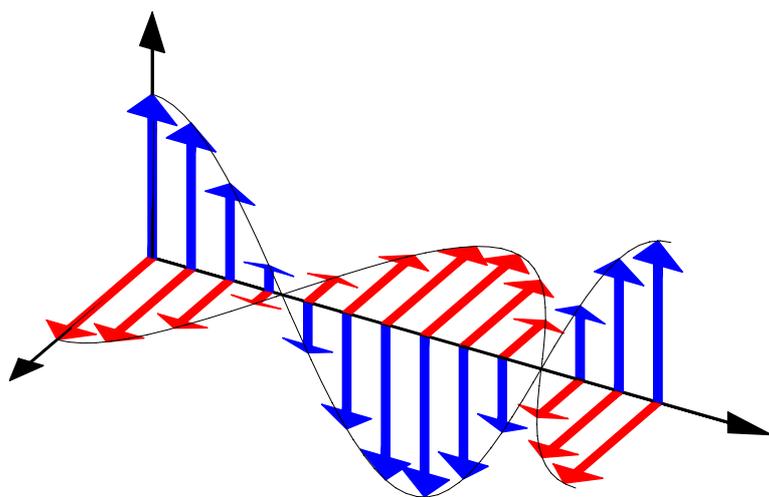


Université Paris-Sud Orsay

DEUG S3 SMR

ÉLECTROMAGNÉTISME



J.-J. LABARTHE

# ÉLECTROMAGNÉTISME

Mise à jour de ce cours sur le site  
<http://www.deugs3smr.u-psud.fr/DEUGS3SMR>

Début de rédaction : 26 octobre 2002  
Première version : 13 août 2004  
Cette version : 16 février 2005

**Jean-Jacques LABARTHE**

Laboratoire Aimé-Cotton

[www.lac.u-psud.fr](http://www.lac.u-psud.fr)

Bât 505 CNRS II

91405 ORSAY Cedex

Tél. : 01 69 35 20 49

Fax : 01 69 35 21 00

[labarthe@lac.u-psud.fr](mailto:labarthe@lac.u-psud.fr)

# Table des matières

<b>1 Révisions</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Charges et courants . . . . .	8
1.2.1 Répartition volumique . . . . .	8
1.2.2 Répartition surfacique . . . . .	9
1.2.3 Répartition linéique . . . . .	10
1.2.4 Conservation de la charge et équation de continuité . . . . .	10
1.3 Force de Lorentz . . . . .	11
1.3.1 Charge ponctuelle . . . . .	11
1.3.2 Répartition volumique . . . . .	11
1.3.3 Répartition surfacique . . . . .	12
1.3.4 Répartition linéique . . . . .	12
1.3.5 Changement de référentiel . . . . .	12
1.4 Électrostatique . . . . .	13
1.4.1 Champ électrostatique . . . . .	13
1.4.2 Potentiel électrostatique . . . . .	14
1.4.3 Théorème de Gauss et équation de Maxwell-Gauss . . . . .	14
1.4.4 Champ de vecteur conservatif . . . . .	15
1.4.5 Lois locales et intégrales de l'électrostatique . . . . .	17
1.4.6 Existence et unicité . . . . .	17
1.4.7 Dipôle électrique . . . . .	18
1.5 Magnétostatique . . . . .	21
1.5.1 Loi de Biot et Savart . . . . .	21
1.5.2 Potentiel vecteur . . . . .	21
1.5.3 Champ de vecteur à flux conservatif . . . . .	22
1.5.4 Lois locales et intégrales de la magnétostatique . . . . .	23
1.5.5 Dipôle magnétique . . . . .	24
1.6 Induction . . . . .	28
1.6.1 Loi de Faraday . . . . .	28
1.6.2 Applications de l'induction . . . . .	28
1.6.3 Équation de Maxwell-Faraday . . . . .	30
1.6.4 Cas du circuit immobile . . . . .	30
1.6.5 Cas du circuit en mouvement . . . . .	31
1.6.6 Loi de Lenz . . . . .	32

<b>2</b>	<b>Les équations de Maxwell dans le vide</b>	<b>33</b>
2.1	Les équations de Maxwell . . . . .	33
2.1.1	Constantes physiques . . . . .	34
2.1.2	Cas statique . . . . .	34
2.1.3	Propagation du champ électromagnétique . . . . .	35
2.1.4	Régimes quasistationnaires . . . . .	35
2.1.5	Combien y a-t-il d'équations de Maxwell? . . . . .	35
2.1.6	Équations de Maxwell dans le vide et dans les milieux . . . . .	36
2.2	Équation de Maxwell-Ampère . . . . .	37
2.2.1	Théorème d'Ampère généralisé . . . . .	37
2.2.2	Exemple du condensateur en régime quasistationnaire . . . . .	37
2.3	Relations de passage . . . . .	38
2.3.1	Équation de Maxwell-Gauss . . . . .	39
2.3.2	Équation de Maxwell-flux . . . . .	40
2.3.3	Équation de Maxwell-Ampère . . . . .	40
2.3.4	Équation de Maxwell-Faraday . . . . .	42
2.3.5	Autre forme des relations de passage . . . . .	43
2.4	Les potentiels scalaire et vectoriel . . . . .	43
2.4.1	Existence des potentiels . . . . .	43
2.4.2	Indétermination des potentiels . . . . .	45
2.4.3	Imposition d'une condition de jauge . . . . .	46
2.4.4	Équations des potentiels . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Énergie électromagnétique</b>	<b>49</b>
3.1	Puissance fournie aux charges par le champ électromagnétique . . . . .	49
3.1.1	Exemple d'un fil conducteur . . . . .	50
3.2	Loi de conservation de l'énergie . . . . .	50
3.2.1	Propriétés de l'énergie d'un système en interaction . . . . .	50
3.2.2	Forme locale . . . . .	51
3.2.3	Le théorème de Poynting . . . . .	52
3.2.4	Indétermination de la densité d'énergie . . . . .	53
3.3	Exemples . . . . .	54
3.3.1	Fil conducteur . . . . .	54
3.3.2	Charge électrique ponctuelle et dipôle magnétique . . . . .	54
3.3.3	Condensateur chargé (électrostatique) . . . . .	55
3.3.4	Solénoïde (magnétostatique) . . . . .	55
3.4	Energie d'un système de courants . . . . .	55
3.4.1	Energie d'un circuit, auto-induction . . . . .	55
3.4.2	Induction mutuelle . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Ondes électromagnétiques dans le vide</b>	<b>59</b>
4.1	Équation de propagation . . . . .	59
4.2	Onde plane progressive harmonique (OPPH) . . . . .	60
4.2.1	Exemple . . . . .	61
4.2.2	Importance des OPPH . . . . .	62
4.3	Polarisation . . . . .	63
4.3.1	Polarisation rectiligne . . . . .	63
4.3.2	Polarisation circulaire gauche . . . . .	64
4.3.3	Polarisation circulaire droite . . . . .	64
4.3.4	Polarisation elliptique . . . . .	64

4.4	Énergie d'une OPPH . . . . .	65
4.5	Photons . . . . .	66
4.6	Polariseurs et loi de Malus . . . . .	68
4.7	Spectre des ondes électromagnétiques . . . . .	70
4.7.1	Radiofréquences . . . . .	70
4.7.2	Hyperfréquences . . . . .	72
4.7.3	Infrarouge . . . . .	73
4.7.4	Lumière visible . . . . .	74
4.7.5	Ultraviolet . . . . .	74
4.7.6	Rayons X . . . . .	74
4.7.7	Rayons gamma . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Propagation guidée</b> . . . . .	<b>77</b>
5.1	Introduction . . . . .	77
5.2	Conducteur parfait . . . . .	78
5.3	Symétrie de translation . . . . .	79
5.4	Un conducteur . . . . .	79
5.4.1	Conditions aux limites . . . . .	80
5.4.2	Équation d'onde et équations de Maxwell . . . . .	80
5.4.3	Mode TE . . . . .	83
5.4.4	Mode TM . . . . .	84
5.4.5	Mode TEM . . . . .	84
5.4.6	Interprétation comme superposition d'OPPH . . . . .	84
5.5	Deux plans conducteurs . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Milieux diélectriques et aimantés</b> . . . . .	<b>91</b>
6.1	Introduction . . . . .	91
6.1.1	Champ électromagnétique microscopique et macroscopique . . . . .	91
6.1.2	Charges et courants liés et libres . . . . .	92
6.2	Milieux diélectriques . . . . .	92
6.2.1	Polarisation diélectrique . . . . .	92
6.2.2	Polarisation diélectrique permanente . . . . .	93
6.2.3	Piézoélectricité . . . . .	93
6.2.4	Polarisation induite par un champ électrique . . . . .	93
6.2.5	Condensateur plan avec un milieu diélectrique . . . . .	95
6.2.6	Charges de polarisation d'un diélectrique . . . . .	97
6.2.7	Vecteur déplacement électrique . . . . .	98
6.2.8	Équations de Maxwell dans les milieux diélectriques . . . . .	99
6.3	Milieux magnétiques . . . . .	103
6.3.1	Vecteur aimantation . . . . .	103
6.3.2	Diamagnétisme et paramagnétisme . . . . .	103
6.3.3	Ferromagnétisme . . . . .	104
6.3.4	Courants de magnétisation . . . . .	107
6.3.5	Équations de Maxwell dans les milieux . . . . .	107

<b>7 Ondes électromagnétiques dans les milieux</b>	<b>111</b>
7.1 Ondes dans les milieux lhi non magnétiques . . . . .	111
7.1.1 Milieu transparent . . . . .	112
7.1.2 Milieu absorbant . . . . .	112
7.2 Réflexion et transmission sur un dioptre plan . . . . .	114
7.2.1 Lois de Snell-Descartes . . . . .	114
7.2.2 Démonstration des lois de Snell-Descartes . . . . .	115
7.2.3 Ondes évanescentes (cas de la réflexion totale) . . . . .	116
7.2.4 Conditions aux limites . . . . .	118
7.2.5 Amplitudes réfléchie et transmise en incidence normale . . . . .	119
7.2.6 Pouvoir réflecteur et pouvoir de transmission . . . . .	120
7.2.7 Exemple numérique . . . . .	120
<b>A Corrigé des exercices</b>	<b>121</b>
<b>B Note historique</b>	<b>126</b>
<b>C Constantes physiques</b>	<b>128</b>
<b>D Index des symboles</b>	<b>129</b>
<b>E Index des noms propres</b>	<b>131</b>

# 1

## Révisions

### 1.1 Introduction

Le champ électromagnétique est composé de deux champs vectoriels :

- le champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  (unité :  $\text{V m}^{-1}$  [volt<sup>1</sup> par mètre]) ;
- le champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  (unité : T [tesla<sup>2</sup>]).

Ce premier chapitre effectue divers rappels :

- les définitions des charges et des courants électriques (section 1.2) ;
- les forces exercées par les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sur les charges (section 1.3) ;
- les lois de l'électrostatique (section 1.4) et de la magnétostatique (section 1.5) ;
- la loi de l'induction de Faraday<sup>3</sup> (section 1.6).

Dans le chapitre 2, on introduira les **équations de Maxwell**<sup>4</sup> qui forment les postulats de base de la théorie de Maxwell et permettent de déterminer le champ électromagnétique en régime dépendant du temps à partir des charges et des courants.

Le champ électromagnétique possède une énergie (étudiée dans le chapitre 3), une quantité de mouvement et un moment cinétique (propriétés non exposées dans ce cours).

La théorie de Maxwell prévoit l'existence d'ondes électromagnétiques (lumière, ondes radio, ...). Le chapitre 4 étudie ces ondes lorsqu'elles se propagent dans le vide et le chapitre 5 lorsqu'elles sont guidées par des conducteurs.

Le chapitre 6 introduit quelques notions sur les milieux diélectriques et aimantés et le chapitre 7 les ondes électromagnétiques dans les milieux.

---

1. Graf Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta (1745-1827)

2. Nikola Tesla (1856-1943)

3. Michael Faraday (1791-1867)

4. James Clerk Maxwell (1831-1879)

## 1.2 Charges et courants

### 1.2.1 Répartition volumique

Considérons un élément de volume  $d\tau$  contenant  $N$  particules ponctuelles respectivement de charge  $q_a$  et de vitesse  $\vec{v}_a$  ( $a = 1, 2, \dots, N$ ). La **charge volumique** (ou **densité volumique de charge**)  $\rho$  (unité: C m<sup>-3</sup> [Coulomb<sup>5</sup> par mètre cube]) est définie par

$$\rho(\vec{r}, t) d\tau = \sum_{a=1}^N q_a. \quad (1.1)$$

La valeur  $\rho(\vec{r}, t)$  ne dépend pas de la taille du volume  $d\tau$ , du moins tant que ce volume reste assez petit tout en contenant un très grand nombre de particules. Du point de vue des calculs, on pourra traiter  $d\tau$  comme un infinitésimal. L'équation (1.1) signifie que la charge électrique  $Q$  contenue dans un volume  $V$  quelconque se calcule par

$$Q = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) d\tau. \quad (1.2)$$

Cette intégrale est en effet la somme de toutes les charges  $q_a$  contenues dans le volume  $V$ .

Le **courant volumique**  $\vec{j}$  (unité: A m<sup>-2</sup> [Ampère<sup>6</sup> par mètre carré]) est défini par

$$\vec{j}(\vec{r}, t) d\tau = \sum_{a=1}^N q_a \vec{v}_a. \quad (1.3)$$

Justifions cette expression du courant volumique. Supposons d'abord que toutes les particules dans le volume  $d\tau$  ont la même vitesse  $\vec{v}$ . D'après (1.1),  $\vec{j} d\tau = \sum_{a=1}^N q_a \vec{v} = \rho d\tau \vec{v}$  et le courant volumique vaut

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (1.4)$$

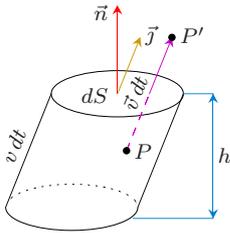


FIG. 1.1 – Calcul du courant.

Calculons l'intensité du courant électrique qui traverse la surface infinitésimale  $dS$  dans le sens d'un vecteur unitaire  $\vec{n}$  normal à  $dS$  (cf. figure 1.1). La charge située en  $P$  au temps  $t$  se déplace jusqu'au point  $P'$  ( $\overrightarrow{PP'} = \vec{v} dt$ ) pendant le temps  $dt$ . Elle traverse la surface  $dS$  entre les temps  $t$  et  $t + dt$  si le point  $P$  se trouve dans le cylindre de base  $dS$  et de génératrice  $\vec{v} dt$ . La hauteur  $h$  de ce cylindre est  $h = \vec{n} \cdot \vec{v} dt$  et son volume  $d\tau = \vec{n} \cdot \vec{v} dt dS$ . La charge électrique dans le cylindre  $dQ = \rho d\tau = \rho \vec{n} \cdot \vec{v} dt dS$  est aussi la charge qui traverse la surface  $dS$  pendant le temps  $dt$ . On en déduit que

5. Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

6. André Marie Ampère (1775-1836)

l'intensité du courant électrique à travers  $dS$  est  $dI = dQ/dt = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ . Cette intensité est le flux élémentaire du courant volumique  $\vec{j}$  à travers  $dS$  :

$$dI = \vec{j} \cdot \vec{n} dS. \quad (1.5)$$

L'intensité algébrique  $I$  (on peut avoir  $I < 0$ ) du courant qui traverse une surface orientée finie  $S$  s'obtient comme le flux du courant volumique  $\vec{j}$  à travers  $S$  :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS. \quad (1.6)$$

L'expression (1.6) reste valable lorsque toutes les charges n'ont pas la même vitesse dans le volume  $d\tau$ . Par exemple, s'il y a deux types de charges, 1 et 2, les charges de type  $i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) étant toutes animées de la vitesse  $\vec{v}_i$ , désignons par  $\rho_i$  la charge volumique et par  $\vec{j}_i = \rho_i \vec{v}_i$  le courant volumique associés aux charges de type  $i$ . La charge volumique totale est  $\rho = \rho_1 + \rho_2$ . Le courant volumique total est

$$\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \rho_1 \vec{v}_1 + \rho_2 \vec{v}_2 \quad (1.7)$$

ce qui implique que le flux (1.6) est la somme des flux de  $\vec{j}_1$  et  $\vec{j}_2$ , et donc l'intensité du courant à travers  $S$ .

### 1.2.2 Répartition surfacique

Supposons que les charges soient localisées sur une surface  $S$  (répartition surfacique de charge et de courant). La **charge surfacique** (ou **densité surfacique de charge**)  $\sigma$  (unité:  $C m^{-2}$ ) et le **courant surfacique**  $\vec{j}_\sigma$  (unité:  $A m^{-1}$ ) sont définis par

$$\sigma(\vec{r}, t) dS = \sum_{a=1}^N q_a, \quad \vec{j}_\sigma(\vec{r}, t) dS = \sum_{a=1}^N q_a \vec{v}_a \quad (1.8)$$

où la somme  $\sum_{a=1}^N$  porte sur les  $N$  particules ponctuelles qui se trouvent sur l'élément de surface  $dS$ . Noter que  $\vec{v}_a$  et  $\vec{j}_\sigma$  sont parallèles à la surface.

Si toutes les charges dans l'élément de surface  $dS$  ont la même vitesse  $\vec{v}$ , on a la relation

$$\vec{j}_\sigma = \sigma \vec{v} \quad (1.9)$$

qui est analogue à (1.4).

**Exercice 1.1 (Courant volumique et courant surfacique).** Soit un cylindre conducteur creux d'axe  $Oz$ , de rayon  $r$ , d'épaisseur  $a$  ( $a \ll r$ ) parcouru par un courant constant  $I$  (cf. figure 1.2).

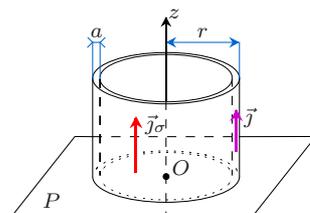


FIG. 1.2 – Courant surfacique comme limite d'un courant volumique.

1. On suppose que le courant volumique  $\vec{j}$  dans l'épaisseur du conducteur est uniforme et parallèle à  $Oz$ . En calculant l'intensité du courant traversant un plan  $P$  perpendiculaire à  $Oz$  montrer que

$$\vec{j} = \frac{I\vec{u}_z}{2\pi r a}. \quad (1.10)$$

2. On suppose que le courant  $I$  est dû à une répartition surfacique de courant située sur la surface cylindrique de rayon  $r$ . Déterminer le courant surfacique  $\vec{j}_\sigma$  sachant qu'il est uniforme et parallèle à  $Oz$ .

### 1.2.3 Répartition linéique

Supposons que les charges soient localisées sur un fil  $\Gamma$  (répartition linéique de charge et de courant). La **charge linéique** (ou **densité linéique de charge**)  $\lambda$  (unité: C m<sup>-1</sup>) et le **courant [linéique]**  $\vec{I}$  (unité: A) sont définis par

$$\lambda(\vec{r}, t)dl = \sum_{a=1}^N q_a, \quad \vec{I}(\vec{r}, t)dl = \sum_{a=1}^N q_a \vec{v}_a \quad (1.11)$$

où la somme  $\sum_{a=1}^N$  porte sur les  $N$  particules ponctuelles qui se trouvent dans l'élément  $MM'$ . Noter que  $\vec{v}_a$  et  $\vec{I} = I\vec{u}$  sont tangents en  $M$  au fil  $\Gamma$  (cf. figure 1.3).

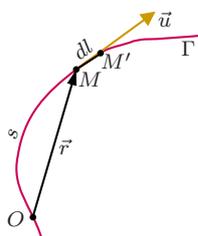


FIG. 1.3 – Répartition linéique.

### 1.2.4 Conservation de la charge et équation de continuité

Se reporter au chapitre 3 du cours *Corde vibrante & acoustique*.

Dans le cas d'une distribution volumique de charges et de courants, l'équation de continuité qui exprime la conservation de la charge est

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0} \quad (1.12)$$

ou encore

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0. \quad (1.13)$$

Dans le cas d'une distribution surfacique de charges et de courants localisée dans le plan  $Oxy$ , les charges ne sortant pas du plan (feuille conductrice très fine), l'équation de continuité s'écrit en fonction de la charge surfacique  $\sigma(x, y, t)$  et du courant surfacique  $\vec{j}_\sigma(x, y, t) = (j_{\sigma x}(x, y, t), j_{\sigma y}(x, y, t), 0)$ :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial j_{\sigma x}}{\partial x} + \frac{\partial j_{\sigma y}}{\partial y} = 0. \quad (1.14)$$

Lorsque le conducteur n'est pas réduit à une surface très mince, la variation de charge surfacique peut être produite par des courants volumiques

qui butent contre la surface. C'est ce qui se passe sur l'armature d'un condensateur (cf. figure 1.4). Supposons que les courants surfaciques soient négligeables. L'accroissement des charges portées par l'élément de surface  $\delta S$  de l'armature pendant le temps  $dt$  est

$$d\sigma \delta S = \vec{j} \cdot \vec{n} \delta S dt = j_n \delta S dt \quad (1.15)$$

et la conservation de la charge se traduit par

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = j_n. \quad (1.16)$$

Dans le cas d'une distribution linéique de charges et de courants localisée sur un fil  $\Gamma$ , définissons l'abscisse curviligne  $s$  du point  $M$  par la longueur de la courbe  $\widehat{OM}$  (cf. figure 1.3). L'équation de continuité s'écrit en fonction de la charge linéique  $\lambda(s, t)$  et du courant  $I(s, t)$  :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial s} = 0. \quad (1.17)$$

## 1.3 Force de Lorentz

### 1.3.1 Charge ponctuelle

La force exercée par le champ électromagnétique sur une particule ponctuelle, de charge  $q$ , de vitesse  $\vec{v}$  et située au point  $M$  (on pose  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ) à l'instant  $t$  est donnée par la **formule de Lorentz**<sup>7</sup> :

$$\vec{F} = q \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) \right]. \quad (1.18)$$

### 1.3.2 Répartition volumique

Dans le cas d'une répartition volumique de charge  $\rho$  et de courant  $\vec{j}$ , la force élémentaire  $d^3\vec{F}$  agissant à l'instant  $t$  sur l'élément de volume  $d\tau$  localisé en  $\vec{r}$  est

$$d^3\vec{F} = \left[ \rho(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{j}(\vec{r}, t) \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) \right] d\tau. \quad (1.19)$$

La formule (1.19) résulte de (1.18) de la façon suivante. La force électromagnétique totale agissant sur le volume  $d\tau$  à l'instant  $t$  est

$$\begin{aligned} d^3\vec{F} &= \sum_{a=1}^N q_a \left[ \vec{E}(\vec{r}_a, t) + \vec{v}_a \wedge \vec{B}(\vec{r}_a, t) \right] \\ &\approx \left( \sum_{a=1}^N q_a \right) \vec{E}(\vec{r}, t) + \left( \sum_{a=1}^N q_a \vec{v}_a \right) \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (1.20)$$

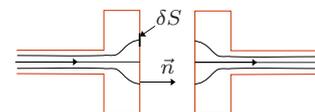


FIG. 1.4 – Courant à travers un condensateur.

7. Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)

où on a remplacé  $\vec{r}_a$  par  $\vec{r}$  (volume  $d\tau$  infinitésimal). La dernière expression dans (1.20) est identique à (1.19) d'après (1.1) et (1.3).

### 1.3.3 Répartition surfacique

Supposons que les charges soient localisées sur une surface  $S$  (répartition surfacique de charge  $\sigma$  et de courant  $\vec{j}_\sigma$ ). La force élémentaire  $d^2\vec{F}$  agissant à l'instant  $t$  sur l'élément de surface  $dS$  localisé en  $\vec{r}$  est

$$d^2\vec{F} = \left[ \sigma(\vec{r}, t)\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{j}_\sigma(\vec{r}, t) \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) \right] dS. \quad (1.21)$$

Cette formule résulte également de (1.18).

### 1.3.4 Répartition linéique

Supposons que les charges soient localisées sur un fil  $\Gamma$  (répartition linéique de charge  $\lambda$  et de courant  $\vec{I}$ ). La force élémentaire  $d\vec{F}$  agissant à l'instant  $t$  sur l'élément infinitésimal  $MM'$  de longueur  $dl$  est

$$d\vec{F} = \left[ \lambda(\vec{r}, t)\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{I}(\vec{r}, t) \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) \right] dl. \quad (1.22)$$

Lorsque le fil  $\Gamma$  est parcouru par un courant d'intensité constante  $I$  et que la charge linéique est nulle, l'équation (1.22) se réduit à la force magnétique de Laplace<sup>8</sup>

$$d\vec{F} = I\vec{dl} \wedge \vec{B} \quad \text{avec} \quad \vec{dl} = \overrightarrow{MM'}. \quad (1.23)$$

### 1.3.5 Changement de référentiel

La formule de Lorentz est valide dans un référentiel galiléen quelconque (principe de relativité). Soit un premier observateur galiléen pour qui la particule est animée de la vitesse  $\vec{v}$  à l'instant  $t$ . Pour cet observateur la particule subit la force (1.18). Soit un deuxième observateur galiléen en mouvement par rapport au premier avec la vitesse constante  $\vec{v}$ . Pour ce deuxième observateur, qui voit la particule immobile à l'instant  $t$ , la force de Lorentz est

$$\vec{F} = q\vec{E}' \quad (1.24)$$

où  $\vec{F}$  et  $q$  sont les mêmes que pour le premier observateur (invariance de la force et de la charge). Le deuxième observateur voit donc le champ électrique

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}. \quad (1.25)$$

On retiendra que *les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dépendent du référentiel.*

---

8. Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749-1827)

## 1.4 Électrostatique

### 1.4.1 Champ électrostatique

On rappelle l'expression du champ électrostatique qui résulte de la **loi de Coulomb** et du **principe de superposition**. Considérons  $N$  charges ponctuelles  $q_a$  ( $a = 1, 2, \dots, N$ ), la charge numéro  $a$  étant localisée en  $\vec{r}_a$ .

La force électrostatique agissant sur la charge numéro  $b$  est

$$\vec{F} = \sum_{\substack{a=1 \\ a \neq b}}^N \frac{q_a q_b}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_b - \vec{r}_a}{|\vec{r}_b - \vec{r}_a|^3} \quad (1.26)$$

où

$$\epsilon_0 \approx 8,854187817 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \quad (1.27)$$

est la permittivité électrique du vide. Le champ  $\vec{E}(\vec{r})$  créé en  $\vec{r}$  par les  $N$  charges est défini par

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{a=1}^N \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3}. \quad (1.28)$$

Ce champ est singulier aux points  $\vec{r}_a$  ( $a = 1, 2, \dots, N$ ) où sont localisées les charges. La force agissant sur la charge numéro  $b$  est donnée par

$$\vec{F} = q_b \vec{E}(\vec{r}_b) \quad (1.29)$$

si on calcule  $\vec{E}(\vec{r})$  au point  $\vec{r}_b$  par passage à la limite  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_b$  en convenant de poser

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{r}_b} \frac{\vec{r} - \vec{r}_b}{|\vec{r} - \vec{r}_b|^3} = 0. \quad (1.30)$$

L'utilisation d'une distribution volumique de charge  $\rho(\vec{r})$  permet d'éviter les singularités du champ. Supposons que  $\rho(\vec{r})$  soit une fonction continue à support compact  $V$ . Le champ en  $\vec{r}$  est

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (1.31)$$

qui est continu, borné et tend vers 0 lorsque  $\vec{r} \rightarrow \infty$ .

Une distribution de charge sur la surface  $S$  crée le champ

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}') dS'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (1.32)$$

Supposons que  $\sigma(\vec{r})$  soit une fonction continue à support compact  $S$ . Le champ  $\vec{E}$  est borné, tend vers 0 lorsque  $\vec{r} \rightarrow \infty$  et est continu sauf au passage de la surface  $S$ . La discontinuité de  $\vec{E}$  est étudiée section 1.4.5.

Dans le cas d'une distribution de charge linéique le long d'une courbe  $\Gamma$ , le champ

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{\Gamma} \frac{\lambda(\vec{r}') d\vec{r}'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1.33)$$

est singulier sur  $\Gamma$ .

### 1.4.2 Potentiel électrostatique

Le champ électrostatique  $\vec{E}(\vec{r})$  dérive d'un potentiel, c'est-à-dire qu'il existe un champ scalaire  $\phi(\vec{r})$  tel que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi. \quad (1.34)$$

Pour une distribution volumique de charge  $\rho(\vec{r})$  continue et à support compact  $V$ , on peut prendre

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.35)$$

qui définit le potentiel  $\phi(\vec{r})$  s'annulant quand  $\vec{r} \rightarrow \infty$ .

On vérifie l'équation (1.34) en intervertissant intégrale sur  $\vec{r}'$  et gradient par rapport à  $\vec{r}$ :

$$\vec{\nabla}\phi = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = -\vec{E}. \quad (1.36)$$

### 1.4.3 Théorème de Gauss et équation de Maxwell-Gauss

Pour la démonstration du théorème de Gauss<sup>9</sup> à partir de la loi de Coulomb, réviser le cours d'électrostatique.

On se limite à montrer l'équivalence du théorème de Gauss et de l'équation de Maxwell-Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.37)$$

qui devient un postulat dans la théorie de Maxwell (c'est une des équations de Maxwell ; elle reste valide en régime variable).

On utilisera la notation  $\partial V$  pour désigner le bord d'un volume  $V$ . Soit  $V$  un volume de bord  $S = \partial V$  (cf. figure 1.5). Le vecteur unitaire  $\vec{n}$  normal à  $S$  est orienté vers l'extérieur du volume  $V$ . Montrons que l'équation de Maxwell-Gauss implique le théorème de Gauss. En utilisant le théorème d'Ostrogradski<sup>10</sup> on a en effet

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\iiint_V \rho d\tau}_{Q_V} \quad (1.38)$$

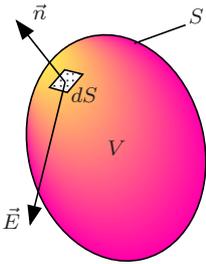


FIG. 1.5 – Théorème de Gauss.

9. Johann Karl (Carl) Friedrich Gauss (1777-1855)

10. Mikhail Vasilevich Ostrogradski (1801-1862)

soit

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_V}{\epsilon_0} \quad (\text{théorème de Gauss}) \quad (1.39)$$

qui exprime le flux du champ  $\vec{E}$  sortant de  $V$  en fonction de la charge électrique  $Q_V$  contenue dans  $V$ . Le théorème de Gauss reste valide en présence de distributions de charges ponctuelles, surfaciques ou linéiques s'il n'y a pas de charges ponctuelles, surfaciques ou linéiques sur  $S$  (mais la charge volumique peut ne pas être nulle sur  $S$ ).

Réciproquement, montrons que le théorème de Gauss implique l'équation de Maxwell-Gauss. Nous supposons que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  et  $\rho$  sont des fonctions continues. Le théorème de Gauss s'écrit en utilisant le théorème d'Ostrogradski

$$\frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\iiint_V \rho d\tau}_{Q_V} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau \quad (1.40)$$

soit

$$\iiint_V \underbrace{\left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right]}_{f(\vec{r})} d\tau = 0. \quad (1.41)$$

La fonction continue  $f(\vec{r})$  est telle que  $\iiint_V f(\vec{r}) d\tau = 0$  pour tout volume  $V$ . Elle est donc identiquement nulle et il en résulte l'équation de Maxwell-Gauss (1.37)

#### 1.4.4 Champ de vecteur conservatif

**Théorème 1.1 (Champ de vecteur conservatif).** Soit  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  un champ de vecteur pouvant dépendre du temps  $t$  et défini dans tout l'espace ( $\forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3$ ). Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Le champ  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel. Cela signifie qu'il existe un champ scalaire  $\phi(\vec{r}, t)$  tel que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi. \quad (1.42)$$

2. La circulation de  $\vec{E}$  est conservative. Cela signifie que la circulation le long d'une courbe  $\widehat{AB}$  ne dépend pas de la forme de la courbe mais seulement des positions de ses extrémités  $A$  et  $B$ .
3. La circulation de  $\vec{E}$  le long d'une courbe fermée  $\Gamma$  est nulle :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (1.43)$$

4. Le champ de vecteur est irrotationnel. Cela signifie que son rotationnel est nul :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0. \quad (1.44)$$

Un champ de vecteur qui vérifie ces conditions est dit **champ de vecteur conservatif**.

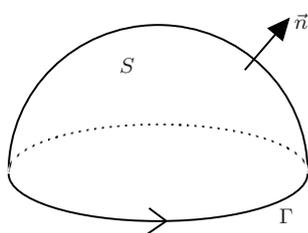


FIG. 1.6 – Théorème de Stokes

*Démonstration.* On va démontrer l'équivalence des quatre propriétés en montrant les implications  $4 \implies 3 \implies 2 \implies 1 \implies 4$ .

$4 \implies 3$ . On utilisera la notation  $\Gamma = \partial S$  pour désigner le bord orienté d'une surface orientable  $S$ . Les orientations de la courbe  $\Gamma$  et de la surface  $S$  se correspondent par la règle du tire-bouchon. Le vecteur unitaire normal à  $S$ , dans le sens de l'orientation de  $S$ , est noté  $\vec{n}$ . Le théorème de Stokes<sup>11</sup> appliqué à une surface  $S$  de bord  $\Gamma$  (cf. figure 1.6) donne

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = 0 \quad (1.45)$$

ce qui montre la propriété 3.

$3 \implies 2$ . Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux courbes orientées allant du point  $A$  au point  $B$ . Soit  $\Gamma$  la courbe fermée obtenue en allant de  $A$  à  $B$  le long de  $C_1$ , puis de  $B$  à  $A$  en parcourant  $C_2$  en sens inverse. On a

$$0 = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.46)$$

ce qui montre 2.

$2 \implies 1$ . Soit  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$  et

$$\phi(M) = \phi(\vec{r}) = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.47)$$

où  $C$  est un chemin orienté allant du point  $M$  au point  $O$  (cf. figure 1.7). D'après 2, cette intégrale ne dépend pas de la forme de la courbe et définit bien une fonction de  $M$  (ou  $\vec{r}$ ). On en déduit que

$$\phi(M') - \phi(M) = \phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r}) = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.48)$$

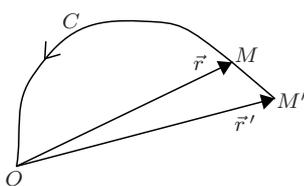


FIG. 1.7 – Preuve de (1.49)

où  $\Gamma$  est une courbe orientée qui va de  $M'$  à  $M$  ( $\overrightarrow{OM'} = \vec{r}'$ ). Pour deux points infiniment voisins  $M$  et  $M'$ , ( $\vec{r}' - \vec{r} = \vec{dr} = \overrightarrow{MM'}$ ) et pour le chemin rectiligne  $\Gamma = M'M$  cela donne

$$\phi(\vec{r} + \vec{dr}) - \phi(\vec{r}) = \int_{M'M} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \overrightarrow{M'M} = -\vec{E}(\vec{r}) \cdot \vec{dr}. \quad (1.49)$$

Il en résulte que  $\vec{\nabla}\phi = -\vec{E}$  et que  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel.

$1 \implies 4$ . En effet, le rotationnel d'un gradient est nul :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\phi) = 0. \quad (1.50)$$

11. George Gabriel Stokes (1819-1903)

□

*Remarque 1.* Le potentiel  $\phi(\vec{r}, t)$  n'est pas unique. On a aussi  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi'$  pour  $\phi'(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) + f(t)$  où  $f(t)$  est une fonction arbitraire du temps.

*Remarque 2.* D'après l'équation (1.34), le champ électrostatique possède la propriété 1. C'est donc un champ de vecteur conservatif dont le rotationnel est nul.

*Remarque 3.* On verra plus loin qu'en régime variable le champ électrique n'est plus un champ de vecteur conservatif.

**Exercice 1.2.** On considère un exemple de champ de vecteurs qui n'est pas défini dans tout l'espace et pour lequel il n'y a pas équivalence entre les propriétés 1–4 du théorème 1.1.

Soit le champ de vecteur  $\vec{E} = \frac{A\vec{u}_\phi}{\rho}$  en coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi, z)$ . Ce champ n'est pas défini sur l'axe  $Oz$  (où  $\rho = 0$ ).

1. Montrer que son rotationnel est nul (propriété 4).
2. Calculer la circulation de  $\vec{E}$  sur le cercle  $\mathcal{C}$  d'axe  $Oz$ , de centre  $O$  et de rayon  $a$  orienté dans le sens de  $\vec{u}_\phi$ . En déduire que le champ ne vérifie pas la propriété 3.

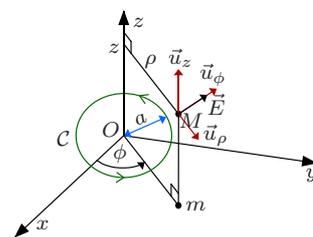


FIG. 1.8 – Champ de vecteur  $\vec{E}$  et cercle  $\mathcal{C}$ .

### 1.4.5 Lois locales et intégrales de l'électrostatique

La table 1.1 récapitule les lois locales et intégrales de l'électrostatique. Les relations de passage s'obtiennent à partir des lois locales par les substitutions

$$\vec{\nabla} \rightarrow \vec{n}_{12}, \quad \vec{E} \rightarrow \vec{E}_2 - \vec{E}_1, \quad \rho \rightarrow \sigma. \quad (1.51)$$

Les notations et les justifications se trouvent section 2.3.

formes locales	formes intégrales	relations de passage
Maxwell-Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	théorème de Gauss $\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$ $Q_V$ charge dans $V$ ; $S = \partial V$	$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
$\vec{E}$ irrotationnel $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$	circulation conservative $\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$	$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$

TAB. 1.1 – Électrostatique : lois locales, intégrales et relations de passage

### 1.4.6 Existence et unicité

L'électrostatique découle de la loi de Coulomb et du principe de superposition. Une autre approche consiste à partir des équations locales. Le théorème suivant montre en effet qu'elles permettent de déterminer le champ

électrostatique. La théorie de Maxwell utilise une approche analogue. Le champ électromagnétique en régime dépendant du temps est déterminé par des équations locales, les équations de Maxwell.

**Théorème 1.2.** *Soit une distribution de charge volumique  $\rho(\vec{r})$  à support compact. Il existe un et un seul champ électrostatique  $\vec{E}(\vec{r})$  qui vérifie les équations*

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (1.52)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.53)$$

et les conditions aux limites

$$\vec{E}(\vec{r}) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |\vec{r}| \rightarrow \infty. \quad (1.54)$$

*Démonstration.*

*Existence.* Le champ (1.31) est une solution des équations (1.52) et (1.53) qui vérifie les conditions aux limites (1.54).

*Unicité.* Soit  $\vec{E}'$  une autre solution. La différence  $\vec{E}_1 = \vec{E}' - \vec{E}$  vérifie

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_1 = 0 \quad (1.55)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1 = 0. \quad (1.56)$$

L'équation (1.55) implique d'après le théorème 1.1 l'existence d'un potentiel  $\phi_1$  tel que  $\vec{E}_1 = -\vec{\nabla}\phi_1$ . En portant dans (1.56) on en déduit que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi_1 = \Delta\phi_1 = 0, \quad (1.57)$$

c'est-à-dire que  $\phi_1$  est une fonction harmonique. Les conditions aux limites (1.54) imposent que

$$\phi_1 \rightarrow \text{Cte} \quad \text{quand} \quad |\vec{r}| \rightarrow \infty. \quad (1.58)$$

Un théorème (admis) affirme qu'une fonction harmonique qui vérifie (1.58) est constante. Il en résulte  $\vec{E}_1 = 0$  et l'unicité de la solution.  $\square$

*Remarque.* Si on n'impose pas de conditions aux limites, la solution n'est pas unique. Il existe en effet des fonctions harmoniques non triviales ( $\phi_1 = xy$ ,  $\phi_1 = x^2 - y^2$ , ...).

### 1.4.7 Dipôle électrique

#### Moment dipolaire électrique

Considérons un objet de dimensions  $\sim d_2$  formé de  $N$  charges ponctuelles  $q_i$  situées respectivement en  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Son moment dipolaire électrique  $\vec{d}$  (unité : C m), calculé en  $O$ , est défini par

$$\vec{d} = \sum_{i=1}^N q_i \overrightarrow{OM_i} = Q_+ \overrightarrow{OG_+} + Q_- \overrightarrow{OG_-} \quad (1.59)$$

où  $Q_+$  (respectivement  $Q_-$ ) est la somme des charges positives (respectivement négatives) et  $G_{\pm}$  le barycentre des charges positives ou négatives :

$$Q_+ \overrightarrow{OG_+} = \sum_{\substack{i=1 \\ q_i > 0}}^N q_i \overrightarrow{OM_i}, \quad Q_- \overrightarrow{OG_-} = \sum_{\substack{i=1 \\ q_i < 0}}^N q_i \overrightarrow{OM_i}. \quad (1.60)$$

Si la charge totale est nulle ( $Q = Q_+ + Q_- = 0$ ), le moment dipolaire ne dépend pas du point où il est calculé :

$$\vec{d} = Q_+ \overrightarrow{G_- G_+}. \quad (1.61)$$

Un tel objet (cas  $Q = 0$ ,  $\vec{d} \neq 0$ ) est appelé **dipôle électrique** lorsque ses dimensions ( $d_2$ ) peuvent être considérées comme petites par rapport aux dimensions du système étudié.

Lorsque le système est formé de  $N$  dipôles (molécules polaires comme  $\text{H}_2\text{O}$  ou molécules polarisées par un champ électrique appliqué) de moments dipolaires  $\vec{p}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), le moment dipolaire électrique du système est

$$\vec{d} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i. \quad (1.62)$$

### Potentiel et champ du dipôle électrostatique

Il est commode d'utiliser des coordonnées sphériques  $r, \theta, \phi$  dont le demi-axe  $Oz$  (correspondant à  $\theta = 0$ ) est dans le sens et la direction de  $\vec{p} = p\vec{u}_z$ .

#### Potentiel

Le potentiel électrostatique créé en  $M$  ( $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ) par  $N$  charges ponctuelles  $q_i$  situées respectivement en  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) s'écrit à grande distance ( $r \gg d_2$ ) sous la forme du **développement multipolaire** :

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \overrightarrow{OM_i}|} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} + \frac{\overrightarrow{OM_i} \cdot \vec{r}}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \right]. \quad (1.63)$$

Le dipôle correspond à une charge totale nulle ( $Q = 0$ ) et un moment dipolaire électrique  $\vec{p} \neq 0$ . Le potentiel (1.63) s'écrit alors, en négligeant un  $O(r^{-3})$ ,

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.64)$$

Ce potentiel décroît en  $r^{-2}$  quand  $r \rightarrow \infty$ .

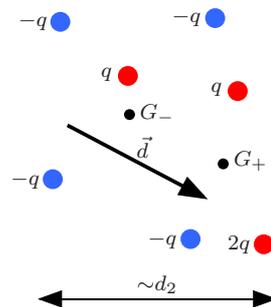


FIG. 1.9 – Dipôle électrique (charges multiples de  $q$ ).

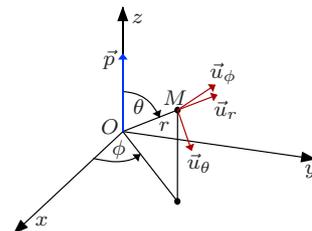


FIG. 1.10 – Coordonnées sphériques.

**Champ**

Le champ électrostatique s'obtient par  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ . Il décroît en  $r^{-3}$  quand  $r \rightarrow \infty$ . Il s'écrit, pour  $r \gg d_2$ , en négligeant un  $O(r^{-4})$ ,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5}. \quad (1.65)$$

Ses composantes en coordonnées sphériques sont

$$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\phi = 0. \quad (1.66)$$

**Forces agissant sur un dipôle électrique placé dans un champ électrique**

Le système de charges de la section précédente (dipôle électrique de moment dipolaire électrique  $\vec{p}$ ) est placé dans un champ électrique extérieur. On désigne par  $\vec{E}$  le champ créé, à l'endroit où se trouve le dipôle, par les charges autres que celles qui composent le dipôle. On suppose que le champ  $\vec{E}$  varie peu à l'échelle de  $d_2$ .

La résultante des forces électriques agissant sur le système est

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} \quad (1.67)$$

et le moment des forces électriques est

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{p} \wedge \vec{E}. \quad (1.68)$$

Si le dipôle peut tourner autour de  $O$ , ce moment des forces tend à aligner  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$  dans le même sens et même direction (l'alignement en sens opposés est une position d'équilibre instable).

**Énergie potentielle d'interaction**

Le dipôle est supposé **rigide**, c'est-à-dire que  $p$  ne dépend pas de  $\vec{E}$ . L'énergie potentielle d'interaction du dipôle et du champ électrique extérieur est donnée par

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (1.69)$$

Pour un dipôle mobile autour de  $O$ , cette énergie est minimum lorsque  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$  sont dans le même sens et même direction (position d'équilibre stable).

*Remarque.* L'équation (1.69) ne s'applique pas si le dipôle n'est pas rigide.

## 1.5 Magnétostatique

### 1.5.1 Loi de Biot et Savart

Le champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r})$  créé en  $\vec{r}$  par un circuit filiforme  $\Gamma$  parcouru par un courant électrique permanent d'intensité  $I$  est donné par la loi de Biot<sup>12</sup> et Savart<sup>13</sup>

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{r}' \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1.70)$$

où

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \quad (1.71)$$

est la perméabilité magnétique du vide<sup>14</sup>. Ce champ est singulier aux points  $\vec{r} \in \Gamma$  du contour du circuit. L'utilisation d'une distribution volumique de courants  $\vec{j}(\vec{r})$  permet d'éviter les singularités du champ. Supposons que  $\vec{j}(\vec{r})$  n'est différent de zéro que dans le volume  $V$ . Le champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r})$  en  $\vec{r}$  est donné par

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \quad (1.72)$$

qui redonne (1.70) dans le cas d'un circuit filiforme ( $\vec{j}(\vec{r}') d^3r' \rightarrow I d\vec{r}'$ ). Lorsque  $V$  est compact, le champ  $\vec{B}(\vec{r})$  est continu, borné et tend vers 0 lorsque  $\vec{r} \rightarrow \infty$ .

La formule (1.72) permet également de déterminer le champ d'un aimant permanent, la densité  $\vec{j}(\vec{r})$  décrivant alors les courants ampériens à l'intérieur de l'aimant.

### 1.5.2 Potentiel vecteur

Le champ magnétostatique  $\vec{B}(\vec{r})$  dérive d'un potentiel vecteur, c'est-à-dire qu'il existe un champ vectoriel  $\vec{A}(\vec{r})$  tel que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \quad (1.73)$$

Pour la distribution volumique de courants  $\vec{j}(\vec{r})$  dans le volume  $V$ , on peut prendre

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (1.74)$$

12. Jean-Baptiste Biot (1774-1862)

13. Félix Savart (1791-1841)

14. La valeur de la perméabilité magnétique du vide est exacte et résulte de la définition de l'ampère. L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de un mètre l'un de l'autre dans le vide produirait entre ces conducteurs une force égale à  $2 \cdot 10^{-7}$  newton par mètre de longueur.

qui définit un potentiel vecteur  $\vec{A}(\vec{r})$  s'annulant quand  $\vec{r} \rightarrow \infty$ .

Pour vérifier l'équation (1.73) on va utiliser l'identité

$$\vec{\nabla} \wedge (f\vec{U}) = (\vec{\nabla}f) \wedge \vec{U} + f(\vec{\nabla} \wedge \vec{U}). \quad (1.75)$$

En intervertissant intégrale sur  $\vec{r}'$  et rotationnel par rapport à  $\vec{r}$  on calcule à partir de l'équation (1.74)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left( \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \wedge \vec{j}(\vec{r}') d^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left( -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) \wedge \vec{j}(\vec{r}') d^3r' \end{aligned} \quad (1.76)$$

qui est identique à l'expression (1.72) du champ  $\vec{B}(\vec{r})$ .

### 1.5.3 Champ de vecteur à flux conservatif

**Théorème 1.3 (Champ de vecteur à flux conservatif).** *Soit  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  un champ de vecteur défini dans tout l'espace ( $\forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3$ ). Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. Le champ  $\vec{B}$  dérive d'un potentiel vecteur, c'est-à-dire qu'il existe un champ de vecteur  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  tel que

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \quad (1.77)$$

2. Le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface orientable ne dépend pas de la forme de la surface mais seulement de son bord :

$$\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S'} \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad \text{si} \quad \partial S = \partial S' \quad (1.78)$$

3. Le flux de  $\vec{B}$  à travers toute surface fermée orientable  $S$  est nul :

$$\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \text{si} \quad \partial S = \emptyset. \quad (1.79)$$

4. Le champ de vecteur  $\vec{B}$  est solénoïdal, c'est-à-dire que sa divergence est nulle :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.80)$$

Si le champ de vecteur vérifie ces conditions, on dit que le champ de vecteur est à **flux conservatif**.

*Démonstration (incomplète)*

1  $\implies$  4. Résulte de l'identité

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0. \quad (1.81)$$

4  $\iff$  3. Résulte du théorème d'Ostrogradski avec  $S = \partial V$  :

$$\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d\tau. \quad (1.82)$$

3  $\implies$  2. Soit deux surfaces  $S$  et  $S'$  de même bord  $\Gamma = \partial S = \partial S'$ . On peut supposer que les deux surfaces n'ont pas d'autres points communs que  $\Gamma$ . Sinon, construire une troisième surface  $S''$  de même bord  $\Gamma = \partial S''$  qui ne recoupe ni  $S$  ni  $S'$  et raisonner sur  $S$  et  $S''$  puis sur  $S'$  et  $S''$ . La réunion de  $S$  et  $S'$ , en changeant l'orientation de  $S'$ , forme une surface fermée orientée  $\Sigma$ . On a

$$\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS - \iint_{S'} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (1.83)$$

2  $\implies$  3. Se montre facilement.

Pour terminer la démonstration il faudrait montrer la propriété 1 à partir de 2, 3 ou 4. Cette partie sera admise.  $\square$

*Remarque 1.* Le potentiel vecteur  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  n'est pas unique. On a aussi  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}'$  pour  $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}g$  où  $g(\vec{r}, t)$  est un champ scalaire arbitraire.

*Remarque 2.* L'implication 1  $\implies$  2 résulte des implications montrées ci-dessus. Elle résulte aussi du théorème de Stokes

$$\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{n} dS = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.84)$$

*Remarque 3.* D'après l'équation (1.73), le champ magnétostatique possède la propriété 1. C'est donc un champ de vecteur à flux conservatif dont la divergence est nulle.

*Remarque 4.* En régime variable le champ magnétique reste un champ de vecteur à flux conservatif.

**Exercice 1.3.** On considère un exemple de champ de vecteurs qui n'est pas défini dans tout l'espace et pour lequel il n'y a pas équivalence entre les propriétés 1–4 du théorème 1.3.

Soit le champ de vecteur  $\vec{B} = \frac{A\vec{u}_r}{r^2}$  en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$ . Ce champ n'est pas défini en  $O$  (où  $r = 0$ ).

1. Montrer que sa divergence est nulle (propriété 4).

2. Calculer le flux de  $\vec{B}$  sortant de la sphère  $\Sigma$  de rayon  $R$  centrée en  $O$ . En déduire que le champ ne vérifie pas la propriété 3.

#### 1.5.4 Lois locales et intégrales de la magnétostatique

La table 1.2 récapitule les lois locales et intégrales de la magnétostatique. Les relations de passage s'obtiennent à partir des lois locales par les substitutions

$$\vec{\nabla} \rightarrow \vec{n}_{12}, \quad \vec{B} \rightarrow \vec{B}_2 - \vec{B}_1, \quad \vec{j} \rightarrow \vec{j}_\sigma. \quad (1.85)$$

Les notations et les justifications se trouvent section 2.3.

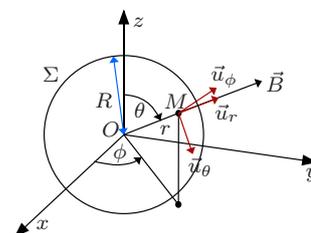


FIG. 1.11 – Champ  $\vec{B}$  et sphère  $\Sigma$ .

TAB. 1.2 – Magnétostatique : lois locales, intégrales et relations de passage

formes locales	formes intégrales	relations de passage
champ solénoïdal $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	flux conservatif $\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$	$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$
$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	théorème d'Ampère $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I$ $I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS; \Gamma = \partial S$	$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_{\sigma}$

### 1.5.5 Dipôle magnétique

#### Moment dipolaire magnétique

Considérons un objet de volume  $V$  (dimensions linéaires de l'ordre de  $d_2$ ) comportant une répartition de courant volumique  $\vec{j}(\vec{r})$ . On appelle **moment dipolaire magnétique** (unité :  $A m^2$  ou  $J T^{-1}$ ) de ce système le vecteur

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{r} \wedge \vec{j} d^3 r \quad (1.86)$$

Dans le cas d'un circuit filiforme  $\Gamma$  situé dans un plan  $\Pi$  et parcouru par un courant constant  $I$  cette expression devient ( $\vec{j}(\vec{r}) d^3 r \rightarrow I \vec{dr}$  et intégrale sur le volume  $V \rightarrow$  intégrale sur  $\Gamma$ )

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_{\Gamma} \vec{r} \wedge \vec{dr} = SI \vec{n} \quad (1.87)$$

où  $S$  est la surface entourée par le circuit  $\Gamma$  et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal au plan  $\Pi$  et orienté selon le sens du courant par la règle du tire-bouchon. Le moment magnétique (1.87) est indépendant du point  $O$  par rapport auquel il est calculé.

Un tel objet (avec  $\vec{m} \neq 0$ ) est appelé **dipôle magnétique** lorsque ses dimensions ( $d_2$ ) peuvent être considérées comme petites par rapport aux dimensions du système étudié.

Lorsque le système est formé de  $N$  dipôles magnétiques (la molécule  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) ayant le moment dipolaire magnétique  $\vec{m}_i$ ), le moment dipolaire magnétique du système est

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^N \vec{m}_i. \quad (1.88)$$

**Dipôle magnétique intrinsèque** Certaines particules élémentaires se comportent comme des dipôles magnétiques (cf. table 1.3). Cela s'interprète en électromagnétisme classique comme provenant de courants internes à la particule dus à un mouvement de rotation de la particule autour de son axe (**spin** en mécanique quantique).

La mécanique quantique relativiste (équation de Dirac<sup>15</sup>) donne pour le moment dipolaire magnétique de l'électron la valeur théorique, appelée *magnéton de Bohr*<sup>16</sup>,

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = \frac{eh}{4\pi m_e} = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ J T}^{-1} \quad (1.89)$$

(avec  $m_e$  = masse de l'électron) qui ne diffère de la valeur expérimentale que de 1 pour 1000.

### Potentiel vecteur

On considère une boucle plane parcourue par le courant constant  $I$ . La boucle est le bord orienté  $\Gamma = \partial S$  de la surface plane  $S$  orientée selon son vecteur normal unitaire  $\vec{n}$  (règle du tire-bouchon). Le potentiel vecteur (1.74) s'écrit ici ( $\vec{j}(\vec{r}')d^3r'$  est remplacé par  $I\vec{dr}'$  et l'intégrale sur le volume  $V$  par une intégrale sur  $\Gamma$ )

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\vec{dr}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.90)$$

Utilisons l'identité<sup>17</sup>

$$\oint_{\Gamma} f \vec{dr}' = \iint_S (\vec{n} \wedge \vec{\nabla}' f) dS'. \quad (1.94)$$

15. Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984)

16. Niels Henrik David Bohr (1885-1962)

17. La fonction  $f$  dépend de  $\vec{r} = (x, y, z)$  et  $\vec{r}' = (x', y', z')$ . Le symbole  $\vec{\nabla}'$  désigne l'opérateur nabla par rapport à  $\vec{r}'$ :

$$\vec{\nabla}' = \left( \frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right). \quad (1.91)$$

*Démonstration de l'identité (1.94).* Le théorème de Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot \vec{dr}' = \iint_S (\vec{\nabla}' \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n} dS' \quad (1.92)$$

donne pour  $\vec{V}(\vec{r}') = f(\vec{r}')\vec{u}$  où  $\vec{u}$  est un vecteur constant

$$\vec{u} \cdot \oint_{\Gamma} f \vec{dr}' = \oint_{\Gamma} f \vec{u} \cdot \vec{dr}' = \iint_S \underbrace{[\vec{\nabla}' \wedge (f\vec{u})]}_{(\vec{\nabla}' f) \wedge \vec{u}} \cdot \vec{n} dS' = \vec{u} \cdot \iint_S (\vec{n} \wedge \vec{\nabla}' f) dS'. \quad (1.93)$$

Le vecteur  $\vec{u}$  étant arbitraire, on en déduit l'équation (1.94).  $\square$

	$m$ (J T <sup>-1</sup> )
électron	$9,28 \cdot 10^{-24}$
proton	$1,41 \cdot 10^{-26}$
neutron	$9,66 \cdot 10^{-27}$

TAB. 1.3 – Moments dipolaires magnétiques  $m$  de quelques particules élémentaires.

Portons y  $f = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  et  $\vec{\nabla}' f = \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ . Cela transforme (1.90) en l'intégrale de surface

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{n} \wedge \iint_S \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'. \quad (1.95)$$

Pour  $r$  très grand devant la dimension linéaire  $d_2$  du circuit, on peut négliger  $\vec{r}'$  par rapport à  $\vec{r}$  dans l'intégrand :

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{n} \wedge \iint_S \frac{\vec{r}}{r^3} dS' = \frac{\mu_0 S I \vec{n} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 \vec{m} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3}. \quad (1.96)$$

Le potentiel vecteur  $\vec{A}$  décroît en  $r^{-2}$  quand  $r \rightarrow \infty$ .

### Champ magnétique

Le champ magnétostatique s'obtient par  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ . Rappelons l'identité vectorielle

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{U}) = (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \vec{V} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) - (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} - \vec{U} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}). \quad (1.97)$$

Portons y  $\vec{V} = \vec{m}$  et  $\vec{U} = \frac{\vec{r}}{r^3}$  :

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) = \vec{m} \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (1.98)$$

Transformons le premier terme de cette expression avec<sup>18</sup>

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{r} \cdot \underbrace{\vec{\nabla} \frac{1}{r^3}}_{=-3\vec{r}/r^5} + \frac{1}{r^3} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{r}}_{=3} = 0 \quad (1.99)$$

et le deuxième avec

$$(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \underbrace{(\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r}}_{=\vec{m}} + \vec{r} \left( \vec{m} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) = \frac{\vec{m}}{r^3} - 3 \frac{\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5}. \quad (1.100)$$

On en déduit le champ magnétostatique, pour  $r \gg d_2$ ,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}. \quad (1.101)$$

Il décroît en  $r^{-3}$  quand  $r \rightarrow \infty$ .

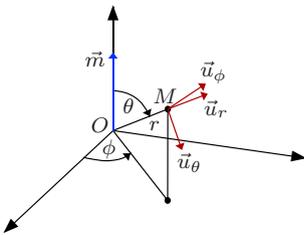


FIG. 1.12 – Coordonnées sphériques.

18. On trouvera une autre démonstration de (1.99) à l'équation (A.6) de l'exercice 1.3.

Dans les coordonnées sphériques  $r, \theta, \phi$  où le demi-axe  $\theta = 0$  est pris dans le sens et dans la direction de  $\vec{m}$  (cf. figure 1.12), ses composantes sont

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3}, \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3}, \quad B_\phi = 0. \quad (1.102)$$

Ces formules sont identiques à celles du dipôle électrique après le changement  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ ,  $\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{\mu_0}$  et  $\vec{p} \rightarrow \vec{m}$ . Les champs des deux types de dipôles diffèrent toutefois au voisinage de l'origine. Dans le cas du dipôle électrostatique les lignes de champ électrique partent d'une charge positive pour aboutir sur une charge négative. Dans le cas du dipôle magnétostatique correspondant à une boucle circulaire parcourue par un courant constant, les lignes de champ magnétique forment des courbes fermées qui enlacent le circuit.

### Forces sur un dipôle magnétique

Soit un dipôle magnétique de moment dipolaire magnétique  $\vec{m}$  placé dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$ . On suppose que le champ  $\vec{B}$  varie peu à l'échelle de  $d_2$ .

La résultante des forces magnétiques agissant sur le système est

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (1.103)$$

et le moment des forces magnétiques est

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}. \quad (1.104)$$

Si le dipôle peut tourner autour de  $O$ , ce moment des forces tend à aligner  $\vec{m}$  et  $\vec{B}$  dans le même sens et même direction (l'alignement en sens opposés est une position d'équilibre instable).

### Énergie potentielle d'interaction

Le dipôle est supposé **rigide**, c'est-à-dire que  $m$  ne dépend pas de  $\vec{B}$ . L'énergie potentielle d'interaction du dipôle et du champ magnétique extérieur est donnée par

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B}. \quad (1.105)$$

Pour un dipôle mobile autour de  $O$ , cette énergie est minimum lorsque  $\vec{m}$  et  $\vec{B}$  sont dans le même sens et même direction (position d'équilibre stable).

*Remarque.* L'équation (1.105) ne s'applique pas si le dipôle n'est pas rigide (si  $m$  dépend de  $\vec{B}$ ).

**Exercice 1.4 (Forces sur un circuit rectangulaire).** Un cadre rectangulaire  $PQRS$ , de dimensions  $a \times b$  et parcouru par un courant constant  $I$ , est placé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  (cf. figure 1.13). Soit  $\vec{n}$

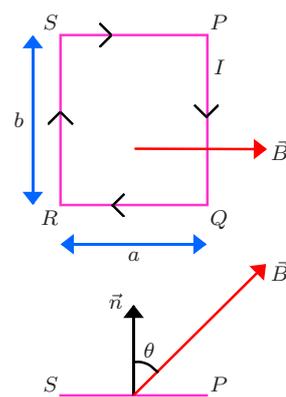


FIG. 1.13 – Cadre rectangulaire  $PQRS$  dans un champ magnétique.

le vecteur unitaire normal au cadre et de sens donné par la règle du tire-bouchon. Le champ  $\vec{B}$  est perpendiculaire au côté  $PQ$  et fait l'angle  $\theta$  avec  $\vec{n}$ .

Calculer la force de Laplace sur chaque côté du rectangle. En déduire la résultante  $\vec{F}$  et le moment  $\vec{M}$  des forces magnétiques qui agissent sur le cadre. Vérifier que les formules (1.103) et (1.104) sont cohérentes avec ces valeurs.

## 1.6 Induction

### 1.6.1 Loi de Faraday

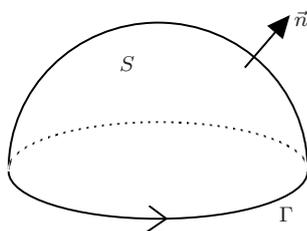


FIG. 1.14 – Flux à travers  $\Gamma$

Soit  $\Gamma$  un circuit et  $S$  une surface orientée de bord  $\Gamma = \partial S$  (cf. figure 1.14). L'orientation du circuit  $\Gamma$  correspond à celle de la surface  $S$  (règle du tire-bouchon).

Le champ de vecteur  $\vec{B}$  étant à flux conservatif, le *flux à travers la surface*  $S$  (unité : Wb [weber<sup>19</sup>]) du champ magnétique  $\vec{B}$

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad (1.106)$$

ne dépend pas du choix de la surface  $S$  qui s'appuie sur le circuit  $\Gamma$  (cf. théorème 1.3). On appelle aussi  $\Phi_B$  *flux à travers le circuit*  $\Gamma$ .

La **loi de Faraday** indique que lorsque le flux (1.106) varie au cours du temps, il apparaît dans le circuit  $\Gamma$  une *force électromotrice induite* (ou *d'induction*)

$$e = - \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (1.107)$$

La « force » électromotrice n'est pas une force (unité : newton<sup>20</sup>) mais une tension (unité : volt). La variation du flux (1.106) peut être due à une variation du champ magnétique au cours du temps ou à une variation de la forme ou de la position du circuit (ou aux divers effets en même temps).

### 1.6.2 Applications de l'induction

Les phénomènes d'induction interviennent dans tous les phénomènes électromagnétiques dépendant du temps (ondes électromagnétiques, circuits en courant alternatif, ...). Ils jouent un rôle essentiel dans les alternateurs, dynamos, transformateurs et le chauffage par induction.

La figure 1.15 donne le principe d'un **alternateur** (une machine qui convertit un mouvement mécanique tournant en courant électrique alternatif). Un aimant d'axe magnétique  $NS$  tourne autour d'un axe passant

19. Wilhelm Eduard Weber (1804-1891)

20. Sir Isaac Newton (1643-1727)

par  $O$  perpendiculaire à  $NS$  et engendre un champ magnétique variable. Il induit une force électromotrice (1.107) dans la bobine  $\mathcal{B}$  et on observe un courant dans le galvanomètre  $G$ . Ce système comporte un inducteur mobile (l'aimant) et un induit fixe (la bobine).

La figure 1.16 donne le principe d'un alternateur à induit mobile. L'inducteur fixe (non représenté) crée un champ magnétique constant et uniforme  $\vec{B}$ . Une bobine  $\mathcal{B}$  (l'induit), formée de  $N$  spires circulaires de rayon  $R$ , tourne autour d'un axe  $A$  avec la vitesse angulaire constante  $\omega$ . L'axe  $A$  est perpendiculaire à  $\vec{B}$  et au vecteur unitaire  $\vec{n}$  dans l'axe de la bobine. Le flux magnétique qui traverse le circuit  $\Gamma$  (les  $N$  spires) peut s'écrire

$$\Phi_B = BN\pi R^2 \cos \omega t \quad (1.108)$$

par un choix convenable de l'origine des temps. La force électromotrice induite (1.107),

$$e = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BN\pi R^2 \omega \sin \omega t, \quad (1.109)$$

est sinusoïdale. Dans la plupart des applications des alternateurs, on cherche aussi à produire une force électromotrice sinusoïdale.

Pour obtenir une force électromotrice toujours de même sens, on peut utiliser un dispositif mécanique, le commutateur, formé de deux demi-bagues et de deux balais (cf. figure 1.17). L'induit mobile qui produit la force électromotrice induite (1.109) est relié en  $A$  et  $B$  aux demi-bagues qui tournent avec lui. La force électromotrice aux bornes des balais  $C$  et  $D$  est

$$e' = BN\pi R^2 \omega |\sin \omega t|. \quad (1.110)$$

Dans une **dynamo**, en associant plusieurs bobinages, on arrive à produire une force électromotrice presque constante.

Dans un **transformateur** à noyau de fer (cf. figure 1.18), le bobinage primaire  $\mathcal{B}_1$  est parcouru par un courant alternatif. Le bobinage secondaire  $\mathcal{B}_2$  est un générateur dont la force électromotrice est produite par induction. Le noyau en fer augmente le flux d'induction  $\Phi_B$  à travers le circuit  $\mathcal{B}_2$ . Lorsque on peut négliger les fuites magnétiques (c'est-à-dire lorsque que le champ magnétique est négligeable en dehors du noyau) et les résistances des bobinages (par rapport à leur impédance), le rapport des tensions alternatives aux bornes des bobinages est égal au rapport des nombres de spires

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (1.111)$$

Par exemple, si le bobinage primaire comporte  $n_1 = 1000$  spires et le bobinage secondaire  $n_2 = 100$  spires, le transformateur est sous-volteur et permet de diviser une tension alternative par 10.

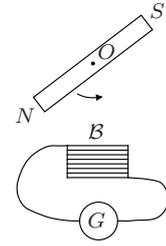


FIG. 1.15 – Principe d'un alternateur.

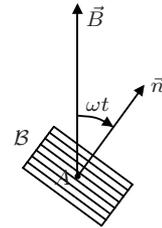


FIG. 1.16 – Bobine tournante.

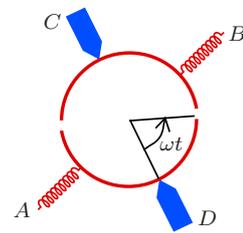


FIG. 1.17 – Commutateur.

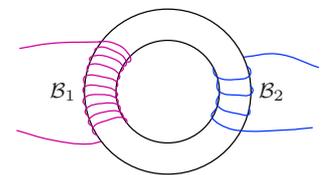


FIG. 1.18 – Transformateur à noyau de fer.

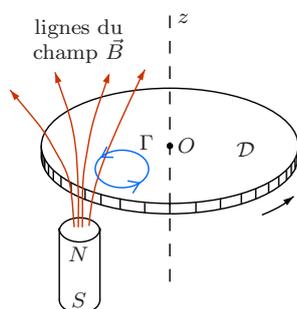


FIG. 1.19 – Courants de Foucault.

Dans les conducteurs massifs, les phénomènes d'induction peuvent produire des courants volumiques qu'on appelle **courants de Foucault**<sup>21</sup>. Faisons tourner un disque conducteur autour de son axe  $Oz$  dans un champ magnétique inhomogène (cf. figure 1.19). Soit un circuit  $\Gamma$  tracé dans le plan du disque et tournant avec lui. La figure correspond à un moment où le flux  $\Phi_B$  à travers  $\Gamma$  décroît en module. Il y a donc production d'une force électromotrice d'induction dans le circuit  $\Gamma$  et de courants induits dans le disque. Ces courants sont volumiques et ne suivent pas forcément le circuit  $\Gamma$  qui est arbitraire. Les courants de Foucault se produisent aussi dans les noyaux de fer des transformateurs, alternateurs, dynamos, moteurs, ... et abaissent le rendement de ces appareils. Habituellement, on cherche à diminuer les courants de Foucault en utilisant des tôles empilées séparées par un isolant au lieu de noyaux en fer massifs.

Toutefois dans les tables de cuisson à **chauffage par induction**, le récipient s'échauffe sous l'effet des courants de Foucault créés par un champ magnétique périodique de fréquence  $\sim 25$  kHz. On cherche alors à les augmenter en utilisant des récipients conducteurs et ferromagnétiques (le champ magnétique serait trop faible sinon).

### 1.6.3 Équation de Maxwell-Faraday

La loi de Faraday est la forme intégrale de l'**équation de Maxwell-Faraday**

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (1.112)$$

### 1.6.4 Cas du circuit immobile

En utilisant (1.112) et le théorème de Stokes on a

$$\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS = - \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = - \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dr}. \quad (1.113)$$

Nous supposons que la surface  $S$  est immobile. La dérivée par rapport au temps de (1.106) donne

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS = - \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dr}. \quad (1.114)$$

La loi (1.107) résulte de ce calcul si on peut identifier la force électromotrice induite avec

$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dr}. \quad (1.115)$$

21. Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868)

En électrostatique, la circulation de  $\vec{E}$  le long d'un chemin allant d'un point  $A$  à un point  $B$  est la différence de potentiel électrostatique  $V_A - V_B$  entre ces deux points. Considérons une particule portant la charge infinitésimale  $dq$ . Si elle se déplace de  $A$  à  $B$ , elle reçoit du champ le travail  $dU = dq(V_A - V_B)$  qui est nul pour un circuit ( $A = B$ ).

Le cas envisagé ici est différent. La circulation (1.115) le long du circuit  $\Gamma$  n'est pas nulle comme en électrostatique. Supposons que la particule se déplace le long du circuit  $\Gamma$ . À tout moment, sa vitesse  $\vec{v}$  reste tangente à la courbe  $\Gamma$ . Le travail de la force de Lorentz (1.18) lorsque la particule se déplace de  $\vec{dr}$  est

$$d^2U = dq \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{dr} = dq \vec{E} \cdot \vec{dr} \quad (1.116)$$

puisque la vitesse  $\vec{v}$  et le déplacement  $\vec{dr}$  sont parallèles. Le travail fourni à la particule par le champ électromagnétique lorsque elle effectue un tour du circuit  $\Gamma$  est donc

$$dU = dq \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dr}. \quad (1.117)$$

Si le circuit est parcouru par le courant  $I$ , l'énergie fournie aux charges par le champ électromagnétique pendant le temps  $dt$  est la même que celle fournie à une charge élémentaire  $dq = I dt$  qui effectue un tour du circuit. La puissance fournie aux charges par le champ électromagnétique est donc

$$\frac{dU}{dt} = I \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dr} = I e \quad (1.118)$$

où  $e$ , donné par (1.115), est bien la force électromotrice induite.

### 1.6.5 Cas du circuit en mouvement

Nous admettrons que la loi de l'induction de Faraday (1.107) est, dans ce cas aussi, une conséquence de l'équation de Maxwell-Faraday. Par contre, la force électromotrice induite n'est plus donnée par l'équation (1.115). On peut montrer (admis) que la force électromotrice d'induction qui apparaît dans le circuit  $\Gamma$  en mouvement est donnée par la circulation

$$e = \oint_{\Gamma} (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dr} \quad (1.119)$$

où  $\vec{V}$  est la vitesse de l'élément de circuit  $\vec{dr}$ . En utilisant (1.113) on peut exprimer la force électromotrice d'induction en fonction de  $\vec{B}$  par

$$e = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS + \oint_{\Gamma} (\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dr}. \quad (1.120)$$

### 1.6.6 Loi de Lenz

Supposons que  $\Gamma$  soit une boucle conductrice plongée dans un champ magnétique. Si le flux (1.106) varie au cours du temps, il apparaît dans la boucle la force électromotrice (1.107) et un courant électrique (phénomène de l'induction). La loi (1.107) est algébrique. Le signe moins dans (1.107) traduit la **loi de Lenz**<sup>22</sup> :

*La force électromotrice induite tend à produire un courant de sens tel que le flux qu'il envoie à travers le circuit s'oppose à la variation du flux qui lui donne naissance.*

Si, par exemple,  $\Phi_B$  décroît, la force électromotrice induite est positive ( $e > 0$ ). Elle tend à faire circuler dans  $\Gamma$  un courant d'intensité positive. Un tel courant envoie un flux à travers le circuit  $\Gamma$  (ou la surface  $S$ ) qui est positif et s'oppose à la décroissance de  $\Phi_B$ .

---

22. Heinrich Friedrich Emil Lenz (1804-1865)

## 2

# Les équations de Maxwell dans le vide

## 2.1 Les équations de Maxwell

La théorie de Maxwell de l'électromagnétisme est basée sur un ensemble de quatre équations. Ces équations sont posées a priori et sont vérifiées par leurs conséquences. L'équation de **Maxwell-Gauss**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

est familière puisque identique à l'équation vue en électrostatique. On postule qu'elle s'applique pour un champ électrique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et une charge volumique  $\rho(\vec{r}, t)$  variables au cours du temps  $t$ .

On postule de même que l'équation de **Maxwell-flux**,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

qui est identique à l'équation vue en magnétostatique, s'applique pour un champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  dépendant du temps  $t$ .

On postule ensuite deux équations qui comportent à la fois les champs électrique et magnétique, l'équation de **Maxwell-Faraday**

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

et l'équation de **Maxwell-Ampère**

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (2.4)$$

L'équation (2.3) implique que si champ  $\vec{B}$  varie au cours du temps, le champ  $\vec{E}$  ne peut pas être nul. L'équation (2.4) implique de même que si  $\vec{E}$  varie au cours du temps, en général, le champ  $\vec{B}$  ne peut pas être nul.

### 2.1.1 Constantes physiques

En écrivant l'homogénéité de l'équation de Maxwell-Faraday on obtient que le rapport des dimensions de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  est une vitesse  $[V]$  :

$$[E] = [B][V]. \quad (2.5)$$

Cette relation s'obtient aussi par l'homogénéité de la formule (1.18).

L'homogénéité de l'équation de Maxwell-Ampère donne que  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$  est homogène à une vitesse. Il découlera de la théorie de Maxwell que cette grandeur est la vitesse de la lumière dans le vide

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}. \quad (2.6)$$

La valeur numérique de  $c$  dans (2.6) est exacte<sup>1</sup>. Nous avons vu que la valeur de la perméabilité magnétique du vide vaut exactement<sup>2</sup>

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}. \quad (2.7)$$

La valeur de la permittivité électrique du vide découle de ces deux valeurs

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,854\,187\,817 \dots \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}. \quad (2.8)$$

### 2.1.2 Cas statique

En régime variable avec le temps, les champs électrique et magnétique sont interdépendants, mais, lorsque les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont constants, les équations de Maxwell se découpent. On obtient deux équations pour  $\vec{E}$ ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0, \quad (2.9)$$

et deux équations pour  $\vec{B}$ ,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (2.10)$$

L'électrostatique et la magnétostatique qui dérivent de ces équations sont donc incluse dans la théorie de Maxwell.

Les équations de Maxwell diffèrent du cas statique par la présence du terme  $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  dans l'équation de Maxwell-Faraday (2.3) et du **courant de déplacement**  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  dans l'équation de Maxwell-Ampère (2.4). Le sens physique de ce dernier terme est étudié dans la section 2.2.

1. Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de  $1/299\,792\,458$  seconde (définition de la 17<sup>e</sup> Conférence Générale des Poids et Mesures de 1983).

2. Cf. la note 14 en bas de la page 21.

### 2.1.3 Propagation du champ électromagnétique

Lorsque la charge et le courant volumique varient en un point  $P$  et à l'instant  $t$ , cela entraîne une variation du champ instantanée du champ au point  $P$  et à l'instant  $t$ . En un autre point  $M$ , cela ne produira un effet sur le champ électromagnétique qu'après une durée  $PM/c$  qui correspond à une propagation du champ à la vitesse de la lumière  $c$ .

### 2.1.4 Approximation des régimes quasistationnaires (ARQ)

Considérons un circuit électrique et désignons par  $L$  l'ordre de grandeur de sa longueur (cf. figure 2.1) et par  $T$  un temps qui caractérise la variation des courants et des charges. En régime alternatif, on prendra pour  $T$  la période. Dans un tel circuit, le temps de propagation du champ électromagnétique est de l'ordre de  $\tau = L/c$ . On pourra négliger les phénomènes de propagation si le temps  $\tau$  est très petit par rapport à  $T$  :

$$\frac{L}{c} \ll T. \quad (2.11)$$

On dit alors qu'on applique l'**approximation des régimes quasistationnaires** (ARQ). La condition de validité de l'ARQ dans le cas des courants alternatifs peut s'écrire en introduisant la longueur d'onde  $\lambda = cT$  :

$$L \ll \lambda. \quad (2.12)$$

Par exemple, pour des courants alternatifs de fréquence  $\nu = 50$  Hz, la longueur d'onde est  $\lambda = 6000$  km et l'approximation est valable pour des réseaux de quelques kilomètres de long.

Dans l'ARQ on admet les approximations suivantes.

- L'intensité du courant est la même tout le long d'une branche du circuit.
- Le champ magnétique  $\vec{B}$  peut être calculé par la loi de Biot et Savart. Cela revient à négliger le courant de déplacement  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  dans l'équation de Maxwell-Ampère. Toutefois, à l'intérieur des condensateurs, ce terme n'est pas négligeable, mais remplace le courant de conduction (cf. section 2.2.2).

On tient compte des phénomènes d'induction (cf. section 1.6), par exemple pour expliquer le fonctionnement du transformateur dans le circuit de la figure 2.1. Dans l'ARQ, l'équation de Maxwell-Faraday est donc utilisée sans approximations.

### 2.1.5 Combien y a-t-il d'équations de Maxwell?

Il y a deux équations scalaires et deux équations vectorielles, soit en tout huit équations scalaires, mais ces équations ne sont pas indépendantes.

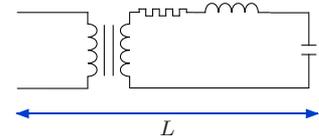


FIG. 2.1 – Approximation des régimes quasistationnaires.

Écrivons les sous la forme

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.13)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (2.14)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.15)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.16)$$

Deux combinaisons de ces équations sont identiquement nulles. L'une est

$$\vec{\nabla} \cdot [\text{équation (2.15)}] - \frac{\partial}{\partial t} [\text{équation (2.16)}] = 0 \quad (2.17)$$

puisque on a, en utilisant  $\text{div rot} = \text{rot div} = 0$ ,

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\nabla} \cdot \vec{B}] = 0. \quad (2.18)$$

L'autre est

$$\vec{\nabla} \cdot [\text{équation (2.13)}] + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\text{équation (2.14)}] = 0 \quad (2.19)$$

puisque

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right] = 0 \quad (2.20)$$

résulte de l'équation de continuité  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . On peut aussi dire que l'équation de continuité résulte des équations de Maxwell.

### 2.1.6 Équations de Maxwell dans le vide et dans les milieux

Les équations de Maxwell (2.1-2.4) décrivent le champ électromagnétique d'un système comportant des charges et des courants plongés dans le vide. On les appelle *équations de Maxwell dans le vide*. Elles décrivent aussi le champ électromagnétique à l'échelle microscopique dans les milieux matériels. Toutefois, on préfère décrire les phénomènes électromagnétiques dans les milieux à l'aide de quatre champs macroscopiques  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$  et  $\vec{H}$  qui vérifient les *équations de Maxwell dans les milieux* (cf. chapitre 6).

## 2.2 Équation de Maxwell-Ampère

### 2.2.1 Théorème d'Ampère généralisé

Soit  $\Gamma$  un circuit et  $S$  une surface orientée de bord  $\Gamma = \partial S$  (cf. figure 2.2). L'orientation du circuit  $\Gamma$  correspond à celle de la surface  $S$  (règle du tire-bouchon). En utilisant le théorème de Stokes et l'équation de Maxwell-Ampère (2.4) on a

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{n} dS = \mu_0 \left( \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS + \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \right). \quad (2.21)$$

Il apparaît le *courant de déplacement* (unité: A) à travers  $S$

$$I_{Sd} = \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \quad (2.22)$$

où

$$\Phi_e = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS \quad (2.23)$$

est le flux du champ électrique à travers la surface  $S$ . Notant

$$I_S = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS \quad (2.24)$$

le courant qui traverse la surface  $S$  à l'instant  $t$ , l'équation (2.21) s'écrit

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 (I_S + I_{Sd})}. \quad (2.25)$$

C'est le **théorème d'Ampère généralisé** dont le théorème d'Ampère est un cas particulier ( $I_{Sd} = 0$  en régime indépendant du temps).

*Remarque.* Pour un circuit  $\Gamma$  donné, les valeurs de  $I_S$  et  $I_{Sd}$  dépendent en général de la forme de la surface  $S$ , mais la somme  $I_S + I_{Sd}$  en est indépendante.

### 2.2.2 Exemple du condensateur en régime quasistationnaire

Considérons le circuit de la figure 2.3 comportant une source de tension variable  $U(t)$  et un condensateur plan d'armatures  $A$  et  $B$ . En régime quasistationnaire, on peut faire les approximations suivantes :

- l'intensité  $I(t)$  du courant est la même en tous points des fils du circuit ;
- le champ électrique est négligeable, sauf entre les armatures  $A$  et  $B$ .

Soit un cercle  $\Gamma$  entourant un fil du circuit. Appliquons lui le théorème d'Ampère généralisé (2.25) en utilisant d'une part le disque  $S$  qui a pour

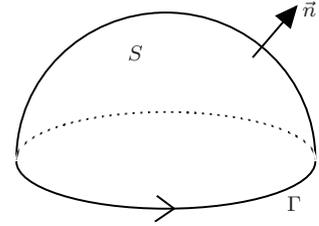


FIG. 2.2 - Circulation de  $\vec{B}$  le long de  $\Gamma$

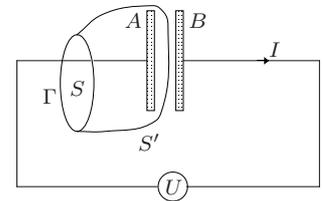


FIG. 2.3 - Courant à travers un condensateur.

bord le cercle  $\Gamma$  et d'autre part une surface  $S'$ , de bord  $\Gamma$ , mais qui ne coupe pas les fils du circuit en passant entre les armatures  $A$  et  $B$  du condensateur.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \left( \underbrace{I_S}_{=I(t)} + \underbrace{I_{Sd}}_{=0} \right) = \mu_0 \left( \underbrace{I_{S'}}_{=0} + I_{S'd} \right). \quad (2.26)$$

L'intensité du courant qui traverse le disque  $S$  est  $I_S = I(t)$ . Sur le disque  $S$ , le champ électrique est négligeable et le courant de déplacement  $I_{Sd} = 0$ . Aucun courant ne traverse la surface  $S'$  ( $I_{S'} = 0$ ). L'équation (2.26) implique que  $I_{S'd} = I(t)$ .

Expliquons le nom de *courant de déplacement* (volumique) qui a été donné par Maxwell à l'expression  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  dans l'équation (2.4). Son flux à travers  $S'$  donne le courant  $I(t)$  qui circule dans le circuit (cela explique le nom *courant*). Il est dû aux variations du champ électrique  $\vec{E}$ , qui elle-mêmes sont dues aux variations de la charge  $Q(t)$  du condensateur produites par le *déplacement* des charges électriques d'une armature du condensateur à l'autre le long des fils du circuit et à travers le générateur de tension.

**Exercice 2.1. 1.** On note  $\Sigma$  la surface de l'armature  $A$  ou  $B$  du condensateur et  $C$  la capacité du condensateur. Déterminer la charge électrique du condensateur  $Q(t)$  (portée par l'armature  $A$ ), l'intensité  $I(t)$  du courant et le champ électrique entre les armatures  $A$  et  $B$  en fonction de  $C$ ,  $\Sigma$ ,  $U(t)$  et de sa dérivée  $\frac{dU(t)}{dt}$ . On négligera la résistance des fils et les effets de bord dans le condensateur.

**2.** Calculer le flux  $\Phi_e$  du champ électrique à travers  $S'$  et en déduire le courant de déplacement  $I_{S'd}$ . Vérifier qu'on retrouve  $I_{S'd} = I(t)$ .

## 2.3 Relations de passage

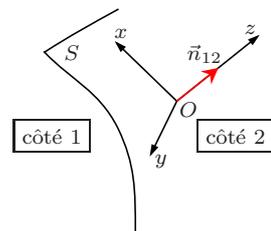
On considère un système comportant une surface  $S$  avec des charges et courants surfaciques. Le champ électromagnétique présente une discontinuité en traversant la surface. Le champ ainsi que ses dérivées dans des directions parallèles à la surface restent bornés.

Soit  $O$  un point quelconque de la surface  $S$  et  $\vec{n}_{12}$  un vecteur unitaire normal à la surface en  $O$  et allant du côté 1 vers le côté 2 de la surface. Soit  $Oxyz$  un référentiel cartésien orthogonal avec  $\vec{u}_z = \vec{n}_{12}$ . On se place au voisinage de  $O$  de sorte que la surface  $S$  est assimilée au plan  $Oxy$  (cf. figure 2.4). Notant le champ électromagnétique dans ce référentiel par  $\vec{E}(x, y, z, t)$  et  $\vec{B}(x, y, z, t)$ , on pose pour les valeurs du champ de part et d'autre de la surface au voisinage de  $O$

$$\vec{E}_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \vec{E}(0, 0, \epsilon, t), \quad \vec{E}_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \vec{E}(0, 0, \epsilon, t), \quad (2.27)$$

$$\vec{B}_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \vec{B}(0, 0, \epsilon, t) \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \vec{B}(0, 0, \epsilon, t). \quad (2.28)$$

À chaque équation de Maxwell correspond une relation de passage vérifiée par les sauts du champ  $\vec{E}_2 - \vec{E}_1$ ,  $\vec{B}_2 - \vec{B}_1$ , la charge surfacique  $\sigma$  ou le courant surfacique  $\vec{j}_\sigma = j_{\sigma x} \vec{u}_x + j_{\sigma y} \vec{u}_y$  en  $O$ .

FIG. 2.4 – Référentiel  $Oxyz$ .

### 2.3.1 Équation de Maxwell-Gauss

La relation de passage associée à l'équation de Maxwell-Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.29)$$

peut s'obtenir de deux façons.

#### À partir de la forme locale

Nous considérons la répartition de charge surfacique  $\sigma(x, y, t)$  comme étant la manifestation macroscopique (à l'échelle du mm) d'une répartition de charge volumique  $\rho(x, y, z, t)$  (à une échelle microscopique) non nulle pour  $0 \leq z \leq a$ , avec  $a \ll 1$  mm. La relation entre  $\rho$  et  $\sigma$  est

$$\sigma(x, y, t) = \int_0^a \rho(x, y, z, t) dz. \quad (2.30)$$

Mathématiquement, le passage de la répartition volumique  $\rho$  à la répartition surfacique  $\sigma$  correspond à

$$a \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \rho(x, y, z, t) \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{si } z = 0 \\ 0 & \text{si } z \neq 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

l'intégrale (2.30) restant finie (cf. figure 2.5). Écrivons l'équation de Maxwell-Gauss (2.29) sous la forme

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.32)$$

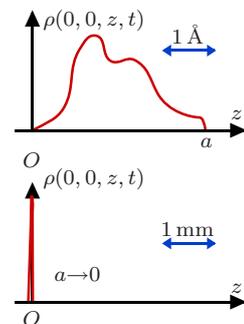
et intégrons la sur  $z$  de 0 à  $a$ . On obtient

$$\underbrace{\int_0^a \left[ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right] dz}_{aM} + E_z(x, y, a, t) - E_z(x, y, 0, t) = \frac{\sigma(x, y, t)}{\epsilon_0}. \quad (2.33)$$

Le 1<sup>er</sup> terme vaut  $aM$  où  $M$  reste borné dans la limite  $a \rightarrow 0$ . On obtient la relation de passage en prenant la limite  $a \rightarrow 0$  de (2.33) (avec  $\vec{E}_2 = \lim_{a \rightarrow 0} \vec{E}(0, 0, a, t)$ ,  $\vec{E}_1 = \vec{E}(0, 0, 0, t)$  et  $\sigma = \sigma(0, 0, t)$ ):

$$E_{2z} - E_{1z} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}. \quad (2.34)$$

Elle signifie que le saut de la composante normale à la surface  $E_{2z} - E_{1z}$  est égal à la densité surfacique divisée par  $\epsilon_0$ .

FIG. 2.5 – Distribution surfacique comme limite  $a \rightarrow 0$  d'une distribution volumique.

### À partir de la forme intégrale (théorème de Gauss)

On utilise pour surface de Gauss une boîte cylindrique, de bord  $\mathcal{B}$ , de centre  $O$ , d'axe  $Oz$ , d'épaisseur  $2\eta$  et de section  $\delta S$  (cf. figure 2.6). On s'intéresse au cas limite  $\eta \rightarrow 0$ . Les dimensions de la boîte sont assez petites pour considérer que la charge électrique dans le volume de Gauss est

$$\delta Q = \sigma \delta S + O(\eta), \quad (2.35)$$

le premier terme étant dû aux charges surfaciques situées sur l'élément de surface infinitésimal  $\delta S$  et le second terme, qui tend vers zéro quand  $\eta \rightarrow 0$ , représentant les charges volumiques dans la boîte. Le flux du champ électrique sortant de  $\mathcal{B}$  est

$$\Phi = \iint_{\mathcal{B}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = [E_z(0, 0, \eta, t) - E_z(0, 0, -\eta, t)] \delta S + O(\eta) \quad (2.36)$$

où le champ électrique, considéré comme uniforme sur chacun des disques du bord  $\mathcal{B}$  de la boîte, est évalué en  $M_1 = (0, 0, -\eta)$  ou  $M_2 = (0, 0, \eta)$  de part et d'autre de la surface  $S$  et où le terme  $O(\eta)$  représente le flux sortant par la surface latérale de la boîte qui tend vers zéro quand  $\eta \rightarrow 0$ . Le théorème de Gauss,  $\Phi = \delta Q / \epsilon_0$ , s'écrit après division par  $\delta S$

$$E_z(0, 0, \eta, t) - E_z(0, 0, -\eta, t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} + O(\eta) \quad (2.37)$$

qui donne la relation de passage (2.34) dans la limite  $\eta \rightarrow 0$ .

### 2.3.2 Équation de Maxwell-flux

On obtient la relation de passage associée à l'équation de Maxwell-flux

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.38)$$

à partir du cas précédent par la substitution formelle  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ ,  $\rho \rightarrow 0$  qui transforme l'équation (2.29) en (2.38) :

$$\boxed{\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0.} \quad (2.39)$$

Cette relation signifie que  $\vec{B}_\perp$ , la composante du champ magnétique normale à la surface, est continue.

### 2.3.3 Équation de Maxwell-Ampère

La relation de passage associée à l'équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.40)$$

peut s'obtenir de deux façons.

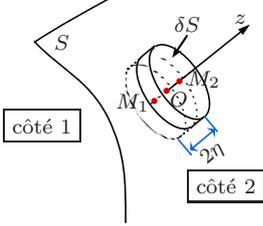


FIG. 2.6 – Surface de Gauss.

### À partir de la forme locale

Nous considérons le courant surfacique  $\vec{j}_\sigma(x, y, t)$  comme étant la manifestation macroscopique (à l'échelle du mm) d'une répartition de courant volumique  $\vec{j}(x, y, z, t)$  (à une échelle microscopique) non nulle pour  $0 \leq z \leq a$ , avec  $a \ll 1$  mm. La relation entre  $\vec{j}$  et  $\vec{j}_\sigma$  est :

$$\vec{j}_\sigma(x, y, t) = \int_0^a \vec{j}(x, y, z, t) dz. \quad (2.41)$$

Mathématiquement, le passage de la répartition volumique à la répartition surfacique correspond à  $a \rightarrow 0$  comme dans (2.31) (cf. figure 2.7). La composante suivant  $x$  de l'équation de Maxwell-Ampère (2.40) donne

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 j_x + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}. \quad (2.42)$$

On obtient, en intégrant cette expression sur  $z$  de 0 à  $a$ ,

$$\underbrace{\int_0^a \frac{\partial B_z}{\partial y} dz}_{\mathcal{K}_1} - B_y(x, y, a, t) + B_y(x, y, 0, t) = \mu_0 j_{\sigma x} + \mu_0 \epsilon_0 \underbrace{\int_0^a \frac{\partial E_x}{\partial t} dz}_{\mathcal{K}_2}. \quad (2.43)$$

Les intégrales  $\mathcal{K}_1$  et  $\mathcal{K}_2$  tendent vers 0 dans la limite  $a \rightarrow 0$ . On obtient une relation de passage en prenant la limite  $a \rightarrow 0$  de (2.43) :

$$-B_{2y} + B_{1y} = \mu_0 j_{\sigma x}. \quad (2.44)$$

De même, en partant de la composante suivant  $y$  de l'équation de Maxwell-Ampère (2.40) on obtient

$$B_{2x} - B_{1x} = \mu_0 j_{\sigma y}. \quad (2.45)$$

La composante suivant  $z$  de l'équation de Maxwell-Ampère (2.40) ne donne pas de relation de passage (rappelons que  $j_{\sigma z} = 0$  puisque  $\vec{j}_\sigma$  est parallèle à la surface  $S$ ). Les deux équations (2.44) et (2.45) s'écrivent sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_{2x} - B_{1x} \\ B_{2y} - B_{1y} \\ B_{2z} - B_{1z} \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} j_{\sigma x} \\ j_{\sigma y} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

ou sous forme vectorielle

$$\boxed{\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_\sigma.} \quad (2.47)$$

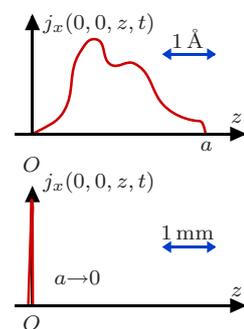
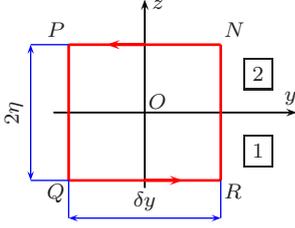


FIG. 2.7 – Courant surfacique comme limite  $a \rightarrow 0$  d'un courant volumique.

FIG. 2.8 – Rectangle  $NPQR$ .

### À partir de la forme intégrale (théorème d'Ampère généralisé)

Soit un rectangle  $NPQR$  de centre  $O$  tracé dans le plan  $Oyz$  et de côtés parallèles aux axes (cf. figure 2.8). La longueur des côtés  $PQ$  et  $RN$  est  $2\eta$  et celle des côtés  $NP$  et  $QR$ ,  $\delta y$ . On applique le théorème d'Ampère généralisé à la surface de ce rectangle, orientée suivant  $\vec{u}_x$ , et on prend la limite  $\eta \rightarrow 0$ . Les dimensions du rectangle sont assez petites pour considérer que l'intensité du courant électrique à travers le rectangle est

$$I = j_{\sigma x} \delta y + O(\eta). \quad (2.48)$$

Le terme  $O(\eta)$  représente le courant dû au courant volumique  $\vec{j}$ , qui peut exister en plus du courant surfacique. Ce terme ainsi que le courant de déplacement

$$I_d = \epsilon_0 \int_{-\eta}^{\eta} dz \int_{-\delta y/2}^{\delta y/2} dy \frac{\partial E_x}{\partial t}(0, y, z, t) \quad (2.49)$$

tendent vers zéro quand  $\eta \rightarrow 0$ . La circulation du champ magnétique le long du contour rectangulaire  $NPQR$  est

$$\oint_{NPQRN} \vec{B} \cdot d\vec{r} = [B_y(0, 0, -\eta, t) - B_y(0, 0, \eta, t)] \delta y + O(\eta) \quad (2.50)$$

où le champ magnétique est considéré comme uniforme sur chacun des côtés  $NP$  et  $QR$  de part et d'autre de la surface  $S$  et où le terme  $O(\eta)$  représente la circulation le long des côtés  $PQ$  et  $RN$  qui tend vers zéro quand  $\eta \rightarrow 0$ . Le théorème d'Ampère généralisé (2.25) implique

$$[B_y(0, 0, -\eta, t) - B_y(0, 0, \eta, t)] \delta y = \mu_0 j_{\sigma x} \delta y + O(\eta) \quad (2.51)$$

qui, dans la limite  $\eta \rightarrow 0$ , donne la relation de passage

$$B_{1y} - B_{2y} = \mu_0 j_{\sigma x} \quad (2.52)$$

identique à (2.44). La relation de passage (2.45) s'obtient de même en considérant un rectangle dans le plan  $Oxz$ .

### 2.3.4 Équation de Maxwell-Faraday

On obtient la relation de passage associée à l'équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.53)$$

à partir du cas précédent par la substitution formelle  $\vec{B} \rightarrow \vec{E}$ ,  $\vec{j} \rightarrow 0$ ,  $\mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \rightarrow -\vec{B}$  qui transforme l'équation (2.40) en (2.53) :

$$\boxed{\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0.} \quad (2.54)$$

Cette relation signifie que  $\vec{E}_{\parallel}$ , la composante du champ électrique parallèle à la surface, est continue.

### 2.3.5 Autre forme des relations de passage

Les quatre relations de passage obtenues sont récapitulées dans la dernière colonne de la table 2.1. Ces relations se retrouvent facilement à partir de la première colonne par les substitutions

$$\vec{\nabla} \rightarrow \vec{n}_{12}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0, \quad \vec{E} \rightarrow \vec{E}_2 - \vec{E}_1, \quad \vec{B} \rightarrow \vec{B}_2 - \vec{B}_1, \quad \rho \rightarrow \sigma, \quad \vec{j} \rightarrow \vec{j}_\sigma. \quad (2.55)$$

Cette règle s'explique quand on examine la démonstration des relations de passage à partir de la forme locale. Les termes contenant des dérivées par rapport  $x$ ,  $y$  et  $t$  disparaissent et les termes contenant la dérivée par rapport  $z$  font apparaître la discontinuité du champ, comme dans les équations (2.33) et (2.43).

Les relations de passage ont la même forme qu'en électrostatique (cf. table 1.1) et magnétostatique (cf. table 1.2).

Les deux relations de passage pour le champ électrique peuvent être regroupées en

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}} \quad (2.56)$$

et celles pour le champ magnétique en (cf. figure 2.9)

$$\boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_\sigma \wedge \vec{n}_{12}.} \quad (2.57)$$

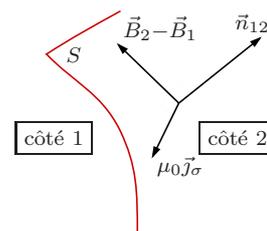


FIG. 2.9 – Relations de passage.

## 2.4 Les potentiels scalaire et vectoriel

En régime dépendant du temps, la loi de Coulomb et la loi de Biot et Savart ne sont plus valables. Il faudra utiliser d'autres méthodes pour déterminer le champ électromagnétique. Une de ces méthodes est la méthode des potentiels.

### 2.4.1 Existence des potentiels

Tout comme en magnétostatique, l'équation de Maxwell-flux (2.2) implique l'existence d'un **potentiel vectoriel**  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  (cf. théorème 1.3)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \quad (2.58)$$

On obtient, en portant cette expression du champ  $\vec{B}$  dans l'équation de Maxwell-Faraday (2.3),

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.59)$$

TAB. 2.1 – Équations de Maxwell : formes locales, intégrales et relations de passage.

formes locales	formes intégrales	relations de passage
Maxwell-Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	théorème de Gauss $\iint_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_V}{\epsilon_0}$ $Q_V = \iiint_V \rho d\tau$	$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
Maxwell-Flux $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Flux de $\vec{B}$ conservatif $\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$	$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$
Maxwell-Faraday $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	loi de Faraday (induction) $e = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ $\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$	$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$
Maxwell-Ampère $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	théorème d'Ampère généralisé $\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_d)$ $I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS$ $I_d = \epsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$	$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_\sigma$

soit

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.60)$$

Il existe donc (cf. théorème 1.1) un **potentiel scalaire**  $V(\vec{r}, t)$  tel que

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}V. \quad (2.61)$$

Nous avons obtenu le résultat suivant.

**Théorème 2.1 (potentiels).** *Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  s'expriment à l'aide de potentiels  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  et  $V(\vec{r}, t)$  par*

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}V} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}.} \quad (2.62)$$

### 2.4.2 Indétermination des potentiels

On va montrer que les potentiels ne sont pas uniques et qu'il y a une infinité de choix possibles. Soient  $\vec{A}_1$  et  $V_1$  deux autres potentiels tels que

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} - \vec{\nabla}V_1 \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_1. \quad (2.63)$$

Par différence des expressions  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  et  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_1$  on obtient

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{A} - \vec{A}_1) = 0. \quad (2.64)$$

Il existe donc (cf. théorème 1.1) une fonction  $f_1(\vec{r}, t)$  tel que  $\vec{A} - \vec{A}_1 = -\vec{\nabla}f_1$  soit

$$\vec{A}_1 = \vec{A} + \vec{\nabla}f_1. \quad (2.65)$$

Portons cette expression dans l'équation (2.63)

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \frac{\partial f_1}{\partial t} - \vec{\nabla}V_1. \quad (2.66)$$

Il vient par différence avec le champ  $\vec{E}$  donné dans (2.62)

$$\vec{\nabla} \left( \underbrace{V - V_1 - \frac{\partial f_1}{\partial t}}_g \right) = 0. \quad (2.67)$$

Comme  $\vec{\nabla}g = 0$  implique que  $g$  ne dépend pas de  $x, y, z$ , on obtient

$$V_1 = V - \frac{\partial f_1}{\partial t} - g(t) = V - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.68)$$

en posant  $f = f_1 + G(t)$  où  $G(t)$  est une primitive de  $g(t)$  ( $G'(t) = g(t)$ ). Remarquons qu'on peut écrire  $\vec{\nabla} f_1 = \vec{\nabla} f$  dans (2.65).

Nous avons ainsi montré que, si  $\vec{A}$  et  $V$  d'une part,  $\vec{A}_1$  et  $V_1$  d'autre part sont des potentiels, alors il existe une fonction  $f(\vec{r}, t)$  (**fonction de jauge**) telle que

$$\vec{A}_1 = \vec{A} + \vec{\nabla} f \quad \text{et} \quad V_1 = V - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.69)$$

Réciproquement, si  $\vec{A}$  et  $V$  sont des potentiels et  $f(\vec{r}, t)$  est une fonction arbitraire, alors les expressions (2.69) sont aussi des potentiels. En effet on vérifie facilement que les équations (2.63) sont satisfaites. Le théorème suivant récapitule ces résultats.

**Théorème 2.2 (transformation de jauge).** *Les potentiels  $\vec{A}$  et  $V$  sont déterminés à une transformation de jauge près. Une transformation de jauge est la transformation*

$$\boxed{\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f} \quad \text{et} \quad \boxed{V \rightarrow V - \frac{\partial f}{\partial t}} \quad (2.70)$$

où la fonction de jauge  $f(\vec{r}, t)$  est une fonction arbitraire. Une transformation de jauge ne modifie pas les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

### 2.4.3 Imposition d'une condition de jauge

On peut profiter de l'indétermination des potentiels pour leur imposer certaines conditions (**conditions de jauge**) qui simplifient les équations dans certains problèmes. Nous admettons les théorèmes suivants

**Théorème 2.3 (jauge de Coulomb).** *On peut imposer la condition*

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.} \quad (2.71)$$

**Théorème 2.4 (jauge de Lorenz<sup>3</sup>).** *On peut imposer la condition*

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0.} \quad (2.72)$$

### 2.4.4 Équations des potentiels

Portons les expressions (2.62) dans les équations de Maxwell (2.1–2.4). Les équations de Maxwell-flux et de Maxwell-Faraday sont automatiquement vérifiées (ces équations nous ont permis de montrer l'existence des potentiels).

---

3. Ludwig Valentin Lorenz (1829-1891)

L'équation de Maxwell-Gauss (2.1) donne

$$\vec{\nabla} \cdot \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.73)$$

soit, en introduisant le laplacien scalaire  $\Delta V = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V)$ ,

$$\Delta V + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0. \quad (2.74)$$

L'équation de Maxwell-Ampère (2.4) donne

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V \right) \quad (2.75)$$

soit, en introduisant le laplacien vectoriel  $\Delta \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$ ,

$$\Delta \vec{A} - \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = 0. \quad (2.76)$$

En jauge de Coulomb (2.71), les équations des potentiels (2.74) et (2.76) deviennent

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (2.77)$$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \epsilon_0 \mu_0 \vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} = 0. \quad (2.78)$$

On reconnaît dans (2.77) l'**équation de Poisson**<sup>4</sup> qui est aussi l'équation vérifiée par le potentiel en électrostatique.

En jauge de Lorenz (2.72), les équations des potentiels (2.74) et (2.76) deviennent

$$\Delta V - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (2.79)$$

$$\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = 0. \quad (2.80)$$

Il apparaît le d'Alembertien<sup>5</sup>

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad \text{où} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (2.81)$$

4. Siméon Denis Poisson (1781-1840)

5. Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

est la vitesse de la lumière dans le vide (2.6). Les équations (2.79) et (2.80) s'écrivent

$$\boxed{\square V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}.} \quad (2.82)$$

Dans une région sans charge ni courant on obtient des équations d'ondes de d'Alembert  $\square V = 0$ ,  $\square \vec{A} = 0$ . Les ondes électromagnétiques correspondantes se propagent à la vitesse  $c$  (cf. chapitre 4).

## 3

# Énergie électromagnétique

## Vecteur de Poynting

### 3.1 Puissance fournie aux charges par le champ électromagnétique

La force exercée à l'instant  $t$  par le champ électromagnétique sur une particule ponctuelle, située en  $\vec{r}$ , de charge  $q_a$  et de vitesse  $\vec{v}_a$  est donnée par la formule de Lorentz (1.18)

$$\vec{F}_a = q_a \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}_a \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) \right]. \quad (3.1)$$

Le champ électromagnétique fournit à la charge la puissance

$$P_a = \vec{F}_a \cdot \vec{v}_a = q_a \vec{v}_a \cdot \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (3.2)$$

La puissance fournie par le champ aux  $N$  particules ponctuelles de charges  $q_a$  et vitesses  $\vec{v}_a$  ( $a = 1, 2, \dots, N$ ) qui se trouvent dans un élément de volume  $d\tau$  situé en  $\vec{r}$  est

$$dP_c = \sum_{a=1}^N q_a \vec{v}_a \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) d\tau \quad (3.3)$$

où on a utilisé la définition (1.3) du courant volumique

$$\vec{j}(\vec{r}, t) d\tau = \sum_{a=1}^N q_a \vec{v}_a. \quad (3.4)$$

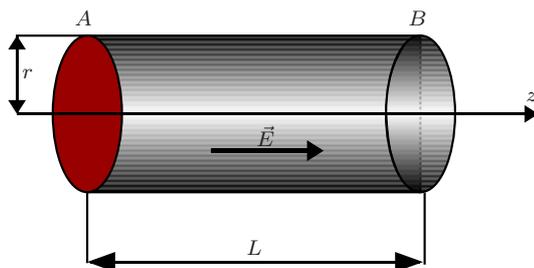
La puissance par unité de volume fournie par le champ électromagnétique aux charges est donc

$$\boxed{\frac{dP_c}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}} \quad (\text{unité: W m}^{-3}) \quad (3.5)$$

**Remarque.** On peut avoir  $\frac{dP_c}{d\tau} < 0$  et les charges fournissent de la puissance au champ. C'est ce qui se passe dans une antenne émettrice.

### 3.1.1 Exemple d'un fil conducteur

FIG. 3.1 – Fil conducteur.



Soit un fil conducteur de forme cylindrique d'axe  $Oz$  de rayon  $r$  et de longueur  $L$  parcouru par un courant d'intensité constante  $I$  (cf. figure 3.1). Soit  $U = U_A - U_B$  la différence de potentiel entre ses extrémités  $A$  et  $B$ . Le champ électrique dans le conducteur

$$\vec{E} = \frac{U}{L} \vec{e}_z \quad (3.6)$$

est constant et uniforme. Le courant volumique dans le conducteur

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi r^2} \vec{e}_z \quad (3.7)$$

est constant et uniforme.

La puissance par unité de volume (3.5) est

$$\frac{dP_c}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{UI}{L\pi r^2}. \quad (3.8)$$

La puissance totale fournie par le champ électromagnétique aux charges dans le fil est donc  $P = UI$ . En régime de courant permanent les porteurs de charge ont la même vitesse moyenne. La puissance fournie par le champ aux charges est cédée par les charges au solide conducteur au cours de collisions inélastiques ce qui produit un échauffement du conducteur (effet Joule<sup>1</sup>).

## 3.2 Loi de conservation de l'énergie

### 3.2.1 Propriétés de l'énergie d'un système en interaction

Considérons un système de  $N$  particules ponctuelles chargées en interaction. La particule numéro  $a$  ( $a = 1, 2, \dots, N$ ), de masse  $m_a$  et de charge  $q_a$ ,

1. James Prescott Joule (1818-1889)

se trouve, à l'instant  $t$ , en  $\vec{r}_a(t)$  et sa vitesse est  $\vec{v}_a(t)$ . Nous voulons exprimer la loi de conservation de l'énergie pour ce système. Nous allons en fait établir, à partir des lois fondamentales de la mécanique et des équations de Maxwell, une loi de conservation pour une grandeur que nous identifierons avec l'énergie du système. Pour effectuer cette identification, examinons les propriétés souhaitables de l'énergie du système.

- L'énergie du système doit être la somme des énergies de chaque particule et de l'énergie du champ électromagnétique. L'énergie de la particule  $a$  consiste seulement en son énergie cinétique  $\frac{1}{2}m_a v_a^2$ , en négligeant l'énergie interne de chaque particule qui est supposée rester constante. L'énergie du système  $E_{\text{système}}$  est donc de la forme

$$E_{\text{système}} = E_{\text{part}} + E_{\text{champ}} \quad \text{où} \quad E_{\text{part}} = \sum_{a=1}^N \frac{1}{2} m_a v_a^2. \quad (3.9)$$

Remarquer que nous n'introduisons pas explicitement d'énergie potentielle d'interaction entre les particules dans cette expression. Cela est conforme à la façon dont nous traitons l'interaction entre les particules : nous la traitons par l'intermédiaire du champ (les particules créent le champ qui agit sur les particules). Dans ce point de vue, l'énergie d'interaction (ou potentielle) est prise en compte dans l'énergie du champ électromagnétique  $E_{\text{champ}}$ .

- Nous voulons une formulation locale de la loi de conservation de l'énergie. Si au même instant une énergie de 1 J apparaît sur la Terre et une énergie de 1 J disparaît sur la Lune, il y a conservation de l'énergie totale. Toutefois cela est impossible : l'énergie passe d'un point à un autre en un temps fini (existence d'une densité d'énergie et d'un courant d'énergie).

### 3.2.2 Forme locale

Nous nous proposons de rechercher la forme locale de la loi de conservation de l'énergie. Introduisons la **densité d'énergie électromagnétique**  $u(\vec{r}, t)$  et la **densité de courant d'énergie électromagnétique**  $\vec{P}(\vec{r}, t)$ . Par définition de  $u$ ,

$$E_{\text{champ } V}(t) = \iiint_V u(\vec{r}, t) d\tau \quad (3.10)$$

est l'énergie électromagnétique contenue dans le volume  $V$  limité par la surface  $S$  (cf. figure 3.2). Le vecteur unitaire  $\vec{n}$  normal à  $S$  est orienté vers l'extérieur du volume  $V$ . Par définition de  $\vec{P}(\vec{r}, t)$ ,

$$\Pi_S = \iint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS \quad (3.11)$$

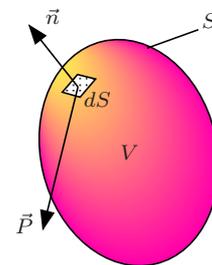


FIG. 3.2 –  $V$  et  $S$ .

est la puissance électromagnétique qui sort du volume  $V$  en traversant la surface  $S$ . Soit

$$E_{\text{part } V}(t) = \sum_{a \in V} \frac{1}{2} m_a v_a^2 \quad (3.12)$$

l'énergie cinétique des particules dans le volume  $V$  à l'instant  $t$ . La somme  $\sum_{a \in V}$  porte sur les particules  $a$  qui se trouvent dans le volume  $V$ . Nous supposons que les particules ne traversent pas la surface  $S$ . Entre les instants  $t$  et  $t+dt$ , la variation de l'énergie cinétique  $dE_{\text{part } V} = E_{\text{part } V}(t+dt) - E_{\text{part } V}(t)$  est égale au travail des forces électromagnétiques agissant sur les charges dans le volume  $V$ . D'après (3.5) et le théorème de l'énergie cinétique, on a

$$\frac{dE_{\text{part } V}}{dt} = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau. \quad (3.13)$$

La conservation de l'énergie s'exprime par

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{champ } V} + E_{\text{part } V}) = -\Pi_S \quad (3.14)$$

(il n'y a pas de courant d'énergie mécanique à travers  $S$ , puisque nous supposons que les particules ne traversent pas la surface  $S$ ). Transformons (3.11) avec le théorème d'Ostrogradski

$$\Pi_S = \iint_S \vec{P} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \, d\tau. \quad (3.15)$$

Utilisons (3.10) et (3.13–3.15) pour écrire :

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{champ } V} + E_{\text{part } V}) = \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} \, d\tau + \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau = - \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \, d\tau. \quad (3.16)$$

Cette relation sera vérifiée pour tout volume  $V$  si

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0.} \quad (3.17)$$

### 3.2.3 Le théorème de Poynting

Le théorème de Poynting<sup>2</sup> (1884) est une relation de la forme (3.17) qui résulte des équations de Maxwell. Pour l'établir, nous partons des équations de Maxwell

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} - \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0. \quad (3.19)$$

---

2. John Henry Poynting (1852-1914)

Prenons le produit scalaire de la première avec  $\vec{E}$  et de la seconde avec  $\vec{B}$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} \vec{E}^2 \right) + \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = 0 \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{B}^2 \right) + \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = 0. \quad (3.21)$$

La somme de ces deux équations donne, en utilisant l'identité vectorielle

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \quad (3.22)$$

et après division par  $\mu_0$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = 0. \quad (3.23)$$

Cette équation constitue le **théorème de Poynting**. Comparant à (3.17), nous avons obtenu la **densité d'énergie électromagnétique**

$$\boxed{u(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}} \quad (\text{unité: J m}^{-3}) \quad (3.24)$$

et le courant d'énergie

$$\boxed{\vec{P}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}} \quad (\text{unité: W m}^{-2}) \quad (3.25)$$

qui est appelé le **vecteur de Poynting**.

### 3.2.4 Indétermination de la densité d'énergie électromagnétique

Nous avons trouvé des grandeurs  $u$  et  $\vec{P}$  qui satisfont à l'équation (3.17), mais ce ne sont pas les seules.

Soit  $\vec{S}(\vec{r}, t)$  un champ de vecteur arbitraire. Il est immédiat que  $u_1 = u - \vec{\nabla} \cdot \vec{S}$  et  $\vec{P}_1 = \vec{P} + \frac{\partial \vec{S}}{\partial t}$  vérifient aussi l'équation (3.17) :

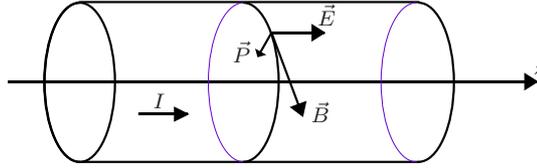
$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \cdot \vec{P}_1 = 0. \quad (3.26)$$

Il semble qu'il ne devrait y avoir qu'une valeur,  $u$  ou une des expressions  $u_1$ , pour la densité d'énergie électromagnétique. Nous avons choisi l'expression (3.24), mais la seule justification que nous pouvons en donner est que la forme (3.24) est la plus simple possible. Il n'y a pas de justification expérimentale : jusqu'à maintenant aucune expérience qui mesure la densité d'énergie électromagnétique n'a été réalisée.

### 3.3 Exemples

#### 3.3.1 Fil conducteur

FIG. 3.3 – Fil conducteur.



Reprenons (cf. figure 3.3) le fil conducteur cylindrique de la figure 3.1. En un point sur la surface latérale du cylindre, le champ électrique est

$$\vec{E} = \frac{U}{L} \vec{e}_z, \quad (3.27)$$

le champ magnétique (calcul pour un fil infiniment long)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{e}_\theta \quad (3.28)$$

et le vecteur de Poynting

$$\vec{P} = -\frac{UI}{2\pi aL} \vec{e}_r. \quad (3.29)$$

De même, on montre que  $\vec{P}$  est perpendiculaire à l'axe  $Oz$  à l'intérieur du cylindre. Le flux de  $\vec{P}$  à travers une section droite du cylindre est donc nul. On calcule que le flux du vecteur de Poynting entrant dans le cylindre est  $-\Pi_S = UI$ , qui est la puissance fournie aux charges (cf. section 3.1.1). Cette puissance entre par la surface latérale du cylindre conducteur. Le courant d'énergie ne suit pas le courant électrique. La direction du courant d'énergie électromagnétique n'est pas du tout intuitive dans cet exemple.

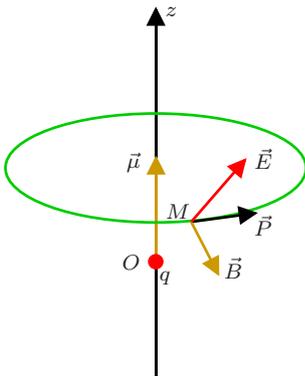


FIG. 3.4 – Charge et dipôle magnétique.

#### 3.3.2 Charge électrique ponctuelle et dipôle magnétique

On place à l'origine  $O$  une charge électrique ponctuelle  $q$  et un dipôle magnétique  $\vec{\mu}$  le long de  $Oz$  (cf. figure 3.4). Au point  $M$ , le champ électrique  $\vec{E}$  est radial et le champ magnétique  $\vec{B}$  est dans le plan  $MOz$ . Le vecteur de Poynting en  $M$  est perpendiculaire au plan  $MOz$ . Le système est invariant par rotation autour de  $Oz$ . On en déduit que les lignes de courant d'énergie sont les cercles d'axe  $Oz$ . La ligne de courant d'énergie passant par  $M$  est représentée sur la figure. La densité d'énergie électromagnétique  $u$  est constante puisque les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont constants, mais il y a un courant d'énergie ( $\vec{P} \neq 0$ ).

### 3.3.3 Condensateur chargé (électrostatique)

Soit un condensateur plan formé d'armatures de surface  $S$  distantes de  $d$  (cf. figure 3.5). Considérons la situation statique où la différence de potentiel entre les armatures est  $V$ . En négligeant les effets de bord, le champ électrique est constant et uniforme, de valeur  $\vec{E} = \frac{V}{d}\vec{e}_z$ , dans le condensateur et nul à l'extérieur. L'énergie électromagnétique totale dans tout l'espace, que nous noterons  $W$ , est

$$W = \iiint u \, d\tau = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{CV^2}{2} \quad \text{où} \quad C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (3.30)$$

est la **capacité** (unité: F [farad]) du condensateur. Introduisant la charge  $Q$  du condensateur

$$\boxed{Q = CV} \quad (3.31)$$

on peut écrire l'énergie électromagnétique sous les formes

$$\boxed{W = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2} = \frac{Q^2}{2C}} \quad (3.32)$$

Les équations (3.31) et (3.32) sont valables pour un condensateur de forme quelconque, mais l'expression de sa capacité  $C$  dépend évidemment de la forme du condensateur.

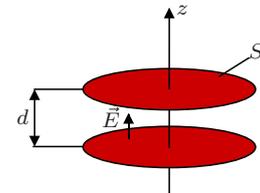


FIG. 3.5 – Condensateur.

### 3.3.4 Solénoïde (magnétostatique)

Soit un solénoïde de rayon  $a$  et de longueur  $h$ , formé d'un bobinage de  $n$  spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité constante  $I$  (cf. figure 3.6). En négligeant les effets de bord, le champ magnétique est constant et uniforme, de module  $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$  dans le solénoïde et nul à l'extérieur. L'énergie électromagnétique totale est

$$W = \iiint u \, d\tau = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi a^2 h = \frac{LI^2}{2} \quad \text{où} \quad L = \mu_0 n^2 \pi a^2 h. \quad (3.33)$$

Le flux de  $\vec{B}$  à travers les  $nh$  spires est

$$\Phi = nhB\pi a^2 = \mu_0 n^2 \pi a^2 h I = LI. \quad (3.34)$$

$L$  est l'inductance propre du solénoïde (cf. section 3.4.1).

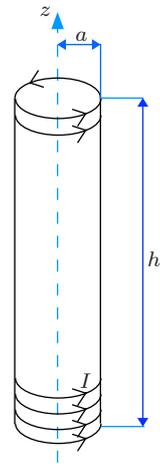


FIG. 3.6 – Solénoïde.

## 3.4 Energie d'un système de courants

### 3.4.1 Energie d'un circuit, auto-induction

On peut généraliser l'exemple du solénoïde (cf. section 3.3.4) à un circuit quelconque parcouru par un courant d'intensité constante  $I$ . Nous supposons que le champ magnétique est proportionnel à  $I$ . C'est approximativement le cas pour un bobinage en l'absence de milieux magnétiques non

linéaires (fer, ...) au voisinage du circuit. L'énergie électromagnétique totale  $W$  est proportionnelle à  $I^2$ , le champ électrique étant nul. On peut donc écrire

$$\boxed{W = \frac{LI^2}{2}} \quad (3.35)$$

ce qui définit la grandeur  $L$  (unité : H [henry<sup>3</sup>]) appelée **inductance propre** (on dit aussi **coefficient d'auto-induction**, **auto-inductance**, **self-inductance** (anglicisme) et **self**) du circuit. Le calcul de  $L$  est en général très difficile : on ne peut pas supposer que la distribution de courant est linéique (ce qui conduit à une divergence de  $W$ ). Comme la densité d'énergie (3.35) est positive ou nulle  $u \geq 0$ ,  $W \geq 0$  et  $\boxed{L > 0}$ .

Considérons maintenant un régime variable où l'intensité  $I$  varie au cours du temps. Lorsque  $I$  varie, le champ magnétique  $\vec{B}$  varie et il apparaît un champ électrique  $\vec{E}$ . L'énergie électromagnétique  $W$  n'est plus proportionnelle à  $I^2$ . Supposons toutefois que la variation de  $I$  soit suffisamment lente pour que

- l'expression (3.35) reste valable avec une valeur  $L$  constante ;
- le flux du vecteur de Poynting à l'infini (le rayonnement) soit négligeable.

Ces suppositions constituent l'approximation des régimes quasistationnaires (ARQ) du cas considéré. Dans l'ARQ pour un condensateur on supposerait que l'équation (3.32) reste valable lorsque  $V$  et  $Q$  varient avec  $t$ . L'équation (3.14), lorsque  $V$  désigne tout l'espace (on a alors  $E_{\text{champ } V} = W$ ), s'écrit

$$\frac{d}{dt}(W + E_{\text{part}}) = 0 \quad (3.36)$$

parce que  $\Pi_S$ , qui est la puissance rayonnée à l'infini, est négligeable dans l'ARQ. Cette équation exprime que la variation  $\frac{dW}{dt}$  de l'énergie électromagnétique est l'opposée de la puissance fournie aux charges par le champ. En dérivant (3.35) on obtient, en comparant avec (1.118) où  $dU/dt = -dW/dt$ ,

$$\frac{dW}{dt} = LI \frac{dI}{dt} = -eI \quad (3.37)$$

où  $e = -L \frac{dI}{dt}$  est la force électromotrice d'induction (si  $I > 0$  et  $\frac{dI}{dt} < 0$ , l'énergie du champ diminue, la puissance fournie aux charges par le champ,  $eI$ , est positive et  $e > 0$ ). Supposons que le circuit forme la courbe fermée  $\Gamma$  orientée suivant la convention de signe pour  $I$ . Soit  $\Phi$  le flux du champ magnétique à travers le circuit, c'est-à-dire le flux à travers une surface de bord  $\Gamma$  orientée par la règle du tire-bouchon. La loi de l'induction de

Faraday,  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$  donne une deuxième expression de force électromotrice d'induction  $e$ . On a donc  $\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{dI}{dt}$  et par intégration ( $\Phi = 0$  pour  $I = 0$ )

$$\boxed{\Phi = LI} \quad (3.38)$$

qui généralise (3.34). Notons qu'on peut récrire (3.35) sous les formes

$$\boxed{W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi I}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}} \quad (3.39)$$

**Circuit RL.** La figure schématise un circuit de résistance  $R$  et inductance propre  $L$  comportant un générateur de tension  $V(t)$  (cf. figure 3.7). La f.e.m. d'induction est  $e = -L\frac{dI}{dt}$  et l'équation reliant la tension  $V(t)$  et le courant  $I(t)$  est  $V + e = RI$  soit

$$V = RI + L\frac{dI}{dt}. \quad (3.40)$$

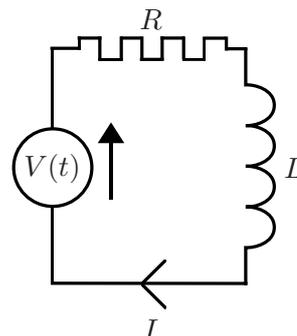


FIG. 3.7 – Circuit RL.

### 3.4.2 Induction mutuelle

Considérons un système de  $N$  circuits, le circuit  $a$  étant parcouru par un courant d'intensité *constante*  $I_a$  ( $a = 1, 2, \dots, N$ ). Nous supposons la multilinéarité du système en  $I_1, I_2, \dots, I_N$ . C'est le cas lorsque les circuits sont filiformes (bobines, fils) et les milieux environnants linéaires du point de vue des propriétés magnétiques. La multilinéarité signifie que le champ magnétique est de la forme

$$\vec{B} = \sum_{a=1}^N \vec{B}_a I_a \quad (3.41)$$

où  $\vec{B}_a$  est le champ magnétique créé par le courant  $I_a = 1$  A dans le circuit  $a$  lorsque les courants dans tous les autres circuits sont nuls. L'énergie électromagnétique totale  $W$  est, le champ électrique étant négligé,

$$W = \iiint \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} d\tau = \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \iiint \frac{\vec{B}_a I_a \cdot \vec{B}_b I_b}{2\mu_0} d\tau. \quad (3.42)$$

Elle s'écrit

$$\boxed{W = \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \frac{L_{ab} I_a I_b}{2}} \quad (3.43)$$

où

$$L_{ab} = \iiint \frac{\vec{B}_a \cdot \vec{B}_b}{\mu_0} d\tau \quad (3.44)$$

est une grandeur qui dépend de la géométrie du système mais qui est indépendante des courants. L'expression (3.44) est symétrique en  $a$  et  $b$ . On a donc

$$\boxed{L_{ab} = L_{ba}} \quad (3.45)$$

La forme quadratique (3.43) est positive ( $W \geq 0$ ). Il en résulte les relations  $L_{aa} \geq 0$ ,  $L_{aa}L_{bb} \geq L_{ab}^2$ , ... (voir cours de mathématique).

Considérons maintenant un régime variable où les intensités  $I_a$  varient au cours du temps. Nous supposerons ces variations suffisamment lentes pour que

- l'expression (3.43) reste valable avec les valeurs  $L_{ab}$  du cas statique ;
- le flux du vecteur de Poynting à l'infini (le rayonnement) soit négligeable.

Comme dans le cas d'un seul circuit, ces suppositions entraînent que la variation  $\frac{dW}{dt}$  de l'énergie électromagnétique est l'opposée de la puissance fournie aux charges par le champ. En dérivant (3.43) on obtient

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N L_{ab} \frac{dI_b}{dt} I_a = \sum_{a=1}^N -e_a I_a \quad (3.46)$$

où

$$e_a = - \sum_{b=1}^N L_{ab} \frac{dI_b}{dt} \quad (3.47)$$

est la f.e.m. d'induction dans le circuit  $a$ . Soit  $\Phi_a$  le flux du champ magnétique à travers le circuit  $a$  orienté par la convention de signe pour  $I_a$ . La loi de l'induction de Faraday,  $e_a = -\frac{d\Phi_a}{dt}$  donne une deuxième expression de f.e.m. d'induction  $e_a$ . On a donc  $\frac{d\Phi_a}{dt} = \sum_{b=1}^N L_{ab} \frac{dI_b}{dt}$  et par intégration ( $\Phi_a = 0$  quand tous les courants sont nuls)

$$\boxed{\Phi_a = \sum_{b=1}^N L_{ab} I_b.} \quad (3.48)$$

Le coefficient  $L_{aa}$  est l'inductance propre du circuit  $a$  (cf. section 3.4.1) et  $L_{ab} = L_{ba}$  ( $a \neq b$ ) est le **coefficient d'inductance mutuelle** des circuits  $a$  et  $b$ .

## 4

# Ondes électromagnétiques dans le vide

## 4.1 Équation de propagation

Considérons les équations de Maxwell dans le vide, dans une région de l'espace qui ne contient ni charges ni courants :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.4)$$

Prenons le rotationnel de l'équation (4.3) et utilisons (4.4) :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (4.5)$$

D'après (4.1), le laplacien vectoriel de  $\vec{E}$  se réduit à

$$\Delta \vec{E} = \vec{\nabla} (\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_0) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \quad (4.6)$$

et (4.5) donne l'équation de propagation dans le vide pour le champ  $\vec{E}$  :

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.} \quad (4.7)$$

C'est l'équation d'ondes de d'Alembert correspondant à la vitesse de propagation  $c$ . En coordonnées cartésiennes,

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z), \quad \Delta \vec{E} = (\Delta E_x, \Delta E_y, \Delta E_z)$$

et l'équation (4.7) équivaut aux trois équations

$$\boxed{\square E_x = 0, \quad \square E_y = 0 \quad \text{et} \quad \square E_z = 0} \quad (4.8)$$

où l'opérateur

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.9)$$

est le d'Alembertien.



**Remarque.** En coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi, z)$  ou sphériques  $(r, \theta, \phi)$  les composantes de  $\vec{E}$  **ne vérifient pas** les équations  $\square E_\rho = 0, \square E_\phi = 0, \dots$ . La raison en est que

$$\Delta(E_\rho \vec{u}_\rho + E_\phi \vec{u}_\phi + E_z \vec{u}_z) \neq (\Delta E_\rho) \vec{u}_\rho + (\Delta E_\phi) \vec{u}_\phi + (\Delta E_z) \vec{u}_z$$

et

$$\Delta(E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta + E_\phi \vec{u}_\phi) \neq (\Delta E_r) \vec{u}_r + (\Delta E_\theta) \vec{u}_\theta + (\Delta E_\phi) \vec{u}_\phi.$$

**Exercice 4.1.** Montrer, en prenant le rotationnel de l'équation (4.4), que l'équation d'ondes dans le vide pour le champ  $\vec{B}$  est

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0.} \quad (4.10)$$

**Exercice 4.2.** Utiliser  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V$ ,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  et les équations des potentiels pour retrouver les équations d'ondes (4.7) et (4.10).

## 4.2 Onde plane progressive harmonique (OPPH)

Considérons une onde plane progressive harmonique (OPPH) de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k} = (\alpha, \beta, \gamma)$ . Posons  $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ . Le champ électromagnétique au point  $M$  s'écrit en représentation complexe

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \hat{\vec{a}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \hat{\vec{a}} e^{i(\omega t - \alpha x - \beta y - \gamma z)} \quad (4.11)$$

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \hat{\vec{b}} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \hat{\vec{b}} e^{i(\omega t - \alpha x - \beta y - \gamma z)} \quad (4.12)$$

où  $\hat{\vec{a}}$  et  $\hat{\vec{b}}$  sont des vecteurs complexes constants.

Portant (4.11) dans l'équation d'onde (4.7) on obtient

$$\Delta \hat{\vec{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\vec{E}}}{\partial t^2} = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \right) \hat{\vec{E}} = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \hat{\vec{E}} = 0. \quad (4.13)$$

On en déduit la relation entre la pulsation et le vecteur d'onde

$$\boxed{|\vec{k}| = k = \frac{\omega}{c}.} \quad (4.14)$$

L'équation d'onde (4.10) conduit à la même relation.

Les équations de Maxwell (4.1–4.4) s'écrivent ( $\vec{\nabla} \rightarrow -i\vec{k}$  et  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$ )

$$-i\vec{k} \cdot \hat{\vec{E}} = 0 \quad (4.15)$$

$$-i\vec{k} \cdot \hat{\vec{B}} = 0 \quad (4.16)$$

$$-i\vec{k} \wedge \hat{\vec{E}} = -i\omega \hat{\vec{B}} \quad (4.17)$$

$$-i\vec{k} \wedge \hat{\vec{B}} = \frac{i\omega}{c^2} \hat{\vec{E}}. \quad (4.18)$$

L'équation (4.15) implique que le champ électrique  $\vec{E}$  est perpendiculaire au vecteur d'onde. On dit que

**le champ électrique est transverse.**

De même, d'après l'équation (4.16),

**le champ magnétique est transverse.**

Désignons par  $\vec{n}$  le vecteur unitaire ayant la direction et le sens du vecteur d'onde ( $\vec{k} = k\vec{n} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$ ). L'équation (4.17) donne (on revient à la représentation réelle)

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c}} \quad (4.19)$$

qui implique que  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires et que  $B = E/c$  en module. De plus les trois vecteurs  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$  forment un trièdre orthogonal direct. L'équation (4.18) donne  $\vec{E} = -c\vec{n} \wedge \vec{B}$  qui n'apporte rien de neuf.

Les propriétés d'une OPPH sont en résumé (cf. figure 4.1)

$$\boxed{(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}) \text{ trièdre orthogonal direct, } B = \frac{E}{c}, k = \frac{\omega}{c}.} \quad (4.20)$$

### 4.2.1 Exemple

Pour  $\vec{n} = \vec{u}_z$  et  $\vec{a} = A\vec{u}_x$  ( $A$  constante réelle) l'onde est donnée par

$$\hat{\vec{E}}(x, y, z, t) = A\vec{u}_x e^{i(\omega t - kz)} \quad (4.21)$$

$$\hat{\vec{B}}(x, y, z, t) = \frac{A}{c}\vec{u}_y e^{i(\omega t - kz)} \quad (4.22)$$

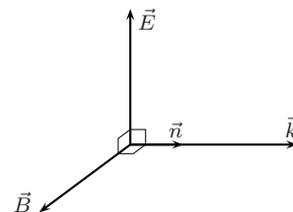


FIG. 4.1 – Le trièdre orthogonal direct  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ .

ou, en réel,

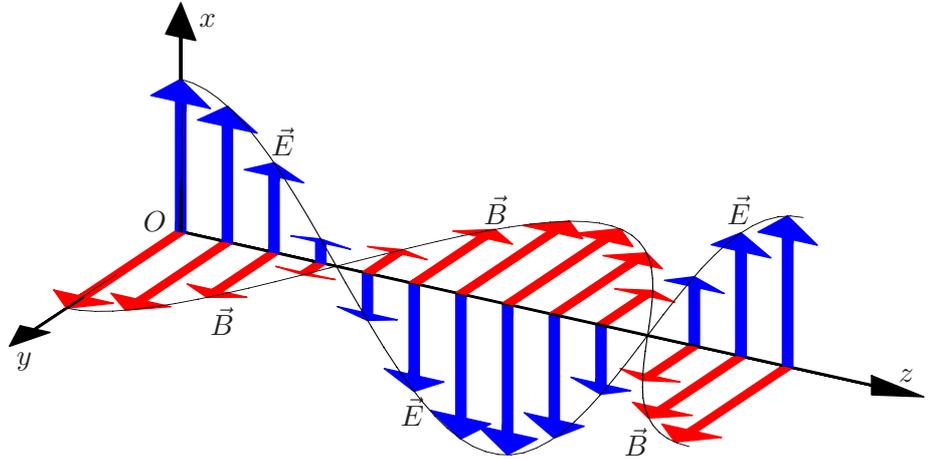
$$\vec{E}(x, y, z, t) = A\vec{u}_x \cos(\omega t - kz) \quad (4.23)$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \frac{A}{c}\vec{u}_y \cos(\omega t - kz). \quad (4.24)$$

Cette onde se propage à la vitesse  $c$  le long de  $Oz$ , vers les  $z$  croissants. À un instant donné, le champ électromagnétique est le même en tous points du plan  $z = \text{Cte}$ . L'onde est plane et les surfaces d'onde sont les plans perpendiculaires à  $Oz$ . Le champ électrique est parallèle à  $Ox$  : l'onde est polarisée suivant  $\vec{u}_x$ .

Le champ électromagnétique ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) en quelques points de l'axe  $Oz$ , à l'instant  $t = 0$ , est représenté sur la figure 4.2.

FIG. 4.2 – Champ électromagnétique d'une OPPH.



#### 4.2.2 Importance des OPPH

Une OPPH doit exister dans tout l'espace ( $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ ) et à tout temps ( $t \in \mathbb{R}$ ). Elle ne peut donc pas exister réellement. Toutefois, une onde quasi-monochromatique peut souvent être représentée avec une bonne approximation par une OPPH.

La théorie de Fourier permet de montrer que l'onde électromagnétique dans le vide la plus générale s'obtient par une superposition d'OPPH :

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \iiint d^3k \hat{\vec{a}}(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \hat{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \iiint d^3k \frac{\vec{k} \wedge \hat{\vec{a}}(\vec{k})}{\omega} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (4.25)$$

avec  $\omega = ck$  et  $\hat{\vec{a}}(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0$ . Dans le cas général, on ne peut plus définir le vecteur d'onde et  $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ .

En superposant des OPPH de vecteurs d'onde parallèles à  $Oz$  ( $\vec{k} = k\vec{u}_z$ , avec  $k > 0$ ), on obtient une onde plane progressive se propageant dans la

direction et sens de  $\vec{u}_z$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{F}(z - ct), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{F}(z - ct)}{c} \quad (4.26)$$

avec  $\vec{F}(u) \cdot \vec{u}_z = 0$ .

**Exercice 4.3.** Montrer que le champ (4.26) vérifie les équations de Maxwell (4.1–4.4).

### 4.3 Polarisation

Considérons une OPPH de vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{u}_z$ . D'après la section 4.2 la forme la plus générale du champ électrique en  $M$  ( $\vec{r} = \vec{OM}$ ) et à l'instant  $t$  est

$$\hat{\vec{E}}(M, t) = (\hat{a}_x \vec{u}_x + \hat{a}_y \vec{u}_y) e^{i(\omega t - kz)}. \quad (4.27)$$

Le champ magnétique s'obtient par l'équation (4.19) ( $\vec{n} = \vec{u}_z$ ):

$$\hat{\vec{B}}(M, t) = \frac{-\hat{a}_y \vec{u}_x + \hat{a}_x \vec{u}_y}{c} e^{i(\omega t - kz)}. \quad (4.28)$$

Posons  $\hat{a}_x = a_x e^{i\phi_x}$  et  $\hat{a}_y = a_y e^{i\phi_y}$  ( $a_x \geq 0, a_y \geq 0$ ). Déterminons la **polarisation** (c'est à dire la direction du champ électrique) de l'onde. On a, en réel,

$$\vec{E}(M, t) = a_x \cos(\omega t - kz + \phi_x) \vec{u}_x + a_y \cos(\omega t - kz + \phi_y) \vec{u}_y. \quad (4.29)$$

Pour  $M$  donné, traçons le vecteur  $\vec{MP} = \vec{E}(M, t)$  d'origine fixe  $M$ . Étudions la courbe décrite par le point  $P$  lorsque  $t$  varie. Soient  $MX$  et  $MY$  des axes respectivement parallèles à  $Ox$  et  $Oy$ . Le point  $P$  décrit une courbe du plan  $MXY$  donnée par

$$X = a_x \cos(\omega t - kz + \phi_x), \quad Y = a_y \cos(\omega t - kz + \phi_y). \quad (4.30)$$

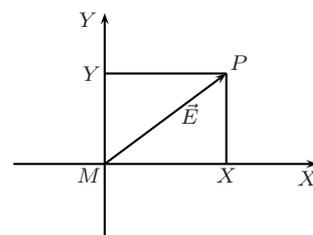


FIG. 4.3 – Champ  $\vec{E}(M, t)$ .

#### 4.3.1 Polarisation rectiligne

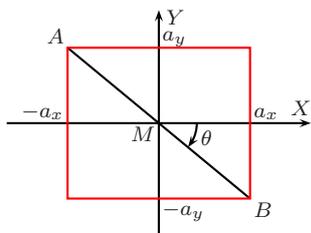


FIG. 4.4.

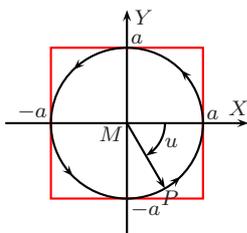


FIG. 4.5.

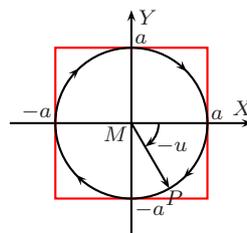


FIG. 4.6.

FIG. 4.4 – Polarisation rectiligne.

FIG. 4.5 – Polarisation circulaire gauche.

FIG. 4.6 – Polarisation circulaire droite.

Pour  $\phi_y = \phi_x \pmod{2\pi}$ , on a  $\operatorname{tg} \theta = \frac{Y}{X} = \frac{a_y}{a_x} = \text{Cte}$ . Pour  $\phi_y = \phi_x + \pi \pmod{2\pi}$ , on a  $\operatorname{tg} \theta = \frac{Y}{X} = -\frac{a_y}{a_x} = \text{Cte}$ . Dans ces deux cas le point  $P$  décrit un segment de droite  $AB$  et  $\vec{E}(M, t)$  garde une direction fixe. Le rapport des amplitudes complexes

$$\frac{\hat{a}_y}{\hat{a}_x} = r \text{ est réel.} \quad (4.31)$$

### 4.3.2 Polarisation circulaire gauche

Pour  $a_x = a_y = a$  et  $\phi_y = \phi_x - \pi/2 \pmod{2\pi}$  on a (en posant  $u = \omega t - kz + \phi_x$ )

$$X = a \cos u, \quad Y = a \cos(u - \pi/2) = a \sin u. \quad (4.32)$$

Le point  $P$  décrit le cercle du plan  $MXY$  de centre  $M$  et de rayon  $a$  dans le sens direct (sens trigonométrique). Pour les amplitudes complexes

$$\frac{\hat{a}_y}{\hat{a}_x} = e^{-i\pi/2}. \quad (4.33)$$

### 4.3.3 Polarisation circulaire droite

Pour  $a_x = a_y = a$  et  $\phi_y = \phi_x + \pi/2 \pmod{2\pi}$  on a (en posant  $u = \omega t - kz + \phi_x$ )

$$X = a \cos u, \quad Y = a \cos(u + \pi/2) = -a \sin u. \quad (4.34)$$

Le point  $P$  décrit le cercle du plan  $MXY$  de centre  $M$  et de rayon  $a$  dans le sens rétrograde. Pour les amplitudes complexes

$$\frac{\hat{a}_y}{\hat{a}_x} = e^{i\pi/2}. \quad (4.35)$$

### 4.3.4 Polarisation elliptique

Dans le cas général, la courbe paramétrique (4.30) est une ellipse. On dit que l'onde est polarisée elliptiquement gauche ou droite suivant le sens dans lequel tourne le point  $P$ . Les polarisations rectilignes et circulaires sont des cas particuliers de ce cas général.

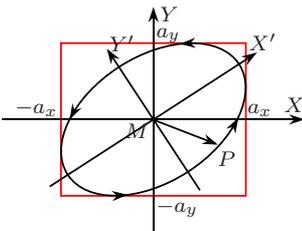


FIG. 4.7 – Polarisation elliptique gauche.

## 4.4 Énergie d'une OPPH

La densité d'énergie électromagnétique (3.24) d'une onde plane progressive harmonique s'écrit, en utilisant  $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$  et  $B = E/c$ ,

$$u = \frac{\epsilon_0\vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \epsilon_0\vec{E}^2 = \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}. \quad (4.36)$$

Son vecteur de Poynting vaut

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0}\vec{n} = \frac{E^2}{c\mu_0}\vec{n} = c\epsilon_0E^2\vec{n}. \quad (4.37)$$

Le vecteur de Poynting (courant d'énergie) est dans le sens et la direction du vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{n}$ . Son module est le produit de la vitesse de la lumière  $c$  par la densité d'énergie électromagnétique :

$$\boxed{\vec{P} = cu\vec{n}.} \quad (4.38)$$

Reprenons l'OPPH de champ électrique

$$\hat{\vec{E}}(M, t) = (\hat{a}_x\vec{u}_x + \hat{a}_y\vec{u}_y)e^{i(\omega t - kz)}. \quad (4.39)$$

dont la polarisation a été étudiée plus haut (cf. section 4.3). Pour calculer la densité d'énergie électromagnétique au point  $M(x, y, z)$  et à l'instant  $t$ , il faut utiliser le champ réel (4.29)

$$u(M, t) = \epsilon_0\vec{E}^2 = \epsilon_0 [a_x^2 \cos^2(\omega t - kz + \phi_x) + a_y^2 \cos^2(\omega t - kz + \phi_y)]. \quad (4.40)$$

Sa moyenne temporelle ne dépend plus de  $M$  (ni bien sûr de  $t$ ) :

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0 (a_x^2 + a_y^2)}{2}. \quad (4.41)$$

Cette moyenne peut s'écrire très simplement en fonction du champ complexe (4.39)

$$\boxed{\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0 |\hat{\vec{E}}|^2}{2}} \quad (4.42)$$

puisque  $|\hat{\vec{E}}|^2 = |\hat{a}_x\vec{u}_x + \hat{a}_y\vec{u}_y|^2 = |\hat{a}_x|^2 + |\hat{a}_y|^2 = a_x^2 + a_y^2$ .

La moyenne temporelle du vecteur de Poynting,

$$\langle \vec{P} \rangle = c \langle u \rangle \vec{u}_z, \quad (4.43)$$

est également indépendante de  $M$ . Soit  $S$  une surface perpendiculaire à  $\vec{u}_z$ . Rappelons que le flux de  $\langle \vec{P} \rangle$  à travers une surface donne la puissance

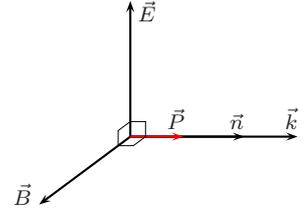


FIG. 4.8 – Vecteur de Poynting  $\vec{P}$  d'une OPPH.

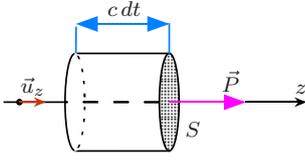


FIG. 4.9 – Vitesse de propagation de l'énergie.

électromagnétique moyenne qui traverse cette surface. L'énergie électromagnétique moyenne qui traverse  $S$  pendant le temps  $dt$  est donc  $dW = \langle P \rangle S dt = \langle u \rangle S c dt$ . C'est l'énergie électromagnétique moyenne contenue dans un cylindre droit de section  $S$  et de longueur  $c dt$  (cf. figure 4.9). Ce cylindre d'énergie traverse la surface  $S$  pendant le temps  $dt$ . Il se déplace donc à la vitesse  $c \vec{u}_z$ . Cela montre que

$$\boxed{\text{la vitesse de propagation de l'énergie est } c.} \quad (4.44)$$

L'**éclairage** est la puissance électromagnétique moyenne par unité de surface. L'éclairage de la surface  $S$  est  $\langle P \rangle$  qui est proportionnel au carré du champ électrique de l'OPPH. Lorsque plusieurs ondes se superposent, les champs électriques s'ajoutent, mais l'éclairage d'une surface n'est pas la somme des éclairages de chacune des ondes. C'est la base du phénomène d'interférence qui sera étudié en optique ondulatoire.

## 4.5 Photons

De nombreuses expériences (absorption et émission de la lumière par les atomes, effet photoélectrique, effet Compton<sup>1</sup>, ...) sont en contradiction avec les prévisions de l'électromagnétisme classique. Elles ont conduit à admettre qu'une OPPH de pulsation  $\omega = 2\pi\nu$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$  est composée de particules de masse nulle, les **photons**, chaque photon possédant une énergie et une quantité de mouvement donnés respectivement par

$$\boxed{E = \hbar\omega = h\nu} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{p} = \hbar\vec{k} = \frac{h\nu}{c}\vec{n} = \frac{h}{\lambda}\vec{n} = \frac{E}{c}\vec{n}} \quad (4.45)$$

où

$$h \approx 6,626\,075\,10^{-34} \text{ J s} \quad (4.46)$$

est la constante de Planck<sup>2</sup> et

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,054\,573\,10^{-34} \text{ J s} \quad (4.47)$$

est la constante de Planck divisée par  $2\pi$ .

**Exercice 4.4 (Effet Compton).** En 1922, Compton étudia l'interaction des rayons X avec des électrons. Considérons un faisceau de rayons X, assimilé à une OPPH de fréquence  $\nu = 10^{20}$  Hz. L'électromagnétisme classique prévoit que cette onde (onde incidente) fait osciller les électrons à la fréquence  $\nu$  et que ce mouvement des électrons s'accompagne de l'émission d'une onde électromagnétique de même fréquence appelée onde diffusée.

1. Arthur Holly Compton (1882-1962)

2. Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947)

Compton découvrit que la longueur d'onde des rayons X augmentait dans la diffusion, en contradiction avec l'électromagnétisme classique. Cette découverte lui valu le prix Nobel (1927) et le phénomène est maintenant appelé l'**effet Compton**.

La différence  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  des longueurs d'onde de l'onde diffusée,  $\lambda'$ , et de l'onde incidente,  $\lambda$ , est donnée par

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{formule de Compton}) \quad (4.48)$$

où  $m = 9,109 \cdot 10^{-31}$  kg est la masse de l'électron et  $\theta = (\vec{k}, \vec{k}')$  est l'angle entre l'onde incidente et l'onde diffusée.

On se propose dans cet exercice de montrer la formule de Compton. L'effet Compton s'interprète comme une collision élastique entre un photon et un électron. L'énergie totale et la quantité de mouvement totale du système des deux particules sont conservées au cours de la collision. Avant la collision, l'électron est au repos et la quantité de mouvement du photon est  $\vec{p}$ . Après la collision, la quantité de mouvement de l'électron est  $\vec{P}_e$  et celle du photon  $\vec{p}'$  (cf. figure 4.10). L'angle  $\theta = (\vec{p}, \vec{p}')$  peut prendre toutes les valeurs de 0 à  $\pi$ , la mécanique quantique permettant de déterminer la probabilité de diffusion dans la direction  $\theta$ .

En mécanique relativiste, l'énergie d'un électron (masse  $m$ , quantité de mouvement  $\vec{P}_e$ ) est donnée par la formule d'Einstein<sup>3</sup>  $\sqrt{m^2c^4 + P_e^2c^2}$ . Pour l'électron au repos  $P_e = 0$  et l'énergie vaut  $mc^2$ . Les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{P}_e \quad (4.49)$$

$$mc^2 + pc = \sqrt{m^2c^4 + P_e^2c^2} + p'c. \quad (4.50)$$

1. Dédurre de (4.49) la relation

$$P_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta. \quad (4.51)$$

2. En éliminant  $P_e$  entre les équations (4.50) et (4.51), montrer que

$$mc(p - p') - pp' = -pp' \cos \theta. \quad (4.52)$$

3. En déduire la formule de Compton (4.48). Calculer  $\lambda'$  pour  $\theta = 90^\circ$  et  $\lambda = c/\nu = 3 \cdot 10^{-12}$  m. L'effet Compton peut-il s'observer avec de la lumière visible de longueur d'onde  $\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6}$  m ?

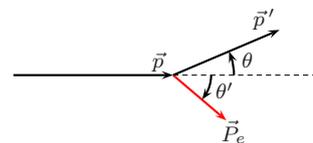


FIG. 4.10 – Effet Compton : collision d'un électron au repos et d'un photon

3. Albert Einstein (1879-1955)

## 4.6 Polariseurs et loi de Malus

Considérons une OPPH polarisée rectilignement, de vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{u}_z$  et de longueur d'onde de l'ordre du centimètre. Cette onde tombe sur une grille formée de fils métalliques parallèles à  $Oy$  et dont le pas  $d$  est inférieur à la longueur d'onde  $\lambda$ . Le champ électrique

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y, \quad (4.53)$$

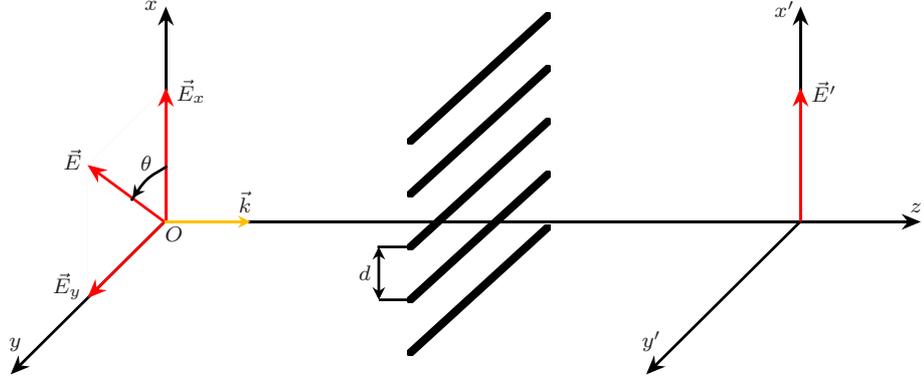
d'amplitude  $A$ , fait l'angle  $\theta$  avec l'axe  $Ox$  (cf. figure 4.11).

L'onde peut être considérée comme la superposition de deux OPPH, de même vecteur d'onde  $\vec{k}$  et correspondant aux champs électriques

$$\vec{E}_x = (A \cos \theta) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}_y = (A \sin \theta) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y. \quad (4.54)$$

On observe que l'onde de champ  $\vec{E}_y$  est presque complètement réfléchiée par la grille, tandis que l'onde de champ  $\vec{E}_x$ , au contraire, traverse la grille avec une réflexion négligeable. Ce phénomène est dû au fait que le champ électrique doit être normal aux conducteurs. La grille se comporte comme un miroir (plan conducteur) pour la première onde. Cela n'est vrai que lorsque  $d < \lambda$  (on peut remarquer que la lumière ( $d \gg \lambda$ ) traverse la grille quelle que soit sa polarisation).

FIG. 4.11 – Polariseur à grille.



Après traversée de la grille l'onde est polarisée suivant  $Ox$ . Son champ électrique est

$$\vec{E}' = (A \cos \theta) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x. \quad (4.55)$$

La grille constitue un **polariseur rectiligne** (en ondes centimétriques).

Un **polaroïd** présente pour les ondes lumineuses des propriétés analogues. C'est une lame ou un disque de plastique, de couleur grise, constituée de longues chaînes de polymères étirées dans une direction. L'absorption de la lame dépend de la polarisation (ce phénomène est appelé dichroïsme). Lorsque la lumière est polarisée rectilignement suivant une certaine direction  $\mathcal{D}$ , appelée direction de polarisation, la lame est presque parfaitement

transparente. Lorsque la lumière est polarisée rectilignement suivant la direction perpendiculaire à  $\mathcal{D}$ , la lame absorbe pratiquement toute la lumière. La direction de polarisation  $\mathcal{D}$  du polaroïd (notée par  $\longleftrightarrow$  sur les figures) est l'analogue de la direction  $Ox$  pour le polariseur à grille de la figure 4.11.

La figure 4.12 représente une expérience où un faisceau lumineux se propage parallèlement à l'axe  $Oz$  et traverse deux polaroïds (disques) identiques placés perpendiculairement à  $Oz$ . En entrée, la lumière est **non polarisée** ce qui signifie qu'elle est composée d'une superposition d'OPPH de fréquences différentes et de toutes sortes de polarisations.

Après passage à travers le premier polaroïd, appelé **polariseur**, la lumière est polarisée rectilignement suivant la direction  $\mathcal{D}$  faisant l'angle  $\theta$  avec l'axe  $Ox$ .

Après passage à travers le deuxième polaroïd, appelé **analyseur**, la lumière est polarisée rectilignement suivant la direction  $\mathcal{D}'$  parallèle à l'axe  $Ox$ .

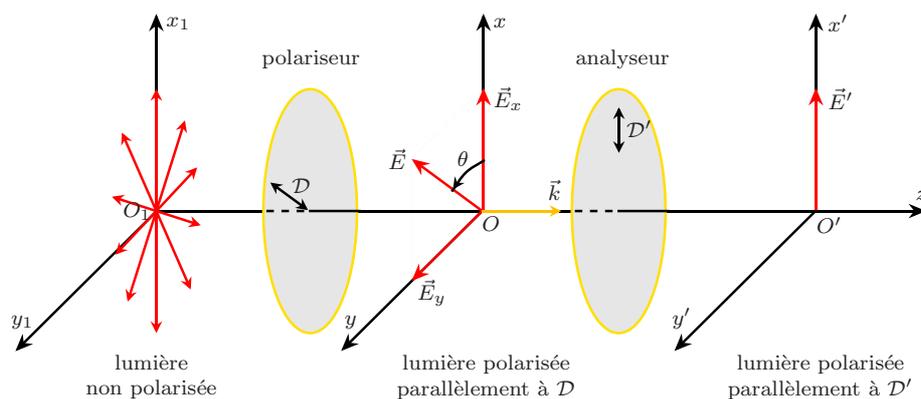


FIG. 4.12 – Polariseur et analyseur.

Supposons l'onde quasimonochromatique. Entre le polariseur et l'analyseur le champ électrique de l'onde est donné par les équations (4.53–4.54), soit

$$\vec{E} = A(\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) \cos(\omega t - kz). \quad (4.56)$$

Après l'analyseur, supposé parfait, le champ électrique de l'onde est donné par l'équation (4.55), soit

$$\vec{E}' = (A \cos \theta) \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x. \quad (4.57)$$

L'éclairement en sortie, proportionnel à  $|\hat{E}'|^2$ , est de la forme

$$I = I_0 \cos^2 \theta \quad (4.58)$$

où  $I_0$  est une constante. Cette équation indique comment varie l'éclairement lorsque l'on fait varier l'angle  $\theta$  en tournant le polariseur ou l'analyseur

autour de l'axe  $Oz$ . C'est la **loi de Malus**<sup>4</sup> qui s'énonce :

*L'éclairement varie comme le carré du cosinus de l'angle entre les directions de polarisation du polariseur et de l'analyseur.*

## 4.7 Spectre des ondes électromagnétiques

La figure 4.13 donne une vue d'ensemble des rayonnements électromagnétiques. La théorie de la propagation dans le vide de tous ces rayonnements est identique. Par contre, les dispositifs émetteurs et récepteurs de ces rayonnements, leurs interactions avec la matière et leurs utilisations pratiques dépendent de leur fréquence.

Nous détaillons les diverses gammes de fréquences de ces ondes. Les limites des diverses gammes ne sont pas toujours définies très précisément. Par exemple, certains auteurs considèrent que la gamme des radiofréquences s'étend jusqu'aux fréquences 1 GHz ou même plus (au lieu de 300 MHz).

### 4.7.1 Radiofréquences

TAB. 4.1 – Radiofréquences.

Fréquence $\nu$	$\lambda$	bande
< 3 Hz	> 100 Mm	
3–30 Hz	10–100 Mm	ELF (extremely low frequency)
30–300 Hz	1–10 Mm	SLF (super low frequency)
0,3–3 kHz	0,1–1 Mm	ULF (ultra low frequency)
3–30 kHz	10–100 km	VLF (very low frequency)
30–300 kHz	1–10 km	LF (low frequency)
0,3–3 MHz	0,1–1 km	MF (medium frequency)
3–30 MHz	10–100 m	HF (high frequency)
30–300 MHz	1–10 m	VHF (very high frequency)

Les radiofréquences correspondent aux ondes électromagnétiques de fréquences inférieures à 300 MHz (longueurs d'onde dans le vide plus grandes que 1 m). En principe, la fréquence peut être très voisine de 0, mais sans être nulle.

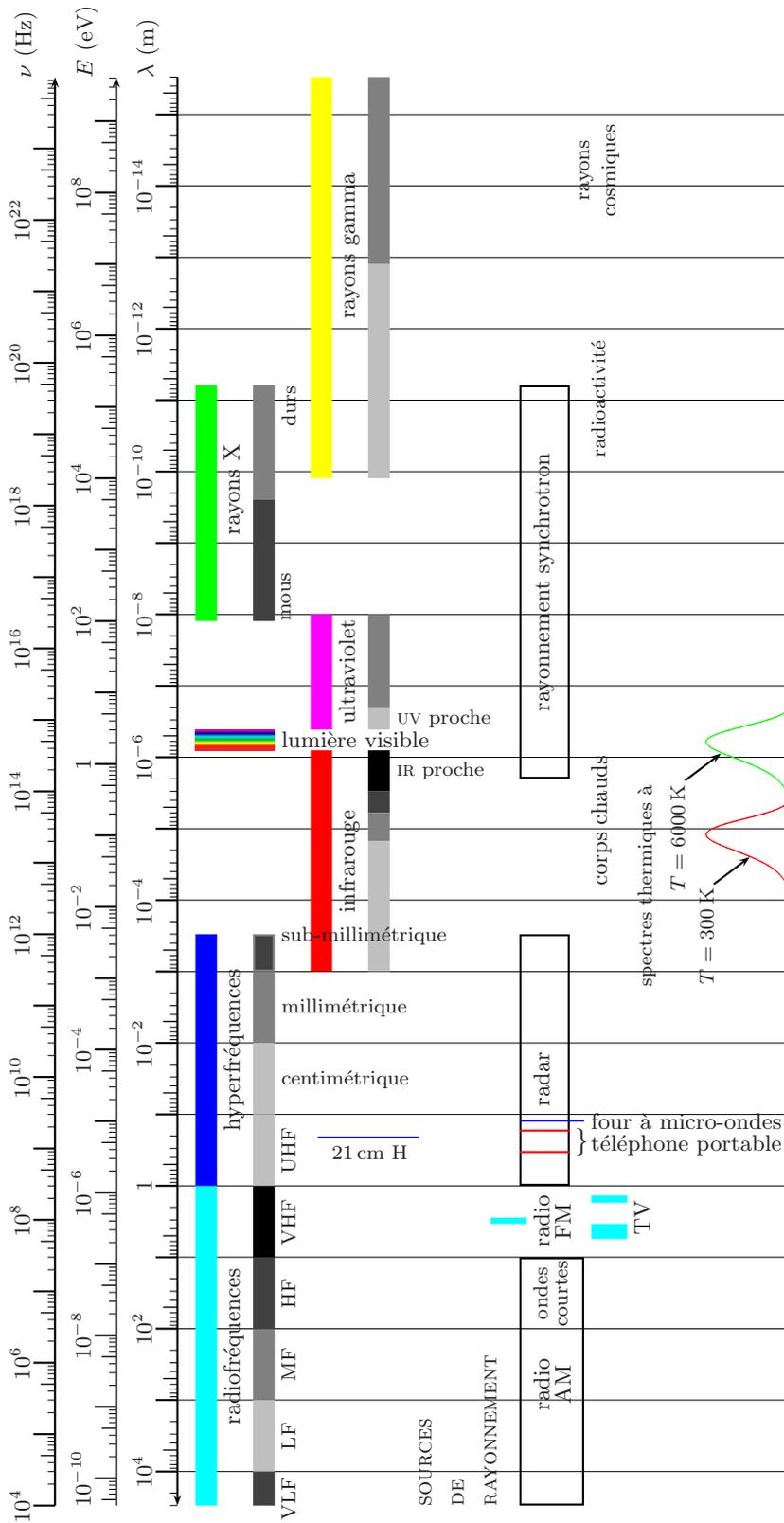
Ces ondes sont engendrées par des courants électriques oscillants. On peut les émettre et les détecter à l'aide d'antennes couplées à des systèmes électroniques.

Les plus basses fréquences observées expérimentalement sont produites lors des aurores boréales et sont de l'ordre de 0,001 Hz.

Citons quelques applications de ces ondes (cf. table 4.1) : détection des métaux (ELF), communications avec les sous-marins (ELF, SLF), aide à la navigation (ULF, VLF, LF), radio en modulation d'amplitude en grandes ondes (LF), ondes moyennes (MF) et ondes courtes (HF), téléphone (HF),

4. Etienne-Louis Malus (1775-1812)

FIG. 4.13 – Spectre des ondes électromagnétiques. Types des ondes en fonction de la fréquence  $\nu$ , de l'énergie  $E = h\nu$  d'un photon ou de la longueur d'onde dans le vide  $\lambda = c/\nu$ . Les spectres thermiques représentent la répartition du rayonnement du corps noir à la température  $T = 6000\text{ K}$  (approximativement du soleil) et à  $T = 300\text{ K}$  (approximativement un corps à  $300\text{ K}$ ).



VHF), CB (citizen-band) (HF), radio en modulation de fréquence (VHF), télévision (VHF).

### 4.7.2 Hyperfréquences

Les ondes électromagnétiques hyperfréquences (ou micro-ondes) correspondent aux fréquences de 300 MHz à 1 THz. Ces ondes sont aussi appelées ondes sub-millimétriques, millimétriques, centimétriques et décimétriques suivant leur longueur d'onde dans le vide.

On peut émettre et détecter ces ondes à l'aide d'antennes couplées à des systèmes électroniques, mais elles correspondent aussi à des transitions entre niveaux de rotation des molécules. Ainsi, la molécule d'eau absorbe très fortement la fréquence 2,45 GHz, ce qui est mis en application dans les fours à micro-ondes. L'atome d'hydrogène présente une raie à la fréquence 1,42 GHz ( $\lambda = 21$  cm) très intéressante pour l'astrophysique.

Les hyperfréquences peuvent facilement être canalisées dans des guides d'ondes (lignes coaxiales, microrubans, guides métalliques creux, ...) pour éviter les pertes dans le transport du signal ou de l'énergie.

Elles ont un très large domaine d'applications : télécommunications (satellites, GPS, GSM), télévision (UHF), détection à distance (radars), horloge atomique, météorologie, astronomie, accélérateurs de particules (cyclotrons, synchrotrons), plasmas (chauffage), applications industrielles (chauffage, séchage, polymérisation, vulcanisation du caoutchouc, traitement des déchets) et domestiques (fours micro-ondes), ...

TAB. 4.2 – Spectre des hyperfréquences.

Fréquence $\nu$	$\lambda$	bande
0,3–3 GHz	10–100 cm	UHF (ultra high frequency)
1–2 GHz		bande $L$
2–4 GHz		bande $S$
3–30 GHz	1–10 cm	SHF (super high frequency)
4–8 GHz		bande $C$
8–12 GHz		bande $X$
12–18 GHz		bande $K_u$
18–27 GHz		bande $K$
30–300 GHz	1–10 mm	EHF (extremely high frequency)
27–40 GHz		bande $K_a$
40–60 GHz		bande $U$
60–80 GHz		bande $V$
80–100 GHz		bande $W$
0,3–1 THz	0,3–1 mm	sub-millimétrique

## Radar

Le radar (**radio detection and ranging**) est un dispositif qui émet une onde hyperfréquence et reçoit les ondes réfléchies par les objets (avions, navires, ...) distants. On peut ainsi déterminer la position et la vitesse des objets et parfois leur nature.

La table 4.2 décrit les bandes de fréquences utilisées dans les radars. Les lettres qui les désignent étaient à l'origine, pendant la Deuxième Guerre Mondiale, un code secret permettant de nommer les fréquences radar sans les divulguer.

Le radar envoie des impulsions très courtes ( $\sim 10^{-6}$  s) dans une direction donnée. Si un objet-cible se trouve dans cette direction, il réfléchit une fraction de l'onde vers le radar et le récepteur capte un signal. Le retard  $\Delta t$  du signal reçu par rapport au signal émis donne la distance  $d = c\Delta t/2$  entre le radar et l'objet, ce qui détermine la position de l'objet. Lorsque l'objet-cible s'approche du radar avec la vitesse radiale  $v_r$ , il voit une onde de fréquence  $\nu'$  décalée par effet Doppler ( $\nu' - \nu = v_r\nu/c$ ). L'onde reçue par le radar est décalée une seconde fois en fréquence par effet Doppler (la source de cette onde est l'objet-cible qui est en mouvement par rapport au radar). Soit  $\nu''$  la fréquence reçue par le radar et  $\Delta\nu = \nu'' - \nu$  le décalage en fréquence de ce double effet Doppler. On a  $\nu'' - \nu' = v_r\nu/c$  et  $\Delta\nu = 2v_r\nu/c$ . On obtient la vitesse radiale  $v_r$  de l'objet-cible par mesure de  $\Delta\nu$  (si l'objet-cible s'éloigne,  $v_r < 0$  et  $\Delta\nu < 0$ ).

## Horloges atomiques

Depuis la Conférence Générale des Poids et Mesures de 1967, *la seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133*. Dans une horloge atomique à césium, un jet d'atomes de césium, produits par un four, traverse une cavité dans laquelle règne un champ micro-onde de fréquence ajustable  $\nu$ , fourni par un oscillateur électronique. Si la fréquence  $\nu$  est voisine de la fréquence  $\nu_0 = \frac{E_b - E_a}{h}$  correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins, des atomes absorbent un photon et passent du niveau fondamental d'énergie  $E_a$  dans le niveau supérieur d'énergie  $E_b$ . Un système ajuste la fréquence  $\nu$  du champ de sorte que le nombre d'atomes ainsi excités soit maximal. La fréquence  $\nu$  est alors égale à  $\nu_0$ . L'oscillateur, après division électronique de fréquence, fournit un top toutes les secondes avec une exactitude relative pouvant atteindre  $10^{-14}$ .

### 4.7.3 Infrarouge

Les ondes infrarouges ont des fréquences de  $3 \cdot 10^{11}$  à  $3,8 \cdot 10^{14}$  Hz (en longueurs d'onde dans le vide : 1 mm à 780 nm).

Elles sont émises en grande quantité par les corps chauds et lors de transitions entre niveaux de vibration des molécules. Environ la moitié de l'énergie émise par le soleil l'est dans l'infrarouge et une lampe à incandescence émet beaucoup plus d'infrarouges que de lumière. Les corps à la température ordinaire émettent également ces radiations, même dans le noir, ce qui permet des applications comme la vision nocturne de certains animaux, les lunettes à infrarouges, les satellites espions, le guidage des missiles par infrarouge.

On peut aussi construire des lampes et des lasers (laser à  $\text{CO}_2$ , diodes laser, ...) pour produire des ondes infrarouges. Pour les détecter, on peut les transformer en chaleur (bolomètres) ou électricité (photodiodes). Il existe aussi des films photographiques sensibles dans l'infrarouge proche (3000 nm à 780 nm).

#### 4.7.4 Lumière visible

La lumière visible est formée d'ondes électromagnétiques dans la gamme de fréquences  $3,8 \cdot 10^{14}$ – $7,7 \cdot 10^{14}$  Hz (en longueurs d'onde dans le vide : 780–390 nm). Cette gamme est définie par les limites de sensibilité de l'œil.

La lumière est émise par les corps très chauds (lampes, soleil), par des transitions entre niveaux d'atomes et molécules, par rayonnement synchrotron (une particule chargée en mouvement circulaire uniforme émet des ondes électromagnétiques ; dans un synchrotron, le mouvement des électrons ou protons émet des ondes allant de l'infrarouge aux rayons X).

La lumière peut être détectée par des films photographiques, des dispositifs photoélectriques qui la transforment en signal électrique, par l'œil.

#### 4.7.5 Ultraviolet

Les ondes ultraviolettes ont des fréquences de  $7,7 \cdot 10^{14}$  Hz à  $3 \cdot 10^{16}$  Hz (en longueurs d'onde dans le vide : 390 nm à 10 nm).

Ces radiations sont émises par les corps très chauds. Les ultraviolets émis par le soleil sont en grande partie absorbés par l'ozone  $\text{O}_3$  de l'atmosphère. Elles correspondent également à des transitions entre niveaux d'atomes, molécules et ions.

On peut en produire à l'aide de lampes (lumière noire), de lasers et par rayonnement synchrotron. Il existe des films photographiques sensibles dans l'ultraviolet.

Applications : astrophysique, stérilisation des aliments, bronzage.

#### 4.7.6 Rayons X

Les rayons X ont été découverts par Wilhelm Conrad Röntgen<sup>5</sup> en 1895. Ils correspondent à des photons d'énergie allant de 100 eV à 0,2 MeV

---

5. Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923)

(fréquences de  $2,4 \cdot 10^{16}$  Hz à  $5 \cdot 10^{19}$  Hz, longueurs d'onde dans le vide : 12 nm à 6 pm). Ils correspondent à des transitions faisant intervenir les couches électroniques internes des atomes.

On peut en produire par rayonnement de freinage (bremsstrahlung : des électrons lancés à grande vitesse sur une plaque de cuivre sont freinés brutalement et émettent des rayons X) et par rayonnement synchrotron.

Applications : radiographie médicale et industrielle, astrophysique.

#### 4.7.7 Rayons gamma

Les rayons gamma correspondent à des photons d'énergie au dessus de 10 keV (fréquences supérieures à  $2,4 \cdot 10^{18}$  Hz, longueurs d'onde dans le vide inférieures à 1 Å). Ils correspondent à des transitions faisant intervenir les noyaux radioactifs. Le rayonnement gamma présent dans l'univers arrive sur Terre dans le rayonnement cosmique. La longueur d'onde étant très petite, il est difficile d'observer les propriétés ondulatoires de ce rayonnement. On observe le plus souvent des effets corpusculaires (collisions des photons gamma avec d'autres particules).

Applications : traitement du cancer, physique des particules, astrophysique.

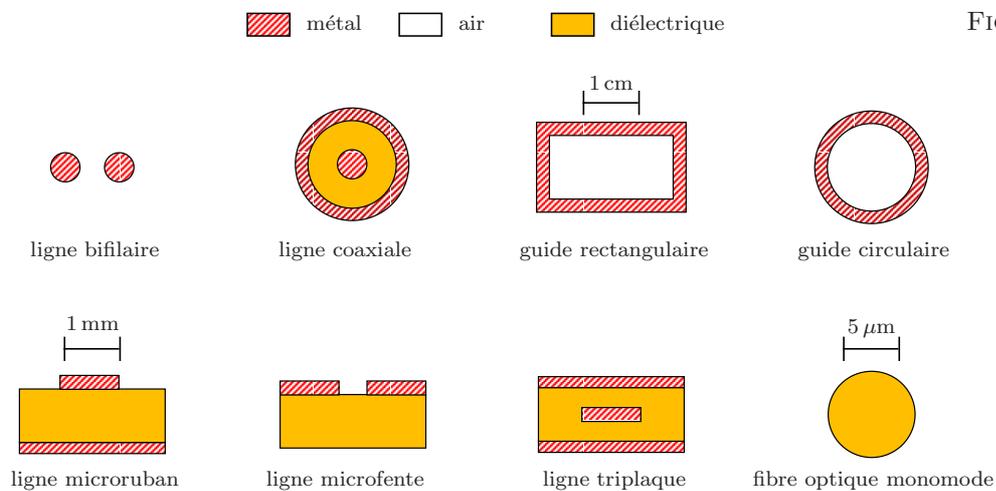


## 5

# Propagation guidée

## 5.1 Introduction

Il existe plusieurs types de guides d'ondes pour transporter l'énergie ou les signaux (lignes bifilaires, lignes coaxiales, microrubans, guides métalliques creux, fibres optiques, ...). La figure représente la section droite de divers types de guide d'ondes. Les ondes se propagent suivant l'axe  $Oz$  perpendiculaire à la figure.



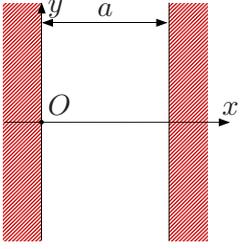


FIG. 5.2 – Section du guide d'ondes.

modes<sup>1</sup> sont fabriquées en verre (silice) ultra-pur de diamètre de 2 à 9  $\mu\text{m}$  et opèrent autour de  $2 \cdot 10^{14}$  Hz. Elles peuvent transporter des signaux sur  $\sim 100$  km sans réamplification.

Nous étudierons dans ce chapitre la structure de guidage formée de deux plaques métalliques parallèles. La figure 5.2 représente une section droite de ce guide d'ondes et nous considérerons des ondes qui se propagent suivant l'axe  $Oz$  perpendiculaire à la figure.

## 5.2 Conducteur parfait

La loi d'Ohm<sup>2</sup> s'écrit

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (5.1)$$

où  $\vec{j}$  est le courant volumique,  $\vec{E}$  le champ électrique et  $\sigma$  la **conductivité** (unité :  $\text{S m}^{-1}$  [siemens<sup>3</sup> par mètre]). Pour le cuivre  $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S m}^{-1}$ . Un **conducteur parfait** correspond à la limite  $\sigma \rightarrow \infty$ . On doit avoir

$$\vec{E} = 0 \quad (5.2)$$

sinon la puissance par unité de volume dissipée par effet Joule,

$$\frac{dP_c}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2, \quad (5.3)$$

serait infinie, ce qui est absurde. Les équations de Maxwell restent valables dans un métal. L'équation

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \quad (5.4)$$

donne pour  $\hat{\vec{B}} = \vec{b}(\vec{r})e^{i\omega t}$

$$i\omega \hat{\vec{B}} = -\vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{E}} = 0 \quad (5.5)$$

et  $\vec{B} = 0$  pour une onde de pulsation  $\omega \neq 0$ . En résumé, lorsqu'on étudie les ondes on peut admettre que dans un conducteur parfait

$$\boxed{\vec{E} = \vec{B} = 0.} \quad (5.6)$$

1. Les modes de propagation d'un guide seront définis plus loin. Dans un guide mono-mode il n'y a qu'un mode qui se propage.

2. Georg Simon Ohm (1789-1854)

3. Ernst Werner von Siemens (1816-1892)

### 5.3 Symétrie de translation

Considérons un milieu invariant par translation parallèle à  $Oz$  et dont les propriétés ne changent pas au cours du temps. Nous cherchons des champs  $\{\vec{E}(x, y, z, t), \vec{B}(x, y, z, t)\}$  solutions des équations de Maxwell de ce système. Désignons par  $T_a$  l'opérateur translation de  $a$  le long de  $Oz$ . Par définition il transforme une fonction  $f$  en  $T_a f$  par

$$[T_a f](x, y, z, t) = f(x, y, z - a, t). \quad (5.7)$$

La symétrie du système nous permet d'affirmer

$$\text{si } \{\vec{E}, \vec{B}\} \text{ est une solution, } \{T_a \vec{E}, T_a \vec{B}\} \text{ est également une solution.} \quad (5.8)$$

Envisageons le cas de l'électrostatique. On suppose donnée la distribution des charges. La solution  $\{\vec{E}(x, y, z), \vec{B} = 0\}$  du problème est **unique**. Cette unicité implique que  $T_a \vec{E} = \vec{E}$ . Le champ électrostatique  $\vec{E}$  est alors indépendant de  $z$ .

L'utilisation de la symétrie est tout autre lorsque on recherche les ondes dans le système. La solution du problème n'est pas unique (on ne se donne pas les conditions initiales). Par translation, on obtient une **autre** solution  $\{T_a \vec{E}, T_a \vec{B}\}$  et on ne peut pas conclure que  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont indépendants de  $z$ .

Les symétries (invariance par translation parallèle à  $Oz$  et changement de l'origine du temps) impliquent la propriété suivante. Il existe des ondes électromagnétiques (ondes planes inhomogènes) de la forme

$$\hat{\vec{E}}(x, y, z, t) = \vec{e}(x, y)e^{i(\omega t - \gamma z)} \quad \hat{\vec{B}}(x, y, z, t) = \vec{b}(x, y)e^{i(\omega t - \gamma z)} \quad (5.9)$$

et la solution générale est une superposition de telles ondes (admis). Nous avons vu une propriété analogue pour le signal de la corde vibrante. La solution (5.9) est un vecteur propre de l'opérateur  $T_a$  :

$$T_a \hat{\vec{E}} = e^{i\gamma a} \hat{\vec{E}}, \quad T_a \hat{\vec{B}} = e^{i\gamma a} \hat{\vec{B}}. \quad (5.10)$$

Elle est aussi un vecteur propre de l'opérateur  $U_\tau$  de changement d'origine du temps défini par  $[U_\tau f](x, y, z, t) = f(x, y, z, t - \tau)$  :

$$U_\tau \hat{\vec{E}} = e^{-i\omega\tau} \hat{\vec{E}}, \quad U_\tau \hat{\vec{B}} = e^{-i\omega\tau} \hat{\vec{B}}. \quad (5.11)$$

Autrement dit, l'onde (5.9) est invariante à un facteur près dans la translation  $T_a$  et le changement d'origine temporelle  $U_\tau$ .

### 5.4 Ondes électromagnétiques au voisinage d'un conducteur

Nous considérons le système où le demi-espace  $x \leq 0$  forme un conducteur parfait et le demi-espace  $x > 0$  est vide. On a dans le conducteur

$$\vec{E} = \vec{B} = 0 \quad \text{pour } x < 0. \quad (5.12)$$

Le milieu est invariant par translation parallèlement à  $Oz$  et  $Oy$ . Il en résulte qu'il existe (pour  $x > 0$ ) des ondes de la forme

$$\hat{\vec{E}} = \vec{e}(x)e^{i(\omega t - \beta y - \gamma z)} \quad \hat{\vec{B}} = \vec{b}(x)e^{i(\omega t - \beta y - \gamma z)} \quad (5.13)$$

où  $\omega$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des constantes. La solution générale est une superposition de telles ondes (admis). Un changement de référentiel de  $Oxyz$  en  $OxYZ$  permet de transformer la forme linéaire  $\beta y + \gamma z$  en  $\gamma' Z = \beta y + \gamma z$ . On peut donc se limiter à considérer les ondes telles que  $\beta = 0$  :

$$\hat{\vec{E}} = \vec{e}(x)e^{i(\omega t - \gamma z)} \quad \hat{\vec{B}} = \vec{b}(x)e^{i(\omega t - \gamma z)}. \quad (5.14)$$

Nous voulons déterminer, pour  $\omega$  et  $\gamma$  donnés, toutes les fonctions  $\vec{e}(x)$  et  $\vec{b}(x)$  pour  $x > 0$  telles que les équations de Maxwell et les conditions de passage soient satisfaites. Nous posons

$$\vec{e}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \vec{e}(x) \quad \text{et} \quad \vec{b}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \vec{b}(x). \quad (5.15)$$

#### 5.4.1 Conditions aux limites

Les conditions de passage entre le conducteur et le vide nous disent que  $\vec{E}_{\parallel}$  et  $\vec{B}_{\perp}$  sont continus sur la surface  $x = 0$  du conducteur (cf. figure 5.3). On a donc, avec (5.12) et (5.15),

$$\vec{e}(0) \parallel \vec{u}_x, \quad \vec{b}(0) \perp \vec{u}_x. \quad (5.16)$$

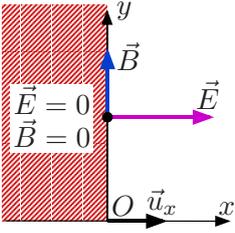


FIG. 5.3 – Conditions aux limites.

#### 5.4.2 Équation d'onde et équations de Maxwell

##### Équation d'onde

Le champ  $\hat{\vec{E}}$  vérifie l'équation d'onde de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \hat{\vec{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\vec{E}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\vec{E}}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \hat{\vec{E}}}{c^2 \partial t^2} = 0. \quad (5.17)$$

On en déduit que  $\vec{e}(x)$  est solution de

$$\frac{d^2 \vec{e}}{dx^2} - \gamma^2 \vec{e} + \frac{\omega^2 \vec{e}}{c^2} = 0 \quad (5.18)$$

que nous écrivons

$$\frac{d^2 \vec{e}}{dx^2} + \alpha^2 \vec{e} = 0 \quad (5.19)$$

en posant

$$\boxed{\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2.} \quad (5.20)$$

La solution générale de (5.19) est

$$\vec{e} = \vec{A} \cos(\alpha x) + \vec{D} \sin(\alpha x) \quad (5.21)$$

où  $\alpha$  désigne **une** des deux racines de (5.20). Si  $\alpha$  est réel, nous prenons

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2} \geq 0. \quad (5.22)$$

Le cas  $\alpha = 0$ , pour lequel la solution générale de (5.19) est

$$\vec{e} = \vec{A} + \vec{D}' x, \quad (5.23)$$

s'obtient comme la limite  $\alpha \rightarrow 0$  de (5.21) avec  $\vec{D} = \vec{D}'/\alpha$ .

La condition  $\vec{e}(0) \parallel \vec{u}_x$  impose  $\vec{A} \parallel \vec{u}_x$ . Le champ  $\hat{\vec{E}}$  est donc de la forme

$$\begin{aligned} \hat{\vec{E}} &= \left( \vec{A} \cos(\alpha x) + \vec{D} \sin(\alpha x) \right) e^{i(\omega t - \gamma z)} \\ &= \begin{pmatrix} A_x \cos(\alpha x) + D_x \sin(\alpha x) \\ D_y \sin(\alpha x) \\ D_z \sin(\alpha x) \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \gamma z)}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

### Équation de Maxwell-Gauss

L'équation  $\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{E}} = 0$  donne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ -i\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \cos(\alpha x) + D_x \sin(\alpha x) \\ D_y \sin(\alpha x) \\ D_z \sin(\alpha x) \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \gamma z)} = 0 \quad (5.25)$$

soit

$$-\alpha A_x \sin(\alpha x) + \alpha D_x \cos(\alpha x) - i\gamma D_z \sin(\alpha x) = 0. \quad (5.26)$$

D'où  $D_x = 0$  et  $D_z = i\alpha A_x/\gamma$ . On a donc, en posant  $A_x = \gamma A$ ,  $D_z = i\alpha A$  et  $D = D_y$

$$\boxed{\hat{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \gamma A \cos(\alpha x) \\ D \sin(\alpha x) \\ i\alpha A \sin(\alpha x) \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \gamma z)}}. \quad (5.27)$$

### Équation de Maxwell-Faraday

L'équation

$$\frac{\partial \hat{\vec{B}}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{E}} \quad (5.28)$$

donne

$$\begin{aligned}\hat{\vec{B}} &= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \gamma A \cos(\alpha x) \\ D \sin(\alpha x) \\ i\alpha A \sin(\alpha x) \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \gamma z)} \\ &= \begin{pmatrix} -\gamma D \sin(\alpha x) \\ \gamma^2 A \cos(\alpha x) + \alpha^2 A \cos(\alpha x) \\ i\alpha D \cos(\alpha x) \end{pmatrix} \frac{e^{i(\omega t - \gamma z)}}{\omega}. \quad (5.29)\end{aligned}$$

La composante  $\hat{B}_y$  se simplifie en utilisant  $\gamma^2 + \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ :

$$\hat{\vec{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma D}{\omega} \sin(\alpha x) \\ \frac{A\omega}{c^2} \cos(\alpha x) \\ \frac{i\alpha D}{\omega} \cos(\alpha x) \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \gamma z)}. \quad (5.30)$$

Le champ (5.30) vérifie la condition aux limites (5.16):

$$\vec{b}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{A\omega}{c^2} \\ \frac{i\alpha D}{\omega} \end{pmatrix} \perp \vec{u}_x. \quad (5.31)$$

Le cas limite  $\alpha \rightarrow 0$  et  $\vec{D} = \vec{D}'/\alpha$  envisagé pour obtenir (5.23) lorsque  $\alpha = 0$  doit être exclu. La condition  $\vec{b}(0) \perp \vec{u}_x$  exige en effet que  $\vec{D}' = 0$ . Par contre, le cas  $\alpha = 0$ ,  $A \neq 0$  est admis.

Le cas  $\alpha$  imaginaire est exclu par la condition que les champs (5.27) et (5.30) doivent rester bornés pour  $x \rightarrow \infty$ .

Dans les deux sections suivantes, nous montrons que les deux autres équations de Maxwell sont vérifiées par les champs (5.27) et (5.30).

### Équation de Maxwell-flux

L'équation  $\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{B}} = 0$  donne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ -i\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\gamma D}{\omega} \sin(\alpha x) \\ \frac{A\omega}{c^2} \cos(\alpha x) \\ \frac{i\alpha D}{\omega} \cos(\alpha x) \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \gamma z)} = 0 \quad (5.32)$$

soit

$$-\frac{\gamma\alpha D}{\omega} \cos(\alpha x) + \frac{\gamma\alpha D}{\omega} \cos(\alpha x) = 0. \quad (5.33)$$

Elle est donc vérifiée par (5.30).

### Équation de Maxwell-Ampère

L'équation

$$\frac{\partial \hat{\vec{E}}}{c^2 \partial t} - \vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{B}} = 0 \quad (5.34)$$

donne

$$\frac{i\omega}{c^2} \begin{pmatrix} A\gamma \cos(\alpha x) \\ D \sin(\alpha x) \\ iA\alpha \sin(\alpha x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ -i\gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{\gamma D}{\omega} \sin(\alpha x) \\ \frac{A\omega}{c^2} \cos(\alpha x) \\ \frac{i\alpha D}{\omega} \cos(\alpha x) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.35)$$

soit en multipliant par  $c^2/\omega$

$$\begin{pmatrix} iA\gamma \cos(\alpha x) \\ iD \sin(\alpha x) \\ -\alpha A \sin(\alpha x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} iA\gamma \cos(\alpha x) \\ \frac{i\gamma^2 c^2 D}{\omega^2} \sin(\alpha x) + \frac{i\alpha^2 c^2 D}{\omega^2} \sin(\alpha x) \\ -\alpha A \sin(\alpha x) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.36)$$

qui est vérifié en vertu de

$$iD - \frac{i\gamma^2 c^2 D}{\omega^2} - \frac{i\alpha^2 c^2 D}{\omega^2} = \frac{iDc^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2 - \alpha^2 \right) = 0. \quad (5.37)$$

**Résumé.** Les ondes de la forme (5.14) qui sont solutions des équations de Maxwell et satisfont aux conditions aux limites (5.16) en  $x = 0$  sont données par (5.27) et (5.30), avec  $A$  et  $D$  arbitraires et où  $\alpha$  satisfait à l'équation (5.20). Rappelons que la condition  $\vec{e}(0) \parallel \vec{u}_x$  a été utilisée pour obtenir (5.24) et qu'on a vérifié que  $\vec{b}(0) \perp \vec{u}_x$  en (5.31).

#### 5.4.3 Mode TE

Pour  $A = 0$ , les champs (5.27) et (5.30) s'écrivent

$$\hat{\vec{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ D \sin(\alpha x) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \gamma z)}, \quad \hat{\vec{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma D}{\omega} \sin(\alpha x) \\ 0 \\ \frac{i\alpha D}{\omega} \cos(\alpha x) \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \gamma z)}. \quad (5.38)$$

Cette onde est telle que le champ électrique  $\vec{E}$  soit perpendiculaire à la direction de propagation  $Oz$ . Une telle onde est appelée **mode TE** (transverse électrique). Remarquer que le champ magnétique  $\vec{B}$  n'est pas transverse.

#### 5.4.4 Mode TM

Pour  $D = 0$ , les champs (5.27) et (5.30) s'écrivent

$$\hat{\vec{E}} = \begin{pmatrix} A\gamma \cos(\alpha x) \\ 0 \\ i\alpha A \sin(\alpha x) \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \gamma z)}, \quad \hat{\vec{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega A}{c^2} \cos(\alpha x) \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \gamma z)}. \quad (5.39)$$

Cette onde est telle que le champ magnétique  $\vec{B}$  soit perpendiculaire à la direction de propagation  $Oz$ . Une telle onde est appelée **mode TM** (transverse magnétique). Remarquer que le champ électrique  $\vec{E}$  n'est pas transverse si  $\alpha \neq 0$ .

#### 5.4.5 Mode TEM

Pour  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = \pm \frac{\omega}{c}$  et le mode TM s'écrit, en posant  $A' = A\gamma$ ,

$$\hat{\vec{E}} = A' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega(t \mp z/c))}, \quad \hat{\vec{B}} = \pm \frac{A'}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega(t \mp z/c))}. \quad (5.40)$$

Cette onde est telle que les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  soient perpendiculaires à la direction de propagation  $Oz$ . Une telle onde est appelée **mode TEM** (transverse électrique et magnétique). Cette onde ne diffère d'une onde plane progressive harmonique (OPPH) de vecteur d'onde  $\vec{k} = \pm \frac{\omega}{c} \vec{u}_z$  polarisée parallèlement à  $Ox$  que par le fait qu'elle est limitée au demi-espace  $x > 0$ .

#### 5.4.6 Interprétation comme superposition d'OPPH

Nous allons montrer que l'onde obtenue peut s'interpréter comme formée par la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie par le métal. La réflexion est totale (il n'y a pas d'onde transmise dans le métal).

##### Mode TE

Le mode TE s'écrit pour  $\alpha > 0$

$$\hat{\vec{E}} = -\frac{iD}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t + \alpha x - \gamma z)} + \frac{iD}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \alpha x - \gamma z)} = \hat{\vec{E}}_i + \hat{\vec{E}}_r \quad (5.41)$$

et

$$\hat{\vec{B}} = \frac{iD}{2\omega} \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{i(\omega t + \alpha x - \gamma z)} + \frac{iD}{2\omega} \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \alpha x - \gamma z)} = \hat{\vec{B}}_i + \hat{\vec{B}}_r. \quad (5.42)$$

Posons

$$\vec{k}_i = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k}_r = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Le mode TE est la somme de l'OPPH polarisée rectilignement suivant  $Oy$  (onde incidente)

$$\hat{\vec{E}}_i = -\frac{iD}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}, \quad \hat{\vec{B}}_i = \frac{iD}{2\omega} \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \quad (5.44)$$

et de l'OPPH polarisée rectilignement suivant  $Oy$  (onde réfléchie)

$$\hat{\vec{E}}_r = \frac{iD}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}, \quad \hat{\vec{B}}_r = \frac{iD}{2\omega} \begin{pmatrix} -\gamma \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}. \quad (5.45)$$

Justifions les noms d'ondes incidente et réfléchie donnés aux OPPH (5.44) et (5.45). Les rayons sont donnés en direction et sens par le vecteur d'onde (cf. figure 5.4). L'onde incidente tombe sur la surface ( $\vec{k}_i$  pointe vers la surface pour  $\alpha > 0$ ). Les vecteurs  $\vec{k}_i$  et  $\vec{k}_r$  sont symétriques par rapport au plan  $x = 0$ . On en déduit que les rayons incidents et réfléchis satisfont aux lois de Snell<sup>4</sup>-Descartes<sup>5</sup> de la réflexion :

- le rayon réfléchi se trouve dans le plan d'incidence (le plan qui contient le rayon incident et la normale  $\vec{u}_x$  à la surface) ;
- les rayons font le même angle  $\theta$  avec la normale.

Les ondes incidente et réfléchie sont polarisées perpendiculairement au plan d'incidence.

### Mode TM

On obtient de même qu'un mode TM est formée par la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie par le métal (cf. figure 5.5). Ces ondes sont polarisées rectilignement dans le plan d'incidence. En effet, le mode TM s'écrit pour  $\alpha > 0$

$$\hat{\vec{E}} = \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{i(\omega t + \alpha x - \gamma z)} + \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \alpha x - \gamma z)} \quad (5.46)$$

et

$$\hat{\vec{B}} = \frac{\omega A}{2c^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t + \alpha x - \gamma z)} + \frac{\omega A}{2c^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \alpha x - \gamma z)}. \quad (5.47)$$

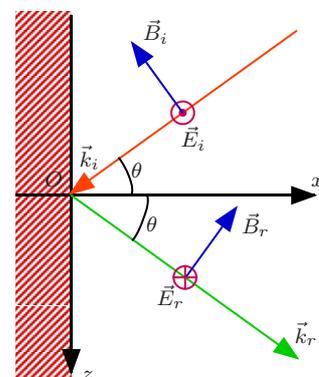


FIG. 5.4 – Mode TE.

4. Willebrord Snell van Royen, dit Willebrordus Snellius (1580-1626)

5. René du Perron Descartes (1596-1650)

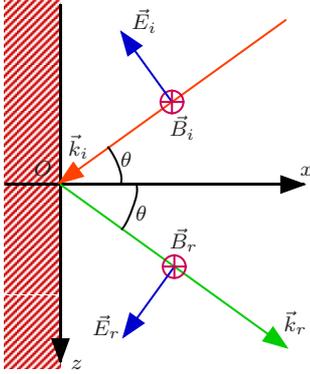


FIG. 5.5 – Mode TM.

Posons

$$\vec{k}_i = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k}_r = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

Le mode TM est la somme de l'onde incidente

$$\hat{\vec{E}}_i = \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}, \quad \hat{\vec{B}}_i = \frac{\omega A}{2c^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \quad (5.49)$$

et de l'onde réfléchie

$$\hat{\vec{E}}_r = \frac{A}{2} \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}, \quad \hat{\vec{B}}_r = \frac{\omega A}{2c^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}. \quad (5.50)$$

## 5.5 Propagation guidée entre deux plans conducteurs

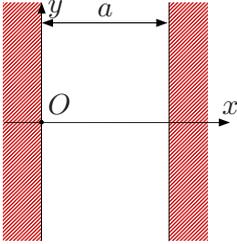


FIG. 5.6 – Section du guide d'ondes.

Nous considérons le système où les demi-espaces  $x \leq 0$  et  $x \geq a$  forment des conducteurs parfaits et la région  $a > x > 0$  est vide (cf. figure 5.6). On a dans les conducteurs

$$\vec{E} = \vec{B} = 0 \quad \text{pour } x < 0 \text{ et } x > a. \quad (5.51)$$

Les champs (5.27) et (5.30), limités à la région  $a > x > 0$ , doivent satisfaire de plus aux conditions aux limites

$$\vec{e}(a) \parallel \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{b}(a) \perp \vec{u}_x. \quad (5.52)$$

Cela équivaut à la condition

$$\sin(\alpha a) = 0. \quad (5.53)$$

On en déduit que  $\alpha$  doit être une des valeurs réelles

$$\alpha = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.54)$$

Les solutions  $\alpha < 0$  n'ont pas à être prise en compte d'après (5.22). Le mode  $n = 0$  est exclu dans le cas TE (il donne un champ nul). Les modes sont notés  $\text{TE}_1, \text{TE}_2, \text{TE}_3, \dots, \text{TM}_0$  (ou TEM),  $\text{TM}_1, \text{TM}_2, \dots$ . On a

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_{nc}^2}{\omega^2} \right) = \frac{4\pi^2}{c^2} (\nu^2 - \nu_{nc}^2) \quad (5.55)$$

en posant

$$\omega_{nc} = \frac{n\pi c}{a}, \quad \boxed{\nu_{nc} = \frac{nc}{2a}}. \quad (5.56)$$

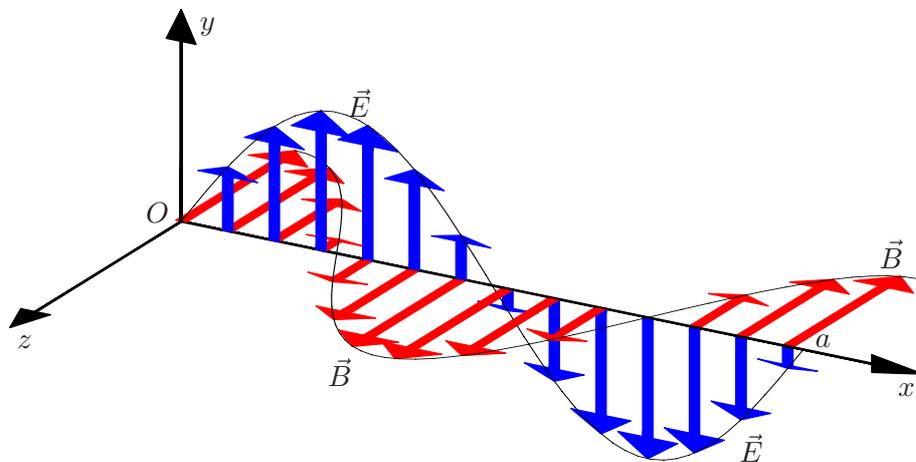


FIG. 5.7 – Onde stationnaire. Cas  $\nu = \nu_{nc}$ . Champ entre les conducteurs ( $0 \leq x \leq a$ ) à un instant  $t$  donné.

Les valeurs de  $\gamma$  données par (5.55) se classent en trois cas suivant la valeur de la fréquence  $\nu = \omega/2\pi$  de l'onde en comparaison avec  $\nu_{nc}$ .

1. Si  $\boxed{\nu = \nu_{nc}}$  alors  $\gamma = 0$ . Le mode  $n$  ne se propage pas et forme une **onde stationnaire**. Ainsi, le mode TE, équation (5.38) pour  $D$  réel, s'écrit

$$\vec{E} = D \sin(\alpha x) \cos(\omega t) \vec{u}_y, \quad \vec{B} = -\frac{D}{c} \cos(\alpha x) \sin(\omega t) \vec{u}_z \quad (5.57)$$

où  $\omega = \omega_{nc} = \frac{n\pi c}{a}$  et  $\alpha = \frac{n\pi}{a}$ . Ce champ est représenté sur la figure 5.7 dans le cas  $n = 2$ ,  $\alpha = \frac{2\pi}{a}$ . Chacun des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  s'écrit comme le produit d'une fonction de  $t$  et de  $x$ . Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont en quadrature tant en  $x$  qu'en  $t$ :

- les nœuds du champ  $\vec{E}$  (les points où  $\sin(\alpha x) = 0$ ) sont les ventres du champ  $\vec{B}$ ;
- les nœuds du champ  $\vec{B}$  (les points où  $\cos(\alpha x) = 0$ ) sont les ventres du champ  $\vec{E}$ ;
- lorsque  $\vec{B} = 0$  (aux temps  $t$  tels que  $\sin(\omega t) = 0$ ) alors  $\vec{E}$  est à son élongation maximale;
- lorsque  $\vec{E} = 0$  (aux temps  $t$  tels que  $\cos(\omega t) = 0$ ) alors  $\vec{B}$  est à son élongation maximale.

L'onde (5.57) est la superposition de deux OPPH de vecteurs d'ondes  $\pm \alpha \vec{u}_x$  (cf. section 5.4.6).

2. Si  $\boxed{\nu < \nu_{nc}}$  alors  $\gamma^2 < 0$  et  $\gamma$  est imaginaire :

$$\gamma = \pm is \quad \text{avec} \quad s = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\nu_{nc}^2 - \nu^2}. \quad (5.58)$$

Le champ dépend de  $z$  suivant le facteur  $e^{-i\gamma z} = e^{\pm sz}$ . Ainsi, le champ électrique du mode TE, équation (5.38) pour  $D$  réel et le signe  $-$  dans  $\gamma = \pm is$ , s'écrit

$$\vec{E} = D \sin(\alpha x) e^{-sz} \cos(\omega t) \vec{u}_y. \quad (5.59)$$

C'est une onde stationnaire qui décroît exponentiellement quand  $z$  augmente. Cette onde est dite **évanescence**.

Il n'y a pas de propagation du mode  $n$  lorsque la fréquence est plus petite que  $\nu_{nc}$ , ou, ce qui est équivalent, lorsque la longueur d'onde dans le vide  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  est telle que

$$\lambda > \frac{c}{\nu_{nc}} = \frac{2a}{n}, \quad (5.60)$$

c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde dans le vide est plus grande que  $\frac{2a}{n}$ .

3. Si  $\boxed{\nu > \nu_{nc}}$  alors  $\gamma^2 > 0$  et  $\gamma$  est réel :

$$\gamma = \pm \frac{2\pi}{c} \sqrt{\nu^2 - \nu_{nc}^2}. \quad (5.61)$$

Ce cas correspond à des modes qui se propagent le long de  $Oz$ . Par exemple, le champ électrique du mode TE, équation (5.38) pour  $D$  réel, s'écrit

$$\vec{E} = D \sin(\alpha x) \cos(\omega t - \gamma z) \vec{u}_y. \quad (5.62)$$

C'est une onde **progressive inhomogène** qui se propage le long de  $Oz$  (dans le sens de  $z$  croissant si  $\gamma > 0$ ). Les plans d'onde sont les plans  $z = \text{Cte}$ . L'onde est inhomogène parce que le champ n'a pas la même valeur en tout point d'un même plan d'onde (le champ dépend de  $x$ ).

La fréquence  $\nu_{nc}$  est appelée la **fréquence de coupure** du mode  $n$ . On en déduit que

- pour  $0 < \nu \leq \frac{c}{2a}$ , seul le mode TEM (= TM<sub>0</sub>) se propage ;
- pour  $\frac{c}{2a} < \nu \leq \frac{c}{a}$ , seuls les modes TEM, TM<sub>1</sub> et TE<sub>1</sub> se propagent ;
- pour  $\frac{c}{a} < \nu \leq \frac{3c}{2a}$ , seuls les modes TEM, TM<sub>1</sub>, TE<sub>1</sub>, TM<sub>2</sub> et TE<sub>2</sub> se propagent ;
- ...

De façon générale, on appelle **modes** les types d'ondes monochromatiques qui peuvent se propager dans un guide. A chaque mode est associée une fréquence de coupure. *Une onde de fréquence donnée  $\nu$  ne peut se propager dans un mode donné que si sa fréquence est plus grande que la fréquence de coupure.* Lorsque pour cette fréquence il n'y a qu'un mode qui se propage, le guide est dit **monomode** (opposé de **multimode**).

**Vitesse de phase, vitesse de groupe**

Mis à part le mode TEM pour lequel  $\gamma = \pm \frac{\omega}{c}$ , les ondes guidées présentent de la dispersion. Considérons un mode  $n > 0$  à une fréquence plus grande que la fréquence de coupure ( $\omega > \omega_{nc}$ ) et se propageant vers  $z$  croissant. La racine  $\gamma > 0$  de (5.55) nous donne la vitesse de phase

$$v_\phi = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{nc}^2}{\omega^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{nc}{2a\nu}\right)^2}}. \quad (5.63)$$

La vitesse de phase est plus grande que la vitesse de la lumière dans le vide

$$v_\phi > c. \quad (5.64)$$

En différentiant (5.55) on obtient

$$\gamma d\gamma = \frac{\omega d\omega}{c^2} \quad (5.65)$$

d'où la vitesse de groupe

$$v_g = \frac{d\omega}{d\gamma} = \frac{\gamma}{\omega} c^2 = \frac{c^2}{v_\phi} = c \sqrt{1 - \left(\frac{nc}{2a\nu}\right)^2}. \quad (5.66)$$

La vitesse de groupe est inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide

$$v_g < c. \quad (5.67)$$

Dans un guide multimode la vitesse de groupe (5.66), pour une fréquence  $\nu$  donnée, diffère d'un mode  $n$  à l'autre. C'est la **dispersion intermodale**. Lorsqu'un guide d'onde est utilisé pour transmettre des données, l'information est usuellement codée sous forme d'impulsions qui modulent l'onde guidée. Le phénomène de dispersion intermodale brouille le signal si les impulsions sont trop rapprochées. Cela limite l'utilisation des guides multimodes à des taux de transmissions faibles ou sur des courtes distances. Les guides monomodes qui déforment beaucoup moins les impulsions sont employés pour des taux de transmissions élevés et pour de longues distances.



## 6

# Milieux diélectriques et aimantés

## 6.1 Introduction

Nous nous proposons d'étudier l'électromagnétisme de milieux quelconques, *conducteurs*, *diélectriques* (c'est-à-dire isolants) ou *aimantés*. Pour décrire les milieux, on parle d'échelle *microscopique* pour des phénomènes qui ont lieu à des échelles inférieures ou de l'ordre du rayon  $a \sim 1 \text{ \AA}$  des atomes et d'échelle *macroscopique* pour des phénomènes qui ont lieu à des échelles grandes par rapport à la taille des atomes (de l'ordre de  $\lambda \sim 100 \text{ nm}$ ). Aux échelles microscopique ou *mésoscopique* (entre microscopique et macroscopique), il est nécessaire d'utiliser la mécanique quantique. Aux échelles macroscopiques, l'électromagnétisme classique permet de décrire les phénomènes dans les milieux.

### 6.1.1 Champ électromagnétique microscopique et macroscopique

On obtient le champ électrique macroscopique  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  en effectuant une moyenne du champ électrique microscopique  $\vec{e}(\vec{r}, t)$  sur une boule  $\mathcal{B}$ , centrée en  $\vec{r}$ , de rayon mésoscopique  $d_1$  :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \langle \vec{e} \rangle = \frac{3}{4\pi d_1^3} \iiint_{\mathcal{B}} \vec{e}(\vec{r}', t) d\tau' \quad \text{avec} \quad \lambda \gg d_1 \gg a. \quad (6.1)$$

La valeur de  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  ne dépend pas du choix du rayon  $d_1$  en pratique. Le champ magnétique macroscopique  $\vec{B}$  est défini de façon analogue comme moyenne du champ magnétique microscopique  $\vec{b}$ . Les charges et courants volumiques  $\rho$  et  $\vec{j}$  sont également des grandeurs macroscopiques définies par des moyennes (cf. équations (1.1) et (1.3) de la section 1.2).

*Exemple.* Dans un conducteur à l'équilibre électrostatique,  $\vec{E} = \vec{B} = 0$ , mais les champs microscopiques  $\vec{e}$  et  $\vec{b}$  sont très compliqués et varient beaucoup sur la distance  $a$ .

### 6.1.2 Charges et courants liés et libres

Dans les milieux on distingue les *charges liées* qui ne peuvent se déplacer que sur des distances microscopiques (de l'ordre de  $a$ ) et les *charges libres* qui au contraire sont libres de se déplacer sur des distances macroscopiques. Les courants associés à ces charges sont également qualifiés de liés et libres.

*Exemples.* Un métal conducteur comporte à la fois des charges liées (noyaux et électrons internes) et des charges libres (électrons de conduction). Un isolant ne comporte le plus souvent que des charges liées.

*Notations.* On désigne les charges et courants libres avec l'indice  $a$  ( $\rho_a$ ,  $\sigma_a$ ,  $\vec{j}_a$ , ...).

Les charges et courants liés comportent les charges de polarisation notées avec l'indice  $p$  (densités de charge volumique  $\rho_p$ , surfacique  $\sigma_p$ , courant volumique  $\vec{j}_p$ ) et les courants de magnétisation notés avec l'indice  $m$  (courant volumique  $\vec{j}_m$  et courant surfacique  $\vec{j}_{\sigma m}$ ).

## 6.2 Milieux diélectriques

### 6.2.1 Polarisation diélectrique



On introduit le champ de vecteur **polarisation** diélectrique  $\vec{P}(\vec{r}, t)$ . Il n'a aucun rapport avec la *polarisation des ondes*. Ne pas non plus le confondre avec le vecteur de Poynting (qui est aussi noté  $\vec{P}$ ).

Soit un diélectrique occupant le volume  $V$  et électriquement neutre. Récrivons le moment dipolaire électrique (1.62) des charges liées du diélectrique sous la forme d'une intégrale de volume

$$\vec{d} = \iiint_V \vec{P}(\vec{r}, t) d\tau \quad (6.2)$$

où on écrit le moment dipolaire électrique des dipôles inclus dans le volume mésoscopique (de dimension  $\sim d_1$ )  $d\tau$  (cf. figure 6.1) sous la forme

$$\vec{P}(\vec{r}, t) d\tau = \sum_{i \in d\tau} \vec{p}_i. \quad (6.3)$$

Le champ de vecteur  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  est le **vecteur polarisation diélectrique** (unité:  $\text{C m}^{-2}$ ).

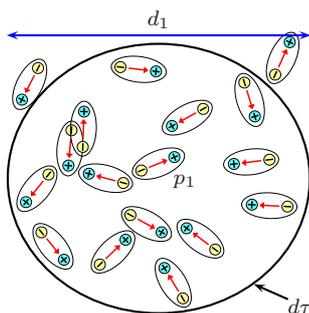


FIG. 6.1 – Définition du vecteur polarisation diélectrique:  $\vec{P}(\vec{r}, t) d\tau = \sum_{i \in d\tau} \vec{p}_i$ .

### 6.2.2 Polarisation diélectrique permanente

Certains corps comme le titanate de baryum ( $\text{BaTiO}_3$ ) possèdent une polarisation permanente en l'absence de tout champ électrique appliqué. C'est le phénomène de la **ferroélectricité** découvert par Seignette<sup>1</sup> en 1672. Ces corps permettent de fabriquer des **électrets** qui sont l'analogie électrique des aimants. L'effet est utilisé dans certains microphones qui délivrent un signal sans nécessiter une alimentation électrique.

Au dessus d'une certaine température  $T_c$  (point de Curie<sup>2</sup>) cette polarisation diélectrique permanente disparaît ( $T_c \sim 400 \text{ K}$  pour  $\text{BaTiO}_3$ ).

### 6.2.3 Piézoélectricité

Certains corps comme les cristaux de quartz ( $\text{SiO}_2$ ) se polarisent lorsqu'ils sont soumis à des efforts mécaniques. Si on métallise les faces d'une lame de quartz, il apparaît une différence de potentiel entre ces faces lorsqu'on comprime la lame. Inversement, si on applique une différence de potentiel électrique entre ces faces, l'épaisseur de la lame varie en fonction de la tension appliquée. C'est le phénomène de la **piézoélectricité** découvert par Pierre Curie en 1880.

Cet effet est utilisé dans les oscillateurs à quartz et pour l'émission et la réception de sons et d'ultrasons.

### 6.2.4 Polarisation induite par un champ électrique

La plupart des corps ne sont pas polarisés en absence de champ électrique et se polarisent lorsqu'on les place dans un champ électrique. La polarisation disparaît avec le champ électrique. Deux mécanisme microscopiques permettent d'expliquer cet effet.

**a) Le moment dipolaire induit.** Il apparaît dans un atome un moment dipolaire induit par un déplacement des électrons et du noyau sous l'action du champ électrique (cf. figure 6.2). Cet effet concerne tous les corps, gazeux, liquides et solides.

**b) L'orientation des molécules polaires.** Dans un gaz ou liquide contenant des molécules polaires, les moments dipolaires des molécules sont dirigés au hasard en l'absence de champ électrique appliqué et la somme (6.3) est nulle ( $\vec{P} = 0$ ). Dans un champ électrique  $\vec{E}$ , la molécule de moment dipolaire électrique  $\vec{p}$  subit le couple de moment (1.68) qui tend à l'orienter dans la direction et sens de  $\vec{E}$ . Cet effet, contrarié par l'agitation thermique des molécules, augmente avec le module du champ  $\vec{E}$  (cf. figure 6.3).

---

1. Pierre Seignette (1660-1719)

2. Pierre Curie (1859-1906)

FIG. 6.2 – Moment dipolaire induit  $\vec{p}$  d'un atome sphérique dans un champ électrique  $\vec{E} = 0, \vec{E}_1$  ou  $\vec{E}_2$  ( $0 < E_1 < E_2$ ).

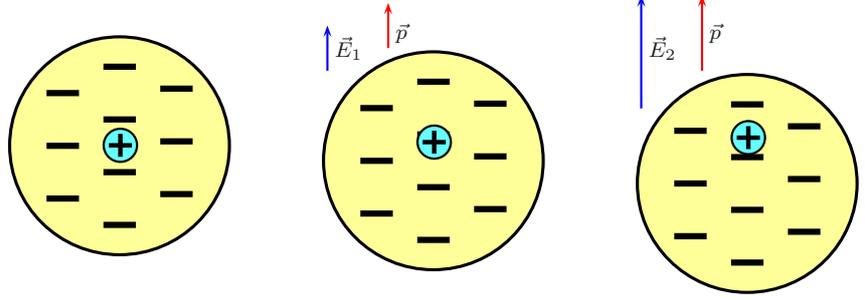


FIG. 6.2a –  $\vec{E} = 0$ .

FIG. 6.2b –  $\vec{E} = \vec{E}_1$ .

FIG. 6.2c –  $\vec{E} = \vec{E}_2$ .

FIG. 6.3 – Orientation des molécules polaires situées dans un champ électrique  $\vec{E} = 0, \vec{E}_1$  ou  $\vec{E}_2$  ( $0 < E_1 < E_2$ ).

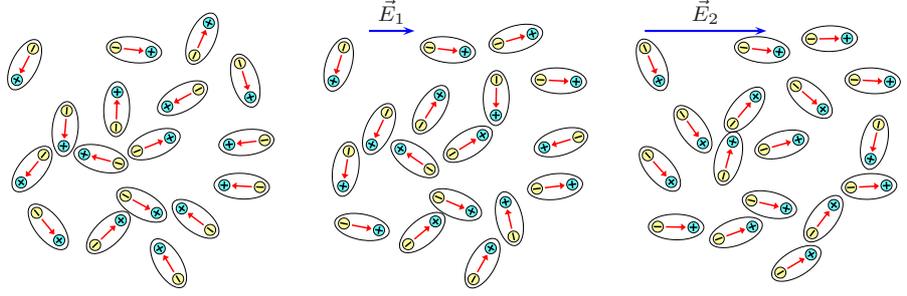


FIG. 6.3a –  $\vec{E} = 0$ .

FIG. 6.3b –  $\vec{E} = \vec{E}_1$ .

FIG. 6.3c –  $\vec{E} = \vec{E}_2$ .

**Susceptibilité électrique.** Dans un milieu **isotrope**, les vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{P}$  sont parallèles par raison de symétrie. Très souvent, la relation entre  $\vec{E}$  et  $\vec{P}$  est linéaire. On dit alors que le milieu est **linéaire**. On envisagera deux situations pour les milieux linéaires et isotropes.

- Dans le cas statique (ou quasi-statique), on écrit la relation linéaire sous la forme

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (6.4)$$

où la grandeur sans dimension  $\chi$  est appelée la **susceptibilité électrique (statique)**. Expérimentalement, la susceptibilité  $\chi$  est toujours positive ( $\vec{E}$  et  $\vec{P}$  sont parallèles et de même sens).

- Pour des champs variables de pulsation  $\omega$  de la forme

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \hat{f}(\vec{r})e^{i\omega t}, \quad \hat{\vec{P}}(\vec{r}, t) = \hat{g}(\vec{r})e^{i\omega t} \quad (6.5)$$

en représentation complexe on écrit la relation linéaire sous la forme

$$\hat{\vec{P}} = \epsilon_0 \chi(\omega) \hat{\vec{E}} \quad (6.6)$$

avec une susceptibilité électrique  $\chi(\omega)$  qui est un nombre complexe dépendant de la pulsation  $\omega$ .

Lorsque le milieu est de plus **homogène**, ses propriétés, et en particulier la valeur de la susceptibilité  $\chi$  ou  $\chi(\omega)$ , sont les mêmes en tout point.

**Milieu lhi.** Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope (**lhi**) la relation (6.4) ou (6.6) s'applique avec  $\chi$  ou  $\chi(\omega)$  uniforme dans tout l'échantillon (mais les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{P}$  ne sont pas nécessairement uniformes).

**Milieu anisotrope.** Certains cristaux sont linéaires, homogène mais **anisotropes**. La relation entre  $\vec{E}$  et  $\vec{P}$  s'écrit sous forme matricielle (dans une base cartésienne  $Oxyz$ ) avec le **tenseur susceptibilité électrique**  $\chi_{ij}$  :

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

**Valeurs numériques.** La susceptibilité électrique de l'eau est beaucoup plus grande que celle des autres exemples (cf. table 6.1). Cela est dû au caractère polaire des molécules d'eau.

### 6.2.5 Condensateur plan avec un milieu diélectrique

On considère un condensateur plan chargé dont les armatures de surface  $S$  et distantes de  $d$  sont isolées (cf. figure 6.4). L'espace entre les armatures est le vide. La charge surfacique, supposée constante et uniforme (on néglige les effets de bord), est  $\sigma_a > 0$  sur l'armature  $A$  et  $-\sigma_a$  sur l'armature  $B$ . Soit  $\vec{u}_z$  le vecteur unitaire perpendiculaire aux armatures et pointant de  $A$  vers  $B$ . Le champ entre les armatures est constant et uniforme et vaut<sup>3</sup>

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_a}{\epsilon_0} \vec{u}_z. \quad (6.8)$$

La différence de potentiel<sup>4</sup> entre les armatures est  $U_0 = U_A - U_B = E_0 d = \frac{\sigma_a d}{\epsilon_0}$ . Elle s'écrit en fonction de la charge  $Q$  et capacité  $C$  du condensateur :

$$U_0 = \frac{Q}{C} \quad \text{avec} \quad C = \frac{S\epsilon_0}{d} \quad \text{et} \quad Q = \sigma_a S. \quad (6.9)$$

Introduisons un diélectrique lhi qui occupe tout l'espace entre les armatures, la charge  $Q$  restant constante. On observe expérimentalement que la différence de potentiel  $U_A - U_B$  diminue. Cela est la conséquence de la polarisation du diélectrique. Il apparaît dans le diélectrique des charges liées (ou charges de polarisation) qui modifient le champ électrique. Les charges surfaciques des armatures  $\pm\sigma_a$ , inchangées, sont les charges libres du système.

3. On peut obtenir la valeur de ce champ par le principe de superposition appliqué aux deux plans uniformément chargés  $A$  et  $B$ . Le champ créé par un plan uniformément chargé s'obtient par l'utilisation des symétries et application du théorème de Gauss.

4. Cette d.d.p. s'obtient en calculant la circulation du champ  $\vec{E}$  le long d'un chemin qui va de  $A$  à  $B$ .

milieu	$\chi$
air	$5,4 \cdot 10^{-4}$
benzène	1,8
NaCl	4,8
eau	80

TAB. 6.1 – Susceptibilité électrique de quelques diélectriques lhi à la température  $T = 293 \text{ K}$  et à la pression atmosphérique.

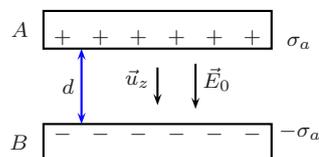


FIG. 6.4 – Le condensateur plan dans le vide.

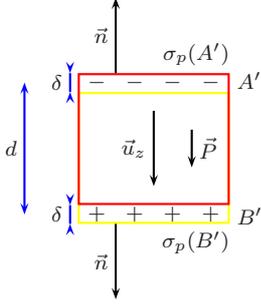


FIG. 6.5 – Charges de polarisation.

Considérons un modèle microscopique cette polarisation. Supposons que le milieu soit formé d'électrons mobiles de charge  $-e$  et densité  $N$  et d'ions immobiles. Nous supposons que tous les électrons se déplacent de la même façon. Leur déplacement  $\vec{\delta} = -\delta\vec{u}_z$  (où  $\delta > 0$ ) est petit par rapport à la taille des atomes (cf. figure 6.5). Dans le volume  $d\tau$ , il apparaît  $Nd\tau$  dipôles (ion, électron déplacé) de même moment dipolaire électrique  $-e\vec{\delta}$ . L'équation (6.3) donne  $\vec{P}d\tau = (-e\vec{\delta})(Nd\tau)$ , d'où la valeur du vecteur polarisation

$$\vec{P} = -Ne\vec{\delta} = Ne\delta\vec{u}_z. \quad (6.10)$$

Le milieu diélectrique reste électriquement neutre en volume et la charge volumique de polarisation est

$$\rho_p = 0, \quad (6.11)$$

mais il apparaît une couche d'électrons d'épaisseur  $\delta$  sur la face  $A'$  du diélectrique et une couche d'ions d'épaisseur  $\delta$  sur la face  $B'$ . L'élément de surface  $dS$  de la face  $A'$  porte ainsi la charge  $-Ne\delta dS$  qui correspond à la charge surfacique uniforme

$$\sigma_p(A') = -Ne\delta = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (6.12)$$

où  $\vec{n} = -\vec{u}_z$  est le vecteur unitaire normal sortant du diélectrique. De même face  $B'$  porte la charge surfacique opposée

$$\sigma_p(B') = Ne\delta = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (6.13)$$

où le vecteur unitaire normal sortant du diélectrique est  $\vec{n} = \vec{u}_z$  sur la face  $B'$ . Posons  $\sigma' = Ne\delta = P$ . Le champ électrique est créé par toutes les charges, libres et liées, c'est-à-dire par le plan  $A = A'$  portant la charge surfacique uniforme  $\sigma_a - \sigma' = \sigma_a - P$  et le plan  $B = B'$  portant la charge surfacique opposée. Il vaut donc dans le diélectrique

$$\vec{E} = \frac{\sigma_a - P}{\epsilon_0} \vec{u}_z = E \vec{u}_z. \quad (6.14)$$

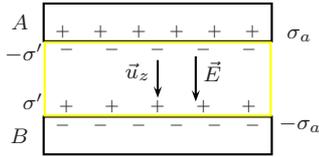


FIG. 6.6 – Le condensateur avec diélectrique.

On écrit, selon (6.4),  $P = \epsilon_0 \chi E$ . On a donc

$$E = \frac{\sigma_a - \epsilon_0 \chi E}{\epsilon_0} \implies E = \frac{\sigma_a}{(1 + \chi)\epsilon_0}. \quad (6.15)$$

On appelle respectivement **permittivité (absolue)** et **permittivité relative** du diélectrique les grandeurs

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad \text{et} \quad \epsilon_r = 1 + \chi. \quad (6.16)$$

Le champ s'écrit en fonction des charges surfaciques libres  $\sigma_a$  et de la permittivité du diélectrique :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_a}{\epsilon} \vec{u}_z. \quad (6.17)$$

On a toujours, dans le cas statique,  $\epsilon_r \geq 1$  (cf. table 6.2). La différence de potentiel entre les armatures est

$$U = U_A - U_B = \frac{\sigma_a d}{\epsilon} = \frac{Q}{C'} \quad \text{où} \quad C' = \frac{S\epsilon}{d} \quad (6.18)$$

est la capacité du condensateur avec diélectrique.

On expliquera plus bas (cf. fin de la section 6.2.8) pourquoi la capacité (6.18) et le champ électrique (6.17) du condensateur avec diélectrique s'obtiennent par le simple remplacement  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$  dans la capacité (6.9) et le champ (6.8) du condensateur vide.

milieu	$\epsilon_r$
air	1,00057
verre	5 à 10
eau	80

TAB. 6.2 – Permittivité relative de quelques diélectriques lhi à la température  $T = 293$  K et à la pression atmosphérique.

### 6.2.6 Charges de polarisation d'un diélectrique

Les équations (6.11–6.13) déterminent les charges de polarisation dans le diélectrique lhi du condensateur plan. Nous admettrons la généralisation suivante, valable pour tout corps diélectrique (pas nécessairement lhi).

**Théorème 6.1 (charges et courants de polarisation).** Soit  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  le vecteur polarisation électrique.

Les charges volumiques de polarisation dans le diélectrique sont

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (6.19)$$

et les charges surfaciques sur le bord du diélectrique

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (6.20)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal sortant du diélectrique.

Le courant volumique de polarisation d'un diélectrique est

$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad (6.21)$$

et le courant surfacique de polarisation est nul.

*Remarque 1.* Dans le cas du condensateur,  $\vec{P}$  était constant et uniforme. Le théorème indique bien qu'il n'y a pas de charges volumiques ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$ ) et pas de courants de polarisation.

*Remarque 2.* Les charges et courants de polarisation vérifient une équation de continuité,

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_p = 0, \quad (6.22)$$

qui exprime la conservation des charges liées et qui se vérifie à partir des équations (6.19) et (6.21).

*Remarque 3.* À la différence des conducteurs, il n'y a pas de courant surfacique de charge à la surface d'un diélectrique. Les charges surfaciques de polarisation ne sont pas dues à des courants surfaciques mais à des déplacements de charges à partir de l'intérieur du diélectrique (cf. figure 6.5).

*Remarque 4.* Lorsque la polarisation du diélectrique est due à un déplacement  $\vec{\delta}$  des électrons, on peut démontrer le théorème en procédant comme dans le modèle du diélectrique de la section précédente.

*Remarque 5.* Une démonstration du théorème consiste à montrer que le champ électromagnétique créé par la répartition de dipôles de polarisation  $\vec{P} d\tau$  est identique au champ électromagnétique créé par la répartition des charges  $\rho_p$ ,  $\sigma_p$  et courants de polarisations  $\vec{j}_p$ . Ces deux répartitions (la répartition de charges et de courants et la répartition de dipôles) sont dites **équivalentes**.

### 6.2.7 Vecteur déplacement électrique

#### Définition

Écrivons l'équation de Maxwell-Gauss en décomposant les charges volumiques  $\rho = \rho_a + \rho_p$  en charges libres  $\rho_a$  et charges de polarisation  $\rho_p$  données en fonction de  $\vec{P}$  par l'équation (6.19) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_a + \rho_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho_a - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}. \quad (6.23)$$

Introduisons le vecteur *déplacement électrique* (ou *induction électrique*)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (6.24)$$

L'équation (6.23) donne l'équation de Maxwell-Gauss dans les milieux,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_a, \quad (6.25)$$

qui ne contient que les charges libres.

#### Relation entre **E** et **D**

Nous nous limitons à un milieu lhi. En régime statique ou quasi-statique, le déplacement électrique s'écrit en fonction des permittivités (absolue ou relative) définies en (6.16)

$$\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = \epsilon\vec{E}. \quad (6.26)$$

En régime sinusoïdal de pulsation  $\omega$ , on définit la **permittivité complexe (absolue)**  $\epsilon(\omega)$  et la **permittivité complexe relative**  $\epsilon_r(\omega)$  du diélectrique lhi par

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_r(\omega)\epsilon_0 \quad \text{et} \quad \epsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega). \quad (6.27)$$

Le déplacement électrique complexe est alors relié au champ électrique complexe par

$$\hat{D} = \epsilon_0\epsilon_r(\omega)\hat{E} = \epsilon(\omega)\hat{E}. \quad (6.28)$$

### 6.2.8 Équations de Maxwell dans les milieux diélectriques

#### Équation de Maxwell-Gauss

L'équation de **Maxwell-Gauss** est l'équation (6.25) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_a. \quad (6.29)$$

Sa forme intégrale est

$$\iint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q_{aV} \quad \text{avec} \quad Q_{aV} = \iiint_V \rho_a d\tau. \quad (6.30)$$

Elle exprime le flux sortant par le bord  $S = \partial V$  du volume  $V$  du vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$  en fonction de la charge électrique libre  $Q_{aV}$  contenue dans  $V$ . Les relations de passage associées s'obtiennent à partir de la loi locale par les substitutions

$$\vec{\nabla} \rightarrow \vec{n}_{12}, \quad \vec{D} \rightarrow \vec{D}_2 - \vec{D}_1, \quad \rho_a \rightarrow \sigma_a \quad (6.31)$$

que l'on comparera à (1.51). On obtient

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_a. \quad (6.32)$$

#### Équation de Maxwell-Ampère

Le courant volumique  $\vec{j}$  est la somme du courant volumique libre  $\vec{j}_a$  et du courant volumique de polarisation  $\vec{j}_p$ . L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit en utilisant (6.21)

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0(\vec{j}_a + \vec{j}_p) + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j}_a + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0\vec{E} + \vec{P}). \quad (6.33)$$

L'équation de **Maxwell-Ampère** prend la forme

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j}_a + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (6.34)$$

qui ne contient que les courants libres. Le terme  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  est semblable au courant de déplacement  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  de l'équation de Maxwell-Ampère dans le vide. On l'interprète comme étant le courant de déplacement dans le diélectrique. Le nom « déplacement électrique » donné à  $\vec{D}$  provient de cette interprétation.

La forme intégrale de l'équation (6.34) est

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 (I_a + I_d) \quad (6.35)$$

avec

$$I_a = \iint_S \vec{j}_a \cdot \vec{n} dS \quad \text{et} \quad I_d = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS. \quad (6.36)$$

Elle exprime la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé  $\Gamma = \partial S$  en fonction du courant libre  $I_a$  et du courant de déplacement  $I_d$  qui traversent la surface  $S$ .

Les relations de passage associées sont

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_{a\sigma}. \quad (6.37)$$

### Équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Flux

Ces équations sont les mêmes que dans le vide.

#### Tableau des lois

La table 6.3 récapitule les équations de Maxwell dans les milieux diélectriques non magnétiques et donne leurs formes intégrales et leurs relations de passage. Pour obtenir un système complet d'équations on doit donner la relation entre  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$ .

#### Milieux lhi non magnétiques

Nous envisageons le cas d'un système composé d'un ou plusieurs milieux  $i = 1, 2, \dots$  diélectriques lhi. La relation entre  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  est donnée dans chaque milieu par (6.26) ou (6.28). Nous écrirons pour le cas statique et dans le milieu  $i$

$$\vec{D} = \epsilon_i \vec{E}. \quad (6.38)$$

Les équations de Maxwell s'écrivent dans le milieu  $i$  en fonction de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_a}{\epsilon_i} \quad (6.39)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_a + \mu_0 \epsilon_i \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.40)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.41)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (6.42)$$

Elles ne diffèrent des équations dans le vide que par les substitutions<sup>5</sup>

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_i, \quad \rho \rightarrow \rho_a \quad \text{et} \quad \vec{j} \rightarrow \vec{j}_a. \quad (6.43)$$

---

5. Les équations des milieux magnétiques lhi s'obtiennent de même en remplaçant la perméabilité du vide  $\mu_0$  par la **perméabilité du milieu**  $\mu$ .

TAB. 6.3 – Équations de Maxwell dans un milieu non magnétique : formes locales, intégrales et relations de passage.

formes locales	formes intégrales	relations de passage
Maxwell-Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_a$	théorème de Gauss $\iint_{\partial V} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q_{aV}$ $Q_{aV} = \iiint_V \rho_a d\tau$	$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_a$
Maxwell-flux $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	flux de $\vec{B}$ conservatif $\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$	$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$
Maxwell-Faraday $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	loi de Faraday (induction) $e = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ $\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$	$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$
Maxwell-Ampère $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j}_a + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$	théorème d'Ampère $\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_a + I_d)$ $I_a = \iint_S \vec{j}_a \cdot \vec{n} dS$ $I_d = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$	$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_{a\sigma}$

On doit adjoindre à ce système les relations de passage. On écrira en chaque point  $P$  de la surface  $S$  qui sépare les milieux 1 et 2,  $\vec{n}_{12}$  étant le vecteur unitaire normal à la surface en  $P$  et allant du milieu 1 vers le milieu 2 :

$$\vec{n}_{12} \cdot (\epsilon_2 \vec{E}_2 - \epsilon_1 \vec{E}_1) = \sigma_a \quad (6.44)$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_{a\sigma} \quad (6.45)$$

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (6.46)$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0. \quad (6.47)$$

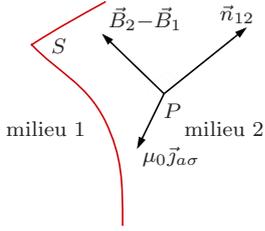


FIG. 6.7 – Relations de passage pour le champ  $\vec{B}$ .

Décomposons les champs électriques  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  au voisinage de  $P$  en un vecteur normal à la surface  $S$  (indice  $\perp$ ) et un vecteur tangent à la surface  $S$  (indice  $\parallel$ ) :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1\parallel} + \vec{E}_{1\perp} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_{1\perp} = E_{1\perp} \vec{n}_{12} = (\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_{12}) \vec{n}_{12}, \quad (6.48)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2\parallel} + \vec{E}_{2\perp} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_{2\perp} = E_{2\perp} \vec{n}_{12} = (\vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12}) \vec{n}_{12}. \quad (6.49)$$

La relation de passage (6.47) donne (cf. figure 6.8)

$$\vec{E}_{1\parallel} = \vec{E}_{2\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad (6.50)$$

et la relation de passage (6.44)

$$\epsilon_2 E_{2\perp} - \epsilon_1 E_{1\perp} = \sigma_a. \quad (6.51)$$

*Remarque.* La relation de passage

$$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = E_{2\perp} - E_{1\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_a + \sigma_p}{\epsilon_0} \quad (6.52)$$

reste valable, mais elle est moins pratique que la relation (6.44) ou (6.51) qui ne contiennent pas les charges de polarisation surfacique  $\sigma_p$ .

### Électrostatique dans un milieu diélectrique

Dans le cas statique, les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  dans le milieu vérifient les équations

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_a \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0. \quad (6.53)$$

Si on adjoint à ces équations la relation entre  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$ , relation qui dépend du milieu, et les conditions aux limites adéquates on obtient un système d'équations complet qui admet une et une seule solution. Dans le cas d'un milieu lhi, ces équations se réduisent à

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_a}{\epsilon} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (6.54)$$

qui ne diffèrent des équations dans le vide que par le remplacement de  $\epsilon_0$  par  $\epsilon$  et de  $\rho$  par  $\rho_a$ .

### Loi de Coulomb dans un diélectrique lhi

Dans un milieu diélectrique lhi, la force exercée par la charge ponctuelle  $q$  placée en  $O$  sur la charge  $q'$  placée en  $M$  ( $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ ) est

$$\vec{F} = \frac{qq'\vec{r}}{4\pi\epsilon r^3}. \quad (6.55)$$

La force est  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$  fois plus petite que si les charges étaient placées dans le vide. Le cristal ionique NaCl se dissocie dans l'eau ( $\epsilon_r = 80$ ) parce que la force de liaison entre les ions  $\text{Na}^+$  et  $\text{Cl}^-$  est divisée par 80 et devient trop faible pour maintenir l'édifice cristallin.

### Retour sur le condensateur plan

Le champ électrique (6.17) du condensateur avec diélectrique s'obtient bien par le remplacement  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$  dans le champ (6.8) du condensateur vide.

## 6.3 Milieux magnétiques

### 6.3.1 Vecteur aimantation

Soit un milieu magnétique occupant le volume  $V$ . Écrivons le moment dipolaire magnétique (1.88) sous la forme d'une intégrale de volume

$$\vec{m} = \iiint_V \vec{M}(\vec{r}, t) d\tau \quad (6.56)$$

où on écrit le moment dipolaire magnétique des dipôles inclus dans le volume mésoscopique (de dimension  $\sim d_1$ )  $d\tau$  sous la forme

$$\vec{M}(\vec{r}, t) d\tau = \sum_{i \in d\tau} \vec{m}_i. \quad (6.57)$$

Le champ de vecteur  $\vec{M}(\vec{r}, t)$  est le **vecteur aimantation** (unité :  $\text{A m}^{-1}$ ).

### 6.3.2 Diamagnétisme et paramagnétisme

La plupart des corps ne sont pas aimantés en absence de champ magnétique et s'aimantent lorsqu'on les place dans un champ magnétique. L'aimantation disparaît avec le champ magnétique. Dans un milieu magnétique linéaire, homogène et isotrope, on peut écrire

$$\vec{M} = \alpha \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (6.58)$$

où  $\alpha$  est une grandeur sans dimension.

On distingue deux types de milieux, suivant le signe de  $\alpha$ . La table 6.4 donne des exemples de corps **diamagnétiques** ( $\alpha < 0$ ) et la table 6.5 donne des exemples de corps **paramagnétiques** ( $\alpha > 0$ ). Si on approche l'extrémité d'un aimant (ou solénoïde) d'une substance, on observe que la substance est attirée vers l'aimant si elle est paramagnétique et repoussée si elle est diamagnétique. Les substances ferromagnétiques non aimantées sont aussi attirées, mais beaucoup plus fortement que les corps paramagnétiques (cf. section 6.3.3).

corps	$\alpha$
eau	$-9 \cdot 10^{-6}$
cuiivre	$-9 \cdot 10^{-6}$

TAB. 6.4 – Quelques corps diamagnétiques.

corps	$\alpha$
O <sup>2</sup> liquide	$3 \cdot 10^{-3}$
air*	$3 \cdot 10^{-7}$

TAB. 6.5 – Quelques corps paramagnétiques.

\*à la température  $T = 293$  K et à la pression atmosphérique

Cette attraction ou répulsion s'interprète en considérant l'énergie potentielle d'interaction  $W$  de l'aimantation et du champ magnétique (cf. équation (1.105) dans le cas d'un dipôle rigide). Le corps tend à se déplacer pour rendre  $W$  minimum. Il se déplace donc vers les régions où le champ  $\vec{B}$  est

- plus intense pour un corps paramagnétique ( $\vec{B}$  et  $\vec{m}$  de même sens) ;
- moins intense pour un corps diamagnétique ( $\vec{B}$  et  $\vec{m}$  de sens opposés).

### 6.3.3 Ferromagnétisme

Certains corps cristallins comme le fer, le cobalt, le nickel, CrO<sub>2</sub> et des ferrites peuvent posséder une aimantation permanente en absence de tout champ magnétique appliqué. C'est le phénomène du **ferromagnétisme** qui permet de fabriquer des **aimants**. Au dessus d'une certaine température  $T_c$  (point de Curie) cette aimantation disparaît ( $T_c = 1040$  K pour Fe). Le corps devient alors paramagnétique.

### Hystérésis

Plaçons un noyau (un cylindre) de fer non aimanté dans un solénoïde. Le courant  $I$  dans le solénoïde est réglable. Dans le noyau, le champ magnétique  $\vec{B}$  et l'aimantation  $\vec{M}$  peuvent être considérés comme uniformes et parallèles à l'axe du système. On effectue des mesures de l'aimantation  $M$  du noyau pour diverses valeurs de  $I$  et on trace les courbes  $M = f(I)$ .

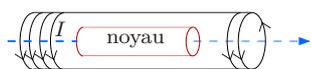


FIG. 6.9 – Étude de l'hystérésis de l'aimantation : noyau de fer dans un solénoïde.

**Variation très lente (courbe statique)** On fait croître le courant  $I$  lentement de 0 à  $I_1$ , puis on le fait décroître tout aussi lentement jusqu'à 0 (cf. figure 6.10).

On observe que l'aimantation croît de 0 à  $M_1$  (pour  $I = I_1$ ), puis décroît en suivant une autre courbe (phénomène d'**hystérésis**<sup>6</sup> magnétique). Quand le courant revient à 0, l'aimantation prend la valeur  $M_0 \neq 0$ . Le noyau est devenu un aimant permanent.

Le maximum d'aimantation  $M_1$  croît avec  $I_1$  et tend vers une limite, l'**aimantation à saturation**  $M_s$  pour  $I_1 \rightarrow \infty$ .

6. Du grec être en retard.

**Variation périodique** On utilise un courant alternatif sinusoïdal  $I(t) = I_2 \cos(\omega t)$  de période  $T = 2\pi/\omega$ . Après un régime transitoire, l'aimantation  $M(t)$  devient également périodique de période  $T$ . Le point  $(I(t), M(t))$  décrit une courbe fermée (courbe d'hystérésis dynamique) (cf. figure 6.11).

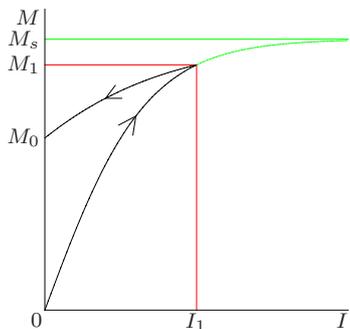


FIG. 6.10.

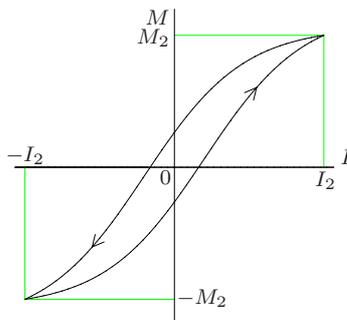


FIG. 6.11.

FIG. 6.10 – Variation très lente.

FIG. 6.11 – Variation périodique.

**Comment démagnétiser des clefs, un tournevis, ...** On place l'objet magnétisé dans le solénoïde à la place du noyau. On envoie le courant sinusoïdal  $I(t) = I_2 \cos(\omega t)$  d'intensité suffisante pour obtenir un cycle d'hystérésis symétrique par rapport à l'origine. Puis on diminue lentement (par rapport à  $T$ ) l'amplitude  $I_2$  jusqu'à la valeur 0. L'aimantation varie de façon quasi-périodique (période  $T$ ) avec une amplitude qui tend vers 0. L'objet est alors démagnétisé.

### Interprétations microscopique

À l'échelle microscopique, il y a dans les cristaux ferromagnétiques des forces qui tendent à aligner les spins de deux atomes voisins parallèlement et dans le même sens. Dans le cas du paramagnétisme, au dessus du point de Curie ( $T > T_c$ ), par suite de l'agitation thermique le système des spins est dans un état désordonné (cf. figure 6.12). Dans le cas du ferromagnétisme (à une température  $T$  inférieure à la température de Curie  $T_c$ ), ces spins coopèrent entre-eux et forment un état ordonné en s'alignant spontanément tous dans la même direction et le même sens (cf. figure 6.13).

Il se forme des domaines magnétiques (domaines de Weiss<sup>7</sup>) de volume de  $10^{-12}$  à  $10^{-8}$  m<sup>3</sup> aimantés dans une certaine direction. Lorsque le noyau de fer n'est pas aimanté, cela signifie en réalité que la direction de l'aimantation microscopique varie d'un domaine de Weiss à l'autre, résultant en une aimantation globale nulle. Lorsque le courant  $I$  dans le solénoïde augmente, les aimantations des divers domaines s'alignent avec le champ magnétique  $\vec{B}$  dans le solénoïde, résultant en une aimantation globale non nulle. Cette aimantation prend la valeur  $M_s$  pour un alignement total (cf. figure 6.14).

7. Pierre Ernest Weiss (1865-1940)

Une fois le courant  $I$  ramené à 0, l'échantillon est devenu un aimant dans lequel les aimantations des divers domaines restent en partie alignées.

FIG. 6.12 – État paramagnétique.

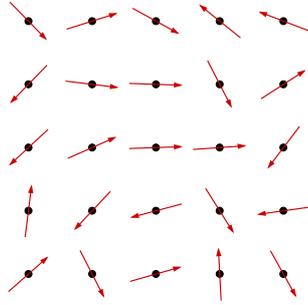


FIG. 6.12.

FIG. 6.13 – État ferromagnétique.

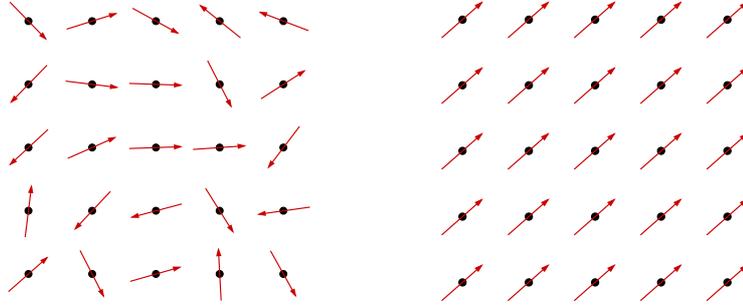


FIG. 6.13.

FIG. 6.14 – Orientation de l'aimantation dans 4 domaines de Weiss avec le champ  $\vec{B}$  croissant. La taille des domaines peut également varier.

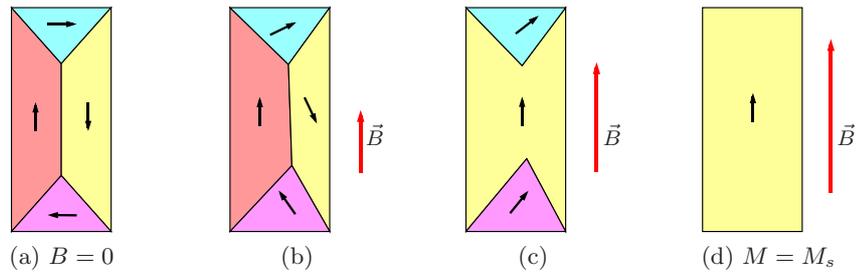


FIG. 6.15 – État antiferromagnétique.

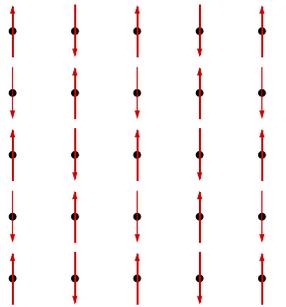


FIG. 6.15.

FIG. 6.16 – État ferrimagnétique.

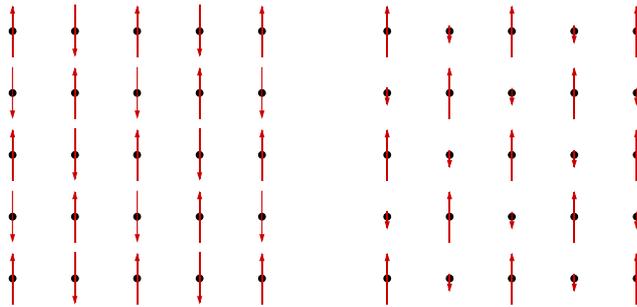


FIG. 6.16.

### Antiferromagnétisme

Dans un cristal antiferromagnétique, les spins de deux atomes voisins sont parallèles et de sens opposés (cf. figure 6.15). Exemple : oxyde de manganèse (MnO).

### Ferrimagnétisme

Dans un cristal ferrimagnétique, les spins de deux atomes voisins sont parallèles et de sens opposés, mais leurs moments magnétiques sont différents en module (cf. figure 6.16). Un tel corps peut devenir un aimant. Exemples :  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ , ferrites.

#### 6.3.4 Courants de magnétisation

Nous admettrons le théorème suivant, valable pour tout corps aimanté (pas nécessairement lhi).

**Théorème 6.2 (courants de magnétisation (ou ampériens)).** Soit  $\vec{M}(\vec{r}, t)$  le vecteur aimantation.

Les courants de magnétisation dans le milieu sont

$$\vec{j}_m = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \quad (6.59)$$

et les courants surfaciques de magnétisation sur le bord du milieu sont

$$\vec{j}_{m\sigma} = \vec{M} \wedge \vec{n} \quad (6.60)$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal sortant du milieu.

*Remarque 1.* Soit un cylindre d'axe  $Oz$ , de section  $S$ , de hauteur  $h$  et de magnétisation uniforme  $\vec{M} = M\vec{u}_z$  parallèle à son axe (cf. figure 6.17). Les équations (6.59) et (6.60) donnent

$$\vec{j}_m = 0, \quad \vec{j}_{m\sigma} = \vec{M} \wedge \vec{u}_r = M\vec{u}_\theta. \quad (6.61)$$

Pour vérifier ce résultat, calculons le moment dipolaire magnétique de la répartition de courants (6.61). Il y a un courant  $I = j_{m\sigma}h = Mh$  sur la surface du cylindre. Le moment magnétique (1.87) associé à ce courant est  $\vec{m} = SI\vec{u}_z = ShM\vec{u}_z$ . C'est bien le moment dipolaire magnétique d'un milieu d'aimantation uniforme  $M\vec{u}_z$  et de volume  $Sh$ .

*Remarque 2.* Une démonstration du théorème consiste à montrer que le champ électromagnétique créé par la répartition de dipôles magnétiques  $\vec{M}d\tau$  est identique au champ électromagnétique créé par la répartition des courants (6.59) et (6.60).

#### 6.3.5 Équations de Maxwell dans les milieux

Les **équations de Maxwell dans les milieux** diélectriques et magnétiques décrivent comment le champ électromagnétique est créé par les charges et courants libres du système. Elles sont adaptées à la description pratique des systèmes, puisque habituellement l'expérimentateur contrôle, à l'aide de générateurs électriques, les charges et courants libres du système, tandis que

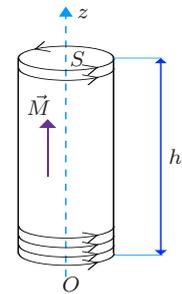


FIG. 6.17 – Cylindre de magnétisation uniforme.

les charges et courants liés (de polarisation et d'aimantation) dépendent des propriétés des matériaux.

Dans les milieux magnétiques, on doit modifier l'équation de Maxwell-Ampère. Les autres équations de Maxwell des milieux diélectriques (cf. section 6.2.8) s'appliquent.

### Excitation magnétique

Dans un milieu magnétique, le courant volumique  $\vec{j}$  est la somme du courant volumique libre  $\vec{j}_a$ , du courant volumique de polarisation  $\vec{j}_p$  et du courant volumique de magnétisation  $\vec{j}_m$ . Rajoutant le courant volumique de magnétisation  $\vec{j}_m$  dans l'équation de Maxwell-Ampère (6.34) on obtient en utilisant (6.59)

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0(\vec{j}_a + \vec{j}_m) + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}_a + \mu_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{M} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.62)$$

soit

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_a + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (6.63)$$

Il apparaît le champ

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (6.64)$$

appelé **excitation magnétique** (unité : A m<sup>-1</sup>). L'équation de **Maxwell-Ampère** prend la forme

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_a + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (6.65)$$

qui ne contient que les courants libres.

La forme intégrale de l'équation (6.65) est

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot \vec{dl} = I_a + I_d \quad (6.66)$$

avec

$$I_a = \iint_S \vec{j}_a \cdot \vec{n} dS \quad \text{et} \quad I_d = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS. \quad (6.67)$$

Elle exprime la circulation du champ excitation magnétique le long d'un contour fermé  $\Gamma = \partial S$  en fonction du courant libre  $I_a$  et du courant de déplacement  $I_d$  qui traversent la surface  $S$ .

La relation de passage associée est

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_{a\sigma}. \quad (6.68)$$

**Tableau des lois**

La table 6.6 récapitule les équations de Maxwell dans les milieux diélectriques et magnétiques avec leurs formes intégrales et leurs relations de passage. Pour obtenir un système complet d'équations on doit donner les relations liant  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  d'une part et  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  d'autre part. Pour un milieu lhi, la relation entre  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  a été vue section 6.2.7 et la relation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  est étudiée dans la section suivante.

**Relation entre B et H**

Dans un milieu magnétique linéaire, homogène et isotrope, nous avons, en utilisant l'équation (6.58),

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{1 - \alpha}{\mu_0} \vec{B} \quad (6.69)$$

ce qui est de la forme

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (6.70)$$

où les grandeurs  $\mu$  et  $\mu_r$  sont appelées respectivement **perméabilités absolue et relative** du milieu. Comme

$$\mu = \mu_0 \mu_r = \frac{\mu_0}{1 - \alpha} \quad (6.71)$$

on a  $\mu > \mu_0$  pour un milieu paramagnétique et  $\mu < \mu_0$  pour un milieu diamagnétique.

*Remarque.* Dans un milieu magnétique lhi on a

$$\vec{M} = \alpha \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \alpha \mu_r \vec{H} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \vec{H} \quad (6.72)$$

soit

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \text{avec} \quad \chi_m = \frac{\alpha}{1 - \alpha}. \quad (6.73)$$

La grandeur sans dimension  $\chi_m$  est appelée la **susceptibilité magnétique du milieu**.

TAB. 6.6 – Équations de Maxwell dans les milieux diélectriques et magnétiques : formes locales, intégrales et relations de passage.

formes locales	formes intégrales	relations de passage
Maxwell-Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_a$	théorème de Gauss $\iint_{\partial V} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q_{aV}$ $Q_{aV} = \iiint_V \rho_a d\tau$	$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_a$
Maxwell-flux $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Flux de $\vec{B}$ conservatif $\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$	$\vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$
Maxwell-Faraday $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	loi de Faraday (induction) $e = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ $\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$	$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$
Maxwell-Ampère $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_a + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	théorème d'Ampère $\oint_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_a + I_d$ $I_a = \iint_S \vec{j}_a \cdot \vec{n} dS$ $I_d = \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$	$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_{a\sigma}$

## 7

# Ondes électromagnétiques dans les milieux

## 7.1 Ondes électromagnétiques dans les milieux lhi non magnétiques

Nous étudions des champs électromagnétiques sinusoïdaux de pulsation  $\omega = 2\pi\nu$  (de longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = c/\nu$ ). Ces champs dépendent du temps par le facteur  $e^{i\omega t}$  en représentation complexe. La dérivée partielle par rapport au temps se réduit à la multiplication par  $i\omega$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv i\omega. \quad (7.1)$$

Considérons un milieu diélectrique lhi non magnétique dans lequel il n'y a ni charges ni courants libres :

$$\rho_a = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j}_a = 0. \quad (7.2)$$

Nous écrivons les équations de Maxwell de la section 6.2.8 en notation complexe et pour la pulsation  $\omega$  :

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{E}} = 0 \quad (7.3)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{B}} = \frac{i\omega\epsilon_r}{c^2} \hat{\vec{E}} \quad (7.4)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{B}} = 0 \quad (7.5)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{E}} = -i\omega \hat{\vec{B}}. \quad (7.6)$$

Noter que  $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega)$  dépend de  $\omega$ . Prenons le rotationnel de l'équation (7.6) et utilisons (7.4) :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{E}}) = -i\omega (\vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{B}}) = \frac{\epsilon_r\omega^2}{c^2} \hat{\vec{E}}. \quad (7.7)$$

D'après (7.3), le laplacien vectoriel de  $\hat{\vec{E}}$  se réduit à

$$\Delta \hat{\vec{E}} = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{E}})}_0 - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{E}}) = -\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \hat{\vec{E}}). \quad (7.8)$$

On obtient l'équation de propagation (ou équation d'ondes) pour le champ  $\hat{\vec{E}}$  (**équation d'Helmholtz**<sup>1</sup>):

$$\Delta \hat{\vec{E}} + \frac{\epsilon_r \omega^2}{c^2} \hat{\vec{E}} = 0. \quad (7.9)$$

milieu	indice $n$
air	1,000293
eau	1,33
verre crown	1,52
diamant	2,42

TAB. 7.1 – Indices de réfraction  $n$  de quelques corps à la température  $T = 293\text{ K}$  et à la pression atmosphérique pour la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = 590\text{ nm}$ .

### 7.1.1 Milieu transparent

Pour  $\epsilon_r$  réel, posons

$$v = \frac{c}{n} \quad \text{avec} \quad n = \sqrt{\epsilon_r}. \quad (7.10)$$

Le nombre  $n$  est appelé l'**indice de réfraction** du milieu (cf. table 7.1). Les équations de Maxwell et les ondes dans le diélectrique s'obtiennent à partir du cas du vide par le remplacement de  $c$  par  $v$ . En particulier, l'équation de propagation est

$$\Delta \hat{\vec{E}} + \frac{\omega^2}{v^2} \hat{\vec{E}} = 0 \quad (7.11)$$

et l'onde

$$\hat{\vec{E}} = A e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x, \quad \hat{\vec{B}} = \frac{A}{v} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{v} = \frac{n\omega}{c} \quad (7.12)$$

est une onde plane progressive harmonique (OPPH) polarisée rectilignement suivant  $Ox$  et de vecteur d'onde  $\vec{k} = k\vec{u}_z$ . La longueur d'onde dans le milieu  $\lambda = 2\pi/k = \lambda_0/n$  est la longueur d'onde dans le vide divisée par  $n$ . La vitesse  $v$  et l'indice  $n$  dépendent de la fréquence : c'est le phénomène de **dispersion** (cf. table 7.2). La vitesse  $v$  est la **vitesse de phase** des ondes. Le milieu est transparent (propagation sans atténuation).

### 7.1.2 Milieu absorbant

Pour  $\epsilon_r = \epsilon'_r - i\epsilon''_r$  complexe, avec  $\epsilon'_r > 0$  et  $\epsilon''_r > 0$  posons

$$n = n' - in'' = \sqrt{\epsilon_r} \quad \text{avec} \quad n' > 0, n'' > 0 \quad (7.13)$$

et

$$k = k' - ik'' = \frac{\omega}{c}(n' - in''). \quad (7.14)$$

1. Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894)

L'onde (7.12) s'écrit

$$\hat{\vec{E}} = Ae^{i(\omega t - kz)}\vec{u}_x = Ae^{-k''z}e^{i(\omega t - k'z)}\vec{u}_x, \quad \hat{\vec{B}} = \frac{nA}{c}e^{i(\omega t - kz)}\vec{u}_y. \quad (7.15)$$

Le champ électrique réel est (pour  $A$  réel)

$$\vec{E} = Ae^{-k''z} \cos(\omega t - k'z)\vec{u}_x. \quad (7.16)$$

Son amplitude réelle  $Ae^{-k''z}$  décroît exponentiellement avec la distance  $z$  parcourue par l'onde. Cela signifie que le milieu est absorbant et que l'onde se propage avec **atténuation**. Cette atténuation est visible sur la figure 7.1 qui représente le champ électrique réel est en fonction de  $z$  à un instant  $t$  donné.

La grandeur  $k''$  caractérise l'atténuation de l'onde. Plus  $k''$  est grand et plus l'onde est absorbée. La grandeur  $k'$  caractérise les oscillations spatiales du champ qui sont pseudo-périodiques de période spatiale  $2\pi/k'$ .

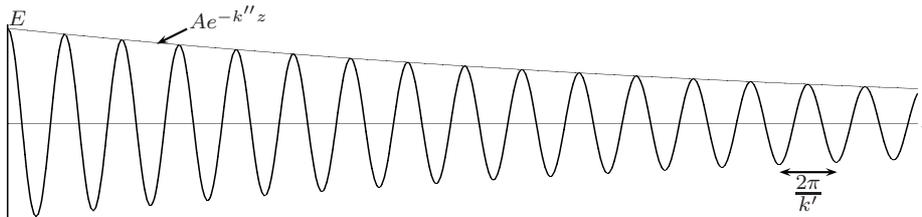


FIG. 7.1 – Onde électromagnétique dans un milieu absorbant. Courbes en fonction de  $z$   
 – du champ électrique réel à un instant  $t$  donné;  
 – de son amplitude  $Ae^{-k''z}$ .

### Loi de Beer

L'éclairement  $I$  de l'onde est proportionnel au carré de l'amplitude. On en déduit qu'il varie avec la profondeur suivant la loi exponentielle

$$I(z) = I_0e^{-\alpha z} \quad \text{avec} \quad \alpha = 2k''. \quad (7.17)$$

Cette propriété est appelée **loi de Beer**<sup>2</sup> et la grandeur  $\alpha = 2k''$  (unité :  $m^{-1}$ ) est le **coefficient d'atténuation** de l'onde. Le flux lumineux est divisé par  $e$  après une longueur parcourue  $1/\alpha$ . L'énergie perdue par l'onde peut se transformer en lumière diffusée (réémise dans toutes les directions) ou en chaleur qui chauffe le milieu.

Le coefficient d'atténuation de l'air est plus grand aux courtes longueurs d'onde (cf. table 7.3). La lumière solaire perd plus de lumière bleue que de lumière rouge en traversant l'atmosphère. Le soleil est rouge au couchant (l'épaisseur d'air traversée augmente) et le ciel bleu (l'énergie absorbée est diffusée) pour cette raison.

$\lambda_0$ (nm)	$\alpha$ ( $m^{-1}$ )
400	$4,0 \cdot 10^{-5}$
550	$1,1 \cdot 10^{-5}$
800	$0,25 \cdot 10^{-5}$

TAB. 7.3 – Coefficient d'atténuation  $\alpha$  de l'air en fonction de la longueur d'onde  $\lambda_0$  (dans les conditions normales).

2. Wilhelm Beer (1797-1850)

## 7.2 Réflexion et transmission sur un dioptre plan

### 7.2.1 Lois de Snell-Descartes

Un **dioptr**e est une surface optique qui sépare deux milieux transparents. Nous étudions le système comportant deux milieux diélectriques lhi d'indices  $n_1$  et  $n_2$  et occupant les demi-espaces  $x > 0$  et  $x < 0$  respectivement. Le dioptre forme le plan  $Oyz$ .

Les lois de Snell-Descartes de l'optique géométrique déterminent les rayons lumineux réfléchi et transmis (= réfracté) correspondant à un rayon lumineux incident sur le dioptre. Sur la figure 7.2, on a tracé un rayon incident qui arrive sur le dioptre au point  $O$  et on a pris  $Oxz$  comme **plan d'incidence** (plan qui contient le rayon incident et la normale au dioptre). Soient  $i_1$  ( $0 \leq i_1 \leq \pi/2$ ),  $i_r$  ( $0 \leq i_r \leq \pi/2$ ) et  $i_2$  ( $0 \leq i_2 \leq \pi/2$ ) les angles d'incidence, de réflexion et de réfraction respectivement (angles entre la normale au dioptre et le rayon ; ces angles ne sont pas comptés algébriquement).

Les **lois de Snell-Descartes** sont :

- les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence ;
- les angles d'incidence et de réflexion sont égaux :

$$i_r = i_1 ; \quad (7.18)$$

- les angles d'incidence et de réfraction sont liés par :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \quad (7.19)$$

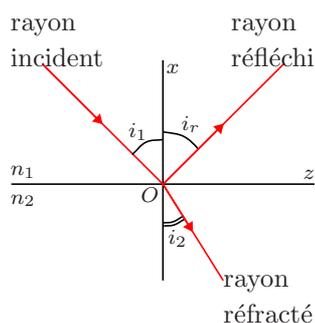


FIG. 7.2 – Les lois de Snell-Descartes.

On peut écrire la loi (7.19) en fonction des célérités  $v_1 = \frac{c}{n_1}$  et  $v_2 = \frac{c}{n_2}$  des ondes dans les deux milieux :

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}. \quad (7.20)$$

Sous cette forme les lois de Snell-Descartes s'appliquent aussi aux ondes acoustiques.

Rappelons le phénomène de la **réflexion totale**. Si  $n_1 > n_2$ , soit  $i^*$  l'angle donné par

$$n_1 \sin i^* = n_2. \quad (7.21)$$

Les rayons incidents d'angles d'incidence  $i_1$  tels que

$$\frac{\pi}{2} \geq i_1 > i^* \quad (7.22)$$

sont totalement réfléchis par le dioptre. Ce phénomène est prédit par les lois de Snell-Descartes, puisque l'équation (7.19) donne alors  $\sin i_2 > 1$ , ce qui indique qu'il n'y a pas de rayon réfracté.

### 7.2.2 Démonstration des lois de Snell-Descartes

Nous nous proposons de déduire les lois de Snell-Descartes de la théorie de Maxwell. Le système envisagé (dioptré plan) est invariant par translations parallèles au plan  $Oyz$  et par changement de l'origine du temps. Comme dans la section 5.3, ces symétries impliquent la propriété suivante. Il existe des ondes électromagnétiques (modes propres) du système de la forme

$$\hat{\vec{E}}(x, y, z, t) = \vec{e}(x)e^{i(\omega t - \beta y - \gamma z)} \quad \hat{\vec{B}}(x, y, z, t) = \vec{b}(x)e^{i(\omega t - \beta y - \gamma z)} \quad (7.23)$$

et la solution générale est une superposition de telles ondes. On forme une onde de la forme (7.23) en superposant, dans le milieu 1 (pour  $x > 0$ ), deux OPPH :

- une onde **incidente** de vecteur d'onde

$$\vec{k}_i = k_i \vec{u}_i = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad k_i = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \frac{n_1 \omega}{c} \quad (7.24)$$

( $\alpha < 0$  pour que l'onde soit incidente sur le dioptré) et de champ

$$\hat{\vec{E}}_i(\vec{r}, t) = \hat{A}_i e^{i(\omega t - \alpha x - \beta y - \gamma z)}, \quad \hat{\vec{B}}_i = \frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \hat{\vec{E}}_i; \quad (7.25)$$

- une onde **réfléchie** de vecteur d'onde

$$\vec{k}_r = k_r \vec{u}_r = \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad k_r = \sqrt{\alpha_r^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \frac{n_1 \omega}{c} \quad (7.26)$$

( $\alpha_r > 0$  pour que l'onde soit réfléchie par le dioptré) et de champ

$$\hat{\vec{E}}_r(\vec{r}, t) = \hat{A}_r e^{i(\omega t - \alpha_r x - \beta y - \gamma z)}, \quad \hat{\vec{B}}_r = \frac{\vec{k}_r}{\omega} \wedge \hat{\vec{E}}_r. \quad (7.27)$$

Dans le milieu 2 (pour  $x < 0$ ), l'onde **transmise** est une OPPH de vecteur d'onde

$$\vec{k}_t = k_t \vec{u}_t = \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad k_t = \sqrt{\alpha_t^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \frac{n_2 \omega}{c} \quad (7.28)$$

( $\alpha_t < 0$ ) et de champ

$$\hat{\vec{E}}_t(\vec{r}, t) = \hat{A}_t e^{i(\omega t - \alpha_t x - \beta y - \gamma z)}, \quad \hat{\vec{B}}_t = \frac{\vec{k}_t}{\omega} \wedge \hat{\vec{E}}_t. \quad (7.29)$$

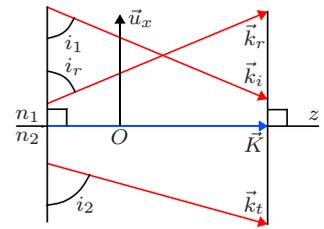


FIG. 7.3 – Égalité des projections des vecteurs d'ondes.

Les vecteurs d'onde des trois OPPH ont la même projection  $\vec{K}$  sur le dioptré (cf. figure 7.3):

$$\vec{K} = \text{Proj}_{Oyz} \vec{k}_i = \text{Proj}_{Oyz} \vec{k}_r = \text{Proj}_{Oyz} \vec{k}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (7.30)$$

C'est à cette condition qu'on obtient la dépendance en  $y$  et  $z$  du mode propre (7.23). Les fonctions  $\vec{e}(x)$  et  $\vec{b}(x)$  sont explicitement

$$\vec{e}(x) = \begin{cases} \hat{A}_i e^{-i\alpha x} + \hat{A}_r e^{-i\alpha_r x} & \text{si } x > 0 \\ \hat{A}_t e^{-i\alpha_t x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (7.31)$$

et

$$\vec{b}(x) = \begin{cases} \frac{\vec{k}_i}{\omega} \wedge \hat{A}_i e^{-i\alpha x} + \frac{\vec{k}_r}{\omega} \wedge \hat{A}_r e^{-i\alpha_r x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{\vec{k}_t}{\omega} \wedge \hat{A}_t e^{-i\alpha_t x} & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (7.32)$$

Les lois de Snell-Descartes résultent de la propriété (7.30) avec le fait que les vecteurs d'onde sont parallèles aux rayons.

- Les trois vecteurs d'onde  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_r$  et  $\vec{k}_t$  sont dans le plan  $(\vec{K}, \vec{u}_x)$ . C'est la première loi (les rayons réfléchi et réfracté sont dans le plan d'incidence).
- L'équation (7.30) donne aussi

$$K = k_i \sin i_1 = k_r \sin i_r = k_t \sin i_2 \quad (7.33)$$

ou encore, en utilisant  $k_i = k_r = \frac{n_1 \omega}{c}$  et  $k_t = \frac{n_2 \omega}{c}$ ,

$$i_1 = i_r \quad \text{et} \quad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \quad (7.34)$$

Cela démontre les équations (7.18) et (7.19) et termine la démonstration des lois de Snell-Descartes.

### 7.2.3 Ondes évanescentes (cas de la réflexion totale)

Déterminons les composantes  $\alpha_r$  et  $\alpha_t$  des vecteurs d'onde  $\vec{k}_r$  et  $\vec{k}_t$ . La relation  $k_i = k_r$  donne  $\alpha_r = -\alpha$ . Pour  $\alpha_t$ , l'équation (7.28) donne

$$\alpha_t^2 = \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} - (\beta^2 + \gamma^2). \quad (7.35)$$

Or

$$\beta^2 + \gamma^2 = K^2 = k_i^2 \sin^2 i_1 = \frac{n_1^2 \omega^2 \sin^2 i_1}{c^2}. \quad (7.36)$$

D'où

$$\alpha_t^2 = \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} - \frac{n_1^2 \omega^2 \sin^2 i_1}{c^2} \quad (7.37)$$

et

$$\alpha_t = -\frac{\omega}{c} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1} = -\frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1}. \quad (7.38)$$

Dans le cas de la réflexion totale, si  $n_1 \sin i_1 > n_2$ , il faut prendre

$$\alpha_t = i\alpha_t'' \quad \text{avec} \quad \alpha_t'' = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 \sin^2 i_1 - n_2^2} \quad (7.39)$$

et le champ électrique de l'onde transmise est de la forme

$$\hat{E}_t(\vec{r}, t) = \hat{A}_t e^{i(\omega t - \alpha_t x - \beta y - \gamma z)} = \hat{A}_t e^{\alpha_t'' x} e^{i(\omega t - \beta y - \gamma z)}. \quad (7.40)$$

C'est une **onde évanescente** qui décroît exponentiellement dans le milieu 2 (pour  $x$  variant de 0 à  $-\infty$ ).

L'autre racine de l'équation (7.37),  $\alpha_t = -i\alpha_t''$ , donne une onde dont l'amplitude  $\hat{A}_t e^{-\alpha_t'' x}$  croît exponentiellement avec la profondeur dans le milieu 2 (pour  $x \rightarrow -\infty$ ). Une telle onde ne peut pas exister.

Les surfaces d'onde, définies comme les surfaces équiphases du champ électrique (7.40), sont les plans perpendiculaires au vecteur  $\vec{K}$ . L'amplitude  $\hat{A}_t e^{\alpha_t'' x}$  de cette onde varie exponentiellement dans une direction ( $Ox$ ) perpendiculaire à son vecteur d'onde  $\vec{K}$  ( $Ox \perp \vec{K}$ ). L'onde est donc inhomogène et d'un type différent de l'onde avec atténuation (7.15) qui est homogène et dont l'amplitude décroît dans la direction de propagation.

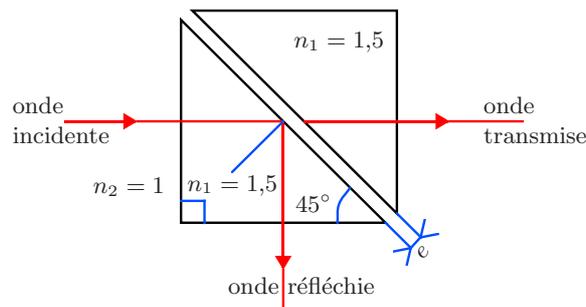


FIG. 7.4 – Réflexion totale frustrée.

On peut observer indirectement cette onde évanescente à l'aide de deux prismes identiques en verre, droits et isocèles. Pour  $n_1 = 1,5$  (verre) et  $n_2 = 1$  (air), l'angle limite de la réflexion totale est  $i^* = \text{Arc sin}(n_2/n_1) = 42^\circ$ . Dans l'expérience de la figure 7.4, la lumière arrive sur la grande face du prisme (hypoténuse) sous l'angle d'incidence  $i_1 = 45^\circ$  et subit la réflexion totale. Si l'hypoténuse du deuxième prisme est placée à la distance  $e$  de celle du premier prisme, l'onde évanescente est captée et une partie de la lumière est transmise. C'est le phénomène de la **réflexion totale frustrée**. Le flux

transmis  $\Phi_t$  varie avec  $e$  comme le carré de l'amplitude du champ à la distance  $e$ . Numériquement, pour  $i_1 = 45^\circ$ ,  $n_1 = 1,5$  et  $n_2 = 1$  l'équation (7.39) donne  $\alpha_t'' = 0,785/\lambda_0$  ( $\lambda_0$  est la longueur d'onde de la lumière dans le vide) et

$$\Phi_t = \Phi_0 \exp(-2\alpha_t'' e) = \Phi_0 \exp(-e/0,64\lambda_0). \quad (7.41)$$

L'effet ne peut donc être observé que si  $e \lesssim$  quelques  $\lambda_0$ .

#### 7.2.4 Conditions aux limites

L'onde donnée par (7.23), (7.31) et (7.32) doit vérifier les relations de passage (6.44–6.47). On suppose qu'il n'y a ni charges ni courants libres ( $\sigma_a = 0$  et  $\vec{j}_{a\sigma} = 0$ ) et on utilise  $\epsilon_1 = \epsilon_0 n_1^2$  et  $\epsilon_2 = \epsilon_0 n_2^2$ :

$$\vec{u}_x \cdot [n_1^2 \vec{e}(0^+) - n_2^2 \vec{e}(0^-)] = 0 \quad (7.42)$$

$$\vec{u}_x \wedge [\vec{b}(0^+) - \vec{b}(0^-)] = 0 \quad (7.43)$$

$$\vec{u}_x \cdot [\vec{b}(0^+) - \vec{b}(0^-)] = 0 \quad (7.44)$$

$$\vec{u}_x \wedge [\vec{e}(0^+) - \vec{e}(0^-)] = 0. \quad (7.45)$$

La relation (7.45) signifie que la projection de  $\vec{e}(x)$  sur le dioptré est continue. La relation (7.42) relie les composantes normales au dioptré de  $\vec{e}(0^\pm)$ . Les relations (7.43) et (7.44) impliquent que  $\vec{b}(x)$  est continu en  $x = 0$ . Ces relations permettent de déterminer les amplitudes  $\hat{A}_r$  et  $\hat{A}_t$  en fonction de  $\hat{A}_i$ .

#### Autre justification des lois de Snell-Descartes

Les problèmes de réflexion et transmission d'ondes électromagnétiques ou acoustiques par un dioptré plan  $x = 0$  sont souvent posés de la façon suivante.

Une onde plane progressive sinusoïdale se propage du milieu 1 vers le milieu 2 et est décrite en notation complexe par

$$\hat{s}_i = \hat{A}_i e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} = \hat{A}_i e^{i(\omega t - \alpha x - \beta y - \gamma z)}. \quad (7.46)$$

(Le signal scalaire  $\hat{s}_i$  peut être remplacé par un signal vectoriel suivant le type d'ondes.) A l'interface entre les deux milieux, cette onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans le milieu 1, notée  $\hat{s}_r$ , et à une onde transmise dans le milieu 2, notée  $\hat{s}_t$ .

On admettra que les ondes réfléchie et transmise sont des ondes planes progressives sinusoïdales de vecteurs d'onde  $\vec{k}_r$  et  $\vec{k}_t$  et d'amplitudes  $\hat{A}_r$  et  $\hat{A}_t$  respectivement.

Montrer que les ondes réfléchie et transmise sont de même pulsation  $\omega$  que l'onde incidente.

Montrer que les vecteurs d'onde  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_r$  et  $\vec{k}_t$  ont la même projection  $\vec{K}$  sur le dioptre.

Nous avons vu comment les symétries du système permettent de répondre à ces questions (cf. section 7.2.2) et d'en déduire les lois de Snell-Descartes. Une autre façon de répondre consiste à utiliser les conditions aux limites. On écrit pour les ondes réfléchie et transmise

$$\hat{s}_r = \hat{A}_r e^{i(\omega' t - \alpha' x - \beta' y - \gamma' z)}, \quad \hat{s}_t = \hat{A}_t e^{i(\omega'' t - \alpha'' x - \beta'' y - \gamma'' z)}. \quad (7.47)$$

Si les conditions aux limites imposent la continuité du signal en  $x = 0$  on aura,  $\forall t, \forall y$  et  $\forall z$ ,

$$\hat{A}_i e^{i(\omega t - \beta y - \gamma z)} + \hat{A}_r e^{i(\omega' t - \beta' y - \gamma' z)} = \hat{A}_t e^{i(\omega'' t - \beta'' y - \gamma'' z)}. \quad (7.48)$$

Avec l'hypothèse que  $\hat{A}_i \neq 0$ ,  $\hat{A}_r \neq 0$  et  $\hat{A}_t \neq 0$ , ce n'est possible que pour

$$\omega = \omega' = \omega'', \quad \beta = \beta' = \beta'' \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma' = \gamma''. \quad (7.49)$$

### 7.2.5 Amplitudes réfléchie et transmise en incidence normale

Considérons le cas où l'onde tombe sous incidence normale ( $\beta = \gamma = 0$ ). Les vecteurs d'onde incident, réfléchi et réfracté sont respectivement

$$\vec{k}_i = -\frac{n_1 \omega}{c} \vec{u}_x, \quad \vec{k}_r = \frac{n_1 \omega}{c} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{k}_t = -\frac{n_2 \omega}{c} \vec{u}_x. \quad (7.50)$$

Par suite de la transversalité des OPPH, les amplitudes  $\hat{A}_i$ ,  $\hat{A}_r$  et  $\hat{A}_t$  sont perpendiculaires à  $\vec{u}_x$  (cf. figure 7.5).

La relation (7.45) donne la continuité de  $\vec{e}(x)$  en  $x = 0$  (cas particulier de l'incidence normale)

$$\hat{A}_i + \hat{A}_r = \hat{A}_t. \quad (7.51)$$

La continuité de  $\vec{b}(x)$  en  $x = 0$  s'écrit

$$-n_1 \vec{u}_x \wedge \hat{A}_i + n_1 \vec{u}_x \wedge \hat{A}_r = -n_2 \vec{u}_x \wedge \hat{A}_t \quad (7.52)$$

soit

$$n_1 \hat{A}_i - n_1 \hat{A}_r = n_2 \hat{A}_t. \quad (7.53)$$

Le système des équations (7.51) et (7.53) donne

$$\hat{A}_r = \hat{r} \hat{A}_i \quad \text{et} \quad \hat{A}_t = \hat{t} \hat{A}_i \quad (7.54)$$

où les **coefficients de réflexion et transmission** sont respectivement

$$\hat{r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad \hat{t} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \quad (7.55)$$

Les vecteurs  $\hat{A}_i$ ,  $\hat{A}_r$  et  $\hat{A}_t$  sont parallèles (cela résulte aussi de considérations de symétrie). Les équations (7.55) sont appelées **formules de Fresnel**<sup>3</sup> en incidence normale.

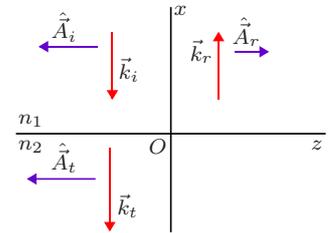


FIG. 7.5 – Cas de l'incidence normale.

3. Augustin-Jean Fresnel (1788-1827)

### 7.2.6 Pouvoir réflecteur et pouvoir de transmission en incidence normale

Calculons l'éclairement, sur une surface normale aux rayons, de chacune des ondes incidente, réfléchie et transmise. Cet éclairement est la moyenne temporelle du module du vecteur de Poynting. Pour l'onde incidente, le vecteur de Poynting est, si  $\hat{A}_i = \vec{A}_i$  est réel,

$$\vec{P}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = -\frac{n_1 E_i^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x = -\frac{n_1 A_i^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + k_i x) \vec{u}_x. \quad (7.56)$$

L'éclairement est donc pour l'onde incidente

$$\mathcal{E}_i = \langle P_i \rangle = \frac{n_1 A_i^2}{2\mu_0 c}. \quad (7.57)$$

On trouve de même les éclairements des ondes réfléchies et transmises :

$$\mathcal{E}_r = \frac{n_1 A_r^2}{2\mu_0 c} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_t = \frac{n_2 A_t^2}{2\mu_0 c}. \quad (7.58)$$

Le **pouvoir réflecteur** et le **pouvoir de transmission** sont respectivement les rapports (cas de l'incidence normale où les faisceaux éclairent la même surface du dioptré)

$$R = \frac{\mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i} = \hat{r}^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_i} = \frac{n_2 \hat{t}^2}{n_1} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (7.59)$$

Ils vérifient la relation

$$R + T = 1 \quad (7.60)$$

qui exprime la conservation de l'énergie.

### 7.2.7 Exemple numérique

Considérons un dioptré séparant l'air (indice 1) et un verre d'indice 1,5. Si le rayon lumineux incident se propage dans l'air on a

$$n_1 = 1 \quad n_2 = 1,5 \quad \hat{r} = -0,2 \quad \hat{t} = 0,8 \quad R = 0,04 \quad T = 0,96. \quad (7.61)$$

La **réflexion externe** (cas  $n_1 < n_2$ ) se fait avec changement de signe ( $\hat{r} < 0$ ) et donc avec un déphasage de  $\pi$ .

Si le rayon lumineux incident se propage dans le verre on a

$$n_1 = 1,5 \quad n_2 = 1 \quad \hat{r} = 0,2 \quad \hat{t} = 1,2 \quad R = 0,04 \quad T = 0,96. \quad (7.62)$$

La **réflexion interne** (cas  $n_1 > n_2$ ) se fait sans changement de signe ( $\hat{r} > 0$ ). Un faisceau lumineux qui traverse 5 lentilles perd 4% de sa puissance sur chacun des 10 dioptrés air-verre ou verre-air. Sa puissance en sortie n'est plus que  $(0,96)^{10} = 0,66$  fois sa puissance en entrée (34% de pertes par réflexion). Ces pertes peuvent être diminuées par un traitement anti-reflet des surfaces optiques.

## Annexe A

# Corrigé des exercices

### Chapitre 1

#### 1.1 Courant volumique et courant surfacique

1. L'équation (1.6) donne l'intensité du courant qui traverse le plan  $P$  :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = j (\pi r^2 - \pi(r-a)^2) \approx 2\pi r a j. \quad (\text{A.1})$$

On a donc

$$\vec{j} = \frac{I \vec{u}_z}{2\pi r a}. \quad (\text{A.2})$$

2. On considère que pour  $a \rightarrow 0$  l'élément de volume du conducteur  $d\tau = ar d\theta dz$  et l'élément de surface  $dS = r d\theta dz$  contiennent les mêmes charges. Les équations (1.3) et (1.8) donnent

$$\sum_{a=1}^N q_a \vec{v}_a = \vec{j}_\sigma dS = \vec{j} d\tau. \quad (\text{A.3})$$

On en déduit, puisque  $d\tau = a dS$ , que

$$\vec{j}_\sigma = a \vec{j} = \frac{I \vec{u}_z}{2\pi r}. \quad (\text{A.4})$$

Une autre méthode pour obtenir cette relation consiste à remarquer que l'intensité  $I$  à travers le plan  $P$  s'obtient en multipliant le courant surfacique  $j_\sigma$  par la longueur  $2\pi r$  de l'intersection du plan  $P$  et de la surface cylindrique.

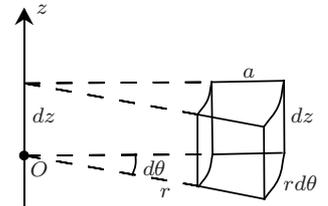


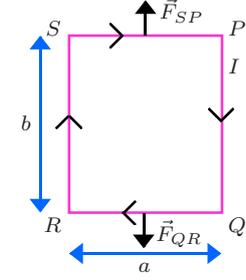
FIG. A.1 – Élément de volume du conducteur.

1.2 1. Le rotationnel du champ  $\vec{E} = E_\rho \vec{u}_\rho + E_\phi \vec{u}_\phi + E_z \vec{u}_z$  se calcule en coordonnées cylindriques par

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} \\ \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) - \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{A}{\rho} \right) \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{A}{\rho} \right) \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Le champ est bien de rotationnel nul (la propriété 4 est vraie).

2. La circulation de  $\vec{E}$  sur le cercle  $\mathcal{C}$  est  $2\pi A \neq 0$ . Le champ n'est donc pas à circulation conservative (les propriétés 1–3 sont fausses).



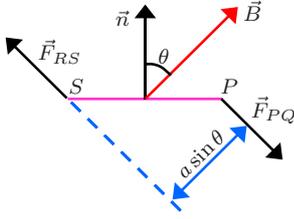
1.3 1. La divergence du champ  $\vec{B} = B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta + B_\phi \vec{u}_\phi$  se calcule en coordonnées sphériques par

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{A}{r^2} \right) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Le champ est bien de divergence nulle (la propriété 4 est vraie).

On trouvera une autre démonstration de  $\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{u}_r}{r^2} = \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$  dans l'équation (1.99).

2. Le flux de  $\vec{B}$  sortant de la sphère  $\Sigma$  est  $4\pi A \neq 0$ . Le champ n'est donc pas à flux conservatif (les propriétés 1–3 sont fausses).



1.4 [Forces sur un circuit rectangulaire] Quelques réponses (cf. figure A.2) :  $\vec{F} = \vec{F}_{PQ} + \vec{F}_{QR} + \vec{F}_{RS} + \vec{F}_{SP} = 0$ ,  $F_{PQ} = F_{RS} = BIb$ ,  $\mathcal{M} = BIba \sin \theta$ ,  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$  avec  $\vec{m} = abI\vec{n}$ .

FIG. A.2 – Forces sur un circuit rectangulaire.

## Chapitre 2

2.1 1. La charge électrique du condensateur  $Q(t)$  est

$$Q(t) = CU(t). \quad (\text{A.7})$$

Le courant est  $I(t) = dQ(t)/dt$  d'où

$$I(t) = C \frac{dU}{dt}. \quad (\text{A.8})$$

Soit  $\vec{u}$  le vecteur unitaire perpendiculaire aux armatures qui va de  $A$  vers  $B$ . Le champ électrique vaut entre les armatures  $A$  et  $B$  (il est nul ailleurs)

$$\vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 \Sigma} \vec{u} = \frac{CU(t)}{\epsilon_0 \Sigma} \vec{u}. \quad (\text{A.9})$$

2. Soit  $S''$  la partie de la surface  $S'$  située entre les armatures du condensateur. Le flux du champ électrique à travers  $S'$  est

$$\Phi_e = \iint_{S'} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{CU(t)}{\epsilon_0 \Sigma} \underbrace{\iint_{S''} \vec{u} \cdot \vec{n} dS}_{=\Sigma}. \quad (\text{A.10})$$

On obtient la valeur de la dernière intégrale en remarquant que  $\vec{u} \cdot \vec{n} dS$  est l'aire de la projection de l'élément  $dS$  sur l'armature  $A$ . On a donc

$$\Phi_e = \frac{CU(t)}{\epsilon_0}. \quad (\text{A.11})$$

On en déduit

$$I_{S'd} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = C \frac{dU(t)}{dt} \quad (\text{A.12})$$

qui est bien égal à  $I(t)$ .

## Chapitre 4

4.1 Prenons le rotationnel de l'équation (4.4) et utilisons (4.3) :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (\text{A.13})$$

D'après (4.2), le laplacien vectoriel de  $\vec{B}$  se réduit à

$$\Delta \vec{B} = \vec{\nabla} (\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}_0) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \quad (\text{A.14})$$

et (A.13) montre que le champ  $\vec{B}$  vérifie l'équation de d'Alembert

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0.} \quad (\text{A.15})$$

4.2 Dans une région de l'espace qui ne contient ni charges ni courants ( $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$ ), les potentiels scalaire et vectoriel en jauge de Lorenz vérifient

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.16})$$

et

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.17})$$

Les identités

$$\Delta(\vec{\nabla} V) = \vec{\nabla}(\Delta V) \quad \text{et} \quad \Delta(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge (\Delta \vec{A}) \quad (\text{A.18})$$

se montrent facilement en coordonnées cartésiennes. Remarquons aussi que le laplacien commute avec la dérivation partielle par rapport au temps. On obtient pour  $\vec{B}$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \Delta(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \underbrace{\left( \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right)}_{= 0 \text{ d'après (A.17)}} = 0$$

et pour  $\vec{E}$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \Delta \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V \right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \underbrace{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}}_{= 0 \text{ d'après (A.17)}} \right) - \vec{\nabla} \left( \underbrace{\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}}_{= 0 \text{ d'après (A.16)}} \right) = 0. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi que les champs  $\vec{B}$  et  $\vec{E}$  vérifient l'équation de d'Alembert.

**4.3** Portons le champ (4.26) dans les équations de Maxwell (4.1–4.4). On calcule en posant  $u = z - ct$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{u}_z \cdot \vec{F}'(u) = \frac{d}{du} [\vec{u}_z \cdot \vec{F}'(u)] = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\vec{u}_z \cdot [\vec{u}_z \wedge \vec{F}'(u)]}{c} = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{u}_z \wedge \vec{F}'(u), \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{u}_z \wedge \vec{F}'(u), \quad (\text{A.21})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{u}_z \wedge \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{F}'(u)}{c} = -\frac{\vec{F}'(u)}{c} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -c\vec{F}'(u). \quad (\text{A.22})$$

#### 4.4 Effet Compton

**1.** Dans le triangle  $ABC$  (cf. figure A.3), la longueur du côté  $BC$  s'écrit en fonction des longueurs des deux autres côtés et de l'angle en  $A$

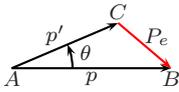


FIG. A.3 – Calcul de  $P_e$ .

$$P_e = \sqrt{p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta} \quad (\text{A.23})$$

qui équivaut à (4.51). On peut aussi obtenir (4.51) algébriquement par

$$P_e^2 = \vec{P}_e \cdot \vec{P}_e = (\vec{p} - \vec{p}') \cdot (\vec{p} - \vec{p}') = p^2 + p'^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{p}'. \quad (\text{A.24})$$

**2.** On élimine le radical dans (4.50) pour obtenir

$$m^2 c^4 + P_e^2 c^2 = (mc^2 + (p - p')c)^2 = m^2 c^4 + 2mc^3(p - p') + (p - p')^2 c^2 \quad (\text{A.25})$$

$$P_e^2 = 2mc(p - p') + p^2 + p'^2 - 2pp'. \quad (\text{A.26})$$

On élimine  $P_e^2$  entre (4.51) et (A.26)

$$p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta = 2mc(p - p') + p^2 + p'^2 - 2pp' \quad (\text{A.27})$$

$$mc(p - p') - pp' = -pp' \cos \theta \quad (\text{A.28})$$

qui est la relation demandée.

**3.** En divisant (A.28) par  $mcpp'$  on obtient

$$\frac{p - p'}{pp'} = \frac{1}{mc}(1 - \cos \theta) = \frac{2}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (\text{A.29})$$

Comme  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{p'} - \frac{h}{p} = h \frac{p - p'}{pp'}$  on en déduit la formule de Compton

$$\boxed{\Delta\lambda = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}.} \quad (\text{A.30})$$

Pour  $\theta = \pi/2$  on a  $\Delta\lambda = h/mc = \lambda_C = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ m}$  et  $\lambda' = 5,42 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ . L'effet Compton s'observe seulement avec des rayons X et  $\gamma$ . Il est inobservable dans le visible car alors  $\lambda \gg \lambda_C$  et  $\lambda' \approx \lambda$ .

## Annexe B

# Note historique

Les lois de Maxwell unifient les théories de l'électricité, du magnétisme et de la lumière. Avant 1820, ces disciplines étaient distinctes. En 1820, Oersted<sup>1</sup> découvre l'existence du champ magnétique créé par les courants, établissant ainsi un lien entre l'électricité et le magnétisme. Faraday met en évidence l'induction électromagnétique (1831) et la rotation de la polarisation de la lumière dans un champ magnétique (effet Faraday, 1845).

Maxwell établit les bases de sa théorie en 1861–2. Le mémoire *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* qu'il présente en 1864 à la Royal Society en fait un exposé axiomatique. Maxwell prédit l'existence d'ondes électromagnétiques de vitesse de propagation  $3,1 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ . Il est impressionné par le fait que cette vitesse est proche de la vitesse de la lumière mesurée par Fizeau<sup>2</sup> en 1849 ( $3,15 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ) puis par Foucault en 1862 ( $2,98 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ ). Ayant montré que la propagation des ondes électromagnétiques est similaire à celle de la lumière, il n'hésite pas à identifier les deux phénomènes. Il dit

we can scarcely avoid the inference that light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena.

La confirmation expérimentale des ondes électromagnétiques est due à Hertz<sup>3</sup> (1887).

La théorie de Maxwell de l'électromagnétisme, avec la mécanique newtonienne et la thermodynamique forment la physique classique. À la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, les lois fondamentales de la physique semblaient toutes découvertes et la physique classique suffisait d'un point de vue pratique, mais, cependant, il y avait des difficultés lorsqu'on allait jusqu'au bout de ses conséquences logiques. Voici quelques unes de ces difficultés.

1. **Stabilité des atomes.** La théorie de Maxwell prévoit que les électrons

---

1. Hans Christian Oersted (Ørsted) (1777-1851)

2. Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819-1896)

3. Heinrich Rudolph Hertz (1857-1894)

en mouvement autour du noyau rayonnent. Comment un atome peut-il être stable? *Nota* : L'existence des atomes n'était pas généralement acceptée à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle ; Planck lui-même n'y croyait pas.

2. **L'effet photoélectrique.** L'énergie des électrons émis croît avec la fréquence de la lumière et non avec l'intensité de la lumière.
3. **La vitesse de la lumière.** La théorie de la mécanique de Newton prédit que la vitesse de la lumière dépend de la vitesse de l'observateur. L'expérience de Michelson<sup>4</sup> et Morley<sup>5</sup> (1887) montrait que la vitesse de la lumière était la même pour deux observateurs inertiels en mouvement l'un par rapport à l'autre. Ce résultat était expliqué en postulant l'existence d'un milieu, l'*éther*, doté de propriétés étranges.
4. **La précession de Mercure.** Le mouvement non elliptique de Mercure autour du Soleil contredisait la théorie de la gravitation de Newton.

De nos jours ces difficultés sont résolues par

- 1–2. la **mécanique quantique**, qui interdit le rayonnement continu et prédit un rayonnement quantifié lorsque l'atome passe d'un niveau d'énergie à un autre par émission d'un photon ;
3. la **relativité restreinte**, qui abandonne la notion d'espace et temps absolu (l'existence de l'éther est maintenant rejetée) ;
4. la **relativité générale**, qui n'interprète plus la gravitation comme une force, mais comme une géométrie. La matière engendre une courbure de l'espace-temps et inversement la géométrie définit les géodésiques (qui remplacent les lignes droites) que doivent suivre les particules.

L'interaction électromagnétique est une des quatre interactions fondamentales (gravitation, électromagnétisme, interactions nucléaires forte et faible). Les théories admises maintenant pour ces interactions sont les suivantes.

- La gravitation est décrite avec succès par la théorie de la relativité générale d'Einstein.
- Le **modèle standard** est une théorie unifiée décrivant les particules et les trois interactions électromagnétique, nucléaires forte et faible dans le monde de l'infiniment petit. C'est une théorie des champs quantiques qui comprend le champ électromagnétique et une vingtaine d'autres champs. Les particules élémentaires sont les quanta des champs (le **photon** pour le champ électromagnétique).

Les prédictions de ces théories sont en accord avec les données expérimentales, mais les physiciens aimeraient trouver un modèle plus général qui incorporerait le modèle standard ainsi que la gravitation.

---

4. Albert Abraham Michelson (1852-1931)

5. Edward Williams Morley (1838-1923)

## Annexe C

# Constantes physiques

permittivité électrique du vide	$\epsilon_0 \approx 8,854\,187\,817\,10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi\,10^{-7} \text{ N A}^{-2}$
vitesse de la lumière dans le vide	$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$
constante de Planck	$h \approx 6,626\,075\,10^{-34} \text{ J s}$
charge électrique élémentaire	$e \approx 1,602\,177\,10^{-19} \text{ C}$
masse de l'électron	$m_e \approx 9,109\,389\,10^{-31} \text{ kg}$
masse du proton	$m_p \approx 1,672\,623\,10^{-27} \text{ kg}$
magnéton de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = \frac{eh}{4\pi m_e}$ $\approx 9,274\,015\,10^{-24} \text{ JT}^{-1}$

## Annexe D

# Index des principaux symboles avec leurs unités

$\square$	d'Alembertien (unité : $\text{m}^{-2}$ ) 47, 60
$\vec{A}$	potentiel vecteur (unité : $\text{T m}$ ou $\text{V m}^{-1} \text{s}$ ) 21, 43
$\vec{B}$	champ magnétique (unité : $\text{T}$ ) 7
$C$	capacité (unité : $\text{F}$ ) 55, 95
$\vec{d}$	moment dipolaire électrique (unité : $\text{C m}$ ) 18
$\vec{D}$	vecteur déplacement électrique (unité : $\text{C m}^{-2}$ ) 98
$e$	force électromotrice d'induction (unité : $\text{V}$ ) 28
$E$	énergie (unité : $\text{J}$ ) 66
$\vec{E}$	champ électrique (unité : $\text{V m}^{-1}$ ) 7
$\vec{F}$	force (unité : $\text{N}$ ) 11, 13
$\vec{H}$	excitation magnétique (unité : $\text{A m}^{-1}$ ) 108
$I$	intensité du courant (unité : $\text{A}$ ) 9, 10
$I$	éclairage (unité : $\text{W m}^{-2}$ ) 69
$\vec{j}$	courant volumique (unité : $\text{A m}^{-2}$ ) 8
$\vec{j}_a$	courant volumique libre (unité : $\text{A m}^{-2}$ ) 92
$\vec{j}_m$	courant volumique de magnétisation (unité : $\text{A m}^{-2}$ ) 92, 107
$\vec{j}_{m\sigma}$	courant surfacique de magnétisation (unité : $\text{A m}^{-1}$ ) 92, 107
$\vec{j}_p$	courant volumique de polarisation (unité : $\text{A m}^{-2}$ ) 92, 97
$\vec{j}_\sigma$	courant surfacique (unité : $\text{A m}^{-1}$ ) 9
$\vec{k}$	vecteur d'onde (unité : $\text{m}^{-1}$ ) 60
$L$	inductance propre (unité : $\text{H}$ ) 56
$L_{ab}$	coefficient d'inductance mutuelle (unité : $\text{H}$ ) 58
$\vec{m}$	moment dipolaire magnétique (unité : $\text{A m}^2$ ou $\text{J T}^{-1}$ ) 24
$\vec{M}$	vecteur aimantation (unité : $\text{A m}^{-1}$ ) 103

$\vec{M}$	moment des forces (unité : N m) 20, 27
$n$	indice de réfraction (sans dimension) 112
$\vec{n}_{12}$	vecteur unitaire (sans dimension) 38
$\vec{p}$	quantité de mouvement (unité : kg m s <sup>-1</sup> ) 66
$\vec{P}$	vecteur de Poynting (unité : W m <sup>-2</sup> ) 53
$\vec{P}$	polarisation diélectrique (unité : C m <sup>-2</sup> ) 92
$P_a$	puissance (unité : W) 49
$dP_c/d\tau$	puissance par unité de volume (unité : W m <sup>-3</sup> ) 49
$q, Q$	charge électrique (unité : C) 8
$T_c$	température de Curie (unité : K) 93, 104
$u$	densité d'énergie électromagnétique (unité : J m <sup>-3</sup> ) 53
$V, \phi$	potentiel (électrostatique, scalaire) (unité : V) 14, 43
$v_g$	vitesse de groupe (unité : m s <sup>-1</sup> ) 89
$v_\phi, v$	vitesse de phase (unité : m s <sup>-1</sup> ) 89, 112
$W$	énergie (unité : J) 20, 27
$\alpha$	coefficient d'atténuation (unité : m <sup>-1</sup> ) 113
$\epsilon$	permittivité absolue (unité : F m <sup>-1</sup> ) 96, 98
$\epsilon_r$	permittivité relative (sans dimension) 96, 98
$\lambda$	densité linéique de charge (unité : C m <sup>-1</sup> ) 10
$\lambda$	longueur d'onde (unité : m) 35
$\mu$	perméabilité absolue (unité : N A <sup>-2</sup> ) 109
$\mu_r$	perméabilité relative (sans dimension) 109
$\nu$	fréquence (unité : Hz) 71
$\nu_{nc}$	fréquence de coupure (unité : Hz) 86
$\rho$	densité volumique de charge (= charge volumique) (unité : C m <sup>-3</sup> ) 8
$\rho_a$	charge volumique libre (unité : C m <sup>-3</sup> ) 92, 98
$\rho_p$	charge volumique de polarisation (unité : C m <sup>-3</sup> ) 92, 97
$\sigma$	conductivité (unité : S m <sup>-1</sup> ) 78
$\sigma$	densité surfacique de charge (= charge surfacique) (unité : C m <sup>-2</sup> ) 9
$\sigma_a$	charge surfacique libre (unité : C m <sup>-2</sup> ) 92
$\sigma_p$	charge surfacique de polarisation (unité : C m <sup>-2</sup> ) 92, 97
$\phi, V$	potentiel (électrostatique, scalaire) (unité : V) 14, 43
$\Phi_B$	flux du champ magnétique (unité : Wb) 28
$\chi, \chi(\omega)$	susceptibilité électrique (sans dimension) 94
$\omega$	pulsation (unité : s <sup>-1</sup> ) 60

## Annexe E

### Index des noms propres

d'Alembert.....	47	Lorentz.....	11
Ampère.....	8	Lorenz.....	46
Beer.....	113	Malus.....	70
Biot.....	21	Maxwell.....	7
Bohr.....	25	Michelson.....	127
Compton.....	66	Morley.....	127
Coulomb.....	8	Newton.....	28
Curie.....	93	Oersted.....	126
d'Alembert.....	47	Ohm.....	78
Descartes.....	85	Ostrogradski.....	14
Dirac.....	25	Planck.....	66
Einstein.....	67	Poisson.....	47
Faraday.....	7	Poynting.....	52
Fizeau.....	126	Röntgen.....	74
Foucault.....	30	Savart.....	21
Fresnel.....	119	Seignette.....	93
Gauss.....	14	Siemens.....	78
Helmholtz.....	112	Snell.....	85
Henry.....	56	Stokes.....	16
Hertz.....	126	Tesla.....	7
Joule.....	50	Volta.....	7
Laplace.....	12	Weber.....	28
Lenz.....	32	Weiss.....	105