux milieux non miscibles séparés par une interface de tension superficielle γ , est donnée par

$$p_1 - p_2 = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux de la membrane au point considéré. Ces rayons sont définis positifs quand le rayon de courbure est du côté du milieu 1. Dans le cas d'une interface sphérique, ces deux rayons de courbure s'identifient au rayon de la sphère.

Ordre de grandeur

Pour une bulle de savon de rayon $R \simeq 1 \text{ cm}$ et $\gamma \simeq 25 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ on obtient $\Delta p \simeq 10 \text{ Pa}$. Pour faire des grosses bulles il faut fournir beaucoup d'énergie (surface importante) et générer une faible surpression ; il faut donc souffler tout doucement et longtemps.

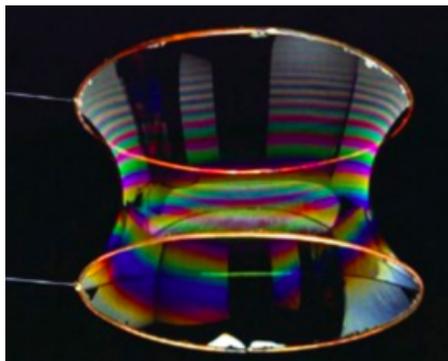
Mûrissement d'une mousse

Dans une mousse humide (mousse à raser, mousse de bière, etc.), du gaz est enfermé dans des bulles sphériques séparées par un film liquide pouvant plus ou moins laisser diffuser le gaz selon l'épaisseur de la membrane et la taille des molécules gazeuses. Le gaz emprisonné est en surpression par rapport au liquide en vertu de la loi de Laplace-Young

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R}$$

Ainsi la pression est plus importante dans les petites bulles. C'est ce qui explique le phénomène de mûrissement d'une mousse : Le gaz contenu dans les petites bulles traversent la membrane liquide par diffusion pour se diriger dans les zones de moins grande pression, c'est-à-dire, dans les grosses bulles. Les petites bulles se vident donc dans les grosses et la mousse s'enrichit en grosses bulles.

Surface minimale



Lorsque l'on trempe une structure métallique dans une eau de savon, on obtient une surface minimale (l'interface va chercher à minimiser l'énergie superficielle) qui a la propriété suivante : si la surface est ouverte, $\Delta p = 0$ et donc

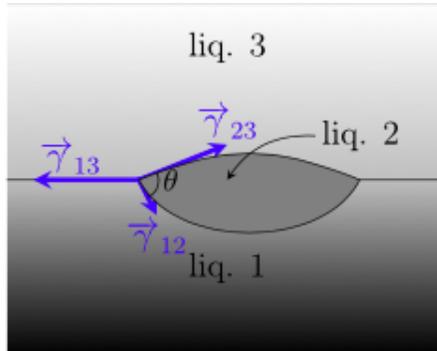
$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

On dit que la courbure moyenne est nulle. Dans la plupart des cas on obtient des lames planes qui forment une surface minimale ($R_1, R_2 \rightarrow \infty$). On peut aussi obtenir des lames avec deux rayons de courbures opposées comme sur la figure ci-contre montrant une caténoïde.

10.3 Mouillage

10.3.1 Angle de contact

Équilibre au contact de trois fluides



Déposons une petite quantité de liquide 2 sur un autre liquide 1 plus dense. L'ensemble des points en contact avec les deux liquides et l'air forme une ligne, dite ligne triple. Intéressons nous aux forces capillaires s'exerçant sur cette ligne triple. L'équilibre n'est possible que si la résultante des forces capillaires peut s'annuler ce qui définit l'angle de contact θ :

$$\vec{\gamma}_{12} + \vec{\gamma}_{23} + \vec{\gamma}_{31} = \vec{0}$$

où le vecteur $\vec{\gamma}_{ij} = d\vec{f}_{ij}/d\ell$ désigne la densité linéique de force capillaire. Cet équilibre suppose que l'on puisse former un triangle (dit triangle de Neumann) avec les trois vecteurs $\vec{\gamma}_{ij}$ ce qui n'est possible qu'à condition que chaque tension de surface soit inférieure à la somme des deux autres. Dans le cas contraire, le liquide 2 s'étale sur le liquide 1 : on dit qu'il y a mouillage total.

Exercice

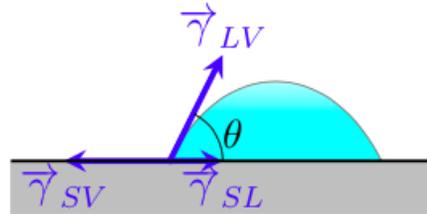
Déposons une goutte d'huile d'olive sur de l'eau. Sachant que $\gamma_{\text{eau-air}} = 73 \text{ N.m}^{-1}$, $\gamma_{\text{huile-air}} = 32 \text{ N.m}^{-1}$ et $\gamma_{\text{huile-eau}} = 18 \text{ N.m}^{-1}$, dire s'il y a étalement ou non.

Comme $18+32 < 73$, la condition d'équilibre n'est pas respectée et l'huile d'olive s'étale.

Équilibre d'un liquide au contact d'un solide

Déposons une goutte de liquide sur un support plan. En général, le liquide adopte la forme décrite sur la figure ci-contre, résultat d'un compromis entre le poids qui tend à diminuer la

position du centre de gravité de la goutte et des forces capillaires qui tendent à minimiser l'aire de la surface libre.



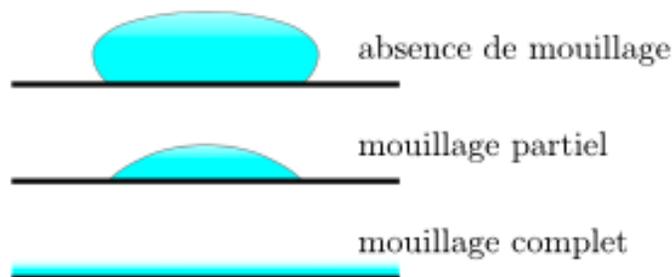
À l'équilibre, la résultante des forces capillaires en un point de la ligne triple s'annule. En projection sur le plan de la surface solide, on a donc

$$\gamma_{SL} + \gamma_{LV} \cos \theta = \gamma_{SV}$$

Cette relation trouvée par Young en 1805 définit l'angle de contact θ . On distingue trois cas de figure :

- $\theta > \pi/2$: le liquide est non mouillant (exemple : verre-mercure-air)
- $\theta \in [0, \pi/2]$: il y a mouillage partiel (exemple : verre-eau-air)

Lorsque l'angle de contact n'est pas défini, il y a mouillage complet du liquide sur le substrat solide.



Remarque

Dans la direction perpendiculaire à la surface solide, les forces capillaires ne se compensent pas ce qui signifie que le solide se déforme. On peut montrer que pour les solides courants, cette déformation est plus petite que la taille d'un atome et donc négligeable.

10.3.2 Ascension capillaire

Quand on plonge un capillaire propre (tube étroit de rayon r) dans de l'eau, on observe l'ascension d'une colonne d'eau dans le capillaire malgré la pesanteur. Cette ascension est d'autant plus importante que le rayon est petit.

$$h = \frac{C^{te}}{r} \quad \text{Loi de Jurin}$$

où la constante dépend du liquide et de l'angle de contact.

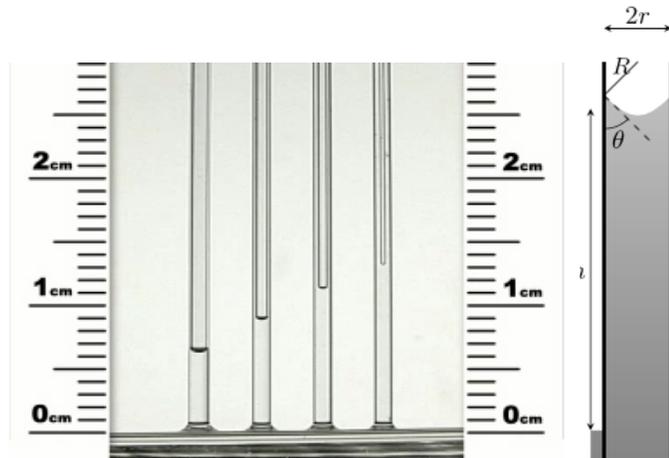
On peut utiliser la loi de Laplace-Young pour démontrer la loi de Jurin. En effet, considérons l'interface liquide raccordée à la paroi du tube avec un angle θ et supposons que le ménisque est sphérique de rayon R . L'air étant à la pression p_0 , la pression qui règne dans le liquide au voisinage du ménisque vaut $p_0 - \Delta p$ avec $\Delta p = 2\gamma/R$ en vertu de la loi de Laplace-Young. Le rayon de courbure vaut $R = r/\cos\theta$ d'où

$$p_h = p_0 - \frac{2\gamma \cos\theta}{r}$$

Or si l'on applique les lois de l'hydrostatique au niveau de la surface libre du récipient dans lequel plonge le tube, on trouve

$$p_0 = p_0 - \frac{2\gamma \cos\theta}{r} + \mu g h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2\gamma \cos\theta}{\mu g} \frac{1}{r}$$

Il y a donc ascension capillaire si le liquide mouille la paroi ($\theta = \pi/2$). Par contre pour un liquide non mouillant il y a descente capillaire (cas du mercure dans un capillaire en verre).



Exemple

pour l'eau dans un tube de verre propre l'angle de raccordement vaut 0 (l'eau mouille le tube). Si $r = 0,01$ mm on obtient

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r} = 1,5 \text{ m}$$

l'ascension peut donc être très importante. C'est ce qui explique par exemple les remontées d'humidité par capillarité que l'on peut observer dans des milieux poreux notamment dans certains bâtiments.

Remarque

La loi de Jurin suppose que le ménisque est sphérique et donc que la pression sous le ménisque est uniforme. Or, rigoureusement, comme les bords du ménisque sont plus haut que le centre, cette pression ne peut pas être uniforme. Elle ne peut l'être qu'approximativement à condition que l'élévation du ménisque soit négligeable devant la hauteur d'ascension h . Il est facile de montrer que cette condition se traduit par

$$r \ll \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \sin \theta}} \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$$

Pour les petits angles cela donne

$$r \ll \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \simeq 2,7 \text{ mm} \quad \text{pour l'eau}$$

Gaz parfaits, gaz réels



Bibliographie

- *Physique statistique*, Diu
- *Mécanique 2*, Feynman
- *Thermodynamique*, Bruhat
- *Thermodynamique*, Flory
- *Physique Sup PCSI*, Collection Tec et Doc

Introduction :

Objectif : établir un modèle microscopique qui rend compte des propriétés macroscopiques d'un gaz.

Démarche : appliquer les lois de Newton au gaz. Arguments statistiques pour simplifier la résolution.

11.1 L'état gazeux

11.1.1 Caractérisation expérimentale des gaz à basse pression

Loi de Boyle-Mariotte (1660) : à T fixée, $PV = \text{constante}$. Loi de Charles (1795) : à V fixé, $P \propto T$.

Loi de Gay-Lussac (1802) : à P fixée, $V \propto T$.

Loi d'Avogadro (1811) : 2 gaz avec même P, T et V ont même n .

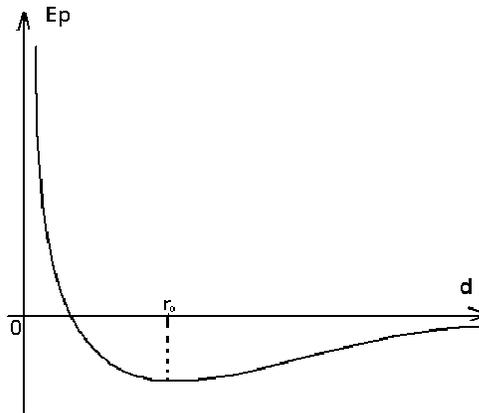
Ces résultats expérimentaux peuvent être rassemblés autour d'une formule :

$$PV = nRT$$

Problème : Il n'y a pas de compréhension des mécanismes qui sous-tendent cette loi. D'où l'intérêt d'un modèle microscopique qui permette de retrouver cette équation dite Equation d'état des gaz parfaits . Avant de construire ce modèle, il faut s'intéresser aux propriétés réelles des gaz.

11.1.2 Caractérisation des gaz réels

En moyenne, on a $E_c \ll E_p$ (ayant posé $E_p(\infty) = 0$). L'énergie potentielle a le profil suivant :



La distance moyenne entre les particules est $\langle d \rangle = \left(\frac{V}{N_a}\right) \approx 30 \text{ \AA}$ or $r_0 \approx 1 \text{ \AA}$ donc les interactions entre particules sont très faibles. Agitation moléculaire : toutes les vitesses peuvent être prises par une particule, mais il en existe des plus probables que d'autres et cela dépend de la température. Pour tout fluide classique (gaz réel ou liquide), les vitesses sont réparties selon la distribution de Maxwell.

11.1.3 Définition d'un gaz parfait

- $E_p = 0$, car la densité est très faible (mais pas trop faible pour que l'on puisse considérer le gaz comme un système thermodynamique)
- les particules sont ponctuelles (pas d'interaction entre elles, mais seulement avec les parois)
- hypothèse du chaos moléculaire : homogénéité, isotropie
- système à l'équilibre thermodynamique
- théorie classique (que l'on justifiera a posteriori).

11.2 Grandeurs macroscopiques et équation d'état du gaz parfait

11.2.1 Pression cinétique P_c

Définition :

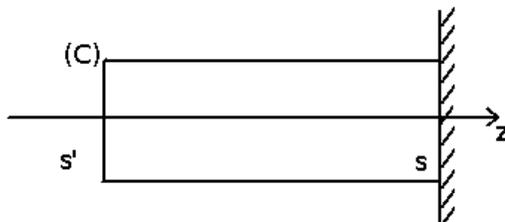
Un élément de paroi d'aire dS est soumis à une force :

$$d\vec{F}_{mol \rightarrow paroi} = P_c \cdot dS \vec{n}$$

où \vec{n} est la normale à la paroi. P_c est donc le coefficient de proportionnalité entre dF et dS .

Expression microscopique de P_c

On considère une enceinte renfermant un gaz parfait au repos (à l'équilibre thermodynamique). On isole un volume cylindrique (C), la paroi fermant un côté du cylindre.



Dans le cylindre, le gaz est au repos : en moyenne, il n'y a pas de variation de quantité de mouvement. Qu'est-ce qui peut faire varier la quantité de mouvement pendant un intervalle de temps dt :

- $\vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{gaz}}$;
- flux de quantité de mouvement (le cylindre est un système ouvert) ;
- l'interaction avec les particules... pour un GP il n'y en a pas !

La condition d'équilibre s'écrit alors :

$$0 = F_{\text{paroi} \rightarrow \text{gaz}} \cdot dt + dp_{\text{cin}}$$

où dp_{cin} est la variation de quantité de mouvement du gaz contenu dans le cylindre pendant dt à cause du départ ou de l'arrivée de particules.

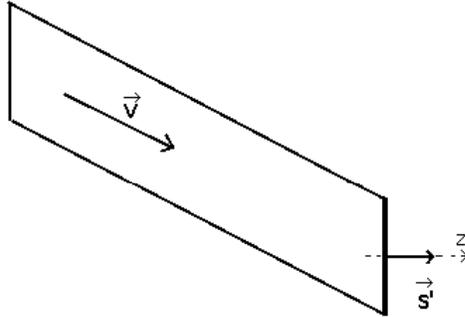
Le problème a une symétrie de révolution autour de l'axe Oz . D'où :

- le flux de quantité de mouvement à travers la paroi latérale du cylindre est nulle ;
- les vecteurs \vec{F} et p_{cin} n'ont qu'une composante (suivant Oz). L'équation s'écrit alors, en projection suivant Oz :

$$0 = F_{\text{paroi} \rightarrow \text{gaz}, z} \cdot dt + dp_{\text{cin}, z}$$

d'où $F_{\text{gaz} \rightarrow \text{paroi}} = P_c \cdot S = dp_{\text{cin}}/dt$. Il n'y a plus qu'à évaluer le transfert de quantité de mouvement pendant dt à travers S .

On considère les particules ayant une vitesse \vec{v} (à dv près) qui traversent S entre t et $t + dt$. Elles sont contenues dans le cylindre de génératrice $\vec{v}dt$ et de support S .



La quantité de mouvement échangée s'écrit :

$$dp_{\text{cin}} = (vdt \cdot S)(n \cdot P(v) \cdot d^3v)mv_z$$

On intègre maintenant sur toutes les vitesses :

$$dp_{cin} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_z^2 P(v) \cdot d^3v (n \cdot S dt) = mn v_z^2 S dt$$

D'où :

$$P_c = \frac{1}{S} \frac{dP_{cin}}{dt} = mn \langle v_z^2 \rangle S dt$$

De plus, l'isotropie de la distribution des vitesses nous permet d'écrire : $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$. Or on sait que : $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$. D'où $\langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$. On en déduit :

$$P_c = \frac{1}{3} mn \langle v^2 \rangle$$

On note que, le système étant homogène, on a $n = N/v$, d'où :

$$PV = \frac{1}{3} mN \langle v^2 \rangle$$

Remarques :

$P_c = (\frac{2}{3}n) \cdot (\frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle)$ donc la pression fait intervenir le produit de la densité de particules par l'énergie cinétique moyenne par particule ; pour deux compartiments séparés par une paroi mobile, l'équilibre mécanique de la paroi impose $P_1 = P_2$ à l'équilibre thermodynamique du système total composé des 2 compartiments.

11.2.2 Température cinétique T_C

Interprétation microscopique

Considérons de même deux compartiments séparés par une paroi mobile, dont l'un (appelons le A) contiendrait au départ des particules avec une plus grande énergie cinétique (moyenne) que celles du second (que l'on baptisera B par commodité ou conformisme). Lors de l'échange d'énergie avec la paroi, l'énergie cinétique des particules de A diminue tandis que celle de la paroi augmente. Inversement, au cours des chocs entre les particules de B et la paroi, les particules de B sont accélérées et la paroi cède de l'énergie à ces particules. Cet échange continue tant que les particules de A et de B n'ont pas la même énergie cinétique (moyenne). On observe donc au final un transfert d'énergie cinétique de A vers B jusqu'à égalité. L'énergie cinétique moyenne joue donc le même rôle que la température : deux systèmes à des températures différentes en contact thermique s'échangent de

la chaleur jusqu'à atteindre une température d'équilibre commune. A la limite, on aurait pu appeler température l'énergie cinétique moyenne par particule. Mais, pour des raisons de cohérence, on définit la température par :

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = 3k_b T_c$$

où k_b est la constante de Boltzmann et vaut $k_b = 1,38.10^{23} \text{ J.K}^{-1}$.

Application

— calcul de la vitesse quadratique moyenne d'une molécule d'O₂ : $M_{O_2} = 32 \text{ g/mol}$

$$u = \sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3k_b T_c}{m}}$$

— justification de l'utilisation d'une approche classique :

$$\frac{mud}{h} \approx 10^{-4} \ll 1$$

11.2.3 Equation d'état d'un gaz parfait

On a vu que

$$P_c = \left(\frac{2}{3}n\right) \cdot \left(\frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle\right)$$

or

$$\frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \langle e_c \rangle = \frac{3}{2}k_b T_c$$

D'où : $P_c V = N k_b T_c = n N_a k_b T_c$, soit en posant $R = N_a k_b = 8.314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

$$P_c V = n R T_c$$

11.2.4 Energie interne U

C'est l'énergie cinétique moyenne et l'énergie potentielle d'interaction moyenne de toutes les particules du gaz (rappelons qu'il n'y a pas de mouvement d'ensemble et que le système est isolé).

$$U = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle = N \frac{3}{2} k_b T_c = \frac{3}{2} n R T_c$$

pour un gaz parfait monoatomique car il n'y a pas d'énergie potentielle d'interaction, puisqu'il n'y a aucune interaction. En revanche, pour un gaz parfait polyatomique, l'expression de U est légèrement différente :

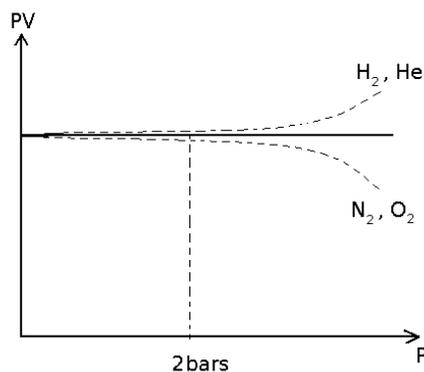
$$U = \langle E_c \rangle = \langle E_c \rangle_{\text{translation}} + \langle E_c \rangle_{\text{rotation}} = \frac{5}{2} n R T_c$$

Pour un gaz polyatomique à très haute température, si l'agitation thermique est suffisamment importante, l'énergie cinétique est susceptible d'exciter les particules dans des états vibrationnels ($T \sim$ quelques kK), et alors :

$$U = \langle E_c \rangle_{\text{translation}} + \langle E_c \rangle_{\text{rotation}} + \langle E_c \rangle_{\text{vibration}} = \frac{7}{2} n R T_c$$

11.3 Du gaz parfait au gaz réel

11.3.1 Les limites du gaz parfait

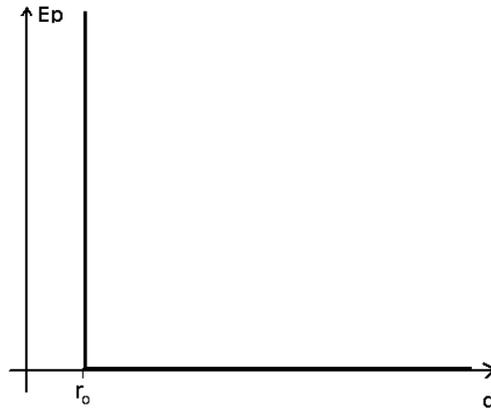


On observe une déviation par rapport à la loi de Boyle-Mariotte pour les gaz réels :

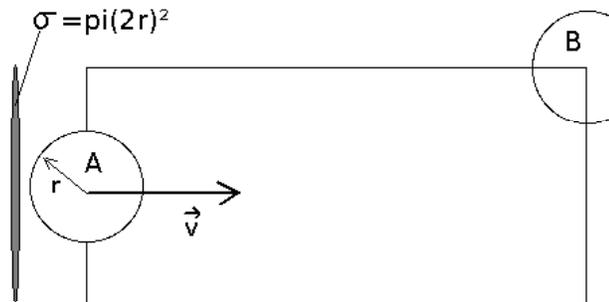
L'absence d'interaction entre les particules ne rend pas compte suffisamment fidèlement de la réalité. De même, ce modèle ne rend pas compte des transitions de phase. Pour cela, la seule solution est alors d'introduire dans le modèle une forme d'interaction entre particules.

11.3.2 Le modèle des sphères dures

On assimile maintenant les particules, non plus à des points matériels, mais à des sphères dures de rayon r_0 non nul et impénétrables. Les particules peuvent alors interagir entre elles par le biais de collisions élastiques : c'est une interaction répulsive. Le diagramme d'énergie potentielle a alors la forme suivante :



Calcul du libre parcours moyen



On considère une particule projectile A animée d'une vitesse \vec{v} et de rayon r , ainsi qu'une particule cible immobile B de même rayon r . Nommons τ le temps moyen entre deux chocs.

En avançant, la particule définit un cylindre de rayon $2r$: toute particule se trouvant dans ce cylindre entrera en collision avec elle. En posant la longueur de ce cylindre à $l = v \cdot \tau$, la particule ne subira en moyenne qu'un seul choc en parcourant cette distance. Autrement dit, dans le volume défini par ce cylindre, on ne trouve en moyenne qu'une seule particule cible, et on a alors : $1 = n \cdot l \cdot \sigma$ d'où : $l = \frac{1}{n\sigma} =$ libre parcours moyen.

Application Numérique :

Une mole de gaz occupe un volume de 22,4 L dans les conditions standards de T et P , d'où $N = N_a/22,4 \approx 10^{22}$ particules par litre $\approx 10^{25}$ particules par m^3 . Par ailleurs $\sigma = \pi(2r)^2 \approx 10^{19}$ pour $r \approx 1 \text{ \AA}$. D'où : $l \simeq 1 \text{ }\mu\text{m}$. De plus, on peut aussi obtenir la fréquence des collisions : $f = \frac{v}{l} \approx 10^8$ chocs/seconde.

Conclusion :

- on arrive à faire le lien théorie-expérience ;
- le modèle du GP nous apporte en plus une interprétation microscopique de T et P ;
- modèle simple, facilement mis en défaut, mais qui a pourtant un domaine de validité non négligeable.

Premier principe de la thermodynamique



Bibliographie

- *Thermodynamique*, Diu, Hermann
- *Thermodynamique*, Bertin, Faroux, Dunod

Introduction :

La thermodynamique traite des propriétés et des transformations de systèmes macroscopiques (dits thermodynamiques) mettant en jeu la température et la chaleur.

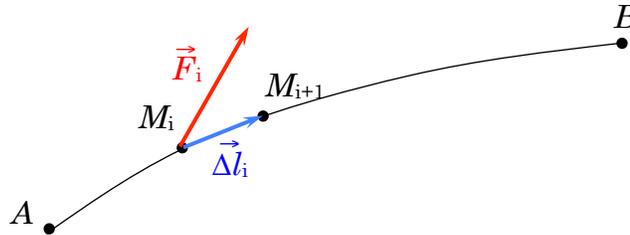
Les principes thermodynamiques expriment des restrictions universelles que la nature impose à ses transformations.

La thermodynamique est une théorie extrêmement générale applicable à des systèmes possédant des caractéristiques mécaniques, chimiques ou physiques complexes (matériaux, organismes vivants, la Terre, l'Univers, ...).

Tout système fermé peut échanger de l'énergie avec le milieu extérieur. Cela peut se faire directement à travers la paroi délimitant le système (on parle alors de "chaleur") ou bien par l'intermédiaire de forces extérieures agissant sur le système (on parle de "travail").

12.1 Travail W

Soit un système subissant l'action de forces extérieures pendant son déplacement dans un référentiel galiléen. Chacune de ces forces peut augmenter ou diminuer l'énergie du système.



$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i^n \vec{F}_i \cdot \vec{\Delta l}_i = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

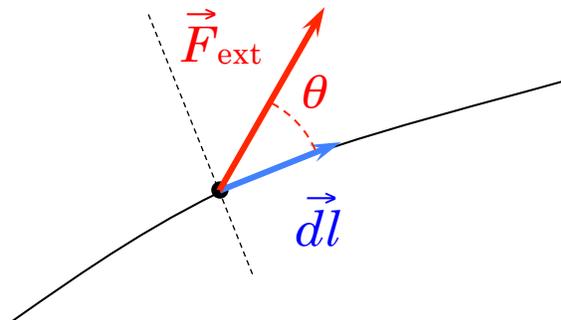
Dimension, Unité :

Le travail a la même dimension qu'une énergie $[W] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$

Le travail est exprimé en joule (1 J = 1 N.m)

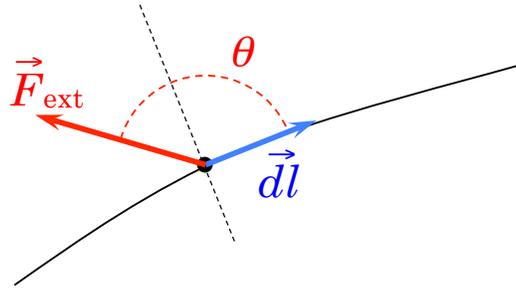
12.1.1 Travail reçu, travail fourni

Si la force \vec{F}_{ext} appliquée à un objet est globalement dans le sens du déplacement de l'objet :



alors $dW_{F_{ext}} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dl} > 0$, le travail de \vec{F}_{ext} est positif. La force a fourni de l'énergie au système, celui-ci a reçu de l'énergie sous forme de travail moteur.

Si la force \vec{F}_{ext} appliquée à l'objet est globalement dans un sens opposé au déplacement de l'objet :

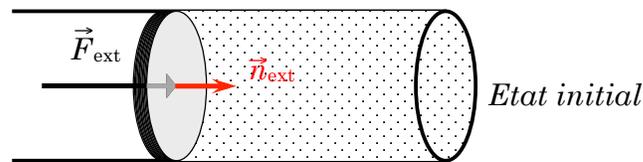


alors $dW_{F_{ext}} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dl} < 0$, le travail de \vec{F}_{ext} est négatif. La force a diminué l'énergie du système, celui-ci a cédé de l'énergie sous forme de travail résistant.

Travail des forces de pression sur un fluide

Le système considéré est un fluide contenu dans une enceinte fermée par une paroi mobile de surface S . Le tout est immergé dans un milieu extérieur constituant un réservoir de pression P_{ext} susceptible de varier avec le temps t .

Le milieu extérieur exerce une force sur le piston mobile :

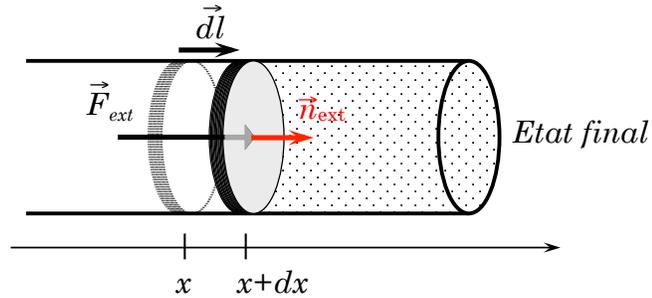


$$\vec{F}_{ext} = P_{ext} \cdot S \cdot \vec{n}_{ext}$$

avec \vec{n}_{ext} : vecteur unitaire normal à la surface et dirigé de l'extérieur vers l'intérieur ($\vec{n}_{ext} = \vec{e}_x$).

Sous l'action de cette force, le piston se déplace :

Le travail élémentaire de cette force sur le déplacement \vec{dl} vaut



$$\delta W = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{dl} = P_{ext} \cdot S \cdot dx = P_{ext} \cdot dV_{ext}$$

où dV_{ext} est la variation infinitésimale de volume du milieu extérieur. Elle est opposée à la variation infinitésimale de volume du système :

$$dV = -dV_{ext}$$

D'où

$$\delta W = -P_{ext} \cdot dV$$

δW correspond à l'énergie mécanique fournie au système par le milieu extérieur :

$\delta W > 0$ pour une compression ($dV < 0$), le milieu extérieur cède de l'énergie au système. L'énergie interne de celui-ci s'accroît,

$\delta W < 0$ pour une détente/dilatation ($dV > 0$), le milieu extérieur reçoit de l'énergie du système. L'énergie interne de celui-ci diminue.

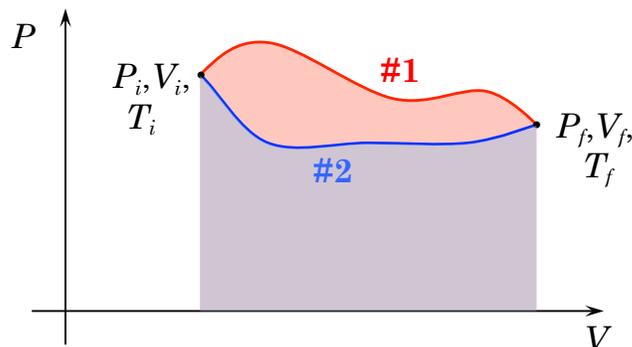
Le travail des forces de pression entre l'état initial et l'état final est donc :

$$W = - \int P_{ext} \cdot dV$$

Remarques :

On constate immédiatement que ce travail va dépendre du chemin suivi :

Il apparaît clairement sur ce diagramme de Clapeyron qu'à deux transformations (chemins) correspondent deux travaux (aires sous la courbe) différents.



Pour pouvoir calculer W , il nous faudrait connaître l'évolution temporelle de P_{ext} et dV . Or, en général on ne connaît que les caractéristiques des états initial et final qui sont insuffisantes.

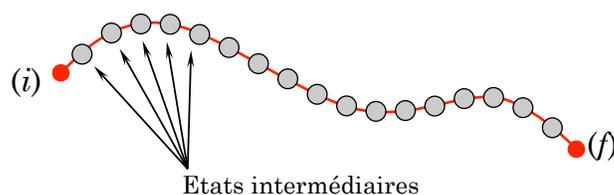
Quelques situations particulières rendent le calcul du travail possible.

12.1.2 Transformation quasi-statique

Sous l'effet d'une action extérieure, un système passe par une succession d'états internes le conduisant d'un état (i) vers un état (f). En général, les états intermédiaires sont dits hors équilibre.

Les grandeurs physiques telles la pression et la température ne sont alors plus définies.

On définit un cas idéal pour lequel on considère que le système passe par une succession d'états d'équilibre très proches les uns des autres.



transformation lente au cours de laquelle le système a le temps d'atteindre un état d'équilibre à chaque état intermédiaire. Les variables d'état (P, V, T) du système restent à tout instant définies de façon uniforme et varient continûment dans le temps et égales aux valeurs imposées par le milieu extérieur :

$T = T_{ext}$ s'il y a échange de chaleur à travers une paroi

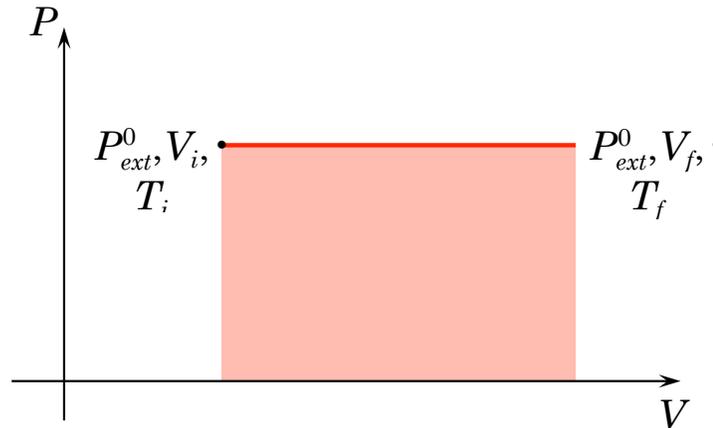
$P = P_{ext}$ s'il y a échange de travail à travers une paroi déformable (ou mobile)

Conséquence pour l'exemple précédent :

Comme $P = P_{ext}$, l'expression du travail devient : $W = -P_{ext}.dV = -P.dV$

Exemple : transformation isobare

Le milieu extérieur, réservoir de pression, impose une pression constante P_{ext}^0 . La transformation est isobare :



$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P_{ext}^0 dV = -P_{ext}^0 (V_f - V_i)$$

12.2 Chaleur Q

La chaleur correspond à un échange d'énergie entre le système et le milieu extérieur. Elle rend compte de l'énergie microscopique transférée au système. Elle concerne les mêmes variables que l'énergie interne.

Un transfert de chaleur correspond à une variation du désordre microscopique.

Le transfert de chaleur est directement lié à la température : la chaleur ne peut passer que du système le plus chaud vers le système le plus froid

Dimension, Unité :

La chaleur a la même dimension qu'une énergie $[W] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$.

La chaleur est exprimée en joule ($1 \text{ J} = 1 \text{ N.m}$).

Elle est transmise essentiellement par trois processus d'échange thermique :

- rayonnement (Soleil),
- conduction thermique,
- convection

Remarques :

La chaleur est une quantité algébrique comptée positivement si le système reçoit de l'énergie :

$Q > 0$ si le système S reçoit de la chaleur du milieu extérieur

$Q < 0$ si le système S cède de la chaleur au milieu extérieur

À l'instar de W , la chaleur Q dépend du chemin suivi (d'où la notation δQ).

Ne pas confondre chaleur et température.

On parle de chaleur échangée par un système S avec le milieu extérieur pendant une durée (non nulle), alors que l'on peut définir la température du système S à tout instant.

Capacité calorifique et chaleur spécifique

Un transfert de chaleur vers un système s'accompagne généralement d'une modification de sa température.

Cette variation de température est, dans certains cas (transformation à P constante ou à V constant) est proportionnelle à la quantité de chaleur transférée au système.

Pour une transformation isochore (à V constant) :

$$Q = \int_{T_i}^{T_f} C_V dT$$

C_V est la capacité calorifique à volume constant.

Pour une transformation isobare (à P constante) :

$$Q = \int_{T_i}^{T_f} C_P dT$$

C_P est la capacité calorifique à pression constante.

Remarques :

C_P et C_V correspondent à l'énergie qu'il faut fournir au système pour augmenter sa température de 1 K.

C_P et C_V varient en fonction de la température.

C_P et C_V sont directement proportionnels à la masse du système :

$$C_V = mc_V \quad \text{et} \quad C_P = mc_P$$

c_V et c_P sont les capacités thermiques massiques (on dit aussi capacités calorifiques ou encore chaleurs massiques) du système

Pour les solides et les liquides, à basse température, les valeurs de c_V et c_P sont très proches à cause de leur faible coefficient de dilatation.

À température ambiante, pour la plupart des corps purs solides, la chaleur molaire à volume constant vérifie la loi de Dulong et Petit :

$$c_{V_m} = c_{P_m} - c_m = 3R$$

Pour les liquides :

À $T = 14.5 \text{ }^\circ\text{C}$ et à pression atmosphérique, la capacité massique de l'eau vaut $4.185 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et 1 calorie = 4.185 J .

12.3 Energie interne d'un système U

12.3.1 Définition

L'énergie totale d'un système se décompose en :

- énergie interne U , liée aux interactions (électrostatiques) entre particules et à l'agitation thermique correspondant à l'énergie cinétique (désordonnée) des particules du système.

$$U = E_P^{int} + E_C^{int}$$

Elle concerne un aspect microscopique de l'énergie et on ne peut pas la quantifier directement.

- énergies "externes" dépendant de sa position dans un champ d'interaction (gravitationnelle, électromagnétique, ...) : \rightarrow énergie potentielle E_P et de son mouvement : énergie cinétique E_C

La somme $E_P + E_C$ représente l'énergie mécanique

L'énergie totale d'un système est donc :

$$E = U + E_P + E_C$$

Exemples :

- pour un système isolé immobile dans un référentiel galiléen :

$$E_P = 0, E_C = 0$$

- pour un gaz parfait (isolé, au repos), l'énergie du système correspond à son énergie interne :

$$E = U = E_C^{int} = \frac{i}{2}nRT$$

avec $i=3$ ou 5

- pour un solide considéré comme incompressible :

$$U = 3nRT$$

(loi de Dulong et Petit)

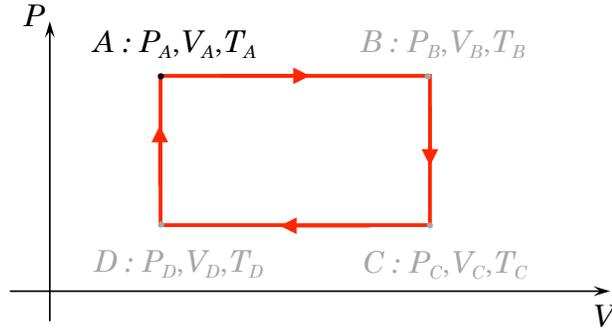
12.3.2 U : Fonction d'état du système

L'énergie interne U est une fonction dépendant de variables d'état (n, P, V, T, \dots) définies en chaque état d'équilibre du système. À ce titre, U est définie pour tout état d'équilibre du système : c'est une fonction d'état.

Propriétés

Dans le cas d'une transformation, U est définie en particulier à l'état initial (i) et à l'état final (f). Sa variation entre deux états ne dépend pas du chemin suivi. Quelque soit la transformation, il est possible de calculer $\Delta U = U_f - U_i$

Cas d'un cycle : soit une série de transformations (quasi-statiques) dont l'état final (A) est identique à l'état initial :



Au cours d'un cycle :

$$\Delta U = U_A - U_A = \Delta U_{cycle} = 0$$

À des variations infinitésimales dP , dV et dT des paramètres P , V et T correspond une variation infinitésimale de U : dU .

Remarques

Le travail des forces de pression W et la chaleur Q échangée au cours d'une transformation ne sont pas des fonctions d'état. Comme nous l'avons déjà vu, W dépend du chemin suivi ; il en est de même pour Q .

On utilise les notations δW et δQ pour définir un travail et une chaleur élémentaires

12.4 Premier principe de la Thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique décrit le bilan des échanges d'énergie d'un système avec son milieu extérieur.

Il s'écrit sous forme de bilan où, dans un repère galiléen, la variation d'énergie totale du système entre deux états (i) et (f) est égale à la somme des travaux et chaleurs reçus par le système pendant son évolution entre ces deux états :

$$\Delta U + \Delta E_C + \Delta E_P = W + Q$$

$$\Delta U = U_f - U_i, \Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} \text{ et } \Delta E_P = E_{Pf} - E_{Pi}$$

Le premier principe exprime l'équivalence entre les diverses formes d'énergie.

Remarques

En Mécanique, on néglige généralement les effets thermiques (ΔU et Q n'apparaissent pas), le 1er principe s'écrit alors :

$$\Delta E_M = \Delta E_C + \Delta E_P = W(\vec{F}_{ext})$$

Tous les systèmes que nous étudierons dans le cadre de ce cours sont supposés au repos dans le référentiel galiléen : $\Delta E_C + \Delta E_P = 0$

Le 1er principe se résume alors à :

$$\Delta U = W + Q$$

Pour une transformation infinitésimale système passe d'un état (P, V, T) à un état décrit par $(P + dP, V + dV, T + dT)$ en recevant (au sens algébrique) les quantités élémentaires de chaleur Q et de travail W , le premier principe s'écrit :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

L'énergie interne U est une fonction d'état (qui ne dépend pas du chemin suivi) bien qu'elle soit la somme de deux grandeurs qui ne sont pas des fonctions d'état.

12.5 Transformations remarquables d'un gaz parfait

Examinons, à l'aide du premier principe de la thermodynamique, la variation d'énergie interne et les échanges de chaleur et de travail dans quelques transformations simples.

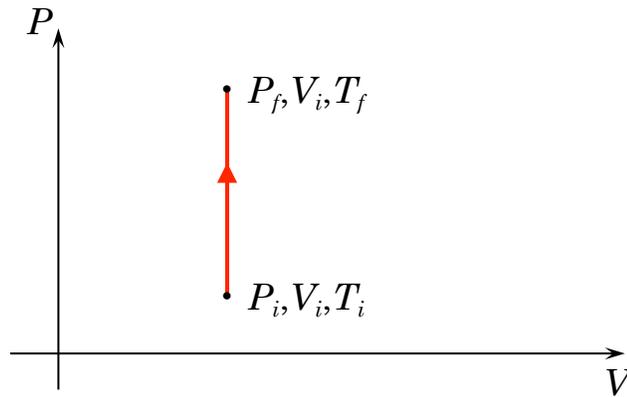
Soit un système S constitué d'un gaz de n moles de particules, supposé parfait, enfermé dans une enceinte de volume V au repos.

Les variables P , V et T étant liées par l'équation d'état, seules 2 variables parmi 3 sont nécessaires pour décrire la variation de U .

12.5.1 Transformation isochore d'un gaz parfait (à volume constant)

Quel est le lien entre les variables P et T ?

Seules les variables P et T varient, la température et la pression du gaz augmentent :



$$\frac{P}{T} = \frac{P_f}{T_f} = \frac{P_i}{T_i} = \frac{nR}{V} = \text{Constante}$$

Travail :

Comme le volume est constant, le travail des forces de pression extérieures est nul :

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV = 0$$

Variation d'énergie interne :

Le système passe d'un état (*i*) à un état (*f*) en échangeant de la chaleur :

$$\Delta U = U_f - U_i = Q_V$$

La variation d'énergie interne est due au transfert de chaleur entre le système et le milieu extérieur.

Il y a une relation de proportionnalité entre la variation d'énergie interne et la variation de température (1ère loi de Joule) :

$$\Delta U = U_f - U_i = C_V \cdot \Delta T$$

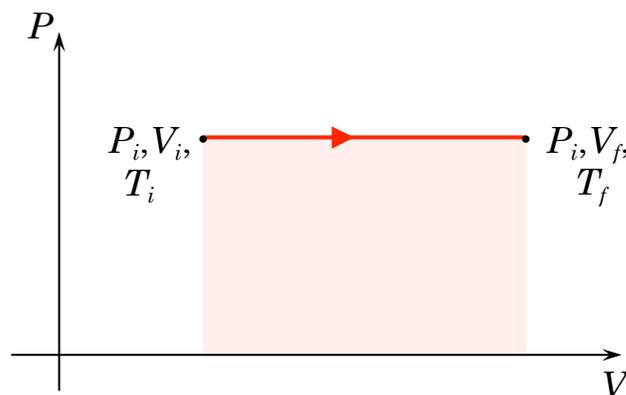
où $C_V = \frac{i}{2} nR$

selon que le gaz est monoatomique ou diatomique

C_V est appelée capacité calorifique à volume constant et définie par :

$$\Delta U = C_V \cdot \Delta T \quad \text{et} \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

12.5.2 Transformation isobare d'un gaz parfait (à pression constante)



Quel est le lien entre les variables V et T ?

Seules les variables V et T varient : la température et le volume du gaz augmentent.

$$\frac{V}{T} = \frac{V_f}{T_f} = \frac{V_i}{T_i} = \text{constante}$$

Travail :

Le travail des forces de pression extérieures vaut :

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P_i dV = -P_i(V_f - V_i)$$

$W > 0$ pour une compression, $W < 0$ pour une détente.

Variation d'énergie interne :

Le système passe d'un état (i) à un état (f) en échangeant de la chaleur et du travail :

$$\Delta U = U_f - U_i = W + Q$$

Chaleur échangée :

D'après l'équation précédente :

$$Q = U_f - U_i + P(V_f - V_i) = (U_f + PV_f) - (U_i + PV_i)$$

On définit ainsi une nouvelle fonction d'état, l'enthalpie : $H(U, P, V)$:

$$H = U + PV$$

L'enthalpie peut être considérée comme la somme de l'énergie interne et du travail mécanique contre la pression extérieure fourni ou reçu par un système se transformant à pression constante.

À pression constante, la chaleur mise en jeu, qui n'est pas une fonction d'état, devient égale à la variation de la fonction d'état enthalpie H :

$$\Delta H = H_f - H_i$$

Cette fonction d'état joue, pour les transformations à pression constante, le rôle que joue l'énergie interne pour les transformations à volume constant.

La variation de cette fonction ne dépend que de l'état final et de l'état initial du système et est indépendante du chemin suivi au cours de la transformation.

L'enthalpie est une fonction d'état intervenant dans les cas très courants de transformations effectuées à l'air libre, à pression atmosphérique constante (ne concerne pas seulement les gaz parfaits mais aussi et surtout les solides).

En général, l'enthalpie H d'un système n'est pas connue de façon absolue car elle dépend de l'énergie interne dont la valeur ne peut être déterminée. On a accès aux variations d'enthalpie.

Pour un volume de gaz parfait contenant N atomes

$$H = U + PV = Ni \frac{k_B T}{2} + Nk_B T = \frac{i+2}{2} Nk_B T$$

avec $i = 3$ (monoatomique) ou 5 (gaz diatomique)

En introduisant la constante molaire des gaz parfaits :

$$H = \frac{i+2}{2}nRT$$

On définit la capacité calorifique à pression constante C_P par :

$$C_P = \frac{i+2}{2}nR$$

avec $i = 3$ (monoatomique) ou 5 (gaz diatomique) d'où la variation d'enthalpie pour un gaz parfait :

$$\Delta H = C_P dT$$

Remarques :

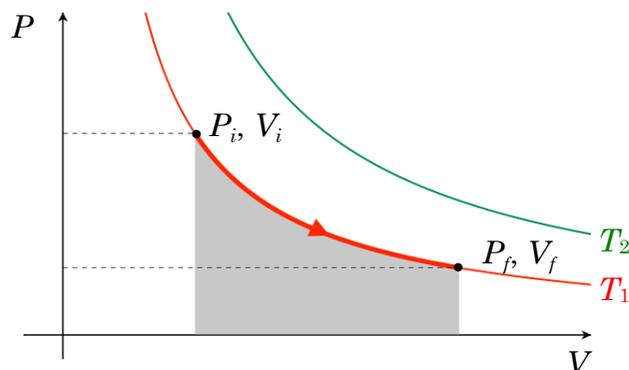
On a $C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$

On définit $\gamma = \frac{C_P}{C_V} > 1$

C_P et C_V sont reliés de par la relation :

$$C_P - C_V = nR \quad \text{et} \quad \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}$$

12.5.3 Transformation isotherme d'un gaz parfait (à température constante)



Quel est le lien entre les variables P et V ?

Seules les variables P et V varient : si P augmente, V diminue et vice versa

$$PV = P_f V_f = P_i V_i = nRT = \text{constante}$$

Variation d'énergie interne

Pour un gaz parfait, l'énergie interne est fonction de la température :

$$U = \frac{i}{2} nRT$$

avec $i = 3$ ou 5

Si T est constante, alors U est constante donc $\Delta U = 0$

Travail et chaleur échangés

$$\Delta U = W + Q = 0$$

Donc

$$W = -Q = - \int_{V_i}^{V_f} P dV = \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_i}{V_f} = nRT \ln \frac{P_f}{P_i}$$

12.5.4 Transformation adiabatique d'un gaz parfait

Une transformation adiabatique est une transformation sans échange de chaleur avec le milieu extérieur : $Q = 0$.

Deux possibilités pour réaliser ce type de transformation :

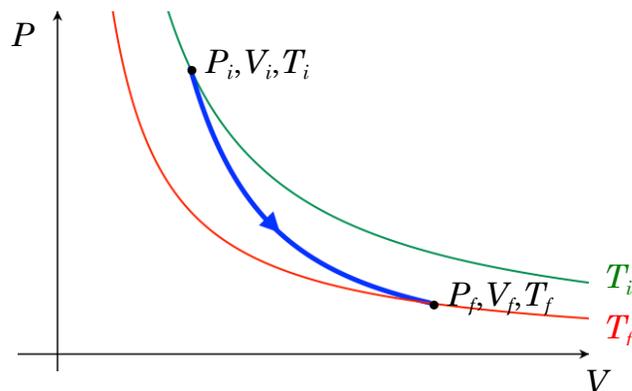
- la paroi est imperméable à tout transfert de chaleur,
- la transformation est plus rapide que les transferts de chaleur

Quel est le lien entre les variables P , V et T ?

On part de l'expression de l'énergie interne

$$U = \frac{i}{2} nRT = \frac{i}{2} PV$$

En différenciant cette quantité (U : fonction d'état)



$$dU = d\left(\frac{i}{2}PV\right) = \frac{i}{2}dPV = \frac{i}{2}PdV$$

D'autre part :

$$\delta Q = dU - \delta W = \frac{i}{2}VdP + \frac{i}{2}PdV + PdV = \frac{i}{2}VdP + \frac{i+2}{2}PdV$$

comme $\delta Q = 0$, il vient

$$\frac{i+2}{2} \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

en remplaçant $\frac{i+2}{2} = \frac{C_P}{C_V} = \gamma$, l'équation s'intègre et on aboutit aux lois de Laplace

$$PV^\gamma = \text{Cte}, \quad TV^{\gamma-1} = \text{Cte} \quad \text{et} \quad TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{Cte}$$

Variation d'énergie interne

Compte tenu de la 1^{ère} loi de Joule :

$$\Delta U = \frac{i}{2}nRT_f - \frac{i}{2}nRT_i = \frac{i}{2} \left[\left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

Travail

D'après le 1^{er} principe : $Q = 0$ donc $W = \Delta U$

On peut néanmoins recalculer le travail à partir de :

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV = - \int_{V_i}^{V_f} (PV^\gamma) \frac{dV}{V^\gamma}$$

Comme $PV^\gamma = P_f V_f^\gamma = P_i V_i^\gamma = Cte$

$$W = -(PV^\gamma) \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V^\gamma} = -(PV^\gamma) \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_{V_i}^{V_f}$$

D'où finalement

$$W = -P_f V_f^\gamma \frac{V_f^{1-\gamma}}{1-\gamma} + P_i V_i^\gamma \frac{V_i^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1}$$

En posant $i/2 = (\gamma - 1)^{-1}$, on montre facilement que cette expression de W est égale à celle de ΔU obtenue précédemment.

12.6 Calorimétrie

La calorimétrie consiste à mesurer :

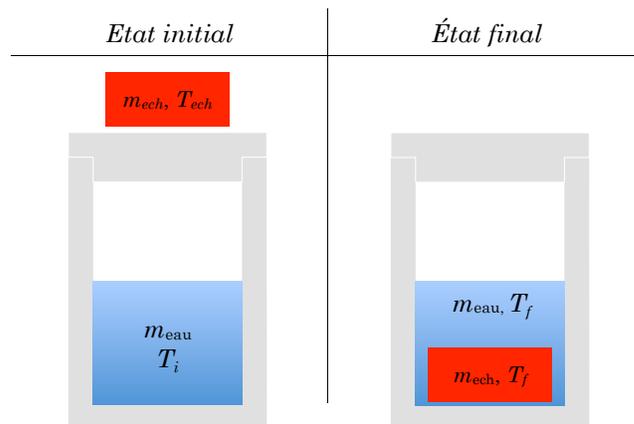
- les échanges de chaleur entre deux corps afin d'en déduire leurs capacités thermiques, les chaleurs latentes liées à des changements d'état ou des réactions chimiques.

Le dispositif le plus fréquent est le calorimètre de Berthelot constitué :

- d'une enceinte en matériau isolant (polystyrène vase Dewar) limitant les échanges avec le milieu extérieur de telle sorte que les transformations étudiées soient adiabatiques,
- d'un agitateur permettant d'homogénéiser la température par convection forcée,
- d'un thermomètre.

Méthodes des mélanges :

Mise en œuvre : un échantillon de masse m_{ech} de capacité thermique c_{ech} initialement à la température T_1 est introduit dans le calorimètre contenant une masse d'eau m_{eau} de capacité thermique c_{eau} . L'ensemble {calorimètre + eau} est initialement à la température T_i .



Quand l'équilibre thermique est atteint, le système {calorimètre + eau + échantillon} est à la même température finale T_f .

Caractéristiques thermodynamiques de l'expérience :

La transformation est à pression constante (P_{atm})

Quand l'équilibre thermique est atteint, le système {calorimètre + eau + échantillon} est à la même température finale T_f .

Le rôle du calorimètre est de réduire les échanges de chaleur avec l'extérieur transformation adiabatique

Le calorimètre ne constitue pas un système parfaitement isolant et absorbe une partie de la chaleur. On considère alors que l'ensemble {vase + thermomètre + agitateur} se comporte thermiquement comme une masse d'eau équivalente appelée la valeur en eau du calorimètre : μ (en kg).

L'application du 1er principe s'écrit :

$$\Delta U_{\text{syst}} = \Delta U_{\text{cal}} + \Delta U_{\text{eau}} + \Delta U_{\text{ech}} = 0$$

ou encore

$$\mu c_{\text{eau}}(T_f - T_i) + m_{\text{eau}} c_{\text{eau}}(T_f - T_i) + m_{\text{ech}} c_{\text{ech}}(T_f - T_{\text{ech}}) = 0$$

d'où la capacité thermique massique de l'échantillon :

$$c_{ech} = - \frac{(m_{eau} + \mu)(T_f - T_i)}{m_{ech}(T_f - T_{ech})} c_{eau}$$

Une expérience préalable est bien évidemment nécessaire pour déterminer la valeur en eau du calorimètre.

Evolution et condition d'équilibre d'un système thermodynamique fermé



Bibliographie

- *Introduction à la thermodynamique*, Hulin, Dunod
- *Thermodynamique*, Faroult, Renault, Dunod
- *Thermodynamique H-prépa*, Couture, Chahine, Zitoun, Dunod
- *Thermodynamique*, Collection Tec et Doc

Pré-requis :

- Fonction d'état
- Premier et seconde principe de la thermodynamique
- Transformations monotherme et monobare
- Energie potentielle d'un système mécanique

13.1 Rappel sur la notion de potentiel

13.1.1 En mécanique

L'énergie mécanique E_m d'un système, soumis seulement à des forces qui dérivent d'une énergie potentielle E_p , se conserve, ce que l'on traduit par l'équation :

$$E_m = E_c + E_p$$

On suppose que le système peut être décrit par la seule variable x par exemple. L'équation précédente (encore appelée "intégrale 1ère du mouvement") permet de connaître le mouvement du système. En la dérivant par rapport au temps, on retrouve notamment le théorème du centre d'inertie.

Pour discuter qualitativement de la nature du mouvement, il est utilisé de tracer l'allure de l'énergie potentielle en fonction de x , $E_p(x)$.

On sait qu'une position d'équilibre correspond à :

$$\left(\frac{dE_p}{dx} \right)_{x_{eq}} = 0$$

Au voisinage de l'équilibre, la force peut se développer sous la forme :

$$f(x) = f(x_{eq}) + (x - x_{eq}) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_{eq}} = -(x - x_{eq}) \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_{eq}}$$

L'équilibre sera stable si cette force correspond à une force de rappel, soit pour :

$$\left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_{eq}} > 0$$

qui correspond au minimum de E_p

Dans le cas où E_p est maximale, l'équilibre est instable.

Voici donc le sens d'un potentiel en physique : il donne en quelque sorte le chemin suivi par un système lors d'une évolution spontanée et permet de connaître la position d'équilibre stable comme minimum de ce potentiel.

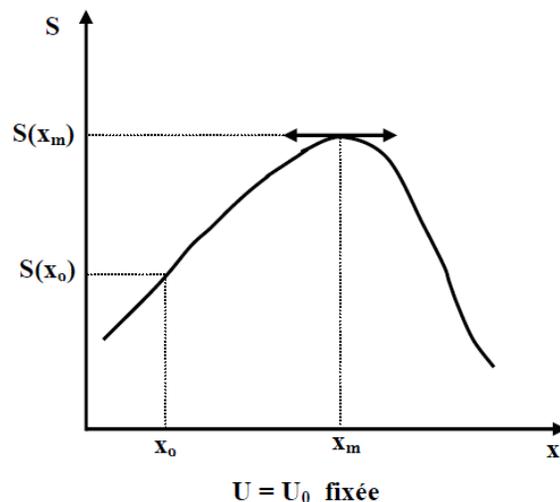
Nous allons généraliser cette notion dans le cadre plus général de la thermodynamique.

13.1.2 Exemple de l'entropie

Pour un système thermodynamique thermiquement isolé, le 2nd principe donne :

$$\Delta S = S_{cr} > 0$$

L'entropie ne peut qu'augmenter, ou $(-S)$ ne peut que décroître ; par analogie avec la mécanique et l'énergie potentielle (qui est minimale en une position d'équilibre stable), $(-S)$ représente un potentiel thermodynamique pour un système isolé, encore appelé néguentropie.



Un état d'équilibre correspond à un maximum de S (un minimum de $-S$) pour une énergie interne constante donnée.

Mais l'emploi de ce potentiel est rarement intéressant car les systèmes réels échangent le plus souvent matière et énergie avec l'extérieur.

Application :

On considère une enceinte indéformable de volume V_{tot} dont les parois sont athermes. Un piston mobile sans frottement, diatherme, sépare deux gaz quelconques de caractéristiques respectives (U_A, V_A, P_A, T_A) et (U_B, V_B, P_B, T_B) . Initialement les deux gaz sont hors équilibre. Caractériser l'état d'équilibre du système grâce au potentiel thermodynamique

Le premier principe appliqué à ce système et la nature extensive de l'énergie interne donnent :

$$dU = 0 = d(U_A + U_B)$$

L'identité thermodynamique et la nature extensive de l'entropie donnent :

$$dS_{tot} = \left(\frac{1}{T_A} dU_A + \frac{P_A}{T_A} dV_A \right) dU_A + \left(\frac{1}{T_B} dU_B + \frac{P_B}{T_B} dV_B \right) dU_B$$

On cherche ensuite le nombre de variables grâce aux remarques préliminaires

$$dS_{tot} = \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right) dU_A + \left(\frac{P_A}{T_A} - \frac{P_B}{T_B} \right) dV_A$$

– S étant un potentiel thermodynamique pour ce système, S sera maximum à l'équilibre, donc dS_{tot} . On a ici la différentielle exacte $S(U_A, V_A)$. Cette différentielle sera nulle si chacune des dérivées partielles est nulle

$$\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \text{ et } \frac{P_A}{T_A} - \frac{P_B}{T_B} = 0$$

Le système est donc dans état d'équilibre thermodynamique à l'état final, ceci est cohérent.

13.2 Définition des potentiels thermodynamiques F^* et G^* et des fonctions d'état F et G

On appelle potentiel thermodynamique d'un système soumis à un certain nombre de contraintes, toute fonction qui décroît au cours de l'évolution spontanée du système, l'équilibre thermique correspondant à son minimum.

Remarques :

* Un potentiel thermodynamique est associé à des conditions expérimentales données et est en général fonction des paramètres du système et de ceux du milieu extérieur (ce n'est pas une fonction d'état).

* Comme seul le second principe renseigne sur l'évolution d'un système, ces potentiels s'expriment obligatoirement en fonction de l'entropie S .

Exemples :

- Système mécanique : énergie potentielle.

- Système fermé thermodynamiquement isolé : négentropie - S .
- Evolution monotherme et isochore : potentiel F^* .
- Evolution monotherme et monobare : potentiel G^* .

Ces différents potentiels thermodynamiques correspondent aux différents jeux de variables d'état utilisés.

Les potentiels thermodynamiques sont très utiles pour calculer le résultat d'équilibre d'une réaction chimique ou bien pour mesurer les propriétés des espèces lors d'une réaction chimique.

Les réactions chimiques ont en général lieu sous certaines contraintes simples comme à pression et température constantes, ou bien à entropie et volume constants ; dans ce cas-là, on peut faire intervenir les potentiels thermodynamiques correspondants.

Comme en mécanique, le système verra la valeur du potentiel diminuer, et à l'équilibre, sous ces contraintes, le potentiel va adopter une valeur minimale permanente.

Les potentiels thermodynamiques peuvent également être utilisés pour estimer la quantité totale d'énergie disponible pour un certain système thermodynamique sous certaines contraintes.

En particulier :

* Quand l'entropie (S) et les paramètres extensifs (par exemple le volume) d'un système fermé sont maintenus constants, l'énergie interne (U) diminue et atteint un minimum à l'équilibre. C'est une conséquence du premier et du deuxième principe de la thermodynamique, appelée principe de l'énergie minimale. Les trois énoncés ci-dessous sont directement déductibles de ce principe.

* Quand la température (T) et les paramètres extensifs d'un système fermé sont maintenus constants, l'énergie libre de Helmholtz (F) diminue et atteint un minimum à l'équilibre.

* Quand la pression (P) et les paramètres extensifs d'un système fermé sont maintenus constants, l'enthalpie (H) diminue et atteint un minimum à l'équilibre.

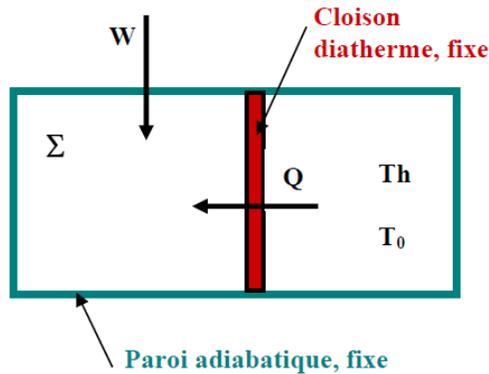
* Quand la température (T), la pression (P) et les paramètres extensifs d'un système fermé sont maintenus constants, l'enthalpie libre de Gibbs (G) diminue et atteint un minimum à l'équilibre.

13.2.1 Evolutions monothermes, potentiel thermodynamique F^* et fonction énergie libre F

Dans ce paragraphe, on se limite à des transformations où le système n'échange de la chaleur qu'avec un seul thermostat (noté Th) de température T_0 : ces transformations sont dites monothermes.

13.2.2 Système soumis à des transformations monothermes

Le système (Σ) subit une transformation durant laquelle il reçoit le transfert thermique Q de la part du thermostat et un travail W de l'extérieur, sous forme par exemple de travail des forces de pression.



Le 1er principe appliqué au système (Σ) donne :

$$\Delta U_{\Sigma} = Q + W$$

Le système ($\Sigma + Th$) est thermiquement isolé de l'extérieur et son entropie ne peut donc qu'augmenter ou rester constante, soit :

$$\Delta S_{totale} = \Delta S_{\Sigma} + \Delta S_{th} = \Delta S_{\Sigma} + \left(-\frac{Q}{T_0}\right) \geq 0$$

On en déduit :

$$\Delta U_{\Sigma} - W \leq T_0 \Delta S_{\Sigma}$$

Soit :

$$\Delta U_{\Sigma} - T_0 \Delta S_{\Sigma} \leq W$$

Ou encore :

$$(U_{\Sigma,f} - T_0 S_{\Sigma,f}) - (U_{\Sigma,i} - T_0 S_{\Sigma,i}) \leq W$$

On définit le potentiel thermodynamique sous la forme :

$$F^* = U_{\Sigma} - T S_{\Sigma}$$

où T_0 désigne la température du thermostat (F^* n'est pas une fonction d'état du système). La température du système n'est pas nécessairement égale à celle du thermostat, ni pendant la transformation ni même dans les états initial et final.

Le travail reçu par l'extérieur, $-W$, vérifie alors :

$$-W \leq -\Delta F^* = F_i^* - F_f^*$$

Le travail reçu par l'extérieur lors d'une transformation monotherme est nécessairement inférieur ou égal à la diminution de la fonction F^* . Le travail maximum récupéré par l'extérieur est obtenu lorsque la transformation est réversible et est égal à la diminution de la fonction F^* .

Potentiel thermodynamique pour les transformations monothermes sans échange de travail avec l'extérieur

Dans le cas particulier où W est nul (par exemple, si W est dû aux forces de pression et si la transformation s'effectue à volume constant isochore), alors :

$$\Delta F^* \leq 0$$

Dans une transformation de ce type, la fonction F^* ne peut que diminuer : F^* joue donc le rôle d'un potentiel thermodynamique pour les systèmes évoluant dans des transformations monothermes sans échange de travail avec l'extérieur. Une situation pour laquelle F^* est minimale sera une situation d'équilibre.

Rappelons que F^* est une fonction qui dépend à la fois du système (par U et S) et du thermostat (par sa température T_0).

Exemple d'application :

Soit un récipient de volume constant complètement rempli d'eau ($m = 100$ g) portée, dans une étuve, à la température $T_1 = 353$ K. On la place à température ambiante $T_0 = 293$ K.

a) Prévoir intuitivement l'état final du système. Calculer la variation de F^* au cours de la transformation et conclure.

b) Montrer que ce résultat naturel peut être retrouvé à partir du potentiel thermodynamique F^* . La capacité calorifique de l'eau c est supposée constante ($c = 4,18$ J.g⁻¹.C⁻¹).

Réponses :

a) La transformation de la masse d'eau est isochore (on néglige la variation de volume de l'eau entre 80 °C et 20 °C) et monotherme (on peut noter que la température initiale de l'eau n'est pas celle du thermostat!). La température finale de l'eau sera bien sûr celle du thermostat, c'est-à-dire la température ambiante.

Les variations de U et de S de la masse m d'eau sont (l'eau est une phase condensée) :

$$\Delta U = mc(T_0 - T_1) \quad \text{et} \quad \Delta S = mc \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right)$$

On en déduit la variation de la fonction F^* :

$$\Delta F^* = mc \left[(T_0 - T_1) - T_0 \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right) \right]$$

A.N. :

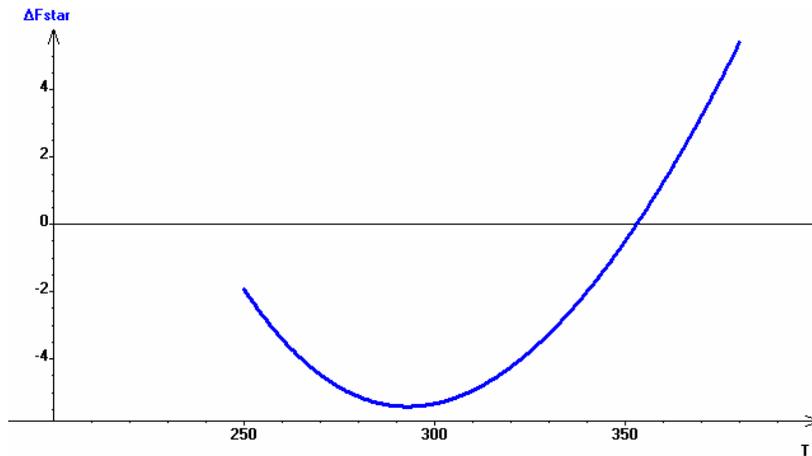
$$\Delta F^* = -226 \text{ J} < 0$$

b) La fonction F^* pour une température T quelconque de la masse d'eau vaut :

$$\Delta F^* = mc \left[(T_0 - T_1) - T_0 \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right) \right]$$

La différentielle de la fonction F^* s'écrit :

$$dF^* = dU - T_0 dS = mc \left(dT - T_0 \frac{dT}{T} \right) = mc \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) dT$$



La fonction F^* atteint son minimum pour $dF^* = 0$, soit $T = T_0$.

Cas particulier des systèmes en équilibre avec un thermostat

On se limite aux situations où le système est en équilibre avec son thermostat dans l'état initial et dans l'état final de la transformation. C'est la situation que l'on rencontre à chaque fois que l'on provoque une transformation en libérant une contrainte interne du système. On peut remarquer que ces transformations ne sont pas forcément isothermes (la température du système peut très bien ne pas être définie lors de la transformation ou du moins ne pas être uniforme partout).

Cette condition se traduit alors par $T_i = T_0$ et $T_f = T_0$. Par conséquent, la relation :

$$(U_{\Sigma,f} - T_0 S_{\Sigma,f}) - (U_{\Sigma,i} - T_0 S_{\Sigma,i}) \leq W$$

s'écrit en fonction des variables d'état du système :

$$(U_{\Sigma,f} - TS_{\Sigma,f}) - (U_{\Sigma,i} - TS_{\Sigma,i}) = \Delta F \leq W$$

Avec :

$$F = U - TS$$

F est désormais une fonction d'état du système, appelée énergie libre.

S'il y a échange de travail W avec l'extérieur, alors :

$$\Delta F \leq W \leq W \quad \text{ou} \quad -W \leq -\Delta F = F_i - F_f$$

La diminution de la fonction F est supérieure ou égale au travail récupéré par l'extérieur (fourni à celui-ci), d'où le nom d'énergie libre pour F qui représente la part d'énergie qui est récupérable sous forme de travail par l'extérieur.

L'égalité a lieu si la transformation est réversible. Ainsi, dans une transformation isotherme (par définition, réversible!), la diminution de l'énergie libre est égale au travail fourni par le système à l'extérieur.

S'il n'y a pas d'échange de travail avec l'extérieur ($W = 0$), on a alors :

$$\Delta F \leq 0$$

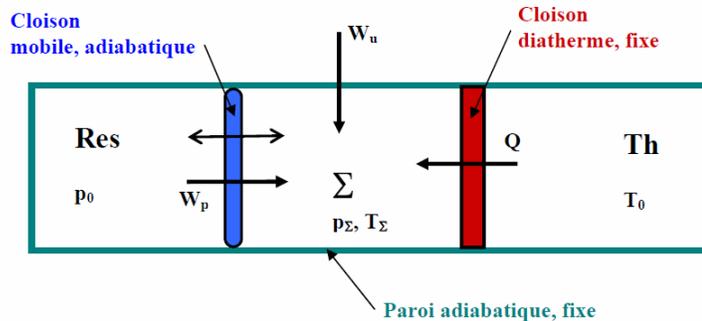
C'est le cas par exemple d'une transformation isochore si seules interviennent les forces de pression.

Ainsi, la fonction énergie libre F est un potentiel thermodynamique pour les transformations monothermes et isochores avec équilibre initial et final avec le thermostat.

13.2.3 Evolutions monothermes et monobares, potentiel thermodynamique G^* et fonction enthalpie libre G

Système soumis à des transformations monothermes et monobares

On considère un système fermé (de composition éventuellement variable : équilibre entre deux phases ou système en réaction chimique) en contact avec une seule source de chaleur (à la température T_0 constante) et subissant une transformation monobare (la pression extérieure est constante égale à P_0).



On peut noter que la température et la pression du système dans les états initial et final peut être a priori différentes de T_0 et de P_0 .

Ce système modélise de nombreuses réactions chimiques, comme par exemple le cas d'un réacteur avec paroi mobile et diatherme au contact de l'atmosphère.

Les échanges thermiques se font uniquement entre (Σ) et le thermostat Th. Les échanges de volume se font uniquement entre (Σ) et le réservoir de volume à la pression constante P_0 .

Le système (Σ) reçoit le transfert thermique Q de la part du thermostat, le travail des forces de pressions P_0 et éventuellement un travail utile noté W_u de la part de l'extérieur (force électrique, par exemple).

On souhaite alors évaluer le travail W_u utile (autre que celui des forces de pression, quand il existe) reçu par le système.

Le 1er principe appliqué à (Σ) donne :

$$\Delta U_{\Sigma} = Q - P_0(V_f - V_i) + W_u$$

Le 2nd principe appliqué à (Σ) donne, en notant S_{cr} l'entropie de création :

$$\Delta S_{\Sigma} = \frac{Q}{T_0} + S_{cr}$$

En éliminant le transfert thermique Q :

$$\Delta U_{\Sigma} + P_0(V_f - V_i) - T_0 \Delta S_{\Sigma} = W_u - T_e S_{cr}$$

Soit

$$(U_{\Sigma,f} + P_0 V_f - T_0 S_{\Sigma,f}) - (U_{\Sigma,i} + P_0 V_i - T_0 S_{\Sigma,i}) = W_u - T_e S_{cr}$$

On définit alors le potentiel G^* du système (ce n'est pas une fonction d'état car il dépend des paramètres extérieurs T_0 et P_0) :

$$G^* = U + P_0 V - T_0 S$$

Alors :

$$\Delta G^* = W_u - T_e S_{cr}$$

Comme $S_{cr} > 0$, on obtient :

$$\Delta G^* = W_u - T_e S_{cr} \leq W_u$$

Le travail utile reçu par l'extérieur, $-W_u$ vérifie alors :

$$-W_u \leq G_i^* - G_f^*$$

Le travail autre que celui des forces de pression (le travail utile) fourni par le système à l'extérieur, dans une transformation monotherme et monobare, est nécessairement inférieur ou égal à la diminution de la fonction G^* du système.

Le travail maximum est égal à la diminution de la fonction G^* lorsque la transformation est réversible.

Potentiel thermodynamique pour les transformations monothermes et monobares sans échange de travail avec l'extérieur

Dans le cas particulier où W_u est nul (le seul travail échangé est celui des forces de pression), alors :

$$\Delta G^* \leq 0$$

Dans une telle transformation, la fonction G^* ne peut que diminuer. G^* joue bien le rôle d'un potentiel thermodynamique pour les systèmes évoluant dans des transformations monothermes, monobares et sans autre travail que celui des forces de pression. G^* sera bien minimale à l'équilibre.

Rappelons que G^* est une fonction qui dépend à la fois du système (par U et S) et du thermostat (par sa température T_0 et sa pression P_0).

Exemples d'application :**Exemple 1 : cas particulier des systèmes en équilibre avec le thermostat et le réservoir**

On se limite maintenant aux situations où le système (Σ) est en équilibre avec le thermostat et le réservoir de volume dans l'état initial et dans l'état final. C'est la situation que l'on rencontre chaque fois que l'on provoque une transformation en libérant une contrainte interne au système.

On aura alors $T_i = T_f = T_0$ et $P_i = P_f = P_0$. Alors, le bilan :

$$(U_{\Sigma,f} + P_0 V_f - T_0 S_{\Sigma,f}) - (U_{\Sigma,i} + P_0 V_i - T_0 S_{\Sigma,i}) = W_u - T_e S_{cr}$$

devient :

$$(U_{\Sigma,f} + P_f V_f - T_f S_{\Sigma,f}) - (U_{\Sigma,i} + P_i V_i - T_i S_{\Sigma,i}) = W_u - T_e S_{cr}$$

Avec :

$$G = U + PV - TS = H - TS$$

G est désormais une fonction d'état du système, appelée enthalpie libre (on encore, fonction de Gibbs).

S'il y a échange de travail W_u avec l'extérieur, alors :

$$\Delta G \leq W_u \leq W_{ou} \quad -W_u \leq -\Delta G = G_i - G_f$$

La diminution de la fonction G est supérieure ou égale au travail utile récupéré par l'extérieur (fourni à celui-ci), d'où le nom d'enthalpie libre pour G qui représente la part d'enthalpie qui est récupérable sous forme de travail par l'extérieur.

L'égalité a lieu si la transformation est réversible. Ainsi, dans une transformation isotherme et isobare (par définition, réversibles!), la diminution de l'enthalpie libre est égale au travail utile fourni par le système à l'extérieur.

S'il n'y a pas d'échange de travail utile avec l'extérieur ($W_u = 0$), on a alors :

$$\Delta G \leq 0$$

Ainsi, la fonction énergie libre G est un potentiel thermodynamique pour les transformations monothermes et monobares avec équilibre initial et final avec le thermostat et la source de volume.

G correspond bien à un potentiel thermodynamique qui diminue. Le système atteint l'équilibre lorsque G est minimale.

Par exemple, pour un système de variables T , P et ξ l'avancement :

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)_{T,P} = 0$$

Cette condition définit l'avancement ξ_q à l'équilibre.

13.2.4 Exemple 2 :

Une mole d'un gaz parfait à la température T_1 se trouve dans un récipient fermé par un piston, libre de se déplacer sans frottements. L'air extérieur est à la température T_0 et pression P_0 constantes. Le piston et le récipient sont de bons conducteurs thermiques : les parois sont diathermanes. Initialement, le piston est bloqué ($P_1 > P_0$) et le gaz à la température T_1 . A l'instant $t = 0$, on débloque le piston et on attend l'équilibre.

1- A l'aide du potentiel thermodynamique de cette transformation, montrer qu'à l'état final $T_f = T_0$ et $P_f = P_0$.

La transformation est monotherme monobare donc on prend G^* .

On sait que $dU = C_v dT$, $dS = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P}$ et $PV = nRT$ donc $dV = R \frac{dT}{T} - RT \frac{dP}{P^2}$

On obtient :

$$dG^* = C_v dT + P_0 R \frac{dT}{P} - RT P_0 \frac{dP}{P^2} - C_p \frac{T_0}{T} dT + RT_0 \frac{dP}{P}$$

Soit

$$dG^* = \left(C_v + C_p(\gamma - 1) \frac{P_0}{P} - C_p \frac{T_0}{T} \right) dT + (T - T_0 \frac{P_0}{P}) dP$$

A l'équilibre $dG^* = 0$, il faut donc $T = T_0$ et $P = P_0$

2- Exprimer ΔG^* entre l'état initial et l'état d'équilibre. A.N. : $P_1 = P_0/2$ et $T_1 = 2T_0$.

$$\Delta G^* = C_v(T_0 - T_1) + P_0 \left(\frac{RT_0}{P_0} - \frac{RT_1}{P_1} \right) - C_p T_0 \ln \frac{T_0}{T_1} + RT_0 \ln \frac{P_0}{P_1}$$

$$\Delta G^* = C_p T_0 \left(1 - \frac{T_1}{T_0} + \ln \frac{T_1}{T_0} \right) + RT_0 \left(1 - \frac{P_0}{P_1} + \ln \frac{P_0}{P_1} \right) - RT_0 \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) \left(1 - \frac{P_0}{P_1} \right)$$

A.N. :

$$\Delta G^* = C_p T_0 (-1 + \ln 2) + RT_0 (-2 + \ln 2) < 0$$

La fonction G^* a diminué.

13.3 Quelques exemples et applications

13.3.1 Etude d'une pile isobare et isotherme (travail utile)

Une pile, associée à une réaction chimique spontanée mettant en jeu n moles d'électrons par mole de réactif, fonctionnant à température et pression constantes, possède les propriétés suivantes :

- * résistance interne négligeable
- * capacité thermique constante C_P
- * fém à 25 °C : $E_0 = 1,50$ V
- * Coefficient de température : $k = \frac{dE}{dT} = -0,5$ mV.K⁻¹

a) Justifier que le travail utile reçu par la pile de l'extérieur est (en convention récepteur) :

$$\delta W_u = Edq$$

b) Lors d'une consommation à 25°C d'une mole de réactif, déterminer la variation d'enthalpie libre

ΔG puis la variation d'enthalpie ΔH .

AN : $n = 2$ et $F = N_A e = 96\,500$ C

Solution :

a) En convention récepteur : ($i = dq/dt < 0$)

Le travail utile reçu par la pile est : $W_u = E idt = Edq < 0$

b) La transformation est réversible, isobare et isotherme : $\Delta G = Wu = E_0 q_{tot}$, où q_{tot} représente la charge portée par n moles d'électrons, soit $q_{tot} = -nF$.

Ainsi :

$$\Delta G = -nFE_0$$

La relation (voir plus bas) :

$$H = G - T \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_P$$

donne :

$$\Delta H = \Delta G - T \left(\frac{\partial \Delta G}{\partial T} \right)_P$$

Soit :

$$\Delta H = -nFE + TnF \frac{dE}{dT} = -nFE + nFTk$$

$$\Delta H = -F(E_0 - kT_0) = -318 \text{ kJ}$$

13.3.2 Equilibre chimique et condition d'équilibre

On considère maintenant un système fermé mais de composition variable par suite de l'existence d'une réaction chimique.

Les variables d'étude sont les variables de Gibbs : T, P, n_i . Pour une transformation élémentaire :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P, n_i} dT + \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_{T, n_i} dP + \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_j} dn_i$$

Par analogie avec le corps pur, on note :

$$\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T,P,n_j} \leq W \quad \text{ou} \quad dG = -SdT + VdP + \sum_i \mu_i dn_i$$

μ_i est le potentiel chimique du constituant A_i dans le mélange. C'est son enthalpie libre molaire partielle (dans le mélange) et :

$$G = \sum_i \mu_i$$

A pression et température fixées :

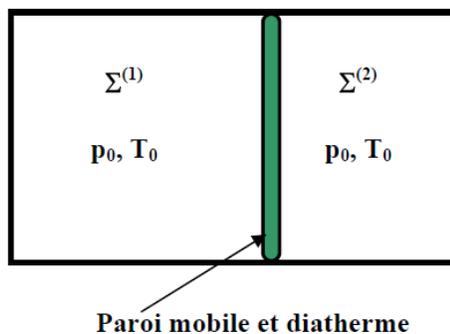
$$dG = \sum_i \mu_i dn_i$$

On considère un système (Σ) composé deux sous-systèmes (Σ_1) et (Σ_2) en équilibre de pression et de température avec l'extérieur (T_0 et P_0) et entre eux.

Le nombre de moles de l'espèce i est n_i , réparti entre $n_i^{(1)}$ et $n_i^{(2)}$ dans les deux sous-systèmes, avec :

$$n_i = n_i^{(1)} + n_i^{(2)}$$

Les deux sous-systèmes sont séparés par une paroi mobile et diatherme (qui laisse passer la chaleur). Il y a donc toujours équilibre de pression (P_0) et de température (T_0) entre les deux sous-systèmes.



On lève une contrainte en rendant la paroi perméable au passages des particules de l'espèce (i). On aura alors des variations $dn^{(1)}$ et $dn^{(2)}$ reliées entre elles $dn^{(2)} = -dn^{(1)}$.

La variation élémentaire de G devient :

$$dG = dn_i^{(1)} \mu_i^{(1)} + dn_i^{(2)} \mu_i^{(2)} = dn_i^{(1)} (\mu_i^{(1)} - \mu_i^{(2)})$$

L'évolution du système s'effectue dans le sens $dG < 0$; si l'on suppose par exemple que $\mu_i^{(2)} > \mu_i^{(1)}$, il alors $dn_i^{(1)} > 0$: les particules de l'espèce (i) migrent du compartiment (2) vers le compartiment (1).

D'une manière générale, l'évolution s'effectue dans le sens des potentiels chimiques décroissants (analogie avec le courant électrique : le courant I est toujours dirigé du + vers le -, soit dans le sens des potentiels électriques décroissants).

A l'équilibre, $dG = 0$, soit $\mu_i^{(2)} = \mu_i^{(1)}$: il y a donc égalité des potentiels chimiques à l'équilibre.

13.3.3 Application au corps pur sous deux phases

Condition d'équilibre et d'évolution

On considère un corps pur sous deux phases notées (1) et (2), à l'équilibre thermique et mécanique avec un milieu extérieur imposant une température T et une pression P , et n'échangeant pas de travail autre que celui des forces de pression avec ce dernier ; le bon potentiel thermodynamique est donc l'enthalpie libre.

En indiquant M les grandeurs molaires et en notant n_1 et n_2 le nombre de moles respectif des phases (1) et (2), avec $n_1 + n_2 = n = \text{cste}$ (où n est le nombre total de moles), il vient pour l'enthalpie libre totale du système :

$$G(T, P, n_1, n_2) = G_1(P, T, n_1) + G_2(P, T, n_2) = n_1 G_{1M}(P, T) + n_2 G_{2M}(P, T)$$

$$G(T, P, n_1) = n_1 G_{1M}(P, T) + (n - n_1) G_{2M}(P, T) = n_1 (G_{1M} - G_{2M}) + n G_{2M}$$

Le système évolue de façon à ce que G diminue : si $G_{1M} \neq G_{2M}$, la relation montre que, selon le signe de $G_{1M} - G_{2M}$, le système évolue jusqu'à l'annulation de n_1 ou de n_2 , c'est-à-dire jusqu'à la disparition d'une des deux phases.

L'équilibre diphasé n'est donc possible que pour : $G_{1M}(P, T) = G_{2M}(P, T)$.

Formule de Clapeyron

Lors du changement d'état d'une mole de corps pur, la condition d'équilibre impose :
 $G_1(P, T) = G_2(P, T)$

$$H_{2M} - H_{1M} = T(S_{2M} - S_{1M})$$

La grandeur $L_{1 \rightarrow 2} = H_{2M} - H_{1M} = T(S_{2M} - S_{1M})$ est appelée enthalpie molaire de changement d'état ; elle correspond à la quantité de chaleur reçue par une mole de corps pur pour changer d'état, sous pression et température constantes ; on l'appelle aussi chaleur latente de changement d'état.

En considérant deux points infiniment proches sur la courbe de changement d'état $P(T)$, on a :

$$G_{1M}(P, T) = G_{2M}(P, T) \quad \text{et} \quad G_{1M}(P + dP, T + dT) = G_{2M}(P + dP, T + dT)$$

Donc

$$dG_{1M} = dG_{2M}$$

L'identité thermodynamique en dG fournit (avec V_1 et $V_2 =$ volumes molaires des phases (1) et (2)) :

$$-S_{1M}dT + V_{1M}dP = -S_{2M}dT + V_{2M}dP$$

D'où

$$L_{1 \rightarrow 2} = T(V_{2M} - V_{1M}) \frac{dP}{dT}$$

C'est la dérivée sur la courbe de changement d'état. La relation précédente est connue sous le nom de formule de Clapeyron.

Machines thermiques réelles



Bibliographie

- *Introduction à la thermodynamique*, Lhuillier, Rous, Dunod
- *Thermodynamique*, Faroult, Renault, Dunod
- *Thermodynamique*, Couture, Chahine, Zitoun, Dunod
- *Physique Sup PCSI*, Collection Tec et Doc

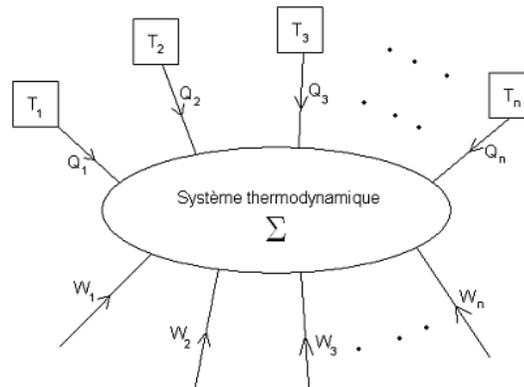
14.1 Les machines thermiques : définitions et équations utiles

14.1.1 Caractérisation expérimentale des gaz à basse pression

Définition :

Une machine thermique est un système permettant de réaliser simultanément des transferts thermiques et des conversions d'énergie. Elle est composée d'un système thermodynamique (en général un fluide) effectuant un cycle au cours duquel il échange de la chaleur et de l'énergie mécanique avec les autres éléments de la machine thermique : des sources de chaleur et des réservoirs d'énergie mécanique.

Les Q_i et W_i sont algébriques et sont positifs lorsqu'ils apportent de l'énergie au système thermodynamique. On définit de manière générale l'efficacité thermodynamique de la machine thermique comme :



$$e = \frac{\text{energie utile}}{\text{energie coteuse}}$$

On notera par la suite : $W_{cycle} = (\sum W_i)_{cycle}$ et $Q_{cycle} = (\sum Q_i)_{cycle}$

14.1.2 Application du premier principe de la thermodynamique aux machines thermiques

Le système thermodynamique Σ effectue un cycle et U est une fonction d'état, on a donc :

$$\Delta U_{cycle} = 0$$

Or le premier principe appliqué à Σ durant le cycle s'écrit :

$$\Delta U_{cycle} = W_{cycle} + Q_{cycle}$$

D'où la relation :

$$W_{cycle} + Q_{cycle} = 0$$

14.1.3 Application du deuxième principe aux machines thermiques

S est aussi une fonction d'état on a donc :

$$\Delta S_{cycle} = 0$$

Or le deuxième principe appliqué à Σ s'écrit :

$$\Delta S_{cycle} = S_{échangée} + S_{créée}$$

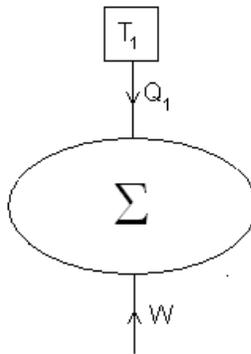
avec $S_{échangée} = \left(\sum \frac{Q_i}{T_i} \right)_{cycle}$

On obtient alors l'inégalité de Carnot-Clausius :

$$\left(\sum \frac{Q_i}{T_i} \right)_{cycle} \leq 0$$

14.2 Types de machines thermiques

14.2.1 Les machines monothermes



En appliquant les deux premiers principes à ce type de machine on obtient :

$$W + Q_1 = 0 \text{ et } \frac{Q_1}{T_1} \leq 0$$

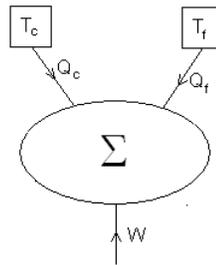
Soit

$$Q_1 \leq 0 \text{ et } W \geq 0$$

Conclusion : Une machine thermique monotherme ne peut jamais créer de travail, d'où l'énoncé du deuxième principe selon Kelvin :

Un système en contact avec une seule source de chaleur ne peut que recevoir du travail et fournir de la chaleur au cours d'un cycle.

14.2.2 Les machines thermique

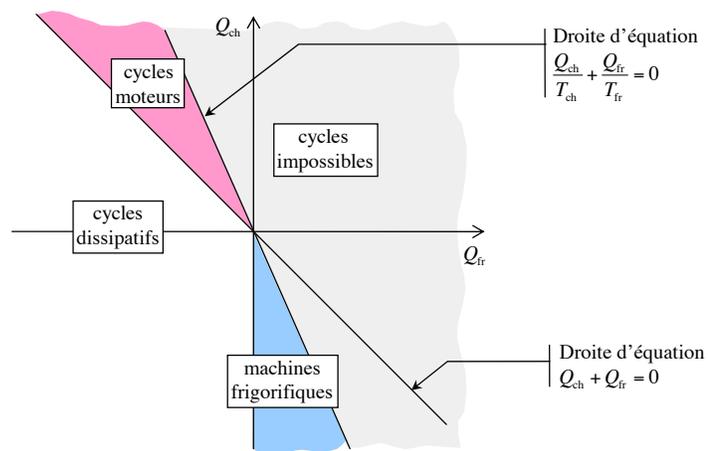


L'application des deux premiers principes nous donne :

$$W + Q_c + Q_f = 0$$

$$\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} \leq 0$$

Pour visualiser ce que ces expressions signifient on trace le diagramme suivant :



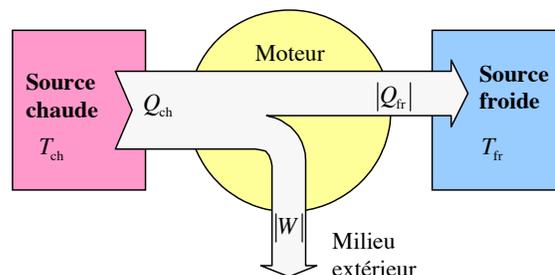
De la partie autorisée de ce diagramme on distingue quatre zones de fonctionnement :

- A : $W \leq 0$, dans ces conditions la machine est un moteur, aussi $Q_c \geq 0$ et $Q_f \leq 0$.
- B : $W \geq 0$, la machine est un récepteur, aussi $Q_c \geq 0$ et $Q_f \leq 0$, sa seule utilité est donc de transférer de la chaleur de la source chaude vers la source froide, ce qui se fait naturellement. Ce type de machine ne nous intéressera pas ici.
- C : $W \leq 0$, la machine est un récepteur, aussi $Q_c \leq 0$ et $Q_f \leq 0$, sa seule utilité est donc de fournir de la chaleur à la fois à la source chaude et à la source froide en utilisant de l'énergie mécanique, à priori pas plus utile qu'une machine monotherme. Ce type de machine ne nous intéressera pas ici.
- D : $W \geq 0$, la machine est un récepteur, aussi $Q_c \leq 0$ et $Q_f \geq 0$ elle permet donc de transférer de la chaleur de la source froide vers la sources chaude en utilisant de l'énergie mécanique. Seul les zones de fonctionnement A et D vont donc être intéressantes.

14.3 Etude des machines thermiques

14.3.1 Les moteurs dithermes

Ce type de machine se situe dans la zone de fonctionnement A du diagramme de Raveau, on a $W < 0$, $Q_c > 0$ et $Q_f < 0$. Les moteurs dithermes permettent donc de transformer de la chaleur en énergie mécanique mais nécessitent un transfert de chaleur de la source chaude vers la source froide.



Ici, d'efficacité thermodynamique est aussi appelée rendement, elle est définie par :

$$\eta = \frac{|Q|}{Q_c}$$

On a donc,

$$\eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \geq \eta_{max}$$

Avec $\eta_{max} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$ qui est appelée rendement/efficacité de Carnot.

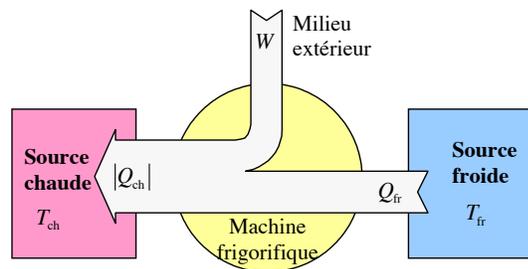
Aussi $\eta = \eta_{max}$ si et seulement si le cycle qu'effectue Σ est réversible, η_{max} ne dépend que de T_f/T_c et est toujours inférieur à 1 d'où le théorème de Carnot :

Un moteur cyclique ditherme réel a une efficacité inférieure à l'efficacité de Carnot qui correspond à celle d'un cycle réversible. L'efficacité de Carnot ne dépend pas de la nature du système mais seulement de la température des deux sources.

Remarque : Il n'est pas forcément préférable de se rapprocher au maximum du rendement de Carnot, en effet pour rendre le cycle quasi-réversible il faut que les transformations soient lentes, ce qui limite la puissance que va pouvoir fournir le moteur. De plus le travail produit lors d'un cycle réversible est faible comme pour le cycle de Carnot (2 isentropiques, 2 isothermes) il faut donc parfois utiliser des transformations qui font baisser le rendement mais qui permettent d'obtenir un travail plus important sur un cycle et donc une puissance en sortie plus importante (exemple : Le cycle Beau de Rochas).

14.3.2 Les récepteurs

Ce type de machine se situe dans la zone de fonctionnement D du diagramme de Raveau, on a $W > 0$, $Q_c < 0$ et $Q_f > 0$. Dans cette configuration la machine thermique permet de prélever de la chaleur à la source froide et de fournir de la chaleur à la source chaude en utilisant de l'énergie mécanique.



Lors du cycle, le système thermodynamique est, avant d'entrer en contact avec la source chaude, comprimé pour être plus chaud que la source chaude, la source chaude lui cède donc de la chaleur. Il est ensuite, avant d'entrer en contact avec la source froide, détendu pour être plus froid que la source froide et donc céder de la chaleur à la source froide. L'énergie mécanique apportée à la machine est utilisée pour la compression du fluide. On

utilise généralement les changements d'état du système thermodynamique pour augmenter la quantité d'énergie transférée lors du passage du fluide au contact des sources de chaleur, on comprend bien pourquoi en regardant les ordres de grandeur de la capacité thermique massique et de l'enthalpie de changement d'état des fluides, par exemple pour l'eau liquide on a : $C_p=4,18 \text{ J.g}^{-1}.\text{K}^{-1}$ (CNTP) et $L_{vap}=2256 \text{ J.g}^{-1}$ l'énergie absorbée par un gramme d'eau liquide lors de sa vaporisation correspond donc à une élévation de température de 500°K de ce même gramme d'eau (à supposé qu'il reste liquide).

Selon le but pour lequel ce type de machine est utilisé on lui donne un nom différent :

Réfrigérateur ditherme lorsque le but est de refroidir la source froide, et Pompe à chaleur lorsque le but est de chauffer la source chaude. L'efficacité thermodynamique est définie différemment dans chaque cas :

-Réfrigérateur ditherme :

L'énergie utile est ici l'énergie prélevée à la source froide, on définit donc :

qui nous donne :

$$e = \frac{Q_f}{W}$$

ce qui nous donne :

$$e = \frac{-1}{1 + \frac{Q_c}{Q_f}} \leq \frac{T_f}{T_c - T_f} = e_{max}$$

AN : $T_c = 20^\circ\text{C}$, $T_f = 4^\circ\text{C}$ donc $e_{max} = 17,3$

-Pompe à chaleur :

L'énergie utile est ici l'énergie apportée à la source chaude, on définit donc :

$$e = \frac{|Q_c|}{W}$$

qui nous donne :

$$e = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}} \leq \frac{T_c}{T_c - T_f} = e_{max}$$

AN : $T_c = 20^\circ\text{C}$, $T_f = 0^\circ\text{C}$ donc $e_{max} = 14,65$

Remarque :

On voit ici que, pour chauffer une maison par exemple, l'efficacité de la pompe à chaleur est bien meilleure que celle d'un récepteur monotherme (ex : radiateur électrique) où $e_{max}=1$, c'est la raison pour laquelle le chauffage électrique est interdit au Danemark, contrôlé en Suisse et interdit de publicité en Belgique! Installer une pompe à chaleur chez soi est en revanche coûteux et pas toujours possible (la présence d'un lac, piscine, comme source froide est recommandée), et les autres types de chauffage (gaz, fioul, charbon) sont polluants (émission de CO_2 principalement). Voilà pourquoi le chauffage électrique a été encouragé en France avec la campagne Vivrélec profitant en fait du faible coût (et de la propreté) de l'énergie issue du nucléaire, très développé en France.

14.4 Exemples de machines thermiques réelles

14.4.1 Le cycle Beau de Rochas

Principe de fonctionnement

En 1862, Alphonse Beau de Rochas décrit le principe du moteur à quatre temps à combustion interne explosive. Nikolaus Otto construira en 1876 le premier moteur fonctionnant selon ce principe.

On se propose de modéliser le fonctionnement d'un moteur à quatre temps à combustion interne à explosion par le cycle quasi statique extrêmement idéalisé d'un gaz parfait.

Premier temps : admission et carburation

La position initiale correspond au volume minimal V_{min} du corps de piston. La soupape d'échappement est maintenue fermée et la soupape d'admission ouverte. La descente du piston provoque l'aspiration de l'air dans le corps de piston (c'est l'admission). De l'essence, en quantité plus ou moins importante selon la puissance que l'on veut donner au moteur, est mélangée à l'air durant cette phase d'admission (c'est la carburation).

Deuxième temps : compression et allumage

Dès que le piston est arrivé en bout de course, le volume ayant atteint sa valeur maximale V_{max} , la soupape d'admission se ferme et commence la phase réceptrice de compression.

Un peu avant que le piston ne soit revenu à sa position initiale, la combustion de l'essence par l'oxygène de l'air est provoquée en faisant éclater un arc électrique entre les électrodes de la bougie. L'étincelle permet l'activation de la réaction chimique de combustion. Cette réaction se développe selon une réaction en chaîne explosive qui provoque de façon quasi

instantanée une forte élévation de la pression et de la température de la masse gazeuse : la phase motrice peut commencer.

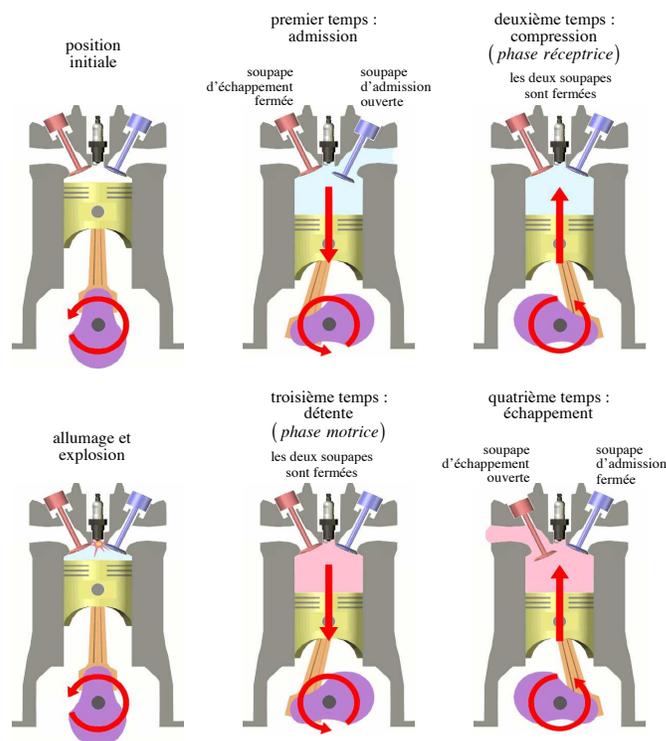
Troisième temps : détente

La détente du gaz permet la transmission d'une puissance mécanique sur l'arbre moteur. Une partie de cette puissance est utilisée pour assurer la compression du mélange tonnant dans un autre cylindre. Bien sûr, le gaz se refroidit au cours de cette détente mais en fin de course du piston, quand le volume gazeux atteint de nouveau V_{max} , leur température est encore bien supérieure à la température d'admission.

Ce potentiel thermodynamique peut être utilisé pour faire fonctionner un turbo compresseur : cela permet d'améliorer le rendement moteur.

Quatrième temps : l'échappement

Enfin, les gaz brûlés sont évacués : c'est le rôle de la soupape d'échappement qui est ouverte à cet effet. Lorsque le piston arrive de nouveau en bout de course, le cycle est terminé, un nouveau cycle commence : admission et carburation, compression et allumage, détente, échappement.



Modélisation par un cycle réversible de gaz parfait

C'est bien sûr le modèle le plus simple que l'on puisse développer. Dans la réalité, les gaz ne sont pas parfaits et surtout le cycle n'est pas réversible. Nous allons faire l'hypothèse très naïve de considérer qu'une réaction chimique explosive est réversible : il ne faut donc pas attendre une grande précision d'un tel modèle qui n'a pour seule ambition que de faire apparaître les principes essentiels qui président au fonctionnement de ce moteur.

Les caractéristiques géométriques du piston définissent un rapport volumétrique $a = \frac{V_{max}}{V_{min}}$

Données : $V_{max} = 1,2$ L, $V_{min} = 0,2$ L et donc $a = 6$

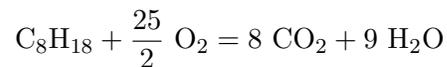
Nous allons considérer que le gaz est admis à la pression $P_1 = 1,013$ bar présente à l'extérieur. Ce gaz se réchauffe immédiatement au contact des parois intérieures du cylindre et nous prendrons pour température initiale $T_1 = 350$ K.

Premier temps : admission et carburation

Dans ces conditions, la quantité de matière gazeuse admise a pour valeur : $n = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = 0,042$ mol

Cela comprend l'air ainsi que l'essence qui se trouve, à cette température, à l'état de vapeur.

L'essence pour automobiles est un mélange d'hydrocarbures créé lors du raffinage du pétrole et composé de différents produits plus ou moins volatils. Pour rendre compte des propriétés énergétiques de ces carburants, on les modélise par un "hydrocarbure moyen" : l'octane C_8H_{18} dont la combustion stœchiométrique dans le dioxygène a pour équation bilan :



L'air est un mélange gazeux constitué principalement de 78 % de diazote, 21 % de dioxygène et près de 1 % d'argon. 12,5 moles de dioxygène correspondent par conséquent à 59,5 moles d'air, soit 60,5 moles de mélange stœchiométrique. Il est important que l'hydrocarbure soit le réactif limitant de la combustion, la quantité maximale d'essence que l'on peut apporter dans le cylindre est donc $n_{max} = 0,70$ mmol, ce qui, compte tenu de la masse molaire de l'octane, correspond à une masse $m_{max} = 80$ mg.

Deuxième temps : la compression et l'allumage

Cela se passe si vite que nous pouvons faire l'hypothèse d'une compression adiabatique : les échanges thermiques entre le gaz et les parois métalliques du piston n'ont pas le temps de se faire. Nous nous plaçons délibérément dans l'hypothèse quasi statique et, le mélange gazeux (air+essence) étant considéré comme parfait, la compression adiabatique obéit à la loi de Laplace : $PV^\gamma = Cte$.

Nous en déduisons la pression P_2 et la température T_2 en fin de compression :

$$P_2 = a^\gamma P_1 \quad \text{et} \quad T_2 = a^{\gamma-1} T_1$$

Applications numériques : avec $P_1 = 1,013 \text{ bar}$, $T_1 = 350 \text{ K}$, $a = 6$ et $\gamma = 1,4$ on trouve $P_2 = 12,4 \text{ bar}$ et $T_2 = 717 \text{ K}$

Pour réaliser cette compression adiabatique, le moteur doit recevoir de l'énergie sous forme de travail mécanique avec, conformément au premier principe de la thermodynamique :

$$W_{12} = \Delta U_{12} = nC_{Vm}(T_2 - T_1) = \frac{nRT_1}{\gamma - 1} (a^{\gamma-1} - 1) = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} (a^{\gamma-1} - 1)$$

Applications numériques : avec $P_1 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $V_1 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $a = 6$ et $\gamma = 1,4$ on trouve $W_{12} = 323 \text{ J}$

Dans un moteur réel, la combustion met un certain temps à se propager et, pour cette raison, l'allumage doit être déclenché un peu avant la fin de compression : c'est le réglage "d'avance à l'allumage".

Dans le cas optimal d'un mélange tonnant stœchiométrique, la combustion explosive se faisant pratiquement à volume constant, produit une chaleur

$$Q_{23} = n_{max} |\Delta_r U^0(T_2)| \quad \text{avec} \quad \Delta_r U^0(T_2) = \Delta_r H^0(T_2) - RT_2 \Delta_r n$$

Applications numériques : pour l'octane, la variation de la quantité de matière gazeuse a pour valeur $\Delta_r n = 3,5$ et l'enthalpie molaire de combustion à 1000 K a pour valeur $\Delta_r H^0(1000K) = -4,24 \text{ MJmol}^{-1}$ (d'après Handbook of chemistry and physics).

Cela donne : $\Delta_r U^0(T_2) \approx -4,27 \text{ MJ.mol}^{-1}$ et, avec $n_{max} = 0,70 \text{ mmol}$, $Q_{23} = +2987 \text{ J}$. Nous remarquons que, la différence relative entre $\Delta_r H$ et $\Delta_r U$ étant inférieure à 1 %, la variation de quantité de matière gazeuse n'a que très peu d'effet.

La température T_3 atteinte par les produits de combustion peut être estimée en gardant pour la même valeur $\gamma = 1,4$ pour le mélange gazeux après combustion et, dans le même esprit de simplification, en ne tenant pas compte de la variation de la quantité de matière gazeuse. Nous avons alors :

$$T_3 = T_2 + \frac{\gamma - 1}{nR} Q_{23} \quad \text{et} \quad P_3 = P_2 \frac{T_3}{T_2}$$

Applications numériques : $T_3 = 4112 \text{ K}$ et $P_3 = 71,4 \text{ bar}$.

Cette température semble beaucoup trop élevée, elle est bien supérieure à la température de fusion des alliages métalliques qui constituent le corps de piston. D'une part, le modèle exagère effectivement la température réellement atteinte par les gaz, mais surtout ces gaz ne sont en aucun cas en équilibre thermique avec les parois du piston !

Troisième temps : détente

Nous allons considérer que la détente est également isentropique et obéit à une loi de Laplace d'un gaz parfait pour lequel $\gamma = 1,4$. Nous en déduisons la pression P_4 et la température T_4 en fin de détente :

$$P_4 = \frac{P_3}{a^\gamma} \quad \text{et} \quad T_4 = \frac{T_3}{a^{\gamma-1}}$$

Au cours de cette phase motrice, le moteur fournit du travail au milieu extérieur :

$$W_{34} = \Delta U_{34} = -\frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_4) = -\left(\frac{nR}{\gamma-1}a^{\gamma-1}T_1 + Q_{23}\right)\left(1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}\right)$$

Applications numériques : $T_4 = 2008$ K, $P_4 = 5,81$ bar et $W_{34} = -1851$ J

Quatrième temps : l'échappement

Nous admettons, en idéalisant le modèle, que les gaz se refroidissent jusqu'à ce que la pression redevienne égale à la pression extérieure P_1 avant d'être évacués. L'échappement ne nécessite alors aucun travail. En réalité, ce sont des gaz bien plus chauds qui sont évacués et il faut pour cela les pousser vers l'extérieur : la phase d'échappement consomme de une énergie mécanique que nous ignorons délibérément. C'est en ce sens que le modèle est idéalisé.

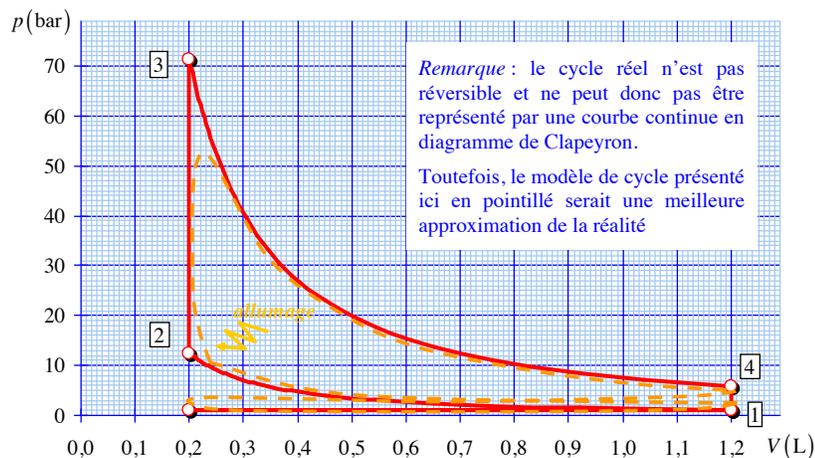
Le graphe suivant représente le cycle "Beau de Rochas" en coordonnées de Clapeyron.

Rendement énergétique

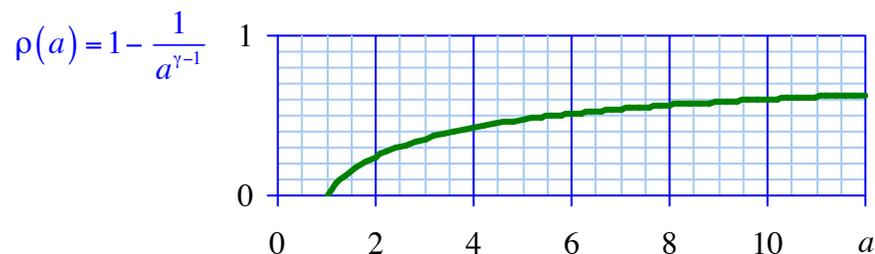
Nous définissons le rendement énergétique comme le rapport du travail mécanique algébriquement fourni au milieu extérieur dans le cycle soit $|W_{34}| - W_{12}$, que l'on souhaite le plus grand possible, sur la chaleur Q_{23} dépensée lors de la combustion interne, que l'on souhaite la plus petite possible :

$$\rho = \frac{|W_{34}| - W_{12}}{Q_{23}} = 1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}$$

Application numérique : $\rho = 0,51$. Cette valeur est très optimiste par rapport à un cycle réel de moteur à explosion.



Remarque : ce modèle de cycle, bien que très simpliste, fait apparaître que le rendement énergétique d'un tel moteur dépend essentiellement du rapport volumétrique : plus le rapport a est élevé, meilleur est le rendement. Il en est de même pour un moteur réel.



14.4.2 Le cycle Diesel

Principe de fonctionnement d'un moteur suralimenté par turbocompresseur

En 1892, l'ingénieur allemand Rudolf Diesel dépose un brevet pour le principe d'un moteur à combustion interne par introduction progressive de fuel dans de l'air porté, par une forte compression, à une température supérieure au point d'auto inflammation du combustible. Aucun dispositif d'allumage n'est alors nécessaire et il est possible d'atteindre des taux de compression beaucoup plus importants, ce qui permet d'améliorer considérablement le rendement énergétique du moteur.

Premier temps : admission turbocompressée

La suralimentation consiste à introduire dans les chambres de combustion une plus grande quantité d'air en réalisant une aspiration doublée d'une compression. Lorsque cette compression initiale est réalisée grâce à un dispositif utilisant la force motrice des gaz d'échappement, on parle de moteur diesel suralimenté turbocompressé.

Deuxième temps : compression

Après cette admission, le cycle se poursuit par une compression très rapide et donc adiabatique dans un rapport volumétrique $a = V_1/V_2$ qui peut être beaucoup plus important que dans le cas d'un moteur à explosion. En effet, il n'y a aucun risque d'autoallumage, puisque le combustible n'est introduit qu'une fois réalisée cette compression.

Troisième temps : carburation et détente motrice

Le fuel injecté dans la chambre de combustion subit une auto inflammation et l'on peut considérer que la pression est maintenue à sa valeur maximale pendant toute la phase de combustion. Le mouvement du piston se poursuit jusqu'au volume maximal par détente adiabatique des gaz brûlés.

Quatrième temps : échappement

Les gaz brûlés sont encore chauds et sous haute pression. Ceux-ci peuvent être utilisés pour faire tourner une turbine permettant la suralimentation du moteur.

Modélisation simplifiée par un cycle de gaz parfait

Premier temps : admission turbocompressée

Le piston, de volume V_1 , est alimenté en début de cycle avec de l'air, initialement à la pression extérieure P_0 et à la température T_0 , comprimé à la pression P_1 à l'aide d'un système turbocompresseur. L'air sera considéré comme un gaz parfait dont le rapport γ des capacités thermiques à pression constante et à volume constant est indépendant de la température.

Si l'on considère la compression isentropique, la température T_1 piston a donc pour expression, conformément à la loi de Laplace :

$$T_1 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

La quantité d'air introduite a pour expression $n = P_1 V_1 / RT_1$ et le travail nécessaire pour réaliser cette compression a pour valeur

$$W_{01} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_1 - T_0) = \frac{P_1 V_1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right)$$

Données : $V_1 = 4,5 \text{ L}$; $T_0 = 293 \text{ K}$; $P_0 = 1,0 \text{ bar}$; $P_1 = 1,5 \text{ bar}$; $\gamma = 1,40$ et $R=8,314 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$.

Applications numériques : $T_1 = 329 \text{ K}$; $n = 0,247 \text{ mol}$; $W_{01} = 185 \text{ J}$.

Deuxième temps : compression

La compression adiabatique sera supposée quasi statique, caractérisée par un rapport volumétrique $a = V_1/V_2$. Nous sommes donc dans les conditions d'application de la loi de Laplace. La pression et la température en fin de compression ont pour valeur :

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = P_1 a^\gamma \quad \text{et} \quad T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = T_1 a^{\gamma-1}$$

La transformation étant adiabatique, selon le premier principe de la thermodynamique, le travail de compression a pour valeur la variation de l'énergie interne de l'air :

$$W_{12} = \Delta U = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} (a^{\gamma-1} - 1)$$

Donnée : $a = 13$.

Applications numériques : $V_2 = 0,35 \text{ L}$, $P_2 = 54,4 \text{ bar}$, $T_2 = 918 \text{ K}$ et $W_{12} = 3,02 \text{ J}$.

Troisième temps : carburation et détente motrice

La combustion interne est considérée comme une transformation isobare à la pression P_2 .

Le fuel a un pouvoir calorifique Q_m par mole d'air admis dans les cylindres. La chaleur dégagée par la combustion interne a donc pour valeur $Q_{23} = nQ_m$. Cette chaleur est égale à la variation d'enthalpie du gaz et nous pouvons en déduire la température T_3 et le volume V_3 atteints en fin de combustion.

$$T_3 = T_2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{Q_m}{R} \quad \text{et} \quad V_3 = V_2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{nQ_m}{P_2}$$

Cette phase est motrice, le travail W_{23} reçu par le gaz est négatif :

$$W_{23} = -P_2(V_3 - V_2) = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} nQ_m$$

Le rapport $b = V_3/V_2$, évidemment inférieur au rapport volumétrique du moteur $a = V_1/V_2$, s'appelle "rapport volumétrique de combustion"

Donnée : $Q_m = 41,0 \text{ kJmol}^{-1}$

Applications numériques : $Q_{23} = 10,1 \text{ kJ}$; $W_{23} = -2,89 \text{ kJ}$; $T_3 = 2327 \text{ K}$; $V_3 = 0,88 \text{ L}$ et $b = 2,54$.

Ensuite, les gaz brûlés subissent une détente adiabatique que l'on supposera réversible. Le mélange {air + fuel}, ainsi que les gaz brûlés, sont considérés comme ayant des propriétés physiques identiques à l'air. En particulier, on ne tiendra pas compte de la variation de quantité de matière due à l'injection du fuel et à sa combustion. Dans ces conditions, les gaz se détendent en obéissant à la loi de Laplace et l'on peut en déduire leur pression et leur température au moment où le volume maxima est atteint :

$$P_4 = P_3 \left(\frac{V_3}{V_2} \right)^\gamma \quad \text{et} \quad T_4 = T_3 b^\gamma$$

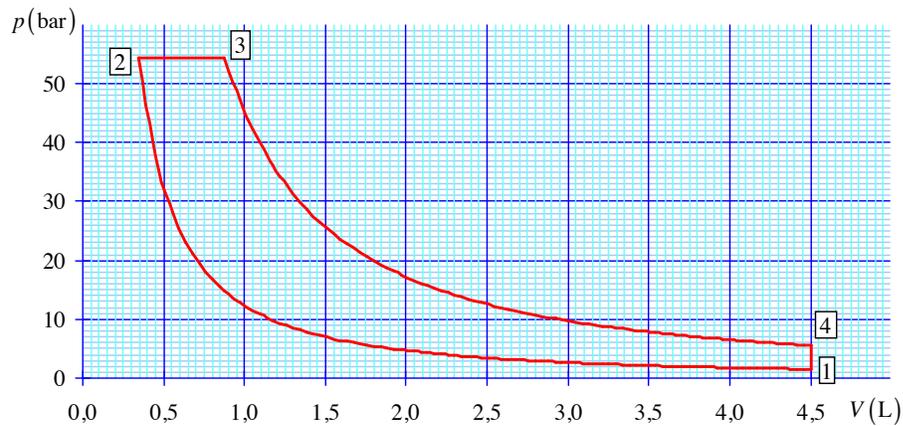
Applications numériques : $T_4 = 121 \text{ OK}$; $P_4 = 5,52 \text{ bar}$; $W_{34} = -5,73 \text{ kJ}$.

Quatrième temps : échappement

Si l'on imagine un refroidissement isochore des gaz d'échappement jusqu'à la température T_1 de l'air admis, cela reviendrait pour le système à recevoir une chaleur négative

$$Q_{14} = \Delta U = -\frac{nR}{\gamma - 1}(T_4 - T_1)$$

Le graphe suivant représente le cycle diesel idéalisé en coordonnées de Clapeyron.



Dans l'état 4, les gaz brûlés sont encore chauds. Imaginons que l'on fasse fonctionner une machine idéale de Carnot entre la température T_4 et la température extérieure T_0 . Le travail maximal que l'on pourrait tirer aurait pour expression :

$$W_{max} = \left(1 - \frac{T_4}{T_1}\right) |Q_{41}|$$

Ce travail suffit-il pour assurer la compression initiale des gaz de 1 bar à 1,5 bar ?

Applications numériques : $Q_{41} = -4,52$ kJ ; $W_{max} = 3,42$ kJ . Cette valeur est très largement supérieure aux 185 joules nécessaires pour réaliser la turbo compression.

Rendement énergétique

Nous définissons le rendement énergétique comme le rapport du travail mécanique algébriquement fourni au milieu extérieur dans le cycle soit $|W_{23}| + |W_{34}| - |W_{12}|$, que l'on souhaite le plus grand possible, sur la chaleur Q_{23} dépensée lors de la combustion interne, que l'on souhaite la plus petite possible :

$$\rho = \frac{|W_{23}| + |W_{34}| - |W_{12}|}{Q_{23}} = 1 - \frac{b^\gamma - 1}{\gamma a^{\gamma-1}(b-1)}$$

Application numérique : $\rho = 0,55$. Cette valeur est très optimiste par rapport à un cycle diesel réel.

14.4.3 Réfrigérant à ammoniac

Principe de fonctionnement

Le cycle d'une machine frigorifique à ammoniac peut être modélisé de la façon suivante.

Première phase : la compression

Une vapeur saturante de gaz ammoniac initialement à la température Celsius T_1 dans un volume V_1 est comprimée dans un cylindre, de façon adiabatique, de la pression P_1 , pression de vapeur saturante à la température T_1 , à la pression P_3 , pression de vapeur saturante à la température T_3 . L'ammoniac se trouve alors à l'état de vapeur sèche, sa température T_2 étant supérieure à la température T_3 (en diagramme de Clapeyron, l'isentrope est au-dessus de la courbe de saturation).

Valeurs numériques : $T_1 = -10$ °C ; $V_1 = 1,00$ L ; $P_1 = 2,85$ bar ; $P_3 = 5,99$ bar ; $T_3 = 10$ °C.

Deuxième phase : la condensation

À cette pression P_3 , le gaz est chassé dans un serpentin où il se condense à l'état liquide, la température étant maintenue par une circulation d'eau à la température T_3 .

Valeur numérique : l'ammoniac liquide a pour masse volumique $\rho = 662 \text{ kgm}^{-3}$.

Troisième phase : la détente

Une vanne de détente permet de faire passer l'ammoniac liquide, supposé incompressible, dans un autre serpentin maintenu à la température de la source froide T_1 , la pression finale étant à nouveau P_1 .

Quatrième phase : la vaporisation

Quand le piston du compresseur revient en arrière, l'ammoniac liquide se vaporise à la pression initiale P_1 , revenant dans son état initial de vapeur saturante à la température T_1 .

Modélisation par un cycle réversible

Première phase : la compression

En considérant l'ammoniac comme un gaz parfait dont l'exposant adiabatique γ est constant et en considérant que la compression adiabatique est réversible et donc isentropique, nous pouvons en déduire la température T_2 atteinte en fin de compression. Le volume V_2 et la température absolue T_2 sont alors donnés par la loi de Laplace :

$$V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_3} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{et} \quad T_2 = T_1 \left(\frac{P_3}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

S'agissant d'une évolution adiabatique, la chaleur Q_{12} est nulle et, selon le premier principe, le travail W_{12} reçu par le gaz dans cette compression est alors égal à la variation d'énergie interne du gaz :

$$W_{12} = \Delta U = C_V(T_2 - T_1) = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

Applications numériques : avec $\gamma = 1,31$ nous obtenons $T_2 = 313,7 \text{ K}$ et donc $T_2 = 40,6 \text{ °C}$, $V_2 = 0,567 \text{ L}$, $W_{12} = 176,7 \text{ J}$

Deuxième phase

En considérant l'ammoniac liquide comme un liquide parfait incompressible de masse volumique ρ et de masse molaire M_{NH_3} , le volume V_3 de la phase condensée a pour expression :

$$V_3 = \frac{m}{\rho} = n \frac{M_{NH_3}}{\rho} = \frac{P_1 V_1}{RT_1} \frac{M_{NH_3}}{\rho}$$

Notons que cette phase se déroule en deux temps. Tout d'abord le gaz ammoniac subit un refroidissement isobare de la température T_2 jusqu'à la température T_1 . Ensuite se produit le changement d'état. Les échanges thermiques se font au contact de la source chaude et ne nous intéressent donc pas. Dans cette condensation isobare, l'ammoniac reçoit le travail

$$W_{23} = -P_3(V_3 - V_2)$$

Applications numériques : avec $R=8,314 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$ et $M_{NH_3} = 17 \text{ gmol}^{-1}$, $V_3 = 3,11 \cdot 10^{-3} \text{ L}$; $W_{23} = 337,9 \text{ J}$.

Troisième phase : la détente

La baisse de pression produit un refroidissement de la phase liquide. Cette transformation est isochore : le volume occupé par l'ammoniac liquide est invariant et il ne se produit aucun échange d'énergie sous forme de travail : $W_{34} = 0$.

Dans ce refroidissement, l'ammoniac fournit de l'énergie sous forme de chaleur au milieu extérieur : cet échange thermique ne nous intéresse donc pas.

Quatrième phase : la vaporisation

Connaissant la chaleur molaire latente de vaporisation de l'ammoniac $\Delta_{vap}H$, nous en déduisons l'énergie reçue sous forme de chaleur lors de la vaporisation :

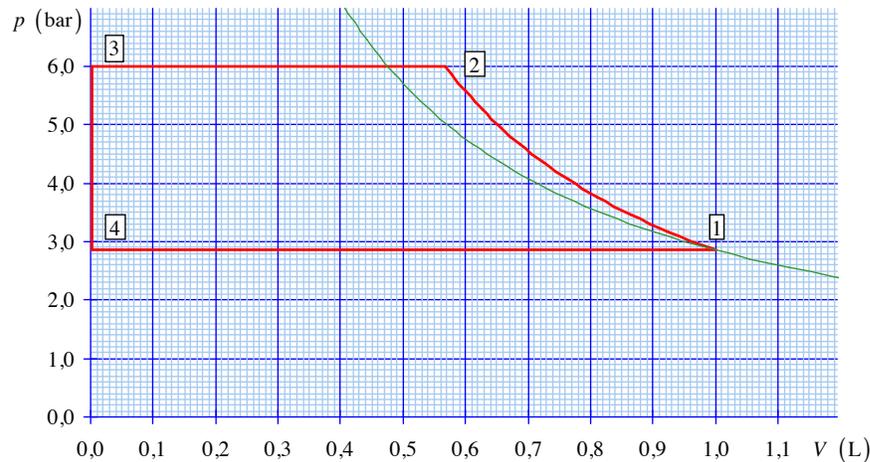
$$Q_{41} = n\Delta_{vap}H = \frac{P_1 V_1}{RT_1} \Delta_{vap}H$$

Cette phase d'expansion est une phase motrice :

$$W_{41} = -P_1(V_1 - V_3) < 0$$

Applications numériques : avec $\Delta_{vap}H = 22,7 \text{ kJ.mol}^{-1}$, $Q_{41} = 2748 \text{ J}$; $W_{41} = 284,1 \text{ J}$.

Le graphe suivant représente le diagramme de Clapeyron du cycle subi par l'ammoniac dans une telle machine thermique.



Efficacité énergétique

La grandeur énergétique "utile" est la chaleur Q_{41} extraite de la source froide. Le coût énergétique correspondant s'exprime comme le travail $W_{12} + W_{23} - |W_{41}|$ reçu au cours du cycle. On appelle efficacité énergétique e , le rapport entre la grandeur énergétique utile (que l'on souhaite la plus grande possible) et la grandeur énergétique coûteuse (que l'on souhaite la plus petite possible) :

$$e = \frac{Q_{41}}{W_{12} + W_{23} - |W_{41}|}$$

Application numérique : $e = 11,9$

Remarque : cette efficacité est inférieure à l'efficacité théorique d'une machine de Carnot idéale qui fonctionnerait entre les deux thermostats T (source froide) et T (source chaude) :

$$e_{\text{carnot}} = \frac{T_3}{T_1 - T_3} = 13,2$$

Le cycle idéal de Carnot serait, semble-t-il, plus efficace. Toutefois, si l'on n'envisage pas de changement d'état, il s'ensuit que les inévitables dissipations d'énergie par frottements ont une importance relative trop grande : le modèle de cycle réfrigérant de gaz, sans changement d'état, est bien trop idéalisé.

Leçon de physique n° 15

Transition de phases



Bibliographie

- *Physique des transitions de phase*, Papon, Dunod
- *Introduction à la thermodynamique*, Hulin, Dunod
- *Thermodynamique*, Faroult, Renault, Dunod
- *Thermodynamique H-prépa*, Couture, Chahine, Zitoun, Dunod
- *Thermodynamique*, Collection Tec et Doc
- *Montages de physique*, Charmont, p. 13

Introduction :

Le passage d'un corps pur d'une phase à une autre est une transformation privilégiée pour l'étude des concepts et principes de la thermodynamique, aussi bien sur le plan pratique que sur le plan théorique. Ce chapitre est principalement centré sur les systèmes diphasés.

15.1 Généralités

15.1.1 Mise en évidence expérimentale

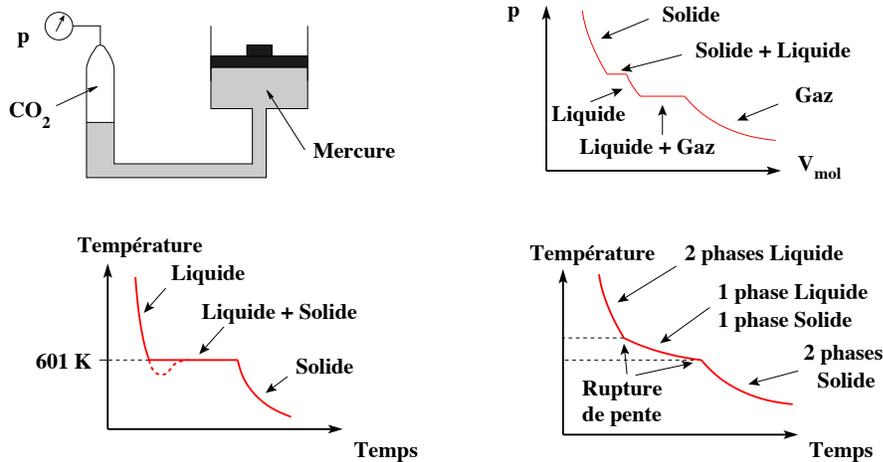
On peut facilement mettre en évidence les transitions de phase avec un dispositif tel que celui de la figure, utilisé en 1869 par Andrews sur le CO_2 . La pression exercée par un piston

est transmise au gaz par une colonne de mercure ce qui permet de contrôler indépendamment la pression p du gaz et sa température T . On mesure alors le volume.

On obtient les résultats présentés sur la figure sous forme d'isothermes. Dans chacune des trois phases (solide, liquide et gaz), la pression diminue lorsque le volume molaire augmente.

On peut également mettre en évidence une transition de phase en mesurant la température d'un bain de plomb fondu laissé libre dans un creuset. En arrêtant le chauffage qui a permis d'obtenir le plomb fondu, on observe que le métal fondu refroidit, se solidifie lors d'une coexistence entre le solide et le liquide, puis que le plomb solide se refroidit à son tour. On peut dans certains cas observer la courbe en traits pointillés de la figure correspondant à un retard à la solidification. Néanmoins l'allure générale est identique pour tous les corps purs.

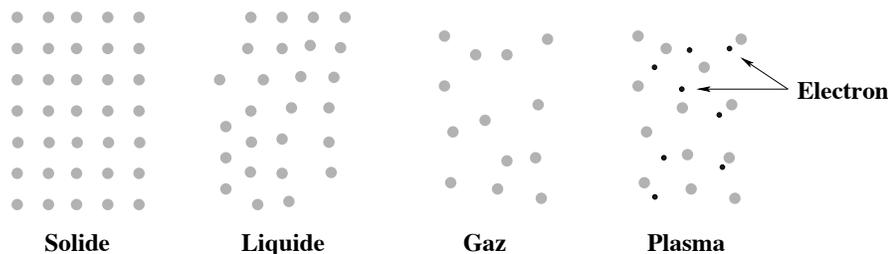
Remarque : Dans le cas d'un mélange de deux métaux (hors de propos dans ce chapitre consacré aux corps purs), la courbe obtenue est différente mais s'interprète de la même façon.



15.1.2 Les états de la matière

Il existe quatre états physiques principaux dans lesquels on peut trouver la matière :

1. Dans l'état solide, il existe des liaisons permanentes fortes limitant la mobilité des molécules qui se répartissent périodiquement aux nœuds du réseau cristallin. Le cristal ainsi obtenu peut comporter des défauts (lacunes, impuretés) qui jouent un rôle important dans les propriétés du corps (conduction électrique, changement de phase). La phase solide est



une phase condensée (donc incompressible) et ordonnée à grande distance (donc indéformable).

2. Dans l'état liquide, les liaisons intermoléculaires ne sont pas permanentes mais restent fortes. Il n'y a pas d'ordre global (d'où une perte de la dureté) mais un ordre local (qui engendre la viscosité). La phase liquide est une phase condensée (donc incompressible) et ordonnée à courte distance (donc déformable).

3. Dans l'état gazeux, il n'y a quasiment pas de liaisons intermoléculaires. La phase gazeuse est une phase dispersée (donc compressible) et désordonnée (donc facilement déformable).

4. Enfin, le plasma correspond à un gaz de température suffisamment élevée pour qu'au moins une partie de ses composants soit ionisée. La présence d'électrons libres fait apparaître des propriétés électromagnétiques spécifiques qui permettent de distinguer un plasma d'un gaz. Par la suite, on exclura le plasma de notre étude car ses propriétés relèvent plus de l'électromagnétisme que de la thermodynamique.

Il existe d'autres états physiques particuliers comme les solides amorphes (verres, caoutchouc) qui se comportent comme des liquides de viscosité très élevée, les cristaux liquides qui se comportent comme des liquides structurés, dont on ne tiendra pas compte ici.

15.1.3 Définitions

Une phase homogène ou phase est un système thermodynamique dont la valeur de tout paramètre extensif pour tout sous-système est proportionnelle au nombre de particules constituant le sous-système.

On appellera corps pur un système constitué d'une seule espèce chimique susceptible d'exister principalement sous trois phases distinctes : solide, liquide ou gazeuse. La phase gazeuse est parfois appelée vapeur lorsqu'elle est proche de l'état liquide.

Un corps pur subit une transition de phase ou changement d'état lorsque, pour certaines valeurs des paramètres intensifs fixés de l'extérieur, le corps se présente sous forme de deux

phases différentes qui coexistent en équilibre lors de la transition 2. Plus précisément, on parle de :

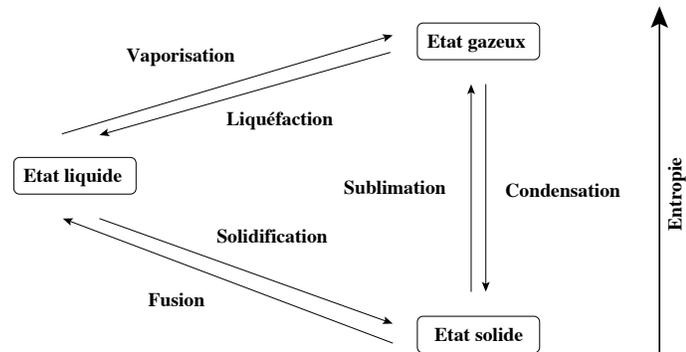
- vaporisation pour la transition liquide - vapeur. La transition inverse est appelée liquéfaction - fusion pour la transition solide - liquide. La transition inverse est appelée solidification

- sublimation pour la transition solide - vapeur. La transition inverse est appelée condensation

Dans les états gazeux et liquide, un corps pur ne forme qu'une seule phase, sauf pour l'hélium qui possède deux phases liquides différentes. Par contre, un corps pur à l'état solide se présente souvent sous plusieurs phases (par exemple, le fer α et le fer γ pour le fer et le graphite et le diamant pour le carbone), appelées variétés allotropiques.

Les notions d'état physique et de phase sont donc distinctes. De plus, la notion d'état physique est différente de celle d'état thermodynamique puisqu'elle contient une information supplémentaire relative à l'état microscopique du système : la différence entre le diamant et le graphite s'explique par l'agencement des atomes qui est différent.

15.1.4 Variance



Expérimentalement, on constate que (postulat de Duhem) :

Quelque soit le nombre de phases, de composants ou de réactions chimiques, l'état d'équilibre d'un système fermé pour lequel les masses initiales de tous les composants sont connues, est complètement déterminé par deux variables indépendantes.

La variance d'un système thermodynamique est le nombre de paramètres d'état intensifs nécessaires et suffisant pour d'écrire un état d'équilibre. On peut donc classer les corps purs de la manière suivante :

- Un corps pur sous une phase est décrit par deux paramètres intensifs (par exemple pression et température). C'est un système divariant.
- Pour un corps pur sous deux phases en équilibre thermodynamique, la pression et la température sont liées par une relation caractéristique du corps pur que l'on notera :

$$P = \Pi(T)$$

c'est à dire qu'un seul paramètre intensif est nécessaire (et suffisant) pour décrire l'équilibre thermodynamique d'un système diphasé, qui est donc un système monovariant.

Pour décrire complètement un corps pur sous deux phases, il faut introduire en plus d'un paramètre intensif (pression P ou température T) un autre paramètre, appelée paramètre de répartition, qui décrit la répartition de matière entre les deux phases qui coexistent. Il existe trois possibilités équivalentes pour ce paramètre :

1. en appelant m la masse du système, on peut choisir comme paramètre de répartition la masse m_1 de la phase(1) ou la masse $m_2 = m - m_1$ de la phase (2)
2. en appelant n le nombre de moles du système, on peut utiliser le nombre de moles n_1 de la phase(1) ou le nombre de moles $n_2 = n - n_1$ de la phase (2)
3. on peut utiliser le titre x_1 de la phase (1) ou x_2 de la phase (2), définis par :

$$x_1 = \frac{m_1}{m} = \frac{n_1}{n} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{m_2}{m} = \frac{n_2}{n}$$

Selon qu'il est calculé à partir du rapport des masses ou des nombres de moles, le titre est parfois également appelé titre massique ou titre molaire. On a évidemment $x_1 + x_2 = 1$.

Un corps pur ne se trouve sous trois phases 3 que dans des conditions de pression et de température bien déterminées dépendant de chaque corps. On utilise cette propriété pour fixer l'échelle internationale des températures : le Kelvin est défini en attribuant 273,16 K à la température du point triple de l'eau pure.

La variance v d'un système peut se calculer en utilisant la règle de Gibbs. Dans la pratique, ce nombre est généralement faible ($v \leq 2$) en thermodynamique physique. Des exemples de systèmes de variance supérieure à trois sont fréquents en chimie.

15.1.5 Les différentes diagrammes

Un diagramme de phase permet de relier de manière univoque un jeu de paramètres thermodynamiques à l'état d'équilibre. Les variables utilisées doivent pour se faire être ther-

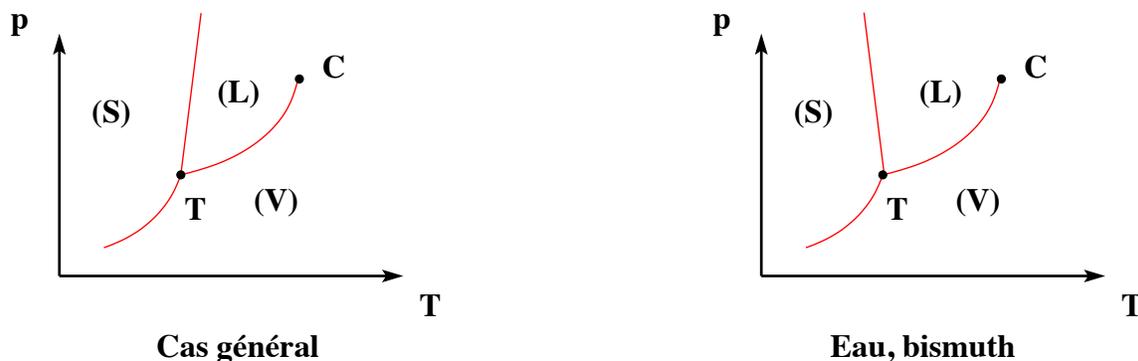
modynamiquement indépendantes. C'est par exemple le cas des variables P et T .

Le diagramme (P, T)

L'allure générale du diagramme (P, T) d'un corps pur est donnée sur la figure.

On y distingue :

- trois courbes issues d'un même point T appelé point triple qui correspondent à l'équilibre monovariant du corps pur sous deux phases et traduisent la relation $p = \Pi(T)$ entre P et T . Le fait que la pente de la courbe de fusion soit toujours très raide signifie que la température de fusion dépend assez peu de la pression
- trois domaines qui correspondent à l'équilibre divariant du corps pur sous une seule phase (solide pour (S) , liquide pour (L) et vapeur pour (V))
- alors que la courbe solide - liquide est illimitée dans le domaine des hautes pressions (sauf s'il existe plusieurs variétés allotropiques), la courbe liquide - vapeur se termine au point critique C .

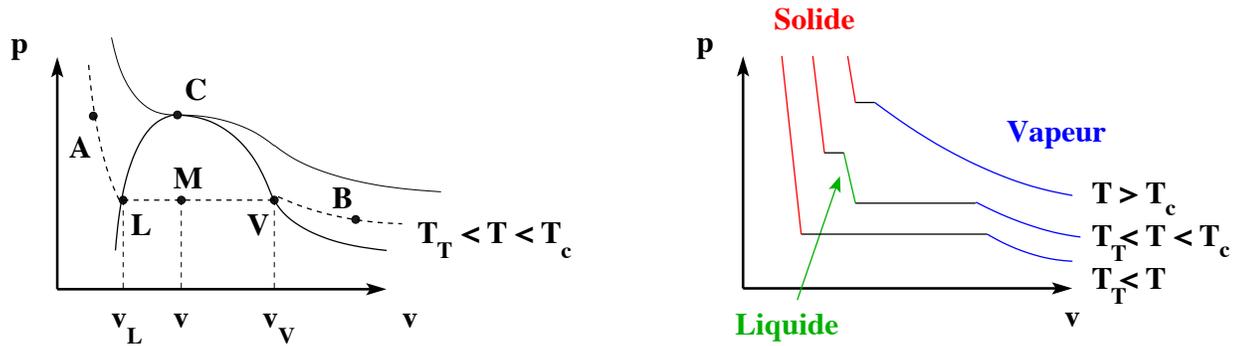


Les trois phases coexistent au point triple. De plus, les valeurs de la pression P_T et de la température T_T en ce point sont fixées (la variance d'un corps pur est nulle au point triple) et ne dépendent que du corps. La table recense les valeurs de P_T et T_T pour quelques corps purs.

Une transformation de phase, telle que celles décrites sur la figure, est isotherme et isobare. A nombre de moles ou masse fixé, un point situé dans un domaine monophasé décrit un état unique du corps pur, caractérisé par $(P, v = V/m, T)$ car l'équation d'état donne de manière non ambiguë le volume massique v si l'on connaît la pression et la température. Par contre, un point situé sur une des trois courbes d'équilibre d'équation $p = \Pi(T)$ représente en général une infinité d'états du corps pur. Ces états ont en commun leur pression et leur température, mais leur volume massique peut prendre une infinité de valeurs suivant celle du titre du mélange.

La pente de la courbe de fusion peut être positive ou négative. Dans la plupart des cas, elle est positive : la fusion provoque une dilatation. Le cas inverse se produit pour quelques corps comme l'eau et le bismuth pour lesquels une fusion provoque une contraction, donc une augmentation de la masse volumique. Par exemple pour l'eau pure, les glaçons ($\rho_s = 917 \text{ kg/m}^3$) flottent sur l'eau liquide ($\rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3$). Cela signifie qu'une compression isotherme de glace initialement à $T = 0 \text{ °C}$ provoque sa fusion.

Le diagramme (P, V)



Les isothermes dans le plan (P, V) ont l'allure présentée sur les figures. Pour une température T inférieure à la température T_T du point triple, on a successivement quand on comprime un corps pur la phase vapeur puis la phase solide. Pour une température comprise entre T_T et la température du point critique T_C , on a successivement quand on comprime les phases vapeur, liquide et solide. Enfin, pour $T > T_C$, on passe du fluide au solide en comprimant. On constate que les phases solide et liquide sont peu compressibles, au contraire de la phase gazeuse.

A une température T et une pression $P = \Pi(T)$ données, les différents états d'équilibre liquide - vapeur possibles sont situés sur le segment LV de la figure et diffèrent par la répartition du corps pur entre les deux phases liquide et vapeur. Au point L où le liquide est quasiment pur, le volume massique v_L représente le volume massique du liquide pur à la température T et à la pression $P = \Pi(T)$. De même au point V où la vapeur est quasiment pure, le volume massique v_V représente le volume massique de la vapeur pure à la température T et à la pression $P = \Pi(T)$. Ces paliers dans le diagramme d'Andrews sont parfois appelés des binodales.

On considère un état quelconque M situé sur le segment LV , en notant x_V le titre massique en vapeur de cet état. Le système (à la température T et à la pression $P = \Pi(T)$) est constitué :

- d'une masse m_V de vapeur occupant le volume $V_V = m_V v_V$

- d'une masse m_L de liquide occupant le volume $V_L = m_L v_L$

Comme les deux phases liquide et vapeur sont disjointes, le volume total du système est $V = V_V + V_L$. Le volume massique $v = V/m$ peut s'écrire en faisant apparaître le titre massique en vapeur $x_V = m_V/m$:

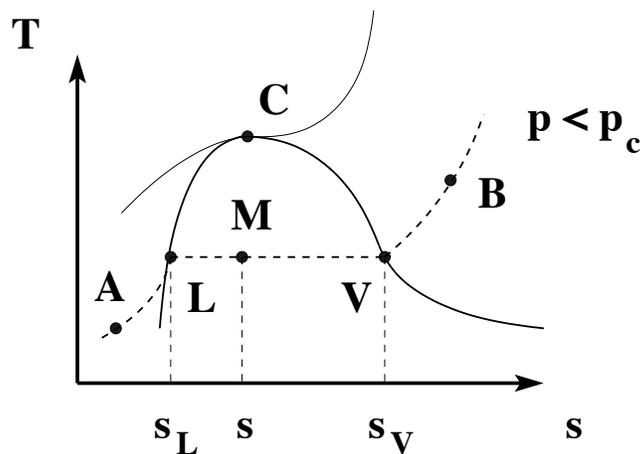
$$v = x_V v_V + (1 - x_V) v_L$$

Le volume massique est donc le barycentre des volumes massiques des deux phases pures, à la même température T et à la même pression $P = \Pi(T)$. La relation montre que le volume massique d'un corps pur sous deux phases n'est pas un paramètre intensif, alors que c'est le cas pour un système constitué d'une phase homogène. Pour un corps pur sous deux phases, le volume massique pour chaque sous-système dépend de son titre en vapeur. On peut déduire de la figure une lecture graphique du titre massique :

$$x_V = \frac{v - v_L}{v_V - v_L} = \frac{LM}{LV}$$

Ce résultat est connu sous le nom de règle des moments.

Le diagramme (T, s)



On peut tenir le même raisonnement que précédemment sur le diagramme (T, s) . On obtient alors l'entropie massique à la température T et à la pression $P = \Pi(T)$:

$$s = x_V s_V + (1 - x_V) s_L$$

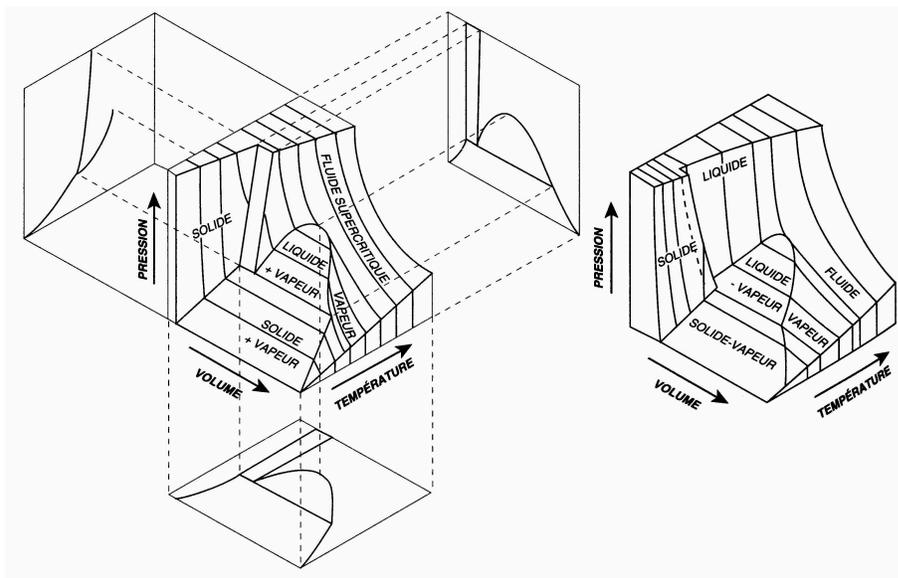
où s_V et s_L sont respectivement les entropies massiques de la vapeur pure et du liquide pur à la température T et à la pression $P = \Pi(T)$.

On peut déduire de la figure une 2^{ème} lecture graphique du titre massique :

$$x_V = \frac{s - s_L}{s_V - s_L} = \frac{LM}{LV}$$

Le diagramme (P, v, T)

Les observations précédentes peuvent être résumées dans les surfaces du diagramme (P, v, T) comme indiqué sur la figure. Ces diagrammes restent néanmoins peut commode à exploiter.



15.2 Retards aux transitions de phase

Il arrive parfois que l'on trouve un corps sous une phase où il ne devrait pas se trouver au regard des diagrammes (P, T) ou (P, v) . Ces états sont appelés états métastables car sous l'action d'une très légère perturbation, les corps retrouvent quasiment instantanément leur état stable.

15.2.1 Retard à la solidification (surfusion)

Pour passer de l'état liquide à l'état solide, il faut un germe cristallin autour duquel progresse la solidification. Un corps très pur peut parfois être observé à l'état liquide à une température inférieure à sa température de fusion, si le refroidissement a été effectué très lentement et sans vibration mécanique. C'est le phénomène de retard à la solidification ou surfusion. Pour le faire cesser, il suffit d'apporter une petite contrainte mécanique (toucher la surface du liquide par exemple) qui va alors instantanément solidifier le liquide. C'est ce qui se produit dans le cas du brouillard givrant : l'eau surfondue qui entre en contact avec le pare-brise d'une voiture ou d'un avion se solidifie.

Ce phénomène est facilement observable sur du phosphore (dont la température de fusion est 44 °C) qui peut être refroidit jusque vers 35 °C sans solidification.

15.2.2 Retard à la liquéfaction (vapeur sursaturante)

On peut dans certaines conditions observer un fluide sous forme de vapeur sous une pression partielle supérieure à sa pression de vapeur saturante à la température où l'on opère. C'est le phénomène du retard à la liquéfaction ou vapeur sursaturante. On trouve un exemple de retard à la liquéfaction sur l'isotherme BC de la figure : la vapeur existe seule à une pression supérieure à la pression d'équilibre liquide-vapeur. Cette vapeur est instable et une très faible perturbation fait apparaître des gouttes de liquide dans le gaz.

15.2.3 Retard à la vaporisation (surchauffe)

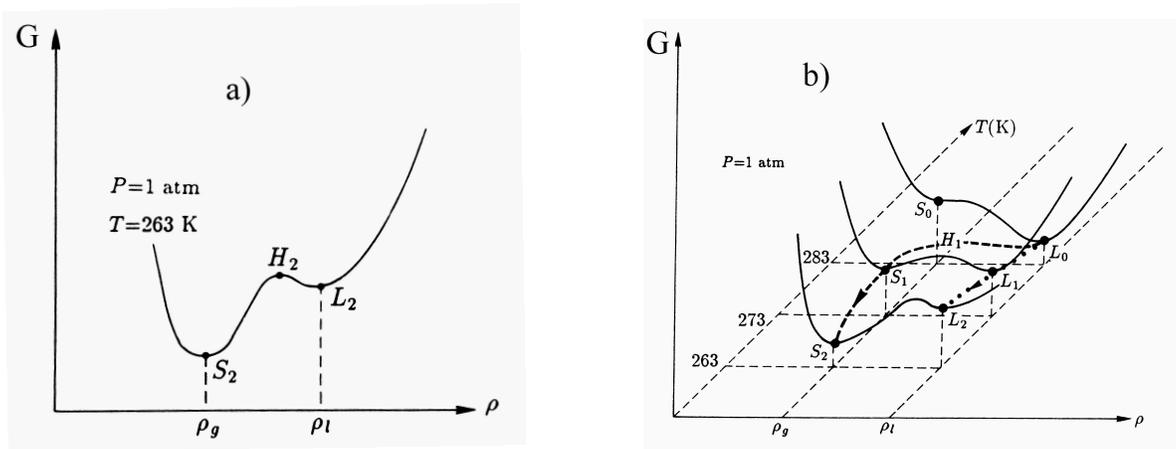
On peut dans certaines conditions observer un corps à l'état liquide à une température supérieure à la température d'ébullition à la pression où l'on opère. C'est le phénomène de retard à la vaporisation (on crée dans ce cas un liquide surchauffe). On trouve un exemple de retard à la vaporisation sur l'isotherme FE de la figure : le liquide existe seul sous une pression inférieure à la pression d'équilibre liquide-vapeur. Le liquide est instable et une très faible perturbation fait apparaître des bulles de vapeur dans le liquide.

15.2.4 Compatibilité avec le 2ème principe - Exemple de la glace

L'existence d'un corps pur metastable semble a priori incompatible avec le 2ème principe, puisque cet état n'évolue pas mais ne minimise pas les potentiels thermodynamiques pour autant. En raisonnant par exemple sur de la glace metastable à -10 °C, on sait que l'état qui minimise l'enthalpie libre G à la pression atmosphérique et $T = -10$ °C est la glace.

La figure représente la forme de la fonction G à la pression atmosphérique et à $T = 263$ K. Le minimum absolu de G est bien obtenu pour de la glace, mais il existe un minimum relatif plus élevé, correspondant à l'eau liquide métastable. Si le système se trouve en L_2 , il ne peut pas spontanément franchir la barrière H_2 . Si la barrière n'est pas très haute, on comprend bien que le moindre apport d'énergie au système suffit pour passer brutalement de L_2 à S_2 .

La figure représente l'évolution de la courbe $G(\rho)$ au voisinage de $T = 273$ K. On suppose qu'à $T = 283$ K, le système se trouve en L_0 , à l'état liquide (la courbe représentant $G(\rho)$ présente un autre minimum relatif en S_0 , mais l'agitation dans le liquide fait que cet état n'est jamais observée). En baissant la température, la courbe $G(\rho)$ se déforme et les deux minima ont la même profondeur à $T = 273$ K. Le système peut donc se présenter aussi bien sous forme liquide que solide. En abaissant encore la température, le minimum pour la phase solide devient le minimum absolu, tandis que le minimum pour la phase liquide n'est plus qu'un minimum relatif.



On voit bien que tout en minimisant son enthalpie libre à chaque étape du refroidissement, c'est à dire en respectant le 2ème principe, le système peut se retrouver en L_2 s'il se trouvait en L_1 à $T = 273$ K et si on ne lui a pas apporté d'énergie pour lui faire franchir la barrière de potentiel thermodynamique à $T < 273$ K.

15.3 Equilibre d'un corps pur sous plusieurs phases

Une transition de phase est généralement monotherme et monobare. La fonction thermodynamique la mieux adaptée à l'étude de ces transformations est alors l'enthalpie libre G définie par :

$$dG = -SdT + VdP \quad \text{ou par} \quad dg = -sdT + vdP$$

pour l'enthalpie libre massique g (en notant s l'entropie massique et v le volume massique) si le travail échangé au cours de la transformation l'est uniquement par l'intermédiaire de forces de pression.

15.3.1 Equilibre d'un corps pur sous deux phases

On considère une masse m d'un corps pur subissant une transformation isotherme et isobare qui n'échange avec le milieu extérieur que du travail associé à des forces de pression. Lorsque ce corps est en équilibre sous deux phases (1) et (2), on a :

$$G = m_1g_1(T, P) + m_2g_2(T, P) = m_1g_1(T, P) + (m - m_1)g_2(T, P)$$

soit encore

$$g(T, P, x_1) = \frac{G}{m} = x_1 [g_1(T, P) - g_2(T, P)] + g_2(T, P)$$

en fonction du titre x_1 de la phase (1). L'état du système dépend donc des trois variables indépendantes T , P et x_1 . Pour que les deux phases puissent coexister à l'équilibre, il faut que :

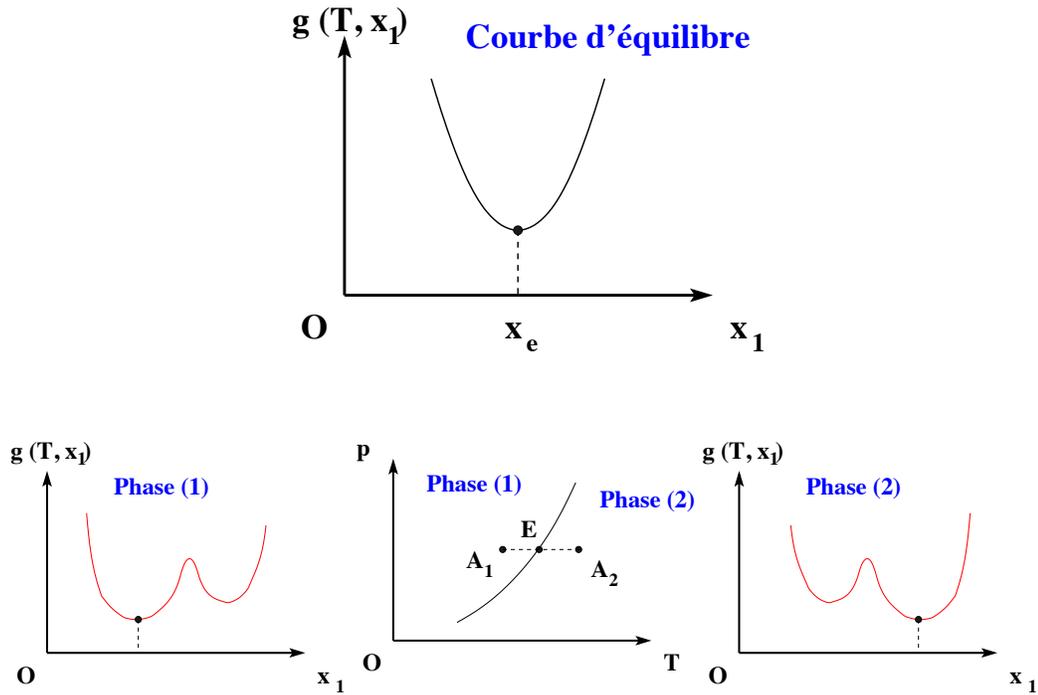
$$\left(\frac{dg}{dx_1} \right)_{T,P} = 0$$

soit :

$$g_1(T, P) = g_2(T, P)$$

Cette égalité des enthalpies libres massiques entraîne la relation $P = \Pi(T)$ décrite précédemment. On en déduit que si un corps pur est en équilibre sous deux phases, une évolution isotherme est nécessairement isobare et réciproquement. Ainsi, la fonction $g(T, p, x_1)$ présente à l'équilibre un minimum en fonction de x_1 .

Par contre, entre des points voisins A_1 et A_2 situés de part et d'autre de la courbe d'équilibre, la fonction g présente deux minima. En A_1 , celui de la phase (1) est plus prononcé. En A_2 , c'est au contraire celui de la phase (2) qui est le plus prononcé.



15.3.2 Fonctions d'état d'un corps pur diphasé

Fonctions d'état

Les deux phases d'un corps pur diphasé constituent deux sous-systèmes disjoints. A une température T et à une pression $P = \Pi(T)$, on note u_1 et h_1 les fonctions d'état massiques énergie interne et enthalpie de la phase (1) pure, et u_2 et h_2 les mêmes fonctions d'état massiques correspondant à la phase (2) pure. En suivant le même raisonnement, on peut montrer que :

$$u = x_1 u_1 + (1 - x_1) u_2 \quad \text{et} \quad h = x_1 h_1 + (1 - x_1) h_2$$

où x_1 est le titre de la phase (1).

Enthalpie de transition de phase

Pour une transition de phase $1 \rightarrow 2$, on appelle enthalpie massique de transition de phase $h_{1 \rightarrow 2}(T)$ ou enthalpie de changement d'état la différence des enthalpies massiques du corps pur entre les deux phases à la même température T et à la pression d'équilibre $P = \Pi(T)$:

$$h_{1 \rightarrow 2} = h_2(T) - h_1(T)$$

L'enthalpie massique de transition de phase dépend de la température, et de la pression car celle-ci est liée à la pression par la relation $P = \Pi(T)$.

On définit ainsi une enthalpie de fusion, une enthalpie de sublimation et une enthalpie de vaporisation qui sont toutes positives car elles correspondent à une augmentation de l'entropie du système. Ces trois enthalpies sont également fonction de la température.

On considère une transition de phase $1 \rightarrow 2$ réversible et isotherme à la température T pour une masse m de corps pur. La réversibilité implique que tout état intermédiaire est un état d'équilibre. Or, l'équilibre d'un corps pur sous deux phases est monovariant : en fixant la température, on fixe également la pression. L'évolution est donc isotherme et isobare. La variation d'enthalpie massique $h_{1 \rightarrow 2}(T)$ au cours de cette transformation isobare réversible est donc égale au transfert thermique Q/m nécessaire pour faire passer de manière réversible le corps pur de la phase (1) à la phase (2), en maintenant la température T et la pression $P = \Pi(T)$ constantes. C'est pourquoi l'enthalpie massique $h_{1 \rightarrow 2}(T)$ est également appelée chaleur latente massique de changement d'état.

Il faut néanmoins noter que le transfert thermique dépend du chemin suivi entre les états initial et final, au contraire de l'enthalpie de transition de phase. Si la transformation n'est pas isobare réversible, Q/m et $h_{1 \rightarrow 2}(T)$ sont différents.

Entropie de transition de phase

On définit de même une entropie massique de transition de phase $s_{1 \rightarrow 2}(T)$ ou entropie de changement d'état par la différence des entropies massiques du corps pur entre les deux phases à la même température T et à la pression d'équilibre $P = \Pi(T)$:

$$s_{1 \rightarrow 2}(T) = s_2(T) - s_1(T)$$

Relation entre enthalpie et entropie de transition de phase

On considère à nouveau une transition de phase $1 \rightarrow 2$ réversible et isotherme à la température T pour une masse m de corps pur. Le 2ème principe permet d'écrire :

$$s_{1 \rightarrow 2}(T) = s_2(T) - s_1(T) = \int_1^2 \frac{\delta Q/m}{T} = \frac{Q/m}{T}$$

Comme $Q/m = h_{1 \rightarrow 2}(T)$, l'enthalpie et l'entropie de transition de phase sont liées par la relation :

$$s_{1 \rightarrow 2} = \frac{h_{1 \rightarrow 2}}{T}$$

15.3.3 Equilibre d'un corps pur sous trois phases

On considère une masse m d'un corps pur subissant une transformation isotherme et isobare qui n'échange avec le milieu extérieur que du travail associé à des forces de pression. Lorsque ce corps est en équilibre sous trois phases (1), (2) et (3), on a cette fois :

$$G = m_1 g_1(T, P) + m_2 g_2(T, P) + m_3 g_3(T, P)$$

soit :

$$G = m [x_1 g_1(T, P) + x_2 g_2(T, P) + (1 - x_1 - x_2) g_3(T, P)]$$

en fonction des titres x_1 et x_2 des phases (1) et (2). On en déduit l'enthalpie libre molaire :

$$g(T, P, x_1, x_2) = \frac{G}{m} = x_1 [g_1(T, P) - g_3(T, P)] + x_2 [g_2(T, P) - g_3(T, P)] + g_3(T, P)$$

L'état du système dépend donc des quatre variables indépendantes T , P , x_1 et x_2 . Pour que les trois phases puissent coexister à l'équilibre, il faut à la fois que :

$$\left(\frac{dg}{dx_1} \right)_{T, P, x_2} = 0 \text{ soit } g_1(T, P) = g_3(T, P)$$

et

$$\left(\frac{dg}{dx_2} \right)_{T, P, x_1} = 0 \text{ soit } g_2(T, P) = g_3(T, P)$$

La condition d'équilibre s'écrit donc finalement :

$$g_1(T, P) = g_2(T, P) = g_3(T, P)$$

Ces égalités des enthalpies libres massiques entraînent deux équations à deux paramètres P et T qui prennent donc une valeur unique lorsque les trois phases coexistent : les trois courbes d'équilibre se coupent dans le plan (P, T) au point triple. La variance est nulle au point triple.

15.4 Classification de Ehrenfest des transitions de phase

D'après ce qui a été vu jusqu'à présent, il existe au moins deux types de transitions de phases : en tout point de la courbe de coexistence liquide - vapeur d'un fluide, on observe une chaleur latente de transition de phase. Ceci n'est plus vrai au point critique car on passe continuellement de la phase liquide à la phase vapeur sans chaleur latente.

Pour ordonner les transitions de phase, Ehrenfest a proposé en 1933 la classification suivante :

Une transition de phase est d'ordre n si la fonction enthalpie libre massique et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ sont continues, tandis qu'une des dérivées d'ordre n au moins est discontinue

Dans cette définition, le terme discontinu doit être pris au sens physique et non mathématique. Il signifie simplement une variation brutale de la grandeur considéré.

15.4.1 Les dérivées de la fonctions enthalpie libre massique

Les dérivées premières de l'enthalpie libre massique g sont de la forme :

$$\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_P = -s \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial g}{\partial P}\right)_T = v$$

tandis que les trois dérivées secondes s'expriment :

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial T^2}\right)_P = -\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial^2 g}{\partial P^2}\right)_T = \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 g}{\partial T \partial P}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T$$

D'après les définitions de c_p , χ_T et α représentant respectivement la capacité thermique à pression constante, le coefficient de compressibilité isotherme et le coefficient de dilatation isobare, on en déduit qu'on a finalement :

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial T^2}\right)_P = -\frac{c_P}{T}, \quad \left(\frac{\partial^2 g}{\partial P^2}\right)_T = -v\chi_T \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 g}{\partial T \partial P}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T = \alpha v$$

Les quantités c_P , χ_T et α étant accessibles par l'expérience, l'étude de leurs évolutions permet de remonter à la fonction g et ainsi de caractériser les transitions de phase.

15.4.2 Transitions de phase de 1ère espèce

Généralités

D'après la définition, une transition de phase sera dite de 1ère espèce ou d'ordre un si sa fonction enthalpie libre massique g est continue (en fonction de la température et de la pression) et que ses dérivées premières sont discontinues.

En raisonnant sur la figure, on remarque que les deux courbes $g_1(T)$ et $g_2(T)$ ne sont pas discontinues en $T = T_c$, de même que leurs dérivées premières, secondes, etc ... Par contre, en passant de l'état (1) à l'état (2) à la transition, il y a discontinuité des dérivées de g car on passe d'une dérivée de la fonction g_1 à une dérivée de la fonction g_2 . Ces deux grandeurs n'ayant a priori aucune raison d'être reliées, cela signifie donc que s et v sont discontinues. Une chaleur latente $L = Tm\Delta s$ est associée à la transition. Les dérivées d'ordre supérieur de g (c'est à dire c_P , χ_T et α) sont également discontinues.

En combinant les résultats de la figure sur une large gamme de température, on voit que l'enthalpie libre de Gibbs est une fonction décroissante de la température dont la variation est illustrée sur la figure.

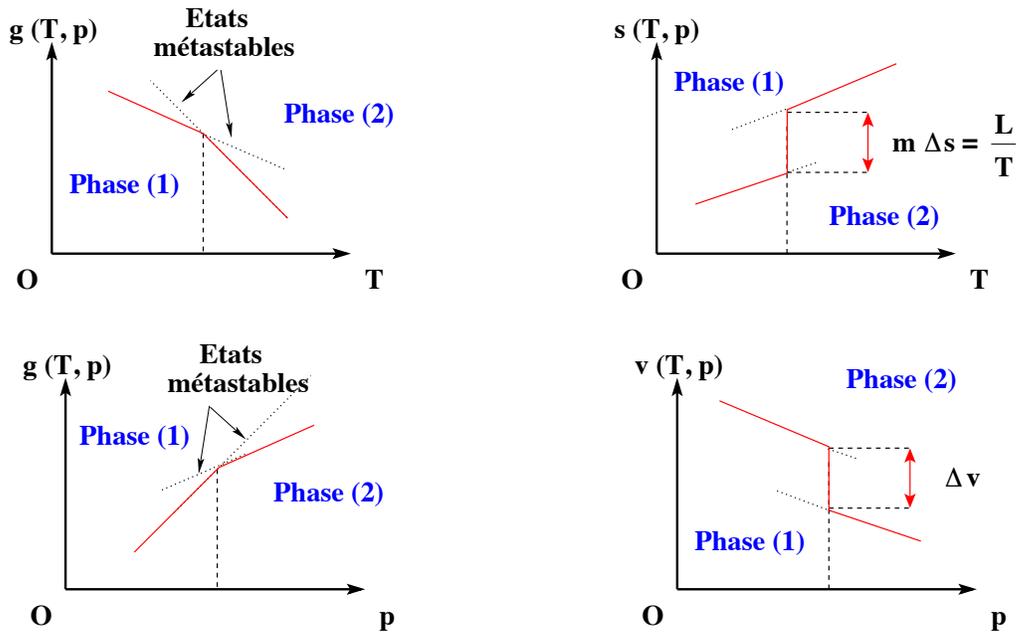
Formule de Clapeyron

Lors d'une transition de phase de 1ère espèce, la pression et la température restent constantes. Par contre, il y a variation du volume et de l'entropie. On considère donc deux états d'équilibre M et M' voisins sur une courbe d'équilibre diphasique dans le diagramme (P, T) . Comme M est un état d'équilibre, on a :

$$g_1(T, P) = g_2(T, P)$$

où g_1 et g_2 représentent respectivement les enthalpies libres massiques des phases (1) et (2). On a de même pour l'état M :

$$g_1(T + dT, P + dP) = g_2(T + dT, P + dP)$$



On déduit de ces deux relations que $dg_1 = dg_2$ le long de la courbe d'équilibre, ce qui s'écrit :

$$-s_1 dT + v_1 dP = -s_2 dT + v_2 dP$$

En combinant cette dernière relation, on obtient la relation de Clapeyron pour les changements de phase (1834) :

$$h_{1 \rightarrow 2} = T(v_2 - v_1) \frac{dP}{dT}$$

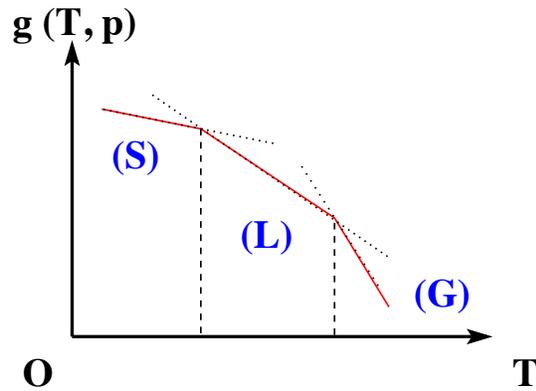
Cette relation est très générale et s'applique à toutes les transformations de phase du 1er ordre. En particulier, on obtient :

Pour la courbe de vaporisation : $h_{L \rightarrow V} = T(v_V - v_L) \frac{dP}{dT}$

Pour la courbe de fusion : $h_{S \rightarrow L} = T(v_L - v_S) \frac{dP}{dT}$

Pour la courbe de sublimation : $h_{V \rightarrow S} = T(v_V - v_S) \frac{dP}{dT}$

A chaque fois les dérivées dp/dT sont à prendre le long des courbes d'équilibre correspondantes. Si on considère par exemple l'équilibre liquide - vapeur, on obtient expérimentale-



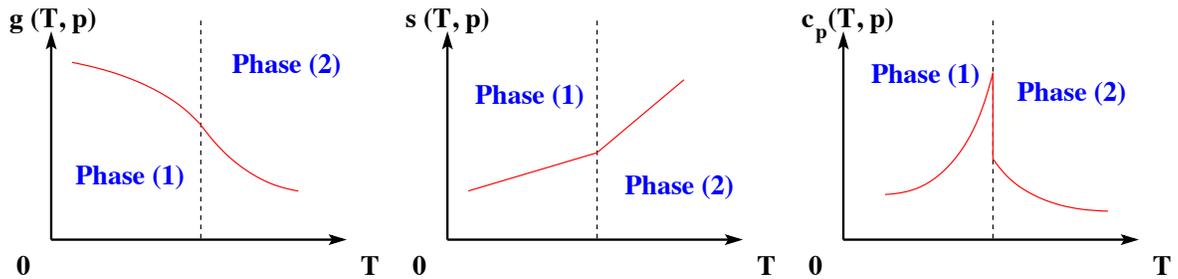
ment que $dp/dT > 0$. Comme $v_L < v_V$, on déduit des expressions ci-dessus que $h_{L \rightarrow V} > 0$ et $h_{V \rightarrow L} < 0$.

15.4.3 Transitions de phase de 2ème espèce et au delà

Généralités

D'après la définition ci-dessus, on dira qu'une transition de phase est de 2ème espèce ou d'ordre deux si l'enthalpie libre massique et ses dérivées premières sont des fonctions continues, tandis que les dérivées secondes, troisièmes, ... de g sont discontinues.

Comme pour une telle transformation l'entropie libre massique ne varie pas, les transitions de phase d'ordre supérieur ou égal à deux sont caractérisées par l'absence d'enthalpie de transition de phase.



On définit de la même façon une transition de phase de 3ème espèce ou d'ordre trois si les dérivées secondes de g sont continues, tandis que les dérivées troisièmes sont discontinues. Les transitions d'ordre supérieur à deux sont souvent dites d'ordre élevé.

Formules d'Ehrenfest

Pour une transition de phase de 2ème espèce, on ne peut plus appliquer la formule de Clapeyron. Pour établir des relations analogues, on écrit cette fois la continuité de l'entropie et du volume massiques pour deux états (1) et (2) infiniment proches sur la courbe de coexistence des deux phases. On déduit tout d'abord de :

$$s_1(T, P) = s_2(T, P) \quad \text{et} \quad s_1(T + dT, P + dP) = s_2(T + dT, P + dP)$$

que $ds_1 = ds_2$. Or :

$$ds = \frac{c_P}{dT} + \frac{k}{T} dP \quad \text{avec} \quad k = -T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = -\alpha T v$$

On en déduit :

$$c_{p1} \frac{dT}{T} - \alpha_1 v_1 dP = c_{p2} \frac{dT}{T} - \alpha_2 v_2 dP$$

d'où l'on obtient :

$$\left(\frac{dP}{dT} \right)_s = \frac{c_{p2} - c_{p1}}{T v (\alpha_2 - \alpha_1)}$$

prise à s constant car $ds_1 = ds_2$. De la même manière, on déduit de :

$$v_1(T, P) = v_2(T, P) \quad \text{et} \quad v_1(T + dT, P + dP) = v_2(T + dT, P + dP)$$

que $dv_1 = dv_2$. Or :

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T dP = \alpha v dT - \chi_T v dP$$

d'après les définitions des coefficients de dilatation isobare α et de compressibilité isotherme χ_T . On en déduit que :

$$\alpha_1 v dT - \chi_{T1} v dP = \alpha_2 v dT - \chi_{T2} v dP$$

d'où l'on obtient :

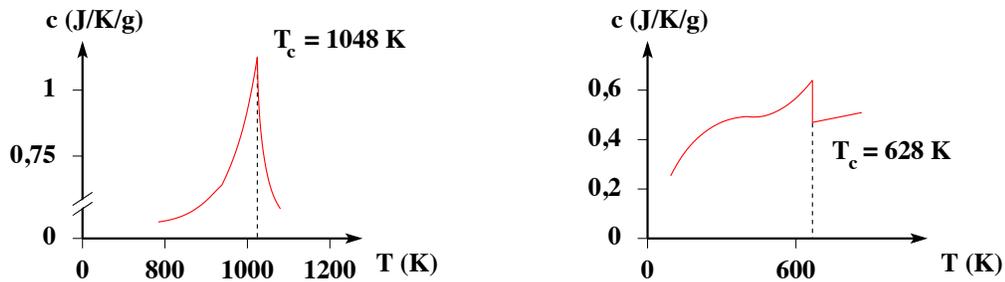
$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_v = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\chi_{T2} - \chi_{T1}}$$

également prise à s constant. Ces relations et sont connues sous le nom de relations d'Ehrensfest et forment l'équivalent de la relation de Clapeyron pour une transition de phase du 2ème ordre.

Exemples de transitions d'ordre élevé

Une substance ferromagnétique perd son aimantation spontanée dès qu'elle dépasse la température de Curie. A titre d'exemple, la capacité thermique du fer est représentée en fonction de la température sur la figure. Comme elle est continue et que seule sa dérivée est discontinue, cette transition est une transition de 3ème espèce.

En revanche, la capacité thermique du nickel est discontinue, ce qui est le signe d'une transition de 2ème espèce.

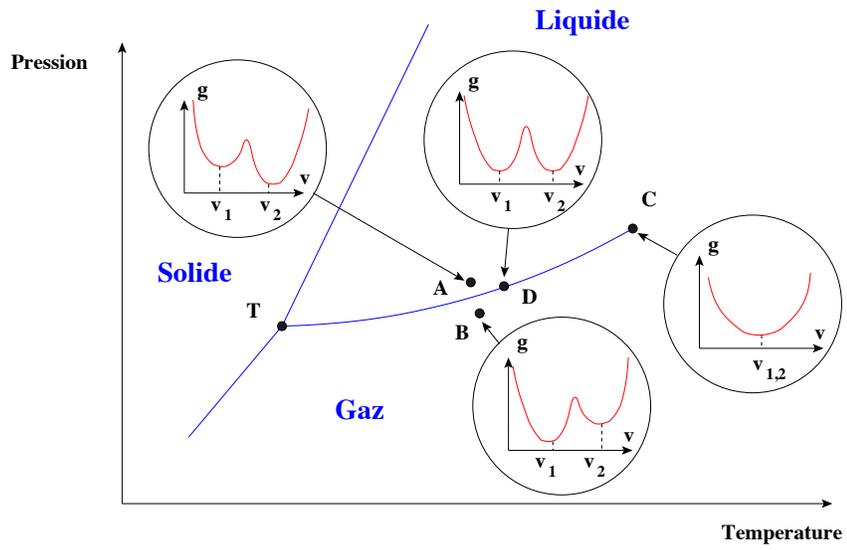


15.4.4 Exemple de la transition liquide-vapeur d'un fluide

On peut retrouver les caractéristiques des transitions de phase sur le diagramme $g = f(v)$ d'un fluide à proximité de la courbe d'équilibre liquide-vapeur.

On aura deux minima dans les phases liquide et gazeuse : l'un sera stable et l'autre métastable. Les courbes $g(v)$ se déforment lorsque P ou T varient. Sur la courbe d'équilibre, en D , ces deux minima correspondent à la même valeur du potentiel ($g(v_1) = g(v_2)$). La transition de phase est du 1er ordre car on observe une discontinuité du volume $\Delta v = v_1 - v_2$ lors de la transition.

En parcourant la courbe d'équilibre, les deux minima se rapprochent et sont confondus au point critique en C (pour lequel $v_1 = v_2$). La transition de phase est du 2ème ordre au point critique car elle s'effectue sans discontinuité de volume.



Leçon de physique n° 16

Facteur de Boltzmann



Bibliographie

- *Thermodynamique*, Diu, Hermann
- *Thermodynamique*, Bertin, Faroux, Dunod
- *Physique 1ère année*, Gréacias, Tec et Doc

Introduction :

Comment savoir quel état occupera un système à l'équilibre ? Comment les particules d'un système se répartissent-elles, à l'équilibre, dans les niveaux d'énergie ? On pourrait croire qu'un système occupe toujours l'état de plus basse énergie ou que les particules remplissent les niveaux par ordre d'énergie croissante. Cependant on va voir que l'entropie complique le problème et que l'agitation thermique donne des résultats inattendus.

16.1 Atmosphère en équilibre isotherme

16.1.1 Modèle

On fait 3 hypothèses :

- L'atmosphère est considérée comme isotherme : quelle que soit l'altitude z , la température de l'air vaut T_0 . On prendra $T_0 = 300$ K la température ambiante moyenne à la surface.

- On néglige la composition de l'air que l'on assimile l'air à un gaz parfait pur de masse molaire $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$
- On considère que l'atmosphère n'est soumise qu'aux seuls effets de la pesanteur et on néglige la variation de g avec l'altitude.

On va étudier la repartition de pression de l'atmosphère à l'équilibre dans le champ de pesanteur.

16.1.2 Equation de nivellement barométrique

On considère une colonne d'air de surface S . On fait le bilan des forces qui s'appliquent sur une petite tranche d'air située entre les altitudes z et $z + dz$. L'équilibre s'écrit :

$$P(z)S - P(z + dz)S - \rho S dz = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

On ne peut pas intégrer directement cette équation car l'air est compressible et $\rho = \frac{PM}{RT_0}$ va dépendre de z . Tout l'intérêt du modèle isotherme est de déterminer cette dépendance.

D'après l'équation des gaz parfaits, la variation de la pression en fonction de l'altitude est régie par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dP}{dz} + \frac{mg}{RT}P = 0$$

dont la solution est :

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{Mg}{RT_0}z}$$

$$P_0 = P_{atm} = 1,013 \text{ bar}$$

Cette relation s'appelle équation de nivellement barométrique.

16.1.3 Ordres de grandeur et limites du modèle isotherme

On définit $H = \frac{RT_0}{Mg}$; c'est une hauteur caractéristique du problème.

Ordre de grandeur :

On prend : $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$, $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, $T_0 = 300 \text{ K}$, $R = 8,314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$

Avec ces valeurs, on trouve $H = 8,77 \text{ km}$.

H donne un ordre de grandeur de la hauteur sur laquelle la pression décroît. Par exemple l'altitude z_1 où la pression vaut le dixième de la pression atmosphérique vaut $z_1 = H \ln 10 \approx 20 \text{ km}$. Limites du modèle isotherme :

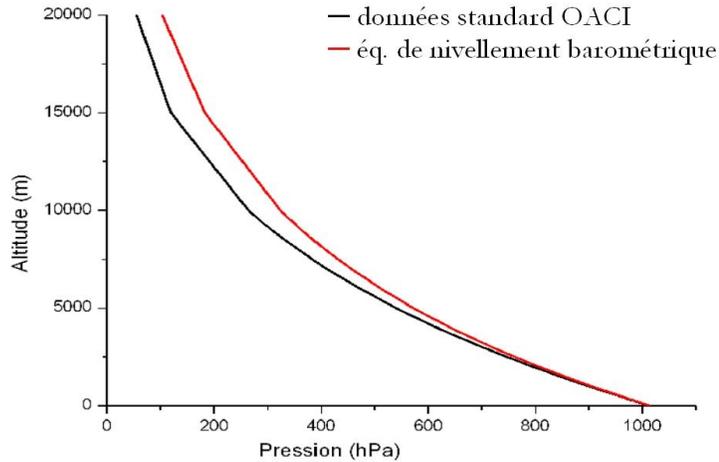
Limites du modèle isotherme :

- L'atmosphère est loin d'être isotherme : la température varie de $+20 \text{ °C}$ à la surface à -50 °C à 10 km d'altitude (c'est la zone appelée troposphère), sans compter les variations temporelles. Le modèle serait plus réaliste en considérant une décroissance linéaire de la température avec l'altitude :
 $T = T_0 - \Gamma z$ avec $\Gamma = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}^{-1}$ dans cette zone. Dans ce cas-là, on obtiendrait une loi de pression dont le développement linéaire au premier ordre redonne la loi exponentielle du modèle isotherme. Cependant, l'hypothèse isotherme donne une très bonne approximation du profil réel de pression.
- On a considéré que la composition de l'air ne variait pas avec l'altitude. En réalité H est différent pour chaque composé chimique, selon la masse molaire de celui-ci. Plus une espèce est lourde, plus sa pression partielle décroît vite. A très haute altitude il ne reste pratiquement que les composés les plus légers (H_2 et He). Ordre de grandeur : $H_{\text{H}_2} = 100 \text{ km}$. Cette altitude correspond à la thermosphère. On remarque cependant que les couleurs rouges et vertes des aurores boréales observées à cette altitude attestent de la présence d' O_2 dans cette zone.
- On a pas pris en compte les phénomènes météorologiques (dépressions, anticyclones...) dont l'influence sur la pression est pourtant non négligeable. L'équation de nivellement barométrique est une loi moyenne ; elle décrit l'équilibre de l'atmosphère sous les seuls effets de la pesanteur.

On peut comparer avec les données standards de l'organisme d'aviation civile internationale (OACI). Il fournit des valeurs normalisées pour les tests aéronautiques :

- données OACI
- pression exponentielle calculée

Comme on s'y attendait, la pression réelle moyenne de l'atmosphère est inférieure à la pression de nivellement barométrique puisque la température de l'atmosphère a été surestimée



dans ce modèle.

16.2 Le facteur de Boltzmann

16.2.1 Interprétation statistique de l'équation de nivellement barométrique

On avait trouvé

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{Mg}{RT_0}z}$$

On sait que $R = k_B N_a$ où k_B est la constante de Boltzmann et N_a le nombre d'Avogadro.

Donc

$$\frac{Mgz}{RT_0} = \frac{M}{N_a} \frac{g}{k_B T}$$

Or $\frac{N_a}{M} = m$ est la masse d'une particule d'air (c'est-à-dire la masse moyenne des molécules composant l'air).

Donc

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{E_p}{k_B T}}$$

où E_p est l'énergie potentielle de pesanteur d'une particule du gaz située à l'altitude z .

On peut ensuite exprimer la densité n^* de particules à l'altitude z : $n^* = \frac{\rho N_a}{M} = \frac{PN_a}{RT}$

n^* est proportionnelle à P donc :

$$n^*(z) = n^*(0)e^{-\frac{E_p}{k_B T}}$$

On choisit une particule au hasard, la probabilité $\Pi(z)$ qu'elle a de se trouver à l'altitude z est E_p proportionnelle à n^* donc

$$\Pi(z) = C e^{-\frac{E_p}{k_B T}}$$

Souligner que ce résultat est valable pour l'atmosphère en l'équilibre.

On appelle la quantité $e^{-\frac{E_p}{k_B T}}$ le facteur de Boltzmann. On va voir qu'il permet de caractériser l'équilibre thermodynamique, mécanique etc. dans de nombreux types de systèmes.

16.2.2 Généralisation du facteur de Boltzmann

Le facteur de Boltzmann peut être utilisé pour déterminer la répartition à l'équilibre dans de nombreux types de systèmes microscopiques ou macroscopiques. Dans tous les cas nous considérerons que le système est en équilibre thermodynamique au contact d'un thermostat, ceci afin de pouvoir définir simplement la température du système comme étant égale à celle du thermostat.

Cas de niveaux d'énergie discrets :

Considérons un système constitué de N particules pouvant occuper des états d'énergie ϵ_i . Le système est en équilibre thermique avec un thermostat à la température T . Le nombre N_i de particules occupant un état d'énergie ϵ_i est proportionnel au facteur de Boltzmann :

$$N_i = A e^{-\frac{\epsilon_i}{k_B T}}$$

N_i s'appelle le nombre d'occupation de l'état i .

A est une constante de normalisation assurant que le nombre total de particules soit N : $\sum N_i = N$

La probabilité qu'a une particule de se trouver dans l'état i est alors égale à N_i/N , proportionnelle au facteur de Boltzmann.

Attention : le facteur de Boltzmann ne donne pas directement le nombre $N(\epsilon)$ de particules d'énergie ϵ . S'il existe plusieurs niveaux dégénérés (de même énergie ϵ), il faut sommer les nombres d'occupation de tous ces niveaux :

$$N(\epsilon) = \sum_{\epsilon_i=\epsilon} A e^{-\frac{\epsilon_i}{k_B T}} = Ag(\epsilon) e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}$$

où $g(\epsilon)$ est le nombre de niveaux d'énergie ϵ et s'appelle la dégénérescence.

Cas d'un système macroscopique :

Considérons un système macroscopique en équilibre avec un thermostat à la température T . La probabilité p_i que le système soit dans un microétat i d'énergie totale E_i est proportionnelle au facteur de Boltzmann :

$$p_i = e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

E_i inclut toutes les formes d'énergie du système. Il faut tenir compte de l'énergie microscopique du système (énergie cinétique et potentielle des particules, ou bien énergie interne) mais il faut aussi prendre en compte l'énergie macroscopique du système (énergie cinétique liée à un mouvement global du système, énergie potentielle due à une force extérieure).

La constante de normalisation A se calcule en se rappelant que la somme des probabilités sur tous les microétats possibles du système doit valoir 1 : $\sum p_i = 1$

Pour remonter à la probabilité $P(E)$ qu'a le système d'avoir une énergie E , il faut sommer les probabilités d'occupation de tous les microétats d'énergie E :

$$P(E) = \sum_{E_i=E} A e^{-\frac{E_i}{k_B T}} = Ag(\epsilon) e^{-\frac{E}{k_B T}}$$

On voit à nouveau apparaître $g(E)$ la dégénérescence ; ici c'est le nombre de microétats d'énergie E . Le facteur de Boltzmann permet ainsi de déterminer l'état le plus probable pour le système, c'est-à-dire son état d'équilibre. Mais il donne aussi la probabilité d'occupation des autres états, donc on peut aussi étudier les fluctuations du système autour de son état d'équilibre.

Cas d'une répartition continue des niveaux d'énergie :

Lorsque l'énergie d'une particule est une fonction continue de sa position dans l'espace et de sa vitesse, la donnée de l'énergie de la particule ne suffit plus à définir son complètement

son état : il faut connaître sa position et sa vitesse. En physique statistique, on considère le mouvement de la particule dans un espace à 6 dimensions $\{x; y; z; v_x; v_y; v_z\}$.

Au lieu d'exprimer le nombre N_i de particules dont l'énergie vaut ϵ_i , on va chercher le nombre dN de particules situées dans un volume élémentaire

$d^6\vec{\Gamma} = dx dy dz dv_x dv_y dv_z$ de l'espace à 6 dimensions.

Cela revient à exprimer le nombre de particules qui ont une position $\vec{r}_i \in [\vec{r}; \vec{r} + d^3\vec{r}]$ et une vitesse. De la même façon que N_i dans le cas discret, dN est proportionnel au facteur de Boltzmann. Mais ici dN est aussi proportionnel à l'élément de volume $d^6\vec{\Gamma}$ considéré :

$$dN = A e^{-\frac{\epsilon(\vec{r}; \vec{v})}{k_B T}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z$$

La constante de normalisation A doit être telle que l'intégrale sur toutes les positions et vitesses accessibles redonne le nombre total de particules N : $\int dN = N$.

La probabilité pour une particule d'avoir une position $\vec{r}_i \in [\vec{r}; \vec{r} + d^3\vec{r}]$ et une vitesse $\vec{v}_i \in [\vec{v}; \vec{v} + d^3\vec{v}]$ est alors dN/N .

16.2.3 Limites d'utilisation du facteur de Boltzmann

Non interaction entre particules

La théorie statistique de Boltzmann a été construite en supposant qu'il n'y a pas d'interaction entre les particules. S'il y en avait, la probabilité qu'a une particule d'occuper un niveau d'énergie ne dépendrait plus seulement de l'énergie de ce niveau mais aussi de la répartition des autres particules dans les niveaux. Ce faisant, la probabilité d'occupation d'un niveau ne serait plus proportionnelle au facteur de Boltzmann.

Ainsi en théorie, on ne peut appliquer la distribution des probabilités de Boltzmann qu'au seul gaz parfait classique. On peut l'étendre aux gaz réels lorsqu'il est possible de négliger les interactions entre particules.

Remarques :

En présence d'un champ extérieur, il est possible d'utiliser le facteur de Boltzmann à condition que ce champ soit constant dans le temps. S'il y a des d'interactions entre particules, des astuces permettent de revenir à un cas manipulable par le facteur de Boltzmann. On peut modéliser les effets de ces interactions par l'action d'un champ extérieur fictif sur les particules : c'est ce qu'on appelle une approximation de champ moyen (cas du ferromagnétisme par exemple). On peut aussi introduire des particules fictives appelées quasiparticules

(phonons par exemple) sans interactions entre elles et dont le comportement permet de décrire le système.

Limite quantique

Les interactions de type purement quantique comme le principe d'exclusion de Pauli interdisent d'utiliser le facteur de Boltzmann puisque le nombre d'occupation d'un état ne dépend plus seulement de son niveau d'énergie. Il faut alors réaliser un calcul quantique en utilisant la statistique de Fermi-Dirac pour les fermions ou la statistique de Bose-Einstein pour les bosons. En pratique, on peut utiliser le facteur de Boltzmann lorsque le nombre d'occupation des états est faible, c'est-à-dire lorsque : $N_i \ll 1$

Cette hypothèse devient généralement vraie à haute température lorsque l'énergie d'agitation thermique est suffisamment grande pour répartir les particules sur tous les niveaux d'énergie.

Equilibre avec un thermostat

Le facteur de Boltzmann ne s'applique que pour des systèmes en équilibre thermique avec un thermostat. C'est la température de ce thermostat que l'on utilise dans la relation donnant la valeur du facteur de Boltzmann.

16.3 Applications du facteur de Boltzmann

16.3.1 Système à deux niveaux : paramagnétisme de Brillouin

Dans un matériau paramagnétique (un gaz de sodium par exemple) soumis à un champ magnétique extérieur, les moments magnétiques (composantes orbitales et spinorielles) des atomes s'alignent avec le champ. On peut étudier cette propriété simplement à l'aide du facteur de Boltzmann.

On considère un système constitué de N atomes sans interaction dont le moment magnétique orbital est nul et dont les spins peuvent valoir $\pm 1/2$. Le vecteur aimantation \vec{M} du matériau est donné par $\vec{M} = \sum \vec{\mu}_i$ où les $\vec{\mu}_i$ sont les moments magnétiques des spins. En l'absence de champ magnétique extérieur, l'orientation des moments magnétiques est aléatoire et $\vec{M} = \vec{0}$.

On applique un champ extérieur $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$. L'énergie des spins dans le champ magnétique vaut $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Lorsqu'un spin est parallèle au champ son moment magnétique vaut $\mu_z = \mu$ et son énergie vaut $\epsilon_+ = -\mu B_0$. Lorsqu'un spin est antiparallèle au champ $\mu_z = -\mu$ et son énergie vaut $\epsilon_- = +\mu B_0$.

Note : $\mu = \frac{1}{2}g\mu_B$ où $\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e}$ est le magnéton de Bohr et $g \approx 2$ est le facteur de Landé.

On note respectivement N_+ et N_- le nombre de spin dans l'état ϵ_+ et ϵ_- .

On considère que les atomes sont à l'équilibre thermique à une température T . On peut alors utiliser le facteur de Boltzmann pour exprimer N_+ et N_- :

$$N_+ = Ae^{-\frac{\epsilon_+}{k_B T}} \quad \text{et} \quad N_- = Ae^{-\frac{\epsilon_-}{k_B T}}$$

On retrouve A en remarquant que $N = N_+ + N_-$ ce qui implique :

$$N = A \left(e^{-\frac{\epsilon_+}{k_B T}} + e^{-\frac{\epsilon_-}{k_B T}} \right)$$

Note : il est intéressant de tracer l'évolution des populations des deux niveaux en fonction de la température. On peut montrer que lorsque T tend vers 0, l'énergie l'emporte sur l'entropie et tous les atomes sont dans le niveau de plus basse énergie. Au contraire quand T tend vers l'infini, l'entropie devient prédominante et les populations des deux niveaux tendent à s'égaliser.

Dans le cas présent, l'aimantation est simplement donné par $\vec{M} = (N_+ + N_-)\vec{\mu}$, on a donc :

$$\vec{M} = N\vec{\mu} \tanh \frac{\mu B_0}{k_B T}$$

Cas où $T \rightarrow 0$: dans ce cas, $M \rightarrow M_s$ où M_s est l'aimantation de saturation. On a $M_s = N\mu$: c'est-à-dire que tous les spins sont alignés avec le champ.

Cas où $\frac{\mu B_0}{k_B T} \rightarrow 0$: M devient proportionnel à B_0 . $M \sim N\mu^2 \frac{B_0}{k_B T}$ et on peut alors calculer la susceptibilité magnétique du milieu définie par : $\chi_M = \mu_0 \left(\frac{\partial M}{\partial B_0} \right)_{B_0 \rightarrow 0}$

$$\text{On trouve } \chi_M = \frac{\mu_0 N \mu^2}{k_B T}$$

C'est la loi de Curie, valable si $\frac{\mu B_0}{k_B T} \ll 1$, c'est à dire χ_M

Pour $T = 1$ K, $\chi_M \sim 2.10^{-3}$. Pour $T = 1$ K, $\chi_M = 0,83$ ce qui est proche de 1, le résultat n'est donc plus valable (ajouter des valeurs numériques de χ dans différents matériaux).

16.3.2 Distribution des vitesses des particules dans un gaz

On considère un gaz parfait au repos. On cherche à connaître quelle est la probabilité $P(v)dv$ pour une des N particule de ce gaz, prise au hasard, d'avoir une vitesse comprise entre v et $v + dv$ en norme. Le modèle du gaz parfait suppose qu'il n'y a aucune interaction entre les particules du gaz donc on peut utiliser le facteur de Boltzmann. De plus le gaz n'est soumis à aucune force extérieure donc la seule forme d'énergie que possède une particule du gaz est son énergie cinétique. La probabilité dN/N pour cette particule d'avoir une position comprise entre \vec{r} et $\vec{r} + d^3\vec{r}$ et une est donc proportionnelle au facteur de Boltzmann :

$$\frac{dN}{N} = A e^{-\frac{mv^2}{k_B T}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z$$

Cette probabilité dépend de \vec{r} et de la direction du vecteur \vec{v} . Pour retrouver la probabilité $P(v)dv$ d'avoir une vitesse comprise en norme entre v et $v + dv$, il faut intégrer sur toutes les positions r possibles et sur toutes les directions possibles pour v .

$$P(v)dv = \int_{\forall \vec{r}, v < \|\vec{v}\| < v+dv} \frac{dN}{N}$$

L'énergie donc dN/N ne dépendent pas de \vec{r} donc l'intégrale sur \vec{r} donne le volume Ω du gaz. Pour intégrer à $\|\vec{v}\|=Cte$ on passe en coordonnées sphériques et cela revient à intégrer sur une coquille sphérique comprise entre le rayon v et le rayon $v + dv$. L'intégrale vaut le facteur de Boltzmann multiplié par le volume de la coquille sphérique soit $4\pi v^2 dv$

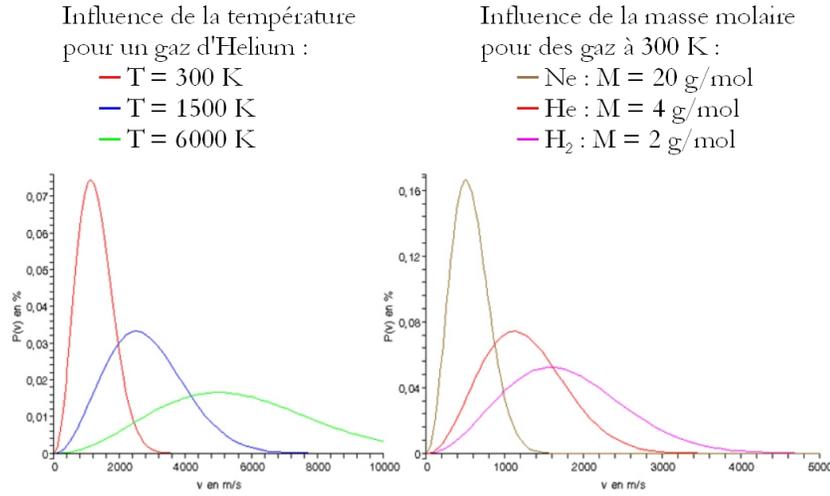
$$P(v)dv = A\Omega e^{-\frac{mv^2}{k_B T}} 4\pi v^2 dv$$

Et donc

$$P(v) = C v^2 e^{-\frac{mv^2}{k_B T}}$$

Cette formule porte le nom de loi de distribution des vitesses de Maxwell. Elle est antérieure à l'introduction par Boltzmann du facteur qui porte son nom. A l'époque, Maxwell avait démontré l'existence d'un facteur en $e^{-\alpha \frac{E_c}{T}}$ à partir d'arguments d'indépendance et d'isotropie (il n'avait pas encore le k_B). Plus tard, Boltzmann généralisa à toutes les formes d'énergies.

Noter l'influence de la masse des particules et de la température sur l'étalement de la courbe $P(v)$ et la valeur de la vitesse moyenne.



Remarques :

Reprenons l'expression de l'entropie d'un gaz parfait : $S(T, V) = nC_V \ln \frac{T}{t_0} + nR \ln \frac{V}{V_0}$. Le terme en $\ln \frac{V}{V_0}$ traduit une augmentation du désordre lorsque l'on augmente l'extension spatiale du gaz. On retrouve la même idée dans le terme en $\ln \frac{T}{t_0}$ qui correspond à une extension du domaine de vitesses accessibles par les particules du gaz (la courbe s'étale pour T plus grande) : il y a alors augmentation du désordre dans l'espace des vitesses.

On voit que la vitesse la plus probable ne correspond pas à l'état de plus basse énergie ($\vec{v} = \vec{0}$). Le niveau de plus basse énergie est le plus favorable énergétiquement mais il peut accueillir beaucoup moins de particules que les niveaux d'énergie supérieurs dont la dégénérescence est très grande. Ici, c'est la dégénérescence des états d'énergie qui domine la répartition des particules dans les niveaux.

16.3.3 Séparation isotopique des configurations

On considère un gaz parfait placé dans un cylindre de rayon R et de hauteur h en rotation autour d'un axe fixe. La rotation se fait à vitesse constante ω . On va déterminer la densité de particules en fonction de la distance à l'axe $n(r)$. On se place dans le référentiel tournant avec le cylindre. Si on néglige le poids, aucune force ne s'applique au gaz ; cependant le référentiel n'est pas galiléen et il faut prendre en compte les effets de l'inertie.

Une particule du gaz située à la distance r de l'axe est soumise à la force d'inertie d'entraînement \vec{F}_{ie} communément appelée force centrifuge. $\vec{F}_{ie} = mr\omega^2 \vec{u}_r$. On peut définir une énergie potentielle centrifuge E_{ie} telle que $\vec{F}_{ie} = -\text{grad} E_{ie}$.

Pour cela il faut prendre : $E_{ie} = -\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ Dans le référentiel tournant, l'énergie totale d'une particule du gaz vaut donc :

$$E = E_c + E_{ie} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

En utilisant le facteur de Boltzmann, on peut alors exprimer la probabilité dN/N pour une particule du gaz d'avoir une position comprise entre \vec{r} et $\vec{r} + d^3\vec{r}$ et une vitesse comprise entre \vec{v} et $\vec{v} + d^3\vec{v}$ dans le référentiel tournant :

$$\frac{dN}{N} = A e^{\frac{-mv^2}{2k_B T} + \frac{mr^2\omega^2}{2k_B T}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z$$

On cherche la probabilité $P(r)dr$ pour la particule de se trouver à une distance $r \in [r; r + dr]$ de l'axe, quelles que soient sa vitesse et sa position angulaire θ ou selon z . Il faut donc intégrer dN/N selon toutes les vitesses possibles et selon θ et z :

$$P(r)dr = \int_{r < \|\vec{r}\| < r+dr, \forall \vec{v}} \frac{dN}{N} = A \left(\int_{\forall \vec{v}} e^{\frac{-mv^2}{2k_B T}} dv_x dv_y dv_z \right) \times \left(\int_{\theta, z} e^{\frac{mr^2\omega^2}{2k_B T}} \right)$$

Si on appelle $n(R)$ la densité de particules à la périphérie du cylindre, la densité de particules à une distance r de l'axe vaudra :

$$n(r) = n(R) \frac{r}{R} e^{\frac{m\omega^2}{2k_B T} (r^2 - R^2)}$$

Application à l'enrichissement de l'uranium par centrifugation :

Le minerai d'uranium contient deux isotopes : l'uranium 238 et l'uranium 235. A l'état naturel, le ^{238}U représente 99,28 % des atomes d'uranium alors qu'il n'y a que 0,72 % de ^{235}U . C'est la fission de l'uranium 235 qui est utilisée dans les centrales nucléaires mais pour la réaliser il faut des proportions en ^{235}U de l'ordre de 3 à 5 %. Il faut donc préalablement enrichir le minerai naturel en ^{235}U .

Pour cela on transforme l'uranium en un gaz d'hexafluorure d'uranium UF_6 que l'on introduit dans une centrifugeuse en $r = R$ (la centrifugeuse est un cylindre de rayon R). En réalité ce qu'on introduit dans la centrifugeuse est un mélange de deux gaz $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ dont la masse diffère de $3 m_p$ (3 fois la masse du neutron).

A l'entrée le rapport entre les densité de ^{235}U et de ^{238}U est dans les proportions naturelles et vaut :

$$\alpha(R) = \frac{n_{235}(R)}{n_{238}(R)} = \frac{0,71}{99,28}$$

Au voisinage du centre du cylindre, on récupère le mélange gazeux. Le rapport entre les densités en sortie est donc :

$$\alpha(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{n_{235}(r)}{n_{238}(r)} = \alpha(R) e^{\frac{(m_{238} - m_{235})}{2k_B T}}$$

On définit le taux d'enrichissement par $\eta = \frac{\alpha(0)}{\alpha(R)}$, $m_{238} - m_{235} = 3m_p$ donc $\eta < 1$ et il y a bien eu enrichissement.

Pour une centrifugeuse de rayon $R = 10$ cm tournant à $\omega = 10\,000$ tr/min et avec $m_p = 9,1 \cdot 10^{-27}$ kg, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J.K⁻¹ On trouve $\eta = 1,037$ Cela correspond à un pourcentage en ²³⁵U de 0,736 %. Pour atteindre des taux de 4 % il faut mettre en série plusieurs centrifugeuses (usuellement plusieurs dizaines).

Conclusion :

Le facteur de Boltzmann permet d'évaluer la répartition à l'équilibre des particules d'un système dans les différents niveaux d'énergie, ou bien la probabilité qu'a un système d'occuper un état à partir de la seule connaissance de l'énergie du système. De ces calculs de probabilité, on peut ensuite dériver des propriétés macroscopiques du système impossibles à calculer autrement. Le spectre d'applications du facteur de Boltzmann est très vaste malgré des conditions d'utilisations assez restrictives. On pourrait citer nombre d'autres applications possibles :

- physique de sédimentation : expérience de Jean Perrin
- loi d'action des masses en chimie
- loi d'Arrhenius
- conformations des molécules
- intensité des raies spectrales
- théorème de Debye-Hückel (calcul des coefficients d'activité)
- caractéristique d'une diode
- solutions colloïdales ; équation de Boltzmann-Poisson
- physique d'osmose
- défauts dans un cristal
- jonction p-n dans les semi-conducteurs
- etc.

Rayonnement d'équilibre thermique. Corps noir



Bibliographie

- *HP prépa : Thermodynamique*, Faroult, Renault, Dunod
- *Physique statistique*, Diu, Hermann
- *Physique Spé*, Collection Tec et Doc

Introduction :

- Le rayonnement est un mode de transfert thermique. Transfert qui peut également se faire par diffusion ou par convection mais nécessitant alors un support matériel.
- Le rayonnement peut se propager dans le vide.
- La compréhension de ses caractéristiques nécessite d'étudier l'interaction matière-rayonnement, c'est pourquoi la 1ère partie de la leçon est consacrée aux corps avec lesquels le rayonnement interagit.
- Notions connues : équilibre thermique, équilibre thermodynamique local.

17.1 Rayonnement d'équilibrer thermique

17.1.1 Corps transparents, corps opaques, notion de flux

- Corps opaque = corps qui ne transmet aucune fraction du rayonnement reçu.

Corps transparent = corps qui transmet une fraction du rayonnement reçu.

- Considérons un corps opaque soumis uniquement à un rayonnement électromagnétique. Aucune autre source d'énergie n'est considérée ici.
- Objectif : étude de l'équilibre donc nécessité de faire un bilan énergétique : c'est pourquoi nous introduisons la notion de "flux"
- Flux = puissance électromagnétique transmise au corps, noté ϕ , exprimé en Watts.
- Définition des différents flux relatifs à un corps opaque :

1. ϕ_i : le flux incident est égal à la puissance incidente. Il se décompose en :

ϕ_r : la partie du flux incident qui, après contact avec le corps opaque est réfléchi ou diffusé. Macroscopiquement, ne représente pas de transfert d'énergie.

ϕ_a : flux absorbé.

$$\phi_i = \phi_r + \phi_a$$

2. ϕ_p : le flux partant est égal à la puissance quittant le corps opaque. Il se décompose en :

ϕ_r : le flux réfléchi ou diffusé.

ϕ_e : le flux émis. Il s'agit du rayonnement thermique dû à l'accélération des particules chargées à la surface du corps, accélération due à l'agitation thermique.

$$\phi_p = \phi_r + \phi_e$$

3. ϕ_R : le flux radiatif exprime le bilan entre le flux partant et le flux incident. Il est compté positivement du corps vers l'extérieur.

$$\phi_R = \phi_p - \phi_i = \phi_e - \phi_a$$

- Un corps opaque est en équilibre radiatif avec le rayonnement qui l'entoure si le bilan de puissance est nul :

$$\phi_R = 0$$

Exp : : placer un thermomètre face à une lampe quartz-iode focalisée et observer l'augmentation de température due au flux absorbé.

Remarque :

L'opacité dépend de λ et la transmission est en général différente de 1 : ex d'une lame de verre peu transparente lorsque l'épaisseur est grande.

17.1.2 Rayonnement d'équilibre thermique dans une enceinte isotherme fermée

Considérons une cavité fermée dont les parois sont opaques et à la température homogène T .

L'agitation thermique au sein des parois est à l'origine d'un rayonnement. En attendant suffisamment longtemps, peut-on définir un équilibre du rayonnement ?

Considérons le système paroi + rayonnement. L'équilibre thermique signifie que la température est homogène et constante au cours du temps, notamment sur la paroi. Alors en particulier, sur la paroi : $\phi_R = 0$ car sinon celle-ci s'échaufferait.

Ainsi, le rayonnement contenu dans la cavité est un rayonnement d'équilibre thermique. Il ne dépend pas de la nature de la paroi et nous postulons qu'il dépend uniquement de λ et de T .

Le rayonnement d'équilibre thermique ne peut être obtenu que dans une enceinte opaque isotherme fermée, vide ou non.

Remarque : en général, $\phi_r = 0$ sur les parois de la cavité.

17.1.3 Densité spectrale du rayonnement d'équilibre thermique

Le RET peut être exprimé en termes de densité spectrale u_ν . En effet, l'énergie U comprise dans le volume $d\tau$ et correspondant aux rayonnements de fréquence ν appartenant à $[\nu, \nu + d\nu]$ s'exprime :

$$\delta^2 U = u_\nu d\nu d\tau$$

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

L'expression de la densité spectrale est donnée par la loi de Planck formulée en 1900.

Une expression équivalente peut être donnée en termes de λ . l'énergie U comprise dans le volume $d\tau$ et correspondant aux rayonnements de longueur d'onde λ appartenant à $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ s'exprime :

$$\delta^2 U = u_\lambda d\lambda d\tau$$

Or $\nu = \frac{c}{\lambda}$ donc $d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}D\lambda$

Ainsi :

$$\delta U = \int_0^\infty u_\nu d\nu = - \int_0^\infty \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$u_\lambda = -\frac{c}{\lambda^2}u_\nu$$

$$u_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

Il s'agit d'une loi universelle, indépendante du matériau des parois de la cavité, dépendant uniquement de la température T . T est la température de la paroi et du gaz de photons auquel on peut appliquer la théorie cinétique des gaz. Les constantes fondamentales h et c interviennent, ainsi que k_B

Dans cette formule intervient la quantification de l'énergie des photons :

$$E = h\nu$$

La formule de Planck a une importance historique puisqu'elle est la première formulation de la quantification. Planck l'a admise sans croire à la quantification de l'énergie.

Limite à $1 \gg h\nu$:

Loi de Rayleigh-Jeans obtenue en considérant que l'énergie du $k_B T$ rayonnement électromagnétique pouvait varier continument. En déduisant la loi de R-J de celle de Planck, nous effectuons le raisonnement inverse du raisonnement historique.

Transparent 1 : Comparaison de courbes données par la loi de Planck pour des températures allant de celles des fours (3000 K) au pièges à atomes (10^{-6} K).

Loi du déplacement de Wien : $u_\lambda(\lambda, T)$ passe par un maximum pour une longueur d'onde λ_m . Posons :

$$x = \frac{hc}{k_B T}$$

En dérivant la formule de Planck par rapport à λ , on obtient l'équation suivante qui n'a pas de solution analytique :

$$e^x - 1 = \frac{x}{5} e^x$$

$$\lambda_m T \approx 2898 \mu\text{m.K}$$

A $T = 10^{-6}$ K, $\lambda_m = 290$ m. A , $T = 300$ K, $\lambda_m = 10 \mu\text{m}$. A $T = 2000$ K, $\lambda_m = 1.5 \mu\text{m}$.

les rayonnements plus énergétiques i.e. pour lesquels λ_m est plus petit correspondent bien à une température plus élevée.

98 pour cent de la puissance émise se trouve dans un intervalle appelé étendue spectrale correspondant à $[\lambda_m/2, 8\lambda_m]$

La loi de Planck peut être exprimée en termes de flux surfacique ϕ_λ :

$$\phi_\lambda = \frac{c}{4} u_\lambda(\lambda, T)$$

Unités : ϕ_λ est exprimé en W.m^{-2} .

Loi de Stefan : flux total de rayonnement d'équilibre thermique. Ce flux est relié aux flux incident et partant de la paroi de l'enceinte puisque le flux radiatif est nul.

$$\varphi_p = \varphi_i = \int_0^\infty \varphi_\lambda d\lambda = \sigma T^4$$

$$\sigma = \frac{2\pi^2 k_B^4}{15h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

Expérience : Focaliser la lumière émise par une lampe quartz-Iode sur un spectromètre. En faisant varier la puissance reçue par la lampe, on observe un déplacement du maximum du spectre.

Dans la salle de classe, quelle est la densité d'énergie rayonnée par m^3 à 300 K ? Quelle est à cette température l'énergie d'agitation thermique des molécules d'air ?

$$u = \frac{4\varphi}{T} = \frac{\sigma T^4}{c} \approx 10^{-6} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

$$E_{\text{therm}} = 5 \cdot 10^5 \text{ J.m}^{-3}$$

On constate que l'énergie volumique de rayonnement est négligeable à 300 K devant l'énergie d'agitation thermique.

Jusqu'à présent nous avons considéré le rayonnement d'équilibre thermique comme étant $\phi_r + \phi_e$. Peut-on préciser le rôle de l'émission par rapport à la réflexion ? Oui en considérant des corps dits "noirs".

17.2 Corps noir

17.2.1 Définition d'un corps noir

Un corps noir absorbe l'intégralité du rayonnement qu'il reçoit, quelque soit la direction d'incidence et quelque soit λ . Ainsi :

$$\phi_i = \phi_a$$

$$\phi_r = 0$$

Le corps noir est un absorbeur intégral et un radiateur intégral.

En particulier lors de la réalisation d'un rayonnement d'équilibre au sein d'une cavité dont les parois sont formées d'un corps noir :

$$\phi_a = \phi_i = \frac{cu}{4} = \sigma T^4 = \varphi_c = \varphi_p$$

Les lois de Planck, Wien et Stefan sont valables pour le corps noir dans une cavité opaque, fermée et isotherme. Ces lois sont valables pour le rayonnement absorbé comme pour le rayonnement émis. Le rayonnement émis par le corps noir à l'équilibre radiatif et thermique est égal au rayonnement d'équilibre thermique. Etant donné que cette propriété n'est vraie que pour le corps noir on parle souvent de "rayonnement du corps noir" à la place de "rayonnement d'équilibre thermique".

Quelle différence y a-t-il avec une cavité dont les parois ne sont pas tapissées d'un corps noir ? Le rayonnement au sein de la cavité est identique mais son "mode de production" est différent. Dans le cas du corps noir, le rayonnement est entièrement émis par les parois, alors que pour un corps opaque, le rayonnement est la somme des rayonnements émis et réfléchis.

Corps noir = corps idéal. Aucun corps n'absorbe intégralement pour toutes les longueurs d'onde.

17.2.2 Corps noir à l'équilibre thermique local

Rappel : l'équilibre thermodynamique local signifie que localement la température du corps noir est homogène et constante dans le temps.

Nous postulons que s'il y a ETL, le rayonnement émis obéira encore à la loi de Planck.

Tout corps noir qui n'est pas en cavité n'est pas à l'ERT. Par contre il peut se trouver en ETL ie Sa température T est différente de celle des autres corps opaques. Ex : Four avec 1 corps noir de température différente des parois du four. Application de la loi de Stefan.

Sa température de surface T est différente de sa température interne. Ex : Soleil : la surface du soleil est à l'équilibre thermodynamique local mais pas à l'équilibre radiatif.

A.N. : Comparer la puissance emmagasinée par des panneaux solaires à la puissance reçue par la Terre. Pour la température de la surface du soleil $T_S=5600$ K, quelles sont les puissances émises par le soleil P_S et reçue par la Terre P_T :

$$P_S = \sigma T_S^4 4\pi R_S^2$$

$$P_T = P d\Omega = \sigma T^4 4\pi R_S^2 \frac{\pi R_T^2}{d^2} = 1,3 \text{ W.m}^{-2}$$

Le rendement de cellules voltaïques est compris entre 6 et 13 pour cent. La puissance requise par un chauffe-eau, par exemple, est de 2 kW au moins.

17.2.3 Corps opaques quelconques

Pourquoi peut-on affirmer que le plâtre est un corps noir pour certaines longueurs d'onde ? Le plâtre possède une fenêtre d'absorption dans l'intervalle $[5, 80 \mu\text{m}]$. Avec la notion d'intervalle spectral précédente, il absorbe environ 98 pour cent du rayonnement d'équilibre thermique à $T=300$ K. Donc le plâtre absorbe intégralement le rayonnement d'équilibre thermique de la Terre (IR).

Remarque : si le plâtre est blanc, c'est bien parce qu'il n'est pas un corps noir pour λ visible. Un corps noir n'est pas de couleur noire lorsqu'il émet dans le visible.

17.3 Applications

17.3.1 Applications de la vie courante

Vase Dewar : Surface réfléchissante argentée pour limiter les pertes dues au rayonnement et le chauffage due à l'absorption.

Chauffage par cheminée : se fait par rayonnement et non pas par convection (cheminées traditionnelles).

Doner Kebab : cuisson à l'aide d'une résistance chauffée au rouge placée verticalement : si le chauffage se faisait par convection, la viande serait plus cuite en haut !

17.3.2 Pyrométrie à disparition de filament

Permet mesure de température d'une source assimilable à un corps noir.

Comparaison avec un filament dont l'intensité de courant est réglable et qui est étalonnée.

Lorsque filament et couleur de la source ne sont pas distinguables, on peut déduire la température de luminance de la source à partir de l'intensité traversant le filament.

17.3.3 Refroidissement des fusées

La régulation thermique des fusées est développée dans la référence "systèmes spatiaux". Elle nécessite cependant la notion d'émissivité, qui n'a pas été définie jusqu'à présent.

17.3.4 Rayonnement à 3 K

Ce rayonnement cosmique a été découvert en 1964. Il s'agit d'un argument important en faveur du big-bang et a valu le prix Nobel 2006 à deux chercheurs américains, John C. Mather et George F. Smoot pour leur découverte du spectre en corps noir et de l'anisotropie du rayonnement de fond cosmologique microonde .

L'expansion de l'univers après le big bang a eu pour conséquence son refroidissement.

Lorsque l'univers se trouvait à une température de quelques milliers de K, il était formé d'un plasma de noyaux et d'électrons opaque au rayonnement. Il y avait alors équilibre entre la matière et le rayonnement.

Lorsque l'univers atteint 3000 K, il y eut formation des atomes. La matière est alors devenue transparente au rayonnement provoquant ainsi un découplage entre matière et rayonnement.

Conclusion :

Importance considérable de la notion de rayonnement d'équilibre thermique puisque :

Pratique : nombreuses applications et historiquement : Sa compréhension a permis de poser les fondement de la Mécanique quantique et de la physique statistique quantique.

Force de l'analogie avec gaz parfait, mais nécessité pour une étude plus précise de faire appel à physique statistique quantique. Le rayonnement thermique est en effet un gaz de photons qui doit être étudié avec la statistique de Bose-Einstein.

Phénomènes de transport



Bibliographie

- *Introduction à la thermodynamique*, Hulin, Dunod
- *Thermodynamique*, Faroult, Renault, Dunod
- *Thermodynamique H-prépa*, Couture, Chahine, Zitoun, Dunod
- *Thermodynamique*, Collection Tec et Doc
- *Montages de physique*, Charmont, p. 17
- *Physique expérimentale*, Fruchart, p. 369

Introduction :

Cette leçon traite des phénomènes de transport qui résultent de légers déséquilibres dans la configuration initiale du système, tels qu'on puisse traiter l'évolution du système par une approximation linéaire. On détaillera d'abord la diffusion moléculaire et la diffusion thermique. Les similarités de comportement avec la diffusion des charges électriques et la diffusion de la quantité de mouvement sont brièvement présentées dans les deux parties suivantes.

18.1 Diffusion moléculaire

Il existe deux manières différentes de transférer de la matière :

- la diffusion, qui correspond à un échange de matière à travers une surface, en l'absence

d'un déplacement d'ensemble. L'étude de ce mode de transfert de matière (également appelé diffusion moléculaire), est l'objet de cette partie.

- la convection, qui correspond à un échange de matière à travers une surface, avec déplacement d'ensemble. Ce mode de transfert ne sera pas étudié dans ce cours.

18.1.1 Mise en évidence expérimentale

On peut mettre en évidence la diffusion de manière simple sur les exemples suivants :

- Lorsqu'on ouvre une bouteille de parfum dans une atmosphère calme, on en perçoit l'odeur au bout de quelques instants. Des molécules de parfum se sont déplacées de la surface du liquide jusque vers notre nez. L'atmosphère étant calme, aucun courant d'air n'a entraîné les molécules qui se sont déplacées grâce à la diffusion dans l'air

- Le même phénomène s'observe dans la diffusion d'une goutte d'encre dans un verre d'eau

La diffusion des particules traduit une tendance à l'uniformisation de la concentration en particules.

On appellera donc diffusion un phénomène de transport de particules sans mouvement macroscopique du support (l'air dans l'exemple précédent) se produisant, dans un système initialement hors équilibre, des régions riches en particules vers les régions pauvres en particules. Ce phénomène tend donc à uniformiser la répartition des particules qui diffusent.

Comme indiqué précédemment, si la diffusion a lieu en présence de courants d'air, on parle de transport convectif ou simplement de convection. On négligera la convection dans toute la suite du paragraphe. Ceci est parfaitement justifié pour les solides (pour lesquels la convection n'existe pas), mais l'est moins pour les liquides et a fortiori encore moins pour les gaz.

On appellera autodiffusion la diffusion d'atomes ou molécules d'un gaz dans lui-même. Ce phénomène entraîne l'évolution vers l'équilibre thermodynamique d'un système initialement hors équilibre.

La diffusion met toujours en jeu un support matériel. On constate expérimentalement que si le support est un gaz, la diffusion est d'autant plus lente que la densité du gaz est élevée.

18.1.2 Approche macroscopique

Définitions

On admettra qu'il est possible de définir une densité de flux de particules diffusées \vec{J}_n telle que le nombre de particules diffusées à travers un élément de surface $d\vec{S}$ pendant l'intervalle dt soit :

$$\delta^2 N = \vec{J}_n \cdot d\vec{S} dt \quad \text{avec} \quad \vec{J}_n = \rho \vec{v}$$

où ρ est la densité volumique de particules et v la vitesse des particules qui traversent la surface $d\vec{S}$ pendant l'intervalle dt . Selon la convention habituelle, on comptera positivement les particules traversant dans le sens de $d\vec{S}$ (c'est à dire que $\vec{J}_n \cdot d\vec{S} > 0$) et négativement celles qui traversent la surface en sens opposé ($\vec{J}_n \cdot d\vec{S} < 0$).

On appellera flux élémentaire de particules diffusées le nombre $\delta\phi$ de particules qui traversent la surface dS par unité de temps :

$$\delta\phi = \frac{\delta^2 N}{dt} = \vec{J}_n \cdot d\vec{S}$$

Lorsque la diffusion se fait dans une seule direction, on écrira simplement les relations sous la forme :

$$\delta^2 N = J_n dS dt \quad \text{et} \quad \delta\phi = J_n dS$$

Loi de conservation

Le bilan dN du nombre N de particules contenues dans un volume (V) délimité par une surface fermée (S) s'écrit entre deux instants voisins t et $t + dt$:

$$dN = \delta N^r + \delta N^c$$

où δN^r représente le nombre de particules reçues par le système et δN^c le nombre de particules créées (δN^c et δN^r sont comme toujours des quantités algébriques). Ces trois quantités s'expriment respectivement par :

$$dN = d \left(\iiint_V \rho dV \right), \quad \delta N^r = dt \times \iint_S \vec{J}_n \cdot (-\vec{n}) dS \quad \text{et} \quad \delta N^c = dt \times \iiint_V \sigma_n \cdot (-\vec{n}) dV$$

où ρ est la densité volumique de particules et σ_n est le taux de production de particules par unité de temps et par unité de volume.

On suppose que la diffusion se fait dans la seule direction Ox , et on considère un cylindre de section S et de hauteur dx , compris entre les abscisses x et $x + dx$. En notant $\rho(x, t)$ la densité particulaire, le cylindre contient $N(t) = \rho(x, t)Sdx$ particules à l'instant t et $N(t + dt) = \rho(x, t + dt)Sdx$ particules à l'instant $t + dt$. Entre t et $t + dt$, le nombre de particules dans le cylindre a varié de :

$$dN = N(x, t + dt) - N(x, t) = Sdx [\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)]$$

soit

$$dN = Sdxdt \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

en se limitant à l'ordre 1 en dt .

Le nombre de particules δN^r reçues de l'extérieur par le cylindre pendant l'intervalle dt est la somme des nombres de particules δN_x^r reçues par la face d'abscisse x et δN_{x+dx}^x reçues par la face d'abscisse $x + dx$. On en déduit que δN_x^r et δN_{x+dx}^x s'écrivent :

$$\delta N_x^r = J_n(x, t)Sdt \quad \text{et} \quad \delta N_{x+dx}^x = -J_n(x + dx, t)Sdt$$

car les molécules entrant dans le cylindre sont comptées positivement et les molécules sortant négativement. En se limitant à l'ordre 1 en dx , on obtient :

$$\delta N^r = J_n(x, t)Sdt - J_n(x + dx, t)Sdt = -Sdxdt \frac{\partial J_n}{\partial x}$$

Le nombre de particules créées s'écrit simplement :

$$\delta N^c = \sigma_n Sdxdt$$

En combinant les équations du nombre de particules N contenues dans ce cylindre entre les instants t et $t + dt$ s'écrit :

$$dN = \delta N_x^r + \delta N^c$$

$$S dx dt \frac{\partial \rho}{\partial t} = -S dx dt \frac{\partial J_n}{\partial x} + \sigma_n S dx dt$$

soit encore

$$\frac{\partial J_n}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma_n$$

Cette équation de conservation est une loi universelle qui donne l'évolution de la répartition des particules diffusées pour une densité de flux J_n donnée.

On peut généraliser cette loi à trois dimensions en remarquant qu'en utilisant on peut écrire en utilisant le théorème d'Ostrogradsky

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho dV \right) = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_n + \iiint_V \sigma_n dV$$

On en déduit l'équation locale, dite équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_n = \sigma_n$$

Cette équation, rigoureuse, est valable sans aucune approximation.

Loi de Fick

On dispose de deux indications qualitatives :

- la diffusion cesse lorsque la concentration est homogène
- le transport par diffusion appauvrit les zones initialement riches en particules pour peupler les zones initialement pauvres en particules

La 1ère loi de Fick rend compte de ces deux observations et s'écrit :

$$J_n = -D \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

et introduit le coefficient de diffusion D (toujours positif et exprimé en m^2/s) qui dépend à la fois du support et des particules qui diffusent. A trois dimensions, la loi de Fick s'écrit :

$$\vec{J}_n = -\vec{\nabla} \rho$$

C'est une loi phénoménologique qui rend compte de la diffusion dans de nombreuses situations, mais qui n'est pas universelle. Elle traduit, à l'approximation linéaire, la proportionnalité entre le courant volumique de particules \vec{J}_n et le gradient de la concentration ρ . Si l'inhomogénéité est trop forte, il n'est plus possible de relier \vec{J}_n et $\vec{\nabla}\rho$ par une loi linéaire mais il faut également prendre en compte des termes non linéaires.

La table donne des valeurs de D pour quelques corps et quelques supports. On y remarque que le coefficient de diffusion est beaucoup plus élevé dans les gaz que dans les liquides, et beaucoup plus élevé dans les liquides que dans les solides.

Phase	Gaz	Gaz	Gaz	Liquide	Liquide	Solide
Support	Air	Air	H ₂	H ₂ O	H ₂ O	Cu
Diffusant	H ₂	O ₂	D ₂	O ₂	Sucre	Al
D (m ² s ⁻¹)	7,12 10 ⁻⁵	2,06 10 ⁻⁵	1,24 10 ⁻⁵	1,80 10 ⁻⁹	0,52 10 ⁻⁹	1,30 10 ⁻³⁰

Equation de la diffusion moléculaire

Par substitution, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-D \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma_n$$

En supposant que D est indépendant du point considéré, ceci s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \sigma_n$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de la diffusion ou 2ème loi de Fick. Elle n'est pas invariante par renversement du temps et traduit le fait que la diffusion est un phénomène irréversible.

A trois dimensions, l'équation de la diffusion se généralise en :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \Delta \rho + \sigma_n$$

En régime stationnaire, cette équation se réduit à :

$$\Delta\rho = -\frac{\sigma_n}{D}$$

Formellement, cette équation est identique à l'équation de Poisson de l'électrostatique. Les solutions seront donc les mêmes. En particulier, le cas d'un système sans terme de production ($\sigma_n = 0$) se ramène à la résolution de l'équation de Laplace.

Solution en régime stationnaire sans terme de production

On considère un système en régime stationnaire pour lequel la concentration ρ ne dépend que de la variable x . L'équation de la diffusion se réduit à :

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = 0 \quad \text{soit} \quad \rho(x) = -\frac{J_n}{D}x + \rho(0)$$

où $\rho(0)$ représente la valeur de la concentration au point de l'axe pris comme origine.

Solution en régime quelconque sans terme de production

On considère un cylindre infiniment long de section S , au centre duquel à l'instant $t = 0$ on introduit N_0 particules dans un volume négligeable devant les dimensions de l'ensemble. La résolution dans le cas général de l'équation n'est pas simple. On admettra qu'en l'absence de terme de production ($\sigma_n = 0$), la solution en est :

$$\rho(x, t) = \frac{N_0}{S\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

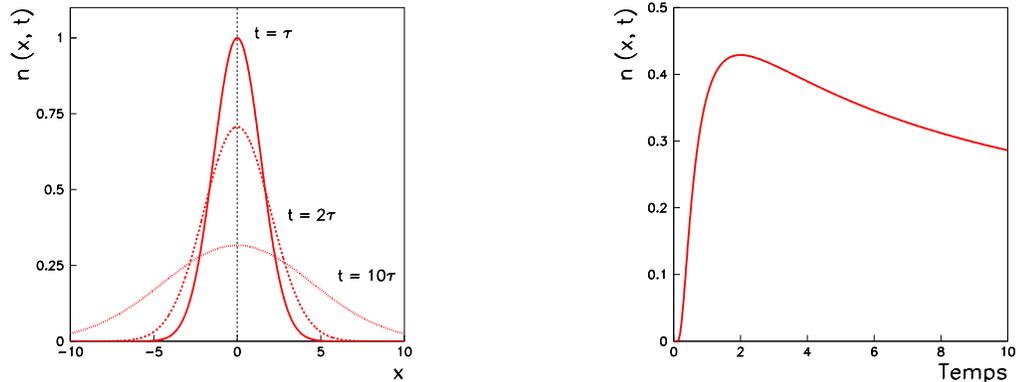
La figure représente cette solution à trois instants successifs $t = \tau$, $t = 2\tau$ et $t = 10\tau$. On observe un étalement des graphes de $n(x, t)$ lorsque t augmente, compatible avec les conditions initiales du problème. L'intégration montrerait que l'aire sous la courbe est indépendante du temps. C'est logique car le nombre total de particules doit se conserver (puisqu'on a supposé $\sigma_n = 0$).

Il faut noter que les variables spatiales et temporelles interviennent par le rapport x^2/t et jouent donc un rôle très dissymétrique. C'est une propriété très générale des phénomènes de diffusion.

L'expression permet d'obtenir la largeur à mi-hauteur $L_{1/2}$ de cette courbe :

$$L_{1/2} = \sqrt{4Dt \ln 2}$$

A un instant t donné, les particules ont notablement diffusé dans un domaine dont l'extension spatiale est donnée par $L1/2$ et qui croît avec le temps comme \sqrt{t} . La figure représente la densité particulaire $n(x, t)$ en fonction du temps à une position x donnée. Elle tend bien vers zéro pour $t \rightarrow 0$.



Conditions aux limites

L'équation fait apparaître des dérivées du 1er ordre par rapport au temps et du 2ème ordre par rapport à la position. Les conditions aux limites vont fixer le problème et seront donc responsables de la grande variété des solutions de l'équation de la diffusion.

Echelles caractéristiques

On suppose que le problème de diffusion posé possède une échelle spatiale caractéristique L . On peut obtenir une échelle de temps caractéristique τ en utilisant le changement de variable :

$$x^* = \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad t^* = \frac{t}{\tau}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial \rho}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^{*2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t^*} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t^*}$$

d'où l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t^*} = \frac{D\tau}{L^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^{*2}}$$

On dira que les échelles spatiales et temporelles sont adaptées lorsque les poids relatifs des deux membres de cette équation sont égaux, ce qui revient à prendre $D\tau/L^2 \approx 1$, soit :

$$L^2 = D\tau$$

La dissymétrie entre L et D est une traduction de la dissymétrie entre distance et temps.

A l'aide de la table, on peut préciser quelques ordres de grandeur :

- avec $D \approx 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ pour un gaz à 25 °C, la diffusion met environ $\tau \approx 4 \cdot 10^2 \text{ s}$, soit quelques minutes, pour avoir un effet significatif sur une distance L de 10 cm

- avec $D \approx 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ pour un liquide à 25 °C, la diffusion met environ $\tau \approx 4 \cdot 10^6 \text{ s}$, soit 45 jours, pour avoir un effet significatif sur une distance L de 10 cm

- le même calcul montre que le temps caractéristique de diffusion du sucre dans l'eau d'une tasse est de l'ordre de huit semaines. Il vaut mieux compter sur la convection pour sucrer son café que sur la diffusion !

- avec $D \approx 10^{-30} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ pour un solide à 25 °C, la diffusion met environ $\tau \approx 10^{28} \text{ s}$, soit $3 \cdot 10^{20}$ années, pour avoir un effet significatif sur une distance L de 10 cm. Dans la pratique, cela signifie que la diffusion dans les solides n'a pas lieu à température ambiante et que pour obtenir des valeurs significatives, il faut observer le phénomène à plus haute température

Dans la pratique, on observe des temps caractéristiques τ inférieurs à ceux cités ci-dessus car la convection que nous avons négligée accélère l'évolution de la densité particulaire dans les gaz et les liquides.

18.1.3 Approche microscopique de la diffusion gazeuse

On se place dans le cas d'un gaz de densité $\rho(x, t)$ diffusé par un support gazeux de densité n_s uniforme.

Calcul du coefficient de diffusion

On considère le modèle suivant :

- toutes les molécules ont la même vitesse v^* égale à la vitesse quadratique moyenne dans tout échantillon du système, les vecteurs vitesses des molécules du gaz diffusé dans une des six directions possibles ($\pm\vec{u}_x, \pm\vec{u}_y, \pm\vec{u}_z$) représentent 1/6 du nombre total de molécules. Ceci traduit de manière simplifiée l'isotropie de la distribution des vitesses

- entre deux chocs sur les molécules du gaz support, les molécules ont un mouvement rectiligne uniforme dans une des six directions $(\pm\vec{u}_x, \pm\vec{u}_y, \pm\vec{u}_z)$. En particulier, on néglige les chocs des molécules du gaz diffusé entre elles

- les chocs ont lieu au même instant pour toutes les molécules. L'intervalle de temps entre deux chocs est alors $t^* = v^*/l$.

On suppose que toutes les molécules ont subi une collision à l'instant t et n'en subiront pas d'autre entre t et $t+t^*$. Les molécules qui peuvent franchir la surface dS dans le sens de \vec{u}_x pendant t^* sont situées dans le cylindre de section dS et de hauteur $l = v^*t^*$, compris entre les abscisses $x-l$ et x et qui ont un vecteur vitesse parallèle à \vec{u}_x . Le nombre de molécules contenues dans ce cylindre vaut $n(x-l)v^*t^*dS$ en notant $n(x-l)$ la densité moléculaire moyenne dans le cylindre. En se limitant au premier ordre en l^* , on peut écrire que :

$$n(x-l) = n(x) - l \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)$$

De plus, parmi toutes les molécules, seule une sur six va dans la direction \vec{u}_x . Le nombre de molécules traversant dS pendant t^* dans le sens de \vec{u}_x est donc :

$$\delta N_g^* = \frac{1}{6} \left[n(x) - l \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right) \right] v^* t^* dS$$

De la même manière, on obtient le nombre δN_d^* de molécules qui peuvent franchir la surface dS dans le sens $-\vec{u}_x$ pendant le temps t^* :

$$\delta N_d^* = \frac{1}{6} \left[n(x) + l \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right) \right] v^* t^* dS$$

Le nombre δN^* (algébrique) de molécules franchissant dS pendant l'intervalle t^* est :

$$\delta N^* = \delta N_g^* - \delta N_d^* = -\frac{1}{3} l v^* t^* dS \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)$$

Pour exprimer la densité de flux de particules $J_n(x, t)$ à l'instant t , la durée dt choisie pour le calcul de δN doit être :

- très inférieure à la durée caractéristique τ de variation des grandeurs macroscopiques telles que la densité particulaire $n(x, t)$.

- très supérieure au temps t^* entre deux chocs pour qu'un comportement collectif macroscopique ait un sens.

Ces deux conditions sont aisément satisfaites car τ est toujours très supérieur à t^* . Par exemple, dans de l'air à $T = 300$ K où $l \approx 150$ nm et $v^* \approx 500$ m/s, on a $t^* \approx 0,3$ ns alors que τ est de l'ordre de la seconde.

On peut donc considérer $\partial n/\partial x$ indépendant du temps sur la durée dt . On additionne donc les nombres de particules qui traversent dS entre t^* et $t + t^*$, $t + t^*$ et $t + 2t^*$, $t + 2t^*$ et $t + 3t^*$, jusqu'à atteindre l'instant $t + \sum t^* = t + dt$. On obtient :

$$\delta N = \sum \delta N^* = -\frac{1}{3}lv^*dS \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right) dt$$

Par identification avec $\delta N = J_n dS dt$, on obtient :

$$J_n = -\frac{1}{3}lv^* \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)$$

La loi de Fick permet d'en déduire une expression du coefficient de diffusion :

$$D = \frac{1}{3}lv^*$$

Cas d'un gaz parfait

Finalement, le coefficient de diffusion s'écrit :

$$D = \frac{k_B^{3/2}}{\pi\sqrt{3m}(r_s + r_d)^2} \frac{T^{3/2}}{p}$$

Le coefficient de diffusion est proportionnel à $T^{3/2}$ et inversement proportionnel à p . Ces dépendances sont assez bien vérifiées dans les gaz. Cette relation permet de mesurer le coefficient de diffusion. Par exemple, dans le cas de la diffusion du monoxyde de carbone CO dans l'azote N_2 $T = 300$ K sous la pression atmosphérique (avec $r_s \approx r_d \approx 1,5$ Å), on obtient $D \approx 2,5 \cdot 10^{-5}$ m²/s, alors que la valeur expérimentale est $D_{exp} = 2,1 \cdot 10^{-5}$ m²/s.

L'importance de cette relation vient du fait qu'elle permet de relier une quantité macroscopique (le coefficient de diffusion D) et une quantité microscopique associée aux collisions (la section efficace $\sigma = (r_s + r_d)^2$).

La dépendance de D en $1/m$ est connue sous le nom de loi de Graham et est utilisée pour séparer les isotopes d'un même corps par diffusion.

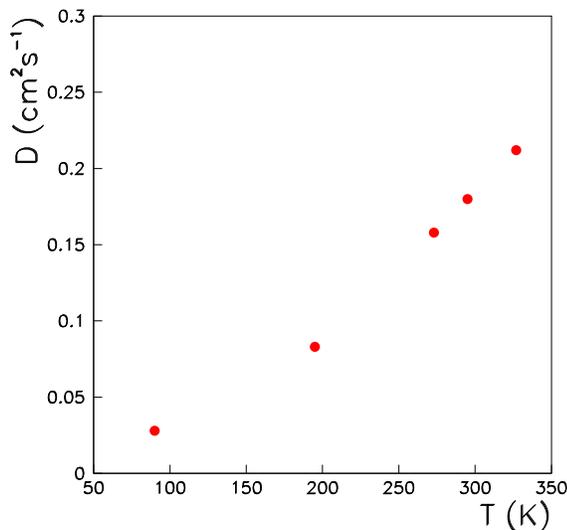
Cas de l'autodiffusion

Dans le cas de l'autodiffusion, le coefficient D varie avec la densité par l'intermédiaire de la dépendance du libre parcours moyen l avec la densité. Or on avait supposé pour établir l'équation de la diffusion que le coefficient D était uniforme.

Il y a un moyen de contourner la difficulté et de simuler l'autodiffusion en étudiant la diffusion d'isotopes très peu abondants dans un gaz support homogène, par exemple la diffusion du deutérium D_2 dans l'hydrogène H_2 . Dans ce cas, le libre parcours moyen l et donc le coefficient de diffusion D dépendent de la densité ρ_{H_2} de l'hydrogène, qui est quasiment uniforme. La densité ρ_{D_2} du deutérium est elle solution de l'équation de la diffusion. Le coefficient d'autodiffusion suit donc les lois précédentes. Par exemple, la figure montre la variation attendue en $T^{3/2}$ du coefficient d'autodiffusion de l'argon.

18.1.4 Diffusion moléculaire dans les liquides

L'hypothèse de base des théories de transport dans les gaz est que les interactions entre molécules sont négligeables dans l'intervalle de temps entre deux chocs. Cette hypothèse n'est plus valable pour les liquides au sein desquels les interactions sont toujours très importantes.



On pourrait montrer que dans le modèle des sphères dures, si une particule de rayon R se déplace par rapport au liquide avec la vitesse \vec{v} , la force d'interaction avec le liquide est donnée par la force de Stokes :

$$\vec{F} = -\frac{\vec{v}}{\mu} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{1}{6\pi\eta r}$$

où η est la viscosité du fluide et μ son coefficient de mobilité. Si la particule est de petite dimension (c'est à dire si R est typiquement inférieur au micromètre), on peut calculer le coefficient de diffusion D correspondant :

$$D = \mu k_B T \quad \text{soit encore} \quad D = \frac{k_B T}{6\pi\eta R}$$

Cette relation est connue sous le nom de relation d'Einstein et explique le mouvement brownien. Le coefficient D représente un étalement en l'absence de force extérieure, mais en présence d'agitation thermique.

La relation est en bon accord avec les mesures expérimentales. Par exemple, on obtiendrait $D = 2,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$ pour une molécule de diamètre 1 nm et une viscosité $\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$. On peut remarquer que cette valeur est très inférieure aux valeurs typiques des coefficients de diffusion dans les gaz.

18.2 Diffusion thermique

On s'intéresse dans ce paragraphe au transfert thermique qui se produit entre deux états d'équilibre d'un système. Le transfert constitue une transformation du système, que l'on supposera suffisamment lente pour être considérée comme quasi statique. Il existe trois manières différentes de transférer de l'énergie sous forme thermique :

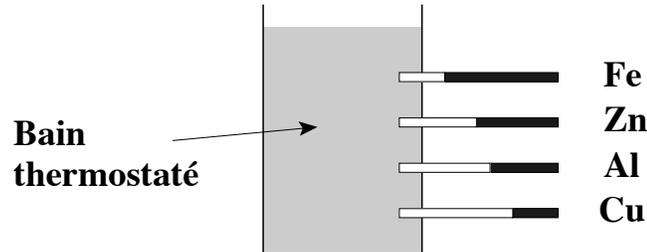
- la **conduction**, qui correspond à un transfert thermique avec support matériel mais sans transfert de matière. L'étude de ce mode de transfert thermique (également appelé diffusion thermique, ou conduction thermique), est l'objet de ce cours
- la **convection**, qui correspond à un transfert thermique avec support matériel mais avec transfert de matière. La convection est libre lorsqu'elle se produit naturellement, et forcée dans le cas contraire.
- le **rayonnement**, qui correspond à un transfert thermique par des phénomènes électromagnétiques, même en l'absence de transfert de matière.

Mise en évidence expérimentale

En 1789, le physicien hollandais J. Ingen-Housz a décrit une expérience permettant de comparer les diffusions thermiques dans plusieurs matériaux métalliques. Elle était réalisée

en enduisant de cire des tiges métalliques de même forme, dont une extrémité est en contact avec un thermostat contenant de l'eau bouillante.

On constate que la température augmente au cours du temps sur les tiges, faisant fondre la cire, mais plus ou moins rapidement selon les matériaux. Ceci met en évidence les différences de diffusion thermique entre les matériaux.



On constate donc que lorsqu'une différence de température existe, un flux d'énergie, orienté des zones chaudes vers les zones froides tend à uniformiser la température. Ce flux n'est associé ni à un déplacement global de matière ni à un travail.

18.2.1 Approche macroscopique

Définitions

On définit le flux thermique comme le flux d'énergie interne I_u , sans travail, à travers une surface :

$$I_u = \frac{dU}{dt}$$

On introduit également le courant thermique volumique ou courant volumique d'énergie interne sans travail \vec{J}_u dont le flux à travers une surface (Σ) est donné par :

$$I_u = \iint_{\Sigma} \vec{J}_u \cdot \vec{n} d\Sigma$$

où \vec{n} est une normale unitaire à la surface.

Loi de conservation

Pour un système fermé occupant un volume (V) délimité par une surface (Σ), le bilan d'énergie interne entre les instants t et $t + dt$ s'écrit :

$$dU = \delta Q + \delta Q^c$$

où le terme d'échange thermique δQ est relié au flux thermique reçu à travers la surface et où δQ^c correspond à une éventuelle création d'énergie au sein du système (réaction chimique ou effet Joule au passage d'un courant dans une résistance par exemple). En appelant u l'énergie interne massique, ρ la masse volumique, ρu l'énergie interne volumique et σ_u l'apport d'énergie volumique par unité de temps, on a :

$$dU = d\left(\iiint_V \rho u dV\right), \quad \delta Q = -dt \times \iint_{\Sigma} \vec{J}_u \cdot \vec{n} d\Sigma \quad \text{et} \quad \delta Q^c = \iiint_V \sigma_u dV$$

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky, le bilan d'énergie interne s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho u dV \right) = \iiint_V \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dV = - \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_u dV + \iiint_V \sigma_u dV$$

Comme ceci est valable pour tout volume (V), on en déduit l'équation locale dite équation de continuité relative à l'énergie interne :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_u + \sigma_u$$

On a de plus $d(\rho u) = \rho c_v dT$ où c_v est la capacité thermique massique à volume constant. On en déduit :

$$\rho c_v \frac{\partial(T)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t}$$

Loi de Fourier

Lorsque la température du système considéré est uniforme, on constate qu'il n'y a aucun transfert thermique en son sein. Un transfert thermique n'est possible qu'à partir du moment où il existe des différences de température dans le système.

La loi de Fourier (1815) est une loi phénoménologique, comme le sont les lois d'Ohm et de Fick, et traduit la proportionnalité entre le courant thermique \vec{J}_u et le gradient de température $\vec{\nabla}(T)$:

$$\vec{J}_u = -\lambda \vec{\nabla}(T)$$

où le coefficient λ , toujours positif, représente la conductivité thermique et s'exprime en W/m/K. Les limitations de cette loi phénoménologique sont notables pour des gradients de température trop forts (qui nécessitent l'introduction de termes d'ordre supérieur) ou trop faibles (de l'ordre des fluctuations). La table donne des valeurs de conductivité thermique pour quelques matériaux. On peut retenir qu'on a généralement $\lambda_{solide} \gg \lambda_{liquide} \gg \lambda_{gaz}$.

Variation de la conductivité thermique avec la température

La variation de la conductivité thermique avec la température est représentée pour quelques corps sur les figures

	Cuivre	Acier inox	Verre	Corps humain	Bois	Air
λ (W/m/K)	389	16	1,2	0,5	0,23	$24 \cdot 10^{-3}$
κ ($10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$)	114	4	0,58	0,1	0,45	
β (10^3 SI)	36,5	8	1,58	1,6	0,34	

On peut principalement distinguer :

- Les métaux :

La conduction dans les métaux est assurée par les électrons libres, ce qui explique le lien général qui existe entre la conductivité électrique et la conductivité thermique, ainsi que l'exprime la loi de Wiedemann et Franz. Elle est donc très sensible à la pureté du métal. La figure représente la conductivité du cuivre qui présente un maximum vers 20 K. Qualitativement, ceci s'explique de la façon suivante :

A basse température, les impuretés du métal deviennent prépondérantes et réduisent la conductivité thermique

Vers les hautes températures, les vibrations du réseau peuvent être décrites comme un gaz de phonons dont la densité augmente avec la température, ce qui diminue la conductivité thermique

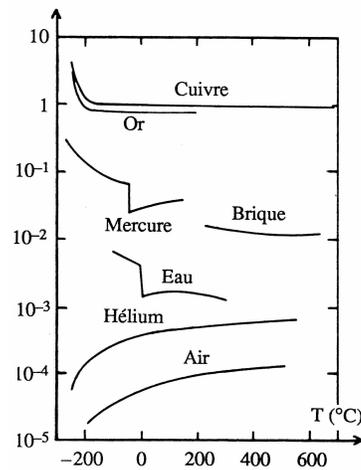
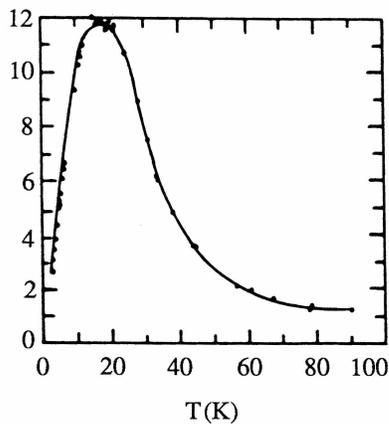
Qualitativement, tous les métaux se comportent ainsi et ont une conductivité thermique de l'ordre de 1 cal/cm/K/s pour des températures supérieures à 100 K

- Les solides non métalliques et les liquides :

La propagation de la chaleur est assurée par l'agitation thermique qui induit un mouvement des phonons ou des atomes. La conductivité thermique augmente généralement avec la température

- Les gaz :

De manière générale, les gaz sont moins bons conducteurs thermiques que les solides ou les liquides. Néanmoins, au contraire des solides, ils sont soumis à la convection qui augmente leur possibilité de transfert thermique. Un corps contenant de l'air dont on empêche la convection sera donc un bon isolant thermique (double vitrage, fourrures animales et laine de verre par exemple)



Equation de la diffusion thermique

En utilisant la loi de Fourier pour exprimer \vec{J}_u , on obtient :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{\nabla}(T)) + \sigma_u = \lambda \Delta T + \sigma_u$$

en supposant que λ est uniforme. On a de plus $d(\rho u) = \rho c_v dT$ où c_v est la capacité thermique massique à volume constant. On en déduit l'équation de la diffusion thermique ou équation de diffusion de la chaleur :

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{\lambda}{\rho c_v} \Delta T + \frac{\sigma_u}{\rho c_v}$$

Cette relation n'est pas invariante par renversement du temps. La diffusion thermique est donc un processus irréversible.

Dans le cas des milieux condensés (liquides ou solides), $c_p \approx c_v$. Comme c_p est facilement mesurable, on a introduit historiquement la diffusivité thermique κ définie par :

$$\kappa = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

Une grande diffusivité thermique κ correspond à une grande conductivité thermique λ et à une faible inertie au transfert de la chaleur, mesurée par ρc_v . La table recense les diffusivités thermiques de quelques corps. On appellera donc généralement équation de la diffusion thermique la relation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \kappa \Delta T + \frac{\sigma_u}{\rho c_v} \quad \text{ou encore} \quad \Delta T = -\frac{\sigma_u}{\lambda}$$

Comme dans le cas de la diffusion moléculaire, cette équation est semblable à l'équation de Poisson de l'électrostatique, ou à l'équation de Laplace en l'absence de source de chaleur.

Conditions aux limites

Pour résoudre cette équation, on a besoin de connaître quelques conditions aux limites. En particulier, on pourra parfois utiliser la loi de Newton qui décrit l'échange d'énergie thermique entre le matériau et le milieu extérieur.

Echelles caractéristiques

Comme pour la diffusion de particules, on peut montrer qu'il existe une échelle de longueur L et de temps τ caractéristiques de la diffusion thermique, reliées entre elles par :

$$L^2 \approx \kappa \tau$$

On en déduit qu'un corps, plongé dans un thermostat à la température T_0 , acquiert cette température au bout d'un temps $\tau \approx L^2/\kappa$. A l'aide de la table, on peut préciser quelques ordres de grandeur : pour du cuivre, il faut environ 88 s pour avoir un effet significatif sur une distance L de 10 cm, alors qu'il faut environ 5 h pour obtenir le même effet sur du verre. La proportionnalité entre le temps caractéristique τ et la distance L^2 a plusieurs conséquences :

ceci explique pourquoi les bâtisses de plusieurs siècles sont si froides : les murs étant très épais (jusqu'à un mètre), la température interne est insensible à la température externe. Et comme elles ne sont jamais chauffées, elles restent toujours froides de manière générale, avant l'invention des matériaux isolants spécifiques, on ne pouvait jouer que sur L pour ralentir les échanges thermiques avec l'extérieur.

Solution en régime stationnaire sans terme de production

On considère un système unidimensionnel en régime stationnaire. L'équation de la diffusion thermique se résume à :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

D'après la loi de Fourier, on obtient en intégrant :

$$\frac{dT}{dx} = \text{cte} \quad \text{et} \quad T(x) = -\frac{J_{u,x}}{\lambda}x + T(0)$$

où $T(0)$ est la température évaluée à l'origine.

Solution en régime quelconque sans terme de production

La résolution dans le cas général de l'équation n'est pas simple. On admettra que la solution en est :

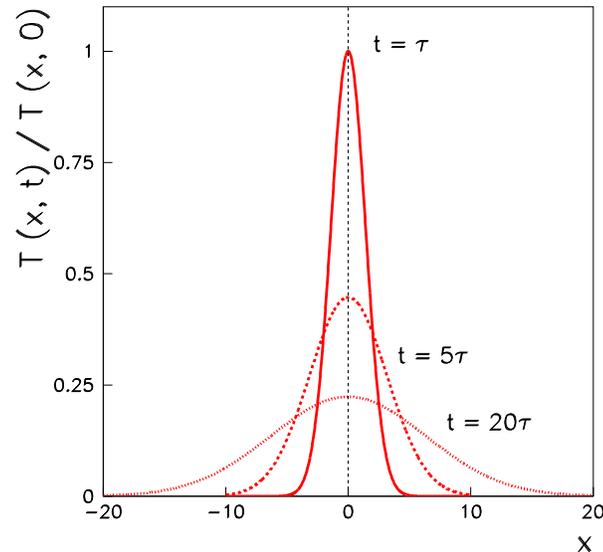
$$T(x, t) = \frac{\text{cte}}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}$$

On peut remarquer que la fonction $T(x, 0)$ est nulle en tout point d'abscisse $x \neq 0$. Cela signifie qu'à l'instant initial ($t = 0$), toute l'énergie interne est accumulée au point pris comme origine spatiale, avant le démarrage du processus de diffusion. La figure représente cette solution à trois instants successifs $t = \tau$, $t = 5\tau$ et $t = 20\tau$. Comme pour la diffusion de particules, on observe un étalement des graphes lorsque le temps s'écoule. La largeur à mi-hauteur $L_{1/2}$ de cette courbe s'écrit :

$$L_{1/2} = 2\sqrt{4\kappa t \ln 2}$$

A un instant t donné, la chaleur a notablement diffusé dans un domaine dont l'extension spatiale est donnée par $L_{1/2}$ et qui croît avec le temps comme $\sqrt{\kappa t}$.

Ce résultat explique l'inefficacité des phénomènes de diffusion à grande distance. Pour l'air par exemple, on a $\sqrt{\kappa t} = 1$ cm pour $t=10$ s et $\sqrt{\kappa t} = 10$ cm pour $t = 10^2$ s ≈ 20 min. On voit sur cet exemple que le chauffage une pièce par diffusion thermique uniquement serait quasiment impossible. Heureusement, dans ce cas, il existe également de la convection !



Conductances et résistances thermiques

On vient de voir sur un exemple que le flux thermique φ est proportionnel à la différence de température ΔT . On admettra que ceci se généralise à tout régime stationnaire. On appelle alors conductance thermique G_u et résistance thermique R_u les coefficients tels que :

$$\varphi = G_u \Delta T \quad \text{et} \quad R_u = \frac{1}{G_u}$$

Ces notions sont très utilisées dans la pratique. Pour transmettre un flux thermique, on cherchera à minimiser la résistance thermique. Au contraire, une bonne isolation thermique nécessitera une forte résistance thermique.

18.2.2 Applications

On considère plusieurs applications classiques de la diffusion thermique, en régime stationnaire et en régime non permanent.

Régime sinusoïdal

En supposant une fluctuation $\theta = T - T_m$ de la température T autour de sa valeur moyenne T_m , l'équation de la diffusion thermique unidimensionnelle s'écrit en l'absence de source thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

On peut montrer que dans le cas d'une variation sinusoidale de la forme :

$$\theta = \theta_m e^{\pm rx} e^{i\omega t}$$

la solution se met sous la forme :

$$\theta = \theta_m e^{-\frac{x}{\delta}} \cos \varphi \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}} \quad \text{et} \quad \varphi = \omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}$$

où δ , homogène à une longueur, représente l'épaisseur thermique. Tout se passe comme si une onde thermique se propageait dans le milieu, avec un amortissement semblable à l'effet de peau dans les conducteurs électriques. On observe donc sur ce modèle qu'à une profondeur de quelques δ , les fluctuations de températures sont négligeables. Par exemple, dans le cas des fluctuations quotidiennes de température, l'épaisseur thermique du sol vaut $\delta = 8,7$ cm. Elle vaut $\delta = 1,7$ m dans le cas des fluctuations annuelles de température. Cette notion d'épaisseur thermique sert à expliquer plusieurs phénomènes bien connus :

- La température sera uniforme tout au long de l'année dans une cave : idéal pour le stockage du vin !
- Ceci explique pourquoi les verres de terre réussissent à passer l'hiver, même lorsqu'il gèle. Il leur suffit de descendre suffisamment profondément

On pourrait pousser encore plus loin la comparaison avec l'effet de peau de l'électromagnétisme en remarquant que cette onde thermique a une vitesse de phase v_φ donnée par :

$$v_\varphi = \delta \omega = \sqrt{2\kappa\omega}$$

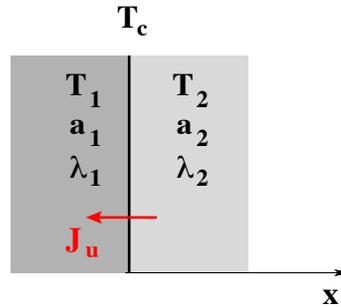
qui montre que le milieu est dispersif. Plus la pulsation est élevée, plus l'onde est arrêtée rapidement (car δ diminue), mais elle le fait plus rapidement car sa vitesse est plus grande. En plus d'une atténuation de l'amplitude dans un rapport $e^{-x/\delta}$, toute variation de température se propage donc dans le sol avec un retard t tel que :

$$\omega t = \frac{x}{\delta}$$

Par exemple, ce retard est de l'ordre du mois à une profondeur de 2 m. Pour les variations diurnes, le retard est de deux jours à la même profondeur. Une cave est donc entièrement insensible aux effets journaliers.

Température de contact

Le problème de la température de contact est lié à l'interprétation de la sensation de chaud ou de froid différente que l'on constate en touchant des objets néanmoins à la même température (par exemple du bois et du marbre). Qualitativement, ceci s'explique par un écoulement de chaleur du corps humain vers l'objet, d'autant meilleur que celui-ci est bon conducteur thermique.



On considère deux matériaux (1) et (2) en contact à des températures T_1 et T_2 différentes avec $T_1 < T_2$. On prend les notations de la figure. A partir du moment où les deux corps sont en contact, il y a diffusion thermique du corps (2) vers le corps (1). Le flux thermique étant le même entre les deux matériaux, on a :

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_1 (0) = -\lambda_2 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_2 (0)$$

On introduit une température de contact T_c intermédiaire entre T_1 et T_2 et on pose $\theta_1 = T_1 - T_c$ et $\theta_2 = T_2 - T_c$. , on peut écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta_m e^{-\frac{x}{\delta}} \left[-\frac{1}{\delta} \cos \left(\omega t - \frac{x}{\delta} \right) + \frac{1}{\delta} \sin \left(\omega t - \frac{x}{\delta} \right) \right]$$

A l'aide de cette équation, on peut réécrire sous la forme :

$$\lambda_1 \theta_{1,m} \left[-\frac{1}{\delta} \cos(\omega t) + \frac{1}{\delta} \sin(\omega t) \right] = \lambda_2 \theta_{2,m} \left[-\frac{1}{\delta} \cos(\omega t) + \frac{1}{\delta} \sin(\omega t) \right]$$

d'où :

$$\frac{\lambda_1 \theta_{1,m}}{\delta_2} = \frac{\lambda_2 \theta_{2,m}}{\delta_2}$$

On définit l'effusivité thermique β par :

$$\beta = \frac{\lambda}{\sqrt{\kappa}} = \sqrt{\lambda\rho c_p}$$

Le tableau donne les effusivités de certains corps. On peut réécrire sous la forme :

$$\beta_1(T_c - T_1) = \beta_2(T_c - T_2)$$

La température de contact est la température moyenne des deux matériaux, pondérée par leurs effusivités.

Par exemple, si on touche une pièce de bois à 100 °C, la température de contact est $T_c \approx 47$ °C, si on suppose que la température de la main est 36 °C. Si on touche un morceau de cuivre à la même température, on a cette fois $T_c \approx 97$ °C. On trouve là l'intérêt d'un manche en bois pour équiper une casserole !

18.3 Diffusion de charges

Le phénomène de conduction électrique est lié à un gradient de potentiel électrostatique, et entraîne un transport de charges électriques. On définit le vecteur densité volumique de courant \vec{J}_e comme étant le nombre de charges qui traversent une surface unité pendant l'unité de temps.

La loi d'Ohm s'écrit :

$$\vec{J}_e = -\gamma \vec{\nabla} \phi$$

où γ est la conductivité électrique et ϕ le potentiel électrostatique. La conservation de la charge électrique permet d'écrire que :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_e = 0$$

où ρ est la densité volumique de charge. En utilisant l'équation de Poisson, un calcul élémentaire montre que la densité volumique de charges ρ vérifie

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0$$

La conductivité thermique λ et la conductivité électrique ρ sont généralement reliées : les métaux ayant une forte conductivité électrique ont également une forte conductivité thermique. Ces deux conductivités sont d'ailleurs reliées par la loi de Wiedemann et Franz :

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \frac{\pi^3}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 T = 2,45 \cdot 10^{-8} \text{ T}$$

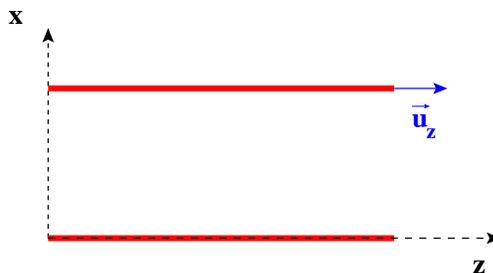
18.3.1 Diffusion de quantité de mouvement

Dans les paragraphes précédents, on a montré comment la diffusion pouvait affecter des grandeurs scalaires (densité particulaire, température, etc ...). Dans ce paragraphe, on va montrer sur l'exemple de la quantité de mouvement que ce phénomène peut également concerner des grandeurs vectorielles.

18.3.2 Définition macroscopique de la viscosité

On considère dans un gaz deux plaques parallèles, la seconde se déplaçant à la vitesse \vec{v} par rapport à la première supposée fixe. L'expérience montre que le gaz est en partie entraîné par la plaque mobile en raison des forces de frottement dues à la différence de vitesse entre la plaque et les molécules du gaz. La grandeur X transportée par chaque molécule est la quantité de mouvement mv_z de cette molécule suivant l'axe \vec{u}_z . Le courant volumique de quantité de mouvement est :

$$\vec{J}_p = -\frac{1}{3} n_v l n_m \frac{\partial(mv_z)}{\partial x} \vec{u}_x$$



On définit la viscosité ou viscosité dynamique η par :

$$\vec{J}_p = -\eta \frac{\partial v_z}{\partial x} \vec{u}_x$$

L'unité SI de la viscosité est le Poiseuille (1 Pl = 1 Pa.s). Le signe négatif signifie que la force est opposée à la direction Ox lorsque le gradient de vitesse est positif. En utilisant le libre parcours moyen donné par le modèle des sphères dures et la vitesse moyenne donnée par la distribution de Maxwell, on obtient pour la viscosité :

$$\eta = \frac{1}{6\pi^{3/2}} \frac{\sqrt{mk_B T}}{R^2}$$

Cette loi de variation de la viscosité avec la température est bien vérifiée expérimentalement. La mesure de la viscosité d'un gaz permet ainsi de remonter au diamètre R de ses molécules dans le modèle des sphères dures.

18.3.3 Equation de diffusion de la quantité de mouvement

On pourrait montrer que l'équation de diffusion de la quantité de mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Le paramètre ν , qui dépend des propriétés du matériau, est appelée la viscosité cinématique. L'équation peut être généralisée à trois dimensions, tant que la convection reste négligeable. On obtient alors :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v}$$

18.4 Résumé sur les phénomènes de diffusion

18.4.1 Généralités

On peut résumer certains points communs aux phénomènes de diffusion relevés dans ce cours :

- L'origine du phénomène est une inhomogénéité d'une grandeur intensive (densité volumique de particules, température, potentiel électrique)

- Le phénomène de transport est irréversible car les équations ne sont pas invariantes par renversement du temps et va dans le sens d'un retour à l'équilibre
- Le courant volumique de la quantité transportée est proportionnel au gradient de la grandeur intensive qui est la cause du transport

	Loi de conservation	Loi phénoménologique	Equation de la diffusion
Diffusion de particules	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{J}_n) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma_n$	$\vec{J}_n = -D \vec{\nabla}(\rho)$ (Loi de Fick)	$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \Delta \rho + \sigma_n$
Diffusion de la chaleur	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{J}_u) + \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma_u$	$\vec{J}_u = -\lambda \vec{\nabla}(T)$ (Loi de Fourier)	$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T + \frac{\sigma_u}{\rho c_v}$
Diffusion de charges	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{J}_e) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	$\vec{J}_e = -\gamma \vec{\nabla}(\phi)$ (Loi d'Ohm)	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho = 0$
Diffusion de quantité de mouvement		$\vec{J}_p = -\eta \vec{\nabla}(v)$	$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v}$

18.4.2 Phénomènes de transport et irréversibilité

Les phénomènes de transport décrits dans ce chapitre sont des phénomènes irréversibles. Ceci se voit sur les équations de diffusion vues dans ce chapitre en inversant le sens du temps. Les équations sont alors modifiées car la dérivée spatiale reste inchangée alors que la dérivée temporelle change de signe.

18.4.3 Remarque sur les phénomènes de propagation et par ondes

On peut comparer les équations de diffusion vues dans ce chapitre à l'équation bien connue de la propagation d'une onde d'amplitude A dans la direction Ox :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = v \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

où v est la célérité de l'onde. Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$A(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

et décrivent la propagation d'une onde dans les directions $+x$ et $-x$ à la vitesse v constante.

La situation est différente pour les équations de la diffusion qui admettent des solutions pour lesquelles la distance de propagation x varie comme \sqrt{t} . La vitesse effective x/t décroît donc avec la distance. Ceci est dû au fait que le flux de la variable qui diffuse (concentration, température, ...) est proportionnel au gradient de celle-ci : plus le front de la variation s'étale, plus la propagation est lente.

Dans le cas où la diffusion est en compétition avec une propagation par onde, les phénomènes diffusifs sont efficaces sur des temps courts ou des petites distances, tandis que la propagation par ondes sera dominante dans les autres cas.

Bilans thermiques : flux diffusifs, convectifs et radiatifs



Bibliographie

- *Introduction à la thermodynamique*, Hulin, Dunod
- *Thermodynamique*, Faroult, Renault, Dunod
- *Thermodynamique H-prépa*, Couture, Chahine, Zitoun, Dunod
- *Thermodynamique*, Collection Tec et Doc
- *Montages de physique*, Charmont, p. 55
- *Expériences de physique*, Duffait, p. 220
- *Expériences d'optique*, Duffait, p. 39
- *Optique expérimentale*, Sextant, p. 107
- *Physique expérimentale*, Fruchart, p. 320

Introduction :

On s'intéresse dans cette leçon au transfert thermique qui se produit entre deux états d'équilibre d'un système. Le transfert constitue une transformation du système, que l'on supposera suffisamment lente pour être considérée comme quasi statique. Il existe trois manières différentes de transférer de l'énergie sous forme thermique :

- la **conduction** ou diffusion, qui correspond à un transfert thermique avec support matériel mais sans transfert de matière. L'étude de ce mode de transfert thermique (également

appelé diffusion thermique, ou conduction thermique), est l'objet de ce cours

- la **convection**, qui correspond à un transfert thermique avec support matériel mais avec transfert de matière. La convection est libre lorsqu'elle se produit naturellement, et forcée dans le cas contraire. Ce mode de transfert thermique ne sera pas étudié dans ce cours
- le **rayonnement**, qui correspond à un transfert thermique par des phénomènes électromagnétiques, même en l'absence de transfert de matière.

Rappelons que le flux est la quantité de chaleur transférée par unité de temps exprimé en J/s :

$$\phi = \frac{dQ}{dt}$$

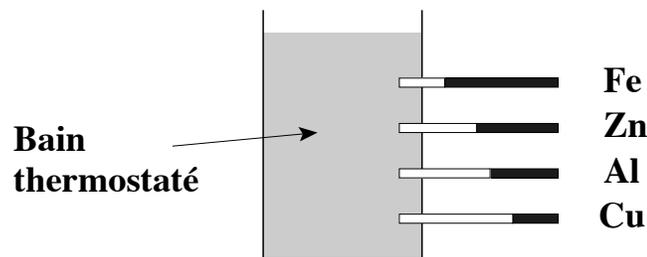
Enfin, on établira une analogie avec l'électricité qui permet de résoudre plus simplement les problèmes.

19.1 Flux diffusif

19.1.1 Mise en évidence expérimentale

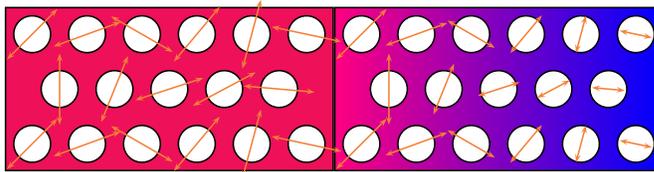
En 1789, le physicien hollandais J. Ingen-Housz a décrit une expérience permettant de comparer les diffusions thermiques dans plusieurs matériaux métalliques. Elle était réalisée en enduisant de cire des tiges métalliques de même forme, dont une extrémité est en contact avec un thermostat contenant de l'eau bouillante.

On constate que la température augmente au cours du temps sur les tiges, faisant fondre la cire, mais plus ou moins rapidement selon les matériaux. Ceci met en évidence les différences de diffusion thermique entre les matériaux.



19.1.2 Loi de Fourier

Soit un corps chaud en contact avec un corps froid.



Lorsque la température du système considéré est uniforme, on constate qu'il n'y a aucun transfert thermique en son sein. Un transfert thermique n'est possible qu'à partir du moment où il existe des différences de température dans le système.

La loi de Fourier (1815) est une loi phénoménologique, comme le sont les lois d'Ohm et de Fick, et traduit la proportionnalité entre le flux diffusif thermique $\vec{\phi}_{cond}$ et le gradient de température $\vec{\nabla}(T)$:

$$\vec{\phi}_{cond} = -\lambda \vec{\nabla}(T)$$

où le coefficient λ , toujours positif, représente la conductivité thermique et s'exprime en W/m/K. Les limitations de cette loi phénoménologique sont notables pour des gradients de température trop forts (qui nécessitent l'introduction de termes d'ordre supérieur) ou trop faibles (de l'ordre des fluctuations). La table donne des valeurs de conductivité thermique pour quelques matériaux. On peut retenir qu'on a généralement $\lambda_{solide} \gg \lambda_{liquide} \gg \lambda_{gaz}$.

Matériaux	Conductivité	Matériaux	Conductivité
Cuivre	390	Verre	0,2
Fer	80	Bois	0,15
Titane	10	Carton	0,07
Granite	2,2	Laine de verre	0,04
Béton	0,9	Polystyrène	0,036
Eau	0,6	Air	0,026

19.2 Flux convectif

19.2.1 Description et modélisation

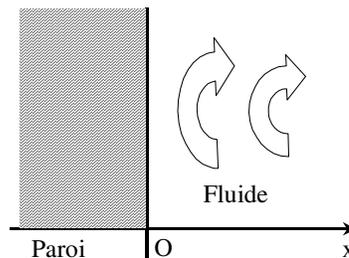
Il est d'observation courante que, pour refroidir un liquide chaud contenu dans un flacon, on agite le flacon. Ainsi font les parents avant de présenter le biberon à leur bébé.

Ce mode de transfert est basé sur le fait qu'il y a déplacement de matière : il ne concerne donc que les fluides (liquides et gaz). Contrairement à la conduction où le transfert de chaleur se fait par contact, dans le fluide, la possibilité de déformation sous l'effet de la température permet de mettre en œuvre des mouvements de ce fluide plus ou moins importants. Ces mouvements sont dus à des différences de pression et/ou des différences de température.

Dans le premier cas, l'écoulement est dû à des forces extérieures (pompe, ventilateur...). On est alors dans des conditions de convection forcée. C'est ce mode qui est généré lorsque l'on veut améliorer c'est à dire augmenter l'échange thermique.

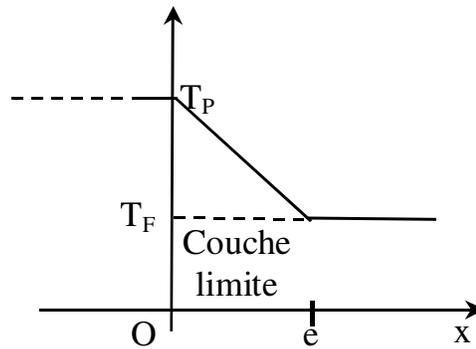
Dans le second cas, l'écoulement se fait naturellement : il est dû à la différence de densité des différentes zones du fluide. Ce phénomène est très courant et s'appelle convection naturelle.

Pour modéliser la convection, on considère un modèle unidirectionnel en régime stationnaire, tel que représenté sur la figure suivante :



Le fluide est animé de mouvements de convection qui provoquent une homogénéisation de la température. On considère que ce brassage est suffisamment efficace pour que la température du fluide soit constante spatialement et égale à T_F . Dans la paroi, en revanche, le transfert est conductif et dirigé selon l'axe (Ox). On y observe donc un gradient de température.

La température de la paroi T_P est différente de la température du fluide ; il existe une couche limite de faible épaisseur e (de l'ordre de qq mm) dans laquelle le fluide est pratiquement immobile et où le transfert de chaleur se fait de manière conductive.



19.2.2 La loi de Newton

Les transferts thermiques entre un corps et le milieu extérieur suivent la loi de Newton si la densité de flux thermique sortant algébriquement à travers la surface du matériau est proportionnelle à l'écart de température entre celle de la surface du matériau et celle de l'extérieur.

Avec les notations du paragraphe précédent, le flux convectif est donné par la relation :

$$\vec{\phi}_{conv} = h(T_P - T_F)\vec{n}$$

h est appelé le coefficient de transfert thermique de surface.

On peut montrer que $h = \frac{\lambda_F}{e}$, où λ_F est la conductivité thermique du fluide et e l'épaisseur de la couche limite.

Dans le cas d'une convection forcée, la couche limite est moins épaisse et donc h augmente.

Remarque :

On peut relier la loi de Newton à la loi de Fourier. En effet, la température du milieu extérieur n'est égale à T_0 que suffisamment loin de la surface de séparation, au-delà d'une couche limite d'épaisseur e . En fait, la température est continue en x_0 , et sa valeur est $T(x_0, t)$, y compris dans le milieu extérieur.

La loi de Newton donne alors :

$$\phi_{conv} = h(T - T_0) = h([T(x_0, t)] - T_0) - (he) \frac{T(x_0 + e, t) - T(x_0, t)}{e}$$

D'où

$$\phi_{conv} \approx (he) \frac{\partial T}{\partial x}$$

on retrouve une expression analogue à la loi de Fourier avec un coefficient $\lambda = he$ homogène à une conductivité thermique.

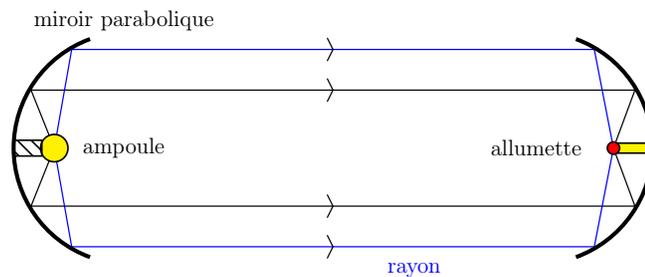
19.3 Flux radiatif

Les transferts thermiques décrits auparavant faisaient intervenir des systèmes matériels en contact les uns avec les autres ou en mouvement les uns par rapport aux autres. Dans certains cas, le transfert thermique se fait sans contact entre la source et le récepteur, et sans échauffement du milieu intermédiaire. Il correspond à l'émission d'ondes électromagnétiques induites à l'échelle microscopique par le mouvement de particules chargées à la surface du corps. On étudie dans cette partie les lois du rayonnement issues de l'hypothèse de Planck en particulier le flux radiatif.

19.3.1 Mise en évidence expérimentale

On peut mettre en évidence les propriétés de ce rayonnement par plusieurs expériences simples :

- Des braises chauffent directement un solide (par exemple le corps humain) et non l'air ambiant. Par contre, ce rayonnement est arrêté par un écran opaque
- Ce rayonnement obéit aux lois de l'optique géométrique. Ceci peut se montrer avec l'expérience décrite sur la figure. Le thermomètre placé au foyer du miroir indique une température supérieure à celle de la pièce. Il reçoit un rayonnement de la part de la lampe



- La surface illuminée par le rayonnement joue un rôle dans la puissance reçue. Ceci peut se montrer avec l'expérience décrite sur la figure. On constate qu'avec des conditions ex-

périmentales identiques, la température du thermomètre dont le réservoir est recouvert de noir de fumée est plus élevée que celle de l'autre thermomètre

L'expérience montre que tout corps émet ce rayonnement électromagnétique et que son spectre d'émission est continu et d'autant plus décalé vers les hautes fréquences (ie les hautes énergies) que la température est élevée.

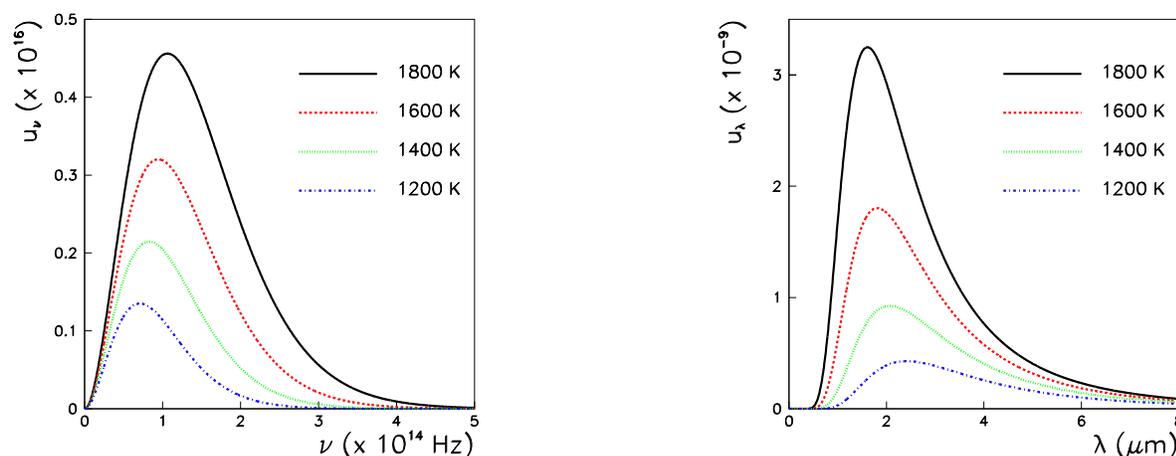
19.3.2 Loi de Stefan-Boltzmann

Energie volumique spectrale

On considère le rayonnement à l'intérieur d'une cavité dont les parois sont maintenues à une température T . Il s'établit un équilibre thermique entre les parois et le rayonnement électromagnétique à l'intérieur de l'enceinte. A partir du 2ème principe, Kirchhoff a démontré en 1859 que ce rayonnement ne dépendait que de la température. En 1900, Planck a montré par un raisonnement de physique statistique que l'énergie volumique spectrale $u_\nu(\nu, T)$ pouvait se mettre sous la forme :

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

La figure représente l'énergie volumique spectrale $u_\nu(\nu, T)$ en fonction de la fréquence ν . On peut également représenter comme sur la figure la variation de l'énergie volumique spectrale $u_\lambda(\lambda, T)$ en fonction de la longueur d'onde $\lambda = c/\nu$.



Les deux représentations sont reliées par :

$$u_\nu d\nu = -u_\lambda d\lambda \quad \text{soit} \quad u_\lambda = -u_\nu \frac{\nu}{d\lambda} = u_\nu \frac{c}{\lambda^2}$$

On en déduit :

$$u_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi c}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{\beta hc/\lambda} - 1}$$

Loi de Stefan-Boltzmann

En sommant l'énergie interne spectrale u_ν sur toutes les fréquences, on obtient l'énergie interne spectrale totale, soit :

$$u = \int_0^\infty u_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu = \frac{8\pi (k_B T)^4}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

en posant $x = \frac{h\nu}{k_B T}$

Or

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

On obtient finalement :

$$u = \sigma T^4 \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{8\pi^5}{15} \frac{k_B}{(hc)^3}$$

où σ est appelé constante de Stefan.

Finalement, le flux radiatif s'écrit

$$\vec{\phi}_{rad} = \sigma \epsilon (T_s^4 - T_e^4) \vec{n}$$

où ϵ est l'émissivité qui vaut 1 pour un corps noir.

Cette loi a été établie expérimentalement en 1879 par Stefan et interprétée en 1884 par Boltzmann.

19.4 Applications

19.4.1 Équation de la chaleur

Cas unidimensionnel

Considérons le cas simple d'un milieu au repos soumis à un gradient thermique suivant une direction (que nous notons x). On note $T(x, t)$ la température à un instant t en un point M d'abscisse x .

Cherchons alors à établir l'équation qui donne l'évolution dans l'espace et le temps du champ de température à partir d'un bilan thermique. Pour cela, raisonnons sur une portion de section S située entre x et $x + dx$ puis faisons les hypothèses suivantes.

Le milieu est au repos ; il n'y a donc pas de déplacement de matière.

La capacité thermique massique c_v , la masse volumique μ ainsi que la conductivité thermique sont considérés constantes.

Le milieu n'est le siège d'aucune réaction chimique ni d'aucun processus produisant ou consommant de la chaleur.

Enfin, par soucis de simplification, nous supposons que le volume est fixé.

Le premier principe de la thermodynamique appliqué à ce système entre les instants t et $t + dt$ donne

$$U(t + dt) - U(t) = \delta Q + \delta W^{\text{ext}}$$

Les forces de pression ne travaillent pas puisque le volume est invariable. Le transfert thermique que reçoit le système s'écrit

$$\delta Q = \phi_{\text{reçu}} dt = [j_{\text{th}}(x) S - j_{\text{th}}(x + dx) S] dt = -\frac{dj_{\text{th}}}{dx} S dx dt$$

La température variant à priori dans le temps, l'énergie interne du système varie :

$$dU = U(t + dt) - U(t) = \frac{dU}{dt} dt = \left[\frac{\partial U}{\partial T} \Big|_V \frac{\partial T}{\partial t} \right] dt$$

Or, par définition, $\partial U / \partial T|_V$ désigne la capacité thermique à volume constant C_v du système :

$$\frac{\partial U}{\partial T} \Big|_V = C_v = \mu S dx c_v$$

où c_v représente la capacité thermique massique. Le premier principe se réécrit donc

$$\left[\mu S dx c_v \frac{\partial T}{\partial t} \right] dt = - \frac{dj_{\text{th}}}{dx} S dx dt$$

Si on ajoute à cela la loi de Fourier $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \partial T / \partial x \vec{u}_x$, on trouve finalement

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c_v} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1D)$$

Le champ de température vérifie une équation de diffusion unidimensionnelle dite équation de la chaleur.

Cas tridimensionnel

Cette équation se généralise en trois dimensions. Si l'on conserve les mêmes hypothèses, on trouve

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c_v} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3D)$$

Le champ de température vérifie donc une équation aux dérivées partielles d'ordre deux. Son intégration fait alors apparaître des constantes d'intégration que l'on détermine grâce aux conditions initiales et aux limites.

Remarque :

L'équation de la chaleur, à l'instar de l'équation de diffusion, brise la symétrie $t / -t$ ce qui traduit l'irréversibilité des phénomènes de transfert thermique.

Conditions aux limites

Résoudre l'équation de la chaleur cela consiste à déterminer le champ de température dans un espace Ω sachant que l'on connaît les conditions initiales ainsi que les propriétés sur la frontière $\partial\Omega$. Dans la pratique on distingue différents cas.

Le système est en contact parfait avec un thermostat de température T_0 : à chaque instant on a la condition aux limites

$$T(M, t) = T_0 \quad \forall M \in \partial\Omega$$

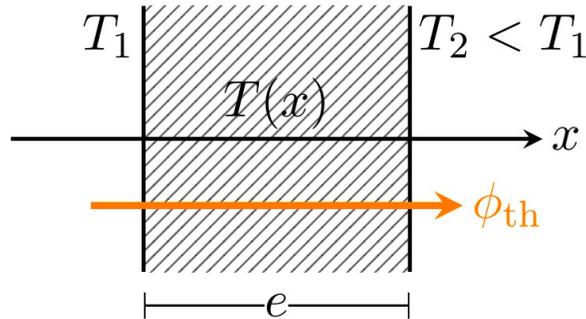
Le système est solide et présente une surface de contact avec un autre solide. Si le contact n'est pas parfait, la température n'est pas continue. Cependant le flux thermique est continu. Le système est parfaitement calorifugé c'est-à-dire entouré d'une paroi adiabatique. Dans ce cas,

$$\vec{j}_{\text{th}}(M, t) \cdot \vec{n}^{\text{ext}} = 0 \quad \forall M \in \partial\Omega$$

Le système présente une paroi en contact avec un fluide : la loi de Newton relative à la convection impose alors une condition sur le flux thermique.

19.4.2 Notion de résistance thermique

La résistance thermique est une notion très utilisée dans le bâtiment car elle indique le pouvoir isolant d'un matériau.



Imaginons un mur homogène d'épaisseur e , de conductivité thermique λ soumis à un gradient thermique. Par ailleurs, admettons que le mur ait des dimensions suffisamment importantes devant son épaisseur pour considérer que le problème ne dépend que de la profondeur x . Le champ de température est alors noté $T(x, t)$. Le but est d'obtenir le flux thermique qui traverse le mur en régime permanent, lorsqu'une paroi est maintenue à la température T_1 et l'autre à la température T_2 . En régime permanent, $\partial T / \partial t = 0$ de sorte que l'équation de la chaleur se ramène à

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dT}{dx} = C_1 \quad \Longrightarrow \quad T(x) = C_1 x + C_2$$

Les conditions aux limites imposent

$$\begin{cases} T(0) = T_1 \\ T(e) = T_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} C_2 = T_1 \\ C_1 = \frac{T_2 - T_1}{e} \end{cases}$$

Finalement le champ de température varie linéairement avec la profondeur :

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{e} x$$

Le champ de température étant déterminé on peut obtenir la densité de courant thermique ainsi que le flux thermique traversant le mur :

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x = -\frac{\lambda(T_2 - T_1)}{e} \vec{u}_x$$

On constate d'une part que la densité de courant thermique est uniforme : les lignes de courant thermique sont donc parallèles et les isothermes sont des plans parallèles aux

parois. D'autre part, la présence du signe - indique que, conformément aux principes de la thermodynamique, le transfert s'effectue du chaud vers le froid. Si l'on considère une surface (S) du mur, le flux thermique qui traverse cette surface vaut

$$\phi_{\text{th}} = \iint_{(S)} \vec{j}_{\text{th}} \cdot \vec{dS} = \frac{\lambda(T_1 - T_2)}{e} S$$

où S est l'aire de la surface. Le flux thermique est alors proportionnelle à l'écart de température entre les parois. La notion de résistance thermique découle de l'analogie que l'on peut faire avec l'électricité. De la même manière que la résistance électrique d'un conducteur ohmique est le rapport de la différence de potentiel imposée sur le flux électrique (intensité électrique) qui le traverse, la résistance thermique est le rapport de la différence de température sur le flux thermique :

$$T_1 - T_2 = R_{\text{th}} \phi_{\text{th}} \quad \text{avec} \quad R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S} \quad [\text{K.W}^{-1}]$$

De part cette analogie avec la loi d'Ohm, il en découle les traditionnelles lois de composition des résistances :

quand plusieurs milieux sont traversés par le même flux thermique on peut leur associer une résistance thermique équivalente

$$R_{\text{eq}} = \sum_i R_i \quad (\text{résistances en série})$$

quand plusieurs milieux sont soumis à la même différence de température, on peut leur associer une résistance thermique équivalente R_{eq} telle que

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{R_i} \quad (\text{résistances en parallèle})$$

Par analogie, on peut ainsi dresser le tableau :

	Électricité	Thermodynamique
Cause	différence de potentiel ΔU	différence de température ΔT
Effet	I intensité	Φ flux thermique
Résistance	R en Ω	R_{th} en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Loi	$\Delta U = RI$ (loi d'Ohm)	$\Delta T = R_{\text{th}} \Phi$

Exercice :

Considérons un double vitrage constitué par deux lames de verre d'épaisseur e séparées par une lame d'air statique d'épaisseur e . Notons λ la conductivité du verre. Sachant que le verre est quarante fois plus conducteur que l'air, comparer la résistance thermique d'un double vitrage avec celle d'un simple vitrage.

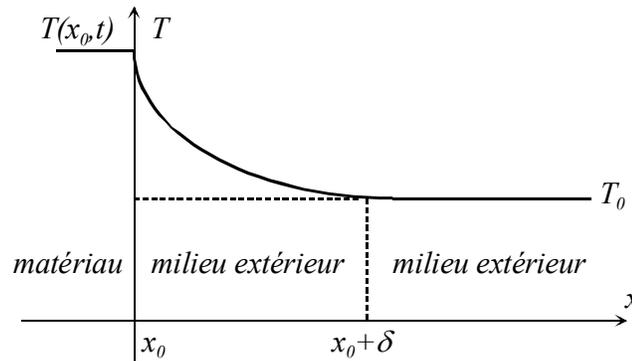
La résistance thermique d'un simple vitrage s'écrit $R_1 = e/\lambda S$. Dans le cas d'un double vitrage il y a trois résistances en série :

$$R_2 = \frac{e}{\lambda S} + \frac{e}{\lambda/40 S} + \frac{e}{\lambda S} = 42 R_1$$

D'après ce calcul, on diminue d'un facteur 42, les pertes thermiques en remplaçant un simple vitrage par un double vitrage.

Influence de la convection

Dans l'étude précédente on a supposé que le mur était en contact parfait avec les milieux extrêmes. En pratique il arrive plus souvent que le mur soit en contact avec des fluides en mouvement.



Dans ce cas, la température des parois (notées T_{p1} et T_{p2}) ne coïncide plus avec la température du fluide. Si l'on note h_1 et h_2 les coefficients de transfert associés aux transferts convectifs en $x = 0$ et en $x = e$, on obtient une nouvelle expression de la résistance thermique à partir de la continuité du flux thermique :

$$\phi_{th} = h_1 S (T_1 - T_{p1}) = h_2 S (T_{p2} - T_2) = \frac{T_{p1} - T_{p2}}{R} \quad \text{avec} \quad R = \frac{e}{\lambda S}$$

En utilisant $T_1 - T_2 = (T_1 - T_{p1}) + (T_{p1} - T_{p2}) + (T_{p2} - T_2)$, on trouve

$$T_1 - T_2 = R_{th} \phi_{th} \quad \text{avec} \quad R_{th} = \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_1 S} + \frac{1}{h_2 S}$$

La résistance thermique augmente quand les transferts convectifs diminuent. C'est pourquoi, une lame d'air statique est plus isolante qu'une lame d'air en mouvement.

Exercice :

Reprendre l'exercice précédent sur le double vitrage en tenant compte de la convection. Pour les calculs on prendra $h_1 = h_2 = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$, $\lambda = 1 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ et $e = 4 \text{ mm}$.

Calculons la résistance thermique pour 1 m^2 de vitre. La résistance thermique d'un simple vitrage vaut

$$R_1 = \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_1 S} + \frac{1}{h_2 S} = 0,20 \text{ K.W}^{-1}.\text{m}^{-2}$$

Alors que pour le double vitrage elle vaut

$$R_2 = 42 \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_1 S} + \frac{1}{h_2 S} = 0,37 \text{ K.W}^{-1}.\text{m}^{-2} \simeq 2R_1$$

Comme on le voit, la présence de la convection change significativement les choses puisque les pertes thermiques ne sont réduits que d'un facteur deux au lieu de 42 trouvé dans l'exercice précédent.

Influence du rayonnement

De la même façon, on peut pousser l'analogie électrique au flux radiatif et introduire une résistance thermique correspondante en faisant des approximations localement selon la géométrie du problème et des propriétés radiatives des surfaces.

Exercice : Intérêt d'une combinaison de plongée

On considère un plongeur avec une combinaison dans l'eau. On note T_{i0} la température interne initiale du plongeur, T_e celle de l'eau environnante, uniforme et constante.

- 1) Rappeler l'expression de la résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel en fonction de la section S , de l'épaisseur e et de la conductivité thermique λ
- 2) On modélise les pertes par convection par un flux thermique surfacique $\phi_{conv} = h(T - T_e)$. Quelle résistance R_{conv} peut-on associer à ces pertes ?
- 3) On modélise les pertes par rayonnement par un flux thermique surfacique $\phi_{rad} = \sigma(T^4 - T_e^4)$ où σ est la constante de Stefan. On suppose $|T - T_e| \ll T_e$. Montrer que l'on peut associer aux pertes par rayonnement une résistance thermique R_{rad} .
- 4) Soit $R_{plongeur}$ la résistance thermique du plongeur, R_{combi} celle de la combinaison. Quelle est la résistance thermique R_T équivalente à l'ensemble ?

Solution :

- 1) La résistance thermique associé à la conduction s'écrit $R_{cond} = \frac{e\lambda}{S}$

324 *Leçon de physique n° 19. Bilans thermiques : flux diffusifs, convectifs et radiatifs*

2) La résistance thermique associée à la convection s'écrit $R_{conv} = \frac{1}{hS}$

3) En faisant un DL avec $\epsilon = (T - T_e)$, on obtient $\phi_{rad} \approx 4\sigma ST_e^3(T - T_e) = R_{rad}(T - T_e)$.
La résistance thermique associée au rayonnement est donc $R_{rad} = \frac{1}{\sigma ST_e^3}$

4) Les résistances thermiques $R_{plongeur}$ et R_{combi} sont en série alors que R_{conv} et R_{rad} sont en parallèle.

La résistance totale est donc

$$R_T = R_{plongeur} + R_{combi} + \frac{R_{conv}R_{rad}}{R_{conv} + R_{rad}}$$

Leçon de physique n° 20

Conversion de puissance électromécanique



Bibliographie

- *Physique Spé (PSI)*, Olivier, Tec et Doc
- *Physique appliquée, T, STI Electrotechnique*, Dubos
- *Electromécanique*, Grenier, Dunod
- *Electromagnétisme 2*, Faroux, Dunod
- *Montages de physique*, Charmont, p. 119
- *Expériences d'électronique*, Duffait, p. 287

Prérequis :

- Mécanique du solide (inertie),
- Electronique basique (dipôles R,L,C),
- Lois de l'induction.

Introduction :

Dispositif exploitant les couplages qui peuvent se produire entre des phénomènes élec-

triques et des phénomènes mécaniques. Classification d'après le principe mis en oeuvre : convertisseurs électromagnétiques, convertisseurs électrostatiques, convertisseurs piezoélectriques et magnétostrictifs. Justification de la prépondérance des convertisseurs électromagnétiques.

20.1 Mise en évidence du couplage électromécanique

20.1.1 Définition

On suppose le champ B stationnaire. On se place ainsi dans le cas d'induction de Lorentz :

$$e = \oint \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

On se place dans le référentiel du laboratoire, dans lequel on suppose les sources de \vec{B} fixes. $\vec{\omega}$: vitesse d'un porteur par rapport au conducteur (vitesse relative). \vec{v}_e : vitesse du conducteur par rapport au labo.

Expression de la force de Lorentz :

$$d\vec{F}_{Lorentz} = nqd\tau \left[(\vec{v}_e + \vec{\omega}) \wedge \vec{B} \right]$$

avec n : nombre de porteurs par unité de volume et q la charge d'un porteur.

La puissance de la force de Lorentz est :

$$P_{Lorentz} = d\vec{F}_{Lorentz} \cdot \vec{v} = 0$$

On peut décomposer cette puissance en deux termes :

$$P_{Lorentz} = nqd\tau \left[(\vec{v}_e + \vec{\omega}) \wedge \vec{B} \right] \cdot (\vec{v}_e + \vec{\omega})$$

Dans le référentiel du conducteur, on rappelle la relation $\vec{j} = nq\vec{\omega}$:

$$(\vec{j}d\tau \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_e + (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot \vec{j}d\tau = 0$$

Et ainsi :

$$d\vec{F} \cdot \vec{v}_e + \vec{E}_m \cdot \vec{j}d\tau = 0$$

où \vec{E}_m est le champ électromoteur.

Cette équation traduit la conversion électromécanique. En particulier, pour un circuit filiforme :

$$\begin{cases} d\vec{F}_{Laplace} &= i\vec{dl} \wedge \vec{B} \\ \vec{j}d\tau &= i\vec{dl} \end{cases}$$

Donc

$$d\vec{F}_{Laplace} \cdot \vec{v}_e + i\vec{E}_m \cdot \vec{dl} = 0$$

où $\vec{E}_m \cdot \vec{dl}$ est la force électromotrice sur la portion de fil \vec{dl} .

Schéma électrique : source de tension e (convention générateur), i , u (convention récepteur).

Le bilan de puissance se traduit par :

$$P_{Laplace} = -ie = ui = P_{rec}$$

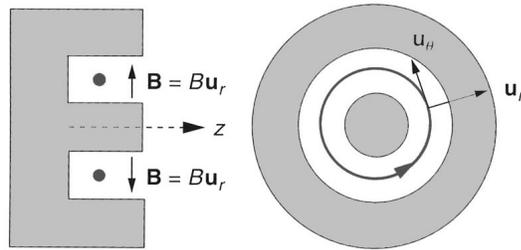
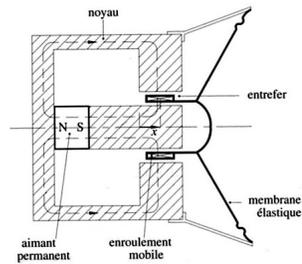
Si $P_{Laplace} \geq 0$, i.e. $-ie \geq 0$, on convertit de l'énergie électrique en énergie mécanique : moteur mécanique et récepteur électrique. Au contraire, si $P_{Laplace} \leq 0$: génératrice électrique et récepteur mécanique.

Les phénomènes d'induction permettent donc la conversion électromécanique. Cette conversion est possible dans les deux sens : on parle de réversibilité.

20.2 Le haut parleur électrodynamique

20.2.1 Description du système

Description du système : N spires enroulées libres de translater le long d'un axe formé d'un noyau ferro-magnétique la faisant évoluer dans un champ radial. Membrane élastique exerce une force de rappel élastique sur les spires auxquelles elle est solidaire. Cette membrane exerce une action sur l'air, et subit donc d'après le principe des actions réciproques une force égale et opposée : on modélise cet force par une force de type visqueuse.



Analyse qualitative : La bobine est parcourue d'un courant. Comme elle évolue dans un champ magnétique, elle subit la force de Laplace, qui la met en mouvement, engendrant un mouvement de la membrane et ainsi une onde sonore. Mais le mouvement des spires parcourues par un courant dans le champ fait apparaître une fem induite dans la bobine. Il y a en fait couplage entre le déplacement et le courant dans la bobine : il s'agit d'un couplage électromécanique.

Notations : coordonnées cylindriques, m : masse bobine, i : courant, k : constante de rappel élastique, f : constante de viscosité de l'air, R : résistance de la bobine, L : inductance de la bobine, E : tension d'alimentation de la bobine, B : norme du champ magnétique radial.

20.2.2 Mise en équation

Etude mécanique

Bilan des forces :

- Force de rappel : $-kz$
- Force de frottement visqueux : $-fv$
- Force de Laplace réparties sur la bobine : $d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$

D'où la résultante des forces de Laplace élémentaires : $\vec{F} = - \oint iaBd\theta\vec{u}_z = -2\pi NiaB\vec{u}_z$

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$m\dot{v} = -kz - fv - 2N\pi iaB$$

Etude électrique

f.e.m induite via champ électromoteur :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = Bv\vec{u}_\theta$$

Résultante :

$$e = \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = Bv\vec{u}_\theta$$

Remarque : Ce calcul est en fait inutile, puisque le caractère total du couplage électromécanique nous permet toujours d'écrire : $-ei = F.v$.

Circuit équivalent au haut parleur : reçoit sur l'orientation de la source générateur et de la source fem (lié à l'orientation du circuit).

Loi des mailles :

$$Ri + Li = E + e + 2\pi NBav$$

On a ainsi obtenu un système de 2 équations couplant une inconnue électrique à une inconnue mécanique.

On appelle transducteur électromécanique un tel système.

20.3 Bilan énergétique

On a $vdt = dz$ et par $dq = idt$

Donc

$$mvdv = -kzdz - fv^2dt - 2\pi NrBivdt$$

$$Eidt + 2\pi NrBivdt = Ri^2dt + Lidi$$

$$d\left(\frac{1}{2mv^2} + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) = (Ei - fv^2 - Ri^2)dt$$

Interprétation :

(3) Puissance de la force de Laplace = variation énergie méca + Transmission à l'air. ; (4) Puissance dispo au générateur fait varier l'énergie magnétique de la bobine, alimente l'effet Joule et compense la fem induite et fait varier l'énergie stockée dans la bobine. ; (5) On a utilisé le fait que $F_{lap}v = -ei$ qui traduit le couplage électromécanique parfait entre la puissance fem induite et la puissance de la force de Laplace. Ei (puissance délivrée par le générateur) fait varier toutes les énergies stockables, alimente les pertes, et fournit la puissance à l'ext.

En régime périodique : la valeur moyenne d'une dérivée temporelle est nulle.

$$\langle Ei \rangle = \langle Ri^2 \rangle + \langle fv^2 \rangle$$

Rendement :

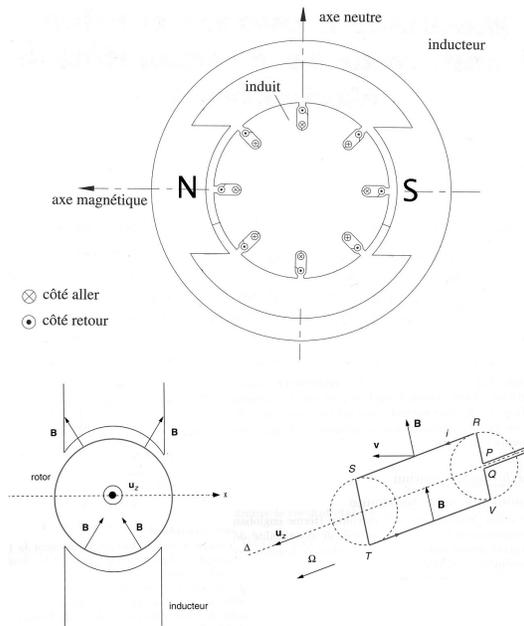
$$\eta = \frac{fv^2}{EI}$$

20.4 La machine à courant continu

20.4.1 Modélisation

Schéma du moteur. Simplification à une paire de pôles avec des aimants permanents. Simplification à une spire. On étudie déjà une spire dans tournant dans un champ statique. Notation sur la spire (schéma).

On choisit une orientation arbitraire du circuit électrique formée par la spire : $P \rightarrow Q$



20.4.2 Spire en rotation dans un champ magnétique statique

Etude mécanique

Comme B est radial en tout point, la contribution des portions de conducteur (PR , ST , VQ) est nulle. Seules les portions (RS) appelé conducteur aller et (TV) appelé conducteur retour, contribuent au mouvement de la spire. Sur ces conducteurs, la force de Laplace s'écrit :

$$\text{pour le conducteur aller : } \vec{F}_1 = iLB\vec{u}_\theta;$$

$$\text{pour le conducteur retour : } \vec{F}_2 = -iLB\vec{u}_\theta$$

On constate que la résultante des forces de Laplace sur une spire est nulle. Par contre, ces efforts de part et d'autre de la spire résultent en un couple sur l'axe : en notant $ST = d$, ce couple s'exprime par :

$$\Gamma = \frac{d}{2}\vec{u}_r \wedge \vec{F}_1 + \left(-\frac{d}{2}\right) \wedge (-\vec{F}_1) = diLB\vec{u}_z$$

La valeur algébrique de ce couple sur l'axe C est appelée le couple moteur. $C = idLB = \vec{M} \cdot \vec{B}$. avec $\vec{M} = i\vec{S}$, moment magnétique de la spire (\vec{S} est la surface de la spire orientée conformément à la règle du tire bouchon.)

Ce couple résulte en un mouvement de rotation de la spire autour de l'axe δ à la vitesse $\Omega = \omega \cdot \vec{u}_z$

Enfin, la puissance des forces mécaniques exercées sur la spire est :

$$P_m = \vec{F}_1 \cdot \frac{d}{2} \omega \vec{u}_\theta + \vec{F}_1 \cdot \left(-\frac{d}{2}\right) \omega \vec{u}_\theta = idL\omega = C\omega$$

Remarque : La puissance des efforts mécaniques sur la spire dépend des signes de i et de ω . Elle peut être aussi bien positive que négative.

Etude électrique

Il y a conversion électromécanique totale. On a alors $P_m = P_e$ soit $-ei = C\omega$

Donc

$$e = -dlB\omega$$

Bilan énergétique

Valeur moyenne nulle :

Graphes $\vec{B} \cdot \vec{u}_r$ en fonction de l'angle θ de la spire par rapport à l'axe neutre. Si on fait circuler un courant continu à travers la spire, la situation change au cours du temps : en effet, le conducteur au dessus de la ligne neutre va passer en dessous de la ligne neutre, et comme les deux conducteurs sont nécessairement orientés en sens contraire, et que les champs de part et d'autre de la ligne neutre sont statiques et différents, l'orientation du conducteur supérieure commute à chaque demi tour. Comme on cherche un fonctionnement continu du moteur, il faut commuter l'orientation. Cette commutation est réalisée mécaniquement par le collecteur.

Schéma fonctionnement du collecteur.

20.4.3 Le moteur à excitation indépendante : application à l'entraînement d'une charge

En réalité, la conception d'un moteur utilise plusieurs spires en série formant des enroulements afin que les couples mécaniques et les f.e.m. et les intensités s'additionnent tout

en limitant le volume du moteur. Cela nécessite notamment un compromis entre assemblage des spires en série (i favorisé) et en parallèle (fem favorisée). La mise en équation du système est plus complexe, mais on peut cependant retenir le résultat suivant :

$$e = -\phi i$$

constante de proportionnalité propre au moteur, s'exprime en Wb ou en T/m². Comme on a montré que pour chaque spire, la puissance est conservée par la conversion électromécanique, on a aussi :

$$C = \phi i$$

Remarque : Attention, les signes dépendent des choix d'orientation.

La constante de couplage ϕ est généralement de l'ordre du dixième de Weber au Weber. Les équations qui régissent le fonctionnement du moteur sont alors :

L'équation électrique :

$$u = Ri - eL \frac{di}{dt} = Ri - \phi \omega L \frac{di}{dt}$$

L'équation mécanique :

$$J \frac{d\omega}{dt} = C - C_r = \phi i - C_r$$

où C_r représente l'effet des frottements résistifs sur l'arbre moteur, et J l'inertie de l'ensemble de l'arbre moteur.

On connaît la caractéristique couple-vitesse ($C_r(\omega)$) d'une charge mécanique. On veut connaître la vitesse angulaire de l'ensemble arbre moteur + charge pour une alimentation du moteur donnée, ainsi que sa consommation électrique. On fait l'étude en régime permanent.

$$\begin{cases} u &= Ri + \phi \omega \\ J\dot{\omega} &= 0 = \phi i - C_r \end{cases}$$

Donc

$$i = \frac{C_r}{\phi}$$

En régime permanent, c'est le couple résistant qui impose le courant.

$$\Gamma_{em} = \phi i = \frac{\phi^2}{R(\omega_0 - \omega)}$$

avec $\omega_0 = u/\phi$.

Tracé point de fonctionnement (Graphe $\Gamma = f(\omega)$); tracé d'une droite décroissante : Γ_{em} pour différent u et d'une courbe croissante Γ_r).

Discussion en fonction de la caractéristique de la machine.

Leçon de physique n° 21

Induction électromagnétique



Bibliographie

- *Physique Spé (PSI)*, Olivier, Tec et Doc
- *Physique appliquée, T, STI Electrotechnique*, Dubos
- *Electromagnétisme MP, PC, PSI*, Grenier, Dunod
- *Electromagnétisme 2*, Maurras, PUF
- *Montages de physique*, Charmont, p. 171
- *Expériences de physique*, Bellier, p. 387

21.1 Le phénomène d'induction

21.1.1 Faits expérimentaux

Illustration cas circuit mobile \vec{B} permanent

Faire la manip où on fait tourner la bobine autour de son axe au voisinage d'un aimant et voir que le mouvement du circuit dans le champ magnétique entraîne la circulation d'un

courant.

Cas d'un champ variable

On place deux bobines en vis-à-vis. L'une étant reliée à un GBF (primaire). En alimentant le primaire avec une tension alternative, on fait naître un courant dans le secondaire.

NB : Pour montrer qu'un champ magnétique variable fait naître un courant dans un circuit fermé, il existe une jolie manip avec des diodes.

On donne une définition du phénomène d'induction.

Définition : le phénomène d'induction consiste en l'apparition d'une force électromotrice et dans le cas d'un circuit fermé, s'il peut s'écouler des courants qui tendent à s'opposer aux causes qui leur ont donné naissance.

21.1.2 Loi de Lenz

Les phénomènes d'induction ont des effets qui s'opposent aux causes qui leur ont donné naissance.

21.1.3 Loi expérimentale de Faraday

On introduit la loi expérimentale de Faraday valable pour un circuit filiforme fermé

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

21.2 Champ électromoteur et force électromotrice sur une portion de circuit

21.2.1 Loi d'Ohm

But : disposer de la formule

$$\vec{j} = \sigma \left[\vec{E}(M, t) + \vec{v}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t) \right]$$

Pour cela on utilise la loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ et la transformation non relativiste des champs.

Transformation de la loi d'Ohm dans un changement de référentiel galiléen :

Transformation non relativiste des champs

Dans le référentiel du labo :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}_{labo} \wedge \vec{B})$$

Translation à vitesse \vec{v}_e uniforme dans le référentiel du labo.

$$\vec{F}' = q(\vec{E}' + \vec{v}_r \wedge \vec{B})$$

avec $\vec{v}_r = \vec{v}_{labo} - \vec{v}_e$

Or, $F = F'$

Donc

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} \end{cases}$$

$$\vec{j} = \sigma [\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}]$$

NB : la démonstration suppose que le circuit considéré se déplace à une vitesse \vec{v} rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen, puis on admet que le résultat est valable dans un cadre plus général.

NB : être conscient des limitations de cette transformation (exemple où elle est incongrue : cas d'un faisceau homocinétique de protons)

21.2.2 Force électromotrice induite sur une portion de circuit

But : introduire les notions de fem induite et de champ électromoteur.

Tension aux bornes d'un tronçon de conducteur

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{\vec{j}}{\sigma} dl = \int_A^B \frac{\vec{j}}{\sigma} \left(-\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

$$R_{ABI} = V_A - V_B + \int_A^B \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

On appelle $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ le champ électromoteur de Neumann.

De manière générale, on a donc :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

et

$$e = \int_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

NB : On se place ici dans le cadre d'un circuit filiforme.

NB : La notion de fem n'a de sens que dans le cas d'un circuit filiforme.

NB : la notion de champ électromoteur est moyennement acceptée par certains auteurs. Bien lire les paragraphes qui traitent des difficultés soulevées par l'introduction de cette notion.

NB : le terme de "force électromotrice" est assez malheureux. En effet, elle n'est pas homogène à une force, mais à une tension. Dans le Feynman (Electromagnétisme 1, chapitre 16) il définit la force électromotrice comme la force tangentielle par unité de charge dans le fil intégrée sur toute la longueur du circuit complet.

Transition : on fait apparaître dans le champ électromoteur deux composantes : Celle correspondant à $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et celle correspondant à $-\vec{v} \wedge \vec{B}$.

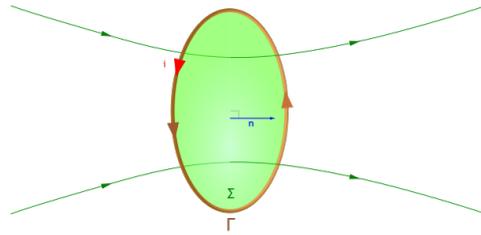
Pour qu'il y ait induction il faut donc au moins qu'on ait l'un de ces deux termes qui soit non nul.

21.3 Cas d'un circuit fixe dans un champ variable (Cas de Neumann)

21.3.1 Loi de Faraday

On retrouve rapidement la loi de Faraday grâce aux équations de Maxwell.

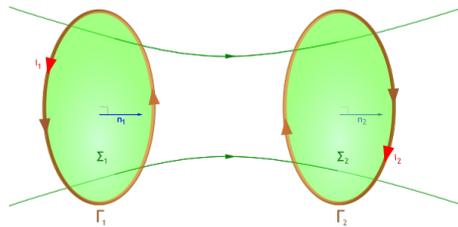
$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$



Le champ électromoteur de Neumann s'écrit :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

21.3.2 Application pour les circuits filiformes : Induction mutuelle



Définir rapidement les coefficients d'auto inductance et de mutuelle inductance. Faire un bilan énergétique pour deux circuits en mutuelle inductance.

L'énergie emmagasinée dans le champ magnétique du système s'écrit :

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2$$

Application : transformateur (on se cantonne à la mentionner)

21.3.3 Application au chauffage par induction

On néglige les effets de peau : $\delta \gg a$ où a est le rayon du conducteur cylindrique de longueur L .

Les équations de Maxwell s'écrivent ici : $\text{rot} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\text{div} \vec{E} = 0$

$$\text{et } \vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \omega B_0 \frac{r}{L}$$

Donc

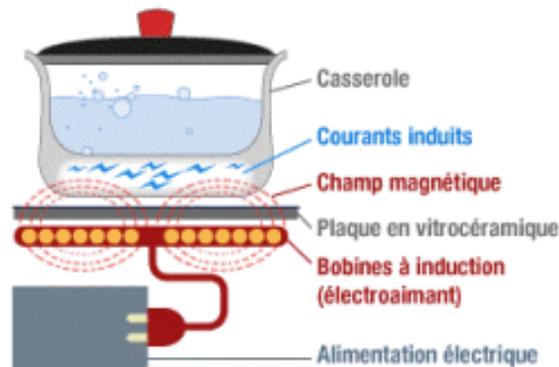
$$dP_J = \left\langle \frac{j^2}{\sigma} \right\rangle = \frac{\sigma}{16} \pi h a^4 B_0^2 \omega^2$$

Faire un bilan énergétique et insister sur le fait que les pertes par courant de Foucault sont proportionnelles à :

- B^2
- ω^2
- $V a^2$ où a est le rayon du conducteur.

Par conséquent, pour un même volume de matériau V , si on veut augmenter les pertes pour avoir un meilleur chauffage on a intérêt à augmenter a . (tout en restant dans la limite $a \ll d$, où d = épaisseur de peau).

En revanche si on veut diminuer les pertes, mieux vaut diminuer a . Conséquence pratique : on feuillette les carcasses des transformateurs parallèlement à \vec{B} .)



21.4 Cas d'un circuit mobile dans un champ variable

21.4.1 Application : cas du haut-parleur / microphone électrodynamique

Faire un bilan énergétique et commenter le phénomène de transduction : conversion d'énergie électrique en énergie mécanique et vice versa.

21.4.2 Freinage par induction

Se cantonner à le mentionner et éventuellement montrer la petite manip décrite dans qui consiste à faire osciller un pendule métallique dans l'entrefer d'un aimant. Selon la forme du pendule, les courants de Foucault peuvent ou ne peuvent pas s'établir et le pendule est freiné différemment.

Leçon de physique n° 22

Rétroaction et oscillations



Bibliographie

- *Systèmes linéaires : de la modélisation à la commande*, H. Bourdès, Lavoisier
- *Asservissements linéaires et continus*, de Carfort, Dunod
- *Electronique et conversion de puissance*, Delacressonnière, Tec et Doc
- *Régulation et asservissement*, Hans, Eyrolles
- *Expériences d'électronique*, Duffait, p. 179

Prérequis :

- Fonction de transfert
- Transformée de Laplace
- Diagrammes de Bode, Nyquist, Black
- Notion de système linéaire.

Introduction :

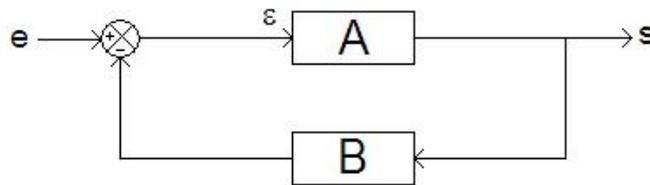
On rencontre des systèmes à boucle de réaction dans la nature, selon trois types de comportement : amorti (champ \vec{E} dans un milieu), oscillant (pendule simple) et divergent (explosion). On fera ici une étude avec le formalisme de l'automatique. Notre but est de

créer des systèmes au comportement contrôlé, essentiellement amortis et oscillants. Application notamment en électronique et électrotechnique.

22.1 Systèmes bouclés linéaires, invariants

22.1.1 Définition

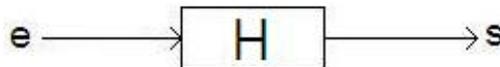
Définition d'un système bouclé linéaire continu invariant : système à temps continu avec A et B invariants et linéaires.



Formule de Black : si $1 + A(p)B(p)$ est inversible, la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) est

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

avec $T(p) = A(p)B(p)$ fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO).



Définition : Le système bouclé est bien posé si $1 + A(p)B(p)$ est inversible presque partout.

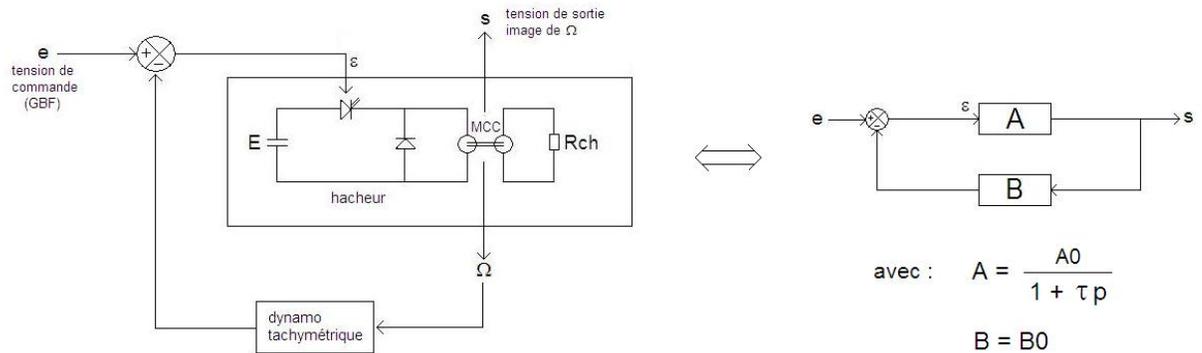
Remarque : par la suite on verra qu'il peut être nécessaire de reboucler un système déjà bouclé, tel des poupées russes !

Exemples :

1) Machine à courant continu asservie :

$$H = \frac{H_0}{1 + \tau'p}$$

avec $H_0 = \frac{A_0}{1+A_0B_0}$ et $\tau' = \frac{\tau}{1+A_0B_0}$



2) Pendule simple : $A = -\omega_0^2$ et $B = -\frac{1}{p^2}$

$$H = \frac{-\omega_0^2}{1 + \frac{\omega_0^2}{p^2}}$$

22.1.2 Comportement et stabilité d'un système

Soit $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$, alors

$$D(p)S(p) = N(p)E(p)$$

,

ce qui est équivalent

$$\sum_i a_i \frac{d^i s}{dt^i} = \sum_j b_j \frac{d^j s}{dt^j}$$

Donc s est de la forme :

$$s = s_{part} + s_{homo} = s_{part} + \sum_k A_k e^{p_k t}$$

où les p_k sont les pôles de H déduits de l'équation caractéristique $\sum_i a_i p_i = 0$

Trois cas se présentent alors :

- système divergent si $\exists k / \text{Re}(p_k) > 0$

- système oscillant si $\exists k/\text{Re}(pk) \leq 0$ et $\exists k/\text{Re}(pk) = 0$
- système convergent si $\forall k/\text{Re}(pk) < 0$

Définition : Un système est dit stable si sa sortie est bornée dès lors que son entrée est bornée. D'après les trois cas ci-dessus cela correspond aux cas oscillant et convergent : il faudra donc étudier les pôles de la fonction de transfert.

22.1.3 Cas des systèmes bouclés

Soit $H = \frac{A}{1+AB}$ avec $A = \frac{N}{D}$ et $B = \frac{M}{E}$. Alors,

$$H = \frac{NM}{DE + NM}$$

On va donc étudier les zéros de $DE + NM$.

Exemples :

- MCC non asservie : $A = \frac{A_0}{1+\tau p}$ Donc l'unique pôle est $p = -\frac{1}{\tau}$. Système stable.
- MCC asservie : $H = \frac{H_0}{1+\tau'p}$. Donc l'unique pôle est $p = \frac{-1+A_0B_0}{\tau}$. Système stable si $(1 + A_0B_0) \geq 0$, instable si $(1 + A_0B_0) < 0$
- pendule simple : $p = \pm j\omega_0$. Système oscillant.

Soit $H(p) = \frac{A}{1+AB}$ la FTBF d'un système bouclé. On note n_A (resp. n_B) le nombre de pôles de A (resp. B) à partie réelle positive ou nulle. On étudie le lieu de la FTBO $T(j\omega) = A(j\omega)B(j\omega)$ pour ω allant de $-\infty$ à $+\infty$.

Critère de Nyquist :

Le système est stable ssi le nombre de tours que fait le lieu de T autour de -1 dans le sens direct est égal à $n_A + n_B$. (on déduit la stabilité de la FTBF à partir de la FTBO). En pratique on prendra A et B stables séparément : ils n'ont pas de pôles à partie réelle positive ou nulle. Donc il ne faut pas faire de tour autour de -1.

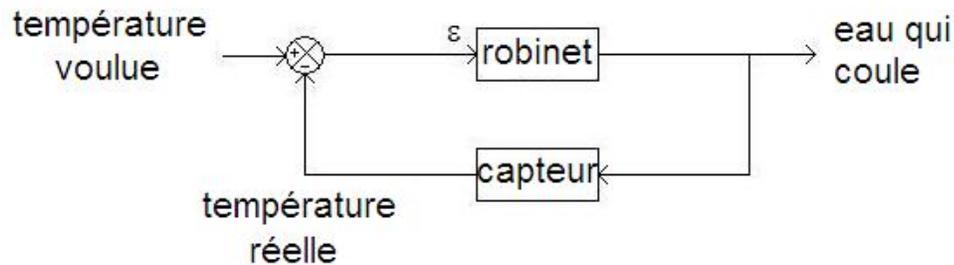
Exemple : MCC asservie : $n_A = n_B = 0$ et $T(j\omega) = \frac{A_0B_0}{1+j\omega\tau}$. Voir transparent avec diagrammes de Nyquist pour les cas convergent, oscillant et divergent selon la valeur de A_0B_0 .

22.2 Systèmes asservis

22.2.1 Définition

Définition : un système asservi est un système bouclé conçu de manière à corriger par lui-même les écarts entre la valeur réelle du signal de sortie et la valeur désirée, correspondant à la loi imposée en entrée.

Exemple : la douche



22.2.2 Critères d'asservissement

Robustesse

Dans le cas de la MCC des perturbations internes peuvent provenir de l'alimentation du hacheur $E(E \rightarrow E + \delta E)$ ou de la charge ($R_{ch} \rightarrow R_{ch} + \delta R_{ch}$). De manière générale cela induit $A \rightarrow A + \delta A$ (voir transparent MCC) :

- Si MCC non asservie : $|\frac{\delta s}{s}| = |\frac{\delta A}{A}|$
- Si MCC asservie : $|\frac{\delta s}{s}| = |\frac{\delta A}{A}| |\frac{1}{1+AB}|$

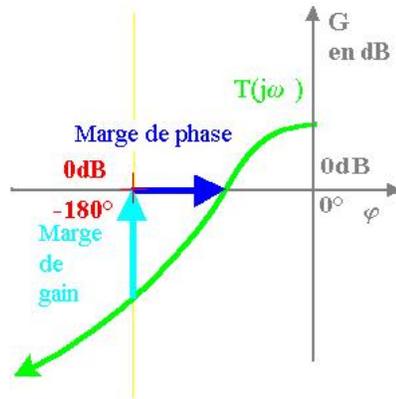
Si $1 + AB > 1$: réaction négative. Si $1 + AB < 1$: réaction positive.

Dans le cas de la réaction négative, le système asservi est moins sensible aux fluctuations internes.

Cependant, comme $\frac{H}{A} = \frac{1}{1+AB}$, ce type de réaction implique une diminution du gain. Démonstration possible sur la MCC en direct.

Nécessité d'un système robuste : un système peut être stable selon la définition précédente et vérifier le critère de Nyquist. Mais les perturbations internes peuvent déstabiliser le système s'il est peu robuste, si les perturbations sont trop importantes ou si le critère de

stabilité est tout juste vérifiée (sur diagramme de Nyquist on passe près du point $(-1;0)$). Pour cette raison, on a introduit des marges de stabilité pour éviter que les perturbations interne ne déstabilisent le système. Les plus classiques sont les marges de phase et de gain. Mais, dans le diagramme de Black, on voit qu'il possible de définir des marges en chaque point de fonctionnement (gain, phase).



Précision

Définition : on appelle erreur statique pour la réponse à un échelon d'amplitude E_0 la grandeur :

$$\epsilon_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\epsilon(p)$$

Exemple de la MCC :

MCC non asservie ϵ . Donc si $A_0 = 1$ le système est précis.

MCC asservie $\epsilon_s = E_0(1 - H_0)$. Si $B_0 = 1$, $H_0 = 1$ si $A_0 \rightarrow \infty$. Le système est fondamentalement imprécis.

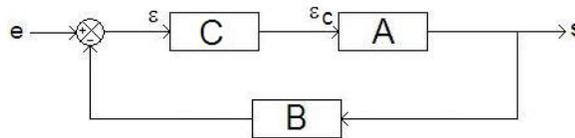
Rapidité

Définition : on appelle erreur dynamique la quantité $\epsilon_d = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\epsilon}{dt}$. Le temps caractéristique de réponse du système à un échelon de tension est alors $\tau_c = \frac{\epsilon_s - \epsilon(t=0)}{\epsilon_d}$. Plus un système est rapide, plus son temps de réponse est faible. Mais il peut apparaître un dépassement par rapport à la consigne caractéristique d'une instabilité. D'où un compromis rapidité/stabilité.

Exemple de la MCC :

- MCC non asservie $\epsilon_d = \frac{A_0 E_0}{\tau}$ donc $\tau_c = \tau$
- MCC asservie $\epsilon_d = -\frac{A_0 B_0 E_0}{\tau}$ donc $\tau_c = \tau' = \frac{\tau}{1+A_0 B_0}$

Pour une réaction négative la MCC asservie sera plus rapide que la non asservie. Expérience avec la MCC pour voir les temps de montée.

22.2.3 Correcteurs**Proportionnel (P)**

Dans ce cas $C(p) = C_0$. Utile pour augmenter le gain de la fonction de transfert car celle-ci est multipliée par C_0 . Dans le cas d'une réaction négative, le système sera plus précis et rapide. Mais les risques d'instabilité augmentent comme on peut le voir sur le diagramme de Nyquist (exemple de la douche).

Proportionnel (PD)

Dans ce cas $C(p) = C_0 \frac{1+\tau_1 p}{1+\tau_2 p}$ avec $\tau_1 \ll \tau_2$. Il agit aux temps courts et améliore donc la rapidité du système (schéma action correcteur). De plus il augmente la marge de gain et par là la stabilité.

Proportionnel (PI)

Dans ce cas $C(p) = \frac{1+\tau_1 p}{1+\tau_2 p}$ avec $\tau_1 \gg \tau_2$. Il agit aux temps longs et améliore donc la précision du système (schéma action correcteur). Expérience possible avec la MCC bouclée et corrigée (présenter transparent en même temps pour expliquer les différents appareils présents sur la table).

PID

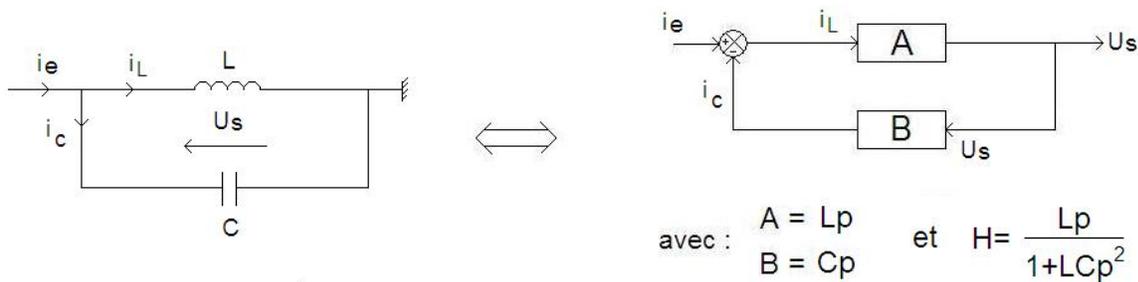
Conjugué les effets des précédents. Utilisé par le physicien et l'ingénieur.

22.3 Systèmes oscillants - oscillateurs

22.3.1 Système oscillant et pertes

Exemple du pendule. La pulsation propre ω_0 est fixée par le système. Il faut des conditions initiales non nulles pour le lancer. Limite du modèle du système oscillant : l'amplitude des oscillations décroît au cours du temps à cause des pertes internes et des perturbations externes.

Exemple d'un circuit LC :

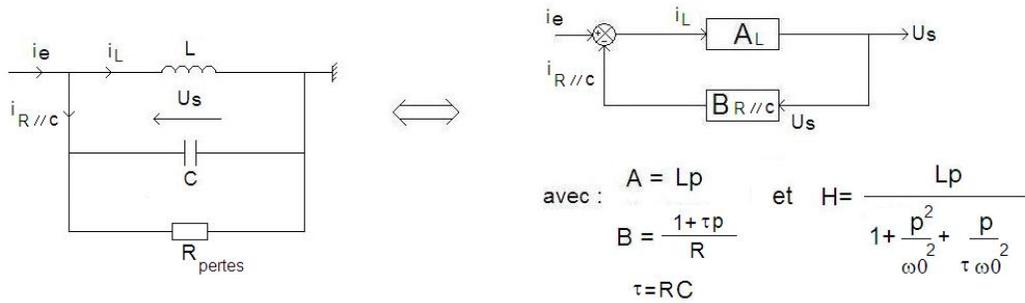


Mêmes remarques que précédemment. La pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est fixée par le système. Il faut des conditions initiales non nulles pour le lancer. Limite du modèle du système oscillant : l'amplitude des oscillations décroît au cours du temps à cause des pertes internes et des perturbations externes. Un modèle réel prenant en compte ces pertes est le suivant :

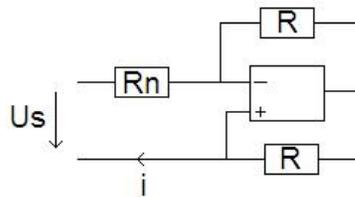
Pour compenser ces pertes la solution est de boucler le système avec un réservoir d'énergie. (on boucle un système déjà bouclé. Poupées russes...)

Pour le pendule (par exemple pour une horloge à balancier), le réservoir est constitué par une masse descendante qui fournit de l'énergie potentielle au système. Il faut donc "remonter" la pendule fréquemment quand le réservoir est vide.

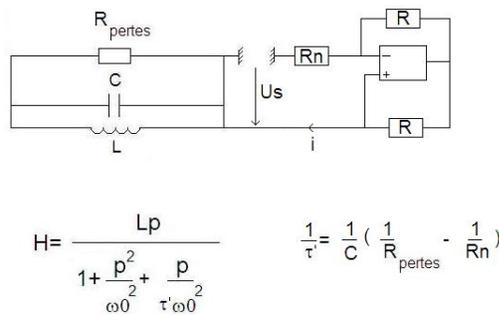
Pour le circuit RLC la grandeur d'entrée est un courant électrique celle de sortie une tension. L'idée la plus simple est donc de coupler le système à une résistance qui ne va



pas dissiper mais fournir de l'énergie. On doit donc utiliser une résistance négative selon le schéma suivant :



D'où le système oscillant avec son réservoir d'énergie :



22.3.2 Système oscillant et démarrage

Pour démarrer l'horloge et le système électrique il faut donner une impulsion de départ (Possibilité de tracer des courbes sur Mapple : voir cours oscillateur de C. More).

Mais il apparaît alors le problème des perturbations impliquant une augmentation de l'amplitude non contrôlée. Le système "choisit" lui-même son point de fonctionnement. Par

exemple dans le cas de l'oscillateur à résistance négative, le point de fonctionnement est donné par la saturation de l'ampli capteur opérationnel, en régime non-linéaire...

La solution : on va à nouveau asservir notre système, mais cette fois-ci en amplitude. Par exemple, pour l'oscillateur précédent, on peut faire varier la résistance négative pour passer d'un comportement divergent à convergent.

Conclusion

En automatique on peut généraliser cette étude à des systèmes plus complexes avec plusieurs entrées, sorties et capteurs. On travaille alors avec des vecteurs pour les grandeurs d'entrée et de sortie et les fonctions de transfert sont des matrices. Il apparaît alors les problèmes d'observabilité et de commandabilité.

Traitement d'un signal. Etude spectrale



Bibliographie

- *Physique tout en un. 1ère année.*, Sanz, Dunod
- *Electronique PSI*, Brenders, Bréal
- *Expériences d'électronique*, Duffait, Bréal
- *Expériendes de physique*, Bellier, p. 235

Prérequis :

- Résolution d'équations différentielles linéaires du seconde ordre
- Electrocinétique, notation complexe pour les signaux

Introduction :

Nous savons déjà qu'un circuit électrique peut être décrit par des équations différentielles mettant en jeu le courant et les tensions perçues par ses composants. Ces équations régissent l'évolution temporelle de ces grandeurs et on peut donc s'intéresser à la charge ou la décharge d'un condensateur soumis à un échelon de tension ou à l'établissement d'un courant dans une bobine. On met ainsi en évidence le comportement en régime transitoire de ces éléments lors de variations brusques d'une tension ou d'un courant continu imposé à leurs bornes. Toutefois, l'un des intérêts de l'électronique est le traitement et le transport de signaux physiques (c'est à dire de grandeurs mesurables : température, éclairnement, position...) qui peuvent être a priori quelconques et nous allons donc nous intéresser à la réponse d'un circuit soumis à une tension ou un courant évoluant dans le temps.

23.1 Analyse fréquentielle d'un signal électrique

23.1.1 Système électrique linéaire invariant dans le temps

Commençons par l'exemple simple d'un circuit RC série. Un générateur impose une tension e aux bornes d'une résistance et d'un condensateur en série. On s'intéresse au cas où l'excitation est une tension purement sinusoïdale : $e(t) = E \cos(\omega t)$. On sait par la loi des mailles que : $e = u_R + u_C$. La loi d'Ohm $u_R = Ri$ et la relation courant tension pour un condensateur $i = C \frac{du_C}{dt}$ nous permettent d'écrire

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}e$$

Notre système est décrit par une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Nous savons résoudre ce genre d'équation : la solution générale est la somme de la solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation avec le terme de forçage.

Nous pouvons voir ici la tension $e(t)$ comme un signal d'entrée et $u_C(t)$ comme une sortie : le circuit reçoit en entrée $e(t)$ et la modifie en une sortie $s(t) = u_C(t)$ (mais on aurait aussi bien pu prendre une autre tension ou le courant comme sortie ou comme entrée). De manière générale pour un Système Linéaire (formé de composants dont la caractéristique peut être modélisée par une équation différentielle linéaire) et Invariant dans le Temps (les caractéristiques des composants sont indépendantes du temps) (SLIT) tous signaux d'entrée et de sortie (tension ou courant) peuvent être reliés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0 s(t) + \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = b_0 e(t) + \sum_{k=1}^m b_k \frac{d^k e(t)}{dt^k}$$

Nous savons qu'au bout d'un temps suffisamment long par rapport au temps caractéristique de réponse du système, nous pouvons négliger la solution du régime transitoire pour ne s'intéresser qu'au régime sinusoïdal forcé. C'est ce que nous ferons dans la suite.

Dans le cas du circuit RC :

- La résolution de l'équation homogène $\frac{du_H}{dt} + \frac{1}{RC}u_H = 0$ nous donnera le comportement transitoire en $u_H = Ae^{-t/\tau}$ où $\tau = RC$. Cette solution tend bien vers 0 pour les temps suffisamment longs.
- La résolution de l'équation inhomogène (c'est-à-dire avec le terme de forçage) peut se faire facilement à l'aide de la notation complexe $\tilde{x} = X e^{j(\omega t + \phi)}$.

Ici on cherche u_I sous la forme $\tilde{u}_I = Ue^{j(\omega t + \phi)}$ où ω est la pulsation du forçage. On trouve donc $j\omega\tilde{u}_I + \frac{1}{\tau}\tilde{u}_I = \frac{1}{\tau}Ee^{j\omega t}$ soit $Ue^{j\phi} = \frac{E}{1+j\tau\omega}$.

23.1.2 Fonction de transfert harmonique

Nous cherchons maintenant une représentation simple de l'équation différentielle caractéristique du système. La notation complexe va nous permettre de l'obtenir. L'équation devient alors :

$$a_0\tilde{s}(t) + \sum_{k=1}^n a_k(j\omega)^k\tilde{s}(t) = b_0\tilde{e}(t) + \sum_{k=1}^m b_k(j\omega)^k\tilde{e}(t)$$

Soit :

$$\left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k(j\omega)^k \right) \tilde{s}(t) = \left(b_0 + \sum_{k=1}^m b_k(j\omega)^k \right) \tilde{e}(t)$$

Et donc :

$$H(j\omega) = \frac{\tilde{s}(t)}{\tilde{e}(t)} = \frac{b_0 + \sum_{k=1}^m b_k(j\omega)^k}{a_0 + \sum_{k=1}^n a_k(j\omega)^k}$$

On appelle $H(j\omega)$ la fonction de transfert harmonique et sa connaissance caractérise entièrement la réponse du système pour un forçage à pulsation donnée.

23.1.3 Décomposition d'un signal périodique en série de Fourier

Bien évidemment, dans la réalité, les signaux d'entrée ne se limitent pas à des cosinus ou des sinus de pulsation donnée, et on aimerait pouvoir étudier la réponse du système pour n'importe quelle entrée. Ceci va être rendu possible par la linéarité du système et la décomposition en série de Fourier d'un signal périodique.

En effet, tout signal s périodique (pour lequel il existe une période T telle que $s(t+T) = s(t)$ pour tout t) peut s'écrire comme une somme de composantes sinusoïdales. Un fondamental de pulsation $\omega = 2\pi/T$ et une infinité d'harmoniques dont la pulsation est un multiple entier de ω :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt$$

Ou de manière analogue :

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi)$$

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\cos \phi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

$$\sin \phi_n = \frac{-b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

Les coefficients constituent le spectre de Fourier du signal, c'est-à-dire qu'ils donnent une représentation fréquentielle du signal (par opposition à la représentation temporelle classique). De manière imagée, ils donnent une indication sur le poids relatif des composantes à différentes fréquences existant dans le signal. Par exemple, un signal purement sinusoïdal n'aura que ses composantes a_1 et b_1 non nulles. Le même signal auquel on ajoute une composante continue aura en plus un a_0 non nul.

La linéarité intervient ensuite. Comme le système est linéaire, on sait que si on a une solution s_1 pour une excitation sinusoïdale $e_1(\omega_1, t)$ et une solution s_2 pour une excitation sinusoïdale $e_2(\omega_2, t)$, alors on a $s_1 + s_2$ qui est solution pour l'excitation $e_1(\omega_1, t) + e_2(\omega_2, t)$.

Et comme on sait maintenant résoudre l'équation différentielle pour une entrée purement sinusoïdale on sait aussi la résoudre pour tout signal périodique!

23.1.4 Exemple de décomposition : le signal créneau

Cf. transparent sur le créneau : p.11 du Bréal.

23.2 Les filtres linéaires

23.2.1 Définitions

Un filtre linéaire est un SLIT dont la fonction de transfert n'est pas constante par rapport à ω . Il peut déphaser, amplifier ou atténuer indépendamment chaque composante spectrale de l'entrée, sans que le spectre de la sortie ne comporte de nouvelle pulsation. Pour une entrée

$$e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

on obtient une sortie

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c'_n \cos(n\omega t + \phi'_n)$$

On appelle ordre du filtre, l'ordre de l'équation différentielle en le signal de sortie (c'est-à-dire l'ordre n dans les équations). Un filtre peut être actif ou passif selon que ses composants sont alimentés ou non.

23.2.2 Comment représenter la fonction de transfert d'un filtre : diagramme de Bode

On a vu qu'un filtre agit de deux façons sur le fondamental et les harmoniques d'un signal : il modifie leurs amplitudes et leurs phases, les deux aspects étant contenus dans la fonction de transfert. On appelle représentation dans le plan de Bode d'une fonction de transfert l'ensemble de deux diagrammes :

- la courbe de Gain, donnant l'action sur les amplitudes : $G(dB) = 20 \log |H(j\omega)|$ (dB pour décibels) tracé en logarithmique.

- la courbe de phase, donnant l'action sur les phases : $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$ (en rad ou degré) tracé en échelle log.

On appelle pulsation de coupure : ω_c tel que $H(j\omega_c) = H_{max}/\sqrt{2}$

Et s'il en existe au moins une, on appelle bande passante à -3 dB l'ensemble des ω tels que $H(j\omega_c) > H_{max}/\sqrt{2}$

23.2.3 Le filtre passe-bas du 1er ordre : exemple du circuit RC

Reprenons notre circuit RC du début :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{RC}s = \frac{1}{RC}e$$

Où s est la tension aux bornes du condensateur et e la tension imposée aux bornes de RC. C'est un système du premier ordre puisque régit par une équation différentielle d'ordre 1. On a :

$$j\omega s + \frac{1}{RC}s = \frac{1}{RC}e$$

et donc

$$\frac{s}{e} = H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$- |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$

$H \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow +\infty$ et $H \rightarrow 1$ quand $\omega \rightarrow 0$

On a un filtre passe-bas avec $\omega_C = \frac{1}{RC}$

$$- \varphi = \arg H(j\omega) = -\arctan(\omega/\omega_C)$$

$\varphi \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow 0$ et $\varphi \rightarrow -\pi/2$ quand $\omega \gg \omega_C$

Exemple pratique : On prend $R = 1k \Omega$, $C = 100 \text{ nF}$ ($f_C \approx 1620 \text{ Hz}$). On constate le comportement général avec des sinusoïdes de fréquences différentes. On envoie un carré de fondamental supérieur à ω_C et on récupère un triangle. On a un comportement intégrateur à haute fréquence. En effet, pour $\omega \gg \omega_C$, $s = \frac{1}{j\omega_C} e$ soit $\text{Re}(s) = \omega_C \int \text{Re}(e) dt$.

Intérêt : si on sait que le signal d'intérêt physique est à basse fréquence, on peut décider que toute haute fréquence est un bruit parasite qu'il faut filtrer.

23.2.4 Le filtre passe-bande du 2nd ordre

Exemple : RLC série, la sortie étant la tension de la résistance. $e = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C$. On a cette fois une équation linéaire du second ordre. L'écriture complexe donne :

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{1}{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

Avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ la pulsation propre et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité.

On peut définir deux fréquences de coupure : $\omega_1 = \frac{1}{2}(\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta})$ et $\omega_2 = \frac{1}{2}(-\frac{\omega_0}{Q} + \sqrt{\Delta})$, avec Δ . On voit alors que $Q = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2$. On voit alors que $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$ est lié à la largeur de la bande passante.

Exemple pratique avec : $L = 10$ mH, $C = 100$ nF, $R = 100 \Omega$ (pour avoir une assez faible bande passante) ou $R=1k \Omega$. On a $f_C \approx 5$ kHz et $Q \approx 3$ ou $Q \approx 30$.

Diagramme de Bode : passe-bande et pentes à -40 dB pour $\omega \gg \omega_0$ et 40 dB pour $\omega \ll \omega_0$. Pas de déphasage à ω_0 , et déphasage de $\pi/2$ pour $\omega \ll \omega_0$ et $-\pi/2$ pour $\omega \gg \omega_0$.

En physique, il est fréquent que le signal que l'on cherche à mesurer soit perturbé par du bruit, c'est-à-dire une composante parasite qui s'additionne au signal d'intérêt et peut éventuellement le masquer complètement si son amplitude est grande devant celle du signal. Un filtre passe-bande permet d'isoler des fréquences d'intérêt, toutefois le filtre ne peut être infiniment sélectif et s'il l'était, il serait alors difficile de le centrer parfaitement sur la fréquence d'intérêt. Une autre méthode existe, plus efficace : la détection synchrone.

23.3 Application : détection synchrone

23.3.1 Principe de la détection synchrone

Le principe de la détection synchrone est d'utiliser la connaissance exacte de la fréquence du signal de sortie d'un système afin de pouvoir l'extraire du bruit.

Pour se faire, on multiplie le signal de sortie, qui est la somme du signal d'intérêt (de fréquence ω_s) et d'un bruit quelconque, par un signal sinusoïdal de fréquence ω_s , et on utilise un filtre passe-bas pour ne récupérer que la composante continue du signal ainsi

créé. Comme le bruit fait a priori apparaître des composantes spectrales à des pulsations ω quelconques, le produit de ces composantes par la sinusoïde à ω_s va donner des sinusoïdes à $\omega_s - \omega$ et $\omega_s + \omega$ qui seront non-nulles, et seront donc filtrées. Le filtre passe-bas peut être très sélectif et n'a pas à être réglé sur une fréquence de coupure particulière.

NB : Si on ne connaît pas la fréquence du signal d'intérêt, on peut balayer en fréquence le signal par lequel on multiplie la sortie, et observer la réponse obtenue.

23.3.2 Application à la mesure d'une fonction de transfert d'un système linéaire

Supposons que l'on veuille caractériser la fonction de transfert d'un filtre linéaire quelconque dont la sortie est très faible et donc noyée dans le bruit. En utilisant la détection synchrone pour des entrées purement sinusoïdales de fréquences connues, on peut reconstruire la fonction de transfert du filtre, malgré la présence du bruit.

En choisissant une entrée $e(t) = \cos(\omega t)$ on a une sortie $s(t) = |H(\omega)| \cos(\omega t + \phi) + \text{bruit}$. En multipliant la sortie par l'entrée, on obtient :

$$s_{ds} = \frac{1}{2} |H(\omega)| (\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)) + \text{bruit} \cos \omega t$$

En utilisant un filtre passe-bas sélectif pour ne garder que la composante continue, on récupère $u_{ds} = \frac{1}{2} |H(\omega)| \cos \phi$.

Ce qui n'est pas alors suffisant pour déterminer indépendamment $|H(\omega)|$ et ϕ .

Il suffit alors de prendre le signal $s(t)$ et de le multiplier par le signal $e(t)$ déphasé d'une demi-période. Le signal alors obtenu a pour composante continue $v_{ds} = \frac{1}{2} |H(\omega)| \sin(\phi)$, ce qui permet de caractériser entièrement la fonction de transfert du filtre.

Bien évidemment, cet exemple n'est qu'illustratif, mais il faut bien retenir que la détection synchrone est une technique très utilisée dès qu'il s'agit d'augmenter le rapport signal/bruit, ce qui devient très rapidement nécessaire lorsqu'on cherche à mesurer des signaux de très faible amplitude.

23.3.3 Action d'une non linéarité sur le filtrage

Nous venons de voir que l'introduction d'un élément non linéaire enrichit le spectre du signal (ici lorsqu'on multiplie l'entrée du système qu'on veut caractériser par sa sortie, on introduit un terme en e_2 d'où la non-linéarité). De manière générale, un élément non linéaire va voir sa caractéristique dépendre de l'excitation qu'il subit. Ainsi, un filtre non linéaire

possède une fonction de transfert qui dépend de l'entrée imposée : $\tilde{s}(t) = H(j\omega)\tilde{e}(t)$. Dans ce cas, le spectre de la sortie va être enrichi par rapport à celui de l'entrée.

Exemple simple : si pour $e(t) = \cos(\omega t)$ on a $s(t) = e(t)^2$ alors, en utilisant la formule de trigonométrie $\cos(\omega t)^2 = \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}$, on voit tout de suite que la sortie aura une composante continue ($\omega = 0$) et une composante de pulsation 2ω , qui n'existaient pas dans le signal initial.

Autre exemple : une diode a une caractéristique non linéaire. On peut faire sentir avec les mains que lorsqu'une diode change d'état (passant ou bloquant), elle introduit une variation brutale du signal qui va se traduire par l'apparition de nombreuses harmoniques dans la décomposition en série de Fourier du signal (cf. la fonction créneau dont les irrégularités se traduisent par une infinité d'harmoniques).

Conclusion :

On peut faire une ouverture sur la transformée de Fourier qui permet d'étendre ce genre de discussion à tous les signaux de durée finie. On peut insister sur l'intérêt de pouvoir traiter les signaux pour tous les problèmes d'acquisition (rapport signal/bruit) ou de transmission (modulation, démodulation) de signaux.

Leçon de physique n° 24

Ondes progressives. Ondes stationnaires



Bibliographie

- *H-prépa : Ondes*, Brébec, Hachette
- *Physique Spé*, Olivier, Tec et Doc
- *Mécanique*, Bruhat, Masson
- *Montages de physique*, Charmont, p. 41
- *Expériences de physique*, Duffait, p. 299
- *Expériences de physique*, Bellier, p. 388

Prérequis :

- Mécanique classique
- Oscillateurs couplés

Introduction :

Introduire à partir de deux exemples simples les phénomènes de propagation d'onde et les outils qui permettent de les décrire.

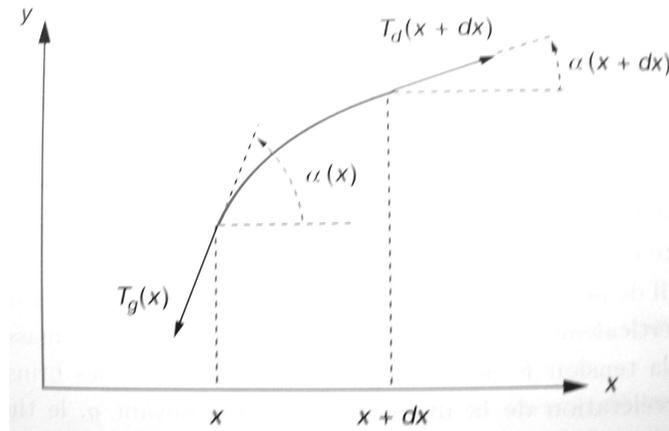
24.1 Etude de la corde vibrante



24.1.1 Modèle

- Corde inextensible
- Masse linéique μ homogène
- On exerce dessus une tension \vec{F} horizontale. On néglige le poids.
- On néglige toutes sortes de frottement.
- On néglige la raideur de la corde.

24.1.2 Etude du mouvement



L'axe Ox est confondu avec la corde au repos, lorsque la corde est en mouvement, le morceau de corde qui est au repos est situé entre x et $x + dx$.

On prend l'hypothèse que α est petit. On applique la RFD au bout de corde.

$$\mu dx \vec{a}_G = \vec{T}_g(x, t) + \vec{T}_d(x + dx, t)$$

En projection sur Ox :

$$0 = -|\vec{T}_g| \cos \alpha(x, t) - |\vec{T}_d| \cos \alpha(x + dx, t)$$

Dans l'hypothèse des angles petits, on a alors :

$$|\vec{T}_g(x, t)| = |\vec{T}_d(x + dx, t)| = T_0$$

En projection sur Oy :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = -T_0 \sin \alpha(x, t) + T_0 \sin \alpha(x + dx, t) = T_0 [\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)] = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t) dx$$

$$\text{Or } \tan \alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$$

D'où l'équation d'onde de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

24.1.3 Solution de l'équation de d'Alembert

En réécrivant l'équation, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) y = 0$$

On pose $u = x - ct$ et $v = x + ct$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

L'équation devient alors :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0$$

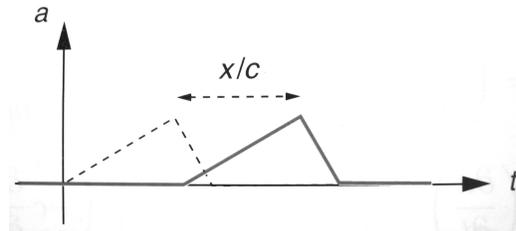
Cette EDP a comme solution évidente les fonctions de la forme :

$$y(u, v) = f(u) + g(v) + \text{constante}$$

Les fonctions f et g sont a priori arbitraires mais elles doivent être précisées par les conditions initiales et les conditions aux limites.

Étudions les propriétés de la fonction $f(x - ct)$:

Si on suppose qu'il y a une déformation à l'instant $t = 0$ à l'abscisse $x = 0$, alors comme $f(0) = f(x - ct)$ pour tout couple (x, t) tel que $x - ct = 0$, i.e. $t = x/c$, on retrouve cette déformation à l'instant $t = \frac{x}{c}$ à l'abscisse x . L'onde a donc avancée dans le sens des x croissants. $f(x - ct)$ décrit une onde progressive dans le sens des x croissants.



On montre de la même manière que $g(x + ct)$ décrit une onde progressive dans le sens des x décroissants.

Remarque : Cas particulier de l'onde progressive harmonique :

La famille des ondes progressives harmoniques est composée des fonctions du type :

$$y(x, t) = A \cos\left(\omega\left(t \pm \frac{x}{c}\right)\right)$$

Ces fonctions présentent une double périodicité spatiale et temporelle. On note T la période temporelle, et λ sa période spatiale, appelée longueur d'onde. (Remarque : si T ne dépend que de la source, on voit ici que λ dépend de c , et donc aussi du milieu (T_0, μ) .)

$$y(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} \pm \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

On définit le vecteur d'onde $k = \pm \frac{2\pi}{\lambda}$. Les fonctions s'écrivent alors :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

La relation qui relie les variations temporelles aux variations spatiales est appelée la relation de dispersion.

Dans notre cas, on a $k = \frac{\omega}{c}$

On définit pour ces ondes une vitesse qui permet de caractériser le déplacement de la forme d'onde : la vitesse de phase. Celle-ci est définie comme la distance entre les positions x_1 et x_2 du maximum de déformation à t_1 et t_2 divisé par l'écart temporel associé :

$$v_\phi = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Or on a : $\omega t_1 - kx_1 = \omega t_2 - kx_2$

Donc

$$v_\phi = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{k}$$

Remarque : La vitesse de phase se définit dans un contexte de réponse sinusoïdal à ω fixé. Elle peut en effet varier en fonction de ω (voir la relation de dispersion), une onde à ω_1 n'aura pas la même vitesse de phase qu'une onde à 2 en toute généralité. C'est le phénomène de dispersion ($v_\phi = f(\omega)$).

Remarque : On a ainsi la relation entre périodes temporelle et spatiale (ou longueur d'onde) : $\lambda = T v_\phi$, où v_ϕ est la vitesse de propagation de la phase.

Remarque : Il faut bien distinguer la vitesse de déplacement de la corde et la vitesse de déplacement de l'onde qui est la vitesse de phase. C'est l'image de la hola : les individus restent à leur place mais la hola se propage.

24.1.4 Aspects énergétiques de la propagation

Notre système est caractérisé par un ensemble de deux variables couplées spatio-temporellement : $y(x, t)$ et $T_y = -T_0 \sin \alpha(x, t) = -T_0 \sin \alpha(x, t)$. On effectue, lors de l'étude du mouvement, on a utilisé les relations :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, t)$$

$$\alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$$

Equivalent au système, en posant $v = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial T_y}{\partial x}(x, t)$$

$$\frac{1}{T_0} \frac{\partial T_y}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, t)$$

On multiplie scalairement par v et par T_y , et on somme les équations :

$$\mu \dot{v}v + T_y' + \frac{1}{T_0} \dot{T}_y T_y + v' T_y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mu v^2(x, t) + \frac{1}{2} \frac{1}{T_0} T_y^2(x, t) \right] + \frac{\partial}{\partial x} (T_y v)(x, t) = 0$$

Si, on exprime tout en fonction de $y(x, t)$ (observable), on obtient une équation de conservation du type :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div} P = 0$$

et que l'on applique ça aux ondes progressives de type $f(x - ct)$, on obtient :

On obtient :

$$e_c = e_p = \frac{1}{2} T_0 f'^2 \quad \text{et} \quad e_m = e_c + e_p \quad \text{et} \quad P = T_0 c f'^2$$

On constate que l'énergie transportée par l'onde, en $M(x)$, entre t et $t + dt$, est $T_0 \cdot c \cdot f'^2 \cdot dt$. C'est l'énergie stockée sur l'élément de corde compris entre x et $x - dx$ avec $dx = c \cdot dt$.

On en déduit donc que la vitesse de propagation de l'énergie est c .

Si on considère une combinaison linéaire des solutions progressives déterminées précédemment du type $f(x - ct) + f(x + ct)$, l'énergie transportée est $P = T_0 \cdot c \cdot f'^2 - T_0 \cdot c \cdot f'^2 = 0$. Une onde qui ne transporte pas d'énergie est appelée une onde stationnaire.

Ondes stationnaires

On se place dans le cadre des ondes progressives harmoniques, et on étudie les combinaisons linéaires du type :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx) = \frac{A}{2} \cos(2\omega t) \cos(2kx)$$

On obtient un découplage entre x et t . En fait, il existe une famille de fonction (qui, tout comme les ondes progressives, sont génératrices de l'ensemble des solutions de l'équation de d'Alembert), qui représentent des ondes stationnaires, caractérisées par un découplage des variables spatio-temporelles. On peut obtenir ces solutions par la méthode de séparation de variables sur l'équation de d'Alembert.

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + \psi) \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi\right)$$

On appelle ventre le lieu des points tels que la fonction spatiale soit extremum :

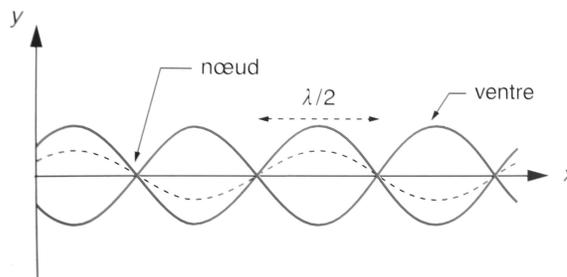
$$\cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi\right) = \pm 1, \text{ c'est à dire, pour } \frac{\omega}{c}x_V + \phi = p\pi$$

On appelle nœud le lieu des points tels que la fonction spatiale s'annule :

$$\cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi\right) = 0, \text{ c'est à dire, pour } \frac{\omega}{c}x_N + \phi = (2p + 1)\frac{\pi}{2}$$

Entre 2 nœud ou 2 ventres successifs, il y a une longueur $\lambda/2$; entre un nœud et un ventre, une longueur $\lambda/4$.

Rque : De même, une onde progressive peut s'écrire comme la superposition de deux ondes stationnaires. En fait, le choix de l'une ou de l'autre des solutions dépend des conditions initiales ou des conditions aux limites.



Oscillations libres d'une corde fixée à ses extrémités

Conditions aux limites : $y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \forall t$

Les conditions aux limites appellent à la résolution en ondes stationnaires :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t + \psi) \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \phi\right)$$

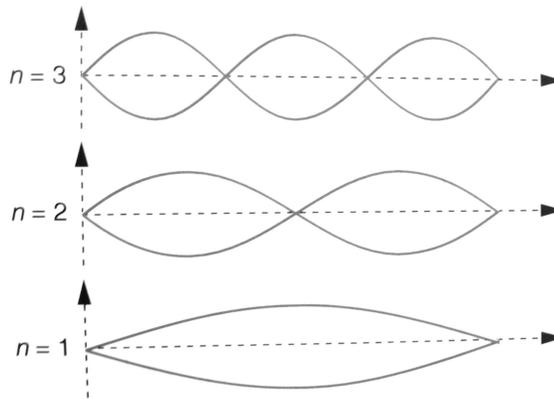
On a alors avec les conditions aux limites :

$$\cos(\phi) = 0 \quad \text{donc} \quad \phi = 0$$

$$\cos\left(\frac{\omega}{c}L\right) = 0 \quad \text{donc} \quad \lambda = \frac{2L}{p}$$

On obtient une superposition d'ondes stationnaires de pulsations correspondant aux modes d'oscillation. Le premier mode s'appelle le fondamental, les autres sont les harmoniques.

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n \cos(\omega t + \psi_n) \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda_n}\right) \right]$$



Les coefficients A_n et ψ_n de la décomposition en série de Fourier compatible avec les conditions aux limites peuvent être déterminés à partir des conditions initiales imposées à la corde vibrante.

$$f = \frac{c}{\lambda} = p \frac{c}{2L} = p \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

Dans une guitare par exemple, les différentes cordes ont des masses linéiques et des tensions différentes, on excite ainsi des fréquences fondamentales différentes

Le guitariste obtient différentes notes en appuyant sur les frettes du manche de sa guitare. Il impose ainsi la position des noeuds des modes (s'il n'appuie pas trop), et n'autorise ainsi que certains harmoniques (jouer des harmoniques). Il peut aussi en appuyant plus fort diminuer la longueur de sa corde.

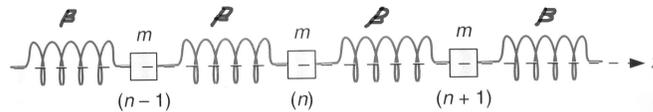
Remarques :

Si le nombre de modes semble ici infini, c'est en fait un défaut du modèle. En effet, l'hypothèse consistant à négliger la raideur de la corde n'est plus acceptable lorsque les fréquences sont trop importantes. La corde est alors en effet extrêmement chahutée !

24.2 Systèmes discrets

De nombreux systèmes physiques possèdent un caractère discret (ex : cristal). Nous allons voir ce que cette discrétude apporte au niveau de la propagation d'ondes.

24.2.1 Chaîne infinie d'oscillateurs couplés



On note $x_n(t)$ la position de la masse m :

$$x_n(t) = na + u_n(t)$$

La RFD donne :

$$m\ddot{u}_n = -\beta(u_n - u_{n-1}) - \beta(u_n - u_{n+1})$$

Donc

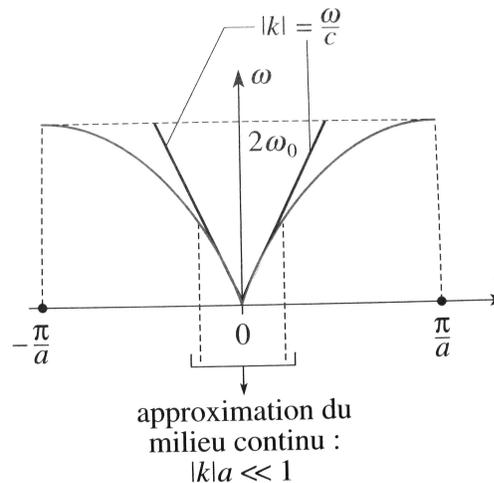
$$\ddot{u}_n = -\omega_0^2(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1}) \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{\beta}{m}$$

On propose une solution harmonique de la forme :

$$u_n = A \cos(\omega t - kna)$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\omega = 2\omega_0 \left| \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \right|$$



Remarques :

Par périodicité, on peut se restreindre à tracer la courbe de dispersion entre $-\pi/a$ et π/a , cette intervalle constitue la première zone de Brillouin.

Il y a une infinité d'oscillateurs donc une infinité de pulsations propres comprises entre ω_c et 0 donné par l'équation. La fonction est bornée entre 0 et ω_c avec $\omega_c = 2\omega_0$. C'est la bande permise de propagation des ondes. Pour les fréquences supérieures, la chaîne agit comme un filtre (passe-bas). La bande $\omega > \omega_c$ est appelée la bande interdite. Les ondes dans cette bande sont évanescentes.

La solution globale est une combinaison linéaire de toutes les solutions possibles, c'est à dire l'intégrale sur ω de la fonction d'essai. Elle n'est pas nécessairement sinusoïdale !

A ω fixé, il existe deux ondes de nombre d'onde k opposés.

On peut prendre le paramètre a arbitrairement petit (notamment de l'ordre de 10^{-10} m, taille caractéristique d'un échantillon dans un cristal). Les longueurs d'onde sonores sont typiquement supérieures à ces distances (de l'ordre de 10 cm). Donc $u_n(t) \approx u_{n+1}(t)$. On

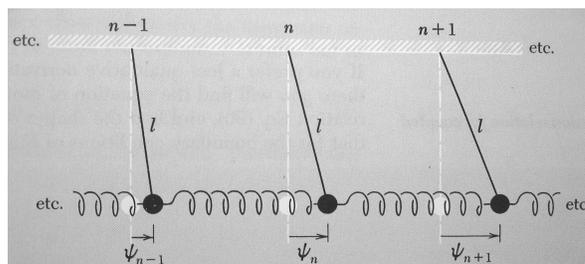
peut alors écrire la solution sous la forme $u(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ tel que $u_n(t) = u(x, t)$ pour $x = na$, fonction continue de classe C^2 qui passe par tous les $x = na$. On peut alors démontrer q'on obtient une équation d'onde de d'Alembert unidimensionnelle. En fait, la limite continue correspond au cas de la corde avec $\mu = m/a$ et $T_0 = \alpha\beta$. On peut alors évaluer la vitesse du son (qui est la a propagation d'une énergie, qui a donc lieu à une vitesse c) dans un cristal : $c = a\sqrt{\frac{\beta}{m}}$. On comprend ainsi m pourquoi le son se propage plus vite dans les solides durs (fer = 5130 m/s) que dans les solides mous (plomb = 1230 m/s).

24.2.2 Chaîne de pendules couplés

Par rapport à la chaîne infinie d'oscillateur, il suffit de changer les un en u_n et de rajouter une force de poids $-\frac{mg}{l}\psi_n$.

L'équation s'écrit donc :

$$\ddot{\psi}_n = -\frac{g}{l}\psi_n - \omega_0^2(2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1}) \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{\beta}{m}$$



On propose une solution harmonique de la forme :

$$u_n = A \cos(\omega t - kx)$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + 4\omega_0^2 \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right)$$

Il apparaît une fréquence de coupure basse $\omega^2 = \frac{g}{l}$.

Conclusion

Après avoir étudié l'exemple fondamental de la corde, nous permettant d'introduire les outils d'étude de la propagation d'onde, et notamment les ondes progressives (qui transportent de l'énergie) et les ondes stationnaires (qui stockent de l'énergie), on a vu deux exemples discrets qui montrent des limites quand aux fréquences de propagation. Dans le dernier cas, l'équation dans le cas continu n'est plus une équation de d'Alembert, mais une équation dite de Klein-Gordon. On trouve ce type d'équation dans l'étude des plasmas.

Leçon de physique n° 25

Ondes acoustiques



Bibliographie

- *Toute la thermodynamique, ... et les ondes mécaniques*, Bocquet, Faroult, Renault, Dunod
- *Physique des ondes, 2ème année*, Olivier, Tec et Doc
- *Montages de physique*, Charmont, p. 25
- *Expériences de physique*, Duffait, p. 297
- *Expériences de physique*, Bellier, p. 396

Pré requis : Thermodynamique classique, Mécanique des fluides (description Eulérienne, équation d'Euler du fluide parfait), Equation de d'Alembert, corde vibrante et ondes planes

Introduction : Les ondes sonores sont des ondes de surpression dans un milieu matériel. L'objectif de cette leçon est d'étudier la propagation de telles ondes dans les fluides.

25.1 Approximation acoustique

25.1.1 Hypothèses

Le fluide est décrit comme un milieu matériel continu, qu'on supposera de plus en écoulement parfait mais compressible (car si le fluide est incompressible, il ne peut pas y avoir

d'onde sonore). On néglige les forces de pesanteur devant les forces de pression dynamique.

On suppose qu'en l'absence d'onde sonore, le fluide est au repos dans le référentiel d'étude :

$$\vec{v} = \vec{0}, \quad p = p_0, \quad \text{et} \quad \mu = \mu_0$$

On a donc en présence de l'onde :

$$\vec{v}(M, t) = \vec{v}_1(M, t)$$

$$p(M, t) = p_0 + p_1(M, t)$$

$$\mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1(M, t)$$

L'approximation acoustique consiste à considérer l'onde sonore comme une petite perturbation du milieu et donc à traiter les quantités μ_1/μ_0 et p_1/p_0 comme des infiniment r petits (on ne conserve que les termes d'ordre 1) et de même seulement les termes d'ordre 1 en v_1 .

Limites du modèle : L'hypothèse adiabatique réversible ne sera pas valable pour un phénomène lent, donc pour des fréquences trop lentes (typiquement dans l'infrason, $f < 20$ Hz).

L'hypothèse de l'approximation acoustique ne sera pas valable pour des surpressions de l'ordre de la pression atmosphérique, ce qui correspond à des puissances élevées.

L'hypothèse de milieu continu est fautive si la longueur d'onde des ondes sonore devient de l'ordre de grandeur du libre parcours moyen des atomes (de l'ordre de $1 \mu\text{m}$ dans les gaz et 1 mm dans les liquides).

25.1.2 Linéarisation des équations de mécanique des fluides

Le fluide est décrit par sa vitesse (3 composantes), sa pression et sa masse volumique, ce qui fait 5 champs scalaires. Pour résoudre ce problème, nous allons avoir besoin de 5 équations. L'équation d'Euler nous en donne 3, la conservation de la masse, 1. Il faut donc une équation de plus. On considèrera une équation thermodynamique et, le fluide étant parfait, un coefficient thermodynamique isentropique.

Equation d'Euler : Pour un fluide parfait, on a

$$\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = -\text{grad} p$$

D'où

$$(\mu_0 + \mu_1) \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_1 \right] = -\overrightarrow{\text{grad}}(p_0 + p_1)$$

Avec l'approximation acoustique, on obtient la première équation (1)

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p_1$$

Conservation de la masse : L'équation de conservation de la masse est

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0$$

d'où

$$\frac{\partial(\mu_0 + \mu_1)}{\partial t} + \text{div}((\mu_0 + \mu_1) \vec{v}_1) = 0$$

Avec l'approximation acoustique, on obtient la deuxième équation (2)

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div} \vec{v}_1 = 0$$

Compressibilité : L'évolution des particules de fluide parfait étant isentropique, on considère le coefficient de compressibilité isentropique

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S$$

Or $\mu = \frac{m}{V}$ donc

$$\chi_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$$

Avec l'approximation acoustique, on obtient la troisième équation (3)

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = \mu_0 \chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t}$$

25.2 Equation de propagation

25.2.1 Equation de propagation

On a obtenu des équations couplées, que l'on va maintenant chercher à découpler.

En identifiant les équations, on n'obtient plus que deux équations couplées :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p_1$$

$$\chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\text{div} \vec{v}_1$$

On considère alors la divergence de la première équation :

$$\mu_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right) = -\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} p_1)$$

Donc

$$\mu_0 \chi_S \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \Delta p_1 = 0$$

On obtient donc une équation de propagation de D'Alembert pour la surpression :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \Delta p_1 = 0$$

avec

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_S}}$$

On obtient de même une équation de propagation de D'Alembert pour la vitesse en considérant le gradient de la deuxième équation :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} - \Delta \vec{v}_1 = \vec{0}$$

Remarque : Le fait de prendre en compte la viscosité de l'onde fait apparaître un amortissement dépendant de la fréquence, et donc une dispersion, comme nous allons le voir dans l'expérience.

25.2.2 Célérité des ondes sonores

Interprétation : Les équations de propagation obtenues généralisent au cas tridimensionnel celle obtenue dans le cas de la corde vibrante.

Le terme $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$ correspond donc à la vitesse de propagation des ondes \rightarrow transparent

Remarque : En général, la masse volumique et la compressibilité varient en sens opposé. La célérité dépend de la température et de la pression dans le fluide.

Expérience :

On mesure la célérité d'une onde sonore se propageant dans l'eau. L'onde sonore est formée d'une séquence de trains d'onde, répétés à une cadence de 880 Hz. On effectue une mesure par temps de vol. La distance entre émetteur et récepteur est $L = 23 \pm 2$ cm et on lit sur l'oscilloscope le Δt entre l'émission de l'onde et sa réception : $\Delta t = 157 \mu\text{s}$. Alors : $c = L/\Delta t = 1452 \pm 150 \text{ m.s}^{-1}$ en bon accord avec $c_{table} \approx 1482 \text{ m.s}^{-1}$ + transparent descriptif

Application au gaz parfait : On cherche à déterminer la célérité d'une onde sonore se propageant dans un gaz que l'on modélise par le modèle du gaz parfait. Il faut pour cela déterminer le coefficient de compressibilité isentropique.

On utilise :

-la loi de Laplace :

$$pV^\gamma = \text{cste} \text{ donc } \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \text{ donc } -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right) = \frac{1}{\gamma p} = \chi_s$$

-la loi des gaz parfaits :

$$pV = nRT = \frac{m}{M} RT \text{ et } \mu = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$$

$$\text{donc } \mu \chi_s = \frac{pM}{RT} \times \frac{1}{\gamma p} = \frac{M}{\gamma RT}$$

soit à 3000 K,

$$c_{GP} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 347 \text{ m.s}^{-1}$$

Ce résultat est en bon accord avec les tables.

25.2.3 Aspect énergétique : bilan local

De même que pour la corde vibrante ou pour les ondes électromagnétiques, une énergie est associée aux ondes sonores. On cherche ici établir un bilan d'énergie local sur un élément de volume de fluide $d\tau$. On a :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p_1$$

$$\chi_S \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\text{div} \vec{v}_1$$

donc

$$\vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p_1 = -\mu_0 \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$$

et

$$p_1 \text{div} \vec{v}_1 = -\chi_S p_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial p_1^2}{\partial t}$$

Donc

$$\text{div}(p_1 \vec{v}_1) = p_1 \text{div} \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial p_1^2}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1^2}{\partial t} \right)$$

On obtient ainsi l'équation de bilan local d'énergie :

$$\text{div}(p_1 \vec{v}_1) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \chi_S p_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 \right) = 0$$

On pose

$$\vec{\Pi} = p_1 \vec{v}_1$$

et

$$e_{son} = \frac{1}{2} \chi_S p_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2$$

On obtient

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial e_{son}}{\partial t} = 0$$

résultat analogue au bilan local d'énergie électromagnétique

25.2.4 Solution générale de l'équation de propagation

Dans le cas d'une équation de d'Alembert à une dimension, comme par exemple pour la corde vibrante, les solutions ont la forme d'une onde plane

$$y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Dans le cas des ondes acoustiques, on aura des solutions planes pour chaque composante de la vitesse et pour la surpression. On voit donc que dans le cas général à 3D, la solution générale de l'équation de propagation sera de la forme :

$$a(\vec{r}, t) = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct) + g(\vec{u} \cdot \vec{r} + ct)$$

On considèrera le cas où l'on a une onde progressive, ie qu'une seule direction de propagation. Par exemple, pour une onde progressive selon les $x > 0$, on aura :

$$a(\vec{r}, t) = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct)$$

25.3 Ondes acoustiques planes monochromatiques progressives monochromatiques

Nous avons discuté indépendamment les 4 champs scalaires v_{1x}, v_{1y}, v_{1z} et p_1 dont les équations de propagation sont découplées. Mais en réalité, il existe des relations entre ces différentes composantes. Toutes les solutions ondes planes ne sont pas solutions de l'ensemble de ces équations.

Nous allons illustrer cela sur l'exemple d'une onde acoustique plane progressive monochromatique de la forme :

$$a(\vec{r}, t) = \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0)$$

avec vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$

25.3.1 Structure longitudinale

On considère $\vec{v}_1 = \underline{v}_{10} \exp [j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ et $\vec{p}_1 = \underline{p}_{10} \exp [j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$

L'équation d'Euler donne :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p_1$$

Donc

$$\mu_0 \omega \vec{v}_1 = \vec{k} p_1$$

Donc

$$\mu_0 c \nu_1 = p_1$$

La vitesse est donc colinéaire au vecteur d'onde : l'onde sonore plane progressive est longitudinale.

25.3.2 Aspect énergétique

Energie acoustique : On considère la densité volumique d'énergie acoustique :

$$e_{son} = \frac{1}{2} \chi s p_1^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \nu_1^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \nu_1^2 = \frac{1}{2} \chi s p_1^2$$

Dans une onde plane progressive monochromatique, l'énergie volumique est équirépartie entre la contribution de la vitesse et la contribution de la surpression.

Valeur moyenne : La vitesse de l'onde plane progressive monochromatique peut s'écrire :

$$\langle e_{ac} \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 \nu_{10}^2 = \frac{1}{2} \chi s p_{10}^2$$

Vecteur densité de puissance sonore :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 c \nu_{10}^2 \vec{u}$$

25.3.3 Ordres de grandeurs et validité de l'approximation acoustique

On considère une onde sonore de puissance 10^{-6}W (seuil de sensibilité de l'oreille humaine) rayonnée sur $0,5\text{ cm}^2$ (taille du conduit auditif) dans l'air ($\mu_0 = 1,3\text{ kg.m}^{-3}$), à température ambiante.

Vitesse :

$$\Pi = \frac{P}{S} = \frac{1}{2}\mu_0 c \nu_1^2$$

Donc

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{2P}{S\mu_0 c}} \approx 10^7\text{ m.s}^{-1} \ll c$$

On peut donc bien négliger l'accélération convective devant l'accélération locale.

Surpression :

$$p_1 = \mu_0 c \nu_1$$

Donc

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{4 \cdot 10^{-5}}{10^5} \approx 4 \cdot 10^{-10} \ll 1$$

L'approximation acoustique est donc justifiée pour la surpression.

La limite de cette approximation est donnée par :

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{\mu_0 c \nu_1}{p_0} = \frac{\mu_0 c}{p_0} \sqrt{\frac{2P}{S\mu_0 c}}$$

Donc

$$\frac{P}{S} = \frac{p_0^2}{2\mu_0 c} \approx 10^7\text{ W.m}^{-2}$$

Cette puissance n'est jamais atteinte en pratique et n'est donc pas une limitation.

Perturbation à la masse volumique :

On relie le rapport μ_1/μ_0 au rapport p_1/p_0 :

$$p\mu^{-\gamma} = \text{constante}$$

D'où

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{1}{\gamma} \frac{p_1}{p_0} = \frac{5}{7} \times 4.10^{-10} \approx 2.10^{-10} \ll 1$$

L'approximation acoustique est donc justifiée pour également la masse volumique.

Hypothèse de milieu continu :

On a supposé que le milieu se comportait comme un milieu continu vis-à-vis de l'onde sonore. Ceci n'est valable que si la longueur d'onde de l'onde sonore est supérieure au libre parcours moyen des atomes dans le fluide. La limite est atteinte lorsque :

$$\lambda = \frac{c}{f} \leq l_{pm}$$

donc $f \approx 330$ MHz

Conclusion :

Nous avons mis en place les outils d'étude des ondes sonores ainsi que leurs limites.

Il est intéressant de conclure sur une analogie optique, par l'introduction d'une impédance acoustique Z , similaire physiquement à l'indice de réfraction en optique. Cette impédance permet de comprendre nombre de phénomènes acoustiques (réfraction et réflexion acoustique à l'interface entre deux fluides ainsi que l'adaptation d'impédance qu'est le porte-voix, les interférences et la diffraction des ondes sonores par une porte) par analogie totale avec l'optique.

Leçon de physique n° 26

Propagation avec dispersion



Bibliographie

- *Physique générale*, Alonso
- *H-prépa : Ondes*, Hachette
- *Physique des ondes*, Olivier, Tec et Doc

Introduction :

Equation de d'Alembert = milieu idéal, mais pas réalité sauf dans le vide en propagation libre.

26.1 Propagation dans un milieu dispersif

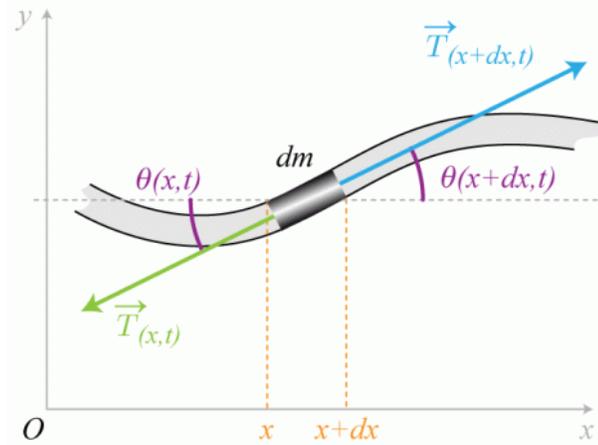
26.1.1 Mise en défaut de l'équation de D'Alembert

Rappel : exemple de la corde vibrante

- PFD et déduction de l'équation de D'Alembert :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

C'est une équation de propagation des vibrations transversales le long d'une corde vibrante idéale avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.



- Notions d'onde, onde plane, onde plane progressive, onde plane progressive monochromatique.

$$y(x, t) = y_0 e^{j(kx - \omega t)}$$

- Relation de dispersion : C'est la relation entre le nombre d'onde k et la pulsation temporelle ω

Corde vibrante non idéale

Frottements avec l'air : phénomène dispersif dominant

Nouvelle équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial y}{\partial t} + c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

26.1.2 Equation de dispersion

Détermination de l'équation

Soit une OPPM de fréquence ω :

$$y(x, t) = y(\omega) \cdot e^{-j(kx - \omega t)}$$

On remplace dans l'équation de propagation :

$$k^2 c^2 = \omega^2 - j \frac{\omega}{\tau}$$

- terme imaginaire

- artifice mathématique : $k = k_1 - j k_2$

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$2k_1 k_2 = \frac{\omega}{\tau} c^2$$

Signification de k_1 et k_2

Evolution spatiale $\rightarrow k$ imaginaire et ω réelle

La partie imaginaire traduit la variation d'amplitude de l'onde au cours de sa propagation. En particulier, si elle est négative, elle s'accompagne d'un amortissement de l'onde. L'absorption peut être due à un phénomène d'absorption (dissipatif), ou à la géométrie particulière du milieu de propagation.

$$y(x, t) = y(\omega) e^{-j(k_1 x - \omega t)} \cdot e^{-k_2 x}$$

k_1 et k_2 réels

Si $k_1 = 0$ et $k_2 < 0$, on a une onde évanescente.

dispersion :

- vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k} =$ vitesse de propagation des plans d'équiphase

- corde idéale : $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} =$ constante

- corde non idéale : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$

- le milieu de propagation sépare les ondes de pulsation différentes = milieu dispersif !!!
notion limitée à un paquet d'ondes de dimensions finies. Dans ce cas, la vitesse de phase dépend de ω .

absorption :

- l'amplitude varie par le terme $\exp(-k_2 x)$, elle diminue car $k_2 > 0$.

Exemple : plasmas

Les équations de Maxwell nous donnent :

$$\rho = 0 \text{ alors } \operatorname{div} \vec{E} = \vec{0}$$

Onde plane se propageant dans les x croissants :

$$\vec{E} = E_y e^{-(kx-\omega t)} \vec{e}_x + E_z e^{-(kx-\omega t)} \vec{e}_z$$

En outre,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = k^2 \vec{E} = (-\mu\sigma\omega j + \frac{\omega^2}{c^2}) \vec{E}$$

donc

$$k^2 = -\mu\sigma\omega j + \frac{\omega^2}{c^2}$$

Pour les plasmas : $\sigma = -j \frac{ne^2}{m\omega}$

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

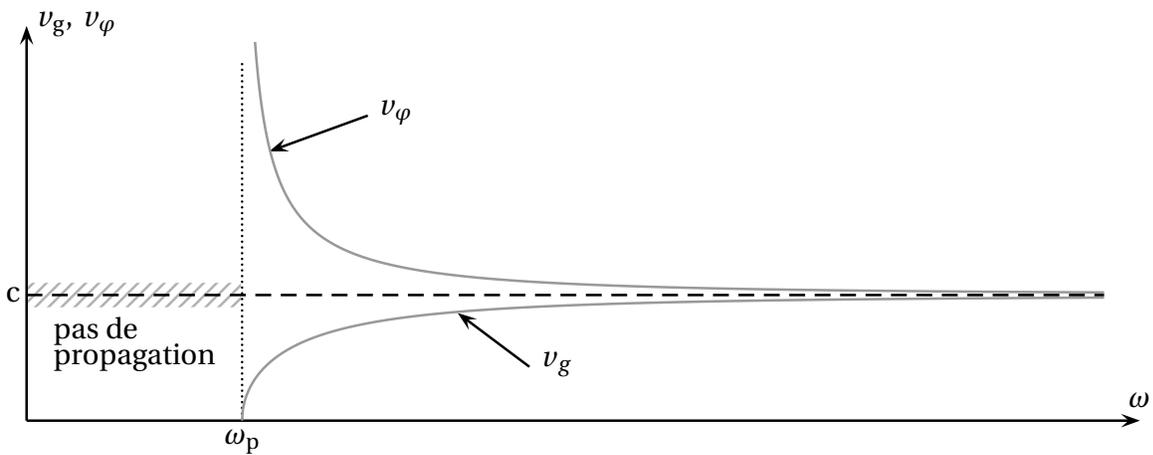
avec $\omega_p = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c$$

mais la phase n'est pas un objet matériel.

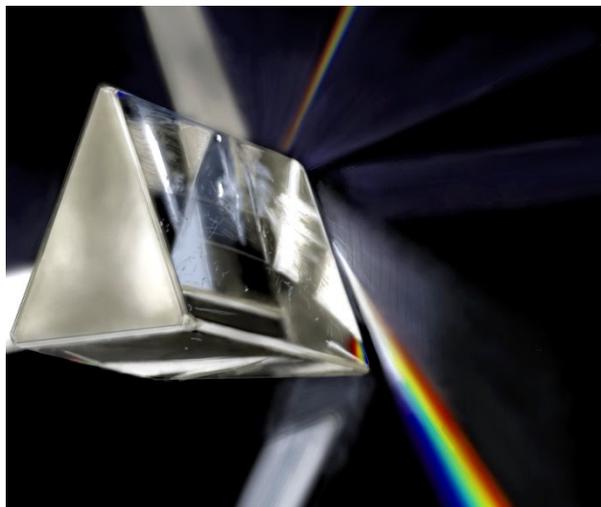
La vitesse de groupe s'écrit

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c$$



Rappel : vitesse de phase = vitesse de déplacement d'un plan de phase constante.

Le prisme



Faire la manip et montrer l'étalement des couleurs.

$$n = f(1/\lambda^2) \text{ (Cauchy)}$$

26.2 Paquet d'ondes planes

26.2.1 OPPM = outil mathématique

OPPM définie de $-\infty$ à $+\infty$ et possède donc une énergie infinie.

Les ondes physiques ont une extension temporelle et spatiale, ce qui n'est pas traduit dans l'expression de l'OPPM.

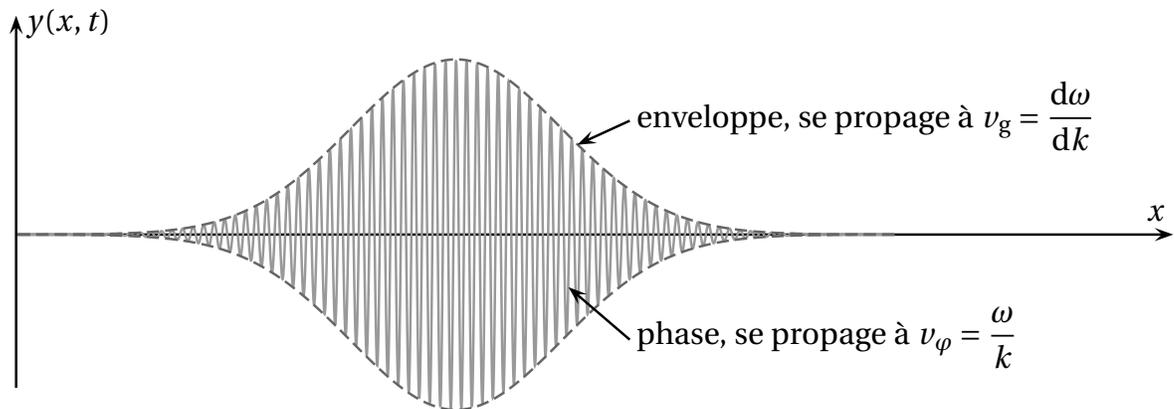
Cependant l'OPPM reste une bonne approximation de la réalité tant que la zone où se propage l'onde n'est pas perturbée et est loin de la source.

26.2.2 Représentation de la propagation d'un paquet d'ondes

Un paquet d'onde est constitué d'une onde de pulsation ω moyenne, modulé par une enveloppe de longueur finie contenant un grand nombre de périodes.

On prend 2 OPPM :

$$\psi(x, t) = 2\psi_0 \cos(\delta\omega t - \delta kx) \cos(\omega_m t - k_m x)$$



- C'est un phénomène de battements
- $V = \delta k / \delta \omega =$ vitesse du paquet
- l'extension spatiale du signal diminue, info au niveau des ventres de modulation
- Période de l'enveloppe $T = 2\pi / \delta \omega$

Si on additionne un nombre croissant d'ondes : l'extension du signal diminue.

Si on additionne un nombre infini d'ondes tel que $\delta\omega \rightarrow d\omega \rightarrow 0$, c'est à dire que l'on fait une addition continue d'OPPM passage à la limite :

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\omega) \cdot e^{-j(kx - \omega t)} d\omega$$

La période $T \rightarrow 0$, c'est à dire que le paquet d'ondes est localisé dans l'espace et dans le temps : il est non périodique, ce qui correspond bien à une onde physique.

26.2.3 Vitesse de groupe et évolution

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

C'est la pente de l'équation de dispersion $\omega = f(k)$, elle représente la vitesse de déplacement du paquet d'ondes.

Signification physique : dans un milieu à dispersion positive : chaque onde du paquet d'ondes chemine avec sa propre vitesse : les plus rapides (haute fréquence) bleu prennent de l'avance et les plus lentes (basse fréquence rouge) prennent du retard, ce qui entraîne une déformation du paquet d'ondes.

Exemples :

- les vagues :

Le mouvement des vagues peut être considéré comme irrotationnel, il dérive donc d'un potentiel. Comme l'eau est pratiquement incompressible, ce potentiel satisfait l'équation de Laplace. Pour les longueurs d'onde supérieures à 30 cm, la tension superficielle peut être négligée, et les solutions périodiques de faible amplitude (ondes d'Airy) obéissent à une relation de dispersion :

$$\omega^2 = g \cdot k \cdot \tanh(k \cdot h)$$

Ici la vitesse de groupe correspond à la vitesse des crêtes des vagues si le milieu n'est pas trop dispersif, autrement il se produit un étalement de la vague et la vitesse de propagation n'a plus de sens.

- Attention il y a aussi la dispersion normale et anormale

- puis la dispersion nodale (fibre optique)

- plasma :

Ondes de plasma élémentaires

Caractéristique EM	Oscillation	Conditions	Relation de dispersion	Nom	
Électrostatique	électrons	$\vec{B}_0 = 0$ ou $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$	$\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 v_{th}^2$	onde de Langmuir	
		$\vec{k} \perp \vec{B}_0$	$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_c^2 = \omega_h^2$	oscillation hybride supérieure	
	ions	$\vec{B}_0 = 0$ ou $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$	$\omega^2 = k^2 v_s^2 = k^2 \frac{\gamma_e K T_e + \gamma_i K T_i}{M}$	onde acoustique ionique	
		$\vec{k} \perp \vec{B}_0$ (environ)	$\omega^2 = \Omega_c^2 + k^2 v_s^2$	onde cyclotron électrostatique	
		$\vec{k} \perp \vec{B}_0$ (exactement)	$\omega^2 = [\omega_i^{-2} + (\Omega_c \omega_c)^{-1}]^{-1}$	oscillation hybride inférieure	
Électromagnétique	électrons	$\vec{B}_0 = 0$	$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$	onde lumineuse	
		$\vec{k} \perp \vec{B}_0, \vec{E}_1 \parallel \vec{B}_0$	$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$	onde « O »	
		$\vec{k} \perp \vec{B}_0, \vec{E}_1 \perp \vec{B}_0$	$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_h^2}$	onde « X »	
		$\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ (polarisation circulaire droite)	$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 - (\omega_c / \omega)}$	onde « R »	
		$\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ (polarisation circulaire gauche)	$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2 / \omega^2}{1 + (\omega_c / \omega)}$	onde « L »	
	ions	$\vec{B}_0 = 0$			-
		$\vec{k} \parallel \vec{B}_0$		$\omega^2 = k^2 v_A^2$	onde d'Alfvén
		$\vec{k} \perp \vec{B}_0$	$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_s^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2}$	onde magnétosonique	

Conclusion :

Les milieux dispersifs et la notion de paquets d'ondes planes décrivent mieux la réalité. Ils permettent d'introduire de nouvelles notions telles que vitesse de phase qui décrit l'évolution d'un plan d'onde à l'intérieur du paquet d'ondes et la vitesse de groupe qui permet de définir la vitesse de propagation du paquet d'ondes et donc de l'énergie.

Propagation guidée des ondes



Bibliographie

- *Electromagnétisme 2*, Faroux, Dunod
- *Optique physique, propagation de la lumière*, Taillet, De Boeck
- *Les phénomènes électromagnétiques*, Lorrain, Dunod
- *Electromagnétisme 2ème année*, Gié, Tec et Doc
- *Montages de physique*, Charmont, p. 29
- *Expériences de physique*, Duffait, p. 305

Introduction :

Le guidage des ondes électromagnétiques est d'un grand intérêt pour canaliser l'énergie électromagnétique et ainsi assurer le transport et l'utilisation de cette énergie. La technologie de guidage dépend essentiellement des fréquences et des longueurs d'onde des ondes transportées. Les fibres optiques utilisent les variations des indices de réfraction des matériaux isolants pour transporter la lumière dans le domaine du visible ou du spectre proche, tandis que les ondes de fréquence micro-ondes sont canalisées par des guides métalliques.

27.1 Le guide d'ondes

27.1.1 Description des guide d'ondes



Quelques exemples de guide d'ondes

Les applications pratiques des ondes électromagnétiques dans le domaine des communications ou du radar requièrent souvent un guidage des ondes, à la fois pour empêcher les interférences et pour canaliser l'énergie de façon à minimiser l'atténuation de l'onde. Ce guidage est causé par la présence d'une structure conductrice ou diélectrique (ou une combinaison des deux) qui permet des modes de propagation privilégiés dans une direction. Nous allons supposer que cette structure a une symétrie de translation dans une direction. On s'intéressera ici au guidage d'ondes rectangulaire.

La forme des ondes électromagnétiques pouvant se propager dans un guide d'ondes n'est pas simple. Si on pense à une onde de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(kx - \omega t)$ avec $\vec{E} \perp \vec{u}_z$, alors des problèmes de condition aux limites se posent. Sur les bords, quelle que soit la coordonnée z , la champ tangentiel doit être nul. Cette forme d'onde électromagnétique n'est donc pas solution du problème. Ainsi, les conditions aux limites interdisent la possibilité d'une onde plane progressive monochromatique dans la plupart des guides d'ondes et imposent une forme plus complexe.

Les différents modes :

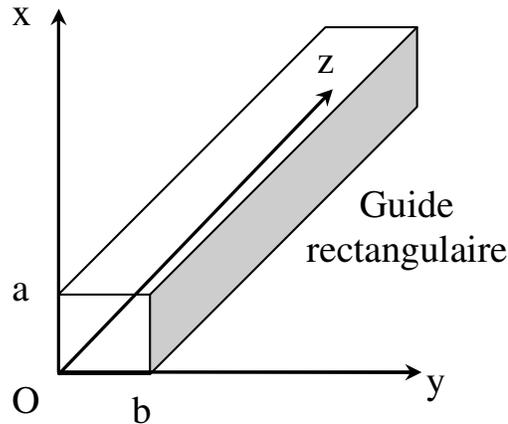
Les ondes électromagnétiques guidées, à la différence des ondes se propageant dans le vide, ne sont pas toujours transverses, c'est-à-dire que le champ électrique et magnétique ne sont pas nécessairement perpendiculaires à la direction de propagation. Il faut considérer différents modes de propagation pour une valeur donnée de la fréquence. On distingue les cas suivants :

- Mode TEM (Transverse Electric et Magnétique) : les champs \vec{B} et \vec{E} sont perpendiculaires à la direction de propagation comme si l'onde se propageait dans le vide. On verra que ce type d'onde est impossible dans un guide d'ondes fermé.

- Mode TM (Transverse Magnétique) : le champ \vec{B} est perpendiculaire à la direction de propagation, mais $E_z \neq 0$
- Mode TE (Transverse Electrique) : le champ \vec{E} est perpendiculaire à la direction de propagation, mais $B_z \neq 0$

27.1.2 Propagation de modes TE dans un guide d'ondes à section rectangulaire

On considère un guide d'ondes rectangulaire de section par $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$. Le guide d'ondes est illimité selon z et rempli d'air assimilable à du vide du point de vue électrique. La conductivité des parois étant grande, les champs de très haute fréquence ne pénètrent très peu le métal. La champ électromagnétique est confiné à l'intérieur du guide d'ondes. C'est pourquoi on parle de propagation guidée.



La continuité des composantes tangentes de \vec{E} et normale \vec{B} , associée à la nullité des champs dans le métal, donnent les relations suivantes :

$$E_T = B_N = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } x = a, \text{ ainsi qu'en } y = 0 \text{ et } y = b.$$

On s'intéresse à un champ électrique de la forme

$$\vec{E} = f(x, y)e^{i(kx - \omega t)}\vec{u}_y$$

Dans le vide : $\text{div} \vec{E} = 0$ donc $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ donc $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$

Donc f ne dépend que de x .

L'équation de d'Alembert s'écrit ici

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

Soit

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) f = 0$$

Si $k^2 > \frac{\omega^2}{c^2}$: On a des solutions en exponentielles réelles qui ne peuvent s'annuler partout : cas inintéressant.

Si $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$: les solutions sont affines et sont nulles partout comme précédemment.

Si $k^2 < \frac{\omega^2}{c^2}$: $f(x) = E_0 \sin kx + E'_0 \cos Kx$ avec $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$.

Or $f(0) = 0$ donc $E'_0 = 0$. En outre, $f(a) = 0$ donc $K = \frac{n\pi}{a}$. On obtient ainsi la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

Cette solution appelée mode n s'écrit :

$$\vec{E}_n = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

On montre que la relation de dispersion du mode $TE_{n,m}$ est de la forme

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$$

Toutes ces expressions constituent mathématiquement une base de solutions qui permettent ensuite de connaître l'expression de l'onde électromagnétique se propageant effectivement dans le guide d'ondes.

Pour qu'une onde se propage, il faut que le vecteur d'onde soit réel, d'où :

$$\omega > \omega_{n,c} = \frac{n\pi c}{a}$$

qui définit un ensemble de pulsations critiques (une pulsation par mode n)

Si $\omega < \omega_{n,c}$, k est imaginaire et le champ est de la forme

$$E_n = E_0 e^{k''z} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{i\omega t}$$

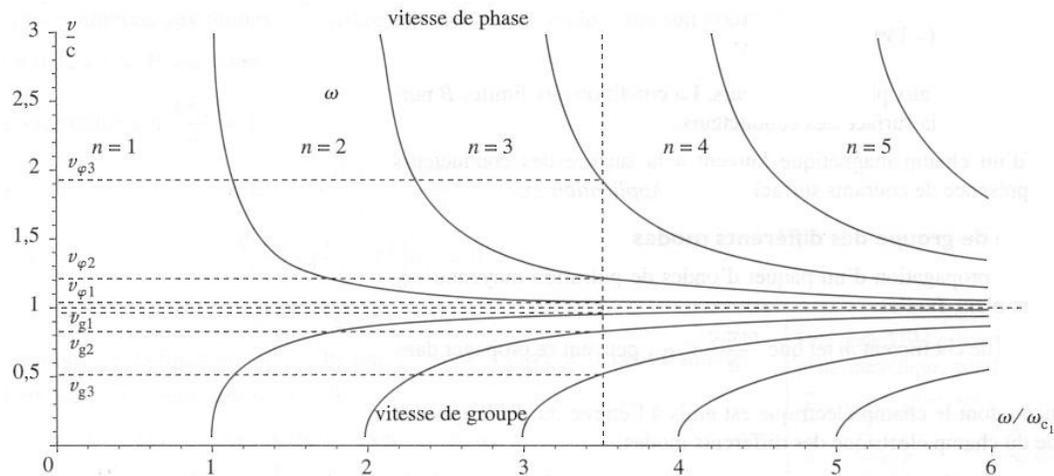
Il n'y a plus propagation de la phase et, le vide ne pouvant être amplificateur, k'' est négatif : l'onde s'amortit exponentiellement, on parle d'onde stationnaire exponentiellement amortie. Le guide d'onde se comporte comme un filtre passe-haut.

On peut alors calculer la plus petite fréquence pouvant se propager qui correspond au mode fondamental :

$$f_{1,c} = \frac{\omega_{1,c}}{2\pi} = \frac{c}{2a}$$

La vitesse de phase se calcule ainsi :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{n,c}}{\omega}\right)^2}} > c$$



La vitesse de phase dépend de la pulsation. Il y a dispersion : ce n'est pas le vide en soi qui est dispersif, mais bien le mode de propagation guidée (contrairement à la propagation libre).

Pour la vitesse de groupe, on peut différencier la relation de dispersion :

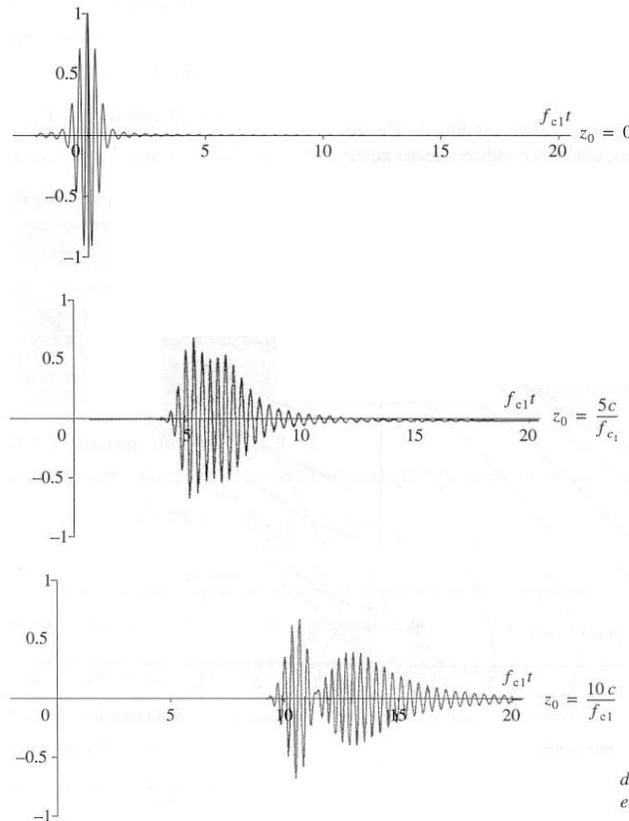
$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \text{ donc } v_\varphi \times v_g = c^2$$

D'où

$$v_g = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{n,c}}{\omega}\right)^2} < c$$

On a mis en évidence l'existence d'ondes solutions des équations de Maxwell qui sont transverses électriques mais non transverses magnétiques (on aurait pu choisir l'inverse). Ces ondes ont une double structure : progressive selon Oz et stationnaire selon Ox , conformément à l'interprétation de cette solution comme superposition des deux ondes planes progressives monochromatiques se propageant en zig zag à l'intérieur du guide.

Ces solutions dépendent d'entiers et portent le nom de modes. Il y a dispersion des ondes dans le guide, qui agit comme un filtre passe-haut. Seules les fréquences supérieures à une fréquence de coupure située dans le domaine des micro-ondes (GHz) peuvent se propager. En conséquence, les signaux dans le guide se déforment au cours de leur propagation. Cela constitue une contrainte à prendre en compte pour la transmission d'informations.



27.2 La fibre optique

Nous allons maintenant considérer la propagation des ondes optiques dans une fibre optique. Afin d'alléger les calculs, nous allons simplement une situation plane.

27.2.1 Mise en équation et résolution

Dans un milieu homogène d'indice de réfraction n , les équations de Maxwell conduisent à des équations de propagation de la forme

$$\Delta f - \frac{n^2}{c^2} f = 0$$

où f désigne l'une quelconque des composantes d'un des champ \vec{E} ou \vec{B} . Puisque l'on cherche des solutions ne dépendant pas de la coordonnée y ici, on peut la réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Pour résoudre cette équation, on peut se limiter aux ondes monochromatiques de pulsation ω , et se dirigeant selon z avec le vecteur d'onde k_z . On cherche donc des solutions du type

$$f(x, z, t) = \phi(x) e^{i(k_z z - \omega t)}$$

ce qui donne après substitution

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \left(k_z^2 - \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \right) \phi(x) = 0$$

On cherche une onde qui se propage dans le cœur, décrite par des fonctions oscillantes, mais qui ne se propage dans la gaine. Il faut donc

$$\frac{n_g \omega}{c} < k_z < \frac{n_c \omega}{c}$$

La première inégalité $\frac{n_g \omega}{c} < k_z$ exprime la condition de réflexion totale entre le cœur et la gaine.

Il y a trois régions distinctes.

- Dans le cœur, on cherche des solutions oscillantes de la forme

$$\phi(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \quad \text{avec} \quad k_x = \sqrt{k_c^2 - k_z^2}$$

valable lorsque $k_c < k_g$.

- Dans les deux régions d'indice n_g qui constituent la gaine, on cherche une solution non oscillante, soit $k_c > k_g$, et on arrive à, en notant $\kappa_x = \sqrt{k_z^2 - k^2}$

$$\begin{aligned} \phi_g(x) &= C \exp\left[-\kappa_x \left(x - \frac{a}{2}\right)\right] \quad \text{pour} \quad x > \frac{a}{2} \\ \phi_g(x) &= C' \exp\left[-\kappa_x \left(x + \frac{a}{2}\right)\right] \quad \text{pour} \quad x < -\frac{a}{2} \end{aligned}$$

Conditions aux limites et solutions pour les ondes TE

Nous allons commencer par les ondes TE et considérer que la quantité ϕ représente E_y .

A l'interface entre les diélectriques, les composantes de \vec{E} parallèles à l'interface sont continues, c'est le cas en particulier pour E_y et donc pour $\phi(x)$.

On doit donc avoir $\phi_c(\frac{a}{2}) = \phi_c(-\frac{a}{2})$ et $\phi_c(-\frac{a}{2}) = \phi_c(\frac{a}{2})$

$$\begin{aligned} A \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) + B \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) &= C \\ A \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) - B \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) &= C' \end{aligned}$$

La composante de \vec{B} et donc des dérivées spatiales de \vec{E} doivent aussi être continues.

$$\begin{aligned} -A k_x \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) + B k_x \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) &= \kappa_x C \\ -A k_x \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) - B k_x \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) &= \kappa_x C' \end{aligned}$$

On peut éliminer C et C' , on obtient

$$\begin{aligned} (A \kappa_x + B k_x) \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) + (B \kappa_x - A k_x) \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) &= 0 \\ (A \kappa_x - B k_x) \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) + (-B \kappa_x - A k_x) \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Soit par somme ou par différence

$$\begin{aligned} 2A \kappa_x \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) - 2A k_x \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) &= 0 \\ 2B \kappa_x \cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) + 2B k_x \sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\tan\left(\frac{k_x a}{2}\right) = \frac{\kappa_x}{k_x}$$

$$\cotan\left(\frac{k_x a}{2}\right) = -\frac{\kappa_x}{k_x}$$

Cette dernière égalité s'écrit aussi, en notant que $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cotan(x)$

$$\tan\left(\frac{k_x a}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\kappa_x}{k_x}$$

On remarque que A et B ne peuvent être simultanément non nuls. Les solutions sont donc ou bien paires ($B = 0$) ou impaires ($A = 0$).

Sous une forme unique, on a :

$$\tan\left(\frac{k_x a}{2} + \frac{p\pi}{2}\right) = \frac{\kappa_x}{k_x}$$

soit

$$\tan\left(\frac{a}{2}\sqrt{k_c^2 - k_z^2} + \frac{p\pi}{2}\right) = \frac{k_z^2 - k_g^2}{k_c^2 - k_z^2}$$

où $p = 0$ pour les solutions paires et $p = 1$ pour les solutions impaires. Ces équations déterminent les valeurs de k_z permises dans la fibre. Elles n'admettent pas de solution analytique, mais on peut les résoudre de façon numérique ou graphique.

Conditions aux limites et solutions pour les ondes TM

Pour les ondes TM, les conditions aux limites sont différentes. Les quantités f et ϕ_x représentent cette fois B_y dont la continuité donne des relations très similaires. On obtient la relation

$$\tan\left(\frac{a}{2}\sqrt{k_c^2 - k_z^2} + \frac{p\pi}{2}\right) = \frac{n_c^2 k_z^2 - k_g^2}{n_g^2 k_c^2 - k_z^2}$$

27.2.2 Discussion des solutions - notion de mode

Les équations n'ont pas de solution analytique simple, mais on peut trouver numériquement les valeurs de k_z permises une fois connues celles de n_c , n_g et ω . On peut aussi résoudre ces équations de façon graphique, en traçant sur une même figure les différentes fonctions de

k_z qui interviennent et en cherchant les intersections de leurs courbes représentatives entre les deux valeurs extrêmes k_g et k_c . Ces intersections indiquent les valeurs permises par la fibre.

Plus la section a de la fibre est faible, plus le nombre de modes susceptibles de se propager est faible. Il en va de même quand n_c est proche de n_g . On peut ainsi limiter le nombre de modes en jouant sur les paramètres géométriques et physiques de la fibre. Chaque mode est associé à une valeur différente de k_z , et donc une longueur d'onde différente selon z . On retrouve ici le phénomène de dispersion de mode. On définit un paramètre

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$$

dont la valeur permet de déterminer le nombre de modes qui peuvent se propager.

27.2.3 Distribution de l'amplitude et de l'intensité

Une fois déterminées les valeurs permises de k_z , la distribution d'amplitude dans chaque mode s'obtient en regroupant les relations précédentes. La solution dans la gaine décroît exponentiellement, c'est une onde évanescence avec une longueur de pénétration

$$l \sim \frac{1}{\kappa_x} = \sqrt{k_p^2 - k_g^2}$$

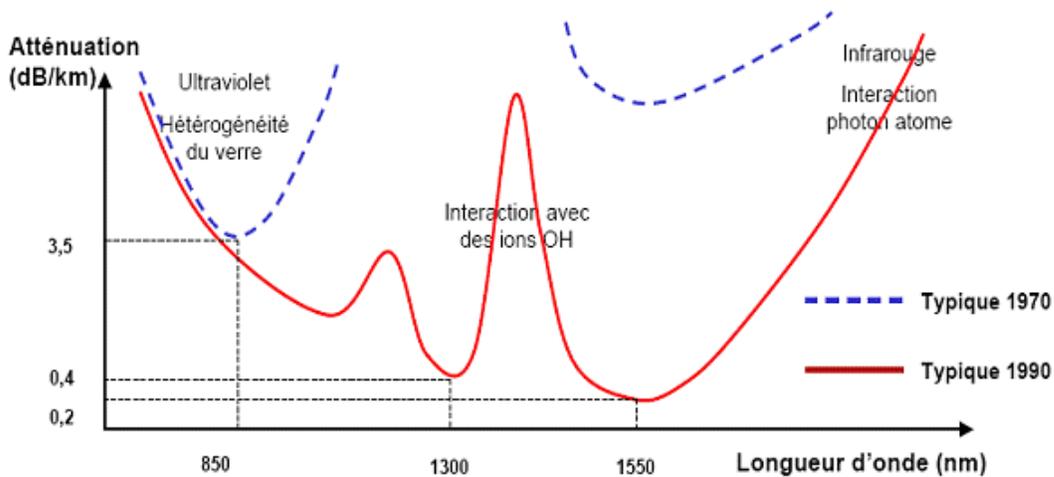
Cette longueur peut devenir bien plus grande que la taille du cœur, si k_p est proche de k_g . On peut montrer que par valeurs croissantes de k_p , les modes symétriques alternent avec les modes asymétriques, le premier étant toujours symétrique.

27.2.4 Atténuation et dispersion

La lumière n'est pas intégralement transmise par une fibre optique, à cause de phénomènes d'absorption, qui peuvent avoir des causes multiples. Tout d'abord, le milieu lui-même a toujours une absorption non nulle. Ensuite, il peut contenir des impuretés ou inhomogénéités qui diffusent une partie de la lumière. Enfin, les déformations de la fibre peuvent faire que la condition de réflexion totale est localement violée dans certaines zones, ce qui conduit à l'émission latérale de lumière.

Les fibres sont généralement en verre. Le spectre d'absorption de la silice comporte plusieurs minima secondaires autour de 900 nm et de 1300 nm, où l'atténuation est l'ordre 0,2 dB/km. L'onde peut se propager sur plusieurs centaines de kilomètres sans avoir à être réamplifiée. Pour des fibres moins performantes, il faut des répéteurs, dispositifs qui reçoivent le signal,

l'amplifient et le réémettent. C'est autour de ces fréquences que les fibres sont utilisées dans les télécommunications, depuis que l'on sait fabriquer des diodes lasers émettant à la longueur d'onde de 1550 nm.



Nous avons signalé la dispersion du signal due à la présence de plusieurs modes. En fait, même pour une fibre monomode, la dispersion est présente, pour deux raisons :

- le vecteur d'onde ne dépend pas linéairement de la fréquence pour un mode donné, si bien que la vitesse de phase dépend de ω . Il en découle en général une déformation des signaux au cours de leur propagation.
- l'indice du milieu dépend de la fréquence, c'est la dispersion chromatique ou dispersion intrinsèque.

Des progrès ont été rendus possibles grâce à l'amélioration des procédés de fabrication, qui permettent notamment d'optimiser les profils d'indice pour des applications spécifiques, ainsi que la diminution considérable du taux d'impuretés dans les matériaux utilisés.

Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques



Bibliographie

- *Physique des ondes (électromagnétisme et optique)*, Olivier, Tec et Doc
- *Electromagnétisme. Fondements et applications*, Pérez, Dunod

Prérequis :

- Optique ondulatoire, électromagnétisme.
- Aspect corpusculaire de la lumière.
- Mécanique du point.

Introduction :

Le but de cette leçon est de donner quelques éléments permettant de caractériser l'absorption et la dispersion d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique à l'aide de modélisations microscopiques. Nous donnerons ensuite quelques applications de ces caractéristiques.

Nous prendrons comme pré-requis les équations de Maxwell dans les milieux, l'introduction à la physique des ondes (équations de d'Alembert et ses solutions) et plus particulièrement

la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide et les notions d'absorption et de dispersion.

28.1 Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

28.1.1 Rappels des équations de Maxwell dans les milieux

Nous rappelons les équations de Maxwell formulées à l'aide du vecteur déplacement électrique et du vecteur excitation magnétique :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho_{\text{libres}} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{libres}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

avec par définition :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

\vec{P} étant le moment dipolaire moyen par unité de volume et \vec{M} le vecteur aimantation.

Nous étudierons dans la suite un milieu non magnétique ($\vec{M} = \vec{0}$), isolant ($\vec{j}_{\text{libres}} = 0$) et neutre ($\rho_{\text{libres}} = 0$). Nous obtenons le jeu d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

Il apparaît alors un vecteur inconnu de plus par rapport au cas du vide. Afin de déterminer le champ électromagnétique se propageant dans le diélectrique, nous allons nous donner une équation vectorielle en plus.

28.1.2 Approximation des milieux linéaires, homogènes et isotropes

Susceptibilité complexe

La polarisation $\vec{P}(\vec{r}, t)$ représente ici la réponse du milieu au champ électrique extérieur $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Le système étant causal, on peut écrire la relation existant entre la polarisation et le champ électrique comme suit :

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\vec{r}, t)] \vec{E}(\vec{r}, t - \tau) d\tau$$

$[G(\vec{r}, t)]$ est, dans le cas général, un tenseur et représente, à un facteur dimensionnel près, la polarisation créée au point \vec{r} à l'instant t par un champ impulsionnel en $t = 0$. La relation liant la polarisation \vec{P} et le champ électrique \vec{E} étant causale, $[G(\vec{r}, \tau)] = 0$ pour $\tau < 0$.

On se place en régime sinusoïdal forcé :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}(\vec{r}, \omega)e^{i\omega t} + \text{c.c.} \\ \vec{P} &= \vec{P}(\vec{r}, \omega)e^{i\omega t} + \text{c.c.}\end{aligned}$$

Si on calcule $\vec{P}(\vec{r}, t) + i \cdot \vec{P}(\vec{r}, t - T/4)$, on obtient :

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \vec{E}(\vec{r}, \omega) \int_{-\infty}^{+\infty} [G(\vec{r}, t)] e^{-i\omega\tau} d\tau$$

On introduit alors la susceptibilité électrique $[\chi(M, \omega)]$:

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 [\chi(M, \omega)] \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

On remarque que, dans le cas général, la susceptibilité est un tenseur complexe qui dépend du point M .

Plus généralement, en régime sinusoïdal forcé, nous connaissons une relation tensorielle reliant le champ électrique et la polarisation :

$$\begin{aligned}\vec{P}(\vec{r}, \omega) &= \epsilon_0 \{ [\chi^{(1)}(M, \omega)] \vec{E}(\vec{r}, \omega) + [\chi^{(2)}(M, \omega)] \vec{E}(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) + \dots \} \\ \vec{P}_i(\vec{r}, \omega) &= \left(\chi_{ij}^{(1)} E_j(\vec{r}, \omega) + \chi_{ij}^{(2)} E_j(\vec{r}, \omega) E_k(\vec{r}, \omega) + \dots \right)\end{aligned}$$

L'approximation des milieux linéaires, homogènes et isotropes va nous permettre de simplifier cette expression.

Approximations

Le milieu est dit linéaire si nous pouvons négliger les termes faisant apparaître les tenseurs d'ordres égaux ou supérieurs à 2. Dans ce cas :

$$\vec{P} = \epsilon_0 [\chi^{(1)}(M, \omega)] \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

Le milieu est dit homogène si la susceptibilité ne dépend pas du point M :

$$\vec{P} = \epsilon_0 [\chi^{(1)}(\omega)] \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

Enfin, le milieu est dit isotrope si le tenseur se réduit à un scalaire :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

Nous aboutissons finalement à la relation :

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

avec

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi^{(1)}) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega)$$

Remarquons que $\epsilon(\omega)$ est à priori complexe.

28.1.3 Equation de propagation dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope

Equation de propagation

Si nous prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}}{\partial t}$$

Or

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} \\ \text{div} \vec{D} &= \epsilon(\omega) \text{div} \vec{E} = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E}(\vec{r}, t) - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D}(\vec{r}, t)$$

Relation de dispersion

Nous cherchons maintenant des solutions sous la forme d'ondes planes progressives harmoniques :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{k}, \omega) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \text{c.c.}$$

et nous obtenons :

$$-k^2 \vec{E}(\vec{k}, \omega) + \mu_0 \omega^2 \vec{D}(\vec{k}, \omega) = 0$$

Ce qui donne avec $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c} \epsilon_r(\omega)$$

Exploitation de la relation de dispersion

On suppose que ω est réel, par contre k est à priori complexe, on pose : $k = k' - ik''$

et, à une dimension :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 e^{-k'' x} \cos(\omega t - k' x)$$

Nous sommes donc en présence d'une onde plane progressive harmonique se propageant dans le sens des x croissants avec une vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$ et s'amortissant sur une distance caractéristique $1/|k''|$. Dans le cas le plus général, k' dépend de ω , un milieu diélectrique est donc dispersif et absorbant. Rappelons qu'un milieu dispersif entraîne une différence entre la vitesse de l'onde enveloppe et la vitesse de l'onde moyenne d'un paquet d'onde. Cette différence peut, par exemple, entraîner une limitation du débit dans une fibre optique.

Nous introduisons enfin l'indice complexe tel que :

$$n^2 = \epsilon_r(\omega) \quad \text{et} \quad n = n' - in''$$

On appelle n' (respectivement n'') l'indice de réfraction (respectivement l'indice d'absorption).

Nous allons maintenant tenter de caractériser la dépendance de k en fonction de ω . A cette fin nous développerons quelques modélisations microscopiques.

28.2 Modélisations microscopiques

Hypothèses

Nous allons essayer ici de rendre compte de la manière dont la susceptibilité χ est relié à ω en exploitant la relation existant entre un électron lié du milieu et le champ électrique extérieur.

Nous allons d'abord donner quelques hypothèses :

1. Nous négligerons les interactions entre les différents électrons qui pourront être traités indépendamment.
2. L'électron baigne dans un champ électromagnétique sinusoïdal : $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$.
3. L'électron est soumis à une force de rappel de la forme $-m\omega_0^2\vec{r}$ (où \vec{r} représente la position par rapport à la position d'équilibre) qui rend compte de l'attraction du noyau de l'atome ou de la molécule.
4. L'électron est soumis à une force de frottement fluide $-m\Gamma\dot{\vec{r}}$ qui traduit phénoménologiquement des diverses causes d'amortissement (rayonnement, . . .)

Ordres de grandeur et simplification

Pour une onde plane :

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

Faisons le rapport de la contribution magnétique de la force de Lorentz sur la contribution électrique :

$$\frac{\|\vec{F}_m\|}{\|F_e\|} \simeq \frac{qvB}{qE} = \frac{v}{c}$$

Les électrons étant supposés non relativistes, nous négligerons l'effet de la force magnétique.

L'électron se déplace sur une distance de l'ordre de l'Ångström, ce qui est bien plus petit que la longueur d'onde des champs électriques usuelles (optique, micro-onde, ...). Le champ extérieur vu par l'électron est donc uniforme et peut s'écrire :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

en notation complexe.

Pour donner un ordre de grandeur de ω_0 , on peut utiliser le modèle de l'atome de Thomson. L'électron se déplace dans un milieu de densité de charge positive uniforme et dont la somme sur le volume vaut la charge du noyau. Le problème étant à symétrie sphérique du point de vue de la distribution de charge, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(r) = r\vec{u}_r$$

En appliquant le théorème de Gauss à une surface sphérique de centre le centre de l'atome et de rayon r :

$$4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \text{ avec } Q_{int} = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

La force de rappel vaut donc :

$$F = -qE(r) = -\frac{Qq}{4\pi R^3} r = -m\omega_0^2 r$$

Avec $Q = q$, $R = 1\text{Å}$: $\omega_0 \simeq 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$

La durée de vie d'un niveau excité est de l'ordre de 10 ns, cette considération permet de donner un ordre de grandeur de Γ :

$$\Gamma \simeq 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$$

.

donc en pratique :

$$\Gamma \ll \omega_0$$

Equation différentielle vérifiée par \vec{P}

On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron :

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0\vec{r} - m\Gamma\dot{\vec{r}} - q\vec{E}_L$$

où \vec{E}_L , le champ local, est la résultante du champ macroscopique extérieur et de la réponse de la matière à ce dernier.

Le moment dipolaire induit s'écrit : $\vec{p} = -q\vec{r}$ et si on considère n^* atomes identiques n'interagissant pas entre eux par unité de volume :

$$\vec{P} = n^* \vec{p} \epsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) \vec{E}$$

On admettra dans cette leçon que le champ local et le champ macroscopique sont reliés par :

$$\vec{E}_L = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Nous obtenons finalement l'équation différentielle vérifiée par \vec{P} :

$$\ddot{\vec{P}} + \Gamma\dot{\vec{P}} + \left(\omega_0^2 - \frac{n^* q^2}{3m\epsilon_0} \right) \vec{P} = \frac{n^* q^2}{m} \vec{E}$$

Pour un gaz aux conditions normales de température et de pression, $n^* \simeq 10^{25} \text{ m}^{-3}$

$$\left(\frac{n^* q^2}{3m\epsilon_0} \right)^{1/2} \simeq 10^{14} \text{ s}^{-1} \ll \omega_0$$

Cette hypothèse revient à dire que le champ effectivement vu par l'électron est le champ macroscopique.

Susceptibilité et indice

On se place en régime permanent et on pose $\vec{P} = \vec{P}_0 e^{i\omega t}$

$$\vec{P} = \frac{n^* q^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \vec{E} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E}$$

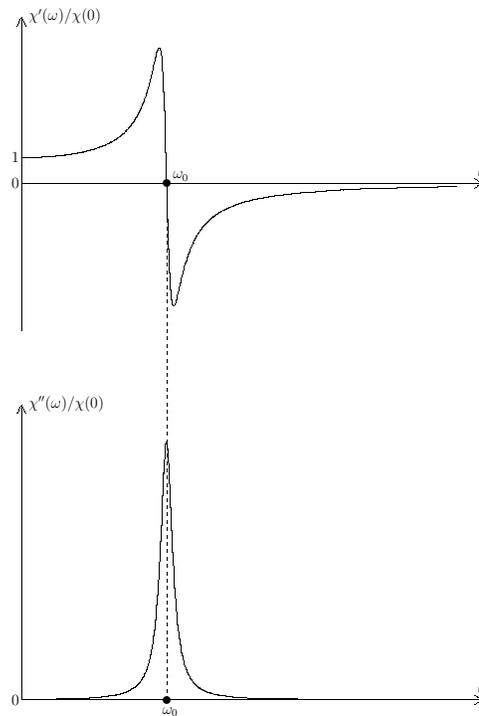
On pose :

$$\omega_p^2 = \frac{n^* q^2}{m \epsilon_0} \quad \text{et} \quad \chi^{(1)} = \chi' - i\chi''$$

Donc :

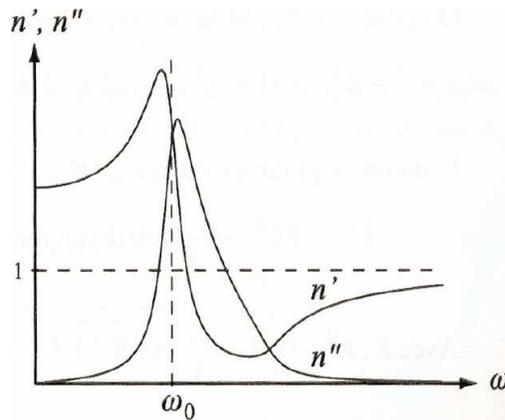
$$\chi' = \omega_p^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2} \quad \text{et} \quad \chi'' = \omega_p^2 \frac{\Gamma\omega}{(\omega_0 - \omega^2)^2 + (\Gamma\omega)^2}$$

On peut alors tracer ces deux courbes.



La partie réelle décroît à la résonance de la partie imaginaire. Le facteur de qualité de la résonance s'écrit : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{\Gamma} \approx 10^8$.

La permittivité relative s'écrit alors : $\epsilon_r = 1 + \chi$ et l'indice s'en séduit : $n^2 = \epsilon_r$.

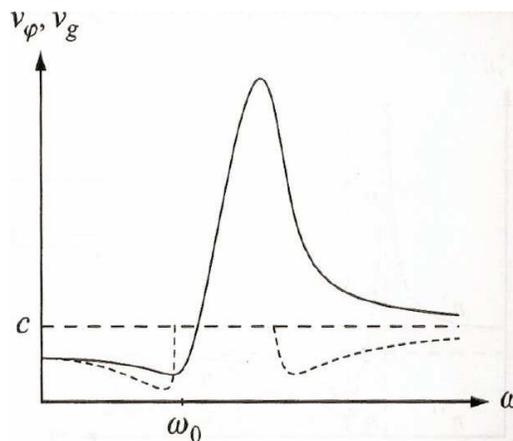


A haute fréquence, on retrouve les résultats du vide c'est-à-dire un indice de réfraction égal à 1 et un indice d'absorption nul. Cela correspond à un régime dans lequel les électrons n'ont plus le temps de suivre les oscillations du champ. En régime statique, l'indice d'absorption est nul et l'indice de réfraction est supérieur à celui du vide. L'absorption a lieu au voisinage de ω_0 , zone sur laquelle l'indice de réfraction décroît. Cette zone au voisinage de l'absorption est appelée zone de dispersion anormale.

L'origine de l'appellation zone de dispersion anormale vient du fait que sur ce domaine, la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} > c$$

ne représente plus la vitesse de propagation de l'énergie.



28.2.1 Autres types de polarisation

La polarisation que nous venons d'étudier et qui provient des électrons liés aux noyaux s'appelle polarisation électronique. Nous allons voir brièvement d'autres types de polarisations provenant d'autres sources.

Polarisation ionique

Dans le cas de la polarisation ionique, ce sont les ions du cristal, assimilés à des oscillateurs, qui interagissent avec le champ électrique. La pulsation propre ω_0 associée est plus petite car les masses mises en jeu sont de 10^3 à 10^5 fois plus grandes. Si nous reprenons l'expression :

$$-\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}r = -M\omega_0^2r$$

avec $Q = q$, $R = 1$ nm et $10^3.m < M < 10^5.m$, nous avons :

$$10^{12} \text{ rad.s}^{-1} \lesssim \omega_0 \lesssim 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$$

La vibration associée à cette pulsation se situe dans l'infrarouge lointain.

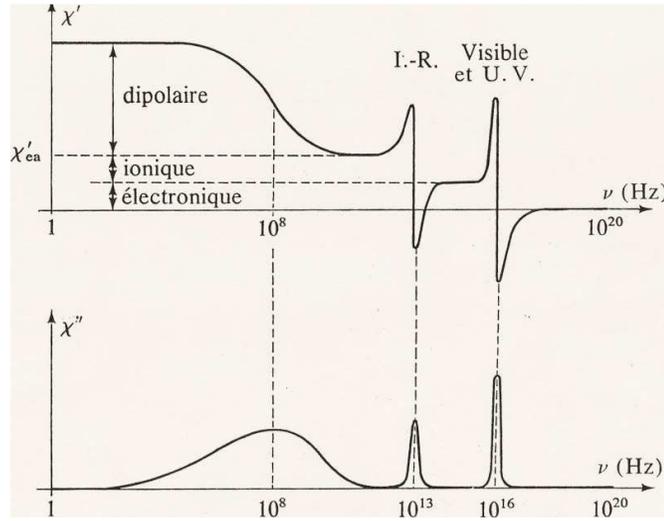
Polarisation d'orientation

L'orientation des dipôles rigides induite par un champ électrique fait apparaître une polarisation dite polarisation d'orientation. Cette polarisation est importante dans le cas de liquides polaires lorsque le domaine de fréquence est celui des micro-ondes et des fréquences inférieures.

28.3 Applications

L'absorption des molécules d'eau dans le domaine des micro-ondes permet de réchauffer les aliments.

Nous voyons la polarisation électronique, ionique et d'orientation par ordre de décroissance de la fréquence.



28.3.1 Spectroscopie : dispersion de la lumière dans un prisme

Le prisme a joué un grand rôle dans l'histoire de la spectroscopie. Aujourd'hui, on préfère utiliser des réseaux et des systèmes interférentiels par souci de précision et de réduction d'encombrement.

Le prisme est un instrument en verre, c'est donc un diélectrique ce qui implique que l'indice dépend de la longueur d'onde. Dans le visible, seule la polarisation électronique joue un rôle au vu des pulsations propres des polarisations ioniques et d'orientation ($\omega_{visible} \simeq 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$). Nous sommes de plus loin de toute absorption. Nous avons $\omega^2 \ll \omega_0^2$:

$$\chi' = \omega_p^2 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left[1 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^2 \right]$$

or $n' = 1 + \chi'$ et on retrouve bien la loi de Cauchy :

$$n' = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

On peut ensuite vérifier la validité du modèle et mesurer A et B expérimentalement.

Conclusion :

On peut citer d'autres applications comme :

- La spectroscopie des gaz.

- L'explication de la transparence de l'atmosphère.
- Le comportement des fibres optiques.

Bien insister sur le fait que dans le modèle de l'électron élastiquement lié, r est la position de l'électron relativement à sa position d'équilibre et non sa position par rapport au centre du noyau.

Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs



Bibliographie

- *Electromagnétisme 2*, Faroux, Dunod
- *Electromagnétisme*, Cordier, Dunod
- *Electromagnétisme 2ème année*, Gié, Tec et Doc

29.1 Propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur

29.1.1 Equation de propagation

La loi d'Ohm locale $\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$ est applicable dans un métal pour des fréquences très inférieures à 10^{13} Hz.

La conductivité γ est une constante. La loi d'Ohm écrite sous cette forme est valable pour les métaux dans le domaine des radio-fréquences et des micro-ondes. En réalité, la conductivité dépend notablement de la fréquence dans les très hautes fréquences (térahertz et infrarouges).

On suppose par ailleurs que la densité de charge est nulle. La seule équation de Maxwell

différente de celle du vide est donc l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\gamma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Le terme de droite comporte entre parenthèse le courant de conduction et un terme homogène à une densité de courant, appelé courant de déplacement. Pour comparer ces deux termes, on se place en régime sinusoïdal permanent :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\gamma - i\omega\epsilon_0) \vec{E}$$

Écrite sous cette forme, l'équation de Maxwell-Ampère est plus générale que sous sa forme initiale, car il est alors possible d'introduire une conductivité qui dépend de la pulsation. Néanmoins, cela n'est pas nécessaire dans le domaine des radio-fréquences. Pour un métal dans le domaine des radio-fréquences et des micro-ondes, on vérifie que :

$$\epsilon_0\omega \ll \gamma$$

Le courant de déplacement est donc très largement négligeable par rapport au courant de conduction, et l'équation de Maxwell peut s'écrire sous sa forme approximative (régime quasi-stationnaire) :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

En éliminant le champ magnétique des équations de Maxwell, on obtient l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique :

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Cette équation différentielle est tout à fait différente de l'équation des ondes (équation de d'Alembert), car la dérivée temporelle est une dérivée première. Elle est appelée équation de diffusion. On la retrouve par exemple dans les phénomènes de diffusion de particules ou de diffusion thermique.

En régime sinusoïdal, l'équation s'écrit :

$$\nabla^2 \vec{E} = -i\omega\mu_0\gamma \vec{E}$$

29.1.2 Effet de peau

On recherche une solution de l'équation précédente sous la forme d'une onde plane :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{kx - \omega t}$$

On obtient :

$$k^2 = -i\omega\mu_0\gamma$$

Les deux solutions sont :

$$k = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu_0\gamma} = \pm \frac{1-i}{\delta}$$

où l'on a introduit la longueur suivante :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma}}$$

valable dans le cas de basses fréquences. C'est la distance caractéristique d'atténuation d'une OPPM de pulsation $\omega < \frac{\gamma}{\epsilon_0}$.

29.1.3 Le modèle du conducteur parfait

La modélisation des problèmes d'électromagnétisme peut être notablement simplifiée en introduisant la notion de conducteur parfait.

Un conducteur parfait a une conductivité infinie. La profondeur de pénétration du champ est donc nulle.

Dans un conducteur parfait, le champ électrique et le champ magnétique sont nuls. La densité de courant volumique est nulle. Il en est de même de la densité de charge.

Le courant électrique est confiné sur une épaisseur nulle, sur la surface du conducteur. Ce type de courant est appelé courant de surface.

Il n'y a pas de puissance dissipée dans un conducteur parfait, car le courant reste localisé sur sa surface.

Pour les conducteurs métalliques à température ordinaire, le modèle du conducteur parfait est une approximation qui permet de simplifier les calculs. Les supraconducteurs sont des

matériaux qui peuvent avoir une conductivité effectivement infinie lorsque la température est assez basse (de quelques Kelvins à une centaine de Kelvins pour les supraconducteurs haute température).

Pour modéliser le courant surfacique sur la surface d'un conducteur parfait, on introduit une densité de courant de surface. Pour reprendre l'exemple précédent, la densité de courant surfacique est définie (pour une conductivité finie) par :

$$j_s(t) = \int_0^\infty j_y(x, t) dx$$

La densité de courant surfacique est donc en A/m. Pour un conducteur parfait, la densité de courant volumique tend vers l'infini mais se localise sur une épaisseur nulle, si bien que la densité de courant surfacique est non nulle. Dans le cas général, la densité de courant surfacique est un vecteur défini en tout point de la surface et tangent à cette surface.

Le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur parfait est nul. Sur la surface du conducteur parfait, le champ n'est pas nécessairement nul. Les équations de Maxwell permettent de démontrer le résultat suivant pour le champ sur la surface (on l'admet) :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

où σ est la densité surfacique de charge au point considéré et \vec{n} le vecteur normal unitaire sortant du conducteur. Le champ électrique est donc perpendiculaire à la surface et son intensité est proportionnelle à la densité de charge.

Le champ magnétique est nul à l'intérieur du conducteur parfait. Sur sa surface, il est lié au courant surfacique par la relation suivante :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$$

Le champ magnétique est donc tangent à la surface, perpendiculaire au courant surfacique et son intensité est proportionnelle à celle du courant surfacique.

29.2 Réflexion sur un conducteur parfait

29.2.1 Onde incidente et onde réfléchie

On considère une onde plane progressive monochromatique de polarisation rectiligne, se propageant dans le vide, et rencontrant la surface plane (infinie) d'un conducteur par-

fait.

La direction de propagation est l'axe x , perpendiculaire à la surface du conducteur. Par convention, on place l'origine $x = 0$ sur la surface. La direction de polarisation est l'axe y . Voici le champ électromagnétique de l'onde incidente :

$$\begin{aligned}\underline{E}_{iy} &= E_0 e^{i(kx - \omega t)} \\ \underline{B}_{iz} &= \frac{E_0}{c} e^{i(kx - \omega t)}\end{aligned}$$

Le nombre d'onde et la pulsation sont reliés par la relation de dispersion dans le vide $k = \omega/c$.

On voit que le champ électrique sur la surface du conducteur ($x = 0$) n'est pas nul et qu'il est tangent à la surface. Or d'après la relation précédente, le champ électrique sur la surface d'un conducteur parfait doit avoir une composante tangentielle nulle. On en déduit que le champ de l'onde incidente ne peut satisfaire la condition limite sur le conducteur parfait. On est donc amené à introduire une onde réfléchie. La superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie doit vérifier la condition limite sur le conducteur parfait :

$$\underline{E}_{iy}(0, t) + \underline{E}_{ry}(0, t) = 0$$

Physiquement, il y a une onde réfléchie de forme bien déterminée. On essaye de la trouver en faisant les hypothèses les plus simples : l'onde réfléchie se propage en sens inverse de l'onde incidente, avec la même pulsation et la même polarisation. Son champ électromagnétique s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\underline{E}_{ry} &= r E_0 e^{i(-kx - \omega t)} \\ \underline{B}_{iz} &= -\frac{r E_0}{c} e^{i(-kx - \omega t)}\end{aligned}$$

où l'on a introduit le coefficient de réflexion r du champ électrique, défini comme le rapport des champs complexes sur la surface.

La condition d'annulation de la composante tangentielle du champ électrique sur la surface s'écrit alors :

$$E_0(1 - r)e^{-i\omega t} = 0$$

On en déduit le coefficient de réflexion $r = -1$. L'onde réfléchie a donc la même amplitude que l'onde incidente. Il s'agit d'une réflexion totale.

29.2.2 Courant de surface

Le champ magnétique sur la surface du conducteur est :

$$\underline{B}_z = \underline{B}_{iz} + \underline{B}_{rz} = \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t}$$

Le champ magnétique n'est pas nul sur la surface et il est tangent à la surface. Cela est compatible avec la relation précédente à condition d'introduire un courant surfacique. Celui-ci est perpendiculaire à la fois à la normale et au champ magnétique, il est donc dans la direction y . On obtient en reportant dans la relation :

$$j_s(t) = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos \omega t$$

Physiquement, ce courant de surface est causé par le champ électrique de l'onde incidente, qui met en mouvement les électrons du métal dans la direction y . Le courant de surface est aussi la cause physique de l'onde réfléchie.

29.2.3 Onde stationnaire

Considérons le champ électromagnétique de l'onde résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie (qui vérifie l'équation des ondes dans le vide) :

$$\underline{E}_y = 2iE_0 \sin(kx) e^{-i\omega t}$$

$$\underline{B}_z = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) e^{-i\omega t}$$

Le champ électromagnétique réel est donc :

$$E_y = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t)$$

$$B_z = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) \sin(\omega t)$$

Chacun des champs est de la forme $u(x, t) = f(x)g(t)$, produit d'une fonction de x par une fonction du temps. Il s'agit d'une onde stationnaire.

Cette onde stationnaire comporte des plans où le champ électrique est nul en permanence. Ce sont les nœuds du champ électrique, dont la position est donnée par la condition suivante (p est un entier) :

$$kx = -p\pi$$

ce qui donne :

$$x = -p\frac{\lambda}{2}$$

Il y a bien sûr un nœud sur la surface du conducteur et les nœuds (qui sont des plans) sont espacés d'une demi longueur d'onde.

29.2.4 Bilan de puissance

La puissance surfacique moyenne transportée par l'onde incidente est :

$$\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x$$

Celle de l'onde réfléchie est :

$$\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -|r|^2 \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x = -\langle \vec{\Pi}_i \rangle$$

On définit le coefficient de réflexion en puissance comme le rapport du flux d'énergie moyen réfléchi sur le flux incident :

$$R = |r|^2 = 1$$

Le conducteur parfait réfléchit entièrement la puissance de l'onde incidente (en moyenne). Cela montre qu'il n'y a pas d'énergie dissipée dans un conducteur parfait. Le courant de surface ne conduit à aucune perte dissipative.

29.2.5 Conducteur réel

Dans un conducteur réel, la profondeur de pénétration δ n'est pas nulle. Le courant électrique est localisé sur une épaisseur de l'ordre de δ , ce qui conduit à une petite perte dissipative. Pour caractériser le comportement d'un conducteur réel, on introduit le rapport de la profondeur de pénétration sur la longueur d'onde dans le vide :

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \omega}{\gamma}}$$

Lorsque ce rapport tend vers zéro, le coefficient de réflexion tend vers 1. En pratique, une valeur de 10^{-4} donne déjà une réflexion quasi- totale. On voit donc que le modèle du conducteur parfait est adapté aux conducteurs métalliques réels dans le domaine des radiofréquences et des micro-ondes. Pour ces fréquences, une plaque métallique se comporte comme un conducteur parfait. Cela n'est plus vrai dans le domaine des infrarouges et du visible, car la conductivité des métaux dans ce domaine de fréquence chute notablement. Néanmoins, une surface métallique polie est un bon réflecteur dans le domaine du visible (en général le coefficient de réflexion est de l'ordre de 0,9).

29.3 Cavité électromagnétique

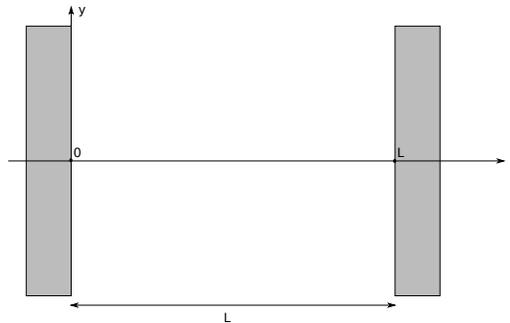
29.3.1 Introduction

Une cavité électromagnétique est une enceinte délimitée par des parois conductrices. Différentes formes sont possibles (rectangulaire, cylindrique, etc). L'enceinte peut être en partie ouverte. Lorsqu'une onde électromagnétique est émise par une antenne située dans la cavité, il se produit un phénomène de résonance pour certaines fréquences. Cela permet d'amplifier l'émission pour ces fréquences. C'est l'analogie de la caisse de résonance des instruments de musique à corde (violon, piano, etc).

Les cavités résonantes sont utilisées dans le domaine des micro-ondes (par exemple dans le magnétron) et dans les lasers. Dans un laser, les atomes qui émettent la lumière sont à l'intérieur de la cavité.

29.3.2 Cavité à une dimension sans perte

Définition



On s'intéresse ici à un modèle simple de cavité sans perte à une dimension. Elle est constituée de deux conducteurs parfaits dont les surfaces planes sont parallèles. Si x est l'axe perpendiculaire aux conducteurs, la cavité est invariante par translation dans les directions y et z .

On note L la longueur de la cavité et les surfaces des conducteurs sont placées en $x = 0$ et $x = L$.

Si le milieu de propagation est le vide, le champ électrique doit vérifier l'équation des ondes. On se limite à une polarisation rectiligne dans la direction y . L'équation des ondes s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Comme la composante tangentielle du champ électrique doit être nulle sur les surfaces des conducteurs parfaits, on a les conditions limites suivantes :

$$E_y(0, t) = E_y(L, t) = 0$$

Ce problème est analogue à celui d'une corde vibrante de longueur L dont les deux extrémités sont maintenues fixes. L'équation différentielle vérifiée par le déplacement vertical de la corde est l'équation des ondes.

Modes propres

Un mode propre est une solution sinusoïdale de la forme suivante :

$$\underline{E}_y(x, t) = f(x)e^{-i\omega t}$$

En reportant cette expression dans l'équation des ondes, on obtient une équation différentielle pour la fonction f :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f$$

avec :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

La solution générale de cette équation est :

$$f(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

La condition $f(0) = 0$ impose $B = 0$. La condition $f(L) = 0$ impose :

$$kL = p\pi$$

où p est un entier strictement positif. Cette condition s'écrit aussi :

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{L}{p}$$

Finalement, les modes propres sont des ondes stationnaires :

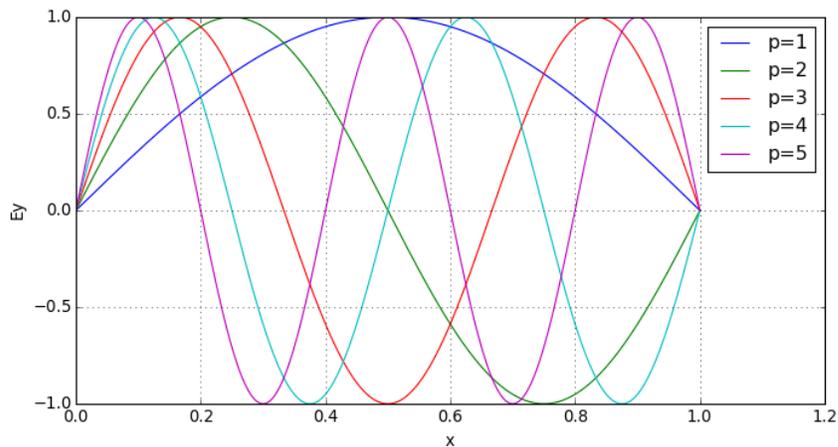
$$E_y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

La demi-longueur d'onde doit être un sous multiple de la longueur de la cavité. La même condition peut être exprimée avec la pulsation :

$$\omega = p \frac{\pi c}{L}$$

La pulsation d'un mode propre est donc multiple d'une pulsation fondamentale. Le mode fondamental est obtenu pour $p = 1$.

Voici le tracé des 5 premiers modes (on trace la fonction f) :



On remarque que le mode p comporte $p + 1$ nœuds.

La fréquence de vibration du mode propre d'ordre n est donc

$$f_n = n \frac{c}{2L}$$

Les fréquences f_n sont les fréquences propres de la cavit e.

Rayonnement dipolaire électrique



Bibliographie

- *H-prépa* : Electromagnétisme,
- *Electromagnétisme - PC*, Tec et Doc

Introduction :

Nous avons étudié avec les équations de Maxwell la propagation des ondes électromagnétiques. Mais d'où viennent ces ondes ? Dans cette leçon nous allons plus particulièrement nous intéresser à une des façons dont est produite la radiation électromagnétique par la matière : les champs rayonnés par un dipôle électrique. Nous verrons que ce modèle a des applications dans les communications (antennes) et dans l'explication de la couleur du ciel ou du coucher de soleil par la diffusion de la lumière par les molécules. Par ailleurs nous donnerons un sens au concept d'onde plane, puisque dans une certaine mesure les ondes rayonnées seront des ondes planes.

30.1 Caractéristiques du rayonnement dipolaire électrique

30.1.1 Cadre de l'étude - Approximations

On rappelle qu'un dipôle électrique est un ensemble de deux charges q et $-q$, opposées et distancées de a :

$$\vec{p} = q\vec{a}$$

Comme pour le cas électrostatique, les phénomènes intéressants auront lieu à des distances r telles que :

$$r \gg a$$

c'est à dire dans la zone où les effets cumulés des deux charges commencent à se faire sentir. On a affaire à un dipôle dès que le barycentre des charges positives est différent du barycentre des charges négatives d'un système : c'est le premier terme du développement multipolaire d'un ensemble de charges neutre.

Par ailleurs on se place dans le cadre de l'ARQS :

$$\lambda \gg a$$

de façon à pouvoir négliger les retards de propagation au niveau de la source. Dans ce cas, toutes les ondes émises par les différents points de la source arrivent en même temps en \vec{r} (point M), au temps $\frac{r}{c}$

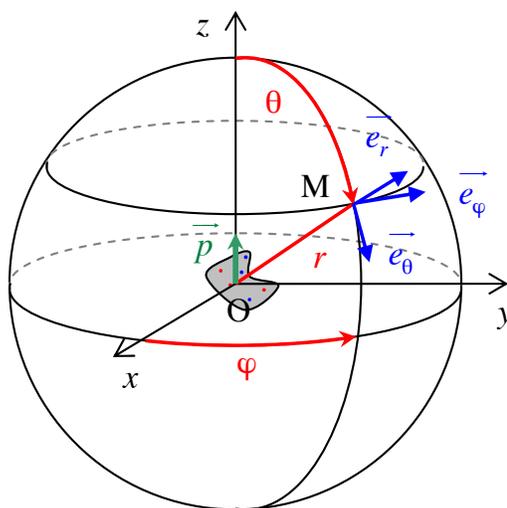
$$\dot{\vec{p}}(P \in \text{source}, t - \frac{PM}{c}) \approx \dot{\vec{p}}(P, t - \frac{PM}{c})$$

Nous pouvons remarquer que cette limite est équivalente à la condition :

$$v_{charges} \ll c$$

30.1.2 Expression des champs

Nous rappelons que le calcul des champs se fait à partir des solutions des potentiels retardés, que l'on simplifie à l'aide de ces deux approximations.



On obtient en orientant \vec{p} selon (Oz) :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{p(t - \frac{r}{c})}{r^3} + \frac{\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{cr^2} \right] (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) + \frac{\ddot{p}(t - \frac{r}{c})}{rc^2} \sin \theta \vec{e}_\theta \right\}$$

et

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{r^2} + \frac{\ddot{p}(t - \frac{r}{c})}{cr} \right] \sin \theta \vec{e}_\phi$$

Leur tête est horrible mais on va distinguer deux cas :

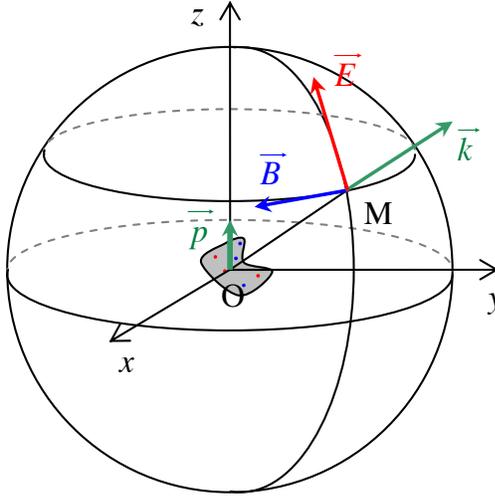
- $r \ll \lambda$: On garde seulement le terme en $1/r^3$, qui nous redonne l'expression du champ électrique en électrostatique.

- $r \gg \lambda$: zone de rayonnement

Dans cette limite les champs prennent la forme simple :

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sin \theta \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \vec{e}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi rc} \sin \theta \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \vec{e}_\phi$$



30.1.3 Propriétés remarquables du rayonnement dipolaire électrique

Le rayonnement dipolaire électrique présente une décroissance en $1/r$, ce qui est très différent du cas électrostatique où le champ électrique décroît en $1/r^3$; nous verrons plus loin que cela conduit à une propagation de l'énergie à longue distance.

Le rayonnement émis par le dipôle électrique est anisotrope : l'amplitude des champs est proportionnelle à $\sin \theta$, et le rayonnement est donc nul sur l'axe du dipôle et maximal sur le plan équatorial.

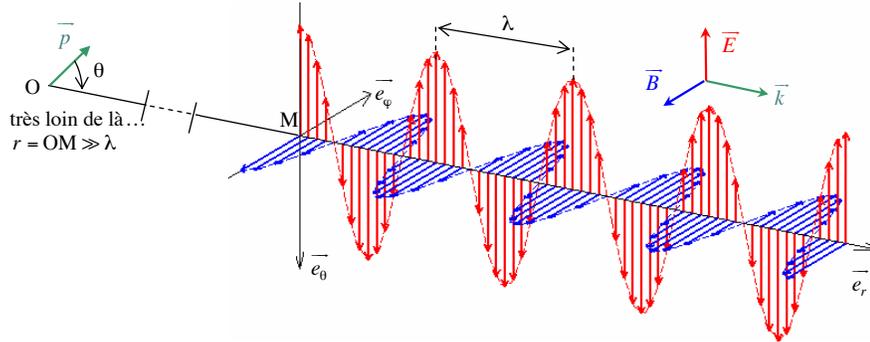
L'amplitude des champs est proportionnelle à \ddot{p} , donc à l'accélération des charges : seuls les porteurs de charge accélérés sont susceptibles de rayonner une onde électromagnétique. Ceci limite notamment les possibilités des accélérateurs de particules, puisque les faisceaux de particules accélérées perdent de l'énergie : c'est pour minimiser cette perte d'énergie que l'on construit des accélérateurs de grands diamètres (plusieurs kilomètres). À l'inverse on peut accélérer des électrons pour produire du rayonnement : c'est en accélérant des électrons relativistes à l'aide d'un champ magnétique, on peut produire des rayons X, très utilisés en spectroscopie comme dans l'industrie des circuits intégrés.

On a affaire à une onde progressive dans la direction \vec{u}_r , caractérisée par la phase $t - r/c$ où apparaît le retard dû à la propagation de la source jusqu'au point considéré.

Nous remarquons que les champs vérifient la relation :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

ce qui est caractéristique d'une onde plane progressive dans le vide. Cette identification n'est toutefois que locale, elle n'est vérifiée que si la courbure peut être négligée dans la zone d'observation. Ceci donne une âme au modèle de l'OPP que nous utilisons toujours pour résoudre les problèmes d'électromagnétisme par superposition d'OPP.



30.1.4 Calcul de la puissance rayonnée

Vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left[\ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \right]^2 \vec{e}_r$$

Puissance rayonnée :

$$P = \oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[\ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \right]^2$$

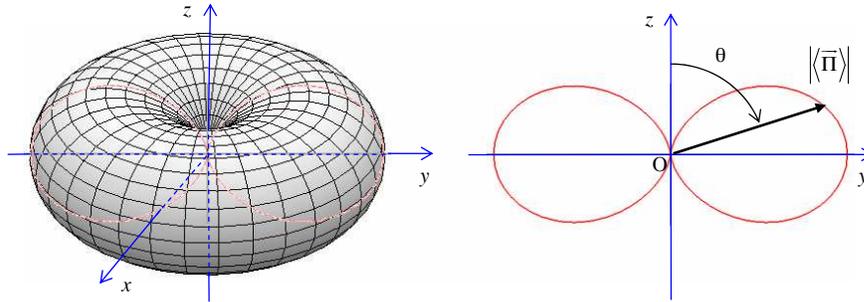
Pour un dipôle oscillant, $\vec{p} = p_0 \cos \omega t \vec{e}_z$, donc

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{12\pi c}$$

Il faut remarquer que la puissance rayonnée est indépendante du rayon r de la sphère, ce qui indique que la puissance se répartit sur une sphère de rayon r et que toute l'énergie se propage : il n'y a pas de phénomène d'absorption.

L'anisotropie d'une émission peut être illustrée par le diagramme de rayonnement représentant le module de la valeur moyenne du vecteur de Poynting en fonction de la direction (η, ϕ) dans l'espace :

Dans le cas particulier du rayonnement dipolaire, l'axe Oz est un axe de symétrie et le diagramme de rayonnement, indépendant de ϕ , présente cette symétrie. Nous pouvons représenter ce diagramme soit dans l'espace (il s'agit alors d'un tore de révolution autour de l'axe Oz) soit, étant donnée l'invariance par rotation autour de Oz , par le diagramme polaire $|\langle \vec{\Pi} \rangle| = \Pi_{max} \sin^2 \theta$ dans un plan méridien.



30.2 Application aux antennes

30.2.1 Approximation dipolaire de l'antenne

Nous allons montrer que l'on peut approximer une antenne linéaire comme une antenne avec plaques par un dipôle électrique, et ainsi utiliser les résultats précédents pour calculer son rayonnement.

Les deux types d'antennes simples sont :

Pour l'antenne avec plaques, nous pouvons écrire la relation propre aux capacités :

$$q(t) = CV(t)$$

La charge est concentrée sur les plaques, de sorte que l'on l'on a a aire à un dipôle

$$p(t) = hq(t) = ChV(t)$$

Pour l'antenne linéaire en revanche, nous pouvons approximer la répartition du courant par la loi :

$$I(z, t) = I_0(t) \left[1 - \frac{z}{h} \right]$$

de sorte que la densité linéaire de charges Q est donnée par :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial I_0(t)}{h}$$

Nous calculons alors le dipôle approximant cette distribution de charges :

$$p(t) = \int_{-h/2}^{h/2} zQ(z, t)dz = \frac{h^2}{2}Q_0(t) = h \int I_0(t)dt$$

Nous pouvons finalement regrouper les deux cas dans le résultat :

$$\frac{dp}{dt} = \gamma h I_0(t)$$

où γ vaut 1 ou 2 selon l'antenne considérée. Nous l'oublions par la suite.

Nous voyons donc que, sous réserve de vérifier les conditions de validité du calcul du rayonnement dipolaire, nous pouvons appliquer ces résultats aux antennes.

30.2.2 Résistance au rayonnement

Nous considérons une excitation harmonique de l'antenne :

$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

Dans ce cas, la puissance moyenne rayonnée par l'antenne est :

$$\langle P_{rad} \rangle = \frac{\pi}{3\epsilon_0 c} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 I_0^2 = \frac{1}{2} R_{rad} I_0^2$$

ce qui définit la résistance de rayonnement R_{rad}

Cette résistance doit être maximale pour que l'antenne soit efficace. Nous voyons que le rapport h/λ doit être le plus grand possible, tout en restant petit devant 1 pour vérifier l'approximation de l'ARQS. A début du siècle, on pensait que la communication à longue distance était favorisée aux basses fréquences : à mesure que l'on baissait la fréquence, on devait augmenter h pour maintenir la puissance rayonnée constante. Ceci a conduit à la construction de très grandes antennes.

Par exemple, en 1905, un certain Marconi bâtit une antenne de 67 m de haut et 305 m de rayon rayonnant à 82 kHz. Elle était située dans l'actuel Canada et était destinée aux communications transatlantique. Cette grande taille n'était pas sans poser des problèmes de pertes dans les conducteurs. La plus haute antenne fut construite près de Berlin en 1911 et atteignait 200 m de haut.

En 1902, Heaviside et Kennelly proposent indépendamment la réflexion des ondes radio sur une couche de l'atmosphère, expliquant la propagation des ondes aux grandes distances sur la Terre. Les preuves expérimentales furent données dans les années 20 ; cette couche est aujourd'hui appelée ionosphère, et se compose d'un plasma entre les altitudes de 60 et 600 km, qui réfléchit les ondes de fréquence > 30 MHz. Cette découverte a permis d'aller vers de plus hautes fréquences et donc de plus petites antennes, et également de diminuer les puissances. Aujourd'hui les communications se font en dessous de 30 MHz pour la radio en AM, entre 30 et 300 MHz pour la bande FM, entre 300 et 3000 MHz pour la télévision et au dessus du GHz pour les téléphones portables et wi.

30.2.3 Réseaux d'antennes linéaires

Un réseau d'antennes peut être utilisé pour accroître la directivité de l'antenne, par exemple pour la communication entre deux antennes fixes. L'idée est de combiner plusieurs antennes et de choisir le déphasage δ pour créer des interférences entre les champs émis par les différentes antennes ; nous allons étudier succinctement un réseau de 2 antennes, pour fixer les idées.

Nous avons :

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (d/2)^2 + dr \sin \theta_1} \approx r + \frac{d}{2} \sin \theta \cos \varphi$$

et de même pour r_2 . En supposant $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta$, nous obtenons pour l'expression du champ électrique en \vec{r} , pour un dipôle oscillant $p_0 \cos(\omega t)$:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \left(\cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} - \frac{d}{2c} \sin \theta \cos \phi \right) \right] + \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{d}{2c} \sin \theta \cos \phi \right) + \delta \right] \right) \\ &= \vec{E}_0 \left(2 \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\delta}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{2} \sin \theta \cos \phi + \delta \right) \right] \right) \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\theta = \pi/2$, nous voulons que le rayonnement soit maximum pour $\varphi = 0$ et minimum pour $\varphi = \pi$. Ceci donne deux conditions :

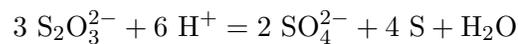
$$\delta = -kd \quad \text{et} \quad Kd = -\frac{\pi}{2}$$

30.3 Diffusion de la lumière solaire

30.3.1 Résultats expérimentaux

Rayleigh, se basant sur des expériences de Tyndall (1868), proposa en 1871 une théorie pour expliquer les caractéristiques de la lumière du ciel à l'aide d'une théorie élastique de la lumière. Il suggère que les molécules de l'air diffusent la lumière du soleil, ce qui est l'explication admise aujourd'hui pour le bleu du ciel et le rouge du soleil couchant.

Réaction :



30.3.2 Diffusion de la lumière par les molécules de l'air

Nous adoptons le modèle suivant : les molécules de l'air présentent un dipôle électrique induit par le champ électrique de la lumière incidente :

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$$

Les dipôle oscillants ainsi induits rayonnent de la lumière selon les caractéristiques démontrées plus haut.

La polarisabilité α peut être obtenue par exemple avec un modèle simple d'électron élastiquement lié au noyau. On obtient alors :

$$\alpha = \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma_{Cl}\omega}$$

Les molécules d'O₂ et N₂ absorbent dans l'ultraviolet ($\lambda \approx 100$ nm), et $\Gamma_{Cl} \ll \omega_0$ de façon générale.

Dans ces conditions on obtient :

$$\alpha = \frac{q^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2}$$

Nous devons aussi vérifier l'approximation de l'ARQS : le dipôle induit est de la taille de la molécule environ, soit 1 angstrom. On a bien :

$$\alpha \ll \lambda$$

Nous pouvons donc appliquer les résultats précédents. Les molécules diffusent beaucoup plus la lumière bleue que la lumière rouge du soleil. C'est pour cela que le ciel est bleu.

30.3.3 Atténuation de la lumière

La puissance moyenne rayonnée par une molécule s'écrit :

$$\langle P \rangle = \frac{\epsilon_0^2}{12\pi c^3} \alpha^2 \omega^4 E_0^2$$

Une couche dz de surface S diffusera une puissance :

$$\langle P \rangle_{couche} = \langle P \rangle S dz n = -S dI$$

où dI est la diminution d'intensité de la radiation ω . Comme $I = E_0^2 / (2\mu_0 c)$, on obtient une longueur d'atténuation :

$$\frac{1}{l} = \frac{8\alpha^2 \pi^3 n}{3} \left(\frac{1}{\lambda} \right)^4$$

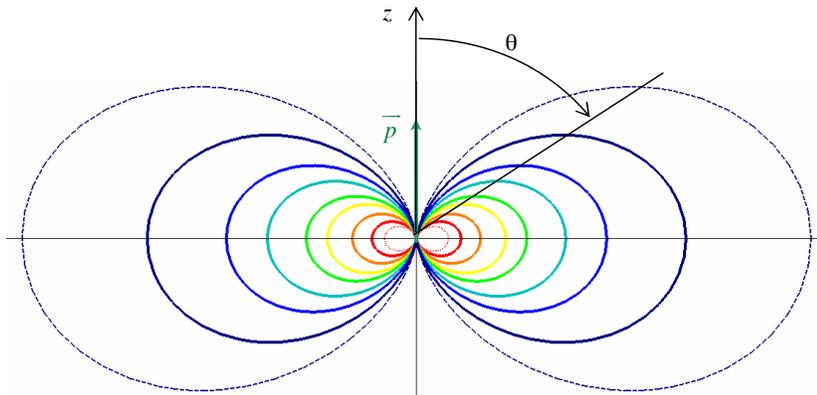
Ordres de grandeur : on trouve :

$$\text{Rouge : } \lambda = 700 \text{ nm, } L = 279 \text{ km}$$

$$\text{Jaune : } \lambda = 600 \text{ nm, } L = 145 \text{ km}$$

$$\text{Bleu : } \lambda = 400 \text{ nm, } L = 29 \text{ km}$$

Si nous considérons que l'atmosphère est épaisse de 40 km (ce qui correspond à 99 %) de la masse de l'atmosphère, nous voyons que le bleu est quasiment absorbé quelle que soit l'incidence sur la Terre ; en revanche pour un coucher de soleil ($L \approx 700$ km), on constate que le jaune est quasiment éteint alors que le rouge subsiste. Ces considérations qualitatives ne prennent pas en compte le spectre de la lumière solaire.



30.3.4 Polarisation par diffusion

Comme les dipôles sont orientés dans le plan de polarisation de la lumière, ils rayonnent dans ce plan une lumière polarisée. En effet \vec{E} est toujours porté par \vec{e}_θ . Ce phénomène a été observé dans l'expérience. Les abeilles s'en servent pour s'orienter par rapport au soleil.

Conclusion :

Le modèle du dipôle électrique rayonnant permet notamment d'expliquer les propriétés de la lumière diffusée par l'atmosphère. A cette diffusion s'ajoute la diffusion par les fluctuations (inhomogénéités) de densité de l'atmosphère, que nous avons ici négligées.

Nous avons adopté un modèle un peu naïf pour le calcul de la polarisabilité. Un meilleur modèle, en mécanique quantique, ferait intervenir l'hamiltonien dipolaire. Il redonne de façon surprenant les mêmes résultats qualitatifs.

Mentionnons également les deux autres régimes de diffusion : la diffusion Thomson, lorsque la fréquence d'excitation est grande devant les fréquences propres de la molécule, et la diffusion résonnante, lorsque la fréquence d'excitation est proche d'une fréquence de Bohr de la molécule. En diffusion Thomson, la puissance diffusée est indépendante de la longueur d'onde de l'excitation.

Leçon de physique n° **31**

Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat



Bibliographie

- *Mécanique 1*, Faroux, Renault,
- *L'ordre dans le chaos*, Bergé, Pomeau
- *Vibrations et phénomènes de propagation. Tome 1*, Mathieu

Prérequis :

- Equations de Maxwell
- Diffraction

Introduction :

Trouver un modèle pour décrire la propagation de la lumière.

31.1 Le modèle du rayon lumineux

31.1.1 Approche expérimentale

On commence avec une largeur de fente l de l'ordre du centimètre puis on diminue l . Au début la largeur du rectangle lumineux éclairé sur l'écran est égale à l , puis devient proportionnelle à $1/l$. Peut-on trouver un modèle simple décrivant le premier type de comportement ?

31.1.2 Notion de rayon lumineux

Pour expliquer le premier type de comportement, on peut faire le modèle suivant : entre chaque point de la source S et chaque point éclairé M existe une ligne qui représente le chemin emprunté par la lumière pour aller d'un point à l'autre. On l'appelle le rayon lumineux émis par S en M .

Si l'on suppose ensuite que dans un milieu homogène, comme l'air ici, les rayons lumineux sont des droites, on retrouve que la partie éclairée est un rectangle de largeur l .

Ce modèle, dit des rayons lumineux, n'est valable que lorsque la taille caractéristique des ouvertures traversées par la lumière est très grande devant la longueur d'onde.

Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, il existe également un modèle, plus complexe, dit modèle ondulatoire.

Dans le cadre du modèle des rayons lumineux, il reste encore à trouver la trajectoire des rayons lumineux. Cette dernière peut être prévue à l'aide du principe de Fermat.

31.2 Principe de Fermat et conséquences

Il est à noter que la vitesse de propagation de la lumière n'est pas infinie, comme le remarqua notamment l'astronome danois Römer en 1676 en observant les satellites de Jupiter. D'autre part, sa vitesse de propagation dépend du milieu, et on caractérise un milieu par son indice lumineux n , tel que $n = c/v$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, et v la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu. ($c \approx 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$). Pour un rayon lumineux entre A et B, on peut donc définir le temps de parcours de la lumière entre ces deux points.

31.2.1 Enoncé du principe de Fermat (1650)

Le trajet effectivement emprunté par le rayon lumineux entre deux points A et B est tel que le temps de parcours de la lumière entre ces deux points est stationnaire.

31.2.2 Formulation mathématique

$dt = ds/v = nds/c$, d'où

$$t_{AB} = \frac{1}{c} \int_A^B (nds)$$

t_{AB} est ainsi proportionnel à

$$L_{AB} = \int_A^B (nds)$$

que l'on appelle le chemin optique de A à B .

D'après le principe de Fermat, les rayons lumineux effectivement empruntés par la lumière pour aller de A à B vérifient

$$\frac{\partial L_{AB}}{\partial x} = \frac{\partial L_{AB}}{\partial y} = \frac{\partial L_{AB}}{\partial z}$$

Le principe de Fermat est un principe variationnel, c'est à dire que l'on prévoit la trajectoire des rayons lumineux en étudiant les variations d'une certaine grandeur, ici le chemin optique. De même, en mécanique du point, le principe de moindre action permet de prévoir la trajectoire des points matériels étudiant les variations de l'action.

31.2.3 Conséquences

Milieu homogène

Dans un milieu homogène, on trouve $L_{AB} = nl(AB)$, où $l(AB)$ est la longueur du rayon lumineux considéré. L_{AB} sera donc minimal lorsque ce rayon sera le segment $[AB]$: on retrouve que la lumière se propage en ligne droite dans les milieux homogènes.

Retour inverse de la lumière

On considère le rayon lumineux emprunté par la lumière pour aller de A à B (on suppose qu'il n'y en a qu'un pour simplifier). On s'intéresse au rayon lumineux qu'emprunterait la lumière pour aller de B à A .

$$L_{BA} \int_B^A (nds) = - \int_A^B (nds) = \int_A^B (n(-ds)) = L_{AB}$$

Ainsi, puisque L_{AB} était stationnaire pour la rayon lumineux considéré, L_{BA} l'est également. On retrouve donc le principe du retour inverse de la lumière : le trajet suivi par la lumière entre deux points situés sur un même rayon lumineux est indépendant du sens de propagation de la lumière entre ces deux points.

Phénomène de réflexion et réfraction

Calcul intermédiaire : différentielle d'un chemin optique rectiligne

$$dL_{AB} = d(\vec{n} \cdot \vec{AB}) = \vec{n}(d\vec{u} \cdot \vec{AB} + \vec{u} \cdot d\vec{AB})$$

Or $\vec{AB} = AB\vec{u}$ et $\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$

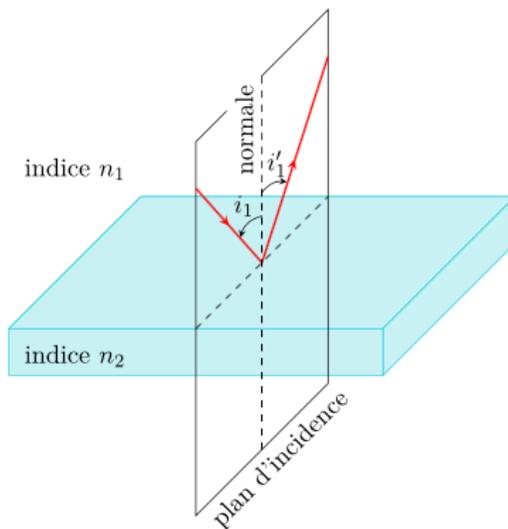
D'où

$$dL_{AB} = n\vec{u}(d\vec{B} - d\vec{A})$$

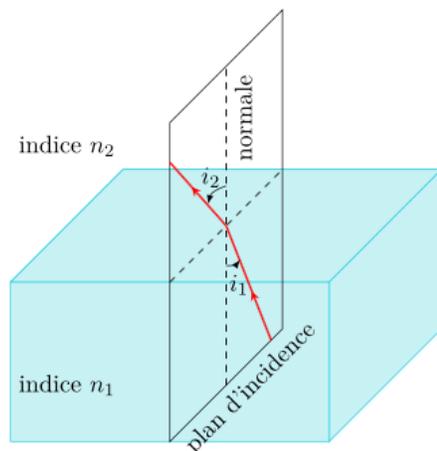
Réflexion :

D'après le calcul précédent, $dL_{AB} = n(\vec{u}_i + \vec{u}_r) \cdot d\vec{I}$. Or, d'après le principe de Fermat, $dL_{AB} = 0$, et ceci doit être vrai pour tout $d\vec{I}$. D'où, \vec{u}_i , \vec{u}_r et \vec{N} sont coplanaires (1ère loi de la réflexion) et, en projetant l'égalité vectorielle obtenue sur le dioptré,

$$r = -i$$



Réfraction :



De même, $dL_{AB} = (n_1 \vec{u}_i - n_2 \vec{u}_t)$. Or, d'après le principe de Fermat, $dL_{AB} = 0$, et ceci doit être vrai pour tout $d\vec{I}$. D'où, \vec{u}_i , \vec{u}_t et \vec{N} sont coplanaires (1ère loi de la réflexion) et, en projetant l'égalité vectorielle obtenue sur le dioptré,

$$n_1 \cdot \sin i = n_2 \cdot \sin t$$

Remarque : cette loi est usuellement dénommée loi de Snell-Descartes, mais le physicien irakien Ibn al Haytham (956-1039) l'avait déjà trouvé)

Théorème de Malus

Etant donné un point source A , on définit une surface d'onde comme l'ensemble des points B tels que $L_{AB} = cste$. Or $dL_{AB} = n\vec{u} \cdot d\vec{B}$, donc les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'ondes.

Equation du rayon lumineux

On considère un milieu d'indice variable $n(\vec{r})$. A t , le rayon lumineux est en \vec{r} et à $t + dt$, le rayon lumineux est en $\vec{r} + d\vec{r}$. Le rayon lumineux a traversé un dioptré de normale $\overrightarrow{\text{grad}}(n)$, donc, d'après la 2ème loi de la réfraction,

$$d(n\vec{u}) = \overrightarrow{\text{grad}}(n)$$

Or $d(n\vec{u}) = dn \cdot \vec{u} + n \cdot d\vec{u}$, $dn = \overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}$ et $d\vec{r} = ds \cdot \vec{u}$, donc $dn = \alpha \frac{dn}{ds}$

Ainsi,

$$\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \overrightarrow{\text{grad}}n$$

Cette équation est l'équation du rayon lumineux et permet de trouver la ds trajectoire des rayons lumineux dans les milieux inhomogènes. Elle est l'analogue du principe fondamental de la dynamique, qui peut de même se démontrer à partir du principe de moindre action : de même qu'en mécanique, on peut formuler les lois de l'optique à partir d'un formalisme vectoriel ou variationnel, ces deux formulations étant équivalentes. (à l'aide de l'équation du rayon lumineux, on peut retrouver le principe de Fermat)

Retrouve-t-on le principe de Fermat à l'aide du modèle ondulatoire ?

31.3 Lien avec le modèle ondulatoire

Le modèle ondulatoire décrit la lumière à l'aide du champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) , dont la propagation est donnée par les équations de Maxwell des milieux.

Si l'on suppose que dans le milieu se propage une onde de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}(\vec{r})e^{i(k \cdot L(\vec{r}) - \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{b}(\vec{r}) e^{i(k \cdot L(\vec{r}) - \omega t)}$$

avec e et b variant lentement devant λ ($\|\vec{k}\| = 2\pi/\lambda$) et $\lambda \rightarrow 0$,

(ce qui est justifié par la possibilité de faire la transformée de Fourier temporelle de (\vec{E}, \vec{B}) , et l'indépendance entre les fréquences temporelle en optique linéaire, alors on montre que l'énergie lumineuse se propage dans la direction de

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

avec $\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle w \rangle v \vec{u}$, w étant la densité d'énergie électromagnétique.

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 B^2$$

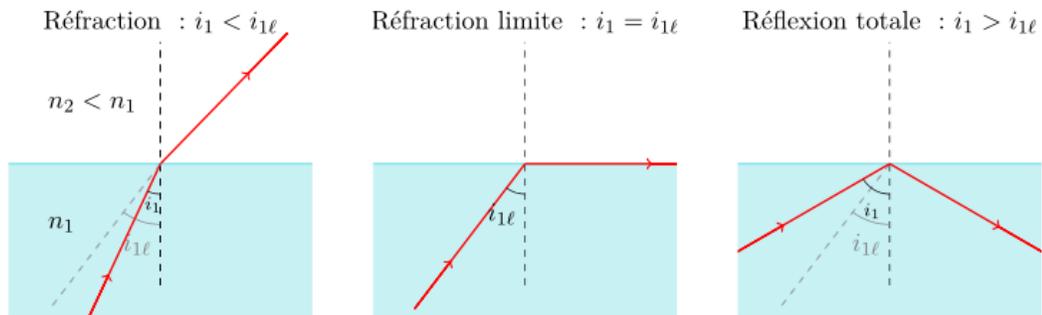
et $\vec{u} = \frac{\vec{\text{grad}} L}{n}$

En dérivant cette dernière équation par rapport à s , on retrouve après quelques calculs l'équation du rayon lumineux, et donc, d'après ce qui a été vu précédemment, le principe de Fermat.

On voit donc que le modèle des rayons lumineux est inclus dans le modèle ondulatoire de la lumière. Au niveau des limites du modèle des rayons lumineux, ce dernier ne permet notamment pas de prévoir les coefficients de réflexion et de transmission à la traversée d'un dioptré.

31.4 Applications

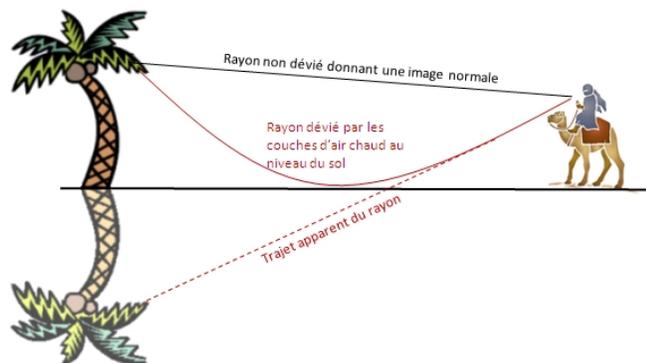
31.4.1 Réflexion totale



A la traversée d'un dioptré, on a vu que le rayon lumineux doit vérifier $n_1/n_2 \cdot \sin i = \sin t$. On prévoit donc qu'il ne peut pas y avoir de rayon réfracté si $i > \arcsin(n_2/n_1)$.

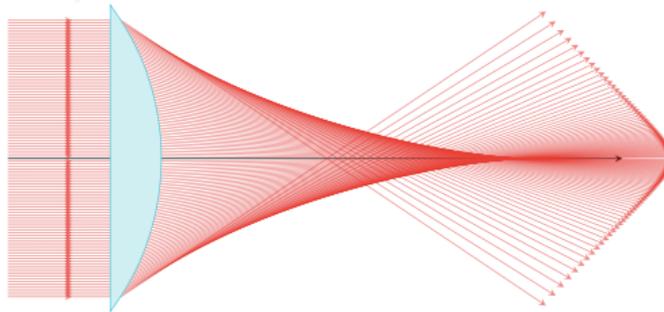
Ceci explique par exemple qu'un plongeur regardant la surface de l'eau sous un angle important ne voit plus l'extérieur.

31.4.2 Mirages et principe des lentilles



Le principe de Fermat permet de comprendre de façon simple les phénomènes de mirage et la forme des lentilles.

Explication de la déviation des faisceaux lumineux en fonction de la forme des lentilles expliqués de façon qualitative à l'aide du principe de Fermat.

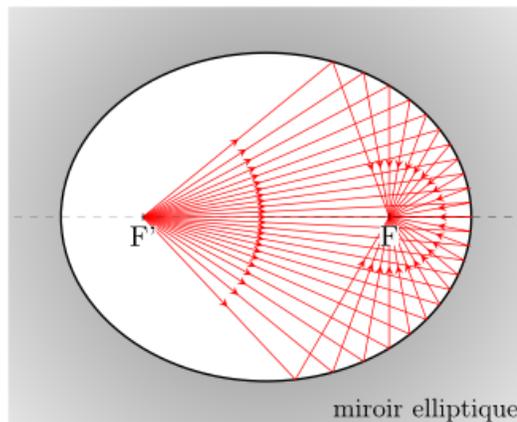


31.4.3 Fabrication d'un système rigoureusement stigmatique

Définition du stigmatisme : un système optique (S) est rigoureusement stigmatique pour le couple de points (A, A') si tous les rayons issus de A passent par A' après avoir été déviés par le système.

Par exemple, la lentille vu précédemment n'est qu'approximativement stigmatique : elle n'est stigmatique pour les rayons paraxiaux, c'est à dire ceux faiblement inclinés par rapport à l'axe optique et arrivant près du centre optique de la lentille.

Il existe néanmoins des systèmes optiques rigoureusement stigmatiques pour certains couples de points. L'intérêt est de pouvoir récupérer toute l'énergie lumineuse émise par ces points.



En réflexion, un ellipsoïde de révolution est rigoureusement stigmatique pour ses deux foyers.

En effet, par définition, $F_1I + IF_2 = \text{cste}$, et le rayon passant par I' passe par F_2 . Dans le cas particulier où F_1 est à l'infini, on obtient une portion de parabolôïde, ce qui explique que les antennes de réception de la télévision par satellite soient des antennes paraboliques.

Conclusion :

Le modèle des rayons lumineux est efficace dans notre vie quotidienne car les longueurs d'onde visible sont de l'ordre de 500 nm, bien plus petits que les tailles caractéristiques des ouvertures qu'elles rencontrent, plutôt comprises entre 1 mm et 1 m. Néanmoins, il reste incapable de prévoir des phénomènes tels que les irisations observées sur les bulles de savons ou à la surface des disques compact, ou alors de prédire quel est le rapport entre l'intensité transmise et réfléchiée par une vitre. La formulation variationnelle de Fermat permet d'avoir une vision globale des rayons lumineux, qui permet de comprendre aisément le principe de nombreux phénomènes et instruments physiques, tels les mirages ou les miroirs et lentilles.

Mircroscopies optiques



Bibliographie

- *Optique*, Pérez, Dunod
- *Optique géométrique*, Maurel, Belin Sup
- *Optique expérimentale*, Sextant, Hermann
- *La microscopie optique moderne*, Wastiaux, Tec et Doc
- *Les instruments d'optique*, Detwiller, Ellipses
- *Expériences de physique*, Duffait, p. 191
- *Réussir les TP de physique aux concours*, Sallen, p. 223
- *Expériences de physique*, Bellier, p. 68

Prérequis :

- Toute l'optique géométrique
- Notions de diffraction
- Notions sur les aberrations

Introduction :

Les instruments d'optique servent à améliorer la vision des objets perçus par l'œil. Nous

allons plus particulièrement nous intéresser au microscope optique qui est l'association de deux systèmes optiques centrés : un objectif et un oculaire. Cet appareil permet d'observer des objets de taille microscopique, il est donc un outil indispensable dans de nombreux laboratoires de recherches que ce soit en physique, en biologie ... Cet appareil apparu à la fin du 16e siècle et a été l'objet d'une amélioration constante.

32.1 Présentation du microscope et étude géométrique

32.1.1 Caractéristique d'un instrument d'optique

- Grossissement, grandissement, puissance : caractérise la nature de l'image obtenue pour un objet donné.
- Champ : caractérise l'objet susceptible d'être visualisé correctement à l'aide de l'instrument.
- Limite de résolution : caractérise la finesse des détails observables par l'instrument, ce qui définit la qualité des images formées.

32.1.2 Eléments constitutifs

Présentation succincte de l'instrument, de ses caractéristiques et de sa représentation en optique géométrique.

32.1.3 Schéma des rayons

Expliquer la construction des rayons lumineux.

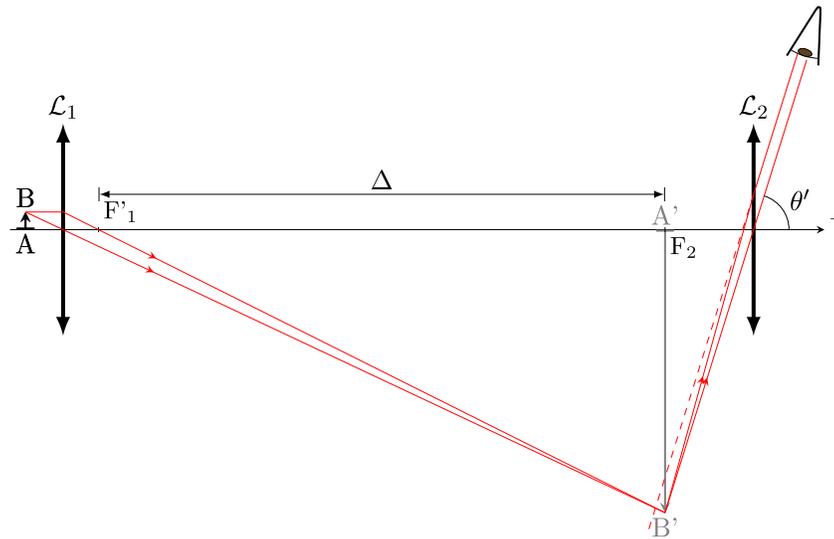
Objectif : pièce maîtresse du microscope, grandissement d'environ -100, très convergent ($f = 1$ mm)

Oculaire : permet une observation à l'œil sans fatigue (pas d'accommodation), rôle de loupe

Ces deux instruments d'optique épais sont des systèmes optiques très complexes comportant de nombreuses lentilles.

32.1.4 Conjugaison et latitude de mise au point

Image $A'B'$ à l'infini pour avoir l'œil au repos :



Conjugaison oculaire : $F_2 = A''$

Conjugaison objectif : $\overline{H_1A} = \frac{f_1'(f_1'+\Delta)}{\Delta} = \text{longueur frontale}$

Avec $\Delta = \text{intervalle optique} = 160 \text{ mm}$

Δ et f_1' sont fixés dans un microscope. On joue sur la position de l'objet A pour avoir une image nette.

AN : $f_1' = 1.6 \text{ mm}$ soit $\overline{H_1A} = 1.76 \text{ mm}$ (très proche de l'objectif)

L'œil normal peut faire une image nette d'un objet situé entre le PP (25 cm) et le PR (infini).

Image $\overline{A'B'}$ au PP pour avoir l'œil au repos :

Expliquer la nouvelle construction des rayons lumineux avec le transparent.

La latitude de mise au point est la distance sur laquelle on déplace l'objet pour faire passer l'image du PP au PR . Pour un microscope, elle est de l'ordre de $50 \mu\text{m}$, ce qui explique la nécessité d'avoir un réglage micrométrique.

32.1.5 Grossissement, grandissement et puissance

Grossissement du microscope

Définition :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

Avec α' = angle sous lequel on voit l'image à travers l'instrument et α = angle sous lequel on voit l'objet au PP ($d_m = 25$ cm)

$$\alpha' = \frac{\overline{A'B'}}{f_2'} \text{ et } \alpha = \frac{\overline{AB}}{d_m}$$

$$\text{Grandissement de l'objectif : } \gamma_{obj} = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}}$$

$$\text{Grossissement de l'oculaire : } G_{oc} = \frac{d_m}{f_2'}$$

$$\text{Grossissement du microscope : } G = \gamma_{obj} \cdot G_{oc}$$

$$\text{AN : } \gamma_{obj} = 100 \text{ et } G_{oc} = 10 \text{ soit } G = 1000$$

Puissance du microscope

Définition :

$$P = \frac{\alpha'}{AB}$$

mesurée en dioptrie (δ)

Plus P est grande, plus le diamètre apparent de l'image sera important et les objets, pouvant être vu, petits.

Puissance oculaire :

$$P_{oc} = \frac{\alpha''}{\overline{A''B''}}$$

Puissance microscope :

$$P = \frac{\alpha'}{AB} = P_{oc} \gamma_{ob}$$

Définition : Puissance intrinsèque : C'est la puissance pour laquelle l'image $\overline{A''B''}$ est rejetée à l'infini.

Puissance intrinsèque du microscope :

$$P_i = \frac{\Delta}{f_1' f_2'}$$

AN : $f'_2 = 25 \text{ mm}$ soit $P_i = 4000 \delta$

Nous allons maintenant chercher à mettre en évidence les autres caractéristiques d'un microscope.

32.2 Luminosité, résolution et champ

32.2.1 Eclairage et luminosité

Eclairage

Le but est de faire rentrer le maximum de lumière de la source à travers l'œil, et d'avoir le meilleur éclairage possible de l'objet. Certains microscopes possèdent un système d'éclairage intégré. A l'aide d'un collecteur, on forme l'image de la source dans le plan focal de l'objectif : c'est le diaphragme d'ouverture (DO). C'est ce diaphragme qui va limiter la lumière entrant dans le système. L'image du DO par l'oculaire forme la pupille de sortie, lieu où l'on va placer l'œil pour récolter le maximum de lumière (le montrer sur la manip). Ce DO est fixé afin de corriger des aberrations, pour jouer sur la luminosité, il faut donc jouer sur l'alimentation.

Ouverture numérique de l'objectif

Pour avoir un stigmatisme rigoureux dans le système optique, on doit vérifier la relation des sinus d'Abbe :

$$n \cdot \sin \alpha \cdot \overline{AB} = n' \cdot \sin \alpha' \cdot \overline{A'B'}$$

Avec α = demi angle au sommet du cône de lumière qui pénètre dans l'instrument d'optique (défini par le DO). Dans un microscope, le but est d'avoir $\overline{AB} \ll \overline{A'B'}$ donc $n \cdot \sin \alpha \gg \sin \alpha'$. Plus les dimensions linéaires du détail (AB) sont petits, plus l'angle d'ouverture de l'objectif (α) doit être grand pour que le détail puisse encore être reproduit de manière fidèle à l'objet (stigmatisme).

Définition : Ouverture numérique

$$(ON) = n \cdot \sin \alpha$$

Avec α = angle que fait avec l'axe optique le rayon le plus extrême pénétrant encore dans l'objectif.

A cause de l'écart nécessaire entre le couvre objet et l'objectif, α est limité à 72° . Pour augmenter l' ON , il faut donc jouer sur n , d'où l'utilité d'objectifs dit à immersion.

AN : $ON(air) = 0.95$ et $ON(huile) = 1.4$

Cercle oculaire

Où placer l'œil pour récolter le maximum de lumière ? A la pupille de sortie du microscope qu'on appelle cercle oculaire. L'observateur place son œil à la pupille de sortie afin de ne pas limiter le champ.

Relation des sinus d'Abbe :

$$n \cdot \sin \alpha \cdot \overline{AB} = n' \cdot \sin \alpha' \cdot \overline{A'B'}$$

avec $ON = n \cdot \sin \alpha$; $n' = 1$; $\sin \alpha' \simeq \alpha'$

Rayon du cercle oculaire (R_{co}) = $\overline{A'B'}$ = $\frac{ON}{P_i}$

AN : $ON = 0.95$ et $P_i = 4000 \delta$ soit $R_{co} = 0.25$ mm.

On retiendra que pour avoir une pupille de sortie correcte ($R_{co} < R_{pupille}$), il faut $P_i = 4000 \cdot ON$. On ne peut donc pas choisir la puissance de notre microscope comme on le veut, celle-ci est déterminée par l'ouverture numérique de l'objectif.

32.2.2 Pouvoir de résolution

Résolution théorique

On néglige toutes les aberrations géométriques et chromatiques des instruments d'optique. La résolution théorique est la taille du plus petit détail visible de l'objet observé (détectable) du fait de la diffraction par l'instrument formant son image (tâche d'Airy).

Du fait de la diffraction par le DO : $-k \sin \alpha < k_x < k \sin \alpha$ soit $\Delta k_x = 2k \sin \alpha$

Avec $k = \frac{2\pi}{\lambda} n$

Le plus petit détail observable vaut Δx et est donné par la relation de Fourier :

$$\Delta x \Delta k_x > 2\pi$$

AN : $\lambda = 550$ nm

$ON = 0.95$ soit $\Delta x > 0.3 \mu\text{m}$

$ON = 1.4$ soit $\Delta x > 0.2 \mu\text{m}$

L'augmentation de l' ON permet d'augmenter la résolution théorique de l'instrument.

Comment dépasser la limite de résolution ?

1 - Diminuer κ : Microscope à rayon X ($\lambda = 10 \text{ nm}$), Microscope électronique ($\lambda_{dB} = 0.1 \text{ nm}$).

2 - Utiliser des ondes qui ne se propagent pas pour ne pas être limité par la diffraction : Microscope en champ proche.

Limite de résolution par l'œil

A cause de la diffraction et de la structure de la rétine, la résolution de l'œil vaut $1'$. Pour avoir un bon microscope, il faut que la résolution théorique soit inférieure à $1'$. Pour augmenter la résolution on peut utiliser un meilleur détecteur que l'œil (grain d'un CCD ...)

32.2.3 Champ transverse et longitudinal

Profondeur de champ

Comme la limite de résolution de tout détecteur n'est pas nulle, ce détecteur ne fera pas la différence entre une image ponctuelle et une petite tâche due à un défaut de mise au point (attention, ceci n'a rien à voir avec la tâche de diffraction!).

Définition : La profondeur de champ est la distance entre plans extrêmes dans l'espace objet dont les images sont perçues comme nettes par le détecteur.

Elle est de l'ordre de $0.1 \mu\text{m}$ dans un microscope. Ceci explique l'importance de la mise au point. On peut observer différents plans objets grâce à cette propriété.

Champ transverse et diaphragme de champ

Le champ visible de l'objet est limité par l'oculaire qui constitue le diaphragme de champ. Pour avoir une observation agréable, il est important de supprimer le champ de contour. L'oculaire est constitué du verre oculaire, d'un diaphragme de champ permettant de supprimer le champ de contour et d'un verre de champ placé au niveau de l'image intermédiaire qui permet de rabattre les rayons à travers le verre oculaire et ainsi d'augmenter le champ

visible. Plus le grandissement de l'objectif est important, plus le champ est restreint (car $A''B''$ plus grand), il faut donc commencer à régler le microscope à l'aide d'un objectif de faible grandissement.

32.3 Correction des aberrations géométrique et chromatique

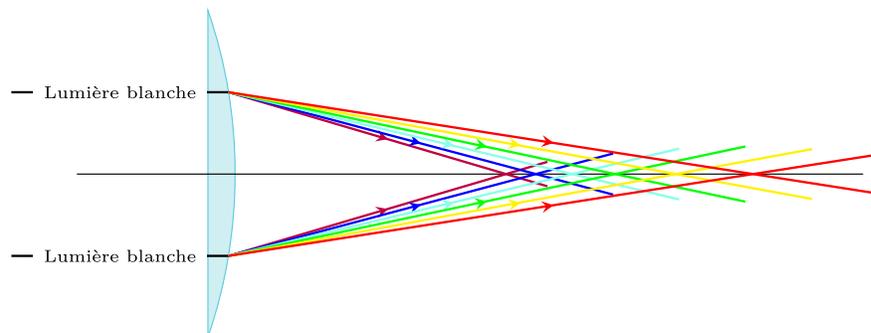
A la vue de l'importante ON de l'objectif, les aberrations introduites sont importantes, il est nécessaire de les corriger. Il est impossible de corriger tous les défauts car la correction d'un défaut en introduit d'autres. On laisse donc subsister des défauts qui ne gênent pas l'observation et qui peuvent être corrigés en amont et en aval de l'objectif.

Remarque : Il faut éviter de faire de cette partie un énoncé de toutes les corrections possibles des aberrations, il est préférable d'en énoncer 1 ou 2 et comment les corriger puis de montrer qu'il existe d'autres aberrations qu'il sera nécessaire de corriger.

32.3.1 Condition de stigmatisme rigoureux

La lentille frontale est une lentille sphérique qui permet d'avoir un stigmatisme rigoureux entre deux points (points de Weierstrass W et W'). L'objet est toujours proche de W à la vue de la latitude de mise au point. Les rayons en sortie de l'objectif pourront tous converger au même point.

32.3.2 Correction de l'aberration chromatique



Le verre des lentilles est dispersif et engendre une convergence des faisceaux de différentes longueurs d'onde à différents endroits. On peut corriger ce défaut par l'association de lentilles convergentes et divergentes permettant de faire coïncider les foyers rouge et bleu

(objectif achromatique). En associant plus de lentilles, on peut faire coïncider les foyers rouge, bleu et jaune (objectif apochromatiques).

32.3.3 Autres aberrations à corriger

- Aberrations géométriques
- Astigmatisme et courbure de champ
- Introduction d'une lame à faces parallèles
- Coma et distorsion
- Reffet sur les différentes lentilles

Conclusion :

Le microscope est l'outil d'optique le plus utilisé dans les laboratoires. Son étude permet de mieux comprendre son fonctionnement et de comprendre la nécessité des réglages à effectuer pour corriger les aberrations et d'avoir une bonne observation. L'arrivée de nouveaux types de microscopes ne permettent pas de remplacer le microscope optique au vu de leur prix, mais permettent d'augmenter la résolution jusqu'à l'observation des atomes.

Interférences à deux ondes en optique



Bibliographie

- *Optique*, Faroult, Renault, Dunod
- *Physique Spé PC/PC**, Olivier, Gié
- *Montages de physique*, Charmont, p. 49
- *Expériences de physique*, Duffait, p. 220
- *Optique expérimentale*, Sextant, p. 142
- *Expériences d'optique*, Charmont, p. 50

Pré requis : Notions de vibration lumineuse, de déphasage et de chemin optique. Ondes électromagnétiques et polarisation d'une telle onde

Objectifs :

Définir le phénomène d'interférences et obtenir les conditions d'obtention d'interférences à deux ondes.

Introduire les notions de cohérence temporelle et de cohérence spatiale dans le cadre de l'optique scalaire et de l'optique statistique

Introduction : L'optique géométrique, basée sur une théorie corpusculaire de la lumière (défendue par Descartes puis Newton), est incapable d'interpréter certains phénomènes naturels tels que les irisations des taches d'huile ou des bulles de savon (qui sont des

phénomènes d'interférences). Une théorie ondulatoire de la lumière, énoncée par Young et Fresnel suite à leurs travaux, le permet. Elle décrit la lumière, par analogie avec les vagues, comme une onde.

Nous allons donc utiliser ce modèle pour pouvoir interpréter les phénomènes d'interférences. On utilise tout d'abord le modèle le plus simple de la théorie ondulatoire, la vibration lumineuse sinusoïdale (monochromatique) pour déterminer les conditions d'interférences puis on essaie de raffiner ce modèle pour qu'il rende mieux compte des conditions expérimentales.

Expériences : irisation d'une surface d'eau savonneuse + miroirs de Fresnel

33.1 Obtention d'interférences à deux ondes en optique

33.1.1 Les détecteurs en optique

Les ondes optiques sont des ondes électromagnétiques dont les fréquences sont situées dans la gamme de $10^{14/15}$ Hz. Il faut des récepteurs pour les mettre en évidence. Ce sont les photodétecteurs, capteurs qui transforment le rayonnement électromagnétique en un signal, généralement électrique.

Ces détecteurs présentent deux caractéristiques importantes :

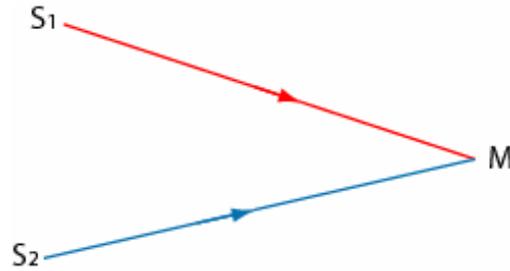
- ils sont quadratiques, c'est-à-dire sensibles non pas à l'amplitude de la vibration lumineuse mais à son carré (i.e. son intensité)
- ils ont un temps de réponse τ très grand devant la période de la vibration lumineuse (qui est de l'ordre de $10^{-13/-14}$ s). Les ordres de grandeur sont $\tau(\text{œil}) = 0,1$ s et $\tau(\text{photodiode}) \geq 1$ ns. Le détecteur moyenne sur un très grand nombre de périodes de la vibration lumineuse.

Un détecteur optique n'est donc sensible qu'à la moyenne temporelle de l'intensité lumineuse.

33.1.2 Superposition de deux ondes monochromatiques

Position du problème : On considère deux ondes lumineuses, issues de deux sources monochromatiques ponctuelles et polarisées rectilignement.

Remarque : Considérer les seules polarisations rectilignes n'est pas restrictif puisqu'elles sont une base des polarisations. On peut donc décomposer toute polarisation en somme de polarisations rectilignes.



$$\vec{a}_1(M, t) = A_1(M, t) \cos \left(\omega_1 t - \phi_{1S} - \frac{2\pi}{\lambda_0} [S_1 M] \right) \vec{e}_1$$

$$\vec{a}_2(M, t) = A_2(M, t) \cos \left(\omega_2 t - \phi_{2S} - \frac{2\pi}{\lambda_0} [S_2 M] \right) \vec{e}_2$$

Calcul de l'intensité résultante : On calcule l'amplitude et l'intensité résultant de la superposition de ces deux ondes au point M .

Il faut sommer les amplitudes et non les intensités car c'est cette grandeur qui permet au modèle ondulatoire, contrairement au modèle géométrique, de rendre compte des interférences.

$$\vec{a}(M, t) = \vec{a}_1(M, t) + \vec{a}_2(M, t)$$

Donc

$$I(M, t) = 2 \langle \vec{a}(M, t)^2 \rangle = 2 \langle (A_1(M, t) \cos(\omega_1 t - \phi_{1M}) \vec{e}_1 + A_2(M, t) \cos(\omega_2 t - \phi_{2M}) \vec{e}_2)^2 \rangle$$

Donc

$$I(M, t) = I_1 + I_2 + 4\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\omega_1 t - \phi_{1M}) \cos(\omega_2 t - \phi_{2M}) \vec{e}_1 \vec{e}_2 \rangle$$

où $\langle \rangle$ signifie la valeur moyenne temporelle sur le temps de réponse du détecteur.

Interférences : On dit qu'il y a phénomène d'interférences lorsque l'intensité résultant de la superposition de deux ondes n'est pas la somme de leur intensité ($I \neq I_1 + I_2$).

Le terme $4\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\omega_1 t - \phi_{1M}) \cos(\omega_2 t - \phi_{2M}) \vec{e}_1 \vec{e}_2 \rangle$ est appelé terme d'interférences.

33.1.3 Condition d'obtention d'interférences

Condition d'interférences : Pour pouvoir observer un phénomène d'interférences, il faut que le terme d'interférences soit non nul.

Pour cela, il faut que le produit scalaire $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2$ soit non nul et donc que les polarisations des deux ondes soient identiques. On supposera cette condition vérifiée dans la suite et on se limitera donc à un modèle scalaire de la lumière et non plus vectoriel.

On développe ensuite le terme d'interférences et on cherche les conditions de non nullité de la moyenne temporelle :

$$\begin{aligned} & \langle \cos(\omega_1 t - \phi_{1M}) \cos(\omega_2 t - \phi_{2M}) \rangle \\ &= \frac{1}{2} [\langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - (\phi_{1M} + \phi_{2M})) \rangle + \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - (\phi_{1M} - \phi_{2M})) \rangle] \end{aligned}$$

Condition 1 :

On ne peut observer d'interférences qu'entre ondes monochromatiques de même polarisation et de même fréquence.

Remarques :

- 1) Si les polarisations ne sont pas constantes au cours du temps, il faut également faire leur moyenne temporelle et introduire la notion de cohérence de polarisation.
- 2) En réalité la moyenne temporelle du terme en $\cos(\omega_1 - \omega_2)t$ est non nulle si $(\omega_1 - \omega_2)\tau \ll 1$ où τ est le temps de réponse typique du détecteur.

Dans ce cas, l'état d'interférence évolue au cours du temps mais suffisamment lentement pour que l'on puisse observer des interférences à chaque instant.

Ces battements ne sont observables que pour des sources laser (et pas pour des lampes classiques pour lesquelles la condition 1 est strictement valable). On utilise même actuellement cette méthode pour étalonner la fréquence d'émission d'un laser.

Calcul du terme d'interférences pour $\omega_1 = \omega_2$: On considère deux sources ponctuelles monochromatiques de même fréquence. Le terme d'interférences s'écrit alors :

$$2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_{1M} - \phi_{2M})$$

avec

$$\phi_{1M} - \phi_{2M} = \phi_{1S} - \phi_{2S} + \frac{2\pi}{\lambda_0} ([S_1M] - [S_2M])$$

Ces deux termes vont nous permettre d'introduire les deux notions de cohérence : la cohérence temporelle et la cohérence spatiale.

Remarque : Le terme géométrique contient les déphasages dus aux phénomènes de réflexion, passage par un foyer...

33.1.4 Notion de contraste

Définition : Lorsqu'on observe un phénomène d'interférences, on peut le caractériser par son contraste/facteur de visibilité C , défini par :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

où $I_{max/min}$ correspond à l'intensité maximale/minimale du phénomène d'interférences

Expression du contraste en fonction de I_1 et I_2 :

Dans le cas général, on peut écrire :

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

et

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

donc

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

On obtient un contraste unité lorsque les deux ondes ont même intensité (mais non critique).

On retiendra donc les deux conditions provisoires d'obtention d'interférences :

- Les deux sources doivent être monochromatiques de même fréquences
- Les deux ondes qui interfèrent doivent produire à peu près la même intensité

Remarque : Dans le cas général, le contraste n'est jamais rigoureusement égal à 1 (correspond à des conditions optimales d'observation des interférences). Les causes de diminution du contraste sont :

- Les sources ne sont pas rigoureusement monochromatiques et le terme lié aux mécanismes d'émission dépend du temps. Ce phénomène va être approfondi dans l'étude de la cohérence temporelle.

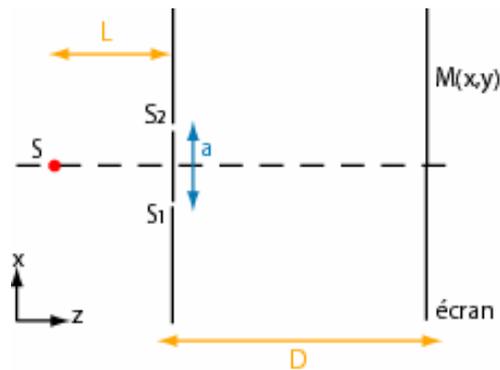
- Les sources ne sont pas rigoureusement ponctuelles. Ce phénomène va être approfondi dans l'étude de la cohérence spatiale.

Dans ce cas, le contraste est proportionnel au facteur de cohérence γ selon C . Il mesure alors le degré de cohérence.

33.1.5 Exemple : expérience des trous d'Young

On considère une source ponctuelle, qui éclaire deux trous distants de a . On s'intéresse aux interférences entre les ondes issues de chacun des trous (qu'on suppose se comporter comme des sources secondaires) en un point $M(x, y)$.

Remarque : On suppose que les trous d'Young se comportent comme des sources secondaires parfaites, ce qui suppose une diffraction infiniment efficace. Cependant, le phénomène de diffraction peut être limitant dans le phénomène d'interférences.



La différence de marche au point M est donnée par :

$$\delta = S_1M - S_2M = \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} - \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}$$

On suppose que la distance D entre les trous et l'écran est très grande devant la distance a entre les trous. On peut donc faire un développement limité et on obtient :

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

L'éclairement sur l'écran est donc donné par :

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right]$$

La figure d'interférences est donc constituée de franges rectilignes parallèles à l'axe (Oy) et d'une variation sinusoïdale de l'éclairement selon (Ox) avec un interfrange de l'ordre du mm.

On dit que ce phénomène d'interférences est non localisé puisqu'on peut observer les franges quelle que soit la position de l'écran.

33.2 Cohérence temporelle

Nous avons supposé que les sources étaient monochromatiques et de phase constante au cours du temps. Ces hypothèses sont évidemment fausses en pratique et nous allons montrer en quoi cela modifie les interférences, en introduisant la notion de cohérence temporelle.

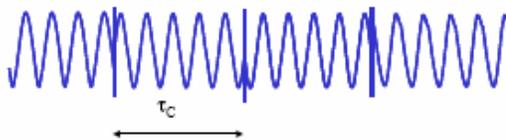
33.2.1 Modèle des trains d'onde (point de vue temporel)

Modèle des trains d'onde :

On veut rendre compte du fait qu'une source lumineuse réelle n'a pas une phase constante au cours du temps. Pour cela, on décrit les sources réelles quasi-monochromatiques par un modèle simple mais efficace, le modèle des trains d'onde.

Dans ce modèle, une source réelle quasi-monochromatique émet une amplitude sinusoïdale pendant une durée moyenne C après laquelle elle subit un changement aléatoire de phase.

On peut donc représenter schématiquement la vibration lumineuse par :



Ordres de grandeur :

- Lampe spectrale : $\tau_C \sim 10^{-11}$ s et $l_C \sim 1$ mm

- Laser He-Ne : $\tau_C \sim 10^{-9}$ s et $l_C \sim 30$ cm

Remarque : Dans une lampe spectrale, les trains d'onde correspondent au rayonnement sinusoïdal des atomes, décrits comme des dipôles rayonnants. Les changements brusques de phase s'interprètent comme des collisions entre les différents atomes de la vapeur. Le temps de cohérence est alors le temps moyen entre deux collisions, relié au libre parcours moyen l^* par $l^* = c\tau_C$. Les trains d'onde sont donc une somme de vibrations sinusoïdales de phase aléatoires (donc incohérentes entre elles).

La transformée de Fourier contient donc plusieurs longueurs d'onde, donc un spectre de largeur spectral $\Delta\omega$.

Cette interprétation microscopique n'est cependant possible que pour les lampes classiques.

Incohérence de deux sources indépendantes :

L'expression du terme d'interférences faisait intervenir le déphasage en M des deux ondes issues de chacune des deux sources :

$$\phi_{1M} - \phi_{2M} = \phi_{1S} - \phi_{2S} + \frac{2\pi}{\lambda_0} ([S_1M] - [S_2M])$$

Du fait des sauts aléatoires de phase, le terme $\phi_{1S} - \phi_{2S}$ fluctue aléatoirement et donne une contribution nulle en moyenne. Le terme d'interférences est donc nul.

Condition 2 : Ainsi, on ne peut pas obtenir d'interférences entre deux sources lumineuses indépendantes. Il faut nécessairement diviser l'onde issue d'une source primaire unique.

Remarque : Il existe deux méthodes pour obtenir deux ondes à partir d'une même source :

- Division du front d'onde : on sépare géométriquement l'onde (ex : trous d'Young)
- Division d'amplitude : on sépare énergétiquement l'onde (ex : interféromètre de Michelson)

Cohérence de deux sources secondaires :

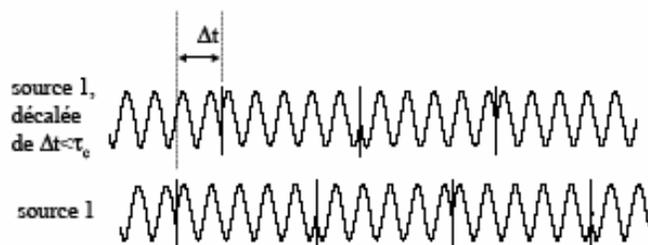
Lorsqu'on réalise deux sources secondaires à partir d'une même source, chaque source émet toujours une succession de trains d'onde pendant des durées moyennes τ_C .

Tant que la différence de marche entre les deux ondes n'est pas trop grande, les deux ondes sont émises quasi- simultanément et la phase entre elles est bien définie.

Quantitativement, la phase relative entre les deux ondes est bien définie si le décalage temporel Δt entre les deux chemins est plus petit que le temps de cohérence de la source initiale.

On définit ainsi la longueur de cohérence par

$$l_c = c\tau_c$$



On peut alors définir un nouveau critère, lié à la cohérence temporelle d'une source lumineuse :

La différence de marche maximale, entre deux sources secondaires issues d'une même source primaire, au-delà de laquelle on ne peut plus avoir d'interférences est fixée par le temps de cohérence de la source primaire $\delta \leq c\tau_c$.

33.2.2 Largeur de raie (point de vue spectral)

Largeur de raie d'une source lumineuse :

Une source n'est jamais monochromatique. L'onde émise est en réalité une raie possédant une certaine largeur spectrale caractérisée par $\Delta\omega$, appelée largeur de raie de la source lumineuse.

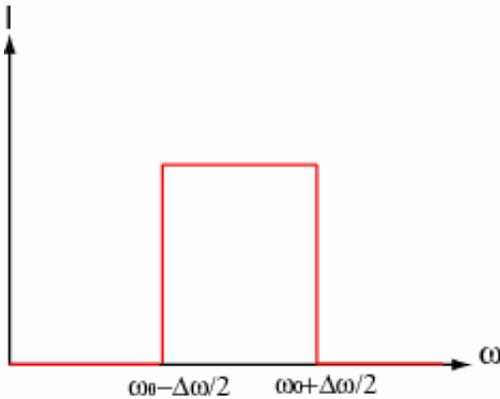
Remarque : Physiquement, cet élargissement des raies à plusieurs causes :

- un élargissement homogène dû à la durée de vie τ finie des niveaux excités des atomes de la source (élargissement lorentzien de la raie d'émission, de largeur $\Gamma = 1/\tau$).
- un élargissement inhomogène Doppler dû à l'agitation thermique qui confère à chaque atome de la source une vitesse qui décale leur fréquence d'émission (élargissement gaussien de qqs centaines de MHz).

un élargissement inhomogène collisionnel dû aux collisions entre les différents atomes de la source (élargissement gaussien de quelques GHz).

Retour au modèle des trains d'onde :

On considère l'expérience des trous d'Young avec une source ponctuelle quasi-monochromatique dont le profil de raie peut être modélisé par un rectangle de largeur $\Delta\omega$.



On décompose la source en une somme de sources monochromatiques $[\omega, \omega + d\omega]$, chacune produisant des interférences. Ces différentes sources sont incohérentes entre elles (car de phase aléatoire).

Une source monochromatique produit une intensité sur l'écran donnée par le calcul précédent des trous d'Young :

$$dI = \frac{2I_0}{\Delta\omega} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \right] d\lambda = \frac{2I_0}{\Delta\omega} \left[1 + \cos\left(\frac{\omega ax}{\lambda c D}\right) \right] d\omega$$

Donc

$$I = \frac{2I_0}{\Delta\omega} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \left[1 + \text{sinc}\left(\frac{ax}{\lambda c D} \Delta\omega\right) \cos\left(\frac{\omega_0 ax}{\lambda c D}\right) \right] d\omega$$

Donc

$$I = 2I_0 \left[1 + \text{sinc}\left(\frac{ax}{2cD} \Delta\omega\right) \cos\left(\frac{ax}{2cD} \omega_0\right) \right]$$

avec un contraste :

$$C_{\text{temps}} = \text{sinc}\left(\frac{ax}{\lambda c D} \Delta\omega\right)$$

Le contraste s'annule lorsque

$$\delta\Delta\omega = 2\pi c$$

Nouveau critère : Le critère de cohérence temporelle établit devient donc

Condition 3 (cohérence temporelle) :

On ne peut obtenir d'interférence que par division d'une onde issue d'une source primaire unique et seulement si cette source primaire possède une largeur spectrale $\Delta\omega$ ou une différence de marche entre ses deux sources secondaires telle que :

$$\Delta\omega|\delta| \leq 2\pi c$$

On peut alors directement relier la largeur spectrale d'une source lumineuse au temps de cohérence τ_C introduit dans le modèle des trains d'onde selon :

$$\tau_C \approx \frac{1}{\Delta\omega}$$

Remarque : On a montré sur un exemple que le contraste C est égal au module de la transformée de Fourier de l'intensité spectrale.

Ce résultat est généralisable à toute source : c'est le théorème de Wiener-Khintchine.

33.3 Introduction à la cohérence spatiale

Nous avons supposé précédemment que les sources étaient ponctuelles. Cette hypothèse est évidemment fautive en pratique et nous allons montrer en quoi cela modifie les interférences, en introduisant la notion de cohérence spatiale.

Trous d'Young éclairés par une source primaire étendue :

On considère désormais une source plus réaliste, possédant une extension spatiale b selon la direction x .

On décompose la source étendue en une somme de sources ponctuelles, chacune produisant un phénomène d'interférences comme celui calculé précédemment. De plus, ces différents points sources sont incohérents (phase aléatoire) et on somme donc leur contribution en intensité.

En plus du déphasage lié à la différence de chemin optique après les deux trous sources, il faut donc désormais tenir compte du déphasage avant les deux trous :

$$\delta' = S(X)S_1 - S(X)S_2 = \frac{aX}{l}$$

On obtient donc un éclairement total sur l'écran de la forme :

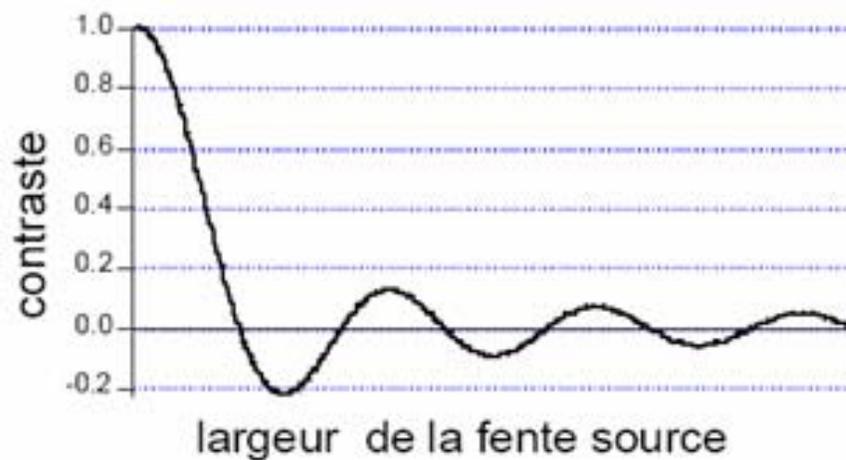
$$I(x) = \frac{2I_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{D} + \frac{aX}{L} \right) \right] dX = 2I_0 + \frac{I_0 \lambda L}{\pi a} \left[\sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{x}{D} + \frac{b}{2L} \right) - \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{x}{D} - \frac{b}{2L} \right) \right]$$

Donc

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi ab}{\lambda L} \right) \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right]$$

Le contraste de la figure d'interférences est alors donné par :

$$C_{spat} = \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi ab}{\lambda L} \right)$$



Le contraste diminue quand b augmente.

Il s'annule (correspond à un éclairement uniforme sur l'écran) lorsque :

$$b = b_0 = \frac{\lambda L}{a}$$

avec b_0 longueur de cohérence spatiale de la source.

Ordre de grandeur : $b_0 \sim 0,5 \text{ mm}$

On compare alors les différences de marche entre les deux rayons issus du point le plus haut de la source primaire ($X = b/2$) et les deux rayons issus du point le plus bas ($X = -b/2$) :

$$\Delta\delta = \frac{ax}{D} + \frac{ab}{2L} - \left(\frac{ax}{D} - \frac{ab}{2L} \right) = \frac{ab}{L} = \frac{a}{L} \times \frac{\lambda L}{a} = \lambda$$

On en déduit donc le critère de cohérence spatiale :

Condition 3 bis (cohérence spatiale) :

On obtient un brouillage total des franges si les ordres d'interférences correspondant aux couples de rayons issus des deux points extrêmes de la source primaire étendue diffèrent de plus d'une unité.

Remarque : On a montré sur un exemple que le contraste C est égal au module de la transformée de Fourier de l'intensité spatiale.

Ce résultat est généralisable à toute source : c'est le théorème de Zernike-Van Cittert.

Conclusion : Les interférences lumineuses permettent des mesures de haute précision. En effet, lorsque l'on passe d'une frange brillante à la suivante, la variation de chemin optique est égale à la longueur d'onde de la radiation lumineuse utilisée (de l'ordre de 0,5 μm dans le visible), d'où une grande sensibilité. Utilisation en métrologie, interférométrie stellaire ou atomique...

Une description plus complète des phénomènes de cohérence est fondée sur une description statistique de la lumière. On a ici simplement essayé de donner les grandes lignes de ces notions avec des modèles simples.

Interférométrie à division d'amplitude



Bibliographie

- *Optique ondulatoire*, Maurel, Belin
- *Optique-Fondements et applications*, Pérez, Masson
- *Principle of optics*, Born, Wolf, Pergamon Press
- *Montages de physique*, Charmont, p. 50
- *Expériences d'optique*, Duffait, p. 64
- *Physique expérimentale*, Fruchart, p. 223
- *Optique expérimentale*, Sextant, p. 143
- *Réussir les TP de physique aux concours*, Sallen, p. 260

Prérequis :

- Interférences à 2 ondes
- Interféromètres à division d'amplitude
- Cohérence spatiale et cohérence temporelle

Introduction :

On a vu que les performances des interféromètres à division du front d'onde étaient limités par des problèmes de cohérence spatiale. On ne peut donc pas étendre la source pour gagner en luminosité. Une solution ingénieuse pour s'affranchir du problème de la cohérence spatiale est la division d'amplitude, dont le principe est de faire interférer chaque rayon avec lui-même. On peut ainsi travailler avec des sources étendues et avoir des interférences beaucoup plus lumineuses.

34.1 Interféromètre à 2 ondes

34.1.1 Interférences sur des lames

Une manière simple pour séparer un rayon lumineux et le faire interférer avec lui-même est d'utiliser des lames. Prenons le cas d'une lame de diélectrique (verre par exemple) plongée dans l'air. Une onde lumineuse arrivant sur cette lame subira 2 réflexions principales : une sur la face avant et une sur la face arrière de la lame. On justifiera par la suite qu'on peut ne prendre en compte que ces 2 rayons pour étudier les rayons réfléchis par la lame.

Lame à faces parallèles

Dans le cas d'une lame à faces parallèles, la construction géométrique des rayons réfléchis nous indique que les interférences sont localisées là où les rayons se coupent c'est à dire à l'infini. Le calcul de la différence de marche entre les 2 ondes réfléchies est présentée sur transparent.

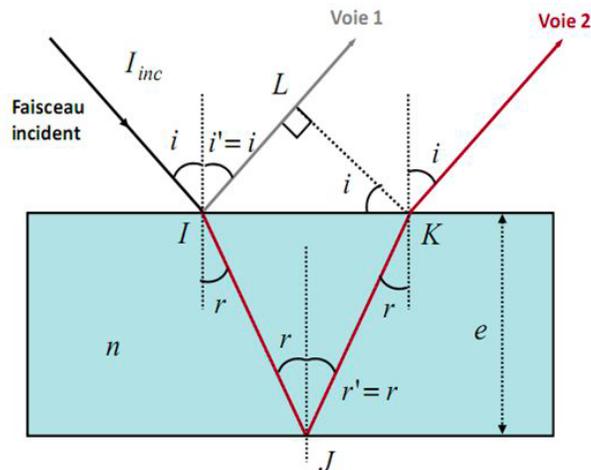
L'interférence entre les 2 ondes réfléchies donne en un point M à l'infini une intensité

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M) \right)$$

où $\delta(M)$ est la différence de marche entre les deux ondes, calculée précédemment. On a donc

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda} ne \cos r \right)$$

Différence de marche :



$$\delta = n(IJ + JK) - IL$$

or $IJ = JK = \frac{e}{\cos r}$, $IL = IK \sin i = nIK \sin r$ et $\frac{IK}{2} = e \tan r$

Donc

$$\delta = 2ne \left(\frac{1}{\cos r} - \frac{\sin^2 r}{\cos r} \right) = 2ne \cos r$$

e étant constante, on voit que l'intensité ne dépend que de r , donc uniquement de i . On obtient donc des anneaux dits d'égalé inclinaison. Comme nous l'avons souligné au début, ces anneaux d'égalé inclinaison sont localisés à l'infini.

Lame dont les faces font un angle α .

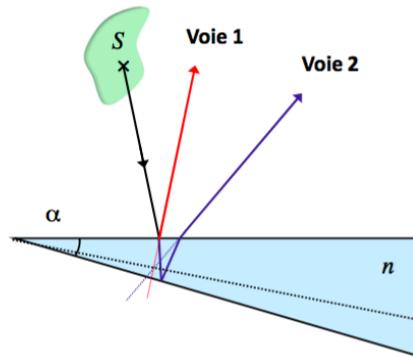
Au tableau, on fait le schéma et on montre que les interférences vont cette fois-ci être localisées au voisinage de la lame. Si on considère que α et l'incidence des rayons sont faibles, la différence de marche entre les deux rayons réfléchis est

$$\delta = 2ne(x)$$

On aura donc une intensité qui s'exprimera sous la forme

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda} ne(x) \right)$$

On voit qu'une intensité constante correspond cette fois-ci à une épaisseur $e(x)$ constante. Ce type d'interférences donne donc ce qu'on appelle des franges d'égale épaisseur qui sont localisées au voisinage de la lame.



Applications

On peut voir ce type d'interférences sur des lames de verre qu'on regarde en réflexion. Montrer ici le transparent tiré de [3, Born and Wolf, p. 288 bis]. Le même type d'interférences explique les irisations des bulles de savon (faire la manip!), et les couleurs irisées des ailes de certains insectes (libellules par exemple).

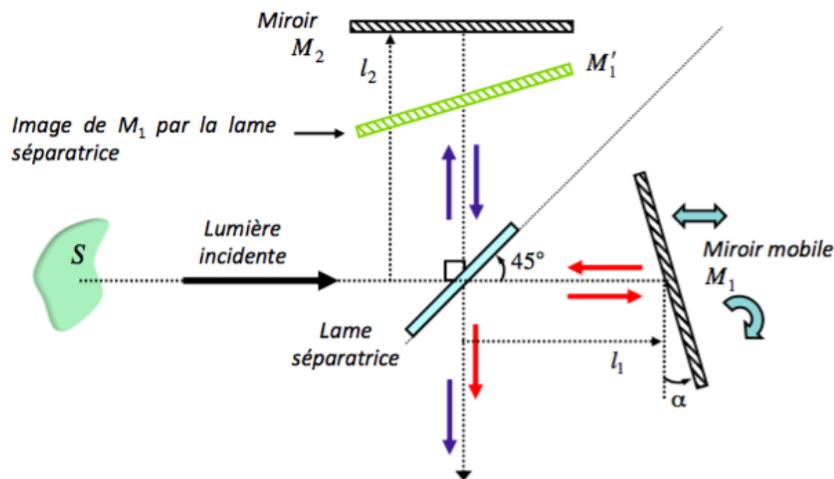
Une application industrielle est le traitement anti-reflet d'optiques, par exemple les verres de lunettes (expliquer brièvement le principe sans faire de calcul).

34.1.2 Interféromètre de Michelson

Il existe différents types d'interféromètres à 2 ondes, on prendra l'exemple de l'interféromètre de Michelson. Ce dernier est important du fait de ses nombreuses applications mais aussi parce qu'il a permis d'invalider la théorie de l'éther lors de la fameuse expérience de Michelson et Morley en 1887.

Principe

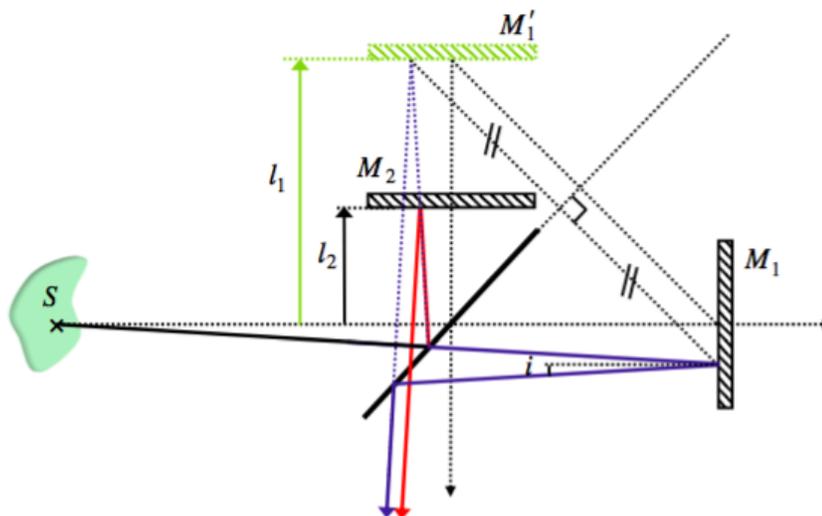
(On dessine un schéma du Michelson au tableau et on explique les différents éléments en montrant éventuellement la correspondance sur un Michelson monté sur la table). En pratique on rajoute une compensatrice pour avoir un trajet identique dans les 2 bras de l'interféromètre dans les diélectriques de la séparatrice et de la compensatrice (la rajouter sur le schéma au tableau pour montrer). Elle doit être parallèle à la compensatrice (1er réglage du Michelson) et permet d'éviter la dispersion chromatique. On ne la représentera pas dans la suite de la présentation.



Différentes configurations du Michelson

Il est commode pour prévoir les interférences produites par un Michelson de faire un schéma équivalent en faisant l'image d'un bras de l'interféromètre par rapport à la compensatrice. On montre sur transparent (il existe des transparents officiels qui montrent ça) les schémas équivalents lorsque les miroirs sont parallèles ou lorsqu'ils ne le sont pas. On éteint la lumière et on montre sur un écran :

Manip : Interférences en lame d'air

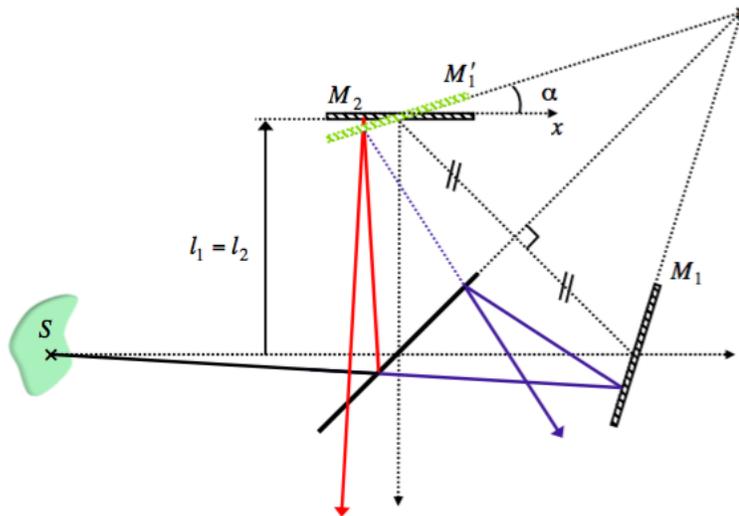


Les miroirs sont parallèles. Le schéma équivalent nous a indiqué qu'on était dans un cas

équivalent à une lame à faces parallèles. On a donc des anneaux d'égale inclinaison localisés à l'in ni qu'on observe au foyer d'une lentille de focale 1m.

On peut observer les annulations de contrastes liées au doublet du sodium (on les expliquera par la suite). On montre aussi le contact optique, qui correspond dans le schéma équivalent aux 2 miroirs confondus. On a donc interférence constructive quelle que soit l'inclinaison et la position : c'est la teinte plate.

Manip : Interférences en coin d'air



En jouant sur une des vis de réglage du Michelson, on donne un petit angle à l'un des miroirs. Que se passe-t-il ? On ne voit plus rien sur l'écran : normal, car l'interféromètre est cette fois-ci équivalent à une lame à faces non parallèles, qui crée donc des franges d'égale épaisseur localisées au voisinage de la lame, soit ici des miroirs. Pour observer ces interférences il va donc nous falloir faire l'image des miroirs. Pour ce faire on utilise un doublet 300 mm et on fait l'image d'un objet approché délicatement de l'un des miroirs. On voit bien des franges !

34.1.3 Applications de l'interféromètre de Michelson

L'interféromètre de Michelson va permettre soit d'étudier la source qui l'éclaire (spectroscopie) soit d'étudier les propriétés d'un objet transparent placé sur un bras de l'interféromètre, faisant ainsi varier le chemin optique.

Spectroscopie par transformée de Fourier

Le seul endroit où j'ai trouvé la spectro par transformée de Fourier clairement présentée, et avec un calcul simple est dans [4, Lauterborn].

La source qui éclaire le Michelson a un spectre étendu caractérisé par un spectre de puissance $I_{0\nu}(\nu)$. La partie du spectre comprise entre ν et $\nu + d\nu$ contribue à l'intensité en sortie :

$$dI_\nu = 2I_{0\nu}d\nu (1 + \cos(2\pi\nu\tau))$$

où τ est le retard entre les 2 voies de l'interféromètre. 2 ondes de fréquences différentes étant incohérentes, l'intensité totale est la somme des intensités produites par chaque fréquence :

$$I(\tau) = 2 \int_0^\infty I_{0\nu}d\nu + 2 \int_0^\infty I_{0\nu} \cos(2\pi\nu\tau)d\nu$$

Le premier terme est indépendant du retard τ , on le notera I_0 . Si de plus on symétrise le spectre $I_{0\nu}(\nu) = I_{0\nu}(-\nu)$ on peut réécrire la relation précédente :

$$I(\tau) = I_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} I_{0\nu}e^{-2\pi\nu\tau}d\nu$$

On reconnaît dans le second terme la transformée de Fourier du spectre $I_{0\nu}(\nu)$ de la source. En enregistrant l'intensité en sortie de l'interféromètre en fonction du retard τ entre les 2 voies de l'interféromètre, on peut donc remonter au spectre de la source. Le Michelson a donc d'importantes applications spectroscopiques.

(On montre sur transparent différentes TF de sources, et on explique les annulations de contraste montrées précédemment pour le sodium).

Limitations de ce type de mesures :

- Planéité des miroirs
- Mécanique de translation qui introduit une fonction d'appareil qui va limiter la mesure

En pratique on ne peut pas intégrer de $-\infty$ à $+\infty$ car on est limité par les dimensions de l'appareil. Le calcul se fait entre 2 valeurs qui introduisent une convolution du résultat par un sinus cardinal après transformée de Fourier

On peut éventuellement parler de l'application du Michelson à la détection de polluants comme SO_2 ou NO_2 qui ont un spectre modulé (voir travaux de G. Fortunato).

Etude d'objets placés sur un bras de l'interféromètre

Lorsqu'on introduit un objet transparent (réfléchissant ou non) sur un des bras de l'interféromètre, on va détecter une variation de différence de marche égale à $2ne - 2e$ où n est l'indice du milieu, et e l'épaisseur locale, soit

$$\Delta\delta = 2(n - 1)e$$

On va donc pouvoir remonter à l'indice et/ou à l'épaisseur de l'objet. (Il vaut probablement mieux ne pas parler de ces trucs-là, partir directement dans l'application suivante)

Tomographie optique cohérente (OCT)

On remplace le miroir fixe de l'interféromètre par un milieu qu'on cherche à imager. Le Michelson est éclairé par une lumière très peu cohérente. Ainsi, il n'y a interférence qu'au voisinage de la différence de marche nulle. En translatant le miroir mobile on va donc sonder en profondeur le milieu. Si le point du milieu situé à un endroit tel que $\delta \simeq 0$ réfléchit ou rétrodiffuse de la lumière on va avoir des interférences en sortie du Michelson. L'amplitude de ces interférences nous renseigne sur la réflectivité locale du milieu, qu'on peut donc imager.

Ceci est appliqué en médecine (tomographie de l'œil) ou dans le contrôle industriel de précision (recherche de défauts dans les fibres optiques).

Remarque :

Il faudrait donner des ordres de grandeur des longueurs de cohérence des sources utilisées, et dire que la résolution de ce type d'imagerie est directement cette longueur de cohérence.

Projet VIRGO

VIRGO est un projet européen de détection des ondes gravitationnelles qui consiste en un interféromètre dont chaque bras fait 3 km de long. Des miroirs (qui forment un FP) à l'intérieur de chaque bras permettent de démultiplier le trajet de la lumière 50 fois, ce qui donne une longueur de bras effective de 150 km.

Les ondes gravitationnelles sont censées engendrer une variation relative de position des miroirs de 10^{-21} , soit une variation de distance de 10^{-16} m (plus petit que la taille d'un noyau atomique!). Ceci impose une précision ultra rigoureuse. Par exemple, pour éviter toute fluctuation (d'indice par exemple) liée à la présence d'air, les bras de l'interféromètre doivent être placés sous ultravide.

34.2 Interféromètre à N ondes

34.2.1 Lames à N ondes

Si nous revenons sur les lames précédemment étudiées, nous n'avons considéré que 2 ondes réfléchies. Dans un cadre plus général il nous faut prendre en compte une infinité d'ondes transmises et réfléchies. On se place ici dans le cas d'une lame de diélectrique plongée dans l'air. Les amplitudes de ces différentes ondes sont liées à l'onde incidente par les relations de passage à l'interface air-diélectrique.

Remarque :

Pour un interface air/verre on a $R = 0.04$ et $T = 0.96$ ce qui justifie le fait qu'on n'ait pris que 2 ondes dans le cas d'une lame de verre plongée dans l'air.

Nous allons chercher à calculer l'amplitude transmise si on fait interférer l'ensemble des ondes transmises. Ces différentes ondes étant cohérentes, nous allons sommer leurs amplitudes (E), en prenant en compte le déphasage Φ introduit par un aller-retour dans la lame entre 2 ondes successives :

$$E_{tr} = \sum_{k=1}^{+\infty} E''_k e^{i(k-1)\Phi}$$

Pour la partie réfléchie :

$$E'_1 = -rE_0$$

$$E'_2 = tTE_0$$

$$E'_3 = r^3TE_0$$

$$E'_k = rTE_0 r^{2(k-2)}$$

Pour la partie transmise :

$$E''_1 = TE_0$$

$$E''_2 = r^2TE_0$$

$$E''_3 = r^4TE_0$$

$$E''_k = TE_0 r^{2(k-1)}$$

Or $E''_k = TR^{k-1}E_0$ avec $R = r^2$, donc en faisant un changement d'indice dans la somme on a

$$E_{tr} = TE_0 \sum_{l=0}^{+\infty} (Re^{i\Phi})^k$$

Donc comme $R < 1$ (conservation de l'énergie) cette suite géométrique converge :

$$E_{tr} = TE_0 \frac{1}{1 - Re^{i\Phi}}$$

L'intensité transmise est donc

$$I_{tr} = IT^2 \frac{1}{1 + R^2 - 2R \cos \Phi}$$

En remarquant que $R + T = 1$, et en faisant quelques transformations mathématiques (développées au tableau), on peut écrire ceci

$$I_{tr} = I_0 \frac{1}{1 + M \sin^2 \varphi}$$

où on a

$$M = \frac{4R}{1 - R^2}$$

Ceci correspond à des fonctions d'Airy, qu'on montre sur un transparent.

Remarque :

En raisonnant sur la conservation de l'énergie on trouve que l'intensité réfléchie s'écrira $I_{ref} = I_0 - I_{tr}$: c'est le complémentaire de ce qui est transmis.

On a montré dans la partie des lames à 2 ondes à faces parallèles que pour une lame d'indice n éclairée de telle sorte que les rayons dans la lame aient un angle réfracté égal à r on a :

$$\Phi = 2ne \cos r$$

En observant les interférences au foyer d'une lentille, on aura donc des anneaux d'égale inclinaison. Au vu de l'allure des courbes d'airy, ceux-ci seront de plus en plus fins lorsque le coefficient de réflexion R va être élevé. Ceci est appliqué dans l'interféromètre de Fabry-Pérot.

34.2.2 Interféromètre de Fabry-Pérot

On utilise le transparent tiré du Pérez avec les fonctions d'Airy et l'interféromètre de Fabry-Pérot pour montrer comment ça marche. On a une cavité formée de 2 miroirs de coefficient de réflexion R élevé ($R \simeq 0.95$) grâce à des traitements, ce qui nous ramène exactement dans le cas précédent de la lame à N ondes, mais avec de l'air à l'intérieur ($n = 1$). En observant la lumière sortant du FP au foyer d'une lentille on aura donc des anneaux d'égale inclinaison très fins.

Manip :

On éclaire le FP avec une lampe au sodium et on voit les anneaux, on constate qu'ils sont beaucoup plus fins que dans le cas du Michelson. En chariottant, on remarque les coïncidences et anticoïncidences des systèmes d'anneaux liés aux 2 raies du doublet du sodium (589.2 et 589.8 nm).

On imagine donc bien que le FP peut servir d'outil spectroscopique puissant. On caractérise la finesse d'un FP par la largeur des anneaux qu'il produit, plus précisément si on reprend les courbes d'Airy par le rapport entre la différence de phase entre 2 pics et la largeur à mi hauteur $\Delta\Phi$ d'un pic :

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\Delta\Phi}$$

En faisant un DL autour de $\phi = 0$, on trouve que la fonction d'Airy est équivalente à une Lorentzienne de largeur à mi-hauteur

$$\Delta\Phi = \frac{4}{\sqrt{M}}$$

soit

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{M}}{2}$$

Pour des coefficients de réflexion typiques des FP, $R \simeq 0.95$, on a $F \simeq 120$. On peut donc préparer des anneaux au 1/100e de frange près.

En pratique la finesse des FP ne dépend pas que du coefficient R : elle est aussi limitée par des problèmes de planéité des miroirs et par la diffraction.

34.2.3 Applications de l'interféromètre de Fabry-Pérot

Spectroscopie

Elle a été abordée au paragraphe précédent. On n'en dit pas plus.

Filtre interférentiel

Si on reprend notre FP en incidence normale, la condition de transmission (en fréquence) est

$$\omega_p = p \frac{\pi C}{e}$$

où e est l'écartement des miroirs. Si on règle e pour n'avoir qu'un seul pic dans le visible on a un filtre interférentiel qui va sélectionner la longueur d'onde voulue dans le visible, la largeur du filtre étant déterminé par la finesse établie précédemment.

Cavité Laser

On peut voir une cavité laser comme un FP : le réglage de la longueur de la cavité entre deux miroirs permet de fixer l'intervalle spectral libre (ISL)

$$ISL_\omega = \frac{\pi C}{nd}$$

Il faut comparer l'intervalle spectral libre à la courbe de gain du laser : si l'ISL est suffisamment grand (e petit), le laser est monomode. Sinon il est multimode (à nuancer, en réalité un mode peut saturer le laser et prendre avantage sur tout les autres, ainsi même si plusieurs modes sont permis dans la bande de gain, un seul sort du laser).

Il peut être intéressant ici de parler des problèmes de stabilité du laser à cause des vibrations et de l'agitation thermique qui viennent modifier la longueur de la cavité, à lier avec le défi technologique que représente VIRGO.

Remarque :

La largeur spectrale d'un laser n'est en fait pas déterminée par la finesse de la cavité, puisque la raie laser est déjà beaucoup plus étroite à la base (voir élargissement homogène / inhomogène). Seulement, la position moyenne de cette raie va fluctuer au cours du temps.

Conclusion

En s'affranchissant des problèmes de cohérence spatiale, les interféromètres à division d'amplitude permettent des mesures précises, applicables à différents domaines de la physique.

De plus, à puisqu'on arrive maintenant à faire interférer des ondes de matière, les interféromètres restent au coeur de la physique moderne.

Diffraction de Fraunhofer



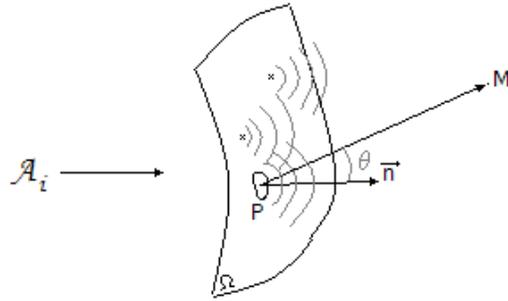
Bibliographie

- *Optique*, Faroult, Renault, Dunod
- *Physique Spé PC/PC**, Olivier, Gié
- *Montages de physique*, Charmont, p. 55
- *Optique expérimentale*, Sextant, p. 107
- *Physique expérimentale*, Fruchart, p. 320
- *Expériences d'optique*, Duffait, p. 43
- *Expériences de physique*, Duffait, p. 220

Pré-requis : Optique géométrique, notions d'optique ondulatoire (onde plane, onde sphérique, interférences), savoir manipuler la transformée de Fourier.

Observation : Un laser élargi par une lentille de courte focale (5 cm), après passage à travers une fente, présente un éclaircissement non nul dans l'ombre géométrique de la fente, sous la forme de franges. On peut visualiser cet éclaircissement à plusieurs endroits après la fente grâce à une lentille (focale 15 cm) qui donnera, à grande distance, l'image de son plan focal objet. Il y a une évolution de cette figure en fonction de la distance. Pour illustrer ce phénomène avec un exemple courant, on peut regarder une lumière blanche passant à travers un rideau présentant une maille.

35.1 Interprétation ondulatoire



On suppose l'onde incidente monochromatique de longueur d'onde λ , de vecteur d'onde de module $k = 2\pi/\lambda$. Le principe de Huygens-Fresnel stipule que toute surface élémentaire dS émet une onde sphérique d'amplitude proportionnelle à dS , et de même longueur d'onde que l'onde incidente (contribution de Huygens). Ces ondelettes sont cohérentes entre elles, l'amplitude au point M sera donc la somme des amplitudes émises par les différentes surfaces élémentaires. La figure obtenue sera ainsi due à des interférences (contribution de Fresnel), et elle sera, dans ce cas, appelée figure de diffraction.

L'amplitude en M est donc de la forme :

$$\mathcal{A}(M) = \iint_{\Omega} \mathcal{B}(\theta) \mathcal{A}_e \frac{e^{-ik \cdot PM}}{PM} dS$$

où \mathcal{A}_e (amplitude émise) et \mathcal{B} (facteur d'obliquité) indiquent la dépendance en θ et en P de l'onde émise.

Remarque : Le milieu de propagation est supposé homogène et isotrope et on supposera désormais l'objet diffractant plan.

Définition : Pour relier l'amplitude émise \mathcal{A}_e à l'amplitude incidente \mathcal{A}_i , on définit le facteur de transmission t par : $\mathcal{A}_e(X, Y) = t(X, Y) \mathcal{A}_i(X, Y, 0^+)$. C'est une grandeur caractérisant uniquement l'objet diffractant.

35.2 Diffraction de Fraunhofer

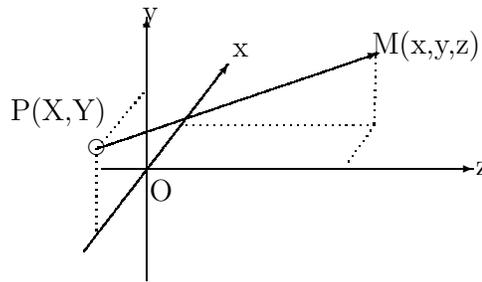
35.2.1 Définition

La diffraction de Fraunhofer est une diffraction paraxiale et à grande distance. Plus précisément, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

- paraxiale (conditions de Gauss)
- $\lambda \ll a$
- $OM > a^2/\lambda$

où a est la taille caractéristique de l'objet diffractant.

Les deux premières conditions donnent l'approximation : $\mathcal{B}(\theta) = i/\lambda$ (on ne précise pas le calcul).



Justification de la dernière condition : Elle concerne les grandes distances : elle s'énonce, plus rigoureusement, par le fait que dans le développement limité de $k.PM$, les termes d'ordre 2 en X et Y soient négligeables. Ce développement s'écrit :

$$k.PM = kz - k \frac{xX + yY}{z} - k \frac{X^2 + Y^2}{2z} + k \frac{z}{8} \left(\frac{xX + yY}{z^2} \right)$$

Le dernier terme est forcément négligeable par rapport au troisième d'après la condition d'étude paraxiale. Ce dernier est négligeable si $\frac{\pi a^2}{\lambda z} \ll \pi$ c'est pourquoi on a donné l'approximation $OM \gg a^2/\lambda$, et non pas $OM \gg a$ selon notre intuition. Ainsi, il ne reste que les ordres 0 et 1 qui s'écrivent

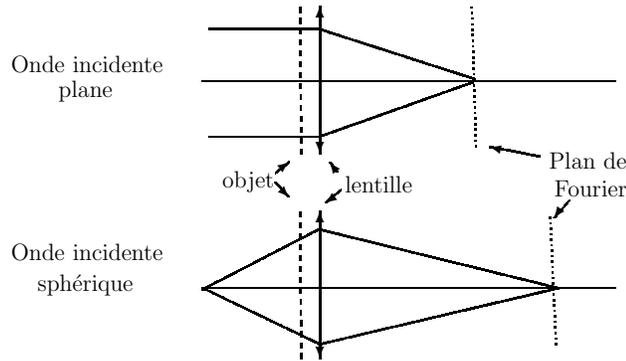
$$PM = z - \frac{xX + yY}{z}$$

Remarque : Lorsqu'on ne se place pas dans le cadre de cette dernière approximation, on obtient le cadre, plus général, de la diffraction de Fresnel. On ne pourrait alors plus négliger les termes d'ordre 2.

Application Numérique : La dernière approximation s'écrit $z \gg 2m$ pour un trou de diamètre 1 mm et $z \gg 2$ cm pour un trou de diamètre $100 \mu\text{m}$. C'est pour cela qu'en laboratoire (ou pour l'expérience du début de la leçon), on préfère prendre un objet de taille de l'ordre de la centaine de microns.

35.2.2 Méthode d'observation

En remarquant que le facteur de transmission d'une lentille dans l'approximation paraxiale vaut, à une phase constante près, $\exp(ik\frac{X^2+Y^2}{2f})$ (où f est la distance focale), on voit qu'il est exactement l'inverse des termes d'ordre 2 dans le développement de k_{PM} , à condition de se placer à $z = f$. Ainsi, en ajoutant une lentille, les termes d'ordre 2 seront éliminés (pour une onde incidente plane). Finalement, cela revient à dire qu'une lentille permet d'obtenir la figure de diffraction de Fraunhofer dans son plan focal image.



Il est possible de généraliser cette propriété pour une onde incidente sphérique : si la lumière créée par un point source est diffractée, on pourra observer la diffraction de Fraunhofer dans le plan de l'image de cette source créée par une lentille accolée à l'objet diffractant. Dans les deux cas, le plan où la diffraction de Fraunhofer est observable est appelé le plan de Fourier.

35.2.3 Formule de Fraunhofer

A partir des expressions approximées de $\mathcal{B}(\theta)$ et de PM , on veut maintenant écrire l'amplitude diffractée dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer :

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \iint \frac{i}{\lambda} t(X, Y) \mathcal{A}_i(X, Y, 0^+) \frac{\exp \left[-ik \left(z - \frac{xX+yY}{z} \right) \right]}{z} dXdY$$

Soit

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{ie^{-ikz}}{\lambda z} \iint t(X, Y) \mathcal{A}_i(X, Y, 0^+) \exp \left[2i\pi \left(\frac{xX}{\lambda z} + \frac{yY}{\lambda z} \right) \right] dXdY$$

En posant $u = xX/\lambda z$ et $v = yY/\lambda z$, on reconnaît l'expression de la transformée de Fourier inverse :

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{ie^{-ikz}}{\lambda z} \bar{\mathcal{F}}(u, v)$$

Remarque : Par analogie aux fréquences temporelles (comme en électricité ou en optique) conjuguées à la variable temporelle t , u et v sont appelées les fréquences spatiales conjuguées respectivement aux coordonnées X et Y dans le plan de l'objet diffractant. Ainsi, leur dimension est l'inverse du mètre. De plus, elles contiennent x/z , qui est l'angle de OM par rapport à l'axe Oz . La diffraction de Fraunhofer donne donc une figure paramétrée angulairement. Cela se comprend par le fait que c'est une diffraction à grande distance : les angles (PM, Oz) sont tous très proches de (OM, Oz) .

Propriétés : Les propriétés de la transformée de Fourier sont transposables ici. Par exemple, un déplacement latéral de l'objet diffractant donnera uniquement un facteur de phase : l'intensité n'est pas modifiée. D'autres propriétés peuvent être mentionnées, comme l'effet du déplacement de la source : il en résulte une translation de la figure de diffraction correspondant à l'approche géométrique.

35.2.4 Exemple du trou rectangulaire

Prenons l'exemple du trou rectangulaire de côtés a et b . En supposant l'onde incidente plane, on a :

$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{ie^{-ikz}}{\lambda z} \mathcal{A}_i \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{2i\pi(uX+vY)} dXdY$$

Or

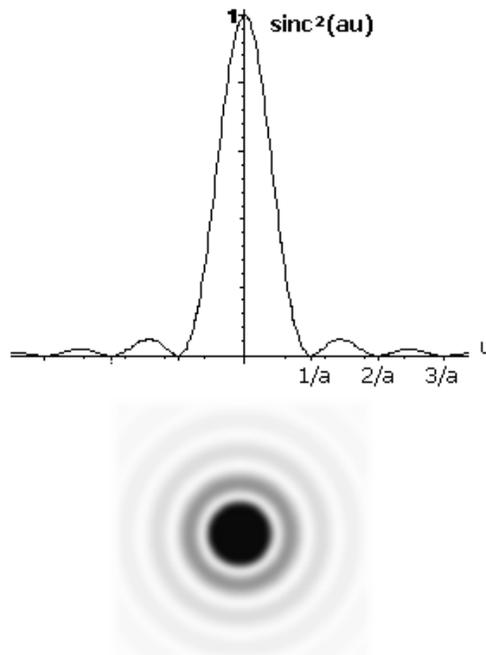
$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{2i\pi u X} dX = \left[\frac{1}{2i\pi u} e^{2i\pi X} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{\sin(\pi a u)}{\pi u} = a \operatorname{sinc}(a u)$$

Donc

$$\mathcal{A}(x, y, z) = c(z) \operatorname{sinc}(a u) \operatorname{sinc}(b v)$$

Pour l'intensité, on obtient :

$$I(x, y, z) = k(z) \operatorname{sinc}^2(a u) \operatorname{sinc}^2(b v)$$



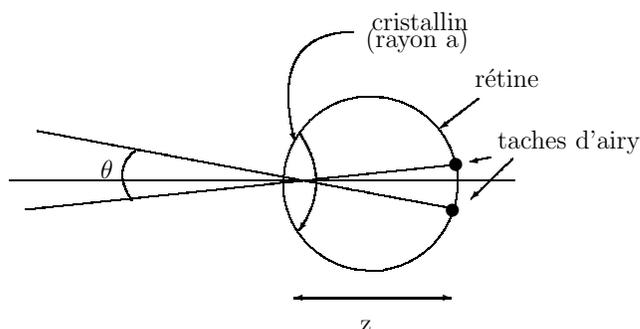
Le profil de $\operatorname{sinc}^2(a u)$ ci-contre montre un pic principal et des franges de faible intensité. L'image n'est donc pas un point, mais une tache. On retrouve donc la figure de l'expérience du début. On remarque ainsi que l'intensité est maximale à l'image géométrique de la source : les interférences sont constructives à cet endroit.

La demi-largeur $1/a$ du pic principal donne un ordre de grandeur de la taille des taches de diffraction, mais nous avons fait le calcul pour une fente rectangulaire, alors que la plupart des instruments ont une ouverture circulaire. Ainsi la valeur que nous utiliserons est celle calculée pour un trou circulaire : $1,22 \frac{\lambda z}{a}$.

La tache créée par ce type de trou est représentée ci-contre, c'est une tache d'Airy.

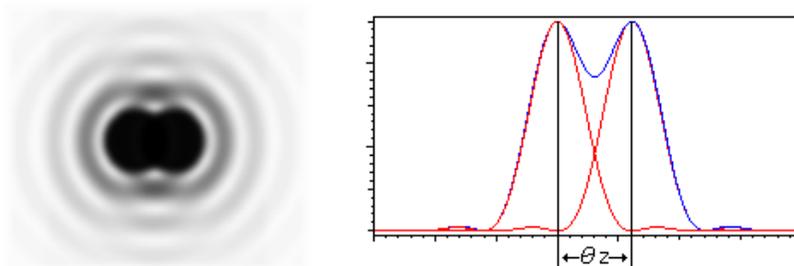
On voit maintenant que l'image d'une source ponctuelle, par un instrument d'optique, ne sera pas un point, mais une tache. Donc si deux sources se rapprochent, leurs taches respectives vont se rapprocher et se confondre : à quelle condition peut-on les séparer ?

35.3 Rôle de la diffraction dans la formation d'images



On prend l'exemple de l'oeil : jusqu'à quelle distance peut-on distinguer les graduations millimétriques d'une règle graduée ? En réalisant l'expérience, on peut l'estimer à 2 ou 3 mètres. Pour l'expliquer, supposons que deux rayons arrivent sur un oeil avec deux angles différents. Chaque rayon, diffracté par le cristallin, donne une tache d'Airy sur la rétine.

Le critère de Rayleigh s'énonce de la manière suivante : les taches seront séparées si la distance séparant leurs centres est plus grande que leur demi-largeur. Autrement dit, le maximum de l'une doit être plus éloigné que le premier minimum de l'autre (cf. figures ci-dessous). Ce critère est une convention : il est possible de définir d'autres critères selon les expériences que l'on veut réaliser.



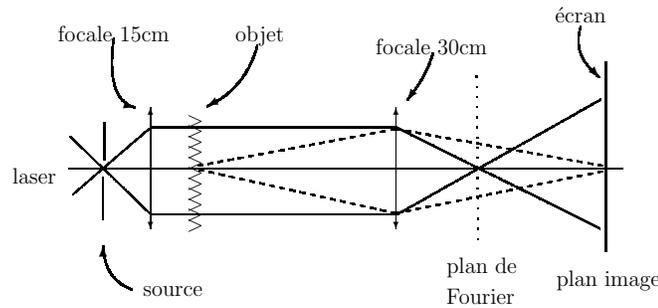
Dans le cas de l'oeil, la distance entre les centres est θz et la demi-largeur des pics est $1.22/a \sim 7 \mu\text{m}$. Pour pouvoir séparer les taches, il faut donc $\theta z > 1.22\lambda z/a$. L'angle minimal sous lequel les deux rayons pourront être séparés est donc : $\theta_{\min} = 1.22\lambda/a \sim 4.10^{-4}\text{rad}$: c'est le pouvoir de résolution, qui est un paramètre caractérisant tout instrument de visualisation optique. Ainsi, c'est à partir d'environ 2.5 mètres que les graduations de la règle seront indistinguables.

Remarque : La taille des récepteurs de la rétine (le grain de l'oeil) est de l'ordre du micromètre. Ce grain est donc bien adapté : c'est la diffraction qui limite la résolution car la taille des taches d'Airy est plus importante que le grain.

35.4 Applications

35.4.1 Filtrage spatial

On a vu que la transformée de Fourier d'un objet est accessible dans le plan focal image d'une lentille. On réalise alors le montage suivant :



Le plan de Fourier donne accès aux fréquences spatiales : c'est l'image de la source. Le plan image donne l'image de l'objet selon l'optique géométrique. Ainsi, en plaçant un filtre dans le plan de Fourier, on pourra éliminer des fréquences spatiales afin de changer l'image de l'objet. Dans notre exemple, nous montrons le cas particulier de la strioscopie. Cela consiste à filtrer les basses fréquences, c'est-à-dire les fréquences centrales. Pour cela, on place un point au centre du plan de Fourier.

Or le laser envoie une onde plane sur l'objet : la lumière qui n'est pas diffractée reste une onde plane et converge au centre du plan de Fourier, tandis que la lumière qui est diffractée, donc déviée, ne convergera pas en ce point. Elle formera un halo autour. Donc en filtrant les fréquences centrales, on élimine la lumière non-diffractée. Cela permet d'observer uniquement la lumière diffractée en clair sur fond noir, où la partie noire correspond à la lumière que l'on a filtrée.

On peut prendre comme objet des plumes : on pourra alors les observer en clair sur fond noir. Cela est encore plus significatif lorsqu'on met une cuve d'eau comme objet : en versant quelques gouttes d'éthanol ou de sucre, on peut visualiser les volutes.

35.4.2 Effet Speckle

On envoie un laser élargi par une lentille de courte focale sur un verre dépoli présentant une surface granuleuse. Chaque grain de cette surface émet des ondelettes sphériques déphasées. Ainsi, on observe une granularité sur l'écran placé plus loin. Ce phénomène étant présent sur de nombreux matériaux, il a beaucoup d'applications.

Un exemple, que l'on peut réaliser, est le suivant. On enregistre, par ordinateur, une image du speckle, puis une autre image pour laquelle on a déplacé très faiblement le dépoli. Ces deux images, décalées, sont sommées par un logiciel (ImageJ par exemple), puis on effectue la transformée de Fourier au résultat : on obtient des franges (cf. transparent). Cela s'explique par le calcul suivant :

Soit $I_0(x, y)$ l'intensité pour une prise, et $I_d(x, y) = I_0(x + d, y)$ l'intensité décalée de d .

$$\mathcal{F}_{[I_0+I_d]} = \mathcal{F}_{[I_0]}(\mu, \nu)\mathcal{F}_{[I_d(\mu, \nu)]} = \mathcal{F}_{[I_0]}(\mu, \nu) + e^{id\mu}\mathcal{F}_{[I_0]}(\mu, \nu) \propto \cos(2d\mu)\mathcal{F}_{[I_0]}(\mu, \nu)$$

Ainsi, l'interfrange obtenue est inversement proportionnelle au déplacement effectué. Ainsi, on peut mesurer précisément le déplacement du dépoli. La précision est de l'ordre du micromètre pour du matériel classique.

35.4.3 Autres exemples possibles

Pour information, on peut aussi expliquer l'épuration d'un laser, l'expérience d'Abbe, les méthodes de détramage, de contraste de phase, la méthode de Labeyrie, l'apodisation,... Et pourquoi pas expliquer plus en détail le lien avec l'optique géométrique (l'intensité est maximale sur le trajet géométrique).

Les applications montrent l'intérêt de la diffraction bien qu'elle soit la cause d'une perte de précision dans les instruments d'optique. La diffraction de Fraunhofer est un cas particulier de la diffraction de Fresnel, qui est elle-même valable uniquement dans le cas paraxial. Pour expliquer la diffraction dans le cas général, le principe de Huygens-Fresnel ne suffit plus : il faut revenir à l'équation d'onde (cf. théorie de Kirchoff).

Diffraction par des structures périodiques



Bibliographie

- *Physique des solides*, Ashcroft et Mermin, edp sciences
- *Optique physique*, Taillet, de Boeck
- *Expériences de physique*, Duffait, p. 208
- *Expériences d'optique*, Charmont, p. 129
- *Optique expérimentale*, Sextant, p. 221
- *Réussir les TP de physique aux concours*, Sallen, p. 286

Prérequis :

- Interférence, Diffraction de Fraunhofer.
- Onde plane progressive stationnaire.
- Cristallographie (réseau direct, réseau réciproque, plans de Bragg).

Introduction :

Dans la leçon précédente, nous avons étudié la diffraction en tant que phénomène physique,

et nous avons principalement vu les limitations qu'elle apportait pour l'observation astronomique par exemple. Nous allons maintenant voir comment ce phénomène peut aussi être utilisé pour observer de structures périodiques de différentes dimensions.

36.1 Diffraction par un réseau sinusoïdal - décomposition en ondes planes

36.1.1 Réseau sinusoïdal

Un réseau sinusoïdal est un réseau ayant un coefficient de transmission en amplitude qui s'écrit :

$$\tau(x) = \tau_0 + \tau_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

On appelle a le pas du réseau et $\xi = \frac{1}{a}$ sa linéature. On a forcément $0 \leq \tau \leq 1$

Expérience de cours

Expérience : Un laser, et un réseau sinusoïdal en transmission si possible.

Exploitation : On observe trois rayons diffractés : un au centre et deux sur les côtés. Les angles α entre les rayons déviés et le rayon central sont égaux.

Interprétation

On suppose que le laser envoie des OPPS.

$$A(x, z, t) = A_0 e^{-i(\omega t - kx)}$$

L'amplitude s'écrit juste avant le réseau :

$$A(x, 0^-, t) = A_0 e^{-i\omega t}$$

Et juste après :

$$A(x, 0^+, t) = \tau(x) A_0 e^{-i\omega t} + \tau_1 \cos(2\pi\xi x) A_0 e^{i\omega t}$$

En décomposant le cos en exponentielles,

$$A(x, 0^+, t) = \tau_0 A_0 e^{-i\omega t} + \tau_1 A_0 \left(\frac{e^{-i(\omega t + 2\pi\xi x)} + e^{-i(\omega t - 2\pi\xi x)}}{2} \right)$$

Les trois ondes continuent à se propager en OPPS de même longueur d'onde :

$$A(x, z, t) = \tau_0 A_0 e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} \tau_1 A_0 e^{-i(\omega t + 2\pi\xi x + k_+ z)} + \frac{1}{2} \tau_1 A_0 e^{-i(\omega t - 2\pi\xi x + k_- z)}$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{k}_0 &= k \vec{u}_z \\ \vec{k}_+ &= k_- \vec{u}_z - 2\pi\xi \vec{u}_x \\ \vec{k}_- &= k_+ \vec{u}_z + 2\pi\xi \vec{u}_x \end{aligned}$$

$$\text{et } |\vec{k}_0| = |\vec{k}_+| = |\vec{k}_-| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2\pi\xi}{k}\right) = \arcsin\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

Remarque :

On a trois ondes planes qui se propagent dans le demi-espace après le réseau. Le lieu des endroits dans le demi espace $z > 0$ (en observant à l'infini) est un ensemble de trois plans se coupant à l'endroit où le réseau a été frappé par la lumière, et partant dans les trois directions données par les vecteurs.

Cette méthode est simple à mettre en œuvre et à vérifier, mais parfois les calculs sont inextricables pour arriver à bout des conditions aux limites, de la décomposition en ondes planes, ou de l'onde diffractée.

36.1.2 Diffraction par un réseau 1D quelconque

$\tau(x)$ périodique, de fréquence $\xi = \frac{1}{a}$, donc peut se décomposer en série de Fourier.

$$\tau(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \tau_p e^{2\pi i p \xi x}$$

avec

$$\tau(p) = \xi \int_{pas} \tau(x) e^{2\pi i p \xi x} dx$$

Juste après $z = 0$,

$$A(x, 0^+, t) = \tau(x) A_0 e^{-i\omega t} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_0 \tau_p e^{-i(\omega t - 2\pi p \xi x)}$$

Les ondes sont encore des OPPS, donc pour $z \geq 0$:

$$A(x, z, t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_0 \tau_p e^{-i(\omega t - 2\pi p \xi x - k_{z_p} z)}$$

avec

$$(2\pi p \xi)^2 + (k_{z_p})^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$$

Soit

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2\pi p \xi}{k}\right) = \arcsin\left(\frac{p\lambda}{a}\right)$$

Expérience : diffraction par réseau à fentes.

Exploitation : pour les premiers angles, on peut voir que l'angle entre deux ordres successifs est constant.

36.1.3 Application

Microscope à champ lointain

Si on a une structure de pas $a < \lambda$, alors seule l'onde diffractée avec l'ordre $p = 0$ va se propager sous la forme d'une OPPS, et on n'aura pas d'informations sur la structure fine de ce qu'on observe.

Limite de résolution d'un microscope : λ

On a alors plusieurs astuces pour pouvoir quand même observer notre objet diffractant :

- orienter l'objet de manière à le voir de biais, et donc augmenter le pas visible
- changer de longueur d'onde (RX grâce à un synchrotron, électrons suffisamment énergétiques)

Mais on peut aussi étudier l'onde évanescente après le réseau en plaçant le détecteur très proche de la surface.

Microscope à champ proche

De l'équation précédente, on tire que :

$$(k_{z_p})^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - (2\pi p\xi)^2$$

Donc si $2\pi p\xi > \frac{2\pi}{\lambda}$, on a $(k_{z_p})^2 = \pm i\xi_p$ avec $\xi_p > 0$

Donc pour la p ème composante :

$$A_0\tau_p e^{-i(\omega t - 2i\pi\xi x - k_{z_p} z)} = A_0\tau_p e^{-\xi_p z} e^{-i(\omega t - 2i\pi\xi s)}$$

Remarque : On a pris $k_{z_p} = +i\xi_p$ pour ne pas que l'exponentielle diverge.

On a donc une superposition d'OPPS se propageant dans la direction (Ox) (le long de l'objet diffractant), mais évanescentes selon (Oz). Si on place le récepteur assez proche du réseau, on peut obtenir des informations sur la structure du réseau en étudiant la variation le long de l'objet diffractant. Plus on se place près, plus on aura accès aux ordres p correspondant aux ξ_p grand, donc les grands p .

Les réseaux dans la vie de tous les jours

Les réseaux sont utilisées pour l'analyse spectrale de la lumière. Dans les spectromètres UV-Visibles utilisés en chimie, c'est souvent un réseau qui disperse la lumière dans le monochromateur.

De même, dans les spectromètres utilisés dans les télescopes pour analyser la composition spectrale de la lumière reçue, ce sont souvent des réseaux qui servent d'éléments dispersifs.

36.2 Diffraction d'électrons de basse énergie

Nous allons essayer de comprendre qualitativement une technique d'analyse de surfaces de cristaux : la diffraction d'électrons de basse énergie, en Anglais LEED (Low Energy Electron Diffraction).

Pour cela, nous nous placerons dans le cas où la surface que nous observons est un plan réticulaire. Nous choisirons le réseau direct $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ de telle manière que \vec{a}_3 soit perpendiculaire à la surface. On notera le réseau réciproque $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$.

Remarque : On rappelle que $\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$

On veut que les électrons puissent sonder des longueurs de l'ordre de l'angstrom, leur énergie doit donc être supérieure à 150 eV ($E = \frac{h^2}{2\lambda^2 m}$). En réalité, on utilise des énergies entre 10 et 1000 eV. Il ne faut pas que les électrons soit trop rapides, sinon ils pénètrent quantitativement dans le cristal et on observera alors la diffraction par le cristal massif.

On se place dans les conditions de Fraunhofer, à savoir une onde plane incidente et une observation à l'infini. Dans ce cas, la différence de marche entre les ondes diffusées par deux atomes différents est $\delta_{1-2} = (\vec{n} - \vec{n}') \cdot \vec{d}$ et on aura des interférences constructives pour des directions \vec{n}' telles que :

$$\begin{aligned} (\vec{n} - \vec{n}') \cdot \vec{d} &= m\lambda \quad m \in \mathbb{Z} \\ (\vec{n} - \vec{n}') \cdot \vec{d} &= 2\pi m \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} \end{aligned}$$

avec \vec{d} le vecteur entre deux centre diffuseurs (atomes). Notons $\vec{n} - \vec{n}' = \vec{q}$. On pose $\vec{d} = \vec{n}_1 a_1 + \vec{n}_2 a_2$ (les objets diffractants sont dans un plan perpendiculaire à \vec{a}_3), et $\vec{q} = \sum q_i \vec{b}_i$.

On recherche les \vec{q} tel que l'on ait :

$$\forall \vec{d}, \exists m \in \mathbb{Z} / \vec{q} \cdot \vec{d} = 2\pi m$$

soit

$$\vec{q} \cdot \vec{d} = q_1 n_1 2\pi + q_2 n_2 \pi = 2\pi m$$

ou

$$q_1 n_1 + q_2 n_2 = m$$

1. On sait que \vec{q}_3 est quelconque.

2. Pour $\vec{d} = (1, 0, 0)$, $\exists m_1 \in \mathbb{Z}/q_1 = m_1$ donc $q_1 \in \mathbb{Z}$.

3. Pour $\vec{d} = (0, 1, 0)$, $\exists m_2 \in \mathbb{Z}/q_2 = m_2$ donc $q_2 \in \mathbb{Z}$.

Donc les points \vec{q} qui vérifient ces conditions sont éléments d'un ensemble discret de droites perpendiculaires à la surface du cristal et placés en chaque nœud du réseau réciproque. Pour toute onde incidente \vec{k} , il existe \vec{q} , donc il existe \vec{k}' et on observera un pic dans la direction \vec{k}' .

Remarque :

Comme nous avons supposé une diffusion élastique, on a $|\vec{k}| = |\vec{k}'|$. Donc $|\vec{k} - \vec{k}'| = |\vec{k}| \sqrt{2(1 - \cos(\vec{k}, \vec{k}'))}$, et $\vec{q} \cdot \vec{d} = |\vec{k}| \sqrt{2(1 - \cos(\vec{k}, \vec{k}'))} |\vec{d}| \cos(\vec{q}, \vec{d}) = m \cdot 2\pi$. Donc si λ tend vers 0, on ne pourra pas avoir un m autre que 0 qui vérifiera la condition.

Il n'y aura donc diffraction à un ordre différent que 0 que si k est suffisamment grand. La condition est donnée par $\lambda <$ taille de ce que l'on veut sonder donc $k > \frac{2\pi}{\lambda}$.

36.3 Diffraction de rayons X et cristallographie

36.3.1 Présentation

La distance interatomique est de l'ordre de l'angstrom. Comme $E = \frac{hc}{\lambda}$ $E > 10^4$ eV, ce qui correspond au domaine des rayons X.

Hypothèse : Un cristal est constitué d'une multitude d'objets microscopiques identiques (ions, atomes), placés sur les sites R d'un réseau de Bravais, pouvant réémettre le rayonnement incident dans toutes les directions. On considèrera que la diffusion se fait de manière élastique, donc que $\lambda_{incident} = \lambda_{dif}$.

36.3.2 Observation

On a des interférences constructives (pics aigus) seulement pour certaines directions d'orientation du cristal, orientations du cristal et longueurs d'ondes.

36.3.3 Calcul

La différence de marche dans les conditions de Fraunhofer est la même que celle calculée pour les électrons ci-dessus ($\delta_{1-2} = (\vec{n} - \vec{n}') \cdot \vec{d}$). On a donc la même condition d'interférences constructives :

$$(\vec{n} - \vec{n}') \cdot \vec{d} = m\lambda \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$(\vec{n} - \vec{n}') \cdot \vec{d} = 2\pi m \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$$

Pour que cette condition soit réalisée pour tous les centres diffuseurs pris 2 à 2, on doit avoir pour tout R du réseau de Bravais l'existence d'un m entier relatif tel que $(\vec{k} - \vec{k}') \cdot R = m \cdot 2\pi$, ce qui est équivalent à ce que $(\vec{k} - \vec{k}')$ soit un élément du réseau réciproque.

Condition de Laue :

Une interférence constructive se produit si la variation du vecteur d'onde $\vec{K} = \vec{k} - \vec{k}'$ est un vecteur du réseau réciproque, avec $|\vec{k}| = |\vec{k}'|$

Représentation graphique : O origine de l'espace réciproque. \vec{K} est un point du réseau réciproque. k vérifie la condition de Laue si et seulement si l'extrémité de \vec{k} est dans le plan médiateur de $[OK]$. Ces plans sont appelés Plans de Bragg.

36.4 Application à la détermination de l'orientation d'un cristal

Si on se place sur un axe de symétrie du cristal, la figure obtenue sera symétrique.

Conclusion :

Des recherches ont été un jour mené au CNET (Centre National d'Etudes des Télécommunications) sur des réseaux optiques à deux dimensions pour l'adressage de fibres optiques.

Diffraction d'ondes de matières (atomes froids) par un réseau lumineux (trouver la référence précise : Pour la science)

Il existe dans la collection une expérience de diffraction d'électrons.

Leçon de physique n° 37

Emission et absorption de lumière



Bibliographie

- *Physique atomique, tome 1*, Cagnac, Tchang-Brillet, Pebay-Péroula, Dunod
- *Les lasers*, Hennequin, Dunod
- *Optique quantique*, Fox, De boeck
- *Montages de physique*, Charmont, p. 75

Introduction :

Vieux modèle : modèle de l'électron élastiquement lié. En 1916, on connaît : le photon, l'atome de Bohr (avec ses niveaux d'énergie stationnaires). On sait que des transitions peuvent être induites entre deux niveaux par un rayonnement à la fréquence de Bohr. Mais on ne dispose pas d'une théorie cohérente de l'ensemble de ces phénomènes (qui ne viendra qu'une décennie plus tard, avec l'avènement de la mécanique quantique). Pour rendre compte du rayonnement à l'équilibre thermique et des échanges d'énergie avec les atomes, Einstein propose un modèle phénoménologique.

37.1 Interaction matière - rayonnement : modèle d'Einstein

Hypothèses de travail :

- atomes à 2 niveaux : $\hbar\omega_0 = E_e - E_f$
- système fermé : $N_e + N_f = 1$

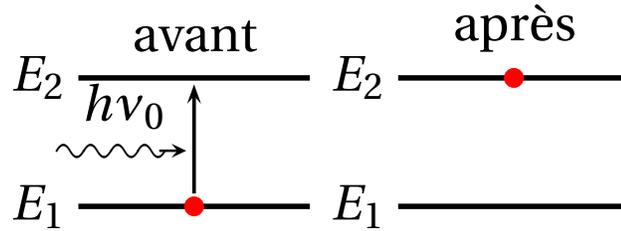
- champ électromagnétique décrit par $u(\omega) = \frac{dU}{d\omega}$, densité spectrale d'énergie.

Constatation : les états stationnaires ne le sont pas. Il existe un couplage qui donne une durée de vie finie dans l'état excité.

37.1.1 Processus élémentaires

On introduit $\mathcal{D}(\omega) = \frac{\Pi(\omega)}{h\omega}$, le flux de photons par unité de surface $\Pi(\omega) = c\omega$ est le vecteur de Poynting par bande spectrale). On a $\mathcal{D}(\omega) \propto u(\omega)$.

37.1.2 Absorption



De manière assez intuitive, la cinétique s'écrit

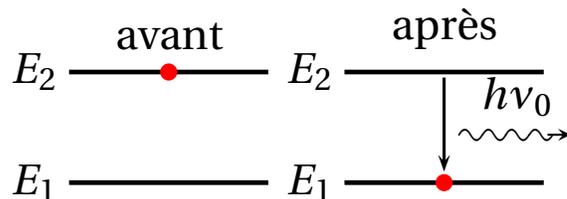
$$\left(\frac{dN_e}{dt}\right)_{abs} = -\left(\frac{dN_f}{dt}\right)_{abs} = +\mathcal{D}(\omega)\sigma(\omega)N_f$$

où $\sigma(\omega)$ est homogène à une surface (section efficace d'absorption). Si le modèle laisse penser que l'atome ne peut absorber qu'à $\omega = \omega_0$, en réalité $\sigma(\omega)$ a une certaine largeur autour de ω_0 (lorentzienne) due à l'effet Doppler par exemple). Il faut donc sommer la relation précédente sur ω . Si $\mathcal{D}(\omega)$, c'est-à-dire $u(\omega)$ est une fonction lentement variable de ω autour de ω_0 , on peut la sortir de l'intégrale. On obtient alors, en introduisant B_{fe}

$$\left(\frac{dN_e}{dt}\right)_{abs} = -\left(\frac{dN_f}{dt}\right)_{abs} = +B_{fe}N_fu(\omega_0)$$

Emission spontanée

Utilisée par la plupart des sources lumineuses.



$$\left(\frac{dN_e}{dt}\right)_{spont} = -\left(\frac{dN_f}{dt}\right)_{spont} = -AN_e$$

Le photon émis a une direction et une polarisation aléatoire.

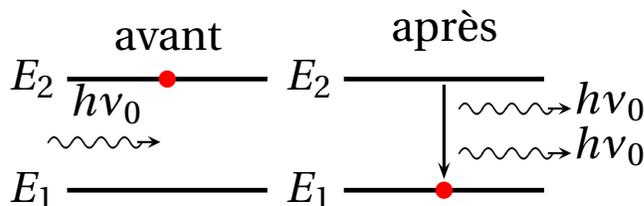
$\tau = 1/A$: temps de vie radiatif de l'état excité. Le modèle de l'électron élastiquement lié donne

$$\tau = \frac{6\pi\epsilon^0 mc^3}{e^2 \omega_0^2}$$

Pour $\lambda = 500 \text{ nm}$, $\tau \simeq 10^{-8} \text{ s}$, bon ordre de grandeur. Mesure expérimentale de τ par mesure de l'intensité lumineuse réémise par la vapeur atomique après excitation par une impulsion laser ultracourte (10^{-12}).

Emission induite

Processus moins intuitif, symétrique de l'absorption, rajouté ad hoc par Einstein pour redonner la loi de Planck.



Le photon supplémentaire est en tout point similaire au photon incident. On reprend les mêmes arguments de flux de photons e et de section efficaces pour arriver à

$$\left(\frac{dN_e}{dt}\right)_{ind} = -\left(\frac{dN_f}{dt}\right)_{ind} = -B_{ef}N_e u(\omega_0)$$

Première mise en évidence expérimentale en 1928 par Lodenburg et Koferman dans une décharge de Néon.

37.1.3 Bilan des populations

$$\left(\frac{dN_e}{dt}\right)_{ind} = -AN_e + (B_{fe}N_f - B_{ef}N_e)u(\omega_0)$$

En régime stationnaire, on obtient alors

$$\frac{N_e}{N_f} = \frac{B_{fe}}{A + B_{ef}}u(\omega_0)$$

Posons $u_{sat} = A/B_{ef}$,

Si $u \ll u_{sat}$ alors réponse linéaire

Si $u \gg u_{sat}$ alors saturation

Jamais de transfert de f vers e .

37.1.4 Equilibre thermodynamique matière - rayonnement

But : établir des relations sur A , B_{fe} et B_{ef} .

On se donne :

- Il existe un rayonnement de corps noir dans lequel ça baigne (on peut imaginer des parois de la cavité composées d'une foultitude d'atomes à moult niveaux) ;
- c'est-à-dire il existe un équilibre thermodynamique possible entre atomes et rayonnement ; et cet équilibre est atteint, statistique de Boltzmann.

$$u_{Planck}(\omega_0) = \frac{\hbar\omega_0^3}{\pi^2c^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega_0/k_B T} - 1}$$

et

$$\frac{N_e}{N_f} = e^{-\hbar\omega_0/k_B T}$$

or on vient de trouver

$$u(\omega_0) = \frac{A}{B_{ef}} \frac{1}{\frac{B_{fe} N_f}{B_{ef} N_e} - 1}$$

il y donc identité des deux $u(\omega_0) \forall T$ si et seulement si

$$B_{fe} = B_{ef} = B$$

et

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega_0^3}{\pi^2 c^3}$$

On généralise des dernières relations en dehors du corps noir, de l'équilibre thermique (la démo donnée par la QED bien plus tard). Sur la dernière formule on comprend que l'émission spontanée sera négligeable aux faibles pulsations (ex : hertziennes).

C'est cela que le MASER (1954, NH₃ arriva avant le LASER (1960).

37.1.5 Bilan de puissance

Puissance transférée au faisceau incident

$$\mathcal{P} = -\hbar\omega_0 \left(\frac{dN_e}{dt} \right)_{ind+abs} = \hbar\omega_0 B u(\omega_0) (N_e - N_f)$$

37.1.6 Limites du modèle

Utilisation d'équations cinétiques alors que l'atome est un objet quantique ;

- une onde électromagnétique n'est qu'un simple flux de photons : ne traite pas des phases des oscillations du champ ; quid de $\omega \neq \omega_0$;
- pas de dipôle atomique qui a pourtant une réalité physique.

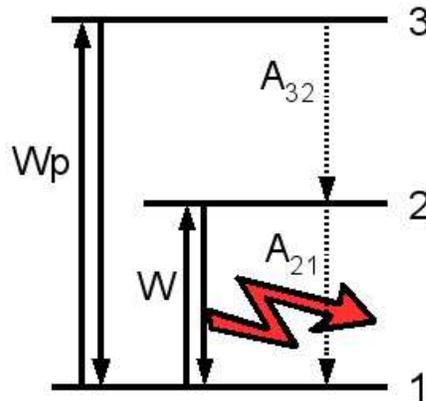
Hypothèse supplémentaire : le champ émis par émission stimulée est en phase avec le champ incident.

37.2 Le LASER

Question : peut-on amplifier la lumière ? L'électronique abandonne de telles fréquences ...
On va exploiter le coefficient B .

37.2.1 Système à trois niveaux

Motivation : inverser les populations.



On pose :

$$- W = B_{12}u(\omega_{12})$$

$$- W_P = B_{13}u(\omega_{13})$$

Mise en équations :

$$- N_3 + N_2 + N_1 = 1 ;$$

$$- \frac{dN_3}{dt} = W_P(N_1 - N_3) - A_{32}N_3 ;$$

$$- \frac{dN_2}{dt} = W(N_1 - N_2) + A_{32}N_3 - A_{21}N_2 ;$$

$$- \frac{dN_1}{dt} = -W_P(N_1 - N_3) - W(N_1 - N_2) + A_{21}N_2$$

On se donne un atome tel que $A_{32} \gg A_{21}$ (niveau intermédiaire métastable), et on obtient

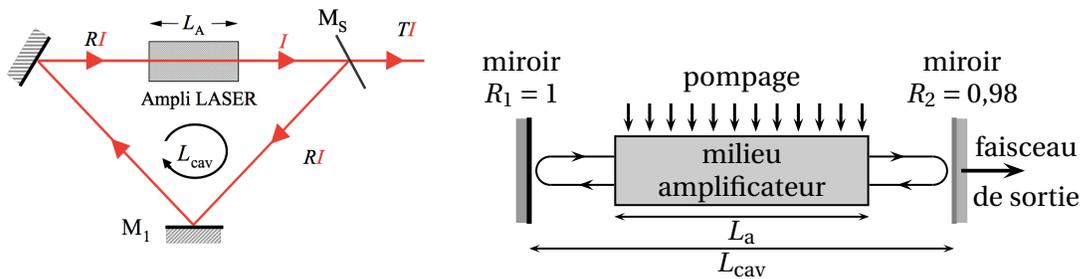
$$\Delta = N_2 - N_1 = \frac{\frac{W_P}{A_{21}} - 1}{\frac{W_P}{A_{21}} + 2\frac{W}{A_{21}} + 1}$$

Il faut donc pomper plus vite que l'émission spontanée ($W_P > A_{21}$).

Montrer de même pour l'hélium-néon, système à 4 niveaux.

37.2.2 Cavité résonante

Idée : faire passer un faisceau incident dans un milieu amplificateur, récupérer le faisceau ainsi amplifié et le refaire passer dans un milieu amplificateur, ainsi de suite pour réaliser une amplification notable (bouclage, oscillateur lumineux)... Pour expliquer le rôle de la cavité, montrer le LASER en anneau puis simplifier le parcours de la lumière en montrant le laser en kit (cavité linéaire).



Le LASER délivre une onde extrêmement monochromatique, de 10^{10} à 10^{20} photons par mode (versus 0,1 pour une source thermique).

37.2.3 Une application : refroidissement d'atomes par LASER

On exploite ici le coefficient A .

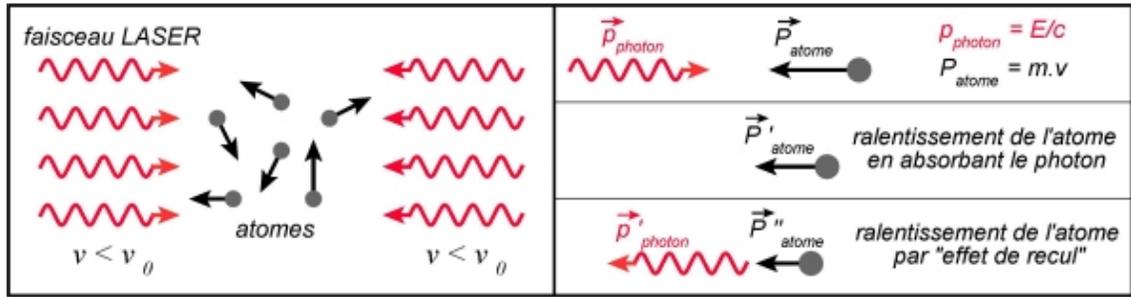
$$\exists v_{th} \sim 500 \text{ m.s}^{-1}, \lambda_{dB} = \frac{h}{Mv}$$

Il faut donc refroidir pour observer, exploiter les aspects ondulatoires de la matière.

Pression de radiation

Conservation du moment cinétique, $v_{recul} = \frac{h\omega_0}{Mc} \sim 1 \text{ cm.s}^{-1}$.

Après un temps $\tau = 1/A$, l'atome retombe dans l'état f en réémettant un photon, dans une direction aléatoire.



L'accélération moyenne de freinage est donc $a = v_{recul}A \sim 10^6 \text{ cm.s}^{-1}$. La force de pression de radiation associée est considérable

$$F = \frac{\hbar\omega_0}{c}AN_e$$

Elle permet de réduire

- la vitesse moyenne des atomes (ralentissement)
- la dispersion en vitesse (refroidissement).

En conclusion, on peut essayer d'orienter les questions sur le refroidissement laser Doppler.

37.2.4 Le Lidar

Le lidar est un instrument de télédétection atmosphérique qui permet de mesurer les caractéristiques optiques et microphysiques des nuages et aérosols présents dans la couche limite atmosphérique et dans la troposphère. Ce système fonctionne sur le principe suivant : un LASER émet une impulsion de l'ordre de la nanoseconde (aux longueurs d'ondes 532 nm et 1,064 fm) qui se propage dans l'atmosphère et entre en interaction avec les molécules, les particules d'aérosols, les gouttelettes d'eau et les cristaux de glace. Il est alors possible de mesurer la quantité d'énergie reçue pour chaque longueur d'onde et pour chaque polarisation (dans le cas de 532 nm). L'étude des signaux reçus nous permet de décrire plus précisément l'altitude de la base et du sommet des différentes couches de nuages ou d'aérosols présents à un instant donné (15 mètres de précision), l'évolution de ces couches avec le temps, les caractéristiques optiques de ces couches (comme l'épaisseur optique qui peut être assimilée à l'opacité du nuage à la longueur d'onde considérée), et la non-sphéricité des particules et des cristaux de glace par l'étude de la dépolarisation du signal à 532 nm. Enfin, il est possible de coupler les informations issues du Lidar et d'autres instruments (Radar, Imageur Infra rouge, photomètre solaire, ...) pour obtenir la taille des particules (aérosols

ou cristaux de glace). Ces informations sont d'autant plus importantes qu'elles permettent de caractériser la structure microphysique des couches atmosphériques systématiquement et de manière fiable.

Aspects corpusculaires du rayonnement. Notion de photon



Bibliographie

- *Relativité*, Pérez, Masson
- *Physique atomique : Tome 1*, Cagnac, Pebay-Péroula, Dunod
- *Mécanique quantique : Tome 1*, Aslangul, De Boeck
- *Mécanique quantique*, Le Bellac, CNRS éditions

Introduction :

La physique a considérablement progressé au 18e et 19e siècles, notamment grâce aux théories de Newton (18e) et à Maxwell (19e) qui ont établi les lois de la mécanique, de la gravitation et de l'électromagnétisme. Elles permettent d'expliquer la quasi-totalité des phénomènes observés. Mais la physique reste dans l'incapacité d'expliquer des résultats (Corps noir, effet photoélectrique). Il faudra introduire la notion de quantification ainsi que celle de photon pour expliquer les phénomènes d'interaction rayonnement matière.

38.1 L'apparition de la quantification de l'énergie

38.1.1 Expérience de Hertz (1887) et Halbwachs (1888)

Hertz : UV + électrodes avec décharge $\Rightarrow I$ augmente \Rightarrow plus grand nombre de particules chargées.

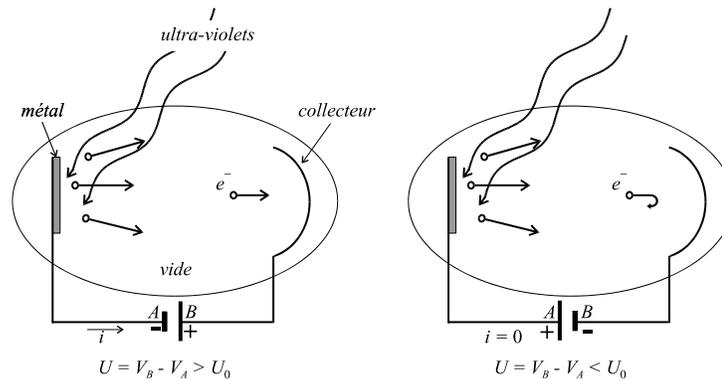
Halbwachs : Emission électronique lors d'illumination de la surface de métaux (Na, K, Rb,...)

Les électrons sont appelés photoélectrons.

Lorsqu'on éclaire un métal, dans certaines conditions des électrons sont émis.

Interprétation : La lumière transfère son énergie aux électrons qui peuvent alors échapper au métal.

Problème : Il existe une fréquence seuil ν_{lim} en dessous de laquelle aucun électron n'est émis .



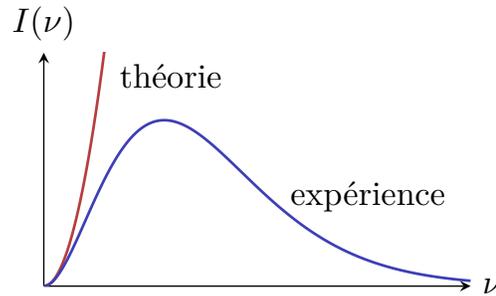
38.1.2 Rayonnement du corps noir

Enceinte isotherme avec petit trou dans laquelle rayonnement en équilibre thermique (ne dépend que de T)

Tout d'abord, comment interpréter l'émission de ce rayonnement ? On sait à l'époque que la matière contient des électrons de charge négative. Les parois sont constituées de telles particules chargées qui vibrent en raison de la température et ainsi émettent un rayonnement électromagnétique. Nous pouvons donc considérer nos parois comme étant constituées

d'un très grand nombre d'oscillateurs harmoniques qui peuvent émettre toutes les longueurs d'onde.

Plusieurs essais d'interprétation théorique (Rayleigh, Wien) mais problème à grande fréquence densité d'énergie diverge= "catastrophe UV"



Les lois de la physique classique prévoient un spectre émis de la forme $I(\nu) \propto \nu^2$. Donc $I(\nu)$ diverge vers $+\infty$ lorsque ν augmente. C'est physiquement impossible et en contradiction flagrante avec l'expérience.

On a donné à ce problème le nom de catastrophe ultraviolette.

En réalité,

$$I(\nu) \propto \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

qui tend vers 0 quand $\nu \rightarrow 0$ et $+\infty$ quand $\nu \rightarrow +\infty$.

En 1900, Planck applique la théorie thermodynamique en supposant les échanges entre paroi chaude et rayonnement électromagnétique discontinus et $h = 6.6262 \cdot 10^{-34}$ MKS

En particulier, il a supposé que l'oscillateur harmonique ne pouvait pas émettre ou absorber du rayonnement avec n'importe quelle énergie, mais avec un saut d'énergie fixe proportionnelle à la fréquence telle que :

$$E = h\nu$$

Naissance de la physique quantique mais difficultés de concevoir des échanges d'énergie par quantité discrète.

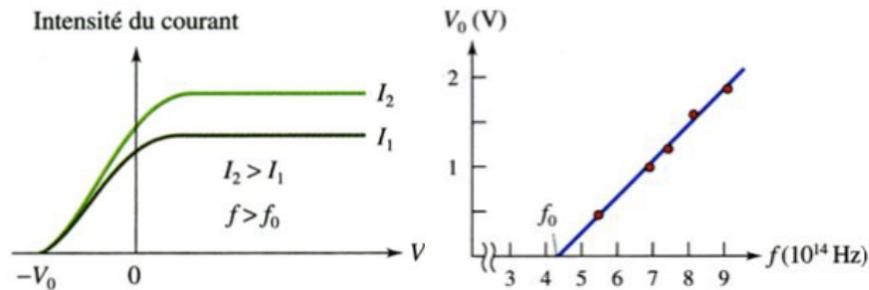
38.2 L'apparition du photon, ses caractéristiques

38.2.1 Einstein et l'effet photoélectrique

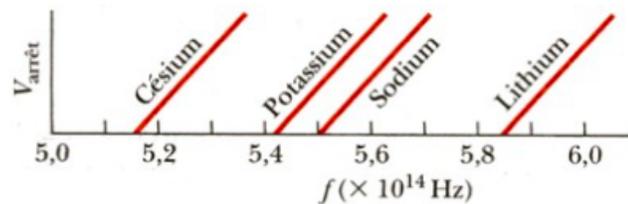
Expérience

Einstein reprend théoriquement les résultats obtenus par Hertz et Halbwachs c'est-à-dire :

- La contre tension max V_o ou potentiel d'arrêt dépend que de la fréquence (pas de la puissance)
- V_o augmente avec ν .



- Pente de la droite $V_o = f(\nu)$ est une constante indépendante du matériaux.



Explication par la quantification

Pour résoudre la stabilité des atomes, Niels Bohr (1885-1962) propose en 1913 d'ajouter deux contraintes au modèle initial :

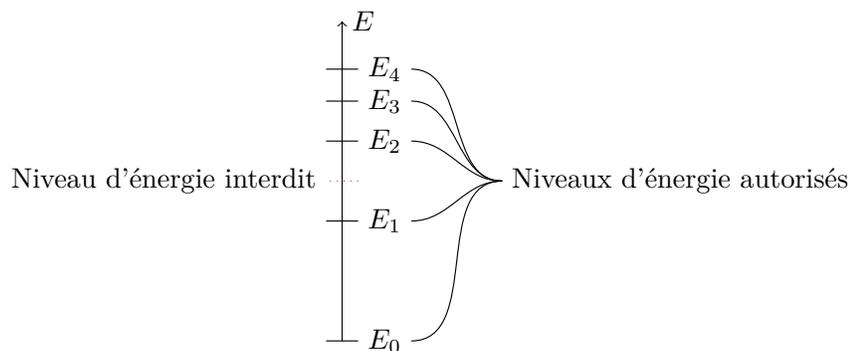
- L'électron ne rayonne pas d'énergie lorsqu'il se trouve sur une orbite stable. Ces orbites sont quantifiées (c'est à dire numérotées par un entier n)
- L'électron ne rayonne ou n'absorbe de l'énergie que lorsqu'il change d'orbite.

Pour expliquer l'effet photo-électrique, Albert Einstein (1879-1955) a supposé en 1905 que l'énergie lumineuse est transportée par paquets quantifiés, des quanta de lumière.

Ce sont ces paquets d'énergie lumineuse que l'on appelle photons.

Pour une lumière monochromatique de fréquence ν , l'énergie d'un photon (paquet d'énergie) est $E = h\nu$

On peut représenter les niveaux d'énergie accessibles à un électron dans un atome :



Au-delà de ν_{lim} , l'énergie cinétique des électrons est

$$E_c = h\nu - W$$

W : constante caractéristique du métal

Pour écarter l'électron lié au métal, il faut vaincre la force de rappel de travail W_s .

On a donc $E(\text{onde électromagnétique}) \geq W_s$ ainsi $\nu \geq \nu_s$ (1er problème résolu)

Si $\nu > \nu_s$, il y a une énergie supplémentaire = E_c

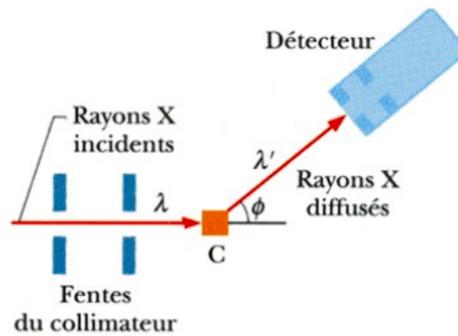
d'où

$$h\nu = W_s + \frac{1}{2}mv^2$$

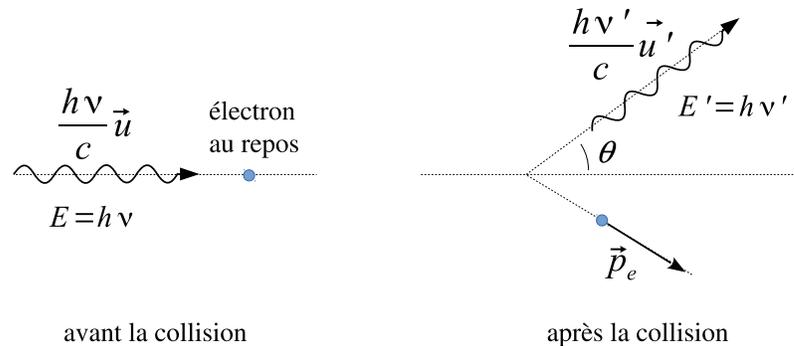
(équation d'Einstein de l'effet photoélectrique)

Par suite on retrouve l'équation de la droite $V_o = f(\nu)$.

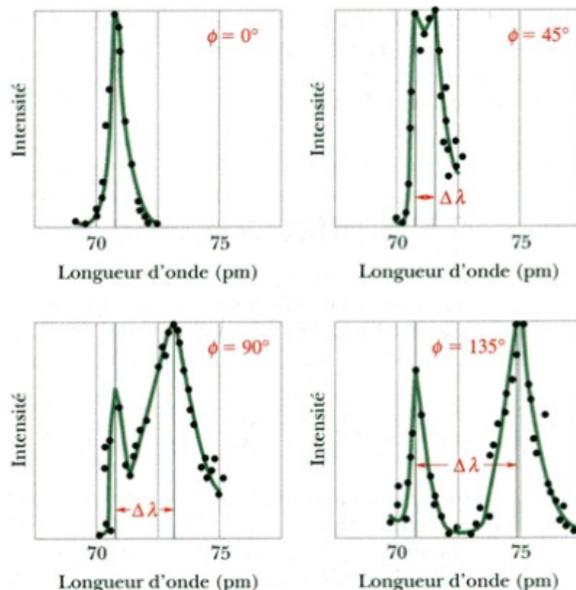
38.2.2 Effet Compton



Dans la théorie classique, lorsqu'un rayonnement interagit avec les électrons atomiques, ces derniers oscillent à la même fréquence que la fréquence de l'onde (c'est une conséquence de la linéarité de l'équation du mouvement de l'électron). D'après la théorie électromagnétique, ces électrons oscillants réémettent un rayonnement, de même fréquence que celle de leur mouvement (par linéarité des équations de l'électromagnétisme), donc de même fréquence que celle de l'onde incidente. C'est le phénomène de diffusion.



Or, Compton, en envoyant des rayons X de longueur d'onde $\lambda = 0,071 \text{ nm}$ sur une cible de carbone, constate que le rayonnement diffusé présente une longueur d'onde plus grande (dont une fréquence plus faible) que le rayonnement incident. Le fait que le photon diffusé possède une longueur d'onde plus grande que celle du photon incident ne peut pas être expliqué classiquement.



Pour interpréter ses résultats, Compton s'est appuyé sur le modèle corpusculaire de la lumière. Il modélise l'interaction entre un électron et un photon du rayonnement incident comme une collision entre deux particules. Au cours de cette collision l'énergie et la quantité de mouvement doivent être conservées. L'électron ayant une énergie plus grande après le choc qu'avant le choc (il acquiert de l'énergie cinétique), le photon diffusé doit donc avoir une énergie plus faible que le photon incident pour permettre la conservation de l'énergie : $E' < E$ d'où $\nu' < \nu$ et $\lambda' > \lambda$. Comme nous allons l'établir, les longueurs d'ondes λ et λ' vérifient la relation :

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) \quad \text{avec} \quad \lambda_c = \frac{h}{m_e c}$$

A.N. : $\lambda_c = 2,4262 \cdot 10^{-12}$ m.

On peut noter que l'expérience de Compton, a permis de confirmer non seulement l'expression $E = h\nu$ mais aussi l'expression de la quantité de mouvement du photon, puisque la quantité de mouvement est également une grandeur conservée au cours du choc.

Démonstration :

La description physique de l'effet Compton s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- L'électron est supposé libre (son énergie de liaison est très faible devant l'énergie du photon) et initialement au repos (son énergie cinétique avant la collision est négligeable).

- L'électron éjecté est relativiste : dans ce cas son énergie E_e s'exprime sous la forme

$$E_e^2 = m_e^2 c^4 + p_e c^2$$

avec c vitesse de la lumière dans le vide, p_e norme de la quantité de mouvement de l'électron, m_e masse de l'électron.

On traite alors le problème comme une collision entre particules pour laquelle on exprimera la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Avant le choc :

- quantité de mouvement : $\vec{p}_e = \vec{0}$ et $\vec{p}_{photon} = \frac{h\nu}{\lambda} \vec{u}$

- énergie : $E_e = m_e c^2$ et $E_{photon} = h\nu$

Après le choc

- quantité de mouvement : \vec{p}_e et $\vec{p}_{photon} = \frac{h\nu'}{\lambda} \vec{u}'$

- énergie : $E_e = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e c^2}$ et $E_{photon} = h\nu'$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{h\nu}{\lambda} \vec{u} = \vec{p}_e + \frac{h\nu'}{\lambda} \vec{u}'$$

Conservation de l'énergie :

$$E_e = m_e c^2 + h\nu = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e c^2} + h\nu'$$

On a donc

$$p_e^2 = \frac{h^2}{c^2} (\nu \vec{u} - \nu' \vec{u}')^2$$

$$p_e^2 c^2 = h^2 (\nu^2 - \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos \theta)$$

Ensuite,

$$p_e^2 c^2 = [h(\nu - \nu') + m_e c^2]^2 - m_e^2 c^4 = h^2 (\nu^2 + \nu'^2 + 2\nu\nu') + 2h(\nu - \nu') m_e c^2$$

en égalant les deux expressions de $p_e^2 c^2$

$$h^2(\nu^2 + \nu'^2 + 2\nu\nu') + 2h(\nu - \nu')m_e c^2 = h^2(\nu^2 - \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos \theta)$$

$$\nu - \nu' = \frac{h}{m_e c^2} \nu \nu' (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

en exprimant le résultat en fonction des longueurs d'ondes $\lambda = \frac{c}{\nu}$ et $\lambda' = \frac{c}{\nu'}$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

Résultats :

- raie Thomson explicable par mécanique classique
- raie de longueur d'onde différente impossible à expliquer et ne dépendant que de l'angle de diffusion.

Il explique cette diffusion comme une collision entre une particule de masse nulle (photon) et un e^- libre. Calcul à faire et on obtient pareil que résultats expérimentaux.

38.2.3 Caractéristiques du photon

Le photon, particule associée au rayonnement électromagnétique, possède les propriétés suivantes :

- masse nulle
- le photon se déplace dans le vide à la vitesse de la lumière $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ dans tout référentiel inertiel.
- énergie $E = h\nu$ (Relation de Planck-Einstein, mise en évidence par l'effet photoélectrique).
- quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar \vec{k}$
- moment cinétique. On peut associer au photon un moment cinétique directement lié à la polarisation de l'onde.

Onde polarisée rectilignement pas de moment cinétique

Onde polarisée circulairement gauche $\sigma_s = +\hbar$

Onde polarisée circulairement droite $\sigma_s = -\hbar$

Application : Rayonnement synchrotron.

38.3 Interaction rayonnement-matière

(Interaction entre un photon et un e- lié à un atome)

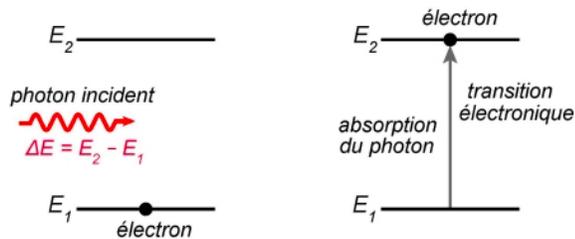
Par un calcul en mécanique quantique \Rightarrow Plusieurs termes d'interaction.

- Diffusion Compton, Thomson \Rightarrow élastique
- Emission, absorption \Rightarrow inélastique

38.3.1 Absorption de photon

Après absorption photon et atome = 1 seule particule et p du photon doit être gardé par cette particule unique \Rightarrow atome après collision en mouvement.

Lorsqu'un électron absorbe un photon de fréquence ν , son énergie augmente de $\Delta E = h\nu$.



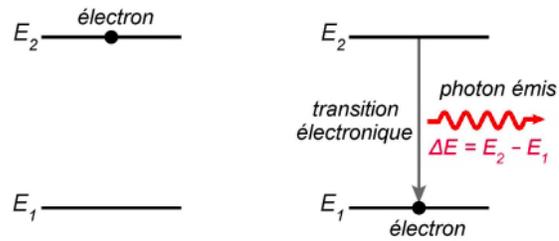
Un électron situé sur un niveau d'énergie E_1 ne peut absorber un photon de fréquence ν que s'il existe un niveau d'énergie E_n accessible tel que

$$E_n - E_1 = h\nu$$

38.3.2 Emission de photon

Un électron qui passe d'un niveau d'énergie élevé E_i à un niveau d'énergie plus basse E_j peut émettre un photon à la fréquence ν telle que :

$$E_j - E_i = h\nu$$



L'atome prend une quantité de mouvement opposée à celle du photon, il garde une partie de l'énergie sous forme E_c , le photon n'emporte donc pas la totalité de son énergie $E_{ij} = h\nu_{ij}$ cependant cet écart négligeable.

Conclusion :

La succession d'expérience non explicable par mécanique classique \Rightarrow Début de la mécanique quantique

Notion de photon indispensable pour expliquer les échanges d'énergie discontinues entre une onde et la matière.

Elargissement de cette théorie à l'atome par De Broglie \Rightarrow Dualité onde-corpuscule.

Aspects ondulatoires de la matière. Notion de fonction d'onde



Bibliographie

- *Mécanique quantique tome I*, Cohen-Tannoudji, Hermann
- *Physique quantique*, Le Bellac, CNRS éditions
- *Mécanique quantique tome I*, Aslangul, De Boeck

Prérequis :

- Optique ondulatoire, électromagnétisme.
- Aspect corpusculaire de la lumière.
- Mécanique du point.

Introduction :

À la fin du XIX^{ème} siècle, on a deux théories bien distinctes pour décrire deux objets de la physique : la théorie de Maxwell pour l'électromagnétisme, et la mécanique newtonienne pour les corps matériels. Nous avons déjà vu que certains phénomènes, inexpliqués dans le cadre de ces théories, avaient amené les scientifiques de l'époque à postuler une description corpusculaire de la lumière. Nous allons voir aujourd'hui que cette dualité onde-corpuscule

n'est pas à sens unique en nous intéressant aux aspects ondulatoires de la matière et en posant les bases de la description quantique qui en découle.

39.1 Comportement ondulatoire de la matière

39.1.1 Rappels

En 1900, le problème du corps noir, avait amené Planck à faire l'hypothèse que pour une onde électromagnétique de fréquence ν , les seules énergies possibles sont des multiples entiers du quantum $h\nu$, où h est une nouvelle constante fondamentale ($h = 6,62618 \cdot 10^{-34}$ J.s). Puis en 1905 Einstein avait introduit la notion de quanta de lumière (qui ne seront nommés photons qu'en 1926), corpuscules qui composent le rayonnement lumineux et possèdent chacun l'énergie $h\nu$, pour expliquer certaines caractéristiques de l'effet photo-électrique.

On a alors une dualité onde-corpuscule pour le rayonnement électromagnétique, et le lien entre les paramètres corpusculaires (l'énergie E et l'impulsion du photon) et les paramètres ondulatoires (la pulsation ω et le vecteur d'onde \vec{k} de l'onde) est donné par les relations de Planck-Einstein :

$$E = h\nu$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

$$\text{où } \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

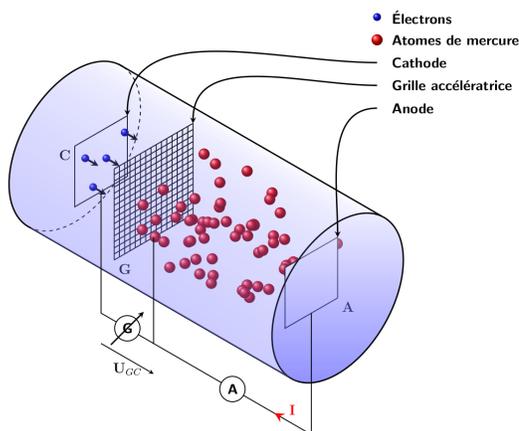
39.1.2 L'expérience de Franck et Hertz

Mais la quantification de l'énergie n'apparaît pas uniquement pour le rayonnement et pose également problème pour la matière. En effet, l'observation de raies discrètes dans les spectres d'émission et d'absorption des atomes ne s'explique pas classiquement, et nécessite d'introduire des niveaux d'énergie quantifiés pour les atomes. L'existence de ces niveaux discrets a été mise en évidence par l'expérience de Franck et Hertz, ne faisant pas intervenir d'interaction rayonnement/matière, ce qui permet de justifier que cette quantification est bien intrinsèque aux atomes.

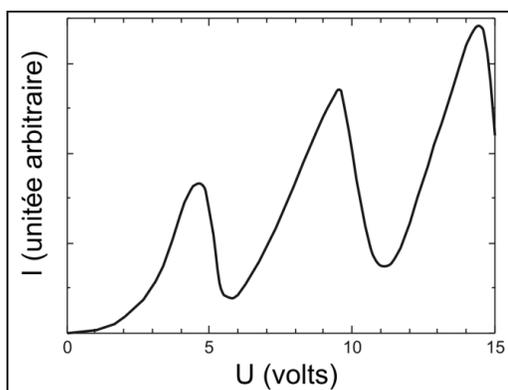
Le principe de l'expérience est le suivant :

Dans une ampoule contenant du mercure gazeux à faible pression, un filament est chauffé par une tension externe pour qu'il émette des électrons, ces derniers sont accélérés par une tension contrôlable U . Les électrons sont émis en direction d'une grille placée devant une plaque collectrice. Une faible différence de potentiel ($\sim 0,5$ V) sert à freiner les électrons

entre la grille et la plaque collectrice. Ainsi, seuls ceux qui arrivent à la grille avec une énergie cinétique suffisante atteindront la plaque collectrice et participeront au courant I dans le reste du circuit.



En représentant I en fonction de U , on observe d'abord que pour des tensions trop faibles, l'énergie initiale eU des électrons n'est pas suffisante pour qu'ils atteignent la grille. Ensuite, pour U croissant, le nombre d'électrons qui atteignent la plaque augmente, jusqu'à une certaine valeur de U où celui diminue de façon importante. On observe alors une alternance de pics séparés de 4,9 V.



Cela s'explique par le fait que les électrons peuvent échanger de l'énergie avec les atomes de mercure par des collisions, mais que l'énergie transmise ne peut être égale qu'à E , l'écart en énergie entre les deux plus bas niveaux d'énergie de l'atome de mercure. Les pics successifs étant dus au fait qu'un même électron, s'il a initialement une énergie cinétique suffisante, peut entrer en collision avec plusieurs atomes de mercure avant d'atteindre la grille. Expérimentalement, lors du passage des électrons, les atomes de mercure émettent une raie

ultraviolette de longueur d'onde 253,6 nm, ce qui correspond à un ΔE de 4,86 eV. La mesure de ΔE par cette expérience est donc moins précise que celle faite par spectroscopie optique, mais comme nous l'avons déjà dit, le but est ici de montrer que la quantification des niveaux d'énergie de l'atome peut être mise en évidence par une expérience qui ne fait intervenir que des chocs entre particules pour les transferts d'énergie.

39.1.3 Les ondes de De Broglie

En 1923, Louis de Broglie fait l'hypothèse que les particules matérielles, tout comme les photons peuvent avoir un comportement ondulatoire, et il associe à un corpuscule matériel d'impulsion \vec{p} la longueur d'onde de De Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

(ce qui est exactement la même relation que celle donnée par Planck-Einstein pour le photon!).

À un corpuscule d'énergie E et d'impulsion on associera donc une onde de pulsation \vec{p} et de vecteur d'onde \vec{k} tels que :

$$E = h\nu$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

On rétablit ainsi la symétrie entre onde et particule (il n'y a pas que les phénomènes qu'on pensait ondulatoires qui peuvent être vus comme corpusculaires, mais tous les phénomènes relèvent de la dualité onde-corpuscule), et permet d'interpréter la quantification des niveaux d'énergie des atomes en terme de modes propres d'une onde confinée dans une cavité.

Regardons les ordres de grandeur des longueurs d'onde de de Broglie associée à quelques objets courants :

- Pour un grain de poussière de 1 μm de diamètre et de masse $m \sim 10^{-15}$ kg, animé d'une vitesse $v \sim 1 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$, on trouve :

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ \AA}$$

Ce qui est très négligeable devant la taille du grain de poussière.

- En revanche, pour un électron de masse $m_e \sim 9 \cdot 10^{-31}$ kg, et de charge $q \sim 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, qu'on accélère par une différence de potentiel V exprimé en volts, on a une énergie $E = qV = \frac{p_e^2}{2m_e}$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e qV}} \approx \frac{12,3}{\sqrt{V}} \text{ \AA}$$

Ce qui, pour une différence de potentiel de quelques centaines de volts, donne l'ordre de grandeur de la distance entre atomes d'un réseau cristallin, avec lesquels il est possible de faire de la diffraction par des rayons X (dont la longueur d'onde est de l'ordre de l'Å). Ainsi, on peut faire de la diffraction sur des cristaux ou des poudres cristallines avec des électrons.

C'est d'ailleurs une expérience de diffraction des électrons, réalisée par Davisson et Germer en 1927 qui viendra confirmer l'existence de l'aspect ondulatoire de la matière.

Faire l'expérience avec la machine qui est dans la collection (on peut s'amuser à défléchir le faisceau d'électrons avec un aimant pour prouver qu'il n'y a pas juste un laser vert caché dans la boîte).

Maintenant que nous avons mis en évidence, dans cette approche plus ou moins historique, l'aspect ondulatoire de la matière, intéressons-nous aux implications que cela amène pour la description des objets physiques.

39.2 Description quantique ondulatoire de la matière

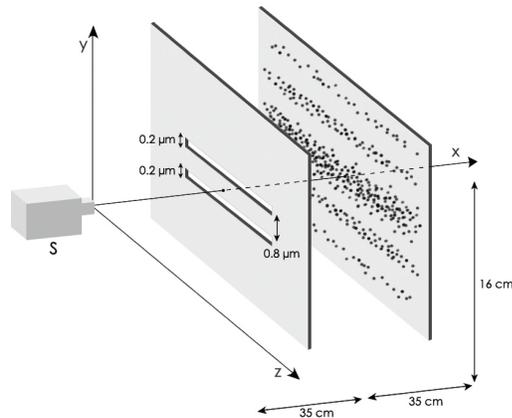
39.2.1 Expérience de pensée : interférences d'électrons

Commençons par une expérience de pensée. Soit un dispositif de fentes d'Young.

On sait que si on éclaire une seule des deux fentes par une source de lumière monochromatique cohérente, on observera une tache de diffraction sur un écran placé derrière. Mais que si l'on éclaire les deux fentes en même temps, la figure obtenue ne sera pas la superposition des deux figures obtenues indépendamment par chacune des fentes : on aura des franges d'interférences.

Considérons maintenant la même expérience avec des électrons, dont on a déjà montré qu'il était possible de faire apparaître expérimentalement la dualité onde-corpuscule. Supposons que les électrons peuvent être envoyés un par un. Tout d'abord, si un seul électron est envoyé, on ne mesure qu'un unique impact sur l'écran, ce qui montre que les électrons sont bien des corpuscules de position identifiable. Si l'on regarde maintenant un nombre d'impact suffisant pour remonter à une probabilité d'impact : lorsqu'une seule des deux fentes est présente, on observe une figure de type diffraction et lorsque les deux sont présentes, on observe des franges d'interférence. On a donc une contradiction apparente : pour chaque fente on peut mesurer une probabilité d'impact de l'électron sur l'écran lorsqu'il passe par

elle, or chaque électron est une particule, et doit donc passer par l'une ou l'autre des fentes. Mais alors, la figure obtenue lorsque les deux fentes sont présentes devrait être la somme de celles obtenues indépendamment pour chaque fente, puisque dès lors que l'électron passe par l'une d'entre elles, sa probabilité d'impact est fixée (et que passer par la fente 1 et passer par la fente 2 représentent des événements indépendants).



Il y a deux conclusions importantes à tirer de cela : la première c'est que le phénomène que nous observons est de nature probabiliste, deux électrons envoyés a priori de la même façon n'auront pas le même impact sur l'écran, et ce n'est qu'en envoyant un nombre suffisant d'électrons qu'on pourra faire apparaître la figure de diffraction ou d'interférence. La seconde c'est que l'on est obligé d'abandonner la notion classique de trajectoire. On ne peut pas rendre compte du phénomène d'interférence si l'on considère que chaque électron a une trajectoire définie et passe par l'une ou l'autre des deux fentes. La réalité est donc que l'électron passe à la fois par la fente 1 et par la fente 2.

39.2.2 Description en termes de probabilité de présence : notion de fonction d'onde

Nous venons de voir qu'en mécanique quantique on ne peut se servir de la notion de trajectoire pour décrire la dynamique de corpuscules matériels. On va introduire un nouvel outil mathématique qui va tenir compte du comportement ondulatoire de la matière : à un corpuscule, on associe une fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$, qui dépend de l'espace et du temps, et qui contient toute l'information disponible sur le corpuscule. L'existence de la fonction d'onde est un des postulats de la mécanique quantique.

$\psi(\vec{r}, t)$ est interprétée comme une amplitude de probabilité de présence. C'est-à-dire que la probabilité que la particule se trouve dans un volume autour de la position à l'instant t , est donnée par

$$dP(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 . d^3\vec{r}$$

Il faut faire quelques remarques sur la fonction d'onde :

- Pour une particule, la probabilité de la trouver quelque part dans tout l'espace doit être égale à 1 à chaque instant. Ainsi, la fonction d'onde doit être de carré sommable et vérifier pour tout instant t la condition de normalisation :

$$\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 . d^3\vec{r} = 1$$

- La fonction d'onde prend des valeurs complexes (qui sont réellement complexes, et non pas une commodité d'écriture, comme les notations complexes des champs électromagnétiques par exemple), mais deux états ψ_1 et ψ_2 qui ne diffèrent que par un terme de phase constant décrivent un même état physique (puisque le terme de phase disparaît lorsqu'on prend le module au carré).
- Il n'existe pas d'appareil qui donnerait un accès direct aux valeurs de ψ c'est une description probabiliste non classique, c'est le module au carré de la fonction d'onde qui représente une probabilité physique pour la particule d'être en un endroit à un instant. On peut d'ailleurs calculer la position moyenne de la particule :

$$\langle \vec{r} \rangle = \int \vec{r} |\psi(\vec{r}, t)|^2 . d^3\vec{r}$$

- Contrairement au cas classique, où il suffisait de connaître 6 paramètres (la position et la vitesse de la particule) pour décrire la dynamique, on a besoin ici d'une infinité de paramètres, c'est-à-dire la connaissance de la fonction d'onde en tout point de l'espace.

Maintenant que nous avons introduit la fonction d'onde, il nous faut connaître les lois qui régissent sa dynamique.

39.3 Dynamique de la fonction d'onde

39.3.1 Equation de Schrödinger

L'équation qui régit l'évolution temporelle de la fonction d'onde est l'équation de Schrödinger. C'est un des postulats de la mécanique quantique et même s'il serait possible de l'intuiter (ou de faire semblant de la retrouver) à partir d'analogies avec les équations d'onde, nous nous contenterons de la poser ici, sa validité venant des observations expérimentales des conséquences qui en découlent.

Pour une particule de masse m , soumise à l'action d'un potentiel $V(\vec{r}, t)$ l'équation prend la forme suivante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t)$$

Où désigne le Laplacien (en coordonnées cartésiennes)

On remarque d'abord que cette équation est linéaire. Ainsi, toute combinaison linéaire de solution sera également solution.

Pour une particule libre, l'équation devient :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t)$$

On constate que cette équation admet des solutions sous la forme d'onde plane :

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

où A est une constante, à condition que et vérifient la relation :

$$\omega = \frac{\hbar |\vec{k}|^2}{2m}$$

ce qui, en utilisant les relations de Planck-Einstein, revient à

$$E = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$$

Le terme en $-\frac{\hbar^2}{2m}$ s'interprète donc comme un terme d'énergie cinétique dans l'équation de Schrödinger.

Néanmoins, il ne faut pas oublier qu'une onde plane, n'est pas un objet physique. Ici en particulier, on voit qu'elle ne peut pas satisfaire la condition de normalisation que nous avons établie précédemment. Nous allons résoudre ce problème en introduisant la notion de paquet d'onde.

39.3.2 Paquet d'onde

Nous avons vu qu'une fonction d'onde de type onde plane était solution de l'équation de Schrödinger pour la particule libre. Et nous avons vu que l'équation de Schrödinger était linéaire. Ainsi, on pourra écrire une solution générale de la forme :

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int g(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d^3 \vec{k}$$

Où est un coefficient (éventuellement complexe) qui représente pour chaque vecteur d'onde \vec{k} , le poids de sa composante dans la fonction d'onde ψ .

Une telle superposition d'onde plane est appelée paquet d'onde. On remarque qu'on a alors une relation de transformée de Fourier entre $\psi(\vec{r}, t)$ et $g(\vec{k})e^{-i\omega t}$. Dans la suite, nous nous limiterons pour simplifier les calculs et les notations à une fonction d'onde à une dimension, mais les résultats seront généralisables pour une fonction à 3 dimensions.

Nous avons déjà vu quelques propriétés des transformations de Fourier, et en particulier, pour une fonction et sa transformée de Fourier, on a l'égalité de Parseval.

On en tire, que la fonction d'onde est normalisée à chaque instant, si la fonction est elle-même normalisée.

Regardons la propagation libre du paquet d'onde : pour simplifier on considère un paquet d'onde tel que la fonction $g(k)$ est suffisamment étroite pour que le développement de la fonction limité $\omega(k)$ autour du vecteur d'onde k_0 nul soit valide pour tout k où $g(k)$ est non nul, on a :

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + (k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0}$$

et

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{it(k_0 v_g - \omega_0)} \int g(k) e^{ik(x - v_g t)} dk$$

où on a posé $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k_0}$ la vitesse de groupe.

On a donc $\psi(x, t) \approx e^{it(k_0 v_g - \omega_0)} \psi(x - v_g t, 0)$, c'est-à-dire que la probabilité qu'à la particule de se trouver à un endroit $|\psi(x, t)|^2$ se propage à la vitesse v_g dans le sens des x croissants.

Et en utilisant la relation $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ et la longueur d'onde de de Broglie, on trouve :

$$v_g = \frac{\hbar k_0}{m} = \frac{p}{m}$$

Soit la vitesse classique de la particule (ce qui est rassurant!).

Une autre propriété de la transformée de Fourier, relie la largeur Δx de la fonction f , à la largeur Δk de sa transformée de Fourier F . On sait que Δx est inversement proportionnelle à Δk , et on peut écrire la relation :

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq 1$$

La valeur de la borne inférieure dépend évidemment de la définition rigoureuse des largeurs Δx et Δk , mais le point important est ici que le produit des largeurs dans le domaine spatial et dans le domaine de Fourier est borné inférieurement, ce que nous allons discuter dans notre dernière partie.

39.3.3 Inégalités d'Heisenberg

On vient de voir que la largeur Δx de la fonction d'onde $|\psi(\vec{r}, t)|$ était liée à la largeur Δk de la fonction $g(k)$ par la relation $\Delta x \cdot \Delta k \geq \hbar$, qui peut se réécrire avec la relation de De Broglie.

C'est-à-dire que l'incertitude que l'on a sur la position de la particule et l'incertitude que l'on a sur la valeur de sa quantité de mouvement ne peuvent pas être arbitrairement aussi petites qu'on le veut. Il y a une limitation intrinsèque à la précision que l'on peut avoir sur la position et l'impulsion d'une particule et qui ne dépend pas de l'appareil de mesure utilisé. Cette limitation est due à la valeur non nulle de la constante \hbar et n'a pas d'équivalent en mécanique classique.

La relation $\Delta x \cdot \Delta k \geq \hbar$ se nomme relation d'incertitude de Heisenberg.

On peut l'appliquer par exemple aux ondes planes de de Broglie que nous avons précédemment :

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Ici, le vecteur d'onde \vec{k} est parfaitement connu, donc l'impulsion de la particule est également parfaitement connue, c'est-à-dire $\Delta p = 0$, mais en revanche, la fonction d'onde a une extension infinie, et la particule a une probabilité de présence égale à A^2 partout dans l'espace, c'est-à-dire que $\Delta x = +\infty$

Regardons quelques ordres de grandeur :

- Pour notre ami le grain de poussière de $1\mu\text{m}$ de diamètre et de masse $m \sim 10^{-15}$ kg, animé d'une vitesse $v \sim 1 \text{ m.s}^{-1}$, son impulsion vaut

$$p = mv = 10^{-18} \text{ kg.m.s}^{-1}$$

Supposons qu'on mesure sa position à 1 nm près, on doit alors avoir :

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2m} = 10^{-25} \text{ kg.m.s}^{-1}$$

Ce qui signifie que cette limitation intrinsèque ne nous gênera pas beaucoup, puisque pour l'apercevoir il faudrait posséder un appareil dont la précision relative est de 10^{-7} ! Le grain de poussière peut être décrit de façon quantique par un paquet d'onde dont le maximum représente la position classique du grain de poussière et dont le mouvement sera celui décrit par les équations classiques de la mécanique.

- Pour l'électron dans l'atome d'hydrogène, on a la quantification du moment cinétique introduite par Bohr :

$$pr = n\hbar$$

On peut regarder à quelle condition, l'électron pourrait être décrit en termes de trajectoire classique. Pour cela, il faudrait :

$$\Delta x \ll r \quad \text{et} \quad \Delta p \ll p$$

Mais on a la relation d'incertitude d'Heisenberg, d'où :

$$\frac{\Delta x}{r} \frac{\Delta p}{p} \geq \frac{\hbar}{pr} = \frac{1}{n}$$

La relation d'incertitude nous fait donc rejeter la vision semi-classique des orbites de Bohr.

Conclusion

Nous avons vu dans cette leçon que la matière qu'on pensait décrite entièrement par des propriétés corpusculaires avait en réalité des aspects ondulatoires, et de même que pour la lumière, nous avons dû introduire une dualité onde-corpuscule qui nous a amenés à abandonner la notion classique de trajectoire pour décrire les objets en termes de fonction d'onde. Nous avons discuté quelques unes des conséquences physiques de ce modèle et posé

l'équation de Schrödinger qui régit la dynamique des objets quantiques. Il nous restera, dans d'autres leçons, à définir proprement le formalisme de la mécanique quantique, qui nous permettra de démontrer rigoureusement la relation d'incertitude d'Heisenberg et d'introduire une autre des propriétés des objets quantiques - grande absente de cette leçon - le spin !

Confinement d'une particule et quantification de l'énergie



Bibliographie

- *Mécanique quantique tome I*, Cohen-Tannoudji, Hermann
- *Physique quantique*, Le Bellac, CNRS éditions
- *Mécanique quantique tome I*, Aslangul, De Boeck

Prérequis :

Bases de la mécanique quantique (fonction d'onde, équation de Schrödinger)

Introduction :

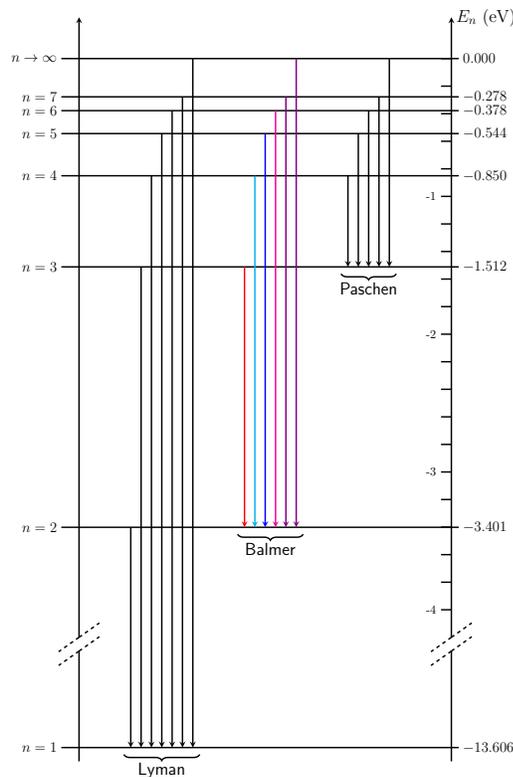
La première idée de quantification de l'énergie est associée aux échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement électromagnétique par l'étude du rayonnement du corps noir effectuée par Planck en 1900. Cette leçon a pour but d'établir le cheminement expérimental et intellectuel qui a conduit à la théorie de quantification de l'énergie dans les atomes via la mécanique quantique et d'en donner quelques applications.

40.1 Les débuts de la mécanique quantique

40.1.1 Faits expérimentaux et lois empiriques

Rayonnement du corps noir : Le rayonnement thermique émis par un corps porté à haute température, étudié en particulier par Planck en 1900, forme un spectre continu (c'est-à-dire que son énergie est répartie de façon continue en fonction de la fréquence des ondes électromagnétiques). La théorie classique du rayonnement électromagnétique est incapable de prédire la forme de la densité spectrale d'énergie, et notamment la retombée de la courbe aux hautes fréquences. Pour pouvoir expliquer ce phénomène, Planck a proposé de quantifier les échanges d'énergie entre la paroi chaude et l'onde électromagnétique.

Spectres de raies : Les sources lumineuses à vapeur atomique n'émettent pas un spectre continu mais seulement sur certaines fréquences bien particulières.



Expérience : projection d'un spectre de raie avec une lampe à mercure + prisme à vision directe

On obtient un spectre d'émission discontinu de raies. Ce spectre de raies est caractéristique d'un élément chimique donné. L'existence de ces fréquences d'émission, caractéristiques de chaque atome, est un fait d'expérience extrêmement important. Son interprétation n'a été possible qu'après la découverte de la loi fondamentale qui relie les fréquences émises par un même atome.

Ce fut le physicien Johann Balmer qui établit empiriquement, en 1885, cette relation entre les différentes longueurs d'onde pour le spectre de l'atome d'hydrogène :

Loi de Balmer :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

avec $R_H = 109737,31 \text{ cm}^{-1}$, la constante de Rydberg

En 1908, cette formule fut généralisée par Ritz qui proposa la formule suivante :

Principe de recombinaison de Ritz

$$\frac{1}{\lambda} = T_n - T_m$$

avec T_n ou T_m les termes spectraux des niveaux considérés : $T_n = \frac{R_H}{n^2}$

40.1.2 Le modèle de Bohr

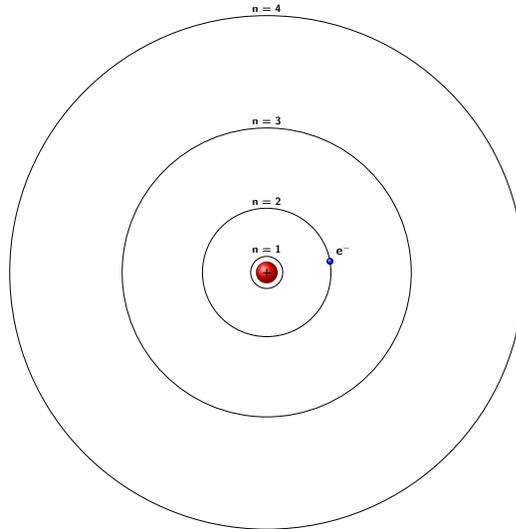
Modèle de Thomson :

En 1903, J.J. Thomson avait élaboré un modèle de l'atome en plum-cake. Il supposait qu'à l'intérieur d'une distribution sphérique étendue et continue de charge positive, les électrons, élastiquement liés, émettaient ou absorbaient le rayonnement à des fréquences caractéristiques.

Le modèle de Rutherford :

Mais, en 1908, Marsden et Geiger observèrent, en bombardant des atomes d'or avec des particules α d'énergie environ égale à 4 MeV, que certaines particules α étaient fortement déviées contrairement à la théorie de Thomson qui ne prévoyait que de faibles déflexions. Pour expliquer ces expériences, Rutherford conçut un modèle planétaire dans lequel un noyau central positif contient l'essentiel de la masse, et les électrons tournent autour du noyau sous l'effet de l'attraction coulombienne. Mais ce modèle n'explique pas la stabilité de l'atome.

Le modèle de Bohr :



En 1913, Bohr propose un nouveau modèle de l'atome en conservant le modèle planétaire conçu par Rutherford et ajoute les hypothèses suivantes :

1. L'électron ne peut se trouver que sur l'une des orbites circulaires de l'atome, qui correspond à un niveau d'énergie donné de l'atome. Cette orbite est stable et l'électron n'y rayonne aucune énergie (c'est un état stationnaire).
2. Le niveau d'énergie le plus bas, appelé niveau fondamental, correspond à l'orbite la plus proche du noyau et porte le numéro $n=1$. Plus n est grand, plus l'orbite a un rayon grand et plus l'énergie de l'électron sur cette orbite est élevée.
3. L'électron n'émet ou n'absorbe de l'énergie que lorsqu'il passe d'une orbite n à une orbite m . L'énergie qu'il émet ou absorbe est alors quantifiée et correspond à un photon d'énergie égale à la différence d'énergie entre les deux orbites :

$$E_{\text{photon}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_n - E_m$$

4. Bohr considère que le moment cinétique orbital \vec{L} de l'électron est quantifié :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m_e \vec{r} \wedge \vec{v} n\hbar$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique,

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Pour $n = 1$, l'orbite fondamentale

$$r_1 = a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{e^2 m_e \pi} = 52,9 \text{ pm} \text{ et } E_1 = -13,6 \text{ eV}$$

Donc

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$$

On écrit alors

$$\|\vec{L}\| = \|\vec{r} \wedge \vec{p}\| = mvr_e = \sqrt{\frac{m_e e^2 r}{4\pi\epsilon_0}} = n \frac{h}{2\pi}$$

Donc

$$r_n = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} n^2$$

Puis

$$E_n = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0} \frac{1}{n^2} = -\frac{13,6}{n^2}$$

Pour $n = 1$, l'orbite fondamentale,

$$r_1 = a_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} = 52,0 \text{ pm} \text{ et } E_1 = -13,6 \text{ eV}$$

Accord avec l'expérience? On a vu précédemment la loi empirique de Ritz :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Or $h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_n - E_m$

Donc

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_n - E_m}{hc} = \frac{13,6}{hc} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Soit,

$$R_H = \frac{13,6}{hc}$$

On a donc un bon accord entre la théorie et l'expérience.

Le modèle de Bohr n'est cependant pas suffisant pour interpréter le cas des atomes autres que l'atome d'hydrogène. La physique quantique s'impose alors comme une nécessité pour l'étude de la physique atomique.

40.2 L'apport de la mécanique quantique

40.2.1 Description de l'atome

On considère que le noyau de l'atome est fixe (approximation de Born Oppenheimer). Cette approximation est légitime car la masse du noyau est très grande devant celle de l'électron.

L'énergie s'exprime de la façon suivante :

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \langle \frac{1}{r} \rangle$$

On effectue un calcul d'ordres de grandeur :

$$\Delta x \Delta p \approx \hbar$$

Or $\frac{1}{\Delta x} \approx \langle \frac{1}{r} \rangle$ et $\Delta p \approx \sqrt{\langle p^2 \rangle}$

Donc

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{\Delta x^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta x}$$

On cherche l'énergie de l'orbite fondamentale, donc l'énergie minimale :

$$\frac{d\langle E \rangle}{d\Delta x} = -\frac{\hbar^2}{m_e} \frac{1}{\Delta x^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\Delta x^2} = 0$$

Donc

$$\Delta x = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = a_0 \quad \text{et} \quad \langle E \rangle_{min} = -\frac{1}{2} \frac{m_e e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = -13,6 \text{ eV}$$

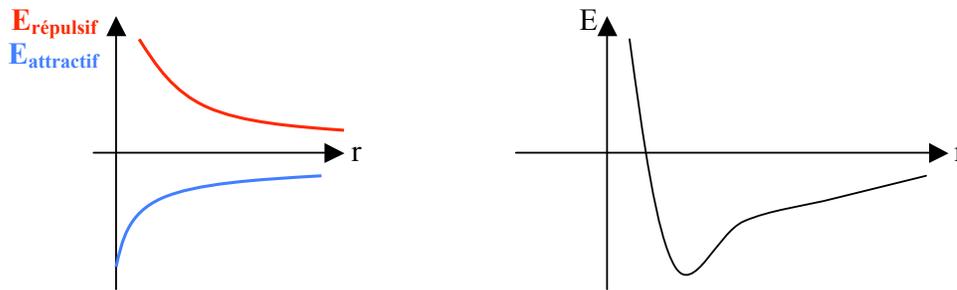
On retrouve exactement les mêmes valeurs que dans le cas du modèle de Bohr qui, pourtant, était un modèle faux...

40.2.2 Quantification des niveaux

L'énergie de l'atome d'hydrogène est :

$$E \approx \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

qui est la somme de deux énergies que l'on peut tracer en fonction de r :



Cette énergie est donc équivalente à une répulsion et une attraction à longue portée. On voit sur la courbe un minimum (état lié) correspondant à l'orbite stable de l'électron. Il y a donc confinement de l'électron.

Lorsque nous avons étudié les puits de potentiel, plus particulièrement le puits de potentiel infini, le fait de confiner une particule nous avait amené à quantifier l'énergie :

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$$

On peut faire une analogie : nous avons ici un électron confiné dans un puits de potentiel. Même si ce puits de potentiel est plus complexe que le puits de potentiel infini, on a également une quantification de l'énergie, qui se met sous la forme :

$$E = -\frac{13,6}{n^2}$$

Cette quantification implique l'existence d'un niveau fondamental, $n = 1$.

40.2.3 Classification

Définition des nombres quantiques :

On a montré l'existence d'un entier n permettant la quantification de l'énergie. Il existe également deux autres nombres quantiques :

- n nombre quantique principal qui quantifie l'énergie : $E = -\frac{13,6}{n^2}$

- l nombre quantique azimutal avec $l \in [0, n - 1]$ qui quantifie l'amplitude du moment angulaire : $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$

- m nombre quantique magnétique avec $m \in [-l, l]$ qui quantifie la projection du moment angulaire selon un axe : $L_z = m\hbar$

Pour une même énergie, on peut avoir plusieurs états avec différents l et m . Ces différents états sont alors dits dégénérés.

Notation spectroscopique : Pour le nombre quantique azimutal, on introduit la notation :

Valeur de l	0	1	2	3
Notation	s	p	d	f

La notation spectroscopique consiste alors à désigner une sous-couche par le nombre quantique principal correspondant suivi de la lettre qui caractérise le nombre quantique azimutal. Cette classification a permis d'établir la classification périodique des éléments. Il suffit de remplir, pour chaque élément les couches correspondantes.

Exemple : pour $n = 2$, on peut avoir :

- $l = 0$ donc $m = 0$ état 2s

- $l = 1$ donc :

$m = -1$ état $2p_{-1}$

$m = 0$ état $2p_0$

$m = 1$ état $2p_1$

Donc pour l'énergie correspondant à $n = 2$, on a 4 états dégénérés.

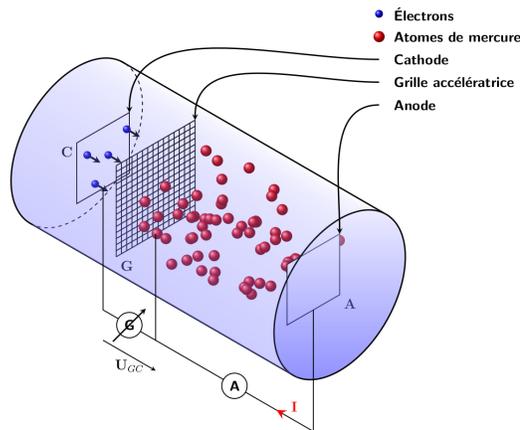
Remarque : La dégénérescence en l est levée par l'application d'un champ magnétique.

Modèle de Bohr vs Mécanique quantique : Dans le modèle de Bohr, l'électron ne peut se trouver qu'à certains endroits alors qu'en mécanique quantique, la fonction d'onde est probabiliste.

40.3 Preuve expérimentale

40.3.1 Expérience de Franck et Hertz

Présentation du dispositif expérimental : Des électrons sont éjectés d'un filament dans une ampoule en verre contenant une vapeur atomique sous faible pression. On applique une différence de potentiel $V_g > 0$ entre le filament de potentiel nul et une grille et une différence de potentiel $V_p - V_g > 0$ entre la grille et une troisième électrode.



Les électrons sont accélérés par la première différence de potentiel et entrent en collision avec les atomes de la vapeur pour former des ions positifs. Ils sont ensuite fortement attirés par la troisième électrode et viendront la frapper, ce qui se traduira par l'apport de charges négatives et donc le passage d'un courant I .

Résultats expérimentaux : On montre la courbe expérimentale sur le transparent.

Interprétation : Les électrons qui traversent la grille sont soumis entre les grille et la plaque à une force de freinage. Ils parviennent alors sur la plaque avec une énergie cinétique diminuée. Ceci n'est valable que si les électrons n'ont subi que des collisions élastiques avec les atomes du gaz.

Si l'électron subit au contraire une collision inélastique, son énergie cinétique diminue brutalement d'une quantité égale à l'énergie potentielle W gagnée par l'atome. Ce sont les chutes brusques de courant observées sur la courbe expérimentale. Celle-ci montre que

l'atome ne peut prendre à l'électron qu'une quantité d'énergie parfaitement déterminée, ce qui confirme la notion des niveaux d'énergie discontinus introduite précédemment.

40.3.2 Application : horloges à atomes froids

Les horloges atomiques ont été créées vers le milieu des années 1950. Elles sont très précises et stables. Elles constituent donc aujourd'hui les étalons de temps (ou de fréquence). La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. Les deux niveaux en question correspondent aux deux orientations relatives possibles (parallèle ou anti-parallèle) du moment magnétique de l'électron externe et du moment magnétique du noyau.

Un jet d'atomes de césium est produit par un four ; les atomes passent par un dispositif approprié (champ magnétique, par exemple) qui sélectionne les atomes se trouvant dans le premier niveau hyperfin. Ces atomes traversent ensuite une cavité dans laquelle règne un champ micro-onde de fréquence ajustable, fourni par un oscillateur électronique. Notons (1) le premier niveau hyperfin, et (2) le deuxième. Si la fréquence ν du champ est voisine de la fréquence

$$\nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins, des atomes absorbent un photon et passent dans le niveau supérieur (2). À la sortie de la cavité, un second tri permet de détecter les atomes ayant subi la transition (l'émission spontanée à partir du niveau (2) est totalement négligeable dans ce domaine de fréquence). Un système d'asservissement ajuste la fréquence ν du champ de façon que le nombre d'atomes ainsi recueillis soit maximal : la fréquence ν est alors égale à ν_0 . Des moyens électroniques permettent ensuite de diviser la fréquence de l'oscillateur et, au bout du compte, de fournir un top toutes les secondes avec une exactitude relative d'environ 10^{-14} , c'est-à-dire qu'au bout de 3 millions d'années, l'erreur accumulée par l'horloge serait inférieure à une seconde...

Effet tunnel



Bibliographie

- *Les phénomènes quantiques*, Belorinzky, Nathan
- *Mécanique quantique*, Dalibard et Basdevant, Editions de l'X
- *Berkeley- 4. Physique quantique*, Winchmann, Dunod

Introduction :

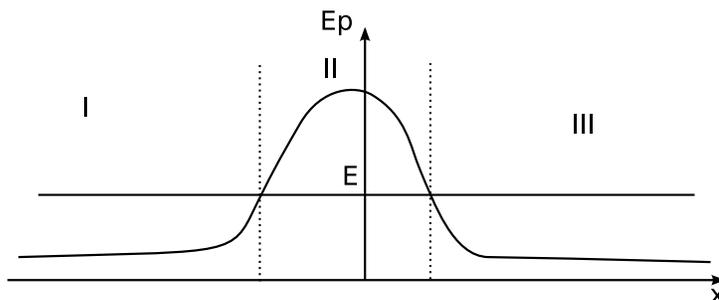
L'effet Tunnel fut prédit dès le début de la mécanique quantique, et mis en évidence dès le fin des années 30 pour expliquer différents phénomènes (Fowler/Nordheim 1928 pour l'extraction d'électrons d'un métal sous l'effet d'un champ électrique fort, Gamow 1928 pour la radioactivité, Frenkel 1930 sur la résistance de contact entre deux matériaux conducteurs).

41.1 Traversée d'une barrière de potentiel

41.1.1 Généralités : barrière quelconque

Traitons le problème à une dimension suivant. Une onde plane de particules arrive de la gauche vers la droite et se heurte à la barrière de potentielle.

Ces particules ont une énergie purement cinétique $E = \frac{p^2}{2m} < V_{max}$.



Classiquement, la particule ne peut pas passer dans la zone III et doit repartir dans l'autre sens.

Décrivons le problème à l'aide du formalisme quantique.

Ecrivons l'équation de Schrödinger pour nos particules :

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = \hat{H} \psi(x, t)$$

avec ici $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$.

Pour un système isolé indépendant du temps, on peut écrire

$$\psi(x, t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \varphi(x)$$

et l'équation devient :

$$\hat{H} \varphi(x) = E \varphi(x)$$

Soit en utilisant le fait que $\hat{p}^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \varphi(x) = 0$$

Régions I et III : $V = 0$ donc $E - V > 0$

L'équation peut donc s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x) + \kappa^2 \varphi(x) = 0$$

avec $\kappa = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

Les solutions générales de l'équation s'écrivent :

$$\begin{aligned}\varphi_I(x) &= Ae^{i\kappa x} + Be^{-i\kappa x} \\ \varphi_{III}(x) &= A'e^{i\kappa x} + B'e^{-i\kappa x}\end{aligned}$$

La situation physique étudiée nous impose qu'il n'y ait pas de particules venant de la droite dans la région III. Donc $B' = 0$.

Remarque : $\varphi_I(x)$ et $\varphi_{III}(x)$ ne sont pas normalisables car représentent des ondes planes qui sont non physiques car associées à une énergie infinie.

$$\begin{aligned}\varphi_I(x, t) &= (Ae^{i\kappa x} + Be^{-i\kappa x})e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \\ \varphi_{III}(x, t) &= A'e^{i\kappa x}e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\end{aligned}$$

Le nombre de particules qui passe par unité de temps au point d'abscisse x est donné par le courant de probabilité $j = \frac{\hbar}{m}|\psi|^2$, donc est proportionnel à $|\psi|^2$

Une particule arrivant de la source a 2 devenir possibles :

- soit elle est réfléchi sur la barrière et repart vers . On définit alors un coefficient de réflexion :

$$R = \frac{\text{nombre de particules réfléchies par unité de temps}}{\text{nombre de particules incidentes par unité de temps}}$$

- soit elle est passe à travers la barrière. On définit alors un coefficient de transmission :

$$T = \frac{\text{nombre de particules transmises par unité de temps}}{\text{nombre de particules incidentes par unité de temps}}$$

Avec $R+T = 1$. Dans pas mal de situations physiques, $T \ll 1$, mais nous nous intéresserons ici justement aux cas où $T \neq 0$ et où une particule peut passer une barrière de potentiel même avec une énergie cinétique inférieure au pic de potentiel (situation impossible classiquement).

41.1.2 Transparence d'une barrière rectangulaire

Intéressons nous maintenant à un cas que l'on peut résoudre analytiquement. Les calculs ont déjà été effectués dans les régions I et III.

Régions II : $V - E > 0$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x) - \alpha^2 \varphi(x) = 0$$

avec $\alpha = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}$

Les solutions générales de l'équation s'écrivent :

$$\varphi_{III}(x) = A'' e^{\alpha x} + B'' e^{-\alpha x}$$

Raccordement :

L'équation de Schrödinger nous impose que la solution soit continue. On peut le voir de deux manières différentes. Soit analytiquement, et pour ceci voir l'explication du Dalibard, soit comme ceci : la fonction d'onde et sa dérivée représentent (ou plutôt leur module au carré) une quantité physique (respectivement le nombre de particules par unité de volume et le nombre de particules qui passent à l'endroit considéré). Vu que notre potentiel n'est pas trop bizarre (il a seulement des discontinuités finies), ceci nous impose que φ et φ' soient continus en tout points de l'espace, et en particulier en 0 et en a, ce qui nous donne les différentes relations :

Continuité de φ :

$$x = 0 : A + B = A'' + B''$$

$$x = a : A' e^{i\kappa a} = A'' e^{i\alpha a} + B'' e^{-i\alpha a}$$

Continuité de φ' :

$$x = 0 : i\kappa(A - B) = \alpha(A'' + B'')$$

$$x = a : i\kappa A' e^{i\kappa a} = \alpha(A'' e^{i\alpha a} - B'' e^{-i\alpha a})$$

Soit un système avec 5 inconnues et 4 équations. Mais comme nous cherchons le rapport de deux des inconnues, nous pouvons écrire l'une en fonction de l'autre. On cherche donc à résoudre de système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & e^{\alpha a} & e^{-\alpha a} \\ i\kappa & -i\kappa & -\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha e^{\alpha} & -\alpha e^{-\alpha a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ A'' \\ B'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A' e^{i\kappa a} \\ 0 \\ i\kappa A' e^{-i\kappa a} \end{pmatrix}$$

qui nous donne après résolution :

$$\left| \frac{A}{A'} \right|^2 = 1 + \frac{1}{4} \sinh^2(\alpha a) \left(\frac{\alpha}{\kappa} + \frac{\kappa}{\alpha} \right)$$

Soit finalement :

$$\frac{1}{T} = 1 + \frac{V_0}{4E(V_0 - E)} \sinh^2 \left(\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} a \right)$$

Remarque :

Généralement, dans la plupart des cas qui nous intéressent lorsqu'on étudie l'effet tunnel, l'argument dans le sin est suffisamment supérieur à 1 pour qu'on puisse dire $\sinh \sim e^{-\frac{1}{2}}$. C'est l'approximation qui est faite dans beaucoup d'ouvrages.

41.2 Applications

41.2.1 Traversée classique

Données :

- $m = 50 \text{ g}$
- $E = mgz_0$, avec $z_0 = 5 \text{ cm}$
- $V_0 = mgh$, avec $h = 10 \text{ cm}$
- $a = 1 \text{ cm}$

Application numérique : $\frac{1}{T} = 1 + \sinh^2(4,7 \cdot 10^{30})$, soit $T \sim 10^{4 \cdot 10^{30}}$.

Si on cherchait à écrire tous les 0 de ce nombre avec des chiffres de 2 mm, il faudrait $8 \cdot 10^{27}$ m, soit 800 milliards d'années lumières (la taille de l'univers connu est de 15 milliards d'années lumières).

41.2.2 Microscope à effet tunnel

En approchant une pointe conductrice taillé très finement (quelques atomes seulement) à proximité ($d \sim 5 \text{ \AA}$) d'une surface conductrice, et en imposant une différence de potentiel de quelques mV, on mesure un courant de quelques nA. Le nombre d'électrons qui passent à travers la barrière de potentiel (ici : c'est le vide entre les deux électrodes conductrices) diminue de manière exponentielle avec la largeur de la barrière. En analysant le signal d'erreur d'un asservissement sur le courant passant dans le circuit, on peut avoir accès

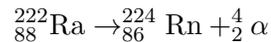
à une cartographie très précise de la surface mesurée (résolution de l'ordre de 0,1 Å en vertical, et de l'ordre de 5 Å en horizontal).

41.2.3 Radioactivité α

Position du problème

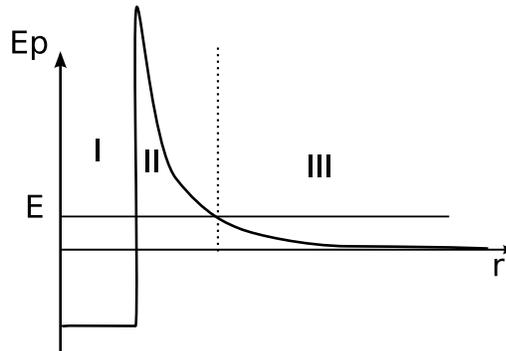
Pour des noyaux ayant un nombre de nucléons devenant trop important, la répulsion coulombienne entre protons prend des valeurs significatives par rapport à l'interaction forte qui assure la cohésion du noyau. On assiste au phénomène de saturation, qui donne lieu à la désintégration α qui est un cas particulier d'une fission spontanée.

Par exemple :



La particule est émise avec une énergie de 4,78 MeV.

Si on schématise le potentiel auquel est soumis la particule en fonction de sa distance au noyau, on voit une barrière de potentiel très grande devant l'énergie avec laquelle la particule sort du noyau. Gamow a proposé une explication à ce phénomène en 1928. Il suppose que la particule α pré-existe dans le noyau et cogne sur les parois. Elle a une probabilité non nulle de franchir la barrière de potentiel par effet tunnel.



Modèle de Gamow

Si le noyau est suffisamment gros, l'énergie de la particule α est positive (l'interaction forte n'agit qu'entre plus proches voisins, mais l'interaction coulombienne a des effets cumulatifs).

Dans la première partie de l'exposé, nous avons calculé le coefficient de transmission pour une barrière carré. Nous allons ici utiliser l'approximation due à Wentzel, Kramers et Brillouin (WKB) afin de calculer ce coefficient T .

Dans la zone II, nous allons supposer que la fonction d'onde radiale s'écrit :

$$\varphi(r) = Ce^{-\gamma(r)} + De^{\gamma(r)}$$

avec une fonction réelle positive (donc $D = 0$, car on cherche une solution qui s'atténue quand on s'enfonce dans la barrière de potentiel) et que $\gamma(r)$ varie suffisamment lentement pour que :

$$\frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial r} \right)^2 \varphi$$

L'équation de Schrödinger indépendante du temps devient donc :

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial r} \right)^2 + \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{2(Z-2)q^2}{r} - E \right) = 0$$

Soit :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial r} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{2(Z-2)q^2}{r} - E \right)}$$

Posons $r_1 = \frac{2(Z-2)q^2}{E}$, sachant que $\gamma(R) = 0$ (la particule n'est pas encore rentrée dans la barrière de potentielle),

$$\gamma(r) = \frac{\sqrt{2m(Z-2)q^2}}{\hbar} \int_r^R \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}} dr$$

Donc :

$$T = \left| \frac{\varphi(r_1)}{\varphi(R)} \right|^2 = \left| e^{-\gamma(r_1)} \right|^2$$

On doit donc calculer $\gamma(r_1)^2$. On trouve après calculs :

$$\gamma(r_1) = \frac{\pi}{\hbar} q^2 (Z - 2) \sqrt{\frac{2m}{E_\alpha}} - \frac{4}{\hbar} \sqrt{2mq^2(Z - 2)R}$$

Données : ${}^{226}_{88}\text{Ra}$

- $E = 4,78 \text{ MeV}$
- $Z = 88$
- $m = 4940 \text{ MeV}/c^2$
- $R = a_0 A^{1/3} = 7,3 \cdot 10^{-15} \text{ m}^3$
- $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-28} \text{ J.s}$
- $q^2 = 2,3 \cdot 10^{-28} \text{ (SI)}$

Application Numérique :

$$\gamma(r_1) = 40,8 \text{ donc } T = e^{-81,6}$$

T nous donne la probabilité que la particule α sorte du noyau une fois qu'elle a frappé la paroi de celui-ci. Notons τ_0 la durée moyenne entre deux chocs successifs.

$$\text{On a } \tau_0 = 2R/v, \text{ avec } v = \sqrt{\frac{2E}{m}}, \text{ donc } \tau_0 = 9,73 \cdot 10^{-22} \text{ s.}$$

$$\text{Durée entre deux désintégrations : } \tau = \frac{\tau_0}{T} = 8,4 \cdot 10^6 \text{ années.}$$

On remarque, grâce à un transparent montrant la période des différents émetteurs alpha en fonction de l'énergie de la particule émise la bonne concordance des résultats. On peut souligner l'incroyable performance du modèle qui, malgré sa simplicité, reste vérifié sur environ 30 ordres de grandeurs.

Fission, Fusion



Bibliographie

- *Physique subatomique*, Valentin, Hermann
- *Précis de physique nucléaire*, Blanc, Dunod

Introduction :

Partant des caractéristiques du noyau, on se propose ici d'étudier les réactions nucléaires de fission et de fusion.

42.1 Caractéristiques du noyau

42.1.1 Composition

Le noyau atomique désigne la région située au centre d'un atome constituée de protons et de neutrons (les nucléons). La taille du noyau (10^{-15} m) est environ 100000 fois plus petite que celle de l'atome (10^{-10} m) et concentre quasiment toute sa masse. Les forces nucléaires qui s'exercent entre les nucléons sont à peu près un million de fois plus grandes que les forces entre les atomes ou les molécules. Un noyau instable est dit radioactif, il est sujet à une transmutation, soit spontanée soit provoquée par l'arrivée de particules supplémentaires ou de rayonnement électromagnétique.

Le noyau d'un atome est composé de particules appelées nucléons (des neutrons électriquement neutres et des protons chargés positivement) extrêmement liées (à l'exception de

l'hydrogène dont le noyau est simplement constitué d'un unique proton). Sa cohésion est assurée par l'interaction forte, force principale dans le noyau, qui maintient les nucléons ensemble et les empêche de s'éloigner les uns des autres.

Pour modéliser cette attraction entre les nucléons, on peut définir une énergie de liaison nucléaire pouvant être calculée à partir de la formule de Bethe-Weizsäcker.

42.1.2 Les isotopes

Les isotopes sont des atomes ayant le même nombre de protons (même numéro atomique Z) mais un nombre de neutrons différent.

Un élément chimique est caractérisé par le nombre de protons qui composent son noyau, précisément appelé numéro atomique et noté Z . Un atome possédant autant d'électrons que de protons, ce qui explique sa neutralité électrique, Z est également le nombre d'électrons d'un élément.

Pour un même élément, on trouve dans la nature différents nucléides possédant des nombres de neutrons différents. Ces noyaux sont appelés isotopes de l'élément ayant ce numéro atomique. Le nombre de masse A d'un atome est le nombre total de nucléons (protons et neutrons) qui composent un noyau. Le nombre de neutrons N est égal à $A - Z$.

Un nucléide X est donc un noyau caractérisé par son nombre de masse A et son numéro atomique Z ; il est noté A_ZX

Par exemple, l'hydrogène ${}^1_1\text{H}$, le deutérium D ou ${}^2_1\text{H}$ et le tritium T ou ${}^3_1\text{H}$ sont trois isotopes de l'hydrogène.

42.1.3 L'énergie de liaison nucléaire

La liaison nucléaire est le phénomène qui assure la cohésion d'un noyau atomique.

Le noyau atomique est composé de protons de charge électrique positive, et de neutrons de charge électrique nulle. La barrière de répulsion coulombienne tend à séparer les protons. C'est l'interaction forte, portée par les gluons, qui permet d'assurer la stabilité du noyau.

L'énergie de liaison E_l d'un noyau atomique est l'énergie qu'il faut fournir au noyau pour le dissocier en ses nucléons, qui s'attirent du fait de l'interaction forte. On définit également une énergie de liaison par nucléon : E_l/A (A étant le nombre de masse du nucléide).

Le défaut de masse, noté Δm , est la différence entre la somme des masses de tous les nucléons d'un noyau (masses des Z protons + masse des $A - Z$ neutrons) et la masse de

ce même noyau $M(A, Z)$:

$$\Delta m(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z)$$

Cette énergie apparaît dans le bilan de masse du système : la masse du noyau est inférieure à la somme des masses de chacun de ses nucléons. Ce défaut de masse se retrouve sous forme d'énergie grâce au principe d'équivalence masse-énergie

$$E_l = \Delta m(A, Z)c^2 = Zm_p + (A - Z)m_n - M(A, Z)c^2$$

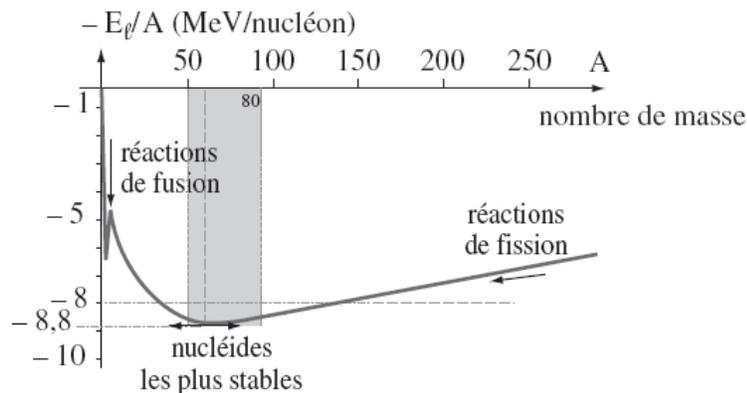
D'ailleurs, en physique nucléaire et physique des particules, l'utilisation de cette relation est implicite : les masses sont souvent exprimées en électron-volt, laissant le lecteur rajouter les divisé par c^2 par analyse dimensionnelle.

Exemple :

La masse d'un noyau d'hélium est $m_{He} = 6,6446 \cdot 10^{-27}$ kg, celle de ses nucléons est $2m_p + 2m_n = 6,6951 \cdot 10^{-27}$ kg. Le défaut de masse d'un noyau de hélium est $\Delta m = 5,05 \cdot 10^{-29}$ kg, soit 0,8 % de la masse du noyau. L'énergie de liaison vaut $E_l = 4,54 \cdot 10^{-12}$ J. Or, $1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J. Donc $E_l = 28$ MeV

L'énergie de liaison par nucléon n'est pas la même suivant le nucléide. Elle est comprise entre 2 MeV et 9 MeV. Comme l'énergie de masse propre du proton est de 938 MeV, une énergie de liaison de 9 MeV est moins de 1 % de l'énergie de masse. Faible pour les noyaux légers, elle augmente jusqu'au nickel 62 et décroît ensuite. La forme de cette énergie peut être expliquée à l'aide de la formule de Bethe-Weizsäcker.

La courbe d'Aston représente l'opposé de l'énergie de liaison par nucléon d'un noyau en fonction du nombre de nucléons.



Deux éléments légers (hydrogène, hélium...) produisent un dégagement d'énergie en fusionnant. Cette fusion est à l'origine de l'énergie dégagée par le Soleil.

Les éléments lourds (uranium, plutonium..) ne peuvent dégager de l'énergie que par la fission nucléaire. C'est la réaction de fission qui est mise en œuvre dans les centrales nucléaires.

42.1.4 Le modèle de la goutte liquide

En physique nucléaire, le modèle de la goutte liquide est un modèle permettant de déterminer approximativement en une seule formule générale la distribution des énergies de liaison B en fonction du nombre de masse A , du nombre de protons Z et du nombre de neutrons N ($A = N + Z$).

L'idée est de traiter la matière nucléonique comme un liquide. Un peu comme l'eau d'une goutte de pluie, sauf qu'ici les forces de Van der Waals entre les molécules d'eau sont remplacées par l'Interaction forte entre les nucléons (dilués dans le volume du noyau).

On retrouve ainsi :

- un terme de volume (en A)
- un terme de surface (les nucléons en surface sont moins liés que ceux au centre du noyau)
- un terme de répulsion coulombienne des protons entre eux
- des termes quantiques d'asymétrie et d'appariement

Dans le modèle de la goutte liquide, le noyau est donc considéré comme un fluide chargé incompressible.

L'énergie de liaison est la suivante :

$$E_l = E_{\text{volume}}(A, Z) - E_{\text{surface}}(A, Z) - E_{\text{Coulomb}}(A, Z) - E_{\text{asymétrie}}(A, Z) + \dots$$

et peut être réécrit sous la forme :

$$E_l = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} + \delta(A, Z)$$

avec

- $a_v \approx 16$ MeV le terme de volume, directement proportionnel au nombre A de nucléons constituant le noyau

- $a_s \approx 17$ MeV le terme de surface et il n'est pas difficile de s'en persuader géométriquement proportionnel à $V^{2/3}$ et donc à $A^{2/3}$
- $a_c \approx 0,7$ MeV
- $a_a \approx 23$ MeV le terme d'antisymétrie permettant d'inclure au modèle le principe d'exclusion de Pauli
- $\delta(A, Z) = \delta_o a_p A^{-3/4}$
- $a_p \approx 34$ MeV
- $\delta_o \begin{cases} +1 & \text{pour } A \text{ pair, } Z \text{ et } N \text{ pairs} \\ 0 & \text{pour } A \text{ impair} \\ -1 & \text{pour } A \text{ pair, } Z \text{ et } N \text{ impairs} \end{cases}$

Les noyaux ayant un nombre pair de nucléons, neutrons et protons sont plus stables que ceux ayant un nombre impair de nucléons eux-mêmes plus stables que ceux ayant un nombre pair de nucléons et impair de neutrons et protons. Ceci rend notamment compte des effets de couplage par deux nucléons pour les spins.

Remarque : cela peut s'écrire : $\delta_o = \frac{(-1)^Z + (-1)^N}{2}$

Le fait que le terme de volume soit positif montre que les nucléons à l'intérieur du noyau se lient par l'intermédiaire de l'interaction nucléaire. Les termes de surface diminuent l'énergie de liaison car, en surface, les nucléons ont moins de voisins avec qui interagir. Il en est de même pour le terme coulombien qui est répulsif et tend à éloigner les protons les uns des autres. On peut ajouter un terme d'asymétrie répulsif caractérisant le fait que le noyau est moins lié lorsque l'on s'éloigne de la vallée de stabilité, ce terme n'a pas d'origine macroscopique.

Le terme de répulsion coulombienne est donné $a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$ ou $a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ dans la formule de Weizsäcker ce qui permet de rendre compte du fait que le terme est nul lorsqu'il n'y a qu'un seul proton

Dans l'énergie de liaison ci-dessus, terme de parité $\delta(A, Z)$ est compté positivement.

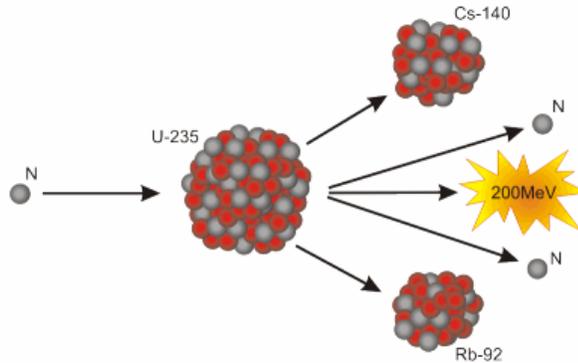
La formule de Weizäcker donne $\delta(A, Z) = a_p A^{-1/2}$ pour la valeur absolue de ce terme

42.2 Fission

La fission nucléaire est le phénomène par lequel le noyau d'un atome lourd (noyau qui contient beaucoup de nucléons, tels les noyaux d'uranium et de plutonium) est divisé en plusieurs nucléides plus légers, généralement deux nucléides. Cette réaction nucléaire se traduit aussi par l'émission de neutrons (en général deux ou trois) et un dégagement d'énergie très important de l'ordre de 200 MeV par atome fissionné, à comparer aux énergies des réactions chimiques qui sont de l'ordre de l'eV par atome ou molécule réagissant).

Il existe deux types de fissions : la fission spontanée et la fission induite. La fission neutronique est une fission induite qui peut être soit thermique (où la particule induite est un neutron thermique ou lent) soit fission rapide (où la particule induite est un neutron rapide). Les noyaux atomiques pouvant fissionner sont dits fissiles (s'ils peuvent subir une fission avec des neutrons rapides ou lents) ou fissibles (s'ils peuvent subir une fission rapide).

La découverte de la fission de l'uranium 235 peut être décrite par l'intermédiaire du modèle de la goutte liquide. Un noyau est constitué de nucléons : les protons et les neutrons. Ces nucléons, outre leurs masses respectives, apportent une énergie de liaison au noyau donnée par la formule de Weizsäcker ; plus l'énergie de liaison est importante plus le noyau est stable.



Donc d'après le modèle de la goutte liquide, la fission est possible si la variation de masse entre deux noyaux $\frac{A}{2}Y$ issus du noyau $\frac{A}{2}X$ est positive ou nulle. Cette condition est vraie si $\frac{Z^2}{A} \geq 18$, ce qui correspond à la région du zirconium. Au delà du rapport $\frac{Z^2}{A} \geq 50$, le noyau est instable et fissionne spontanément.

Actuellement, la fission induite par des projectiles de faible énergie (0 à 2 MeV) a été observée pour quelques actinides, l'uranium 233, 235 et 238 et le plutonium 239 et 241.

La fission induite a lieu lorsqu'un noyau lourd capture une autre particule (généralement un neutron) et que le noyau ainsi composé se désintègre alors en plusieurs fragments.

La fission induite de l'uranium 235 par absorption d'un neutron est la réaction de ce type la plus connue. Elle est du type :



X et Y étant deux noyaux moyennement lourds et généralement radioactifs : on les appelle des produits de fission.

Ainsi la fission induite d'un noyau d'uranium 235 peut donner deux produits de fission, le krypton et le baryum, accompagnés de trois neutrons :

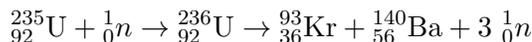


Sous l'effet d'une collision avec un neutron, le noyau de certains gros atomes, dits fissiles, a la propriété de se casser en deux. La matière fissile qui constitue le cœur des réacteurs est en général de l'uranium ou du plutonium.

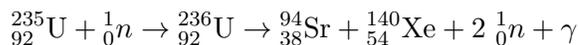
En absorbant un neutron, un noyau d'atome d'uranium 235 se transforme ainsi en uranium 236, un isotope de l'uranium, dans un état excité de 6,2 (MeV). Il se comporte ainsi un peu comme une goutte d'eau.

Dans 16 % des cas l'énergie est dissipée par rayonnement électromagnétique et le noyau d'uranium 236 reste intact.

Dans 84 % des cas, cette énergie suffit pour que le noyau puisse franchir la barrière de fission, de 5,7 MeV et se fragmenter en deux autres noyaux comme par exemple le krypton 93 et le baryum 140.



ou bien le strontium 94 et le xénon 140 :



Une importante quantité d'énergie est libérée lors de cette fission, de l'ordre de 202,8 MeV pour un noyau d'uranium 235. La part principale de cette énergie est constituée par l'énergie cinétique des deux atomes créés

Ceux-ci réagissent avec les noyaux qu'ils rencontrent et sont soit diffusés, c'est-à-dire renvoyés dans une direction différente, soit absorbés. Tant que la probabilité d'absorption reste faible, les neutrons se conservent pratiquement en nombre, mais leur énergie décroît peu à peu à chaque diffusion. Les noyaux sont d'autant plus efficaces pour ralentir les neutrons que leur masse est plus faible, plus proche de celle du neutron. C'est en particulier le cas de l'eau ordinaire (qui contient de l'hydrogène, le meilleur des modérateurs/ralentisseurs de neutrons), l'eau lourde (eau dans laquelle n'a été conservé, grâce à une séparation isotopique, que l'isotope lourd de l'hydrogène, le deutérium), le béryllium ou son oxyde la glucine, et enfin le graphite (carbone pur)

Avec un modérateur efficace, les neutrons se ralentissent jusqu'à ce que leur énergie cinétique soit à peu près égale à l'énergie d'agitation thermique du milieu diffusant (0,025 eV

à la température de 300 K). La plupart des fissions se produisent alors à cette énergie et le réacteur est dit à thermalisation des neutrons. Dans le cas contraire, le réacteur est dit à neutrons rapides.

La raison principale pour laquelle on cherche dans un réacteur thermique à ralentir les neutrons issus de fission pour les amener au niveau d'énergie (de vitesse) thermique est liée au fait que la probabilité qu'une rencontre d'un neutron thermalisé avec un atome fissile donne lieu à fission de l'atome rencontré est sensiblement 250 fois plus élevée que dans le cas où le neutron possède une énergie (une vitesse) élevée voisine de son énergie initiale.

Certaines captures de neutrons ne donnent pas lieu à la fission du noyau et l'importance relative de ces captures parasites doit être strictement limitée pour qu'une réaction en chaîne, divergente ou stationnaire, soit réalisée. Pour entretenir une réaction en chaîne, l'un des n neutrons produits à chaque fission devra à son tour être absorbé dans le combustible, les $n - 1$ qui restent pouvant être perdus par capture dans les autres constituants du milieu, ou par fuite en dehors du dispositif. n dépend de l'énergie des neutrons. Dans le cas des neutrons thermiques, il est égal à 2,08 pour l'uranium 235 et le plutonium 239, à 1,8 pour l'uranium enrichi, mais à 1,36 seulement pour l'uranium naturel.

Le contrôle de la réaction en chaîne est assuré par l'insertion de barres de commandes contenant des matériaux très absorbants des neutrons, généralement désignés : absorbants mobiles de contrôle de la réactivité du cœur. Les matériaux absorbants utilisés sont généralement le bore, le cadmium, l'argent, l'indium ainsi que d'autres non mentionnés ici.

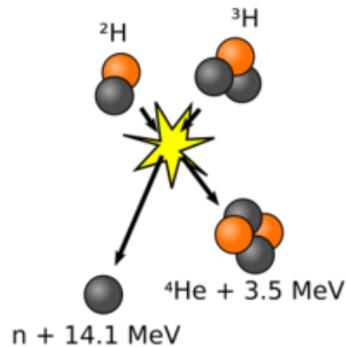
42.3 Fusion

La fusion nucléaire, dite parfois fusion thermonucléaire, est un processus où deux noyaux atomiques légers s'assemblent pour former un noyau plus lourd. Cette réaction est à l'œuvre de manière naturelle dans le Soleil et la plupart des étoiles de l'Univers.

La fusion de noyaux légers dégage d'énormes quantités d'énergie provenant de l'attraction entre les nucléons due à l'interaction forte. Elle est avec la fission nucléaire l'un des deux principaux types de réactions nucléaires appliquées.

La masse du nouvel atome obtenu par la fusion est inférieure à la somme des masses des deux atomes légers. Dans le processus de fusion, une partie de la masse est transformée en énergie sous sa forme la plus simple : la chaleur. Cette perte s'explique par la formule d'Einstein $E = mc^2$.

Un de ses intérêts est de pouvoir obtenir théoriquement beaucoup plus d'énergie : d'abord à masse de combustible égale, la fusion libère trois à quatre fois plus d'énergie que la



fission. Ensuite, le stock de combustible est beaucoup plus large : les océans contiennent naturellement une telle masse de deutérium qu'ils pourraient théoriquement satisfaire la consommation d'énergie actuelle de l'espèce humaine pendant cent millions d'années.

En dépit de travaux de recherche réalisés dans le monde entier depuis les années 1950, aucune application industrielle de la fusion à la production d'énergie n'a encore abouti, en dehors des armes nucléaires avec la bombe H, étant donné que cette application ne vise aucunement à contenir et maîtriser la réaction produite. Il existe cependant quelques autres usages moins médiatisés, comme les générateurs de neutrons. Actuellement, le Centre d'études scientifiques et techniques d'Aquitaine utilise le principe de fusion au sein du Laser Mégajoule, destiné à assurer la pérennité de la dissuasion nucléaire de la France.

Contrairement à la fission nucléaire, les produits de la fusion eux-mêmes (principalement de l'hélium 4) ne sont pas radioactifs, mais lorsque la réaction utilisée émet des neutrons rapides, ces derniers peuvent transformer les noyaux qui les capturent en isotopes pouvant l'être.

Une réaction de fusion nucléaire nécessite que deux noyaux atomiques s'interpénètrent. Il faut pour cela que les noyaux surmontent l'intense répulsion due à leurs charges électriques toutes deux positives (phénomène dit de barrière coulombienne). Si l'on appliquait uniquement les lois de la mécanique classique, la probabilité d'obtenir la fusion des noyaux serait très faible, en raison de l'énergie cinétique (correspondant à l'agitation thermique) extrêmement élevée nécessaire au franchissement de la barrière. Cependant, la mécanique quantique prévoit, ce qui se vérifie en pratique, que la barrière coulombienne peut également être franchie par effet tunnel, à des énergies plus faibles.

Les énergies nécessaires à la fusion restent très élevées, correspondant à des températures de plusieurs dizaines ou même centaines de millions de degrés Celsius selon la nature des noyaux. Au sein du Soleil par exemple, la fusion de l'hydrogène, qui aboutit, par étapes, à produire de l'hélium s'effectue à des températures de l'ordre de quinze millions de kelvins, mais suivant des schémas de réaction différents de ceux étudiés pour la production d'énergie

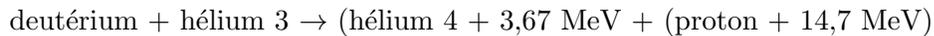
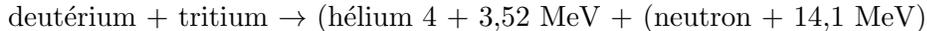
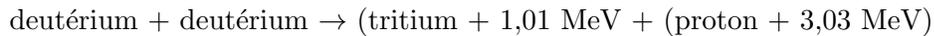
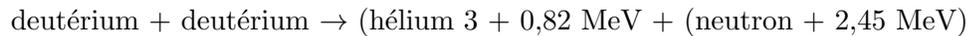
de fusion sur Terre. Dans certaines étoiles plus massives, des températures plus élevées permettent la fusion de noyaux plus lourds.

Lorsque deux petits noyaux fusionnent, le noyau résultant se retrouve dans un état instable et doit revenir à un état stable d'énergie plus faible, en éjectant une ou plusieurs particules (photon, neutron, proton, noyau d'hélium, selon le type de réaction), l'énergie excédentaire se répartit entre le noyau et les particules émises, sous forme d'énergie cinétique.

Pour que la fusion puisse être énergétiquement rentable, il serait nécessaire que l'énergie produite soit supérieure à l'énergie consommée pour l'entretien des réactions et par pertes thermiques vers le milieu extérieur. Dans les réacteurs à fusion, il faut ainsi éviter tout contact entre le milieu de réaction et les matériaux de l'environnement, ce que l'on réalise par un confinement immatériel (magnétique ou inertiel).

Dans les cas où aucun état à peu près stable n'existe, il peut être impossible de provoquer la fusion de deux noyaux.

Les réactions de fusion qui dégagent le plus d'énergie sont celles qui impliquent les noyaux les plus légers. Ainsi les noyaux de deutérium (un proton et un neutron) et de tritium (un proton et deux neutrons) sont impliqués dans les réactions suivantes :



Si la fission est contrôlée depuis longtemps pour la production d'électricité, ce n'est pas le cas de la fusion.

Cette réaction est difficile à réaliser car il faut rapprocher deux noyaux qui ont tendance naturellement à se repousser. Maîtriser sur Terre la fusion de noyaux légers, tels que le deutérium, donnerait accès à des ressources énergétiques dans des quantités jamais rencontrées jusqu'alors par l'espèce humaine. Cet enjeu considérable a mené les communautés scientifiques nationales et internationales à lancer plusieurs projets d'envergure.

Il existe différents procédés concevables permettant d'arriver à confiner le milieu de réaction pour produire des réactions de fusion nucléaire, notamment la fusion par confinement magnétique et la fusion par confinement inertiel. Aucun d'entre eux n'a encore abouti à des résultats industriels pour la production d'électricité.

Evolution temporelle d'un système quantique à deux niveaux



Bibliographie

- *Physique quantique*, Le Bellac, CNRS éditions

Introduction :

Dans les trois sections qui vont suivre, nous allons introduire une interaction dépendant du temps pour un système à deux niveaux, en plongeant le système dans un champ extérieur classique périodique de fréquence ω . Dans ces conditions il n'y a évidemment plus d'états stationnaires, et le problème intéressant devient l'étude des transitions d'un niveau à l'autre sous l'influence du champ extérieur. Nous montrerons le résultat fondamental suivant : si $\omega \simeq \omega_0$, où $\hbar\omega_0$ est la différence d'énergie entre les deux niveaux, on observe un remarquable phénomène de résonance. Nous allons en donner trois exemples d'une grande importance pratique : la résonance magnétique nucléaire dans une première partie, puis la molécule d'ammoniac et, enfin, à deux niveaux dans la troisième partie.

43.1 Résonance magnétique nucléaire (RMN)

43.1.1 Spin 1/2 dans un champ magnétique périodique

La résonance magnétique nucléaire (RMN) repose sur le fait que les noyaux atomiques de spin non nul possèdent des moments magnétiques. Nous nous limiterons aux noyaux de spin 1/2 (^1H , ^{13}C , ^{19}F , etc.) dont le moment magnétique, qui est un opérateur en mécanique quantique, est donné par

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{S} = \frac{1}{2} \gamma \hbar \vec{\sigma}$$

où \vec{S} est l'opérateur de spin, γ est le facteur gyromagnétique

$$\gamma = \bar{\gamma} \frac{q_p}{2m_p}$$

avec $\bar{\gamma} = 5.59$ pour le proton, 1.40 pour le ^{13}C , 5.26 pour le ^{19}F , etc. Le spin nucléaire est placé dans un champ magnétique \vec{B}_0 dirigé suivant Oz . Le hamiltonien H_0 du spin nucléaire s'écrit

$$H_0 = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \gamma \hbar B_0 \sigma_z = -\frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z$$

avec $\omega_0 = \gamma B_0$, soit encore sous forme matricielle dans une base où σ_z est diagonal

$$H_0 = -\frac{1}{2} \hbar \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix}$$

On note que, comme la charge du proton q_p est positive, on n'introduit pas de signe moins dans la définition de ω_0 . ω_0 est la fréquence de Larmor, la fréquence de précession du moment magnétique classique autour de \vec{B}_0 ; dans le cas du proton la précession de Larmor s'effectue dans le sens inverse du sens trigonométrique. L'état $|+\rangle$ a une énergie $-\hbar\omega_0/2$, l'état $|-\rangle$ une énergie $\hbar\omega_0/2$; on est donc en présence d'un système à deux niveaux : les deux niveaux Zeeman d'un spin 1/2 dans un champ magnétique, la différence d'énergie étant $\hbar\omega_0$.

On ajoute au champ constant \vec{B}_0 un champ périodique $\vec{B}_1(t)$ situé dans le plan xOy tournant dans le sens inverse du sens trigonométrique, c'est-à-dire dans le même sens que la précession de Larmor, avec une vitesse angulaire ω

$$\vec{B}_1(t) = B_1(\hat{x} \cos \omega t - \hat{y} \sin \omega t)$$

En pratique un tel champ peut être obtenu au moyen de deux bobines placées le long des axes Ox et Oy , alimentées en courant alternatif de fréquence ω . La contribution au hamiltonien induite par le champ $\vec{B}_1(t)$ est

$$H_1(t) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(t) = -\frac{1}{2}\hbar\omega_1(\sigma_x \cos \omega t - \sigma_y \sin \omega t)$$

où $\omega_1 = \gamma B_1$ est la fréquence de Rabi, souvent appelée fréquence de nutation ω_{nut} en RMN. Il sera commode pour écrire H_1 d'utiliser les matrices $\sigma_{\pm} = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2$ qui obéissent aux relations de commutation

$$[\sigma_z, \sigma_{\pm}] = \pm 2\sigma_{\pm}$$

H_1 prend alors la forme

$$H_1(t) = -\frac{1}{2}\hbar\omega_1 [\sigma_+ e^{i\omega t} + \sigma_- e^{-i\omega t}]$$

Rappelons que le hamiltonien complet dépendant du temps est

$$H(t) = H_0 + H_1(t)$$

Notre objectif est de résoudre l'équation d'évolution avec le hamiltonien dépendant du temps, c'est-à-dire déterminer le vecteur d'état du spin $1/2|\varphi(t)\rangle$ en fonction du vecteur d'état à $t = 0$, $|\varphi(0)\rangle$. Il est possible de résoudre le système d'équations différentielles pour les composantes $c_{\pm}(t)$ de $|\varphi(t)\rangle$, mais il est plus élégant et plus rapide de se ramener à un hamiltonien indépendant du temps, qui a de plus l'avantage de se prêter à une interprétation géométrique. L'idée physique pour se ramener à un hamiltonien indépendant du temps est d'utiliser un référentiel $O\hat{x}\hat{y}\hat{z}$ tournant autour de Oz avec la vitesse angulaire ω . Dans ce référentiel, le champ \vec{B}_1 est indépendant du temps : \vec{B}_1 est orienté en permanence suivant l'axe $O\hat{x}$. Soit $|\varphi(t)\rangle$ le vecteur d'état dans la base $\{|\pm\rangle\}$ correspondant au référentiel fixe

$$|\varphi(t)\rangle = c_+(t)|+\rangle + c_-(t)|-\rangle$$

Pour passer aux axes tournants, nous utilisons le fait que l'opérateur de rotation d'un angle θ autour de Oz est $\exp(-i\theta\sigma_z/2)$. Les vecteurs de base dans le référentiel tournant sont donc, avec $\theta = -\omega t$

$$|\hat{+}(t)\rangle = e^{i\omega\sigma_z t/2}|+\rangle = e^{i\omega t/2}|+\rangle \quad \text{et} \quad |\hat{-}(t)\rangle = e^{i\omega\sigma_z t/2}|-\rangle = e^{-i\omega t/2}|+\rangle$$

Dans le référentiel tournant, les composantes de $|\varphi(t)\rangle$ sont

$$\hat{c}_{\pm}(t) = \langle \hat{\pm}(t) | \varphi(t) \rangle = \langle \pm(t) | e^{-i\omega\sigma_z t/2} | \varphi(t) \rangle = \langle \pm(t) | \hat{\varphi}(t) \rangle$$

où nous avons défini le vecteur d'état $|\hat{\varphi}(t)\rangle$ dans le référentiel tournant par

$$|\hat{\varphi}(t)\rangle = e^{-i\sigma_z\omega t/2} |\varphi(t)\rangle \quad |\hat{\varphi}(t=0)\rangle = |\varphi(t=0)\rangle$$

L'équation d'évolution pour $|\hat{\varphi}(t)\rangle$ devient

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\hat{\varphi}(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} \left(e^{-i\sigma_z\omega t/2} |\varphi(t)\rangle \right) = \left(\frac{1}{2} \hbar\omega\sigma_z + \hat{H}(t) \right) |\hat{\varphi}(t)\rangle$$

avec

$$\hat{H}(t) = e^{-i\omega\sigma_z t/2} H(t) e^{i\omega t/2} = H_0 + \hat{H}_1(t)$$

Pour calculer $\hat{H}_1(t)$, nous allons partir de la forme de $H_1(t)$. Les opérateurs $\sigma_{\pm}(t)$

$$\hat{\sigma}_{\pm} = e^{-i\sigma_z\omega t/2} \sigma_{\pm} e^{i\sigma_z\omega t/2}$$

obéissent à l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} \sigma_{\pm}(t) = -\frac{i}{2} \omega e^{-i\sigma_z\omega t/2} [\sigma_z, \sigma_{\pm}] e^{i\sigma_z\omega t/2} = \mp \sigma_{\pm}(t)$$

d'où le résultat important que nous aurons souvent l'occasion d'utiliser

$$\hat{\sigma}_{\pm}(t) = e^{\mp i\omega t} \sigma_{\pm}$$

On en déduit immédiatement l'expression de \hat{H}_1 , qui comme promis est indépendant du temps

$$\hat{H}_1 = -\frac{1}{2}\hbar\omega_1 [\sigma_+ + \sigma_-] = -\frac{1}{2}\hbar\omega_1\sigma_z$$

La proportionnalité de \hat{H}_1 à σ_x ne devrait pas surprendre, puisque \vec{B}_1 est aligné suivant $O\hat{x}$ dans le référentiel tournant, et on aurait pu anticiper. Combinant les équations, on déduit l'expression du hamiltonien \hat{H} dans le référentiel tournant

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\delta\sigma_z - \frac{1}{2}\hbar\omega_1\sigma_x$$

Le désaccord $\delta = \omega - \omega_0$ est défini comme la différence entre la fréquence de rotation de \vec{B}_1 et la fréquence de Larmor.

43.1.2 Oscillations de Rabi

Comme \hat{H} est indépendant du temps, l'opérateur d'évolution en axes tournants est $\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar)$. Le cas le plus simple est celui de la résonance, $\delta = 0$. Dans le cas résonant, l'opérateur d'évolution se réduit à

$$\hat{U}(t) = \omega e^{i\sigma_x\omega_1 t/2} = I \cos \frac{\omega_1 t}{2} + i\sigma_x \sin \frac{\omega_1 t}{2}$$

Par comparaison, nous voyons que $\hat{U}(t)$ est l'opérateur de rotation d'un angle $\theta = -\omega_1 t$ autour de l'axe $O\hat{x}$. Supposons que nous partions au temps $t = 0$ de l'état $|\hat{\varphi}(0)\rangle = |+\rangle$; au temps t , compte tenu de $\sigma_x|+\rangle = |-\rangle$, le vecteur d'état est

$$|\hat{\varphi}(t)\rangle = \cos \frac{\omega_1 t}{2} |+\rangle + i \sin \frac{\omega_1 t}{2} |-\rangle$$

La probabilité $p_-(t)$ d'observer le spin dans l'état $|-\rangle$ est une fonction oscillante de t

$$p_-(t) = |\langle -|\hat{\varphi}(t)\rangle|^2 = \sin^2 \frac{\omega_1 t}{2}$$

Le spin passe donc périodiquement d'un niveau à l'autre, et ces oscillations sont appelées oscillations de Rabi. À nouveau l'interprétation géométrique est claire : à la résonance, la précession de Larmor est de fréquence $\omega_0 = \omega$, et cette précession est exactement compensée par la rotation du référentiel. Il reste donc uniquement la précession de Larmor due à \vec{B}_1 qui s'effectue autour de $O\hat{x}$, puisque \vec{B}_1 est aligné suivant $O\hat{x}$. Il existe deux cas particuliers

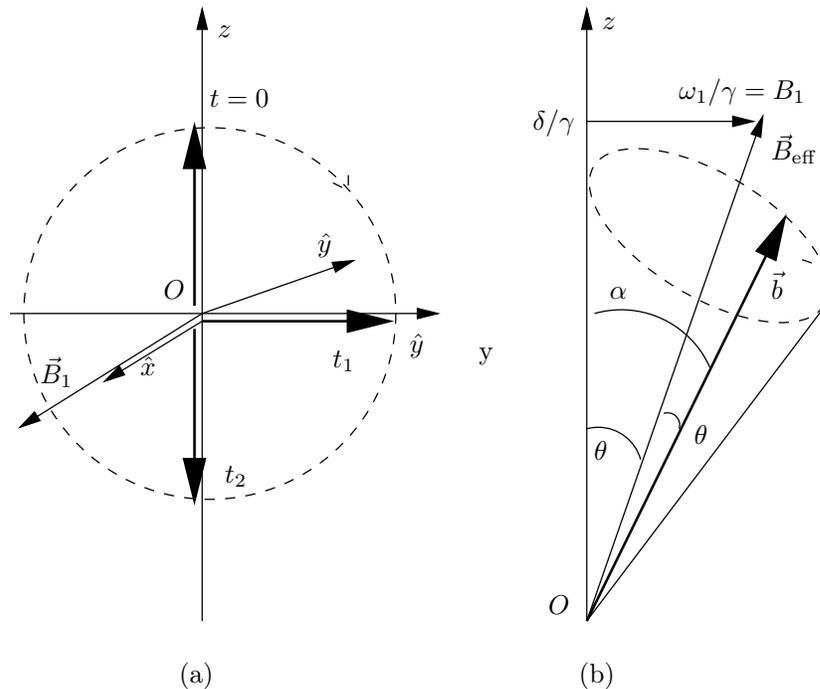
importants. Le spin initialement dans l'état $|+\rangle$ sera trouvé dans l'état $|-\rangle$ pour des temps t donnés par

$$\frac{\omega_1 t}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$$

Si le champ de radiofréquences est appliqué pendant un temps t , en général avec $n = 0$, on dit que l'on a appliqué une impulsion π . Dans l'interprétation géométrique, le spin orienté initialement suivant la direction de z positifs se retrouve dans la direction des z négatifs. Lorsque

$$\frac{\omega_1 t}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}$$

on dit que l'on a appliqué une impulsion $\pi/2$. Le spin se retrouve alors dans une combinaison linéaire à poids égaux des états $|+\rangle$ et $|-\rangle$, et dans l'interprétation géométrique, le spin orienté initialement suivant Oz se retrouve suivant $O\hat{y}$.



Hors résonance, lorsque $\delta \neq 0$, on définit un vecteur unitaire \hat{n} par

$$\hat{n} : n_x = -\frac{\omega_1}{\Omega}, \quad n_y = 0, \quad n_z = \frac{\delta}{\Omega}$$

où la fréquence Ω vaut

$$\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \delta^2} = \sqrt{\omega_1^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$

Avec ces définitions, on peut écrire l'opérateur d'évolution \hat{U} sous la forme d'un opérateur de rotation, et calculer

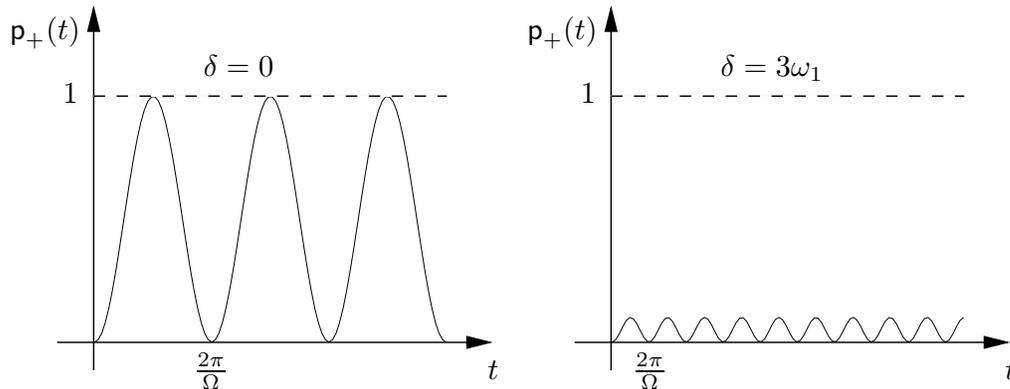
$$\hat{U}(t) = \exp\left(-i\frac{\Omega t}{2}\vec{\sigma} \cdot \vec{n}\right) = I \cos \frac{\Omega t}{2} + i\left(\sigma_x \frac{\omega_1}{\Omega} - \sigma_z \frac{\delta}{\Omega}\right) \sin \frac{\Omega t}{2}$$

Si l'on part au temps $t = 0$ de l'état $|+\rangle$, la probabilité d'observer le spin dans l'état $|-\rangle$ au temps t sera

$$p_-(t) = |\langle -|\hat{U}(t)|+\rangle|^2 = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2}$$

On voit que la probabilité maximale de transfert de l'état $|+\rangle$ vers l'état $|-\rangle$ pour $\Omega t/2 = \pi/2$ est donnée par une courbe de résonance de largeur δ

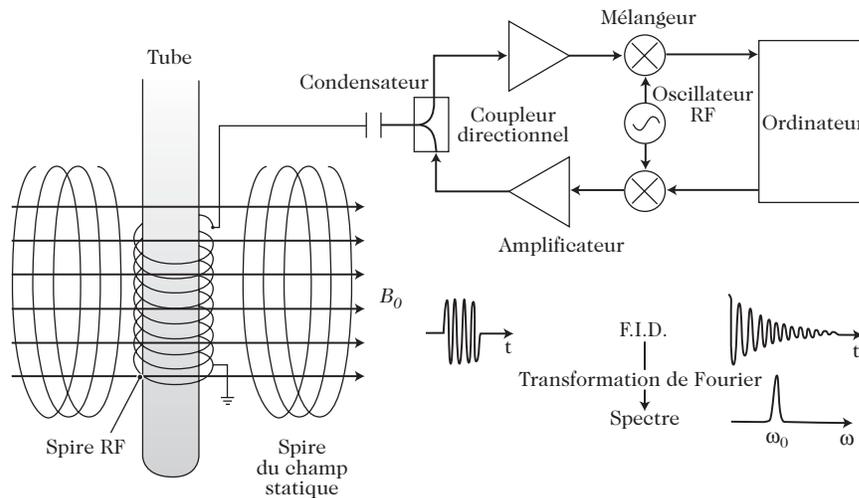
$$p_-^{max} = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\omega - \omega_0)^2}$$



Comme le montre la figure, les oscillations de Rabi sont maximales à la résonance, et elles diminuent rapidement d'amplitude quand δ croît. L'interprétation intuitive est claire : l'influence du champ de radiofréquences \vec{B}_1 est maximale lorsque celui-ci tourne à la même vitesse que le spin animé par précession de Larmor autour de \vec{B}_0 .

Revenons à l'interprétation géométrique de ces résultats hors résonance. Si $\vec{B}_1 = \vec{0}$, la précession de Larmor s'effectue dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire $\delta = \omega - \omega_0$, et le champ magnétique effectif \vec{B}_{eff} se compose d'un champ vertical de module δ/γ et d'un champ horizontal \vec{B}_1 de module ω_1/γ . La précession de Larmor s'effectue autour du champ \vec{B}_{eff} avec la fréquence angulaire Ω .

43.1.3 Principes de l'IRM et de la RMN



La RMN est utilisée principalement pour déterminer la structure de molécules d'intérêt chimique ou biologique et pour l'étude de la matière condensée solide ou liquide. Une description détaillée du fonctionnement de la RMN nous entraînerait trop loin et nous ne ferons qu'effleurer le sujet. L'échantillon à étudier est plongé dans un champ uniforme \vec{B}_0 de quelques teslas, le champ maximum accessible aujourd'hui étant d'une vingtaine de teslas. Si l'on veut caractériser une RMN, on donne plutôt la fréquence de résonance $\nu_0 = \omega_0/(2\pi) = \gamma B_0/(2\pi)$ pour un proton : un champ de 1 tesla correspond à une fréquence ≈ 42.5 MHz, et on parlera donc d'une RMN de 600 MHz si le champ B_0 vaut 14 teslas. En raison de la loi de Boltzmann, le niveau $|+\rangle$ est plus peuplé que le niveau $|-\rangle$, du moins si $\gamma > 0$, ce qui est le cas usuel

$$\frac{p_+(t=0)}{p_-(t=0)} \exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}\right)$$

À la température ambiante et pour une RMN de 600 MHz, la différence de population

$$p_+ - p_- \simeq \frac{\hbar\omega_0}{2k_B T}$$

entre les niveaux $|+\rangle$ et $|-\rangle$ est $\sim 5 \times 10^{-5}$.

L'application d'un champ de radiofréquences $\vec{B}_1(t)$ voisin de la résonance pendant un temps t tel que $\omega_1 t = \pi$, ou impulsion π , fait passer les spins de l'état $|+\rangle$ vers l'état $|-\rangle$, provoquant donc une inversion de population par rapport à celle de l'équilibre, et l'échantillon est hors équilibre. Le retour à l'équilibre est contrôlé par un temps de relaxation noté T_1 , le temps de relaxation longitudinale. On utilise en général une impulsion $\pi/2$, $\omega_1 t = \pi/2$. Ceci correspond géométriquement à une rotation du spin d'un angle $\pi/2$ autour d'un axe du plan xOy : si le spin est initialement parallèle à \vec{B}_0 , il se retrouve dans un plan perpendiculaire à \vec{B}_0 , un plan transversal (tandis qu'une impulsion π amène le spin dans la direction longitudinale $-\vec{B}_0$). Le retour à l'équilibre est alors contrôlé par un temps de relaxation noté T_2 , le temps de relaxation transversale. En général $T_2 \ll T_1$, et le retour à l'équilibre est plus rapide pour une impulsion $\pi/2$ que pour une impulsion π : c'est pourquoi l'impulsion $\pi/2$ est préférée. Dans tous les cas le retour à l'équilibre se fait en engendrant un champ magnétique tournant à la fréquence ω_0 dû au mouvement de rotation de l'ensemble des spins qui forment un dipôle macroscopique, et l'analyse de Fourier du signal donne un spectre de fréquences qui permet de remonter à la structure de la molécule étudiée. Pour ce faire, on se fonde principalement sur les propriétés suivantes :

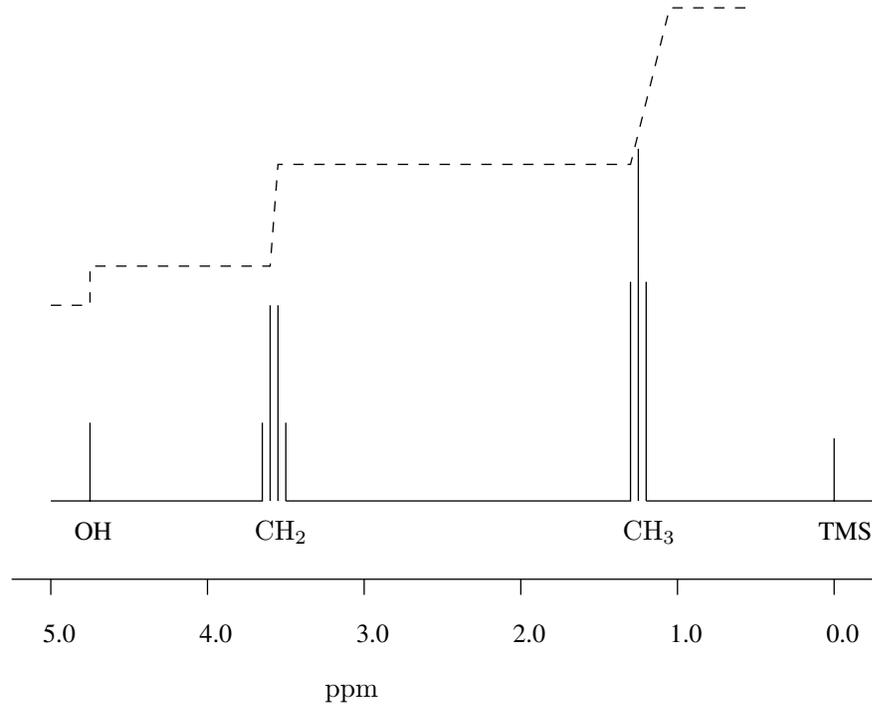
- La fréquence de résonance dépend des noyaux par l'intermédiaire de γ .
- Pour un même noyau, la fréquence de résonance est légèrement modifiée par l'environnement chimique de l'atome correspondant, ce que l'on peut traduire en définissant un champ magnétique effectif B'_0 agissant sur le noyau

$$B'_0 = (1 - \sigma)B_0$$

σ est appelé le déplacement chimique, et il existe des corrélations fortes entre σ et la nature du groupement chimique auquel appartient le noyau considéré.

- Les interactions entre spins nucléaires voisins provoquent un clivage des fréquences de résonance en plusieurs sous-fréquences, également caractéristiques des groupements chimiques.

Ceci est résumé dans la figure qui donne un spectre RMN typique.



Dans le cas de l'imagerie par résonance magnétique (IRM) on s'intéresse exclusivement aux protons, contenus dans l'eau et les graisses. L'échantillon est placé dans un champ \vec{B}_0 non uniforme, ce qui fait que la fréquence de résonance dépend du point d'espace. Comme l'amplitude du signal est directement proportionnelle à la densité des spins, et donc à celle des protons, on peut en déduire, après des calculs informatiques complexes, une image tridimensionnelle de la densité d'eau dans les tissus biologiques. Actuellement la résolution spatiale est de l'ordre du millimètre, et on peut faire une image en 0.1 s. Ceci a permis le développement de l'IMR fonctionnelle (fMRI), grâce à laquelle on peut par exemple voir le cerveau en action en mesurant les variations locales de débit sanguin. Les temps de relaxation longitudinale T_1 et transversale T_2 jouent un grand rôle dans l'obtention et l'interprétation des signaux de l'IRM.

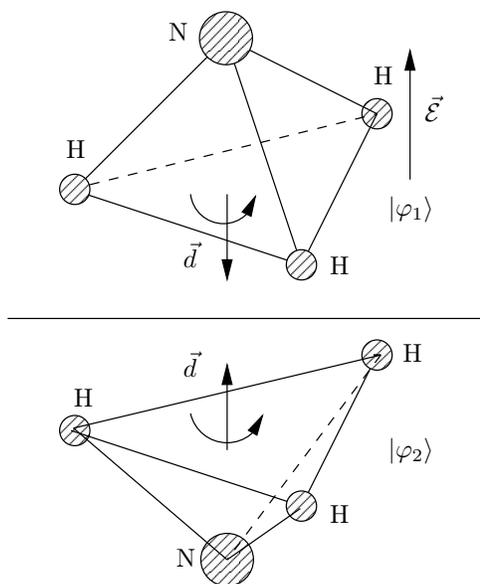
Nous allons rencontrer à nouveau les oscillations de Rabi entre deux niveaux dans les deux sections suivantes. Cependant, il existe une importante différence de principe entre la RMN et les systèmes étudiés dans ces deux sections.

43.2 La molécule d'ammoniac

La molécule d'ammoniac nous fournit un second exemple concret d'un système à deux niveaux que l'on peut coupler à un champ extérieur périodique.

43.2.1 La molécule d'ammoniac comme système à deux niveaux

La molécule d'ammoniac a une forme pyramidale, où l'atome d'azote occupe le sommet de la pyramide et où les trois atomes d'hydrogène forment un triangle équilatéral qui constitue la base de la pyramide. Les mouvements possibles de cette molécule sont très variés : elle peut effectuer des mouvements de translation et de rotation dans l'espace, les atomes peuvent vibrer autour de leur position d'équilibre, les électrons peuvent se trouver dans des états excités. Une fois fixés les degrés de liberté de translation, rotation et vibration pour la molécule dans son état fondamental électronique, il reste encore deux configurations possibles pour la molécule en rotation autour de son axe de symétrie, qui sont symétriques l'une de l'autre par réflexion par rapport à un plan. Pour passer d'une configuration à l'autre, l'atome d'azote doit traverser le plan des atomes d'hydrogène. Ceci est possible grâce à un effet tunnel. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser uniquement à ces deux configurations, ce qui est justifié en raison des énergies mises en jeu. Comme dans le cas de la molécule d'éthylène, nous utiliserons pour décrire ces deux configurations

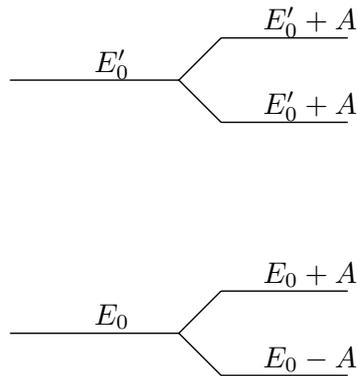


un espace des états à deux dimensions : la molécule dans l'état 1 (resp. 2) sera décrite par

le vecteur de base $|\varphi_1 \rangle$ (resp. $|\varphi_2 \rangle$). Si l'atome d'azote ne pouvait jamais franchir le plan des atomes d'hydrogène, l'énergie des états $|\varphi_1 \rangle$ et $|\varphi_2 \rangle$ serait identique, égale à E_0 . Mais il existe une amplitude non nulle pour franchir ce plan, et le hamiltonien prend la forme

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}$$

avec bien sûr des valeurs de E_0 et A différentes de celles de la section précédente. La valeur de E_0 n'est pas importante pour notre discussion. En revanche il vaut la peine d'observer que la valeur de A . En effet nous avons maintenant $2A \simeq 10^{-4}$ eV, alors que précédemment $2A$ était de l'ordre de 1 eV : ceci reflète le fait qu'il est facile à un électron π de sauter d'un atome à l'autre, alors qu'il est très difficile à l'atome d'azote de franchir le plan des atomes d'hydrogène. Cette énergie de 10^{-4} eV correspond à une fréquence de 24 GHz, ou à une longueur d'onde de 1.25 cm, dans le domaine des ondes centimétriques. Elle est très faible par rapport aux énergies d'excitation des électrons (quelques eV), faible par rapport aux énergies de vibration (~ 0.1 eV) et même de rotation ($\sim 10^{-3}$ eV). Cette comparaison justifie l'approximation par un système à deux niveaux, car la différence entre deux niveaux de rotation successifs est de l'ordre de 10 A. Cependant la molécule n'est pas dans son niveau de rotation fondamental, car $k_B T \sim 0.025$ eV est grand par rapport à $\sim 10^{-3}$ eV : les niveaux de rotation sont thermiquement excités.



Les niveaux d'énergie de H sont $E_0 \mp A$, correspondant aux états stationnaires

$$E_0 - A : |\chi_+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1 \rangle + |\phi_2 \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_0 + A : |\chi_- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1 \rangle - |\phi_2 \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'état symétrique $|\chi_+ \rangle$ est l'état fondamental, d'énergie $(E_0 - A)$ et l'état antisymétrique $|\chi_- \rangle$ est l'état excité, d'énergie $(E_0 + A)$.

43.2.2 La molécule dans un champ électrique : le maser à ammoniac

La molécule d'ammoniac possède un moment dipolaire électrique \vec{d} qui, par symétrie, est perpendiculaire au plan des atomes d'hydrogène. Comme les atomes d'hydrogène ont tendance à perdre leurs électrons et l'atome d'azote à les attirer, ce moment dipolaire est orienté de l'atome d'azote vers le plan des atomes d'hydrogène. Plaçons la molécule dans un champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ dirigé suivant Oz . L'énergie d'un dipôle classique \vec{d} dans un champ électrique $\vec{\mathcal{E}}$ (nous utilisons une lettre calligraphiée pour le champ électrique, afin d'éviter toute confusion avec l'énergie) est

$$E = -\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

En mécanique quantique, le moment dipolaire est un opérateur \vec{D} , qui s'exprime en fonction des charges et des opérateurs position des différentes particules chargées. Nous admettrons que la restriction de \vec{D} à notre sous-espace à deux dimensions est donnée par la matrice suivante dans la base $\{|\varphi_1 \rangle, |\varphi_2 \rangle\}$

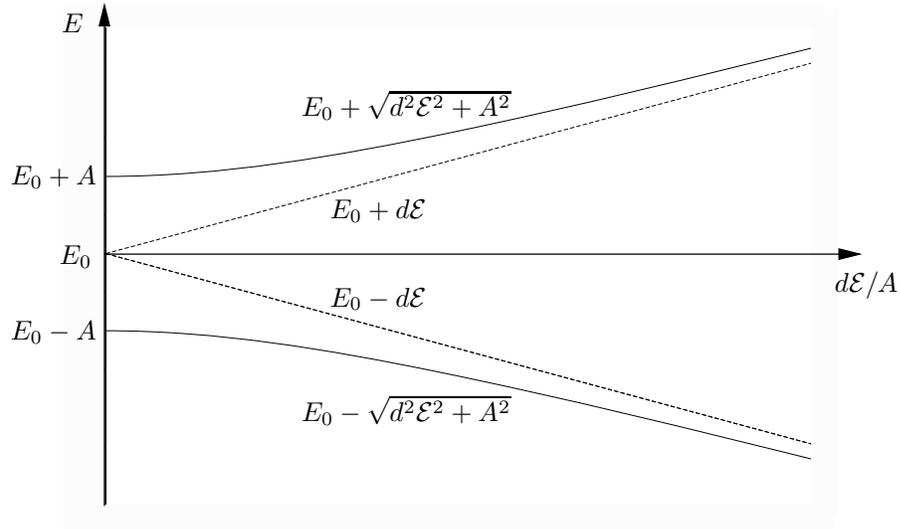
$$-\vec{D} \rightarrow \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} \quad -\vec{D} \cdot \vec{\mathcal{E}} \rightarrow \begin{pmatrix} d\mathcal{E} & 0 \\ 0 & 0 - d\mathcal{E} \end{pmatrix}$$

Ceci correspond bien au schéma : en effet, l'énergie de l'état $|\varphi_1 \rangle$ est $+d\mathcal{E}$ car le moment dipolaire est antiparallèle au champ, et celle de l'état $|\varphi_2 \rangle$ est $-d\mathcal{E}$ car le moment dipolaire est parallèle au champ. En dernier ressort, la forme matricielle de ce moment dipolaire est justifiée par l'accord avec l'expérience. Le hamiltonien prend donc la forme

$$H = \begin{pmatrix} E_0 + d\mathcal{E} & -A \\ -A & E_0 - d\mathcal{E} \end{pmatrix}$$

Nous examinons d'abord le cas d'un champ électrique statique. Le hamiltonien est alors indépendant du temps. Le calcul des valeurs propres est immédiat

$$\begin{vmatrix} E_0 + d\mathcal{E} - E & -A \\ -A & E_0 - d\mathcal{E} - E \end{vmatrix} = (E - E_0)^2 - (d\mathcal{E})^2 - A^2$$



soit

$$E_{\pm} = E_0 \mp \sqrt{A^2 + (d\mathcal{E})^2}$$

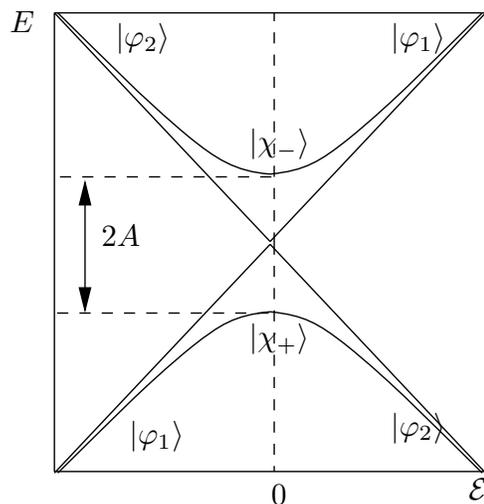
Ces valeurs propres sont représentées sur la figure en fonction de E . Si $d\mathcal{E} \gg A$, les énergies sont $\simeq E_0 \pm d\mathcal{E}$ et les vecteurs propres correspondants approximativement $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$. En pratique on se trouve dans le cas opposé : $d\mathcal{E} \ll A$. On peut alors développer la racine carrée

$$E_{\pm} \simeq E_0 \mp A \mp \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{E}^2}{A}$$

À des termes d'ordre $d\mathcal{E}/(2A)$ près, les vecteurs propres sont $|\chi_+\rangle$ et $|\chi_-\rangle$. Si le champ électrique n'est pas uniforme, la molécule sera soumise à une force

$$\vec{F}_{\pm} = -\vec{\nabla} E_{\pm} = \pm \frac{d^2}{2A} \vec{\nabla} \mathcal{E}^2$$

Comme dans l'expérience de Stern-Gerlach, on pourra séparer expérimentalement les états propres $|\chi_{\pm}\rangle$ du hamiltonien en utilisant un champ électrique inhomogène.



Le schéma de niveaux que nous venons de trouver est très général : il met en évidence le phénomène de répulsion des niveaux. Si $d\mathcal{E} \gg A$, les états propres du hamiltonien sont $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$. Pour $E = 0$, ces deux niveaux devraient se croiser et échanger leur stabilité. Il n'en est rien, à cause de la valeur non nulle de A , qui entraîne que les deux niveaux ne se croisent pas.

Supposons maintenant que le champ électrique est un champ oscillant

$$\mathcal{E}(t) = E_0 \cos \omega t = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

Le hamiltonien dépend explicitement du temps. Il sera commode de prendre comme vecteurs de base les états stationnaires $|\chi_+\rangle$ et $|\chi_-\rangle$ du hamiltonien, plutôt que $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$. Le hamiltonien devient dans cette nouvelle base

$$H(t) = \begin{pmatrix} E_0 - A & d\mathcal{E}(t) \\ d\mathcal{E}(t) & E_0 + A \end{pmatrix} = E_0 I + H_0 + W(t)$$

Ce hamiltonien est manifestement très semblable au précédent, et nous pourrions utiliser les mêmes techniques pour résoudre l'équation d'évolution. Toutefois, afin d'illustrer l'utilisation du point de vue de l'interaction, nous allons plutôt choisir ce point de vue en prenant pour hamiltonien H_0

$$H_0 = -A\sigma_z = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z$$

Nous avons posé $\omega_0 = 2A/\hbar$, qui représente physiquement la fréquence angulaire $\simeq 1.5 \times 10^{12}$ rad.s⁻¹ d'une onde électromagnétique émise lorsque la molécule passe du niveau excité d'énergie ($E_0 + A$) au niveau fondamental d'énergie ($E_0 - A$) : $2A$ est l'énergie du photon émis dans cette transition. La fréquence ω_0 est à nouveau appelée fréquence de résonance. nous appelons $|\tilde{\varphi}(t)\rangle$ le vecteur d'état dans le point de vue de l'interaction

$$|\tilde{\varphi}(t)\rangle = e^{iH_0 t} |\varphi(t)\rangle = e^{-i\hbar\omega_0 \sigma_z t} |\varphi(t)\rangle \quad |\tilde{\varphi}(t=0)\rangle = |\varphi(t=0)\rangle$$

Nous voyons que nous avons choisi un référentiel tournant dans le sens rétrograde avec la vitesse angulaire ω_0 , et non ω . Les deux référentiels tournants coïncident à la résonance. Pour transformer le terme d'interaction W , nous récrivons d'abord

$$W(t) = d\mathcal{E}_0(\sigma_+ + \sigma_-) \cos \omega t = \frac{1}{2} d\mathcal{E}_0 [\sigma_+ e^{i\omega t} + \sigma_+ e^{-i\omega t} + \sigma_- e^{i\omega t} + \sigma_- e^{-i\omega t}]$$

et nous utilisons l'analogie précédent

$$\tilde{\sigma}_{\pm}(t) = e^{\mp i\omega_0 t} \sigma_{\pm}$$

pour obtenir

$$W(t) = \frac{1}{2} d\mathcal{E}_0 [\sigma_+ e^{i\delta t} + \sigma_+ e^{-i\delta t} + \sigma_- e^{-i(\omega+\omega_0)t} + \sigma_- e^{i(\omega+\omega_0)t}]$$

À la résonance, les deux premiers termes du crochet redonnent le résultat de la RMN, mais deux termes supplémentaires ont fait leur apparition. En fait, ceci est dû au choix d'une polarisation linéaire pour $\vec{\mathcal{E}}$, car dans le cas d'une polarisation circulaire, nous serions retombés sur les équations. Dans le cas de la RMN, nous aurions également vu apparaître ces termes supplémentaires si nous avions choisi un champ de radiofréquences \vec{B}_1 orienté suivant un axe fixe

$$\vec{B}_1(t) = 2\hat{x}B_1 \cos \omega t$$

Ces termes supplémentaires peuvent être négligés si deux conditions sont réalisées.

- La perturbation apportée par le champ électrique est faible : $d\mathcal{E}_0 \ll A$, ou de façon équivalente, $d\mathcal{E}_0/\hbar \ll \omega_0$. La fréquence de Rabi est cette fois la quantité $\omega_1 = d\mathcal{E}_0/\hbar$. La condition de champ faible est donc aussi $\omega_1 = d\mathcal{E}_0/\hbar$, ce qui est presque toujours réalisé en pratique.

- La deuxième hypothèse est que la fréquence du champ électrique soit proche de la résonance : $\omega \simeq \omega_0$, condition qui s'exprime en fonction du désaccord $\delta = (\omega - \omega_0)$ et qui s'écrit plus précisément $|\delta| \ll \omega_0$. Dans ces conditions, les termes en $\exp[\pm i(\omega + \omega_0)t]$ varient très rapidement par rapport aux termes en $\exp(\pm i\delta t)$ et leur effet moyenné dans le temps est négligeable.

Si ces deux conditions sont vérifiées, on peut alors négliger les termes en $\exp[\pm i(\omega + \omega_0)t]$. Cette approximation est appelée approximation séculaire, et le hamiltonien dans le point de vue de l'interaction est

$$\widetilde{W}(t) = \frac{1}{2} \hbar \omega_1 [\sigma_+ e^{i\delta t} + \sigma_- e^{-i\delta t}]$$

$\widetilde{W}(t)$ est indépendant du temps à la résonance

$$\widetilde{W}_{res}(t) = \frac{1}{2} \hbar \omega_1 \sigma_x$$

Plaçons-nous exactement à la résonance en prenant la fréquence du champ électrique égale à la fréquence de la transition : $\omega = \omega_0$. Supposons par exemple qu'au temps $t = 0$ la molécule se trouve dans l'état $|\chi_- \rangle$ d'énergie $(E_0 + A)$. Pour calculer la probabilité p_{\pm} de trouver au temps t la molécule dans l'état $|\chi_{\pm} \rangle$, il suffit de transposer

$$p_- = |\langle \chi_- | \varphi(t) \rangle|^2 = |c_-(t)|^2 = \cos^2 \left(\frac{\omega_1 t}{2} \right)$$

$$p_+ = |\langle \chi_+ | \varphi(t) \rangle|^2 = |c_+(t)|^2 = \sin^2 \left(\frac{\omega_1 t}{2} \right)$$

La molécule passe de l'état $|\chi_- \rangle$ à l'état $|\chi_+ \rangle$ avec une fréquence angulaire $\omega_1/2 = d\mathcal{E}_0/(2\hbar)$.

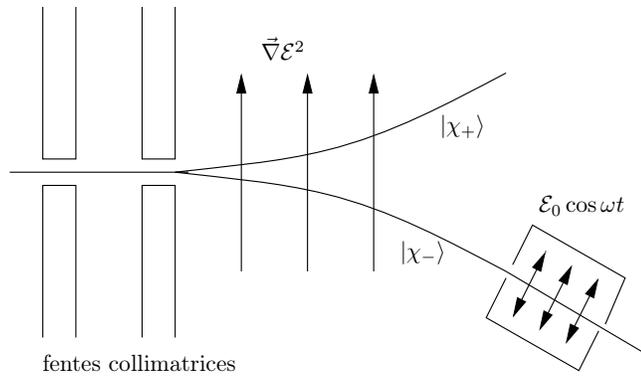
Après avoir mis la molécule dans l'état $|\chi_- \rangle$ grâce au filtrage décrit dans la sous-section précédente, on la fait passer dans une cavité où règne un champ oscillant à la fréquence de résonance. La molécule franchit la cavité en un temps T ; si ce temps est ajusté de sorte que

$$\frac{d\mathcal{E}_0 T}{2\hbar} = \frac{\pi}{2}$$

à la sortie de la cavité toutes les molécules sont passées dans l'état $|\chi_+ \rangle$. Par conservation de l'énergie, les molécules fournissent de l'énergie au champ électromagnétique : ce processus

est appelé émission stimulée (ou induite). Si les molécules s'étaient trouvées dans l'état $|\chi_+\rangle$, elles auraient absorbé de l'énergie en l'empruntant au champ électromagnétique pour passer dans l'état $|\chi_-\rangle$, processus appelé absorption stimulée.

Le processus d'émission stimulée est un processus susceptible d'amplifier un champ électromagnétique, pourvu que l'on soit capable de produire les molécules dans un état excité, c'est-à-dire d'obtenir une inversion de population. Le dispositif expérimental représenté schématiquement sur la figure réalise cette amplification : les molécules sélectionnées dans l'état $|\chi_-\rangle$ traversent une cavité où règne un champ électrique oscillant à la fréquence de résonance et de longueur convenablement ajustée. Ce dispositif est un prototype de maser.



43.2.3 Transitions hors résonance

Nous nous plaçons maintenant hors résonance : $\omega \simeq \omega_0$ mais $\omega \neq \omega_0$, et nous partons par exemple au temps $t = 0$ d'une molécule dans l'état $|\chi_+\rangle$. Nous souhaitons calculer la probabilité $p(\omega; t)$ de trouver la molécule dans l'état $|\chi_-\rangle$ au temps t . À l'approximation séculaire, la résolution des équations d'évolution donne le résultat que nous écrivons sous la forme développée

$$p(\omega; t) = \frac{\omega_1^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2} \sin^2 \left(\frac{t}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2} \right)$$

Rappelons que la fréquence de Rabi $\omega_1 = d\mathcal{E}_0/\hbar$. Bien que nous ayons été capables d'écrire une solution exacte, il est utile de donner une solution approchée simple des équations d'évolution lorsque la condition

$$\frac{d\mathcal{E}_0 t}{\hbar} \ll 1 \quad t \ll \frac{\hbar}{d\mathcal{E}_0} = \tau_2$$

est satisfaite, c'est-à-dire pour des temps suffisamment courts. L'intérêt de cette solution approchée est qu'elle se retrouve dans de nombreux problèmes qui ne peuvent pas être résolus exactement et elle prépare le terrain pour le chapitre. Nous avons à $t = 0$, pour les composantes $\tilde{c}_\pm(t)$ de $|\tilde{\varphi}(t)\rangle$

$$\tilde{c}_+ = 1 \quad \tilde{c}_- = 0$$

Nous nous intéressons à un processus où l'absorption de rayonnement électromagnétique permet de passer du niveau fondamental au niveau excité. Dans la résolution des équations d'évolution, nous pouvons supposer $\tilde{c}_+ \simeq 1$: en effet, \tilde{c}_+ n'a pas le temps de varier de façon appréciable. La solution approximative de l'équation donnant \tilde{c}_- est alors évidente

$$\tilde{c}_- \simeq \frac{\omega_1}{2i} \int_0^t dt' \exp[-i(\omega - \omega_0)t'] = -\frac{\omega_1}{2} \left[\frac{1 - \exp[-i(\omega - \omega_0)t]}{\omega - \omega_0} \right]$$

ce qui donne pour la probabilité de transition à une fréquence ω ,

$$p(\omega; t) = |\tilde{c}_-|^2 = \frac{1}{4} \omega_1^2 t^2 \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)t/2]}{[(\omega - \omega_0)t/2]^2}$$

Il semble donc que $p(\omega; t) \propto t^2$ pour $|\delta|t \ll 1$, mais ceci est dû au fait que le spectre de fréquences de l'onde électromagnétique contient une fréquence unique ω , ce qui est irréaliste. En réalité, on a toujours un spectre continu de fréquences, et nous allons en tenir compte. Le rapport entre ce résultat et celui obtenu à la résonance est

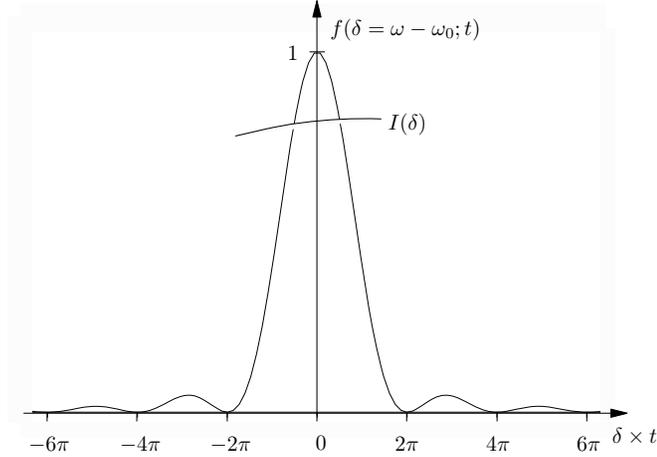
$$\frac{p(\omega; t)}{p(\omega_0; t)} = f(\omega - \omega_0; t) = \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)t/2]}{[(\omega - \omega_0)t/2]^2}$$

La fonction $f(\omega - \omega_0; t)$ est tracée sur la figure en fonction de ω . Elle présente un pic aigu à $\omega = \omega_0$, de largeur $\sim 2\pi/t$.

Compte tenu de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \pi$$

l'aire sous la courbe est $2\pi/t$ et $(\omega - \omega_0; t)$ est approximativement un delta de Dirac



$$\frac{p(\omega; t)}{p(\omega_0; t)} \simeq \frac{2\pi}{t} \delta(\omega - \omega_0)$$

Ces résultats nous permettent de calculer le taux de transition de l'état $|\chi_+ \rangle$ vers l'état $|\chi_- \rangle$ dû à l'absorption de rayonnement électromagnétique par la molécule dans son état fondamental. Le flux d'énergie incident \mathcal{I} d'une onde électromagnétique est donné par le vecteur de Poynting $\vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{B}}$

$$\mathcal{I} = \langle \epsilon_0 c^2 \vec{\mathcal{E}} \wedge \vec{\mathcal{B}} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2$$

où $\langle \bullet \rangle$ représente une moyenne temporelle. Dans ces conditions

$$p(\omega; t) = \left(\frac{d\mathcal{E}_0}{2\hbar} \right)^2 t^2 f(\omega - \omega_0; t) = 2\pi \left(\frac{d^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2 c} \right) \mathcal{I} f(\omega - \omega_0; t)$$

Ainsi que nous l'avons déjà signalé, la fréquence du champ électrique n'est pas exactement fixée, mais s'étale sur un spectre de fréquences $\Delta\omega$. Soit $\mathcal{I}(\omega)$ l'intensité par unité de fréquence et supposons que $\Delta\omega \gg \pi/t$: la probabilité de transition est alors

$$p(t) = 2\pi \left(\frac{d^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2 c} \right) t^2 \int_0^\infty d\omega \mathcal{I}(\omega) f(\omega - \omega_0; t) \simeq 4\pi^2 \left(\frac{d^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2 c} \right) \mathcal{I}(\omega_0) t$$

Le fait remarquable est que $p(t)$ est proportionnel à t (et non à t^2 !), et $p(t)/t$ peut s'interpréter comme une probabilité de transition par unité de temps Γ

$$\Gamma = \frac{1}{t} p(t) = 4\pi^2 \left(\frac{d^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 c} \right) \mathcal{I}(\omega_0)$$

La proportionnalité de la probabilité de transition à d^2 et à \mathcal{I} est une caractéristique de la plupart des processus d'absorption du rayonnement électromagnétique par un système atomique ou moléculaire. Les conditions de validité de l'approximation sont (i) $t \gg \tau_1 \sim 1/\Delta\omega$ et (ii) $p(t) \ll 1$ c'est-à-dire $t \ll \tau_2$. Il faut donc encadrer le temps t par

$$\tau_1 \sim \frac{1}{\Delta\omega} \ll t \ll \tau_2 \sim \frac{\hbar}{d\mathcal{E}_0} \frac{1}{\omega_1}$$

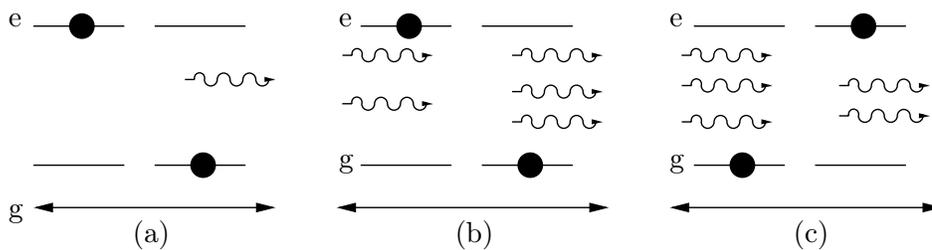
Cette inégalité implique $\omega_1 \ll \Delta\omega$.

43.3 Atome à deux niveaux

43.3.1 Absorption et émission des photons

Le calcul que nous venons de présenter a jeté les bases d'une théorie générale de l'absorption et de l'émission de rayonnement électromagnétique par un système atomique ou moléculaire, aux restrictions suivantes près.

- L'approximation par un système à deux niveaux doit être justifiée : ce sera le cas si l'on s'intéresse uniquement à des transitions entre deux niveaux séparés par une énergie $\hbar\omega_0$ et à un champ électromagnétique de fréquence $\omega \simeq \omega_0$, c'est-à-dire au voisinage de la résonance. Par convention un des deux états, celui de plus basse énergie, sera noté $|g\rangle$ (il s'agit souvent de l'état fondamental), et le second sera noté $|e\rangle$. Dans le cas d'un atome, cette approximation est appelée approximation de l'atome à deux niveaux, qui fournit un modèle de base pour la physique atomique et les lasers.



La transition doit être du type dipolaire électrique, c'est-à-dire contrôlée par l'élément de matrice de l'opérateur moment dipolaire électrique \vec{D} entre les deux niveaux, et la condition $\omega_1 \ll \omega_0$ doit être vérifiée.

-Le champ électromagnétique est considéré comme un champ classique. Le traitement que nous venons de donner est appelé semi-classique : l'atome est traité comme un système quantique, mais le champ reste classique. L'aspect photon du champ électromagnétique est donc ignoré, et on ne peut pas en principe rendre compte de l'émission spontanée de rayonnement par un atome dans un état excité : on peut espérer au mieux en donner un traitement heuristique.

- Les résultats doivent être modifiés pour tenir compte de la durée de vie finie de l'état excité.

Lorsqu'un atome à deux niveaux interagit avec un champ électromagnétique, en pratique aujourd'hui le champ d'un laser, la probabilité d'absorption se calcule selon le schéma, mais les ordres de grandeur sont tout à fait différents de ceux de la molécule d'ammoniac. En reprenant un exemple déjà mentionné, la différence d'énergie $\hbar\omega_0$ entre l'état fondamental et le premier niveau excité du rubidium est de 1.6 eV, correspondant à une longueur d'onde de 0.78 μm , à la limite de l'infrarouge. Cet ordre de grandeur est typique de la physique atomique : les transitions généralement utilisées sont dans le domaine visible, ou bien dans le proche ultraviolet ou le proche infrarouge.

Nous avons déjà souligné que l'émission spontanée n'était pas en principe décrite par le traitement semi-classique, puisque l'on passe d'un état initial à zéro photon à un état final à un photon : un photon est créé au moment de la désexcitation de l'atome. Seule une théorie quantique du champ électromagnétique permet de décrire l'émission spontanée de façon rigoureuse. Bien que notre traitement classique du champ électromagnétique ne nous autorise pas une interprétation en termes de photons, nous nous risquons néanmoins à décrire les processus en utilisant ce concept : par exemple nous interpréterons le gain d'énergie du champ comme une augmentation du nombre de photons dans la cavité. Le processus

$$|\chi_- \rangle + n \text{ photons} \rightarrow |\chi_+ \rangle + (n + 1) \text{ photons}$$

représente donc l'émission stimulée. L'absorption stimulée est le processus inverse

$$|\chi_+ \rangle + n \text{ photons} \rightarrow |\chi_- \rangle + (n - 1) \text{ photons}$$

Enfin, l'émission spontanée d'un photon se produit quand le niveau excité se désexcite en l'absence de champ électromagnétique

$$|\chi_- \rangle + 0 \text{ photon} \rightarrow |\chi_+ \rangle + 1 \text{ photon}$$

Ces processus sont représentés schématiquement sur la figure. Il faut bien faire la différence entre l'émission stimulée, qui est cohérente avec l'onde incidente et est proportionnelle à l'intensité incidente, et l'émission spontanée qui est aléatoire, sans relation de phase avec le champ appliqué et n'est pas influencée par les conditions externes.

La nécessité de l'émission spontanée a été démontrée pour la première fois par Einstein. Examinons une collection d'atomes à deux niveaux E_1 et E_2 , $E_1 < E_2$, placés dans une cavité à la température T . Il règne dans cette cavité un rayonnement donné par la loi de Planck. Si N est le nombre total d'atomes et $N_1(t)$, $N_2(t)$ le nombre d'atomes dans les états E_1 et E_2

$$N_1(t) + N_2(t) = N = \text{Cte}$$

en supposant que seuls les états E_1 et E_2 sont peuplés de façon appréciable. Les nombres $N_1(t)$ et $N_2(t)$ vérifient les équations cinétiques

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = (-AN_1 + BN_2)\epsilon(\omega)$$

où $\hbar\omega = E_2 - E_1$; $A\epsilon(\omega)$ est le taux de transition $E_1 \rightarrow E_2$ par unité de temps dû à l'absorption stimulée dans l'état E_1 et $B\epsilon(\omega)$ le taux de transition $E_2 \rightarrow E_1$ par unité de temps dû à l'émission stimulée. Ces taux sont proportionnels à la densité d'énergie $\epsilon(\omega)$. À l'équilibre

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0$$

et le rapport des populations est donné par la loi de Boltzmann d'où

$$\frac{A}{B} = \exp\left(-\frac{E_1 - E_2}{k_B T}\right)$$

Ce résultat n'est pas physiquement acceptable, car A et B ne peuvent dépendre que des caractéristiques de l'interaction du champ électromagnétique avec l'atome, et non de la température. Il faut corriger pour tenir compte de l'émission spontanée, indépendante de $\epsilon(\omega)$

$$\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = (-AN_1 + BN_2)\epsilon(\omega) + B'N_2$$

La condition $dN_1/dt = 0$ jointe à la condition d'équilibre de Boltzmann donne pour $\epsilon(\omega)$

$$\epsilon(\omega) = \frac{B'}{AN_1/N_2 - B} = \frac{B'}{A \exp\left(\frac{\hbar\omega}{K_B T} - B\right)}$$

Par comparaison montre que $A = B$ et que

$$\frac{B'}{A} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}$$

On remarque que l'on aurait aussi bien pu utiliser dans le raisonnement la densité de photons $n(\omega) = \epsilon(\omega)/\hbar\omega$ ou toute quantité proportionnelle à la densité d'énergie $\epsilon(\omega)$, au prix d'une simple redéfinition de A et B . Calculons explicitement B' ; $\epsilon(\omega)$ est une densité d'énergie par unité de fréquence, et l'intensité $\mathcal{I}(\omega)$ est reliée à $\epsilon(\omega)$ par

$$\mathcal{I}(\omega) = c\epsilon(\omega)$$

ce qui donne la probabilité d'absorption par unité de temps

$$A = 4\pi^2 c^2 \left(\frac{d^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 c} \right)$$

Pour obtenir la probabilité d'émission spontanée B' , il faut prendre en compte une moyenne angulaire. Supposons que le dipôle oscille dans une direction fixe, par exemple Oz . Le produit scalaire $\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ fait intervenir la polarisation $\vec{e}_s(\vec{k})$ du photon émis de vecteur d'onde \vec{k} ; $s = 1, 2$ est un indice de polarisation. La polarisation est orthogonale au vecteur d'onde \vec{k} du photon, $\vec{e}_s \cdot \vec{k} = 0$, et on doit intégrer sur tous les angles d'émission. Il faut donc prendre la moyenne

$$\langle (\vec{z} \cdot \vec{e}_s(\vec{k}))^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_k (\vec{z} \cdot \vec{e}_s(\vec{k}))^2$$

Comme \vec{e}_1, \vec{e}_2 et \vec{k} forment un trièdre

$$(\vec{z} \cdot \vec{e}_1)^2 + (\vec{z} \cdot \vec{e}_2)^2 = 1 - (\vec{z} \cdot \vec{k})^2 = \sin^2 \theta$$

où θ est l'angle entre Oz et \vec{k} . La moyenne angulaire vaut

$$\langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_k \sin^2 \theta = \frac{1}{3}$$

Remplaçant ω par ω_0 , on en déduit la probabilité d'émission spontanée pour une transition dipolaire électrique

$$B' = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} A = \frac{4\omega_0^3}{3\pi^2 c^3} \left(\frac{d^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \right)$$

Dans le cas de la physique atomique, un ordre de grandeur du moment dipolaire d est $d \sim q_e a$, où a est le rayon de l'orbite électronique, et on a l'estimation

$$B' \sim \alpha \frac{a^2 \omega_0^3}{3c} \sim \alpha^5 \left(\frac{m_e c^2}{\hbar} \right)$$

où $\alpha = q_e^2 / (4\hbar\epsilon_0 c)$ est la constante de structure fine. Cette estimation est en accord avec ce qui était fondé sur le calcul classique du rayonnement. Bien que la RMN et les atomes à deux niveaux exhibent des analogies remarquables, et bien que le traitement mathématique soit identique, il n'en existe pas moins une importante différence de principe entre les deux cas. La mesure en RMN n'est pas une mesure projective, mais elle utilise un signal collectif construit par un nombre macroscopique ($\sim 10^{20}$) de molécules. L'énergie du photon émis dans la transition entre les deux niveaux Zeeman du spin nucléaire, de l'ordre de $1 \mu\text{eV}$, est bien trop faible pour être détectée dans une molécule isolée, et une autre conséquence est que l'émission spontanée est négligeable, en raison de sa dépendance en ω_0^3 . Le détecteur RMN est une bobine enroulée autour de l'échantillon. L'aimantation tournante induit une force électromotrice qui est détectée dans la bobine, et cette détection est un processus qui se décrit classiquement.

Capacités thermiques : description, interprétations microscopiques



Bibliographie

- *Classical and Statistical Thermodynamics*, Carter, Prentice-Hall
- *Thermodynamique, fondements et applications*, Pérez, Dunod
- *Thermodynamique statistique, Equilibre et hors équilibre*, Le Bellac, Dunod

Prérequis :

- Théorie cinétique des gaz parfaits
- 1er et 2ème principe de la Thermodynamique
- Facteur de Boltzmann
- Définition de la capacité thermique en thermodynamique classique
- Etude de la chaîne linéaire infinie d'oscillateurs harmoniques

44.1 Rappels de thermodynamique classique

44.1.1 La capacité thermique

Les capacités thermiques à volume constant C_V et à pression constante C_P d'un corps sont définies respectivement à partir de l'énergie interne U et de l'enthalpie H du corps :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad \text{et} \quad C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

T étant la température du système, V son volume et P sa pression.

Expérimentalement, il est en général plus facile de travailler à pression constante qu'à volume constant (surtout pour les liquides et les solides). Ainsi, C_P expérimentalement et C_V est déduite par la relation de Mayer :

$$C_P - C_V = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

On rappelle que cette différence, toujours positive, peut être exprimée en fonction des coefficients thermo-élastiques accessibles par l'expérience.

Dans le cas d'un gaz parfait, on a :

$$C_P - C_V = nR$$

44.1.2 Loi de distribution de Boltzmann

Probabilité et fonction de partition

Considérons un système quelconque, microscopique ou macroscopique, en contact avec un thermostat à la température T .

1er cas : Niveaux d'énergie discrets ϵ_s

La probabilité de trouver le système dans un état s d'énergie ϵ_s est :

$$P_s = \frac{1}{Z} \exp(-\beta \epsilon_s) \quad \text{avec} \quad Z = \sum_s \exp(-\beta \epsilon_s)$$

Si l'on désigne par g_i la dégénérescence du niveau d'énergie ϵ_i , on peut encore écrire :

2ème cas : Répartition continue de l'énergie $\epsilon = \epsilon(x, p_x)$:

La probabilité de trouver le système dans l'état x, p_x , à $dx dp_x$ près vaut :

$$dP = \frac{1}{Z} \exp(-\beta\epsilon) dx dp_x \quad \text{avec} \quad Z = \int \exp(-\beta\epsilon) dx dp_x$$

Théorème de l'équipartition de l'énergie

Supposons que l'énergie possède un terme quadratique par rapport à une coordonnée de l'espace des phases :

$$\epsilon = aX^2 + \epsilon'$$

où ϵ' est fonction de toutes les autres variables de l'espace des phases.

La valeur moyenne du terme quadratique s'écrit :

$$\overline{aX^2} = \int aX^2 dP = \frac{1}{Z} \int aX^2 \exp(-\beta\epsilon) dX = \frac{\int aX^2 \exp(-\beta aX^2) dX}{\int \exp(-\beta aX^2) dX} = -\frac{\partial \ln I}{\partial \beta}$$

avec

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta aX^2) dX = \sqrt{\frac{\pi}{\beta a}}$$

D'où

$$\overline{aX^2} = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2} k_B T$$

Pour tout système en contact avec un thermostat à la température T , la valeur moyenne de toute contribution quadratique d'un paramètre dans l'expression de l'énergie vaut $\frac{1}{2} k_B T$.

On verra dans la suite de cette leçon l'intérêt pratique de ce théorème dans le calcul de capacité thermique de certains systèmes.

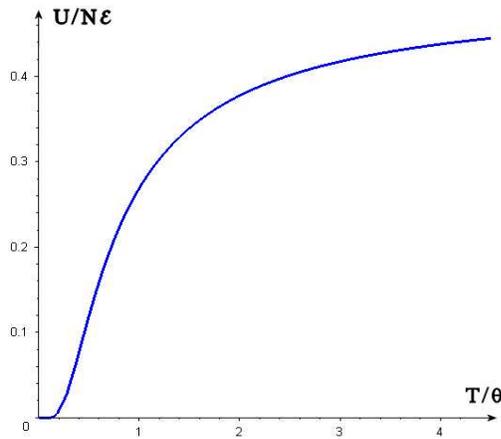
44.1.3 Le système à deux niveaux

L'étude d'un système à deux niveaux va nous permettre d'illustrer, sur un exemple simple, la notion de capacité thermique.

On considère un système composé d'un grand nombre de molécules N , chacune possédant deux niveaux d'énergie $\epsilon_1 = 0$ et $\epsilon_2 > 0$. Ce système obéit à la statistique de Maxwell-Boltzmann et est en équilibre avec un thermostat à la température thermodynamique T .

Nous pouvons calculer l'énergie interne U :

$$U = N\bar{\epsilon} = \frac{N}{Z} \sum_s \exp(-\beta\epsilon_s) = \frac{N\epsilon}{1 + \exp(-\beta\epsilon)}$$



On introduit une température caractéristique du système. $\theta = \epsilon/k$.

- Si la température du système est faible ($T \ll \theta$), toutes les molécules se trouvent sur le niveau d'énergie le plus bas : une petite variation de T ne modifie pas sensiblement la répartition, ni donc l'énergie interne du système. Sa capacité thermique est pratiquement nulle : $C \sim 0$.
- Si la température du système est élevée ($T \gg \theta$), les molécules se répartissent également sur les deux niveaux : le système est saturé. Sa capacité thermique est donc faible : $C \sim 0$.

Pour tout système en contact avec un thermostat à la température T , la valeur moyenne de toute contribution quadratique d'un paramètre dans l'expression de l'énergie vaut $\frac{1}{2}k_B T$.

- La capacité thermique est maximale lorsque l'énergie thermique $k_B T$ est de l'ordre de l'énergie caractéristique ϵ du système. L'énergie interne du système varie beaucoup pour une petite variation de température.

En calculant la capacité thermique du système à partir de sa définition $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$, on aurait pu retrouver les variations que l'on vient de déterminer de façon plus qualitative.

Du fait de la définition de C à partir de l'énergie interne, on voit que l'on pourra calculer la capacité thermique d'un système si l'on est capable d'évaluer son énergie interne.

44.2 Capacité thermique des gaz

44.2.1 Théorème d'équipartition de l'énergie

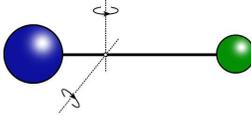
Dans le cas d'un gaz parfait, l'énergie d'une particule se réduit à son énergie cinétique. Si celle-ci est composée de f termes quadratiques, alors l'énergie interne U du gaz vaut :

$$U = N\bar{\epsilon} = \frac{f}{2}Nk_B T = \frac{f}{2}nRT$$

D'où l'expression de la capacité thermique molaire à volume constant et du rapport $\gamma = C_P/C_V$:

$$c_{Vm} = \frac{f}{2}R \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{f+2}{f}$$

44.2.2 Capacité thermique molaire des gaz parfaits

	Energie d'une particule (nombre de termes quadratiques)	$f, c_{v,m}, \gamma = \frac{C_P}{C_V}$
GP monoatomique	<ul style="list-style-type: none"> Energie cinétique de translation (3) : $\varepsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}$	$f = 3$ $c_{v,m} = \frac{3}{2}R \approx 12,5 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ $\gamma = \frac{5}{3} \approx 1,67$
GP formé de molécules diatomiques rigides	<ul style="list-style-type: none"> Energie cinétique de translation (3) Energie cinétique de rotation autour de deux axes perpendiculaires à l'axe de la molécule (2) 	$f = 5$ $c_{v,m} = \frac{5}{2}R \approx 20,8 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ $\gamma = \frac{7}{5} = 1,4$
GP formé de molécules diatomiques non rigides	<ul style="list-style-type: none"> Energie cinétique de translation (3) Energie cinétique de rotation (2) Energie cinétique et potentielle de vibration (2) 	$f = 7$ $c_{v,m} = \frac{7}{2}R \approx 29,1 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ $\gamma = \frac{9}{7} \approx 1,28$

Remarque : La température caractéristique de rotation est inversement proportionnelle au moment d'inertie : ainsi, pour une molécule diatomique, la rotation selon l'axe de la molécule correspond à une énergie d'excitation très importante comparée à celles des rotations selon des axes perpendiculaires. C'est pourquoi on ne compte que deux termes quadratiques de rotation.

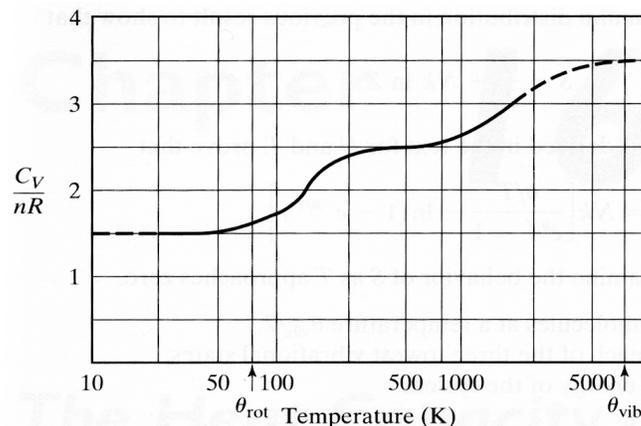
44.2.3 Données expérimentales

La théorie classique précédente donne de bons résultats pour les capacités thermiques des gaz monoatomiques et diatomiques. Expérimentalement, on détermine le rapport $\gamma = C_P/C_V$ en mesurant la vitesse du son dans le gaz (voir tableau).

En réalité, pour des molécules diatomiques, γ varie avec la température. On donne en exemple la courbe donnant en fonction de la température (voir graphe, courbe théorique). La théorie classique prédit des capacités C_V et C_P constante et ne rend donc pas compte de ces variations. Une description quantique est alors nécessaire. Nous ne développerons pas cette théorie ici, et nous nous contenterons de donner une explication qualitative à ces variations :

- Pour une température suffisamment basse (qui dépend de la nature du gaz), les molécules n'ont que le mouvement de leurs centres de masse et donc le gaz se comporte comme un gaz monoatomique. Les autres degrés de liberté sont gelés.
- Lorsque l'on augmente la température, on excite progressivement les états de rotation (θ_{rot}) et de vibration (θ_{vib}). A température ambiante, seuls les états de rotation sont en général excités ($\theta_{rot} \sim$ quelques 10 K et $\theta_{vib} \gg 300$ K), ainsi $\gamma = 1,4$.

Gaz	γ	Modèle
He	1,66	GP monoatomique
Ar	1,66	GP monoatomique
H ₂	1,41	GP diatomique : translation + rotation
Air	1,40	GP diatomique : translation + rotation



44.3 Capacité thermique des solides

44.3.1 Loi de Dulong et Petit

En 1819, les physiciens P. Dulong et A. Petit observèrent que la capacité thermique molaire de pratiquement tous les solides est environ égale à $25 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ à température ambiante.

Remarque : La grandeur directement accessible à la mesure est la capacité thermique massique des corps. Dulong et Petit ont remarqué qu'en multipliant cette quantité par la masse molaire du corps considéré, on obtenait pratiquement une constante.

L'interprétation est immédiate si l'on adopte comme modèle de solide une assemblée de N oscillateurs harmoniques indépendants pouvant osciller dans trois directions orthogonales. En effet, pour tout oscillateur à un seul degré de liberté, il y a deux termes quadratiques dans l'expression de l'énergie. Ainsi, d'après le théorème d'équipartition de l'énergie, la capacité thermique molaire à volume constant vaut :

$$c_{Vm} = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3R \approx 24,94 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

Cependant, les mesures montrent que la capacité thermique des solides varie avec la température et tend vers 0 lorsque T décroît (en accord avec le 3ème principe de la thermodynamique). Ce comportement ne peut pas être expliqué par la disparition de degrés de liberté lorsque T diminue, comme précédemment dans le cas du gaz diatomique. En effet, la capacité thermique molaire varie graduellement et ne présente pas de sauts abrupts multiples de $R/2$. La statistique quantique est alors nécessaire.

44.3.2 Comportement à basse température

Modèle d'Einstein (1907)

En 1907, Einstein a établi une expression de la capacité thermique des solides cristallins en bon accord avec l'effondrement à basse température observé expérimentalement. Le modèle adopté est proche de celui utilisé pour vérifier la loi de Dulong et Petit.

Les atomes du solide sont considérés comme des oscillateurs harmoniques indépendants, ayant tous la même pulsation propre et possédant 3 directions de vibrations orthogonales. Supposer une pulsation propre commune pour tous les oscillateurs (ce qui est différent de ce que l'on a vu pour les oscillateurs couplés) est en fait une hypothèse de champ moyen.

L'énergie de chaque oscillateur est quantifiée :

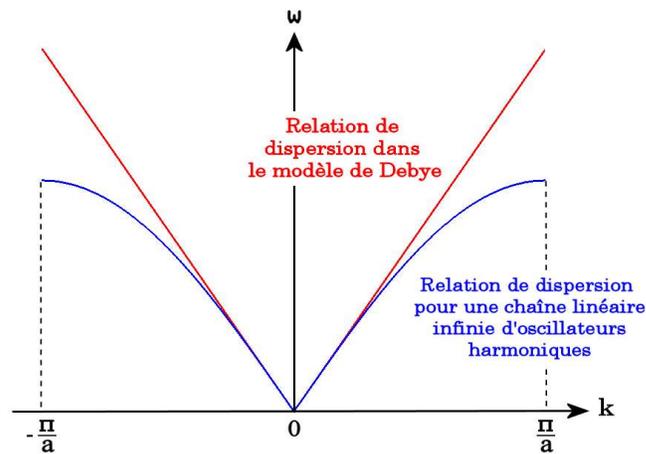
$$\epsilon_{n_x, n_y, n_z} = (n_x + n_y + n_z) \hbar \omega$$

Cependant, la décroissance exponentielle de la capacité thermique obtenue avec ce modèle ne coïncide pas avec les résultats expérimentaux à très basse température : en effet, C varie comme T^3 pour les solides non métalliques.

On retrouve à basse température le comportement d'un système à deux niveaux : des niveaux d'énergie quantifiés ne pourront donc pas rendre compte de la variation en T^3 à basse température : il est nécessaire d'avoir un continuum d'énergie.

Modèle de Debye (1912)

Pour rendre compte fidèlement de la décroissance en T^3 de la capacité thermique, le physicien néerlandais P. Debye a affiné le modèle d'Einstein. Il s'appuya sur l'analogie avec le rayonnement électromagnétique, formant un gaz de photons, dont on sait que l'énergie est proportionnelle à T^4 (loi de Stephan-Boltzmann, 1884). Dans le modèle de Debye, le solide est considéré comme un gaz de phonons, quasiparticules associées aux excitations élémentaires du solide.



Du point de vue ondulatoire, ces phonons peuvent être vus comme des quanta des ondes acoustiques se propageant dans le solide. En traitant la chaîne linéaire infinie d'oscillateurs harmonique dans une précédente leçon, nous avons établi la relation de dispersion (k). Dans son modèle, Debye fait l'approximation que la relation reste linéaire quelle que soit la pulsation :

$$\omega(k) = c_s k$$

c_s étant la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans le solide.

Debye justifie cette hypothèse en remarquant que seuls les phonons de basse énergie contribuent à basse température :

Soit $k_B T \approx 0.9$ meV pour $T = 10$ K. On recherche le vecteur d'onde correspondant à cette énergie et on la compare au vecteur d'onde limitant la première zone de Brillouin.

$$\frac{k}{\pi/a} = \frac{k_B T / \hbar c_s}{\pi/a} \approx 0,17$$

L'hypothèse de Debye est donc bien vérifiée à basse température.

Comme il y a trois directions de polarisation (2 transversales, 1 longitudinale), le nombre de modes de vibrations $g(\omega)d\omega$ entre les pulsations ω et $\omega + d\omega$ vaut :

Le nombre total de modes de vibration étant fixé (égal à $3N$ où N est le nombre d'atomes), il existe alors une pulsation maximale ω_D définie par :

$$\int_0^{\omega_D} g(\omega)d\omega = 3 \frac{V}{(2\pi)^3} d^3k = \frac{3V}{2\pi^2 c_s^3} \omega^2 d\omega$$

D'où

$$\omega_D = c_s \left(\frac{6\pi^2 N}{V} \right)^{1/3}$$

On définit alors une température θ_D caractéristique du solide, appelée température de Debye :

$$k_B \theta_D = \hbar \omega_D$$

On peut ainsi calculer l'énergie interne du solide en contact avec un thermostat T , en sommant les contributions des différents modes :

$$U = \int_0^{+\infty} \hbar \omega N(\omega) d\omega = \frac{3V}{2\pi^2 c_s^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\hbar \omega^3}{\exp(\beta \hbar \omega) - 1} d\omega$$

où $N(\omega) = \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega)-1}$ est le nombre de phonons à la pulsation, donnée par la distribution de Bose-Einstein.

En posant le paramètre sans dimension $x = \beta\hbar\omega$, on obtient :

$$U = \frac{3V}{2\pi^2 c_s^3 \hbar^3} (k_B T)^4 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{\exp x - 1} dx = 9Nk_B \theta_D \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{\exp x - 1} dx$$

— Dans le régime des hautes températures ($T \gg \theta_D$), on a :

$$\int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{\exp x - 1} dx \approx \int_0^{+\infty} x^2 dx = \frac{1}{3} \left(\frac{\theta_D}{T} \right)^3$$

Donc

$$U = 3Nk_B T \quad \text{et} \quad C_V = 3Nk_B = 3nR$$

On retrouve bien la loi de Dulong et Petit à la limite des hautes températures ($T \gg \theta_D$).

— Dans le régime des basses températures ($T \ll \theta_D$), on a :

$$\int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{\exp x - 1} dx \approx \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\exp x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

Donc

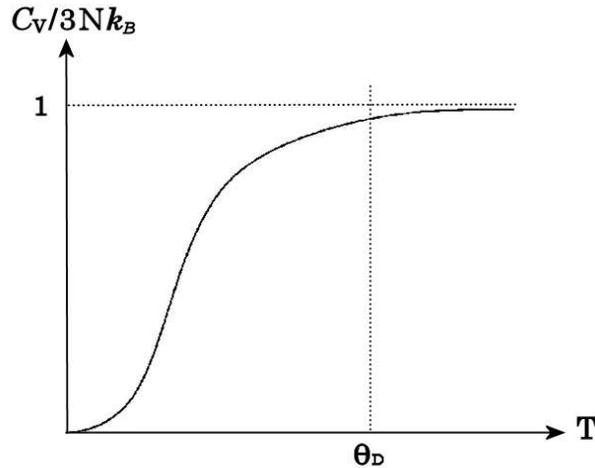
$$U = \frac{3\pi^4}{5} Nk_B \theta_D \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^4 \quad \text{et} \quad C_V = \frac{12\pi^4}{5} Nk_B \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3$$

On retrouve bien la dépendance en T^3 de la capacité thermique des solides à la limite des basses températures ($T \ll \theta_D$).

On peut voir la dépendance en température de la capacité thermique donnée par le modèle de Debye sur le graphe

On a rassemblé les valeurs de la température de Debye pour quelques solides :

	Cu	Ag	Al	C(g)	C(d)
θ_D (K)	343	262,2	428	420	2230



Modèle de Sommerfeld

Si le solide est métallique, avec des électrons libres, la capacité thermique, à basse température présente deux contributions, l'une en T^3 due aux phonons, et l'autre en T due aux électrons libres.

$$C^e = \gamma T$$

où γ est appelée constante de Sommerfeld.

La température caractéristique de la contribution électronique est la température dite de Fermi T_F . Pour les électrons de conduction dans un métal, $T_F \gg 300$ K ($T_F \approx 8.10^4$ K pour le cuivre).

La différence entre les variations de C à basse température due aux phonons et aux électrons est principalement due au fait que pour l'un on utilise la statistique de Bose-Einstein (les phonons sont des bosons) et pour l'autre la statistique de Fermi-Dirac (les électrons sont des fermions).

Conclusion :

La capacité thermique est avant tout une grandeur expérimentale. Elle permet de confronter les modèles microscopiques de la matière aux résultats expérimentaux.

Intérêt des mesures de capacité thermique à basse température dans l'étude des supraconducteurs, où les mesures de résistance électrique n'apportent rien sur la structure de la matière (la résistance nulle).

Leçon de physique n° 45

Paramagnétisme, ferromagnétisme : approximation du champ moyen



Bibliographie

- *Physique statistique*, Diu
- *Electromagnétisme 4*, Bertin, Faroux, Renault
- *Physique de l'état solide*, Kittel
- *Théorie du magnétisme*, Herpin

Prérequis :

- Définition de l'aimantation et de la susceptibilité magnétique
- Physique statistique dans l'ensemble canonique
- Quantification du moment cinétique en mécanique quantique, notion de spin, théorème de Wigner-Eckart

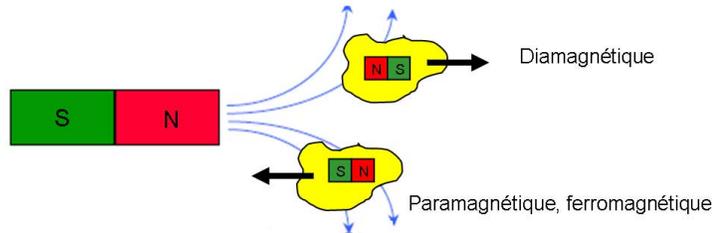
Introduction :

On s'intéresse ici au comportement magnétique des substances à l'état liquide ou solide.

En 1895, dans sa thèse, Pierre Curie effectue une étude expérimentale (donc macroscopique) systématique de l'évolution des propriétés magnétiques de diverses substances en fonction de la température. Résumons dans un tableau ces propriétés :

Substance	Ordre de grandeur de χ_m	Signe de χ_m	Dépendance de χ_m en fonction de T	Aimantation
Diamagnétique	Faible $\sim -10^{-5}/-7$	< 0	Aucune	Sens opposé de \vec{H}
Paramagnétique	Petit $\sim 10^{-3}/-5$	> 0	$\propto \frac{1}{T}$	Même sens que \vec{H}
Ferromagnétique	Grand $\sim 10^{3/6}$	> 0	$\exists T_C$, (température de Curie) tq si $T > T_C$, $\chi_m \propto \frac{1}{T-T_C}$	Existe même en l'absence de \vec{H}

Pour illustrer ce tableau, on peut faire le schéma suivant :



On peut aussi étudier la répartition de ces propriétés dans la classification périodique :

1																	2																		
H																	He																		
	Ferromagnetic										Antiferromagnetic																								
	Paramagnetic																Diamagnetic																		
3 Li	4 Be	5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne	11 Na	12 Mg	13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr		
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe	55 Cs	56 Ba	57 La	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra	89 Ac																58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu				

On constate alors que la plupart des éléments chimiques sont paramagnétiques, que les diamagnétiques se concentrent à droite de la classification et qu'il y a très peu de substances qui constituent des aimants permanents naturels (ferromagnétiques).

Nous allons décrire quelques modèles atomiques simples permettant d'expliquer ces propriétés macroscopiques différentes. Le diamagnétisme ne sera pas l'objet de cette leçon.

45.1 Origine du magnétisme microscopique : moments magnétiques

Les théories microscopiques que nous allons développer reposent sur l'existence permanente ou induite par le champ magnétique de moment magnétique dans la matière.

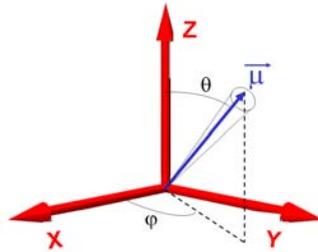
Pour un atome libre, il peuvent être dus :

1. au moment cinétique orbital \vec{L} des électrons par rapport au noyau,
2. au spin \vec{S} des électrons.

45.1.1 Moment magnétique d'origine orbital

Approche classique

On considère un atome du matériau décrit dans un premier temps par un modèle planétaire classique (modèle de Rutherford). On suppose le noyau atomique immobile et l'électron en mouvement circulaire uniforme autour du noyau.



Le moment cinétique de l'électron autour du noyau vaut :

$$\vec{L} = m\vec{r} \wedge \vec{v}$$

L'électron étant en mouvement, son orbite correspond à une boucle de courant : $i = \frac{dq}{dt} = -\frac{e}{T}$ avec $T = \frac{2\pi r}{v}$ période du mouvement dans l'ARQS. Ce dipôle magnétique est caractérisé par un moment magnétique $\vec{\mu}_L = iS\vec{n}$

$$\vec{\mu}_L = \gamma_e \vec{L}$$

avec $\gamma_e = \frac{-e}{2m}$ le rapport gyromagnétique de l'électron.

Pb : le théorème de Mlle Van Leuwen (1911) montre qu'il n'y a pas de magnétisme si l'on se contente d'une approche purement classique.

Approche quantique

Prenons en compte la quantification des orbites :

$$\|\vec{L}\| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

où $l \geq 0$ et $L_z = m_l \hbar$ avec $m_l \in [-l; l]$. Par analogie,

$$\vec{\mu}_z = m_l \gamma_e \hbar = -m_l \mu_B$$

avec $\mu_B = |\gamma_e| \hbar = \frac{e\hbar}{2m}$ est le magnéton de Bohr et vaut $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J.T}^{-1}$.

Rq : Le moment magnétique dû au mouvement orbital des protons dans le noyau vaudrait $\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p} = \frac{\mu_B}{1827}$ et sera donc négligé.

45.1.2 Moment magnétique dû au spin

1922 : l'expérience de Stern et Gerlach montre que des atomes de $l = 0$ sont quand même déviés par \vec{B} donc il existe un moment magnétique associé au moment cinétique intrinsèque de l'électron (le spin).

De plus $S_z = m_s \hbar$ avec pour l'électron $m_s = \pm \frac{1}{2}$.

On a pour le rapport gyromagnétique d'où l'expression du moment magnétique associé :

$$\mu_{S_z} = \gamma S_z = 2\gamma_e m_s \hbar = \pm \mu_B$$

45.1.3 Moment magnétique orbital

Le moment magnétique total doit prendre en compte les deux contributions évoquées ci-dessus. Le moment cinétique total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ est quantifié :

$$\|\vec{J}\| = \sqrt{j(j+1)}\hbar$$

où $j \geq 0$ et $J_z = m_j \hbar$ avec $m_l \in [-j, j]$. Le théorème de Wigner-Eckart permet de montrer que la projection du moment magnétique selon Oz vaut $\mu_z = -m_j g_j \mu_B$ où g_j appelé facteur de Landé s'exprime en fonction de l , s et j (équation de Landé).

45.2 Interprétation microscopique du paramagnétisme

En 1905, Paul Langevin explique le paramagnétisme par une théorie d'orientation qui inspira la théorie de Debye pour l'orientation des moments dipolaires dans un champ électrique.

Le paramagnétisme correspond à l'orientation des moments magnétiques permanents sous l'action d'un champ magnétique extérieur. Le paramagnétisme n'existe donc pas en l'absence de moment magnétique $\vec{\mu}$. Il n'existe ainsi que pour des atomes ou des ions à nombre impair d'électrons.

45.2.1 Modèle semi-classique de Langevin

Présentation

Si \vec{B} , les moments magnétiques s'orientent de manière aléatoire donc $\langle \vec{\mu} \rangle = 0$ et l'aimantation définie par $\vec{M} = \frac{N \langle \vec{\mu} \rangle}{V}$ est nulle.

Si \vec{B} est uniforme et selon Oz (ce qui semble raisonnable car un champ magnétique créé en laboratoire ne varie pas sur les distances atomiques), l'énergie d'interaction entre le champ magnétique et un moment magnétique donné s'écrit :

$$\mathcal{E} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \theta$$

Aimantation

La probabilité qu'un moment magnétique $\vec{\mu}$ pointe dans l'angle solide $d\Omega$ autour de (θ, φ)

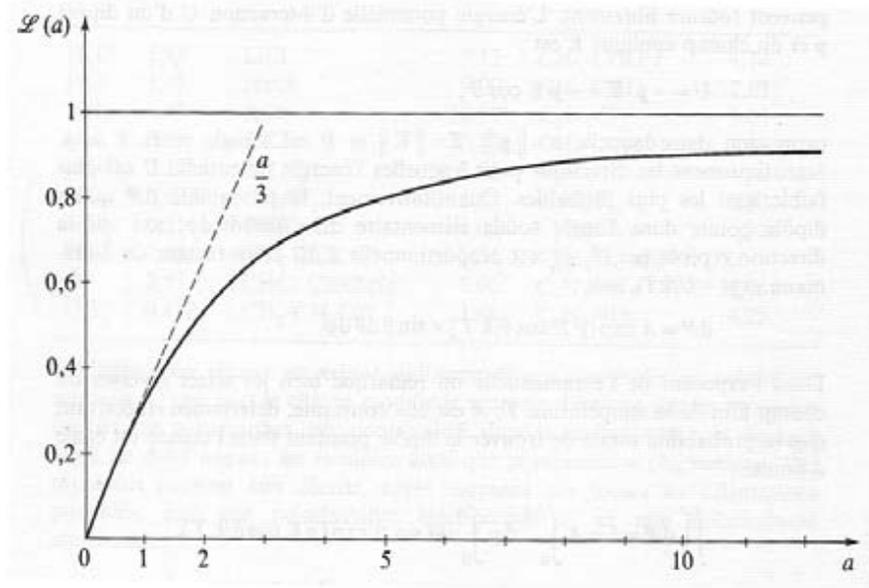
$$dP = \frac{\exp(-\beta E)}{\int \exp(-\beta E) d\Omega}$$

le numérateur étant le facteur de Boltzmann traduisant ici la compétition entre E et l'agitation thermique et avec $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. Du fait des symétries la moyenne des moments magnétiques selon x et y est nulle. Après quelques lignes de calculs :

$$\langle \mu_z \rangle = \mathcal{L} \left(\frac{\mu B_0}{k_B T} \right)$$

avec $\mathcal{L} = \coth x - \frac{1}{x}$ la fonction de Langevin. On en déduit l'aimantation :

$$M = \frac{N \langle \mu_z \rangle}{V} = \frac{N \mathcal{L} \left(\frac{\mu B_0}{k_B T} \right)}{V}$$



Approximation classique

B petit (≤ 1 T), température ordinaire.

$$x = \frac{\mu B_0}{k_B T} \approx 10^{-3} \ll 1 \text{ donc } \coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} \text{ donc } M \approx \frac{N}{V} \mu \frac{\mu B_0}{3k_B T} \propto \frac{B_0}{T}$$

Ce comportement correspond à la partie gauche de la courbe ci-dessus (comportement linéaire). On définit la susceptibilité magnétique par $\chi_m = \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial B}$. Ici, $\chi_m \propto \frac{1}{T}$: on retrouve la loi de Curie.

Aimantation à saturation

B fort (> 1 T) ou température très basse. $x \gg 1$ donc $\mathcal{L}(x) \rightarrow 1$. Donc $M = \frac{N}{V} \mu$

L'aimantation est maximale. Microscopiquement, tous les moments magnétiques sont alignés dans le sens du champ. Ce phénomène correspond à la saturation.

45.2.2 Prise en compte de la quantification : modèle de Brillouin**Expression de l'aimantation**

Un moment magnétique permanent placé dans \vec{B} est soumis à l'hamiltonien $\mathcal{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = g_j \mu_B J_j B$ avec B uniforme selon (Oz) , $J_j \in [-j, j]$ ($2j + 1$ valeurs) et $g_j = 2$ si $l = 0$ et $s = 1/2$

On suppose ici les moments magnétiques suffisamment éloignés pour ne pas interagir : ils sont indépendants. Ces N moments magnétiques sont fixés au nœud d'un réseau et sont donc discernables. La fonction de partition du système s'écrit donc

$$Z = z^N$$

où z fonction de partition d'un atome s'écrit (ensemble canonique) :

$$z = \sum_{J_z=-j}^{+j} \exp\left(-\frac{g_j \mu_B B_0}{k_B T} J_z\right)$$

Dans le cas d'un modèle rustique de spin 1 ($l = 0, s = \pm 1$ donc $g=2$), $z = 2 \cosh x$

$$M = \frac{N}{V} \mu_B \tanh x$$

Aimantation à saturation

B important ou basse température, $x \gg 1$ donc $\tanh x \rightarrow 1$ donc

$$M = \frac{N}{V} \mu_B \tanh x$$

Le système est dans son état d'aimantation maximum : tous ses moments magnétiques pointent dans la direction du champ \vec{B} .

Rq : pour $B = 15$ T, $x \gg 1$ donc $T \ll 13$ K.

Approche classique, loi de Curie

Pour $x \gg 1$ (B faible, haute température), $\tanh x \approx x$ donc

$$M = \frac{N}{V} \left(\frac{g\mu_B}{2} \right)^2 \frac{B_0}{k_B T}$$

D'où $\chi = \frac{N}{V} \left(\frac{g\mu_B}{2} \right)^2 \frac{1}{k_B T}$. On retrouve la loi de Curie.

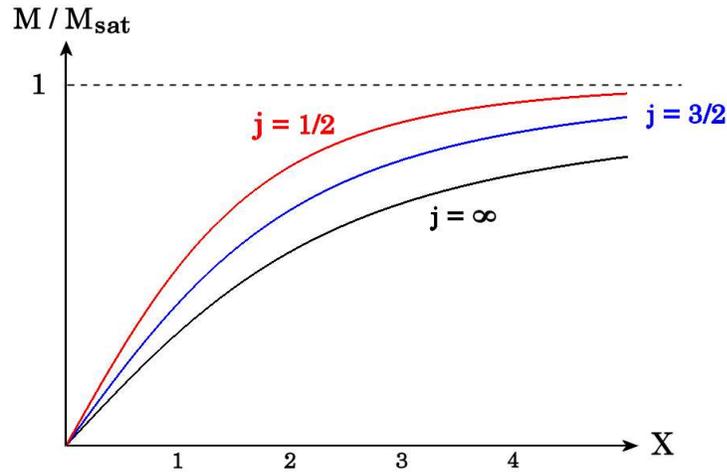
Calcul complet

Le calcul complet donne pour l'aimantation

$$M_j \propto \mathcal{B}_j \left(\frac{g_j \mu_B j B}{k_B T} \right)$$

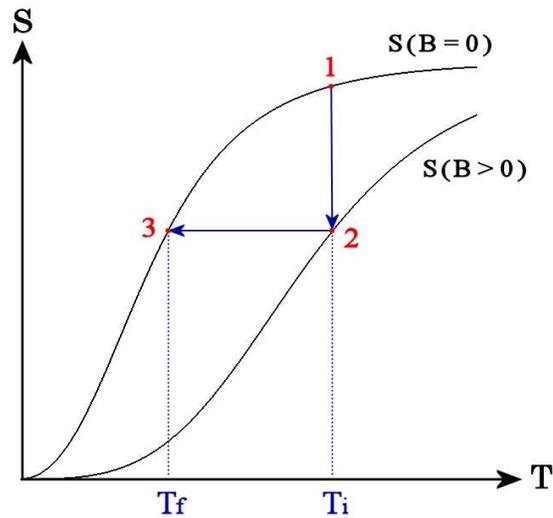
avec \mathcal{B}_j la fonction de Brillouin d'ordre j .

Même comportement que dans le cas simplifié (approximation classique et loi de Curie, aimantation à saturation) mais ici, bon accord avec l'expérience pour la plupart des atomes concernés (en particulier les terres rares et les métaux de transition si $j = s$). Désaccord en revanche pour certaines substances dont la concentration en atomes est importante.



45.2.3 Application : refroidissement par désaimantation adiabatique

Utilisé depuis 1927 pour obtenir des températures inférieures à 10^{-3} K (aujourd'hui, on y préfère cependant les réfrigérateurs à dilution $^3\text{He}/^4\text{He}$).



Initialement, (point A), l'échantillon est à la température T_i . On applique alors un champ \vec{B} , le système étant à l'équilibre thermique avec l'extérieur. On réalise donc une aimantation isotherme. Pendant cette phase, les moments magnétiques s'alignent selon le champ \vec{B} donc le système est plus ordonné et l'entropie diminue. On arrive au point B. On supprime

alors le champ \vec{B} (de l'ordre de 500 Gauss de manière adiabatique (il suffit pour cela de pomper l'hélium gazeux ayant permis d'atteindre la température T_i). On a ainsi réalisé une désaimantation adiabatique au cours de laquelle la température du système diminue. On atteint le point C . La température finale T_f est de l'ordre du mK.

Rq : on a réalisé une transformation classique en thermodynamique : une isotherme + une adiabatique.

Remarquer en outre, que S tend vers 0 quand T tend vers 0 (troisième principe).

45.3 Ferromagnétisme à l'échelle microscopique. Approximation du champ moyen

Un corps ferromagnétique possède une aimantation \vec{M} même en l'absence de champ magnétique \vec{B}_{ext} . Cette propriété suggère qu'à l'état microscopique, les moments magnétiques sont ordonnés dans le cristal.

Les corps présentant cette propriété sont rares : Fe, Co, Ni et leurs alliages principalement.

45.3.1 Modèle phénoménologique de Weiss

Modèle

L'existence d'une aimantation spontanée même à température élevée ne peut s'expliquer que par une force d'interaction entre les moments magnétiques. Ainsi on peut imaginer a priori qu'une substance ferromagnétique est une substance paramagnétique dans laquelle il existe des interactions. C'est ainsi que P. Weiss imagina :

- d'associer une telle interaction à un champ magnétique interne supplémentaire appelé champ moléculaire appelé \vec{B}_M ,
- de supposer que chaque spin subit l'aimantation moyenne due à tous les autres, soit $\vec{B}_M = \lambda M$, avec λ une constante indépendante de la température.

Aimantation

Dans le cadre du modèle de Weiss, $\vec{B}_{total} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_M$ donc pour un spin 1/2

$$\begin{cases} M = \frac{N}{V} \mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B(B_{ext} + B_M)}{2k_B T}\right) \\ B_M = \lambda M \end{cases}$$

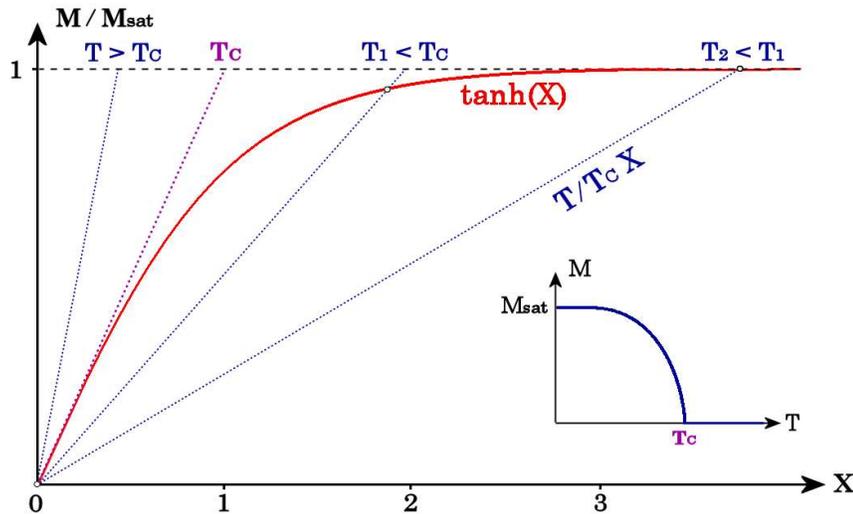
ce qui s'écrit en variables réduites :

$$\begin{cases} M = \frac{T}{T_C} X - X_0 \\ M = \frac{N}{V} \mu_B \tanh X \end{cases}$$

avec $k_B T_C = \lambda \frac{N}{V} \mu_B^2$ homogène à une énergie, $X_0 = \frac{\mu_B B_{ext}}{k_B T_C}$ et $X = \frac{\mu_B B_{total}}{k_B T}$.

On obtient ainsi une équation self-consistent ce qui n'est pas étonnant puisque le champ moléculaire dépend de l'aimantation que l'on cherche. On s'appuiera donc sur une résolution graphique.

Résolution graphique, interprétation



Le graphique ci-dessus représente le cas où le champ extérieur est nul : la droite passe par l'origine. Le point d'intersection de la courbe et de la droite correspond à l'aimantation spontanée.

On distingue 3 cas :

1. la droite n'a pas d'autre intersection avec la courbe $\tanh x$ que l'origine (aimantation spontanée nulle) : le matériau est alors paramagnétique,
2. la droite coupe la courbe en deux points correspondant à une aimantation spontanée non nulle ($|M_{sp}| = \frac{N}{V}\mu_B = M_{sat}$). Le matériau est à l'état ferromagnétique,
3. la droite est tangente à la courbe. Ce cas correspond au passage d'un régime à l'autre, il se produit pour $T = T_C$.

Cette étude permet de tracer l'aimantation spontanée en fonction de la température.

Ces phénomènes sont conformes aux observations macroscopiques. T_C , température de transition entre les états ferromagnétique et paramagnétique, n'est rien d'autre que la température de Curie.

Loi de Curie-Weiss

Si le champ magnétique est non nul, et $T > T_C$, alors $x \ll 1$ donc $M \approx M_{sat}x \propto \frac{B}{T-T_C}$.

D'où

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C}$$

C'est la loi de Curie-Weiss, avec C la même constante

que pour la loi de Curie du paramagnétisme. Ainsi, pour $T > T_C$, le corps est paramagnétique.

45.3.2 Origine du champ moléculaire

Hamiltonien de Heisenberg

La manière la plus simple de décrire l'interaction entre 2 spins situés sur des atomes de sites voisins (i) et (j) du cristal est

$$\mathcal{H}_{ij} = -J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -J \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

car tous les sites sont supposés équivalents, avec $J \geq 0$ l'intégrale d'échange liée au chevauchement des distributions des charges des atomes. J est nul si les spins sont éloignés (seule

l'interaction avec les spins les plus proches est considérée) et J est positif car les spins ont tendance à s'aligner.

L'énergie correspondante est minimale pour 2 spins parallèles, donc J correspond à l'énergie de stabilisation de 2 spins parallèles par rapport à 2 spins antiparallèles.

Ainsi, l'hamiltonien du système dit hamiltonien de Heisenberg s'écrit pour N spins :

$$\mathcal{H}_H = \sum_{i=1}^N -\vec{\mu}_i \cdot \vec{B}_0 + \sum_{i,j \in v(i)} -J \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

avec $\vec{\mu}_i = 2\gamma \vec{S}_i$ et $v(i)$ l'ensemble des plus proches voisins d'un site donné (i). Ce modèle appelé modèle d'Ising ne considère donc que les interactions avec les plus proches voisins.

Pour un site (i), on peut écrire l'hamiltonien sous la forme

$$-g\mu_B \vec{S}_i \cdot \left[\vec{B}_0 + \frac{1}{g\mu_B} \sum_{j \in v(i)} \vec{S}_j \right]$$

Ainsi, tout se passe comme si le site (i) était soumis à un champ magnétique effectif :

$$\vec{B}_{eff}^i = \vec{B}_0 + \frac{1}{g\mu_B} \sum_{j \in v(i)} \vec{S}_j$$

Approximation du champ moyen

Dans le cadre de cette approximation, on néglige les fluctuations du champ moléculaire : on remplace \vec{B}_M par $\langle \vec{B}_M \rangle$, donc $\vec{B}_{eff} = \vec{B}_0 + \lambda M$, où on pose $\lambda = \frac{V}{N} \frac{pJ}{(g\mu_B)^2}$, avec p le nombre de plus proches voisins. On retrouve ainsi l'hypothèse de P. Weiss.

Les résultats obtenus avec ce modèle (aimantation et susceptibilité) coïncident bien avec les résultats expérimentaux (évolution de $M(T)$, loi de Curie-Weiss) :

Limite de l'approximation

L'approximation du champ moyen permet de résoudre un problème à N spins en interaction en le transformant en un problème de N spins indépendants. Il permet de justifier

l'évolution de l'aimantation spontanée en fonction de la température et l'existence de la température de Curie. Cependant, l'approximation n'est pas bonne au voisinage de cette température. Il y a en effet de fortes fluctuations au voisinage de cette température de transition (même problème que l'opalescence critique dans le cas des fluides).

Pour résoudre le problème autour de cette température, il faut envisager des modèles plus complexes.

Conclusion

- Le problème de l'interprétation du ferromagnétisme à l'échelle microscopique reste ouvert. Depuis les travaux de Pierre Curie et de P. Weiss sur le paramagnétisme puis sur le ferromagnétisme, les modèles n'ont cessé d'être améliorés, notamment récemment grâce aux simulations numériques.
- Les enjeux sont importants car le ferromagnétisme connaît aujourd'hui de nombreuses applications : aimants, transformateurs, mais aussi le microscope à force atomique et le stockage de données. Une meilleure compréhension à l'échelle atomique pourrait aider à trouver de nouveaux matériaux ou à améliorer les technologies à la base de ces applications importantes.
- Les aspects macroscopiques concernant le ferromagnétisme seront abordés dans la prochaine leçon.

Leçon de physique n° 46

Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques



Bibliographie

- *Magnétisme 4*, Bertin, Faroux
- *Magnétisme II, matériaux et applications*, de Tremolet, Grenoble Sciences
- *Montages de physique*, Charmont, p. 163

Introduction :

Les matériaux ferromagnétiques sont des éléments d'une grande importance industrielle. Ils sont utiles à de nombreux procédés tels que la conversion de puissance, le stockage de données, la médecine et bien d'autres encore. La production de matériaux ferromagnétiques représente un chiffre d'affaires de plusieurs milliards d'euros par an.

L'objectif de cette leçon est de caractériser et de différencier les types de matériaux ferromagnétiques, et d'en présenter quelques applications.

46.1 Description macroscopique des milieux ferromagnétiques

46.1.1 Rappel : magnétisme dans la matière

On a vu que l'existence de dipôles (permanents ou induits) dans les milieux se traduisait macroscopiquement par une aimantation $\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i(\vec{r})$ où les $\vec{m}_i(\vec{r})$ sont les contributions de chaque dipôle du milieu en \vec{r} .

On peut alors relier le champ magnétique \vec{B} à l'aimantation \vec{M} et au champ d'excitation \vec{H} par la relation

$$\vec{B} = (\vec{M} + \mu_0 \vec{H})$$

Dans les milieux LIH, on a

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

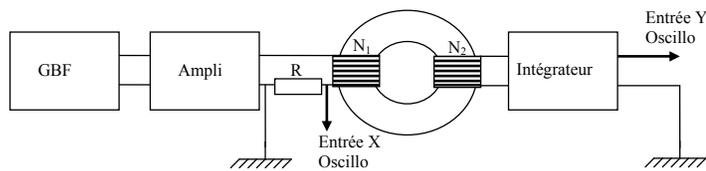
D'où

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

On s'intéresse à un autre type de milieux, les milieux ferromagnétiques, dont on veut en premier lieu établir le lien $\vec{M} = f(\vec{H})$ ou $\vec{B} = f(\vec{H})$ (ce qui revient au même).

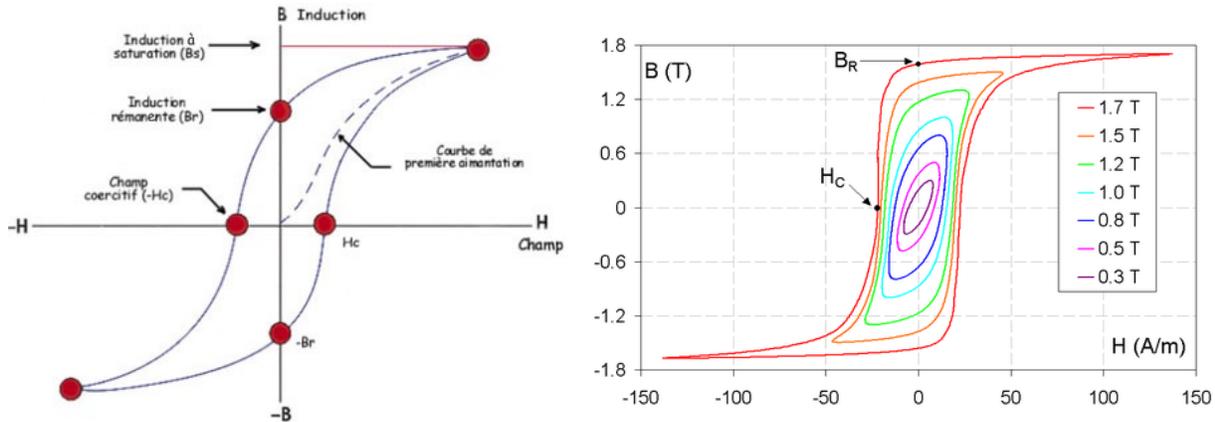
46.1.2 Aperçu expérimental

L'étude d'une bobine à noyau de fer montre l'existence d'un cycle d'hysteresis dans la relation $\vec{M} = f(\vec{H})$, puis l'apparition d'une saturation à partir d'une certaine amplitude du champ d'excitation \vec{H} .



46.1.3 Généralisation : description d'un milieu ferromagnétique

Si l'on refait l'expérience pour d'autres matériaux, il en ressort un type de comportement commun à tous une classe de matériaux que l'on appellera milieux ferromagnétiques. On peut représenter les relations $\vec{M} = f(\vec{H})$ et $\vec{B} = f(\vec{H})$ selon les courbes types :



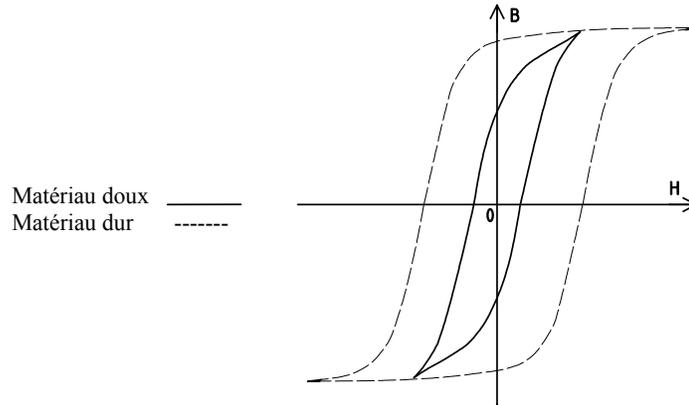
On remarque en premier lieu que la courbe est symétrique par rapport à l'origine. Il ressort de plus trois propriétés fondamentales, traduisant un comportement non linéaire :

- Il existe un hysteresis, correspondant au fait que l'aimantation de l'échantillon dépend de son passé.
- Il existe un champ \vec{B} non nul pour un champ d'excitation \vec{H} nul.
- Il apparaît une saturation au delà d'un certain champ d'excitation.

En conséquence, on définit les grandeurs suivantes :

- H_C est le champ coercitif, il correspond au champ d'excitation qu'il faut appliquer en norme pour obtenir une aimantation nulle.
- B_r et M_r sont le champ magnétique rémanent et l'aimantation rémanente, il correspondent à la norme du champ magnétique et de l'aimantation persistant en l'absence de champ d'excitation ($\vec{H} = \vec{0}$).

Il est possible de classer les milieux ferromagnétiques en deux types : les milieux doux, pour lesquels H_C est plutôt faible (de l'ordre de 10 A/m), et les milieux durs, pour lesquels H_C est plus important (au delà de 100 ou 1000 A/m).



Il est possible de définir une perméabilité magnétique relative instantanée $\mu_r = B(H)/H$, lisible sur le graphe en considérant la pente de la droite définie par l'origine et le point considéré du cycle d'hysteresis. Cette définition n'est toutefois pas très commode dans le cas général, μ_r n'étant pas constant. Cependant, cela permet de comparer le ferromagnétisme au paramagnétisme en ordre de grandeur. En effet, on a :

$$\mu_r^{ferro} \sim 10^4 \text{ et } \mu_r^{para} \sim 10^{-3}$$

Ce rapport de 10^7 en ordre de grandeur entre les perméabilités des milieux para et ferromagnétiques explique la différence énorme dans l'expression de ces deux phénomènes.

Une dernière remarque est à faire sur les propriétés générales de ce type de milieux : il existe une transition de phase ferromagnétisme/paramagnétisme à une température T_C appelée température de Curie, au delà de laquelle le milieu perd son caractère ferromagnétique.

On note en que dans la classification périodique, seuls le Fer, le Nickel, le Cobalt et quelques lanthanides sont ferromagnétiques. Les autres matériaux ferromagnétiques sont des alliages.

46.1.4 Aspect énergétique

On effectue un bilan énergétique pour un milieu ferromagnétique pour lequel on parcourt un cycle à une certaine fréquence f . On reprend pour cela les conditions expérimentales précédentes. Le schéma électrique équivalent du primaire est présenté. La puissance électrique instantanée fournie est :

$$\mathcal{P}_{fournie} = u(t).i(t) = R_1.i(t)^2 - e(t).i(t)$$

ou $e(t)$ est la force électromotrice induite, donnée par la loi de Faraday :

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = (N_1 + N_2)S \cdot \frac{dB}{dt} \simeq -N_1 S \cdot \frac{dB}{dt}$$

avec $N_1 \gg N_2$. On reconnaît dans l'expression précédente les pertes Joules $P_{Joules} = R_1 \cdot i_1(t)^2$; l'autre partie de l'expression correspond aux pertes magnétiques. D'autre part, le théorème d'Ampère sur une ligne de champ faisant le tour du tore donne :

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = l \cdot H(t) = N_1 i_1(t) + N_2 i_2(t) \simeq N_1 i_1(t)$$

en considérant que $N_1 i_1(t) \gg N_2 i_2(t)$. On a finalement :

$$i_1(t) = \frac{l \cdot H(t)}{N_1}$$

On a donc en valeurs moyennes :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = f \cdot \int_0^T S \cdot l \cdot H(t) \cdot \frac{dB}{dt} dt = V f \int_0^T H dB = V f \int_0^T H dM$$

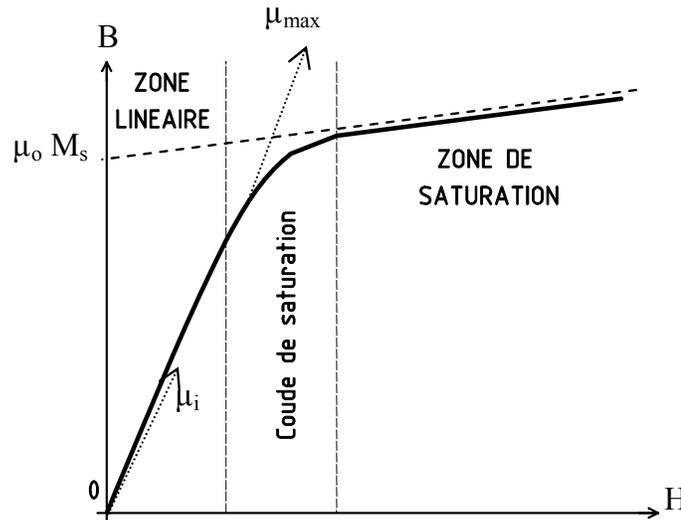
Où V est le volume du tore. On voit donc que $\mathcal{P}_{mag} \sim \mathcal{A}_{cycle}$. On voit donc que la différence entre milieux ferromagnétiques doux et durs se joue au niveau énergétique, l'aire du cycle d'un milieu doux étant bien plus faible que celle d'un milieu dur. Les milieux doux ont ainsi une utilité dans les applications telles que la conversion de puissance, ou l'on fait parcourir un très grand nombre de cycles au milieu, alors que les milieux durs ont une utilité dans les domaines de stockage ou pour faire des aimants permanents par exemple.

46.2 Milieux ferromagnétiques doux

46.2.1 Confinement des lignes de champ

Modèle du milieu doux idéal

Le champ coercitif d'un milieu doux étant faible, il est possible d'approximer celui-ci à un milieu LIH, hors zone de saturation :



On a donc $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \simeq \mu_0 \vec{M}$ dans cette situation, avec $r \gg 1$.

Confinement des lignes de champ

On considère l'interface entre un milieu ferromagnétique doux et le vide (ou un milieu s'en rapprochant). On exprime les relations de passage à l'interface entre ces deux milieux :

$$\begin{aligned}\vec{B}_{N1} &= \vec{B}_{N2} \\ \vec{H}_{T1} &= \vec{H}_{T2}\end{aligned}$$

Les relations constitutives des milieux nous donnent :

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \mu_0 \mu_r \vec{H}_1 \\ \vec{B}_2 &= \mu_0 \vec{H}_2\end{aligned}$$

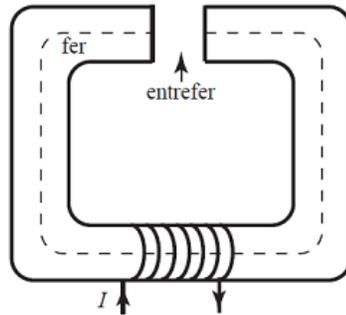
On peut alors exprimer le rapport

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} \sim \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{B_{N1}/B_{T1}}{B_{N2}/B_{T2}} = \frac{1}{\mu_r}$$

Or $\mu_r \gg 1$, d'où $\alpha_1 \ll \alpha_2$ donc $\alpha_1 \rightarrow 0$. Les lignes de champ magnétique sont tangentes à l'interface. En conséquence, le milieu ferromagnétique doux sert de guide pour les lignes de champ magnétique. On voit ainsi que l'on peut utiliser les milieux ferromagnétiques doux pour réaliser ce que l'on peut appeler des circuits magnétiques, ce qui est très utile pour de nombreuses applications (on pourra s'en rendre compte par la suite).

46.2.2 Application : l'électroaimant

Un électroaimant est un outil permettant de créer un champ magnétique contrôlé électriquement. On le modélise par un tore de section, S , autour duquel on entoure un nombre N de spires parcourues par un courant $i(t)$, et dans lequel il existe un entrefer d'épaisseur e , servant de zone utilisable dans lequel on désire créer un champ magnétique \vec{B} (de préférence intense).



Quel est le champ présent dans l'entrefer ? Pour le calculer, on exprime d'abord le théorème d'Ampère sur une ligne de champ faisant le tour du tore. L'existence de cette ligne étant avérée étant donné le confinement des lignes de champ montré au paragraphe précédent, et d'autre part en remarquant que la composante normale du champ magnétique est continue à l'interface tore/entrefer.

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = l.H_{doux}(t) + e.H_{entrefer}(t) = Ni(t)$$

De plus, on a la conservation de $\phi = SB$. S étant constante, B l'est aussi le long de l'électroaimant. Enfin, on exprime les relations constitutives des milieux :

$$H_{doux} = H_d = \frac{B}{\mu_0\mu_r}$$

$$H_{entrefer} = H_e = \frac{B}{\mu_0}$$

La combinaison de ces équations donne, après calcul :

$$B = \frac{\mu_0 N i(t)}{e + \frac{l}{\mu_r}}$$

On peut faire l'approximation $e \gg l/\mu_r$ (bien que l'on ait e petit devant l). On remarque alors qu'une diminution de la taille de l'entrefer permet d'obtenir un champ plus intense.

Ordre de grandeur : pour $N \sim 10^3$, $e \sim 1$ cm, $i \sim 1$ A, on a $B_e \sim 0,1$ T. L'intérêt de ce type d'aimants est qu'il est contrôlable à partir de l'intensité $i(t)$. Cependant, la présence des bobines fait qu'il est relativement gros, et qu'il y a un risque d'échauffement (par effet Joule). Une amélioration envisageable est l'utilisation de pièces tronconiques pour intensifier le champ B dans l'entrefer. La section S diminuant au niveau de l'entrefer, on a une augmentation de B par conservation de ϕ_B .

46.3 Milieux ferromagnétiques durs

46.3.1 Aimant permanent

Un aimant permanent est le pendant de l'électroaimant dans le domaine des milieux ferromagnétiques durs. Ici, on désire avoir créer un champ magnétique sans avoir besoin de fournir une énergie électrique en permanence. Pour cela, on remplace les bobines de l'électroaimant par un matériau ferromagnétique dur, que l'on appelle aimant. Le reste du tore est constitué d'un milieu magnétique doux que l'on appelle pièces polaires. La modélisation est la suivante : on ne suppose pas la section constante ici. Pour calculer le champ magnétique dans l'entrefer, on effectue la même démarche que dans le cas précédent.

$$H_a l_a + H_p l_p + H_e l_e = 0$$

$$B_a S_a = B_p S_p = B_e l_e$$

$$B_p = \mu_0 \mu_r H_p$$

$$B_e = \mu_0 H_e$$

On ne peut évidemment pas écrire la relation constitutive de l'aimant puisque la relation entre B et H y est non-linéaire. En combinant les relations précédentes,

avec les approximations qui conviennent ($H_e l_e \gg B_p l_p$), on trouve :

$$B_a = -\mu_0 \frac{l_a S_a}{l_e S_e} H_a$$

Cette relation est appelée droite de charge de l'aimant permanent. En effet on peut la tracer sur la courbe hysteresis de l'aimant, et en déduire les points de fonctionnement de l'aimant permanent .

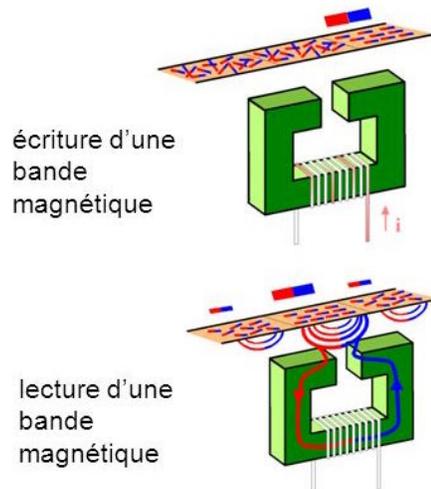
Ordre de grandeur : le champ B obtenu est inférieur à B_{sat} d'après la résolution graphique précédente. Sachant qu'il existe une quantité non négligeable de fuites magnétiques, on obtient un champ $B \sim 0,1$ T comme dans le cas de l'électroaimant.

L'intérêt des aimants permanents est qu'ils permettent une importante miniaturisation des machines (comme une MCC par exemple). Cependant, ils ne sont pas contrôlables.

46.3.2 Les mémoires magnétiques

Enregistrement analogique

L'enregistrement sur des supports magnétiques se fait toujours sur des couches minces ferromagnétiques dures. Dans le cas de l'enregistrement magnétique, on place une tête de lecture/écriture (qui est modélisée par un simple électroaimant) au dessus de la couche mince. La tête se déplace à une vitesse v . Le passage de la tête au dessus d'une zone de la couche mince revient à faire subir au matériau dur un cycle.



La grandeur pertinente est donc ici l'aimantation rémanente $M_r(H_m)$ fonction du champ d'excitation maximal H_m auquel le matériau a été soumis.

On peut alors, à partir d'une distribution temporelle d'intensité $i(t)$, inscrire sur la couche une distribution d'aimantation $M(x)$. Si l'on se place dans la zone linéaire, on inscrit des données utilisables. La lecture des données se fait selon l'opération inverse : la présence de la distribution d'aimantation induit une distribution d'intensité. Cette technique s'appelle polarisation en continu.

Méthode numérique magnétique

On reprend un système schématiquement identique au précédent. Le principe de l'enregistrement numérique est d'inscrire des bits de données, 0 ou 1, que l'on code ici par des aimantations $+M_r$ ou $-M_r$, sur des cases de couche mince d'une taille donnée (que l'on voudrait la plus petite possible). Le procédé d'écriture est donc assez simple à concevoir. Il est courant d'utiliser dans ce cas des ferrites, donc le cycle proche du carré permet un passage rapide entre $+M_r$ et $-M_r$, et on a $M_{sat} \simeq M_r$.

L'enregistrement numérique est un procédé très complexe : il existe des problèmes de désaimantation, différentes méthodes de lecture, de codage des données, etc. et les méthodes d'enregistrement numérique sont très nombreuses. Notons cependant que c'est de cette manière que fonctionnent les disques durs, qui sont à ce jour les supports (grand public) permettant le stockage des plus grandes quantités de données.

Conclusion

La liste des applications basées sur le ferromagnétisme est très longue, tant en conversion de puissance (transformateurs, moteurs), que pour réaliser des bobines à forte inductance ou des sondes de courant à flux nul, en stockage de données, en médecine (ferrofluides pour l'imagerie médicale par exemple), ou aussi en géologie (avec le paléomagnétisme c'est à dire l'étude de l'aimantation des couches sédimentaires), etc. En parallèle sont inventés régulièrement des alliages ferromagnétiques de plus en plus performants.

Mécanisme de la conduction électrique dans les solides



Bibliographie

- *Cours de physique de Berkeley vol.2. : électricité et magnétisme*, Purcell, A. Colin
- *Electromagnétisme, Fondements et applications*, Pérez, Dunod
- *Physique des solides*, Ashcroft et Mermin
- *Montages de physique*, Charmont, p. 17

Prérequis :

Notions générales d'électromagnétisme (Champs électriques et magnétiques, force électromagnétique) et relation fondamentale de la dynamique.

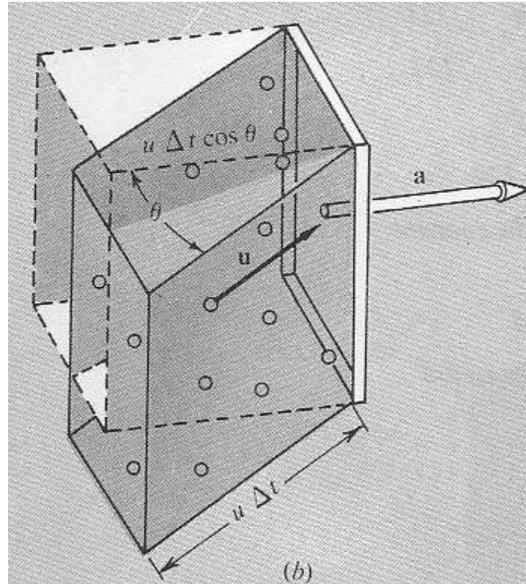
Introduction :

Les mécanismes dont il va être question sont à la base du fonctionnement du monde moderne depuis la révolution industrielle (la fée électricité), mais aussi de développements technologiques plus récents (semiconducteurs, supraconducteurs...).

47.1 Le courant électrique

Définition de l'intensité :

$$I = \frac{\text{charge qui traverse une surface } S \text{ orientée pendant une certaine durée}}{\text{certaine durée}}$$



Exprimons le courant volumique et pour cela, aidons-nous de la figure. On y a construit un parallélépipède qui s'appuie sur la surface de vecteur \vec{dS} , et sur $\vec{v}_d dt$, \vec{v}_d étant la vitesse moyenne des porteurs appelée vitesse de dérive. Afin de simplifier le raisonnement, n suppose qu'il y a qu'une seule sorte de porteurs de charges. L'élément de l'espace ainsi défini a pour volume :

$$dV = \vec{v}_d \cdot \vec{dS} dt$$

L'intensité traversant dS pendant dt est :

$$dI = \rho_m dV = \rho_m \vec{v}_d \cdot \vec{dS} dt$$

où ρ_m est la densité volumique de charges (le mot mésoscopique a une définition large qui est l'échelle intermédiaire entre atomique et macroscopique mais aussi une définition précise qui est échelle de longueur inférieure à la longueur de déphasage, c'est-à-dire échelle

sur laquelle l'aspect ondulatoire et cohérent des électrons est conservé. Avec cette seconde définition, vous utilisez mal le mot mésoscopique. Compte tenu de la présence de spécialistes des semiconducteurs dans le jury, je déconseille fortement l'emploi de ce mot dans le cadre d'une leçon d'agreg car aucun sujet ne traite de phénomènes mésoscopiques au sens strict). Si on définit I comme un flux de courant volumique au travers d'une surface, alors j , le vecteur courant volumique, est défini par $\vec{j} = \rho_m \vec{v}_d$. On peut généraliser ceci à plusieurs types de porteurs sans problème :

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} \rho_m^{\alpha} \vec{v}_d^{\alpha}$$

Ordres de grandeur : $I = 1$ A, $S = 1$ mm², $j = I/S = 10^6$ A.m⁻¹, $n_{e^-}(Cu) \sim 10^{22}$ cm⁻³ donc $\rho_{e^-} \sim 10^3$ C.m⁻³

Remarque : Bien garder à l'esprit que v_d est la vitesse obtenue en réalisant la moyenne des vecteurs-vitesses des porteurs (1mm.s⁻¹ pour les e^-), mais pas la moyenne des normes des vitesses (10⁸ mm.s⁻¹ pour les e^-).

Mais comment est créé un courant ? On peut imaginer des phénomènes de convection de particules chargées (machine de Van der Graaf, gouttes chargées dans l'atmosphère), mais ici on va s'intéresser au déplacement de charges sous l'effet d'un champ électrique. Notamment, quelle est la relation entre excitation et réponse ?

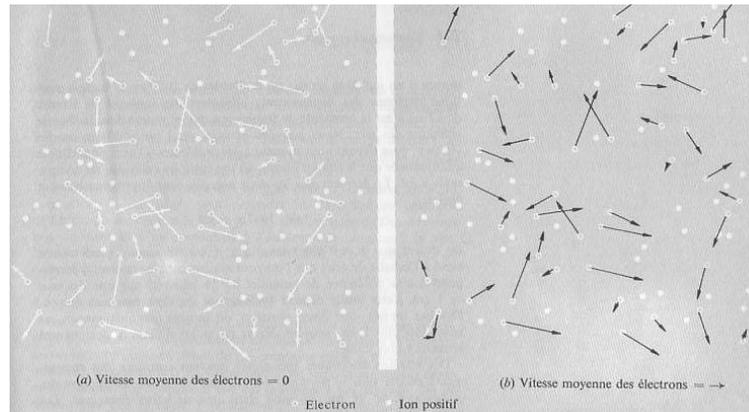
47.2 Loi d'Ohm

47.2.1 Modèle

La célèbre loi d'Ohm $U = RI$ peut s'écrire localement $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ où σ est la conductivité. Ceci implique que la vitesse est directement proportionnelle à la force, ce qui est en contradiction avec les lois élémentaires de la mécanique en régime balistique. Il faut donc élaborer un modèle qui rendrait compte de ce fait, et ceci sera fait en postulant l'existence de chocs subis par les porteurs. Ce modèle ressemble fortement à celui de Drude, mais il est plus général car il ne se limite pas aux métaux. Notamment, ce modèle est valable dès que les porteurs de charges sont soumis à des collisions : ainsi, il s'applique aux métaux. (chocs électrons-phonons) mais aussi aux solutions électrolytiques (chocs ions-ions) ou lors de décharges électriques (chocs ions-électrons).

Hypothèses :

1. En dehors des collisions, les porteurs de charge n'interagissent qu'avec le champ extérieur \vec{E} , selon le PFD



2. Probabilité qu'un porteur subisse une collision pendant dt : dt/τ . Ici : on utilise juste que ceci implique que la durée moyenne entre deux chocs est τ (appelé temps de relaxation, de collision ou encore de lpm)

3. Les collisions sont instantanées (durées $\ll \tau$) et changent de façon abrupte la vitesse : perte de mémoire, vitesses aléatoires en normes et directions

Remarque : Pour le modèle de Drude, il faudrait rajouter que les porteurs forment un gaz d'électrons libres et que les atomes sont des cations fixes.

On considère un porteur à l'instant $t = 0$, qui vient de subir une collision. Le PFD donne :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$$

Donc

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{q\vec{E}t}{m}$$

En faisant une moyenne d'ensemble :

$$\langle \vec{v} \rangle = \vec{v}_d = \langle \vec{v} \rangle_0 + \frac{e\vec{E}}{m} \langle t \rangle$$

Or, $\langle \vec{v}_0 \rangle = 0$ du fait de l'hypothèse 3, et $\langle t \rangle = \tau$ (car on a pris l'origine des temps à la dernière collision et, en moyenne, il s'est écoulé la durée τ depuis).

$$\vec{v}_d = \frac{q\vec{E}\tau}{m} = \mu\vec{E}$$

où n est la densité de porteurs et μ est leur mobilité

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v}_d = \frac{q^2 n \tau}{m} \vec{E}$$

Ce qui est la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

où σ est la conductivité, en S.m^{-1} .

Remarque : Ce mécanisme revient à introduire une force de frottements visqueux :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

La loi d'Ohm traduit donc la limitation de la vitesse des porteurs dans le milieu.

Remarque : On peut généraliser le résultat de la conductivité pour plusieurs types de porteurs :

$$\sigma = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mu_{\alpha}$$

Limitations : La loi d'Ohm est en défaut principalement lorsque \vec{E} est trop grand. Si entre deux collisions, les porteurs prennent une vitesse supplémentaire comparable à leur vitesse quadratique moyenne thermique, τ sera sérieusement modifié et dépendra de \vec{E} , et donc σ par la même occasion. Ainsi, le modèle ne sera plus linéaire en \vec{E} . De plus, un champ trop fort peut modifier le nombre de porteurs (décharge électrique).

Autre limite importante et d'actualité dans le contexte des nanosciences : la taille des systèmes. Le raisonnement suppose qu'il y ait des collisions. Il faut donc que la taille du système soit grande devant le lpm pour qu'il puisse y avoir des collisions. Or, le lpm est de l'ordre de 10 à 100 nm à température ambiante pour des métaux.

47.2.2 Conducteurs, semi-conducteurs, isolants

Un classement possible pourrait se faire suivant la valeur de σ : les métaux ont une conductivité (statique) supérieure à 10^4 S.m^{-1} , celle des semi-conducteurs est comprise entre 10^{-6} S.m^{-1} et 10^4 S.m^{-1} et celle des isolants est inférieure à 10^{-6} S.m^{-1} .

Deux paramètres jouent dans la conductivité : μ et n . En voici des ordres de grandeur pour un métal et un semi-conducteur :

$$Cu : n_{e^-} \sim 10^{23} \text{ cm}^{-3}; \quad \mu \sim 4.10^{-3} \text{ m}^2.\text{V}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

$$Ge : n_{e^-} \sim 10^{13} \text{ cm}^{-3}; \quad \mu \sim 2.10^{-3} \text{ m}^2.\text{V}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

On voit que c'est surtout la densité de porteurs qui compte. Cependant, cette classification progressive ne rend pas compte des propriétés de ces matériaux, et il faut faire une classification basée sur les mécanismes microscopiques de la conduction électrique, qui rendra compte de la variation de σ avec la température, la quantité d'impuretés dans le matériau, etc. Nous y reviendrons. Ici, il faut exploiter le modèle de Drude. Il est important de souligner que la mesure d'une grandeur macroscopique comme la conductivité donne accès au temps moyen entre deux collisions en supposant que l'on connaît la masse et le nombre moyen d'électrons. Drude a fait l'hypothèse ad hoc que chaque atome donne un électron dans le cas des métaux nobles. Ceci ne peut être justifié que par la théorie des bandes qui permet d'établir que les électrons appartenant à des bandes pleines ne contribuent pas à la conduction. Il en ressort que seuls les électrons appartenant à la dernière bande (et donc un électron par atome) contribuent au courant. C'est pour cela que la dernière bande est appelée bande de conduction. Voir Ashcroft et Mermin pour les exemples numériques sur la conductivité.

On peut aussi poursuivre la discussion en reproduisant le raisonnement de Drude qui a évalué la vitesse des électrons par l'équipartition de l'énergie et qui en a déduit $v_\tau = \text{lpm}/\tau$. Il a trouvé une longueur comparable de quelques distances interatomiques de sorte qu'il en a conclu que l'origine des collisions est les chocs avec les noyaux des atomes. En réalité, la vitesse des électrons est la vitesse de Fermi qui est beaucoup plus grande. L'interprétation de Drude est alors impossible. Comment expliquer alors les collisions ? Ce sont les collisions avec les phonons. Ceci explique bien la dépendance de la conductivité avec la température qui n'est pas expliquée par l'interprétation de Drude.

47.2.3 Expression intégrale de la loi d'Ohm

$$U = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot \vec{dl} = El = V_1 - V_2$$

et

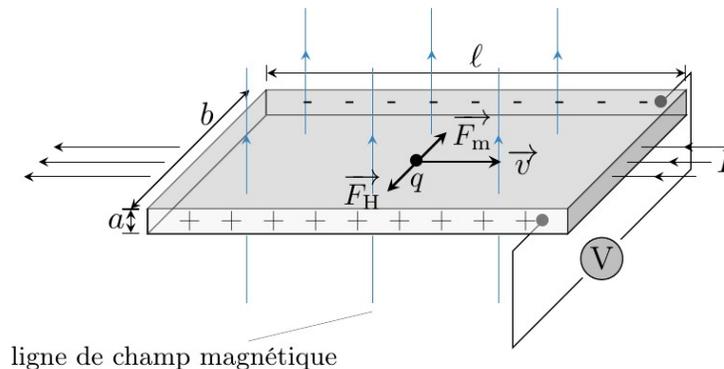
$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iint \sigma \vec{E} \cdot \vec{dS} = \sigma ES$$

D'où

$$U = RI \quad \text{avec} \quad R = \frac{\rho L}{S}$$

47.2.4 Effet Hall

Description qualitative : dans un échantillon où passe un courant et soumis à un champ magnétique B , les électrons sont déviés vers un des bords de l'échantillon car ils sont soumis à la force $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ orientée suivant \vec{e}_y . Comme les charges ne peuvent pas sortir de l'échantillon, elles s'accumulent sur une des faces. Un champ électrique transverse E_H dit de Hall s'établit ainsi, qui exerce à son tour une force sur les électrons, orientée en sens inverse de la force magnétique. Le régime stationnaire s'établit quand les électrons ne sont plus déviés (sinon les charges s'accumuleraient indéfiniment), c'est-à-dire quand les forces dues aux champs magnétique et de Hall se compensent exactement.



Description quantitative : On a $b, a \ll L$. Selon le modèle précédemment établi, en régime stationnaire :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{v}}{\tau} + \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Courant établi :

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \frac{\vec{j}}{nq} \wedge \vec{B}) = [\sigma] \vec{E}$$

On voit apparaître le tenseur conductivité $[\sigma]$ non-diagonal, reflet de l'anisotropie du milieu. En projetant cette équation sur \vec{e}_y , et en remarquant qu'en régime stationnaire, les électrons ne sont plus déviés vers les bords de l'échantillon (i.e. $\vec{j}_y = 0$), on obtient :

$$E_H - \frac{j_x B}{nq} = 0$$

Où E_H est le champ de Hall. En réécrivant ceci en fonction de $U_H = aE_H$ et $I = j_x ab$, on obtient :

$$U_H = \frac{IB}{nqb}$$

Ainsi, la connaissance de I et la mesure de la tension de Hall U_H permet de remonter à B si n et q sont connus (principe du capteur à effet Hall), et inversement. Pour visualiser cet effet, on prend généralement des semi-conducteurs car n est faible et donc U_H est plus facilement mesurable.

On peut faire cela à condition de savoir de façon très précise de quoi l'on parle.

47.3 Notion de structure de bandes

Attention, on n'introduit pas un modèle gratuitement. Ce n'est pas une question de cours, c'est une leçon. Ne jamais dire quelque chose pour montrer que l'on sait. On introduit un élément dans une leçon que s'il sert le but de la leçon. Ici, le modèle de bandes est présenté sans que le besoin s'en fasse sentir. Il faut amener le besoin du modèle en partant de

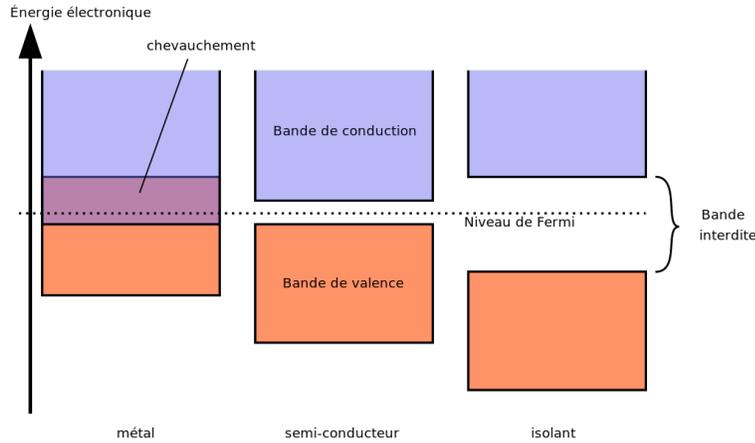
- la dépendance en température qu'il faut présenter et qui requiert une interprétation
- le fait que l'on suppose sans justification qu'il n'y a qu'un électron par atome.

A partir de là, le modèle permet effectivement de répondre à ces questions.

47.3.1 Description

Lorsqu'on couple deux atomes identiques, deux niveaux d'énergies identiques se combinent pour former deux autres niveaux d'énergies différentes. De même, lorsque N atomes se

couplent, les niveaux d'énergie se combinent pour former N niveaux d'énergies différentes, et dans le cas d'un solide où $N \rightarrow \infty$, on obtient des bandes d'énergie.



Deux cas de figure peuvent se présenter :

- le niveau de Fermi est situé dans une bande, le matériau est un métal
- le niveau de Fermi est situé dans un gap, le matériau est soit un isolant, soit un semi-conducteur, le critère de séparation portant sur le gap : si $\epsilon_g \sim k_B T$, le matériau est semi-conducteur, si $\epsilon_g \gg k_B T$, c'est un isolant.

47.3.2 Rôle de T et des impuretés

Température

Pour un conducteur, lorsque T augmente, les vibrations du réseau augmentent, les collisions électrons-phonons augmentent, v diminue et au final, σ diminue.

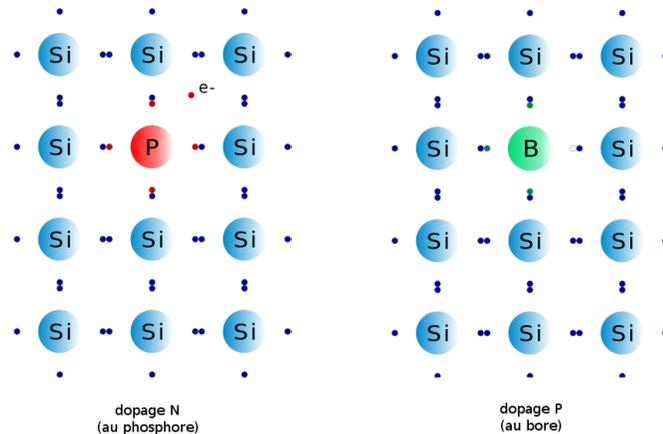
Pour un semi-conducteur, lorsque T augmente, v diminue aussi, mais surtout n augmente (franchissement du gap par les e^-) et au final, σ augmente.

Impuretés

Pour un conducteur, les impuretés brisent la symétrie du cristal et donc diminuent v et σ .

Pour un semi-conducteur, certains types d'impuretés permettent d'augmenter n : c'est le dopage. Par exemple, dans un cristal de silicium (tétravalent), cela consiste en le remplacement d'un atome de Si par un atome de phosphore (pentavalent) ou de bore (trivalent).

Dans le premier cas, il y a un électron en trop pour assurer la liaison : il est faiblement lié et une faible agitation thermique va suffire à le faire passer dans la bande de conduction : on parle de dopage *n* car le porteur est un électron négatif. Dans le deuxième cas, il manque un électron pour assurer les liaisons, ce manque peut facilement être comblé par un autre électron, mais un trou se crée là où l'électron se trouvait, et c'est ce trou qui se déplace de proche en proche : on parle de dopage *p* car le porteur est un trou positif.



De très faibles taux d'impuretés (ppm) peuvent modifier considérablement la conductivité, et, pour le dopage à température ambiante, on peut considérer que celle-ci est uniquement due aux impuretés (on est alors en régime extrinsèque, par opposition au régime intrinsèque).

Conclusion :

On a vu un rapide aperçu des mécanismes de conductivité qui sont à la base du fonctionnement de notre technologie actuelle, notamment en ce qui concerne les conducteurs et les semiconducteurs. A propos des conducteurs, attention à ne pas confondre la conductivité parfaite, qui est une limite du modèle que l'on a vu, avec la supraconductivité, qui relève d'un tout autre phénomène, et qui elle est effectivement réalisable en laboratoire.

De plus, il n'a pas beaucoup été question d'applications. Pas de problème avec ça, on ne peut pas faire beaucoup mieux. On peut parler de la conduction dans les microprocesseurs. On arrive à des tailles de canal de 60 nm aujourd'hui de sorte que la taille des systèmes devient comparable au lpm. Dans ces conditions, on approche de la limite de validité de la loi d'Ohm.

Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique



Bibliographie

- *Introduction au laser et à l'optique quantique*, Grynberg, Aspect, Fabre, Cours de l'X
- *Matière et rayonnement*, Blanc, Escande, Minster, Cours de l'X
- *Mécanique*, Pérez, Masson
- *H-prépa : Mécanique*, Hachette
- *Montages de physique*, Charmont, p. 107
- *Expériences de physique*, Duffait, p. 57
- *Montages de physique*, Bellier, p. 355

Prérequis :

- Mécanique classique : Principe fondamental de la dynamique
- Électrocinétique : circuit RLC
- Optique ondulatoire : Fabry-Pérot

Introduction :

Le phénomène de résonance est omniprésent dans l'ensemble de la physique. Parfois c'est un phénomène que l'on cherche à favoriser, tandis que dans certains cas, on essaye justement de s'en affranchir.

La définition générale de résonance serait : qui passe par un maximum. On ne sait pas trop de quoi on parle, ça peut être une amplitude, une puissance, une vitesse...etc... Mais en général, on va s'intéresser à une amplitude. C'est dans tous les cas une réponse à une excitation.

On va donc s'occuper de systèmes physiques, que l'on considèrera au final comme des boîtes noires, soumis à une excitation de type sinusoïdal à une pulsation donnée, et on cherchera la réponse de ce système. Dans cette leçon, on ne parlera que de systèmes linéaires, dont la réponse est alors également de type sinusoïdal, à même pulsation.

On adoptera la notation complexe, et la notion de fonction de transfert, qui permet ainsi de caractériser entièrement la réponse du système à toute excitation (par décomposition spectrale). Il s'agit donc d'une étude harmonique. excitation \sim à $\omega \rightarrow$ système linéaire $H(\omega) \rightarrow$ réponse \sim à ω

Plan : on étudiera en détail ce système mécanique résonant pour dégager les caractéristiques générales du phénomène de résonance ; ensuite, nous soulignerons les analogie avec le domaine de l'électrocinétique, puis nous généraliserons à tout système physique physique ; enfin, nous verrons quelques applications au domaine microscopique.

48.1 Etude d'un système mécanique résonant

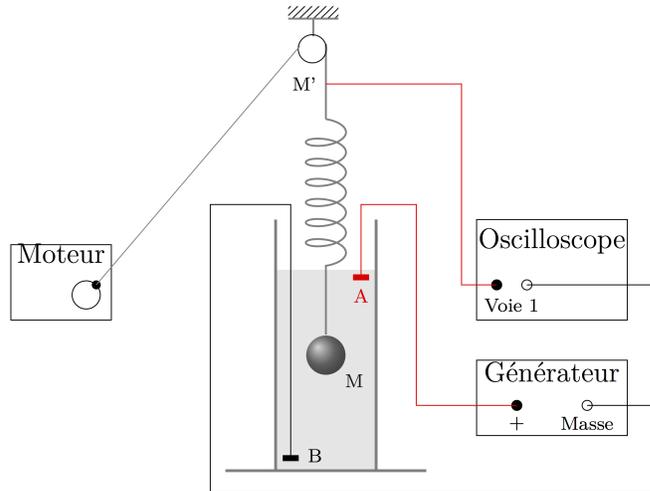
48.1.1 Etude en position

La relation fondamentale de la dynamique projetée suivant l'axe vertical donne l'équation du mouvement suivante

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{ka}{m} \cos(\omega t)$$

équation de la forme :

$$\underbrace{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x}_{\text{oscillateur}} = \underbrace{\omega_0^2 a \cos(\omega t)}_{\text{excitation}}$$



avec ω_0 la pulsation propre et Q le facteur de qualité. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire avec un second membre sinusoïdal dont la solution se décompose en deux termes :

1. L'un étant la solution particulière, s'exprime comme un signal sinusoïdal de pulsation ω ; c'est le régime forcé.
2. L'autre terme, que nous désignons par régime transitoire, correspond à la solution de l'équation homogène. On a vu qu'il y a trois régimes distincts selon la valeur du facteur de qualité. Dans tous les cas réalistes, la présence de termes dissipatifs même faibles entraîne la disparition du régime transitoire (d'où son nom) au bout d'un certain temps d'autant plus court que τ est petit. Passé ce délai, seul persiste le régime sinusoïdal forcé.

Dans toute la suite, nous supposons que le régime transitoire est complètement dissipé et que seul persiste le régime forcé :

$$x(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad t \gg \tau$$

La méthode classique qui permet d'obtenir la solution particulière consiste à remplacer $x(t)$ par $a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t)$ dans l'équation différentielle pour en déduire les valeurs de a_1 et a_2 :

$$\cos(\omega t) \left[a_1 (\omega_0^2 - \omega^2) + a_2 \frac{\omega \omega_0}{Q} \right] + \sin(\omega t) \left[a_2 (\omega_0^2 - \omega^2) - a_1 \frac{\omega \omega_0}{Q} \right] = \omega_0^2 a \cos(\omega t)$$

d'où l'on tire deux équations

$$\begin{cases} a_1 (\omega_0^2 - \omega^2) + a_2 \frac{\omega \omega_0}{Q} = \omega_0^2 a \\ a_2 (\omega_0^2 - \omega^2) - a_1 \frac{\omega \omega_0}{Q} = 0 \end{cases}$$

ce qui donne finalement

$$\begin{cases} a_1 = a \frac{1 - u^2}{(1 - u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2} \\ a_2 = a \frac{u/Q}{(1 - u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\nu}{\nu_0}$$

u désigne la fréquence réduite c'est-à-dire la fréquence rapportée à l'échelle de la fréquence propre.

En général, on préfère écrire les solutions harmoniques sous la forme $A \cos(\omega t + \varphi)$. Compte tenu du fait que

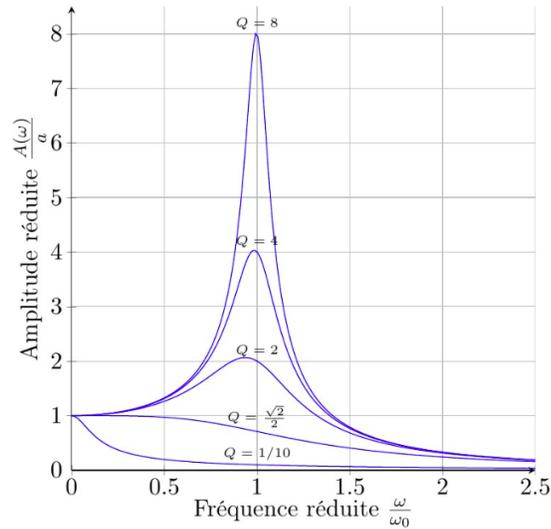
$$a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ \tan \varphi = -a_2/a_1 \end{cases}$$

l'élongation s'écrit

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = \frac{a}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}} \\ \tan \varphi = \frac{u}{Q(u^2-1)} \end{cases}$$

L'amplitude A , comme la phase φ , varie donc avec la fréquence de l'excitation.

La figure représente l'évolution de l'amplitude des oscillations en fonction de la fréquence pour différentes valeurs du facteur de qualité. On constate que si le facteur de qualité est suffisamment grand, l'amplitude des oscillations passe par un maximum : c'est la résonance en élongation.



On montre sans difficulté que :

- la résonance n'a lieu que si $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$
- la fréquence de résonance vaut

$$\nu_r = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

et si $Q > 5$, on fait une erreur inférieure à 1 % en écrivant $\nu_r \simeq \nu_0$

- l'amplitude des oscillations à la fréquence propre ν_0 vaut Qa d'où le phénomène d'amplification d'élongation avec un ressort de grand facteur de qualité ;
- lorsque $Q = \sqrt{2}/2$, l'amplitude des oscillations vaut a sur une grande bande de fréquence (à basse fréquence), ce qui confère au ressort un comportement identique à celui d'une tige rigide.

Applications :

L'amplification par le facteur de qualité des oscillations d'élongation à la résonance peut être à l'origine d'effets néfastes comme la destruction d'habitations suite à un séisme. Elle peut aussi être recherchée pour construire des appareils sensibles à l'instar des sismographes.

Par ailleurs, la réponse en fréquence d'un oscillateur permet d'accéder à la raideur de l'oscillateur et donc à la force de la liaison. Par exemple, la réponse fréquentielle d'une molécule vis-à-vis d'une onde électromagnétique permet de remonter aux caractéristiques

de la liaison chimique. Cette technique d'analyse chimique s'appelle spectrométrie Infra Rouge.

48.1.2 Etude en vitesse

On s'intéresse maintenant à la vitesse du pendule élastique. Sachant que

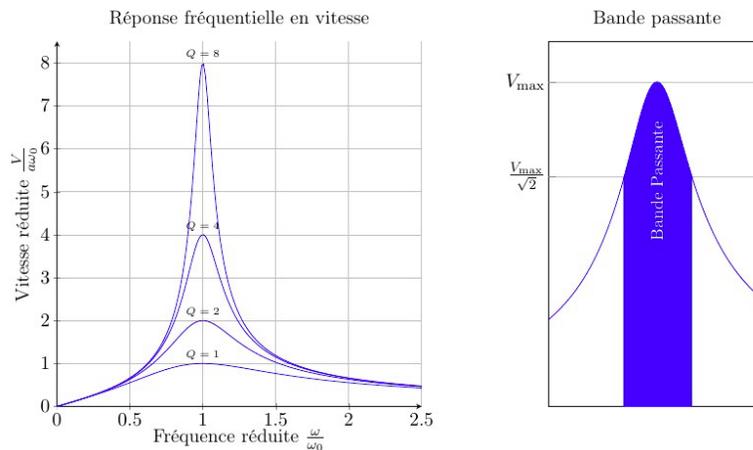
$$x(t) = \frac{a}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$$

on obtient la vitesse $v(t)$ par dérivation temporelle

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{a\omega}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}} \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

La vitesse est en quadrature de phase avec le déplacement. L'amplitude de la vitesse s'écrit :

$$V = A\omega = \frac{a\omega}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}} = \frac{aQ\omega_0}{\sqrt{1 + [Q\left(\frac{1}{u} - u\right)]^2}}$$



Comme on peut le voir sur la figure, l'amplitude de la vitesse passe par un maximum : c'est la résonance en vitesse. Ce phénomène se produit à la fréquence $\nu = \nu_0$ quelle que

soit la valeur de Q . La bande passante $\Delta\nu$ est définie par l'intervalle de fréquence tel que $V \geq \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$. On montre que la bande passante est reliée simplement au facteur de qualité par la relation

$$\frac{\nu_0}{\Delta\nu} = Q$$

La résonance est donc d'autant plus aigüe que Q est grand ce qui explique pourquoi le facteur Q est aussi appelé facteur d'acuité de la résonance.

Remarque :

Nous avons vu que le facteur de qualité était lié au temps de relaxation τ par la relation $Q = \omega_0\tau$. La relation précédente entre bande passante et facteur de qualité permet de relier temps de relaxation et bande passante :

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau}$$

Autrement dit, un oscillateur qui possède une réponse fréquentielle très sélective est aussi un oscillateur qui possède un grand temps de réponse : sélectivité et inertie vont de paire.

48.1.3 Aspect énergétique

Pour entretenir les oscillations d'un oscillateur harmonique il faut fournir de l'énergie en moyenne comme nous allons le montrer et ceci, d'autant plus que les frottements sont importants.

La puissance fournie par l'opérateur vaut

$$\mathcal{P}_{\text{op}} = \vec{f}_{\text{op}} \cdot \vec{v}_E = k a \omega x(t) \sin \omega t$$

Par ailleurs, en régime sinusoïdal forcé on a $x(t) = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t$, d'où

$$\mathcal{P}_{\text{op}} = k a \omega (a_1 \sin \omega t \cos \omega t + a_2 \sin^2 \omega t)$$

La puissance fournie oscille à la pulsation 2ω autour d'une valeur moyenne $\langle \mathcal{P}_{\text{op}} \rangle$. Sachant que $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$ et $\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$

$$\langle \mathcal{P}_{\text{op}} \rangle = \frac{k a \omega}{2} a_2 > 0 \quad \text{car} \quad a_2 > 0$$

Ainsi, en moyenne, l'opérateur doit fournir de l'énergie à l'oscillateur pour entretenir les oscillations. Notons également que la puissance moyenne $\langle \mathcal{P}_{\text{op}} \rangle$ est proportionnelle à a_2 qui représente l'amplitude des oscillations en quadrature de phase avec l'excitation.

Poursuivons notre calcul en remplaçant a_2 par son expression

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_{\text{op}} \rangle &= \frac{ka^2}{2} \frac{\omega u/Q}{(1-u^2)^2 + (u/Q)^2} \\ &= \frac{ka^2 \omega_0 Q}{2} \frac{(u/Q)^2}{(1-u^2)^2 + (u/Q)^2} \\ &= \frac{ka^2 \omega_0 Q}{2} \frac{1}{1 + [Q(1/u - u)]^2} \\ \langle \mathcal{P}_{\text{op}} \rangle &= \frac{k}{2\omega_0 Q} V^2 \end{aligned}$$

La puissance fournie est proportionnelle au carré de l'amplitude de vitesse. Le facteur de qualité étant lié au coefficient de frottement α par la relation $\omega_0/Q = \alpha/m$, on peut réécrire la puissance

$$\langle \mathcal{P}_{\text{op}} \rangle = \frac{\alpha}{2} V^2$$

Expression dans laquelle, le deuxième terme n'est rien d'autre que la puissance dissipée par les forces de frottement $\langle \mathcal{P}_{\text{diss}} \rangle = -\frac{\alpha}{2} V^2$. On obtient donc la relation $\langle \mathcal{P}_{\text{op}} \rangle + \langle \mathcal{P}_{\text{diss}} \rangle = 0$ qui traduit le fait, qu'en moyenne, l'opérateur doit fournir de l'énergie pour compenser la dissipation d'énergie par les frottements.

La relation montre également que la puissance fournie obéit à un phénomène de résonance lorsque la fréquence excitatrice vaut ν_0 . L'oscillateur absorbe alors une puissance maximum

$$\langle \mathcal{P}_{\text{op}} \rangle_{\text{max}} = \frac{\alpha}{2} V_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} Q m a \omega_0^3$$

Il est intéressant de calculer l'énergie moyenne stockée par l'oscillateur et de la comparer à l'énergie dissipée sur une période. À la résonance, ces deux énergies sont directement liées au facteur de qualité Q . En effet, lorsque $\omega = \omega_0$, l'amplitude des oscillations vaut $A = Qa$ de sorte que l'énergie dissipée sur une période s'écrit

$$\begin{aligned}
 E_{\text{diss}} &= \langle P_{\text{op}} \rangle \frac{2\pi}{\omega_0} \\
 &= \frac{1}{2} \alpha V^2 \frac{2\pi}{\omega_0} \\
 E_{\text{diss}} &= \pi \alpha A^2 \omega_0
 \end{aligned}$$

alors que l'énergie mécanique stockée sous forme d'énergie cinétique et potentielle vaut, en moyenne,

$$\langle E_m \rangle = \frac{1}{2} k A^2$$

Le rapport des ces deux énergies donne (en utilisant $\omega_0/Q = \alpha/m$ et $\omega_0^2 = k/m$)

$$\frac{\langle E_m \rangle}{E_{\text{diss}}} = \frac{Q}{2\pi}$$

Plus Q est grand et plus la part d'énergie stockée sous forme cinétique et potentielle est grande devant l'énergie dissipée par période. On peut alors donner une interprétation énergétique du facteur de qualité :

Facteur de qualité :

Le facteur de qualité Q d'un système oscillant est 2π fois l'énergie moyenne emmagasinée dans le système divisée par l'énergie dissipée par cycle.

48.1.4 Lien avec l'oscillateur libre

Si l'on observe la réponse indicielle (réponse à un échelon) du système, on peut observée des oscillations libres amorties. La pulsation de ces oscillations, ou pseudo-pulsation est justement ω_0 , et sachant que l'enveloppe des oscillation est en $\exp(-h.t/M)$, on retrouve facilement que Q est de l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations visibles (on comprend qu'au bout d'un temps M/h environ, les oscillations sont suffisamment amorties pour êtres négligées).

Quant à la réponse impulsionnelle (réponse à une excitation du type dirac), ce n'est autre que la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert du système.

Ainsi, on peut totalement caractériser un système, et prévoir sa résonance, à partir de son comportement en tant qu'oscillateur libre.

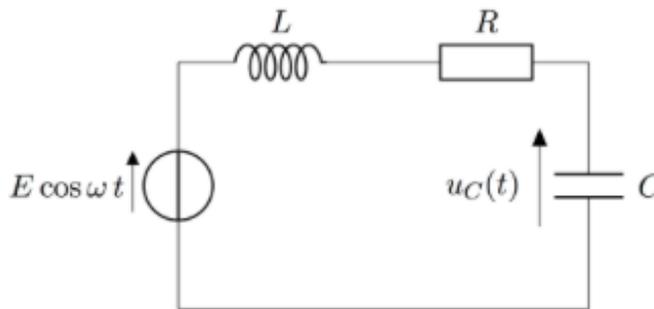
48.2 Généralisation

48.2.1 Analogie formelle

Il existe une analogie formelle très intéressante entre la mécanique et l'électrocinétique. La position x est l'équivalent de la charge q , et ensuite, toutes les grandeurs classiques de mécanique ont un équivalent en électrocinétique qui assure la compatibilité des équations :

48.2.2 Application au RLC série

Etude de la tension aux bornes du condensateur



Le premier montage est celui où l'on enregistre la tension aux bornes du condensateur, comme dans l'étude du régime libre du RLC série.

Si l'on étudie classiquement le circuit de la figure, on établit l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ à l'aide de la loi des mailles; on obtient :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = E \cos \omega t$$

En notation complexe :

$$\underline{u}_C(t) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R} \underline{e}(t) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R} \underline{e}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

L'amplitude de $u_C(t)$ est donnée par le module de l'amplitude complexe :

$$\underline{U}_C = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Donc

$$U_C = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

soit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$U_C = \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

Si on veut connaître le sens de variation de U_C , on peut se référer à celui de

$$f(x) = (1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2.$$

Comme $U_C = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ et que la fonction $\sqrt{\quad}$ est croissante, U_C varie de manière inverse à $f(x)$.

$$f'(x) = 2 \times (-2x) \times (1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2} = -4x + 4x^3 + \frac{2x}{Q^2} = 4x \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right)$$

Cette dérivée s'annule pour $x = 0$ et pour $x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} = 0$.

Cette deuxième condition implique que $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ si et seulement si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ soit $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

On distingue alors deux cas :

Cas d'un petit facteur de qualité : $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$

La dérivée $f'(x)$ ne s'annule que pour $x = 0$, $f(x)$ est croissante ($4x$ croissant et $x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}$ croissant) de $]0, +\infty[$

Donc la fonction d'amplitude U_C est décroissante sur $]0, +\infty[$

Ces limites sont :

$$\begin{aligned} & - \lim_{x \rightarrow 0} U_C = E; \\ & - \lim_{x \rightarrow +\infty} U_C = 0; \end{aligned}$$

Cas d'un grand facteur de qualité : $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Cette fois $f'(x)$ possède deux racines, $x = 0$ et $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, racine du polynôme du second degré contenu dans $f'(x)$.

$f'(x)$ est du signe du polynôme du second degré, donc du signe du "a" de ce polynôme partout sauf entre les racines. On sait aussi que U_C varie de façon inverse à $f(x)$.

Du coup, on peut dresser le tableau de variation suivant :

x	0	$x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		Décroissante	Croissante
U_C		Croissante	décroissante

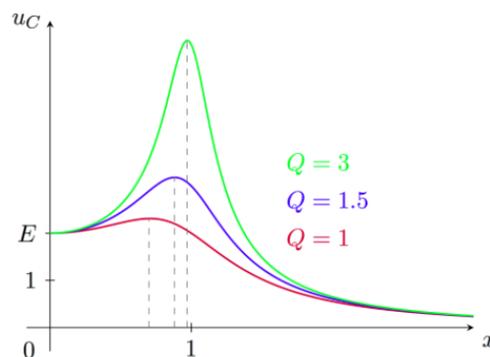
$U_{\max} = \frac{2Q^2 E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$

Il y a donc un maximum d'amplitude pour $x = x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, c'est ce phénomène que l'on appelle résonance en tension

A la résonance, U_C est maximum et est supérieure à E : c'est ce que l'on appelle la surtension.

De plus, les limites de U_C sont les mêmes que pour le cas précédent.

Dessignons l'allure de l'amplitude U_C en fonction de x pour plusieurs valeurs de facteur de qualité :

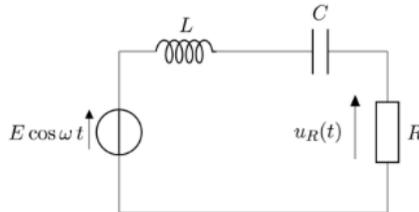


Nous observons que :

- La résonance est d'autant plus aigüe (pic étroit) que le facteur de qualité est grand ;

- Plus ce facteur est grand, plus la pulsation de résonance tend vers la pulsation propre du circuit (puisque $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ tend vers 1) en restant toujours inférieure à elle ;
- La surtension est d'autant plus grande que le facteur de qualité est grand.

Etude de l'intensité



Pour cette étude, nous nous servons de la relation entre la tension aux bornes du condensateur, que nous venons de déterminer, et l'intensité du courant.

En effet, on a : $i = C \frac{du_C}{dt}$ en convention récepteur.

Ainsi, si la tension aux bornes du condensateur est la somme d'une tension correspondant au régime transitoire et d'une tension correspondant au régime permanent (forcé), il en est de même pour l'intensité. Comme nous l'avons dit précédemment, on ne s'intéresse qu'au régime forcé.

$$\underline{i} = C \frac{d\underline{u}}{dt} = jC\omega \underline{u}$$

On a donc directement \underline{i} à partir de \underline{u} :

$$\underline{i} = jC\omega \frac{\underline{e}(t)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Ainsi que son amplitude complexe :

$$\underline{I} = jC\omega \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Amplitude de l'intensité réelle

On prend alors le module de l'amplitude complexe :

$$I = \frac{EC\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

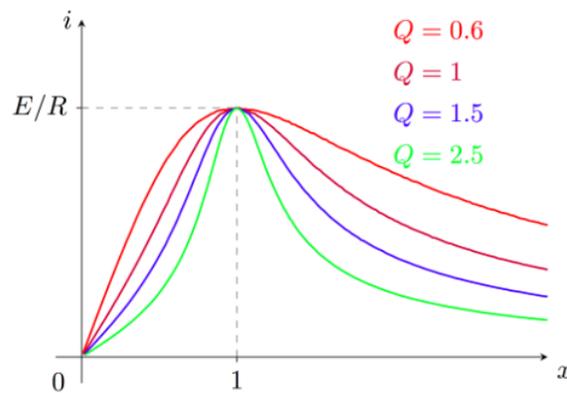
On passe alors en variable réduite :

$$I = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

- On pose $f(x) = 1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$;
- On calcule sa dérivée :

$$f'(x) = 2Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

- Cette dérivée s'annule pour $x = 1$, elle est négative dans l'intervalle $]0, 1[$ et positive dans l'intervalle $]1, +\infty[$;
- La fonction $f(x)$ est donc décroissante dans l'intervalle $]0, 1[$ et croissante dans l'intervalle $]1, +\infty[$;
- Comme la fonction $\sqrt{\quad}$ est croissante, la fonction $I(x)$ varie inversement à la fonction $f(x)$ et est croissante dans l'intervalle $]0, 1[$ et décroissante dans l'intervalle $]1, +\infty[$;
- Ceci impose que $I(x)$ admet un maximum en $x = 1$ et que ce maximum vaut $\frac{E}{R}$.



Il y a toujours résonance en intensité quelque soit la valeur du facteur de qualité, cette résonance a toujours lieu pour $\omega = \omega_0$ et le maximum atteint a toujours la valeur $\frac{E}{R}$.

48.2.3 Extension de la définition

Réponse du système : ce peut être la position, la vitesse, l'accélération, la puissance, la charge, l'intensité, la tension... ce que l'on veut. En revanche, pour garder la description en termes énergétique, il faut choisir un couple de variables réponse / excitation tel que la première soit une grandeur cinétique et l'autre une grandeur potentielle, et tel que leur produit exprime une puissance.

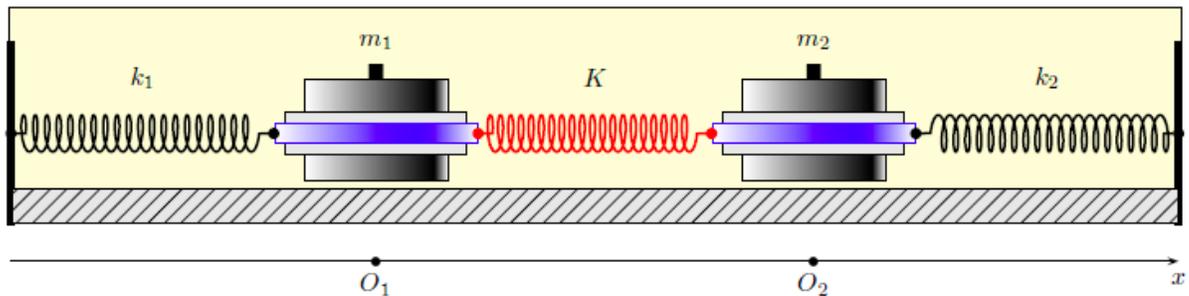
Maximum : on peut étendre la définition à un extremum, les cas où l'on passe par un minimum de puissance transférée étant alors des antirésonances.

Pulsation de résonance : il peut y en avoir plusieurs, notamment dans le cas d'un système formé de plusieurs oscillateurs couplés.

Linéarité : la définition de la résonance s'étend facilement à des systèmes non linéaire, et il se peut alors que la pulsation de résonance ou le facteur de qualité soit dépendant de l'amplitude d'excitation...

48.3 Du macroscopique au microscopique : du discret au continu

48.3.1 Oscillateurs couplés



Dans le cas de deux oscillateurs mécaniques identiques couplés par un ressort, on observe un déplacement des pulsations de résonance : l'une, plus basse, correspond à une oscillation symétrique (ou en phase) des deux sous-systèmes, l'autre, plus haute, correspond à une oscillation anti-symétrique (ou en opposition de phase) des deux sous-systèmes. Chaque résonance correspond à ce que l'on appelle un mode normal.

On peut traiter cela dans le cas général d'un système à n degrés de libertés couplés en utilisant le système de coordonnées généralisées (ou coordonnées normales) qui permet le

découplage des équations (ça revient à diagonaliser une matrice) : chaque mode propre est alors en fait un mode collectif, mais dont le comportement est indépendant des autres modes. Dans le cas de trois oscillateurs couplés, on a alors trois modes normaux. Pour n oscillateurs, on observera ainsi n modes normaux. Nous ne traiterons pas le cas d'une chaîne d'oscillateur, mais on comprend que quand n deviendra très grand, la description en termes d'oscillateurs devient inopérante, et il est alors commode d'introduire la notion d'onde.

Ainsi, les résonances d'un système constitué d'une infinité d'oscillateurs microscopiques seront caractérisées par les conditions aux limites et se présenteront sous forme d'ondes stationnaires.

Exemple : une colonne d'air est constituée d'une infinité de couches infinitésimales de fluide, dont la compressibilité joue le rôle de ressort. L'oscillation de toutes ces couches en phase donnera lieu à une onde stationnaire que l'on appelle mode fondamental ou encore première harmonique. L'oscillation de ces couches telles que les deux moitiés de la colonne sont en opposition de phase formera également une onde stationnaire, mais dont la pulsation sera double de la précédente : il s'agit de la seconde harmonique...

On peut alors étendre cette interprétation à tout type d'onde confinée dans un système fermée. C'est le cas de la cavité Fabry-Perot. Nous allons ici simplement montrer qu'un tel système se comporte comme un résonateur, avec une infinité de résonances (ou modes), et nous retrouverons les caractéristiques générale de la résonance.

48.3.2 Cavité Fabry-Pérot

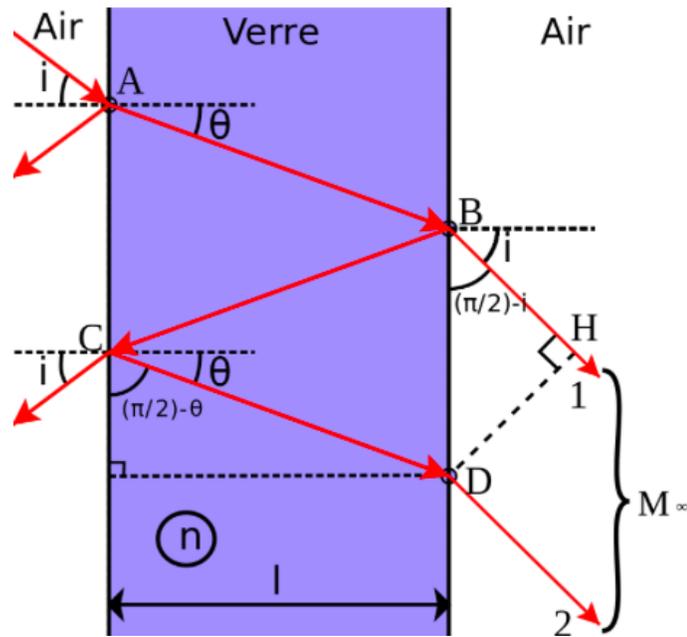
L'interféromètre de Fabry-Perot est un interféromètre optique constitué de deux miroirs semi-réfléchissants plans et parallèles à hauts coefficients de réflexion. Il doit son appellation à Charles Fabry et Alfred Perot.

La lumière entrante effectue de multiples aller-retour à l'intérieur de cette cavité optique et ressort partiellement à chaque réflexion. Les rayons sortants interfèrent entre eux et produisent des anneaux d'interférence localisés à l'infini.

L'interféromètre est constitué d'une paire de lames semi-réfléchissantes. Les lames sont généralement en coin (une fraction de degré), pour éviter des franges d'interférence dues aux faces arrières ; les dites faces arrières ont en général un traitement antireflet. Le système peut comporter en sortie une lentille de focalisation.

Le système est typiquement éclairé par un faisceau collimaté.

Pour simplifier l'étude, on suppose que l'interféromètre est éclairé par une source de lumière monochromatique. On peut représenter, comme sur la figure ci-contre, un rayon en particulier, et calculer sa contribution à la lumière sortante.



Les rayons lumineux sortant par la deuxième surface aux points "b" et "c" n'ont pas parcouru la même longueur de trajet (ou chemin optique). Ainsi, ils présentent un déphasage ϕ l'un par rapport à l'autre, dépendant de l'angle θ .

Ces deux rayons interfèrent entre eux ainsi qu'avec tous les autres rayons qui auront été réfléchis plusieurs fois entre les deux surfaces réfléchissantes. On peut alors montrer que, selon la valeur de θ , le rayon est transmis ou pas.

On s'aperçoit en fait que seules quelques valeurs de θ permettent de transmettre la lumière du rayon incident. Chacune de ces valeurs peut être directement visualisée : elles correspondent à une série d'anneaux concentriques observés sur la figure d'interférence. En effet, en plaçant une lentille convergente à la sortie de l'interféromètre, tous les rayons faisant le même angle θ par rapport à l'axe central de la lentille formeront un anneau.

Le déphasage entre deux rayons successifs est donnée par : $\Delta\phi = \Delta\phi(\theta) = 2knl \cos \theta$ où n est l'indice de réfraction de la couche, l son épaisseur, θ l'angle de réfraction et $k = 2\pi/\lambda$ où λ est la longueur d'onde. La phase du m -ième rayon est alors : $\phi_m = \phi_{m-1} + \Delta\phi = \phi_0 + m\Delta\phi$

Démonstration :

$\delta = (AM)_2 - (AM)_1 = (BM)_2 - (BM)_1 = (BC) + (CD) - (BH)$ d'après le théorème de Malus.

Or :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \frac{BH}{BD} = \sin(i) \text{ donc } BH = BD \sin(i)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{l}{BC} = \cos(\theta) \text{ donc } BC = CD = \frac{l}{\cos(\theta)}$$

Donc :

$$\delta = (BC) + (CD) - (BH) = \frac{nl}{\cos(r)} + \frac{nl}{\cos(r)} - BD \sin(i)$$

Or :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{l}{BD/2} = \frac{2l}{BD}$$

Donc :

$$BD = \frac{2l}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{2l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{2l \sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Donc :

$$\delta = \frac{2nl}{\cos(\theta)} - \frac{2l \sin(\theta)}{\cos(\theta)} \sin(i)$$

Or d'après la lois de Descartes sur la réfraction :

$$\sin(i) = n \sin(\theta)$$

Donc :

$$\delta = \frac{2nl - 2nl \sin^2(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{2nl(1 - \sin^2(\theta))}{\cos(\theta)} = \frac{2nl \cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}$$

D'où :

$$\delta = 2nl \cos(\theta)$$

Or on a par définition :

$$\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

Donc on a :

$$\phi = \frac{4\pi nl \cos(\theta)}{\lambda}$$

Donc en posant $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

On a finalement :

$$\phi = 2knl \cos \theta$$

Or le rayon m a subi deux réflexions de plus que le précédent si bien que chaque réflexion atténuant l'intensité lumineuse d'un facteur R , l'amplitude (qui est proportionnelle à la racine carrée de l'intensité) est atténuée d'un facteur \sqrt{R} à chaque réflexion. En notant s_i l'amplitude complexe du rayon incident et s_0 l'amplitude complexe du premier rayon qui sort de la couche mince, on en déduit l'amplitude complexe du m -ième rayon :

$$s_m = s_0(\sqrt{R})^{2m} e^{jm\Delta\phi} = s_0(Re^{j\Delta\phi})^m$$

Or le premier rayon qui sort de la couche mince a subi deux réfractions par rapport au rayon incident, chaque réfraction multipliant l'intensité lumineuse par $1 - R$. L'amplitude est donc multipliée par $\sqrt{1 - R}$ à chaque réfraction ; ainsi, l'amplitude du premier rayon qui sort de la couche mince, étant réfracté deux fois par rapport au rayon incident, s'écrit :

$$s_0 = (1 - R)s_i$$

Si on place alors une lentille convergente qui fait converger tous ces rayons vers un même point d'un écran placé au plan focal, l'amplitude de l'onde au niveau de cet écran s'écrit alors comme la somme des contributions de chaque rayon :

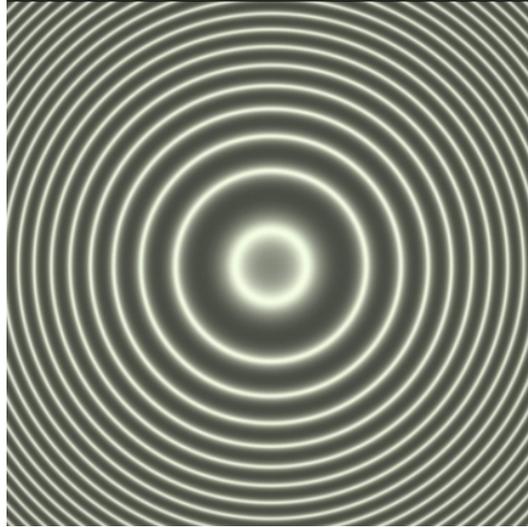
$$s_{tot} = \sum_{m=1}^{+\infty} s_m = s_0 \sum_{m=1}^{+\infty} (Re^{j\Delta\phi})^m = s_0 \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1 - (Re^{j\Delta\phi})^m}{1 - Re^{j\Delta\phi}} = s_0 \frac{1}{1 - Re^{j\Delta\phi}}$$

En notant I_i l'intensité lumineuse du rayon incident, l'intensité lumineuse de tous ces rayons qui converge vers un même point de l'écran est alors :

$$I_{tot} = |s_{tot}|^2 = s_{tot} \overline{s_{tot}} = \frac{s_0^2}{(1 - Re^{j\Delta\phi})(1 - Re^{-j\Delta\phi})} = |s_i|^2 \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Delta\phi} = I_i \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Delta\phi}$$

La transmittance est alors :

$$T(\theta) = \frac{I_{tot}}{I_i} = \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Delta\phi} = \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R(1 - 2 \sin^2 \frac{\Delta\phi}{2})} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\Delta\phi(\theta)}{2}}$$

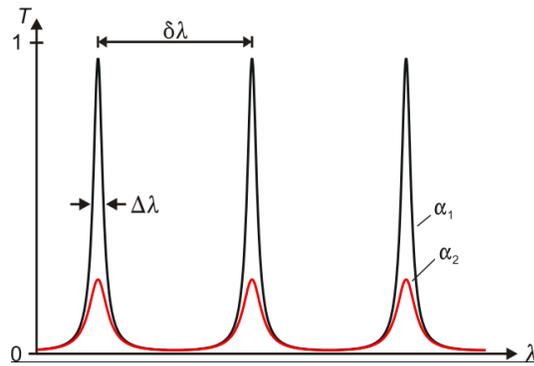


La figure d'interférence obtenue présente toujours des anneaux concentriques, mais leur taille varie en fonction de la distance entre les deux surfaces réfléchissantes, et de la longueur d'onde de la lumière utilisée. En effet, lorsqu'on étudie la formule précédente on s'aperçoit que seules quelques longueurs d'ondes sont transmises : la transmittance en fonction de λ présente des pics séparés de $\delta\lambda$ et d'une largeur $\Delta\lambda$.

La courbe correspondant à la transmittance en fonction de l'angle θ dépend de la longueur d'onde λ si bien qu'à chaque longueur d'onde correspond son propre "système d'anneaux". En présence de plusieurs longueurs d'ondes, on peut comparer ces différents systèmes d'anneaux afin de mesurer les longueurs d'ondes. Cet interféromètre est donc utilisé en spectrométrie.

La cavité est donc résonante (au sens où on retrouve un maximum de puissance transférée entre le rayonnement incident et le rayonnement transmis) pour toutes les pulsations multiples de c/L qui est appelé l'intervalle spectral libre. La fonction de transmission de la cavité est un peigne de fréquence.

On trouve l'ordre de grandeur en sachant que les coefficients de réflexion sont de l'ordre de 99 %, donc la fraction de droite est de l'ordre de 100, quant à la fraction de gauche, pour une cavité de l'ordre du centimètre et une longueur d'onde optique, elle est de l'ordre de 10^5 . D'où $Q \propto 10^7$.



Note : ici, Q dépend de la pulsation.

Si l'on coupe brutalement le champ incident, on retrouve une réponse du type oscillations de relaxation. Le champ dans la cavité fera donc environ 10^7 oscillations avant d'être sensiblement amorti...

Ce facteur de qualité exceptionnel en fait un filtre très sélectif en fréquence. C'est la base d'une application majeure du monde moderne : le laser.

Conclusion

Le phénomène de résonance est présent dans la quasi-totalité des domaines de la physique. Il permet notamment, dans le modèle de l'électron élastiquement lié, d'expliquer les pics d'absorptions atomiques. On peut l'observer tous les jours en regardant se balancer des branches d'arbres. C'est parfois un phénomène que l'on cherche à favoriser (ex : RMN, laser...) mais qui peut aussi être néfaste dans d'autres cas (ex : du pont Tacoma qui est entré en résonance avec le sillage qu'il a créé dans un vent fort auto-destruction du pont.).

Oscillateurs : portraits de phase et non linéarités



Bibliographie

- *Mécanique 1*, Faroux, Renault,
- *L'ordre dans le chaos*, Bergé, Pomeau
- *Vibrations et phénomènes de propagation. Tome 1*, Mathieu
- *Montages de physique*, Charmont, p. 149
- *Expériences d'électronique*, Duffait, p. 167
- *Réussir les TP de physique aux concours*, Sallen, p. 153
- *Expériences de physique (électronique)*, Bellier, p. 326
- *Expériences de physique (mécanique)*, Bellier, p. 355
- *Expériences de physique*, Duffait, p. 259
- *Les oscillateurs mécaniques et électriques*, CRDP

Prérequis :

- Oscillateurs linéaires : régime forcé et libre

Introduction :

Pour pouvoir résoudre les calculs, le physicien est amené à linéariser les équations. Pour cela on restreint la zone de validité des calculs. Mais on va voir que les phénomènes non linéaires sont très riches, ils donnent lieu à des phénomènes très différents.

49.1 Anharmonicité des oscillations libres du pendule pesant

Modélisation : masse m suspendue à un fil sans masse

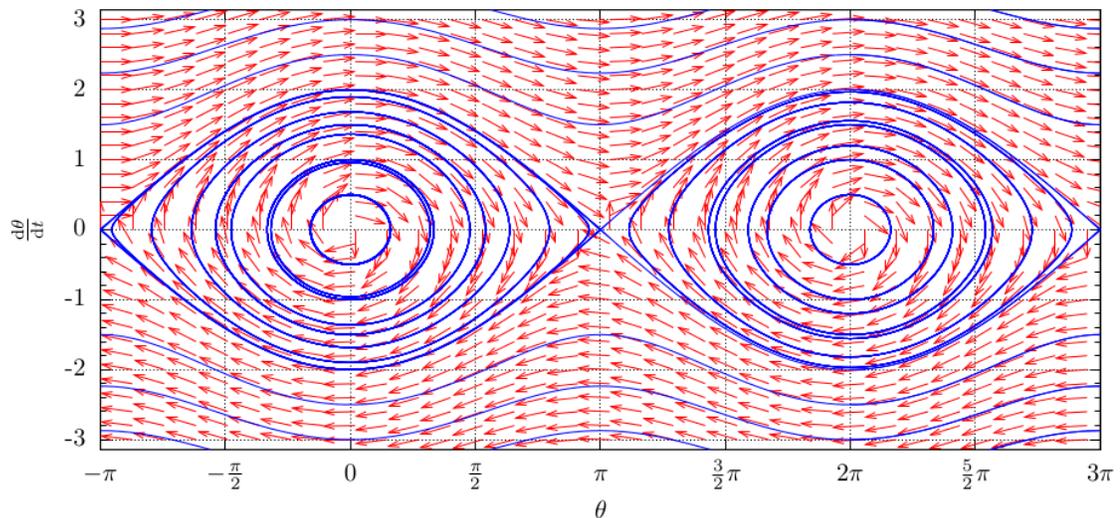
La théorème du moment cinétique donne : $\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$

49.1.1 Portraits de phase

On l'obtient en écrivant la conservation de l'énergie mécanique :

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

On constate que pour de petites amplitudes (pour lesquelles le régime est linéaire) l'oscillateur est harmonique (portrait de phases elliptique). En revanche, quand l'amplitude augmente, c'est faux. On se propose donc de décrire cette non linéarité.



49.1.2 Harmonicit  du régime linéaire

Oscillations de petite amplitude : linéarisation : $\theta \ll 1$

On a alors $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 : $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega_0 t$

Pulsation ind ependante de l'amplitude des oscillations : isochronisme des oscillations.

49.1.3 Anharmonicité du régime non linéaire

On suppose encore $\theta \ll 1$. DL à l'ordre 3 :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} \right) = 0$$

Equation non linéaire. La non linéarité est supposée faible donc on utilise la méthode des perturbations.

Approche qualitative :

On peut écrire l'équation du mouvement sous la forme :

$$\dot{\theta} + \omega_{\text{apparente}}^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_{\text{apparente}}^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{6} \right)$$

Si $\theta(t)$ était sinusoïdal $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$ alors on aurait $\langle \theta(t) \rangle = \frac{1}{2} \theta_0$ donc un ordre de grandeur de $\omega_{\text{apparente}}^2$ est $\omega_{\text{apparente}}^2 \sim \omega_0^2 \left(\theta - \frac{\theta^2}{12} \right)$

Approche quantitative :

Si on cherche $\theta(t)$ sous la forme $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$ alors des harmoniques apparaissent :

$$\theta^3 = \theta_0^3 \sin^3 \omega t = \frac{\theta_0^3}{4} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t)$$

donne un terme oscillant à 3ω . D'où l'idée de chercher $\theta(t)$ sous la forme

$$\theta(t) = \theta_0 (\sin \omega t - \epsilon \sin 3\omega t)$$

avec θ et $\epsilon \ll 1$.

On a :

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 - \omega_0^2 \frac{\theta_0^2}{8}\right) \sin \omega t + \left(\epsilon(\omega_0^2 - 9\omega^2) - \omega_0^2 \frac{\theta_0^2}{24}\right) \sin 3\omega t = 0$$

; On ne garde que le terme dominant dans le θ^3

$$-\omega_0^2(\sin \omega t + 9\epsilon \sin 3\omega t) + \omega_0^2 \left(\theta_0 \sin \omega t + \epsilon \theta_0 \sin 3\omega t - \frac{\theta_0^2}{6}\right) = 0$$

Les facteurs multiplicatifs doivent être nuls.

$$\omega_0 \approx \omega \left(1 - \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

La pulsation dépend de l'amplitude des oscillations (anisochronisme)

$\epsilon \approx \frac{\theta_0^2}{192}$ Le taux d'harmoniques augmente avec la non-linéarité.

49.2 Oscillations forcées d'un oscillateur non linéaire

On impose une excitation sinusoïdale de pulsation et on prend en compte les frottements :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta + \beta\theta^3 = F \sin \gamma t$$

On ne s'intéresse pas au régime transitoire qui s'amortit de toute façon.

49.2.1 Rappel : régime linéaire

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = F \sin \gamma t$$

En régime forcé : $\theta(t) = \theta_0 \sin(\gamma t + \varphi)$

L'amplitude des oscillations dépend de ω

$$\theta_0 = \frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\lambda^2}}$$

Courbe de résonance : symétrique par rapport à ω_0 .

49.2.2 Régime non linéaire

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta + \beta\theta^3 = F \sin \gamma t$$

La méthode des perturbations donne : $\theta(t) = \theta_0 \sin \gamma t + \theta_1 \sin 2\gamma t$

On ne s'intéresse ici qu'au terme dominant qui oscille à γ . C'est lui qui détermine vraiment l'amplitude des oscillations.

Effet de la non-linéarité :

Le terme en θ^3 donne une oscillation à γ et une à 3γ . Le terme en θ^2 donne une oscillation à 2γ et un terme constant.

Comme on l'a vu au I, le terme oscillant à γ modifie la fréquence propre du système :

$$\omega = \omega_0 + \chi\theta_0^2$$

(comme pour le pendule pesant).

(Remarque : χ dépend donc seulement de β .)

C'est le seul effet non linéaire à prendre en compte ici. Dans la suite on peut donc omettre le terme en α .

(On aurait pu ne pas en parler du tout mais cette discussion est intéressante.)

Approche qualitative de la résonance :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta + \beta\theta^3 = F \sin \gamma t$$

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2 \left(1 + \beta \frac{\theta^3}{\omega_0^3} \right) \theta = F \sin \gamma t$$

La résonance a lieu quand $\gamma = \omega_{apparente}$. Elle est donc déplacée vers les $\gamma > \omega_0$ si $\beta > 0$ et vers les $\gamma < \omega_0$ si $\beta < 0$. De plus la déformation augmente quand $\omega_{apparente}$ s'éloigne de ω_0 , donc quand θ augmente. Or si on augmente l'amplitude de l'excitation, θ augmente. Donc la courbe est d'autant plus déformée que l'amplitude F de l'excitation augmente.

Approche quantitative :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\gamma t + \varphi)$$

$$\text{donc } \theta^3(t) = \frac{3}{4}\theta_0^3 \sin(\gamma t + \varphi) \approx \frac{3}{4}\theta_0^2\theta(t)$$

L'équation du mouvement devient linéaire :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta}\omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta\theta_0^2\theta = F \sin \gamma t$$

On peut donc passer en notation complexe. On a alors :

$$\left[\left(\omega_0^2 - \gamma^2 + \frac{3}{4}\beta\theta_0^2 \right)^2 + (\gamma\omega_0^2\lambda)^2 \right] \theta_0^2 = F^2$$

D'où pour le module :

Equation du 3ème degré en θ_0^2 : 3 solutions. Seules les solutions réelles nous intéressent.

Si l'excitation est assez petite, l'amplitude des oscillations est suffisamment et on retrouve la formule du régime linéaire.

Quand F augmente, la courbe se déforme : perte de la symétrie. Une seule racine réelle.

A partir d'un certain seuil, 3 racines réelles.

La racine moyenne (partie CD de la courbe) correspond à des oscillations instables. En pratique le système oscille donc sur les branches ABC et DEF.

Hystérésis. Pour une même excitation (F, γ) , le système peut osciller avec 2 amplitudes différentes $\theta_m < \theta_M$. Si on part d'une faible valeur de γ et qu'on augmente γ , on parcourt la branche ABC. En C : rupture : saut de θ_M à θ_m . Puis on parcourt EF. En revanche si on part de F, on va parcourir FED. En D : saut de θ_m à θ_M . Puis on parcourt BA.

49.3 Oscillations auto entretenues

49.3.1 L'équation de Van de Pol

De nombreux systèmes physiques sont des oscillateurs auto-entretenus : ils engendrent des oscillations périodiques en empruntant de l'énergie à une source continue d'énergie. (Ex : vase de Tantale, qu'on peut montrer). Ces systèmes ne peuvent pas être décrits par l'équation

$$\ddot{s} + \epsilon\omega_0\dot{s} + \omega_0^2s = 0$$

- cette équation n'impose pas l'amplitude des oscillations alors qu'en réalité le système oscille avec une amplitude fixée.

- si $\epsilon < 0$: les frottements visqueux conduisent à une décroissance exponentielle des oscillations.

- si $\epsilon > 0$: l'apport d'énergie conduit à une augmentation exponentielle de l'amplitude des oscillations.

Moyen mathématique simple de décrire les oscillations auto-entretenues : $\epsilon(\theta)$

$$\epsilon(\theta) = -\epsilon_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right)$$

$\epsilon(\theta) < 0$ si $\theta > \theta_0$: amplification des petites oscillations

$\epsilon(\theta) > 0$ si $\theta < \theta_0$: amortissement des grandes oscillations

Equation de Van der Pol :

$$\ddot{s} - \epsilon_0\omega_0^2 \left(1 - \frac{s^2}{s_0^2} \right) \dot{s} + \omega_0^2s = 0$$

49.3.2 Réalisation expérimentale

On se propose de réaliser un oscillateur électronique qui obéit à l'équation de Van der Pol. Il y aura peut-être une plaquette toute faite, sinon on peut se contenter de réaliser un circuit RLC série dans lequel on ajoute un dipôle non linéaire (résistance négative) : description dans le Duffait. Seul truc à noter : il vaut mieux prendre une vraie bobine plutôt qu'une inductance électronique car cette dernière a une résistance interne importante qui modifie les paramètres du système.

Non linéarité polynomiale cubique

$$s = \alpha e + \beta e^3$$

$$v = \alpha i^3 - R'i$$

(Van der Pol) ou (modélisation du dipôle à résistance < 0).

Oscillateur de Van der Pol

49.3.3 Comportement dynamique

Démarrage des oscillations

Visualisation expérimentale : évolution temporelle en mode monocoup + diagramme de phase. Au début du mouvement : on néglige le terme $\frac{s^2}{s_0}$

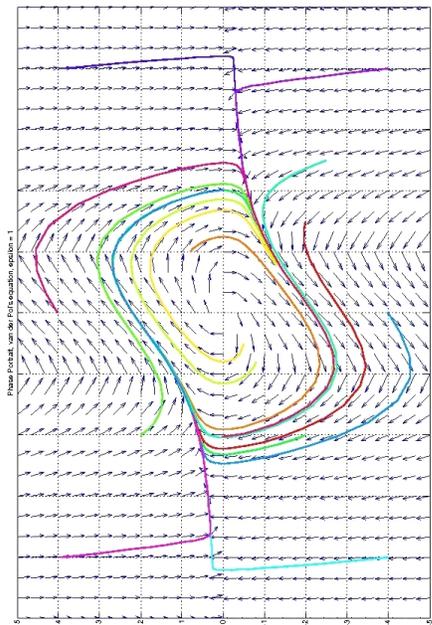
$$\ddot{s} - \epsilon\omega_0\dot{s} + \omega_0s = 0$$

Solution : croissance exponentielle

$$s(t) \simeq A \exp\left(\frac{\epsilon\omega_0}{2}t\right) \cos \omega t$$

Cycle limite

L'amplitude des oscillations se stabilise après un régime transitoire. Dans le plan de phase, la trajectoire converge vers un cycle limite périodique, appelé attracteur.



Caractéristiques du cycle limite? (Période, amplitude des oscillations) hyp : $\epsilon \ll 1$: faible non-linéarité.

En régime permanent : on cherche $s(t) = A \sin(\omega t) +$ perturbations. Le terme non linéaire fait alors apparaître $\sin^2(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{1}{4} \cos(\omega t) - \frac{1}{4} \cos(3\omega t)$. On va donc chercher

$$s(t) = A(\sin(\omega t) + \epsilon \cos(3\omega t))$$

On remarque à nouveau l'apparition d'harmoniques.

En injectant ceci dans l'équation de Van der Pol et en ne gardant que le terme dominant dans le terme en s^2 , on obtient une équation avec des termes en $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$ et $\cos(3\omega t)$. En annulant les 3 préfacteurs on obtient :

$$\omega = \omega_0$$

$A = 2s_0$ donc la linéarité gouverne l'amplitude

$\alpha = -\frac{\epsilon}{8}$ donc le taux d'harmoniques augmente avec la non-linéarité

Lien entre ϵ et la forme du cycle limite.

La forme du cycle limite dépend de ϵ . Si $\epsilon \ll 1$, les oscillations sont quasi-sinusoidales et le portrait de phase a une allure elliptique. Quand ϵ augmente, le portrait de phases se déforme et devient de + en + rectangulaire. Quand ϵ est suffisamment grand : oscillations de relaxation. Le système évolue en dents de scie entre 2 positions extrêmes.

Conclusion

Richesse des comportement non linéaires : apparition d'harmoniques, anisochronisme, hystérésis. Autres effets très riches et complexes par exemple le chaos.

