

Préparation à l'Agrégation de Sciences Physiques (ENS Cachan)

Cours d'optique anisotrope

(version 2.5 – 12 heures)

F. TREUSSART

Janvier 2008

Table des matières

1	Propagation d'une onde plane dans un milieu diélectrique anisotrope	9
1.1	Tenseur de permittivité diélectrique $[\varepsilon_r]$	9
1.2	Structure d'une onde plane dans le milieu anisotrope	10
1.3	Propagation de l'onde pour une direction de la normale au plan d'onde donnée	11
1.3.1	Equation satisfaite par la vitesse de phase v_φ : équation de FRESNEL	11
1.3.2	Vitesses de phases et lignes neutres de propagation	12
1.3.3	Ellipsoïde des indices	13
1.3.4	Surface des indices. Axes optiques.	15
1.3.5	Milieux uniaxes	16
1.3.6	Construction de DESCARTES des normales aux surfaces d'onde lors d'une réfraction	17
1.4	Propagation de l'onde pour une direction de rayon donnée	19
1.4.1	Relation vectorielle inverse $\mathbf{E}(\mathbf{D})$	19
1.4.2	Surface d'onde	20
1.4.3	Application à la construction des rayons réfractés au passage par une interface : construction d'HUYGENS	21
1.5	Exemples de dispositifs polarisant par biréfringence	21
1.5.1	Le prisme de WOLLASTON	22
1.5.2	Le prisme de NICOL	22
2	Lames minces biréfringentes. Interférences en lumière polarisée	25
2.1	Action d'une lame mince à faces parallèles sur une onde plane polarisée rectilignement arrivant sous <i>incidence normale</i>	25
2.1.1	Lignes neutres et axes propres de la lame	25
2.1.2	Champ électrique à la sortie de la lame	26
2.1.3	Cas particuliers de lames	27
2.1.4	Cas particuliers d'orientation de la polarisation incidente	28
2.2	Exemple d'analyseur de polarisation linéaire : l'analyseur à pénombre	30
2.3	Interférences en lumière polarisée	31
2.3.1	Conditions d'observation	31
2.3.2	Franges d'une lame à faces parallèles éclairée perpendiculairement à sa face d'entrée (Fig. 2.7)	31
2.3.3	Lame éclairée sous incidence normale en lumière blanche	33
2.4	Mesure de la biréfringence de lames minces	34
2.4.1	Compensateur de BABINET	36
2.4.2	Méthode de la lame $\lambda/4$	39
2.5	Lames minces en éclairage convergent	42

2.5.1	Franges d'interférences pour une lame taillée perpendiculairement à l'axe optique	42
2.5.2	Origine des lignes sombres (la croix noire)	43
3	Biréfringence induite par un champ électrique	45
3.1	Introduction	45
3.2	Généralités sur les effets électro-optiques	45
3.2.1	Hypothèse du régime optique linéaire	45
3.2.2	Déformation de l'ellipsoïde des indices sous l'effet du champ électrique	46
3.3	Biréfringence induite linéaire : effet POCKELS	47
3.3.1	Notations de VOIGT	47
3.3.2	Exemple de modulateur électrooptique en configuration d'électrodes transverses : le niobate de lithium (LiNbO_3)	47
3.3.3	Application à la modulation	51
3.4	Biréfringence induite quadratique : effet KERR	51
4	Biréfringence circulaire	53
4.1	Historique	53
4.2	Modélisation microscopique élémentaire	53
4.3	Théorie macroscopique de l'activité optique naturelle	54
4.3.1	Relation entre D et E dans un milieu optiquement actif	54
4.3.2	Tenseur et vecteur gyration	55
4.3.3	Propagation d'une onde plane électromagnétique dans un cristal de quartz Q_{\perp}	56
4.4	Action d'une lame optiquement active sur une polarisation linéaire	57
4.5	Mesure de la biréfringence circulaire	59
4.5.1	Couleurs de biréfringence circulaire	59
4.5.2	Mesures de $\Delta n_c(\lambda)$ à l'aide du biquartz de SOLEIL	59
4.6	Biréfringence induite : effet FARADAY	60
A	$[\varepsilon_r]$ est un tenseur symétrique réel	63
B	D satisfait une équation aux valeurs propres pour la matrice $[\varepsilon_r^{-1}]$	65
C	Calcul de l'intensité des franges d'interférences en lumière polarisée	67
D	Tenseur $[\rho]$ pour un milieu isotrope	69

Introduction

L'objet de ce cours est d'étudier la propagation de la lumière dans des milieux *homogènes* (i.e. présentant les mêmes propriétés en tout point) *anisotropes*, c'est à dire tels que l'indice de réfraction dépend de la direction de propagation.

L'arrangement des atomes dans certains cristaux fait ressortir des directions privilégiées comme indiqué sur la figure 1 (b) représentant la structure cristallographique de la calcite (CaCO_3).

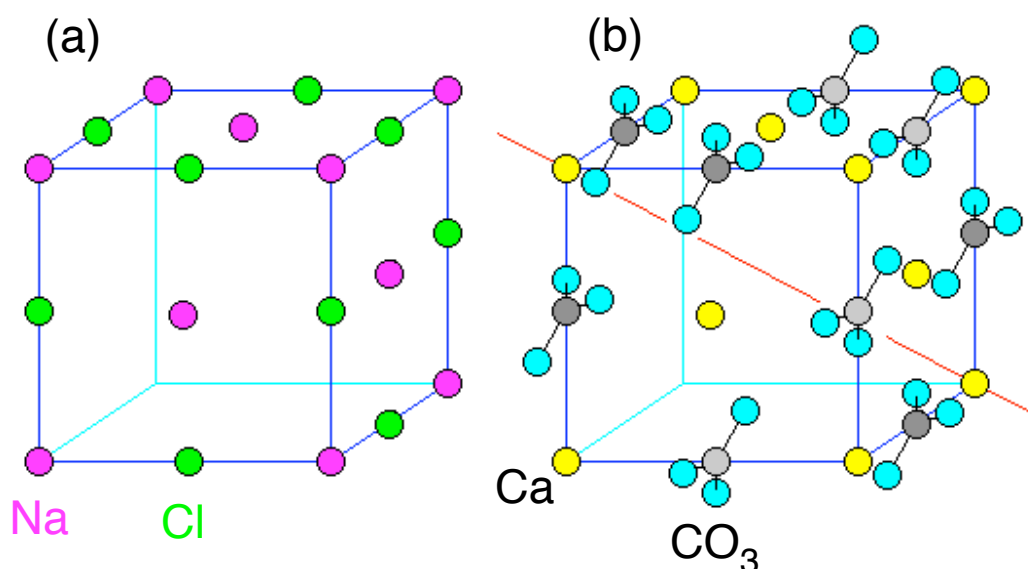


FIG. 1 – (a) Structure cristallographique du chlorure de sodium (NaCl). La maille élémentaire de NaCl est cubique. Il ne présente pas d'anisotropie optique. (b) Structure cristallographique de la calcite (CaCO_3) en regard de celle du chlorure de sodium avec lequel elle présente quelques analogies. Le groupement CO_3 rompt la symétrie cubique : la maille élémentaire de la calcite est rhomboédrique. En **rouge** est représenté l'axe optique, de symétrie 3 (*Schémas d'après www.uwgb.edu/dutchs/PETROLOGY/Calcite%20Structure.HTM*).

L'anisotropie se manifeste expérimentalement par une biréfringence, c'est-à-dire le dédoublement d'un faisceau lumineux qui traverse le matériau. Si le matériau est suffisamment épais, on peut voir des objets dédoublés à travers lui.

→ *Expérience historique de BARTHOLINUS (Université de Copenhague, 1669)*. Le schéma de l'expérience est donné sur la figure 2.

Les observations de double réfraction de BARTHOLINUS interprétées en 1690 par HUYGENS

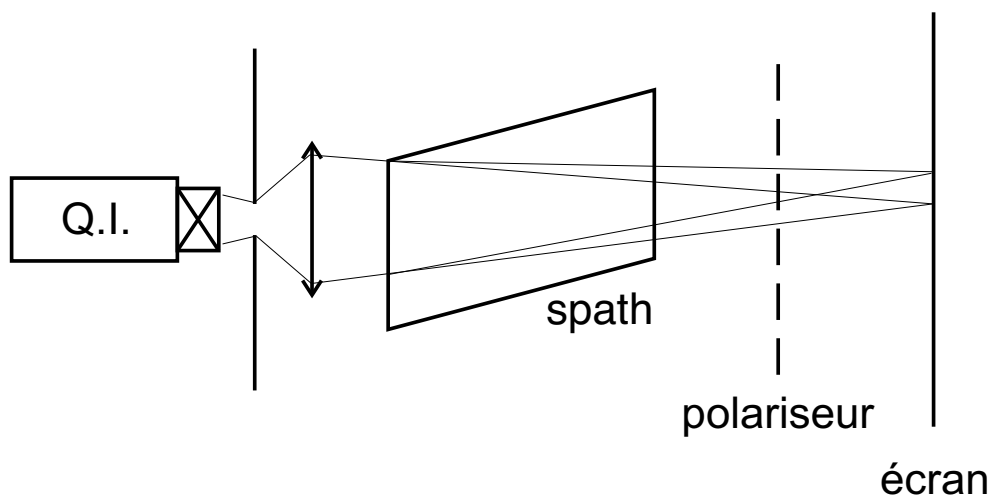


FIG. 2 – Expérience de BARTHOLINUS mettant en évidence la double réfraction.

dans le cadre de sa théorie des ondelettes émises de sources secondaires (surface d’onde sphérique pour le rayon ordinaire, elliptique pour l’extraordinaire), mais la notion de polarisation n’était pas encore née. C’est MALUS qui l’introduisit bien plus tard, en 1808, et il fallut attendre YOUNG, en 1817, pour que soit reconnu le caractère transverse de la vibration lumineuse, puis 1824 pour que FRESNEL en propose une théorie, avant que les travaux de MAXWELL ne permettent d’expliquer les observations grâce à la notion de champ électromagnétique.

Dans tout ce cours, nous limiterons notre étude aux matériaux *linéaires, homogènes, transparents*. Sous l’effet du champ électrique \mathbf{E} , il apparaît dans le matériau une polarisation volumique \mathcal{P} , qui dépend de \mathbf{E} .

Les deux vecteurs ne sont pas alignés puisque le matériau est anisotrope : la relation qui les lie est donc *tensorielle* à coefficients réels (puisque nous négligeons l’absorption). Le vecteur polarisation vérifie également $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathcal{P}$, où \mathbf{D} est le vecteur déplacement. En champ électrique \mathbf{E} “faible”, nous verrons que $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ peut être développé en série de TAYLOR de $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ ce qui donne¹ :

$$D_j = \varepsilon_0 \left([\varepsilon_r]_{jl} E_l + \gamma_{jlm} \frac{\partial E_l}{\partial x_m} + \dots \right) \quad (1)$$

Nous retrouvons, au premier ordre en \mathbf{E} la *relation constitutive* “habituelle” (celle de la réponse linéaire) pour les milieux diélectriques : $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$, mais ici cette relation est généralisée au cas de milieux anisotropes.

Notons que :

- $[\varepsilon]$ est le tenseur de *permittivité* diélectrique du milieu anisotrope. Ce tenseur de rang 2 rend compte de l’*anisotropie linéaire*, celle qui donne lieu à des états propres linéaires de polarisation.
- $[\gamma]$, tenseur de rang 3, rend compte de l’*anisotropie circulaire*, c’est à dire celle pour laquelle les états propres de polarisation sont les polarisations circulaires droite ou gauche.

Citons quelques exemples de matériaux anisotropes.

- Anisotropie linéaire
 - Cristaux naturels :

¹sommation implicite sur les indices répétés

- la calcite (CaCO_3), et donc le spath
- le quartz (SiO_2),
- le fluorure de magnésium MgF_2 , utilisé en couches minces pour des traitements anti-reflets
- Les milieux désordonnés tels que les fluides ou les solides amorphes ne présentent pas d'anisotropie, mais une fois ordonnés, comme dans le cas des cristaux liquides, il apparaît une biréfringence.
- Biréfringence provoquée : par des contraintes extérieures, telles que des contraintes mécaniques (photoélasticité) ou électriques (effet POCKELS). Ces contraintes appliquées à des matériaux isotropes les rendent biréfringents.
- Anisotropie circulaire
 - Cristaux naturels :
L'anisotropie circulaire est due à l'absence de centre de symétrie du cristal (il peut néanmoins exister des plans de symétrie). Le quartz, par exemple, présente une anisotropie circulaire (en plus de son anisotropie linéaire) : en effet, les molécules de SiO_2 sont arrangées en hélices droites ou gauches (*cf.* chapitre 4).
 - Molécules en solution :
C'est le cas des molécules chirales comme le saccharose, la plupart des molécules biologiques et en particulier les acides aminés. Remarquons d'ailleurs que dans ce dernier cas, un seul énantiomère est présent dans la Nature.
 - Anisotropie circulaire provoquée :
par un champ magnétique : c'est l'effet magnéto-optique dit de FARADAY, que l'on peut rencontrer dans un barreau de verre (isotrope) de type flint².

Les chapitres 1 à 3 seront consacrés à l'étude de l'anisotropie linéaire et le chapitre 4 à celle de l'anisotropie circulaire qu'on appelle aussi pouvoir rotatoire ou activité optique.

²Silice (SiO_2) dopé au potassium et au plomb, éventuellement aussi au fluor et au barium. Un verre flint est fortement réfringent, contrairement aux verres de type crown.

Chapitre 1

Propagation d'une onde plane dans un milieu diélectrique anisotrope

Nous cherchons d'abord à établir la forme du tenseur de permittivité diélectrique du matériau.

1.1 Tenseur de permittivité diélectrique $[\varepsilon_r]$

Les champs électrique et magnétique dans le matériau satisfont

– les équations de MAXWELL dans le milieu :

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} & \operatorname{div}\mathbf{D} &= 0 \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} & \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

– la relation constitutive (ne tenant pas compte de l'activité optique)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0[\varepsilon_r]\mathbf{E} \quad (1.1)$$

– une loi de conservation d'énergie, vérifiée par la densité d'énergie électromagnétique $w \equiv w_e + w_m$, où $w_e = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$ et $w_m = \frac{1}{2}\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$ et le vecteur de POYNTING $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$:

$$\frac{dw}{dt} + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0 \quad (1.2)$$

De cette loi de conservation, et du fait que le milieu considéré est non magnétique et parfaitement transparent, il découle que le tenseur $[\varepsilon_r]$ est symétrique réel (*cf.* Annexe A).

La matrice 3×3 représentant le tenseur $[\varepsilon_r]$ est donc *diagonalisable* dans une base orthogonale d'états propres. Dans cette base, nous notons :

$$[\varepsilon_r] = \begin{pmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{pmatrix}$$

où les n_i sont les “indices propres” du milieu. On utilisera également par la suite les vitesses de phases propres : $v_i \equiv \frac{c}{n_i}$ si bien que la relation 1.1 devient :

$$D_i = \varepsilon_0 \frac{c^2}{v_i^2} E_i = \frac{1}{\mu_0 v_i^2} E_i \quad (1.3)$$

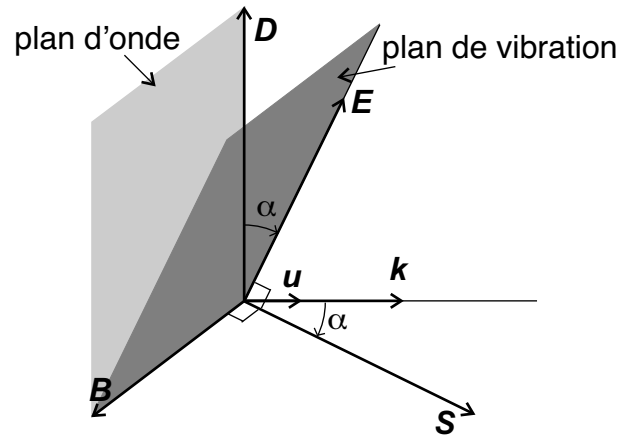


FIG. 1.1 – Structure d'une onde plane se propageant dans un milieu anisotrope

3 cas de figure peuvent se produire :

(a) $n_1 \neq n_2 \neq n_3$: le milieu est dit *biaxe*.

$D_i = \varepsilon_0 n_i^2 E_i$ ($i = 1, 2$ ou 3) et les 3 “vecteurs propres” $\mathbf{E}_i / \|\mathbf{E}_i\|$ forment une base orthogonale¹ : on appelle ces trois directions les *directions principales*.

(b) $n_2 = n_3 \neq n_1$: le milieu est dit *uniaxe*.

\mathbf{E}_1 définit une direction perpendiculaire à $(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$

(c) $n_1 = n_2 = n_3$: toutes les directions sont équivalentes et le milieu est *isotrope*.

1.2 Structure d'une onde plane dans le milieu anisotrope

Supposons qu'une onde plane (de pulsation ω et de vecteur propre \mathbf{k}) se propage dans le milieu anisotrope. Le champ électrique s'écrit donc, en notations complexes :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

où \mathbf{E}_0 peut éventuellement être complexe (cas d'une polarisation circulaire).

Les champs \mathbf{D} , \mathbf{B} et \mathbf{H} peuvent être écrits de façon similaire.

Les équations de MAXWELL pour une telle onde prennent alors la forme :

$$\begin{aligned} i\mathbf{k} \times \mathbf{E} &= i\omega \mathbf{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0, \\ i\mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -i\mu_0 \omega \mathbf{D} \quad \text{et} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

On en déduit que \mathbf{k} est orthogonal au plan (\mathbf{B}, \mathbf{D}) qui forme donc le *plan d'onde*, \mathbf{E} appartient au plan (\mathbf{k}, \mathbf{D}) . Le plan (\mathbf{E}, \mathbf{B}) est appelé *plan de vibration* (Fig 1.1).

La direction du rayon lumineux est donnée par le vecteur de POYNTING $\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$ et n'est pas confondue avec \mathbf{k} comme dans les milieux isotropes.

¹diagonalisation d'une matrice symétrique réelle

1.3 Propagation de l'onde pour une direction de la normale au plan d'onde donnée

1.3 Propagation de l'onde pour une direction de la normale au plan d'onde donnée

Nous allons chercher quelles sont les ondes planes qui sont susceptibles de se propager dans le milieu anisotrope selon une direction donnée de la normale à leur plan d'onde. Plus précisément, nous cherchons avec quelle vitesse de phase v_φ de telles ondes peuvent se propager dans ce milieu.

1.3.1 Equation satisfaite par la vitesse de phase v_φ : équation de FRESNEL

Du système d'équations (1.4), on déduit "l'équation d'onde" :

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{\omega^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{\mu_0 \omega^2} [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k} - k^2 \mathbf{E}].$$

Introduisons le vecteur unitaire $\mathbf{u} \equiv \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|}$ de la normale au plan d'onde et $v_\varphi(\mathbf{k}) \equiv \frac{\omega}{\|\mathbf{k}\|}$, la vitesse de phase dans la direction de propagation du plan d'onde. Cette dernière satisfait alors :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\mu_0 v_\varphi^2(\mathbf{k})} [\mathbf{E} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{u}]. \quad (1.5)$$

De cette équation couplée à la relation constitutive (1.3), on peut alors déduire les vitesses de phase $v_\varphi(\mathbf{k})$ de l'onde selon une direction de normale \mathbf{u} fixée.

Pour faciliter le calcul, on choisit **les axes principaux** comme système de coordonnées. Les composantes D_i de \mathbf{D} obéissent alors simultanément aux relations (1.3) et (1.5) :

$$D_i = \frac{1}{\mu_0 v_i^2} E_i = \frac{1}{\mu_0 v_\varphi^2} [E_i - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) u_i],$$

d'où l'on tire chaque composante de \mathbf{E} :

$$E_i = \frac{1/v_\varphi^2}{1/v_\varphi^2 - 1/v_i^2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) u_i. \quad (1.6)$$

En ajoutant les produits $E_i u_i$ ($i = 1, 2, 3$), il vient $\mathbf{u} \cdot \mathbf{E} = \sum_{i=1}^3 \frac{1/v_\varphi^2}{1/v_\varphi^2 - 1/v_i^2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) u_i^2$.

Après simplification par $\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}$, on retranche 1 aux deux membres en remarquant que $\sum_{i=1}^3 u_i u_i = 1$,

et l'on obtient ainsi : $\sum_{i=1}^3 \left[\frac{1/v_\varphi^2}{1/v_\varphi^2 - 1/v_i^2} - 1 \right] u_i^2 = 0$, c'est à dire

$$\frac{u_1^2}{v_\varphi^2 - v_1^2} + \frac{u_2^2}{v_\varphi^2 - v_2^2} + \frac{u_3^2}{v_\varphi^2 - v_3^2} = 0, \quad \text{équation dite de FRESNEL} \quad (1.7)$$

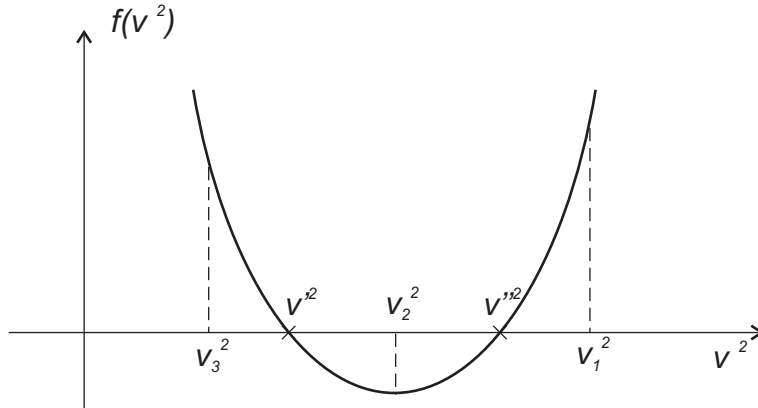


FIG. 1.2 – Courbe $f(v_\varphi^2)$. Pour $v_3 \leq v_2 \leq v_1$ $f(v_1^2) = (v_1^2 - v_2^2)(v_1^2 - v_3^2) > 0$, $f(v_2^2) = (v_2^2 - v_1^2)(v_2^2 - v_3^2) < 0$, $f(v_3^2) = (v_3^2 - v_1^2)(v_3^2 - v_2^2) > 0$, si bien que f passe 2 fois seulement par zéro.

1.3.2 Vitesses de phases et lignes neutres de propagation

Faisons l'hypothèse simplificatrice que les indices principaux se comparent selon :

$$n_3 \geq n_2 \geq n_1$$

soit, de façon équivalente : $v_3 \leq v_2 \leq v_1$

Etant donnée la direction de normale \mathbf{u} , les vitesses de phase possibles doivent satisfaire l'équation de FRESNEL, que l'on peut voir comme une équation parabolique de v_φ^2 :

$$f(v_\varphi^2) = (v_\varphi^2 - v_2^2)(v_\varphi^2 - v_3^2)u_1^2 + (v_\varphi^2 - v_1^2)(v_\varphi^2 - v_3^2)u_2^2 + (v_\varphi^2 - v_1^2)(v_\varphi^2 - v_2^2)u_3^2 = 0 \quad (1.8)$$

Il n'y a que 2 solutions réelles à cette équation (Fig. 1.2) : $v_\varphi'^2$ et $v_\varphi''^2$, $v_\varphi'^2 < v_\varphi''^2$

Pour chacune des deux vitesses de phase v_φ' ou v_φ'' possibles, le système d'équations (1.6) peut être résolu, donnant alors deux directions de vibrations possibles pour le champ électrique $\mathbf{e}' \equiv \mathbf{E}'/||\mathbf{E}'||$ et $\mathbf{e}'' \equiv \mathbf{E}''/||\mathbf{E}''||$. À ces deux directions correspondent également deux directions “propres” pour le vecteur déplacement \mathbf{d}' et \mathbf{d}'' , qui sont réelles, c'est à dire telles que la polarisation de l'onde est **linéaire**.

Ces deux directions \mathbf{d}' et \mathbf{d}'' définissent les *lignes neutres* de l'échantillon, c'est à dire les directions de polarisation linéaire pour lesquelles la lumière se propage dans le matériau comme dans un milieu isotrope avec des vitesses de phase respectives v_φ' et v_φ'' , “sans déformation”.

Conclusion Pour une direction de propagation \mathbf{u} donnée, un milieu anisotrope autorise la propagation d'une onde plane qui n'a que 2 vitesses de phase possibles et doit être polarisée linéairement.

Remarque On peut montrer que \mathbf{D} satisfait une équation aux valeurs propres pour la matrice $[\varepsilon_r^{-1}]$ inverse de la matrice de permittivité diélectrique $[\varepsilon_r]$ (voir Annexe B). On retrouve ensuite la conclusion précédente par le simple fait que cette matrice à coefficients réels est diagonalisable.

1.3 Propagation de l'onde pour une direction de la normale au plan d'onde donnée

1.3.3 Ellipsoïde des indices

Il est possible de construire géométriquement les deux vecteurs propres de polarisations linéaires \mathbf{D}' et \mathbf{D}'' , en introduisant la notion d'*ellipsoïde des indices*.

On définit un indice $n(\mathbf{k})$ pour la direction de propagation \mathbf{k} considérée par :

$$n(\mathbf{k}) \equiv \frac{c}{v_\phi(\mathbf{k})}.$$

On note (\mathcal{E}) la surface définie comme

$$(\mathcal{E}) \equiv \{M, \mathbf{OM} = n\mathbf{d}\},$$

où $\mathbf{d} \equiv \mathbf{D}/\|\mathbf{D}\|$. Nous allons montrer que (\mathcal{E}) constitue un ellipsoïde.

Introduisons les coordonnées de $\mathbf{OM} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$, alors $\mathbf{d} \begin{vmatrix} x_1/n \\ x_2/n \\ x_3/n \end{vmatrix}$.

Considérons à présent le produit scalaire de l'équation (1.5) avec \mathbf{D} . Puisque $\mathbf{u} \perp \mathbf{D}$

$$\mathbf{D}^2 = n^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}.$$

Par ailleurs, dans la base qui diagonalise $[\varepsilon_r]$, $E_i = D_i/(\varepsilon_0 n_i^2)$. On peut alors réexprimer le produit scalaire $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ avec les composantes de \mathbf{OM} :

$$\frac{1}{n^2} \mathbf{D}^2 = \frac{1}{n^2} \mathbf{D}^2 \left(\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} \right)$$

On obtient l'équation de la surface (\mathcal{E}) :

$$1 = \frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2},$$

qui n'est autre qu'un *ellipsoïde* de demi-axes n_1 , n_2 et n_3 . On peut réécrire cette équation sous la forme

$$g(x_i) = \frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} - 1 = 0.$$

Utilisation de l'ellipsoïde des indices pour déterminer les directions propres de vibrations \mathbf{D}' et \mathbf{D}''

Pour simplifier le raisonnement (et le schéma!), on se place dans le cas particulier d'un **milieu uniaxe** ($n_2 = n_3$). L'ellipsoïde est alors de révolution autour de l'axe (Ox_1) , qui est l'*axe optique* (voir Fig.1.3).

Considérons l'ellipse (Γ) , intersection du plan d'onde (de direction de normale \mathbf{k} donnée) et de l'ellipsoïde (\mathcal{E}) . Soit un point M *quelconque* de cette ellipse. À ce point est associée une direction (OM) de vibration \mathbf{D} . Nous allons montrer que seules deux directions (OM') et (OM'') ont physiquement un sens.

Remarquons d'abord que la normale \mathbf{N} en M à (\mathcal{E}) a pour composantes $\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{n_i^2}$ et est donc parallèle à \mathbf{E} , car selon la relation constitutive (1.1) $E_i = \mu_0 v_i^2 D_i = \frac{1}{n_i^2} \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\|\mathbf{D}\|}{n} x_i \propto \frac{2x_i}{n_i^2}$.

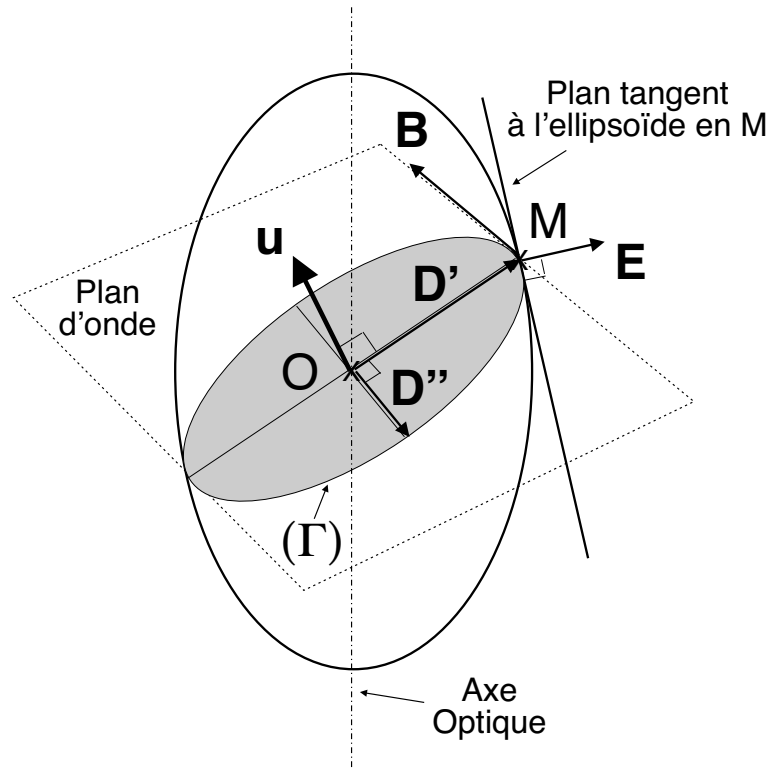


FIG. 1.3 – Utilisation de l'ellipsoïde des indice pour déterminer les directions propres de vibrations \mathbf{D}' et \mathbf{D}'' . Cas d'un milieu uniaxe positif.

Rappelons que le plan d'onde contient \mathbf{D} c'est à dire (OM) et qu'il est perpendiculaire au plan (\mathbf{E}, \mathbf{D}) (voir Fig. 1.1). Il est donc perpendiculaire au plan $(\mathbf{N}, (OM))$.

Considérons maintenant la tangente \mathbf{t} à l'ellipse (Γ) en M . Par définition, \mathbf{t} appartient au plan d'onde, et est aussi tangente à l'ellipsoïde, donc perpendiculaire à \mathbf{N} , donc à \mathbf{E} . Or, la seule direction du plan d'onde orthogonale à \mathbf{E} est celle de \mathbf{B} . Ceci signifie que \mathbf{t} donne la direction de \mathbf{B} . Puisque le champ magnétique est perpendiculaire à \mathbf{D} (Fig.1.1), \mathbf{t} doit donc être perpendiculaire à (OM) , rayon de l'ellipse (Γ) associé à M .

Mais les seuls points d'une ellipse pour lesquels la tangente est perpendiculaire au rayon sont ses demi-axes. Ces derniers constituent donc les deux seules directions de vibrations possibles pour \mathbf{D} , à savoir \mathbf{D}' et \mathbf{D}'' , directions de vibrations propres introduites au §1.3.2 et associées à la direction de propagation \mathbf{k} considérée.

Notons que la vibration \mathbf{D}'' (Fig.1.3) perpendiculaire à l'axe optique est ici associée au petit axe de l'ellipse (Γ) donc à l'indice ordinaire. Il s'agit de la vibration ordinaire. On possède donc un moyen simple pour identifier cette direction de vibration : le vecteur déplacement ordinaire vibre toujours dans la direction perpendiculaire au plan formé de la normale ordinaire et de l'axe optique. La direction de vibration extraordinaire s'en déduit : c'est la direction perpendiculaire au plan formé de la normale extraordinaire et de la direction de vibration ordinaire.

1.3 Propagation de l'onde pour une direction de la normale au plan d'onde donnée

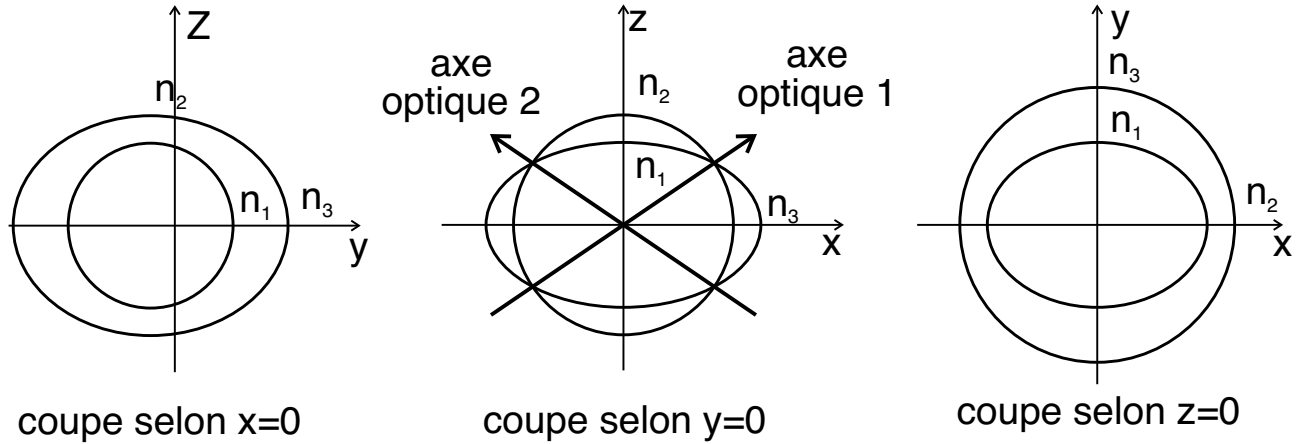


FIG. 1.4 – Coupes de la surface des indices selon $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ dans le cas $n_3 \geq n_2 \geq n_1$.

Conclusion

- Les deux seules directions de polarisation linéaires \mathbf{D}' et \mathbf{D}'' physiquement possibles, sont données par les demi-axes de l'ellipse, définie par l'intersection de l'ellipsoïde des indices et du plan d'onde associé à la direction de propagation \mathbf{k} considérée.
- La *vibration ordinaire* est celle qui est *perpendiculaire* à l'axe optique et au vecteur d'onde considéré. Elle est toujours située dans le plan équatorial de l'ellipsoïde des indices, quel que soit l'orientation du vecteur d'onde.

1.3.4 Surface des indices. Axes optiques.

La *surface des indices* est le lieu des points N tels que :

$$(\mathcal{S}) \equiv \{N, \mathbf{ON} = n\mathbf{u}\}$$

La connaissance de cette surface permet notamment de construire les normales aux plans d'onde lors du passage de l'onde à travers une interface (réfraction) entre deux milieux diélectriques, éventuellement anisotropes tous les deux. La méthode de construction est celle dite de DESCARTES.

On se place dans la base diagonalisant $[\varepsilon]$ et on note $\mathbf{ON} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Par définition on a alors $n^2 = x^2 + y^2 + z^2$, et on déduit de l'équation de FRESNEL (1.7), après remplacement des vitesses de phase par les indices :

$$\frac{x^2/n^2}{(c/n)^2 - (c/n_1)^2} + \frac{y^2/n^2}{(c/n)^2 - (c/n_2)^2} + \frac{z^2/n^2}{(c/n)^2 - (c/n_3)^2} = 0,$$

soit en mettant au même dénominateur et en simplifiant

$$\begin{aligned} & n_1^2 x^2 (x^2 + y^2 + z^2 - n_2^2)(x^2 + y^2 + z^2 - n_3^2) \\ & + n_2^2 y^2 (x^2 + y^2 + z^2 - n_3^2)(x^2 + y^2 + z^2 - n_1^2) \\ & + n_3^2 z^2 (x^2 + y^2 + z^2 - n_1^2)(x^2 + y^2 + z^2 - n_2^2) = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit de l'équation d'une surface du 4^{ième} degré, c'est à dire d'une surface à 2 nappes, que l'on peut appréhender à l'aide de coupes (voir Fig.1.4). La coupe selon $z = 0$ a pour équation

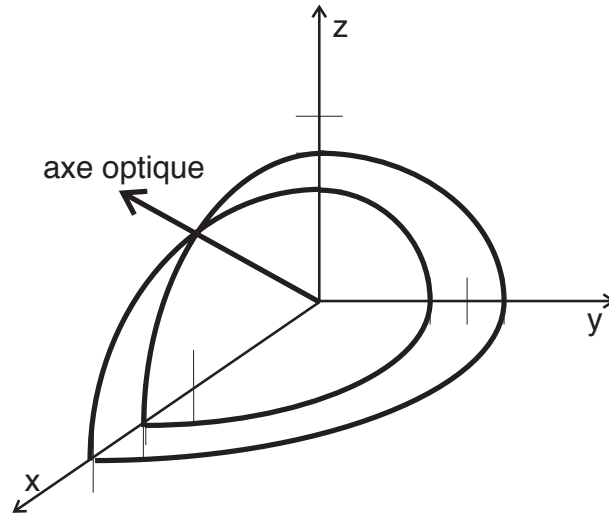


FIG. 1.5 – Bilan des coupes des surfaces des indice dans le quadrant positif, dans le cas $n_3 \geq n_2 \geq n_1$.

$$x^2 + y^2 = n_3^2 \quad : \quad \text{c'est un cercle de rayon } n_3$$

$$n_1^2 n_2^2 (x^2 + y^2) \left(\frac{x^2}{n_2^2} + \frac{y^2}{n_1^2} - 1 \right) = 0 \quad : \quad \text{c'est une ellipse de demi-axes } n_2 \text{ et } n_1$$

Les coupes selon $x = 0$ et $y = 0$ sont des courbes similaires.

Bilan En regroupant les 2 nappes et en se limitant à un seul quadrant, on obtient la Fig.1.5.

Définition On appelle *axes optiques* du milieu anisotrope, les directions de l'espace selon lesquelles une onde peut se propager dans le milieu avec une seule vitesse de phase (ie. un seul indice).

On remarque que, dans le cas général, les 2 nappes se coupent selon deux points (cf. Fig.1.5). Les directions de normales correspondant à ces points définissent deux axes optiques : le milieu est *biaxe*. Lorsque les 2 nappes sont tangentes entre elles, il n'y a qu'un seul axe optique, selon la directions de tangence (Ox), (Oy) ou (Oz).

1.3.5 Milieux uniaxes

Deux indices principaux sont confondus : par exemple, $n_2 = n_3 \equiv n_o$, et les deux axes optiques se confondent alors en un seul (qui est l'axe (Ox) de la Fig. 1.5). On note $n_e \equiv n_1$ l'autre indice, que l'on nomme *extraordinaire*, alors que n_o est dit *ordinaire*. Deux cas de figure (cf. Fig.1.6) peuvent se produire suivant le signe de la *biréfringence* $\Delta n \equiv n_e - n_o$. Le milieu est dit *positif* si $\Delta n > 0$ et *négatif* si $\Delta n < 0$.

Exemples de biréfringence ($\lambda = 589,3 \text{ nm}$)

milieu *positif* : le quartz
 $n_o = 1,5442$
 $n_e = 1,5533$
 $\Delta n = 9,1 \times 10^{-3}$

milieu *négatif* : le spath
 $n_o = 1,658$
 $n_e = 1,486$
 $\Delta n \simeq -0,2$

1.3 Propagation de l'onde pour une direction de la normale au plan d'onde donnée

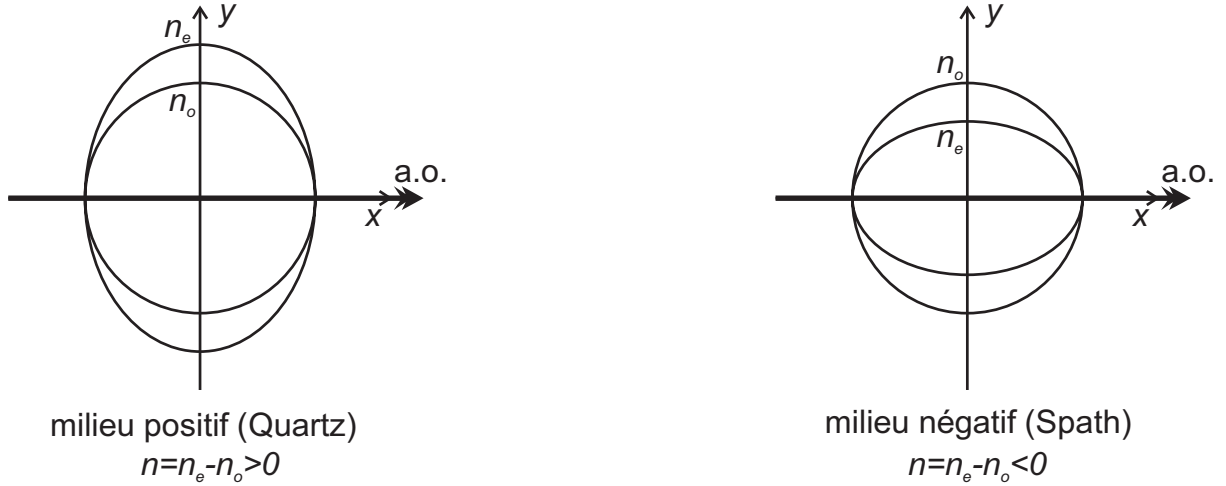


FIG. 1.6 – Coupe de la surface des indices selon un plan contenant l'axe optique, dans le cas d'un milieu uniaxe

Notez que, dans le cas d'un milieu positif, l'indice $n(\mathbf{k})$ correspondant à la propagation dans la direction de la normale au plan d'onde donnée \mathbf{k} satisfait $n_o < n(\mathbf{k}) < n_e$.

1.3.6 Construction de DESCARTES des normales aux surfaces d'onde lors d'une réfraction

On peut utiliser les surfaces des indices pour construire les normales aux plans d'onde lors du passage par une interface entre deux milieux diélectriques dont l'un au moins est biréfringent. Il s'agit de la construction de DESCARTES généralisée aux milieux biréfringents.

Considérons, pour simplifier, le passage de la lumière de l'air ($n = 1$) dans un milieu biréfringent uniaxe, par exemple un milieu négatif comme le spath (cf. Fig. 1.7).

La construction graphique résulte de la conservation de la composante tangentielle k_t du vecteur d'onde au passage par l'interface, dont découlent les lois de SNELL DESCARTES

$$\begin{aligned} i &= i' \\ n \sin i &= n_1 \sin r_1 = n_2 \sin r_2 \end{aligned}$$

où i est l'angle d'incidence, r_1 et r_2 les angles de réfraction et $n_1 = ON_1$, $n_2 = ON_2$ les indices pour les normales réfractées.

Graphiquement, le rayon incident coupe la surface des indices de l'air au point N . La hauteur issue de N coupe l'interface en H tel que $OH = k_t / \|\mathbf{k}\| = n \sin i$ et la surface des indices du spath en N_1 et N_2 . Il s'en suit que (ON_1) et (ON_2) donnent les directions des normales aux ondes réfractées.

Remarques importantes

- Notons qu'en général $n_2 \neq n_e$ mais par contre nous avons toujours $n_1 = n_o$.
- Comme nous l'avons vu dans le §1.3.3, à chaque normale dans le cristal doivent être associées deux lignes neutres dont la détermination peut être faite grâce à l'ellipsoïde des indices. Cependant, pour chacune de ces lignes neutres, un seul des deux indices de réfraction a physiquement un sens, si bien que finalement il n'existe, dans le cristal, que deux lignes neutres \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_2 comme indiqué sur la Fig. 1.7.

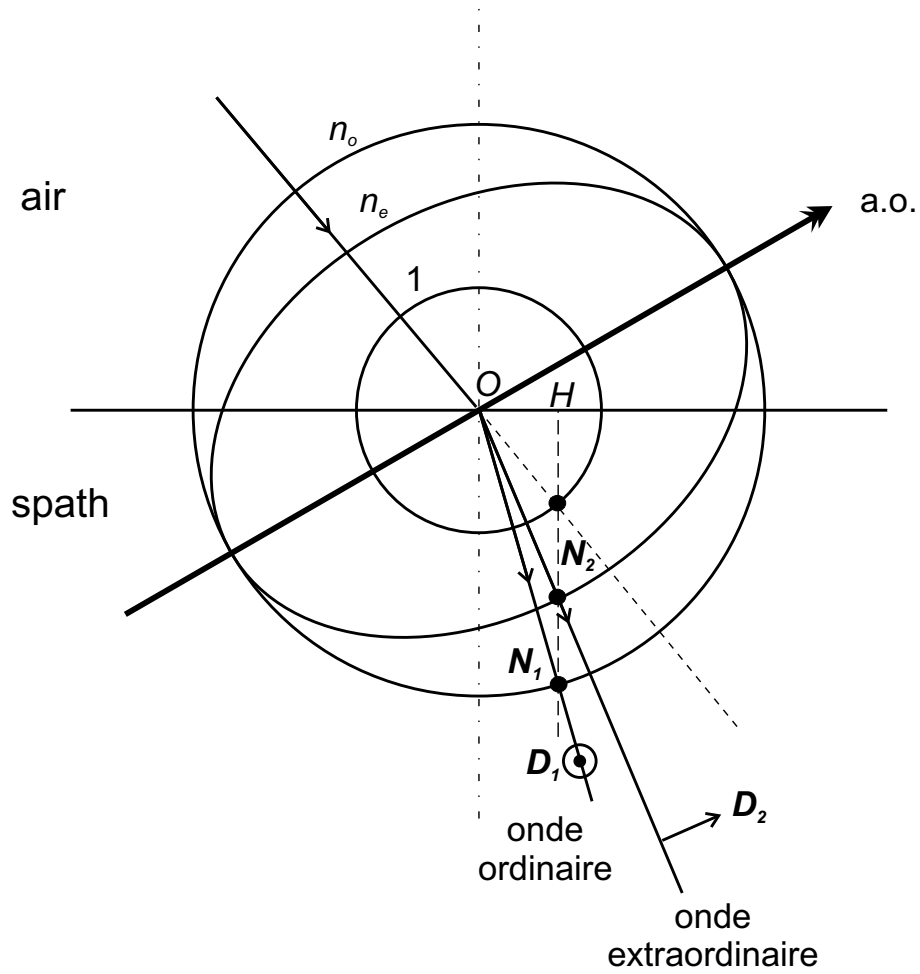


FIG. 1.7 – Construction de Descartes dans le cas d'un milieu négatif (ex. le spath)

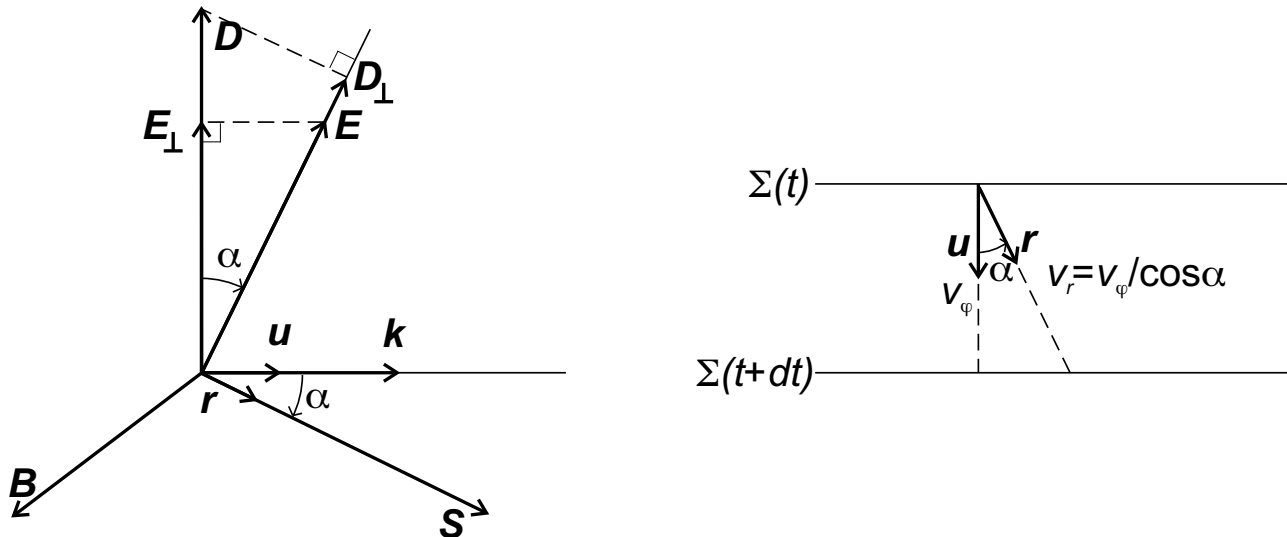


FIG. 1.8 – Configuration relative des champs pour une onde plane

1.4 Propagation de l'onde pour une direction de rayon donnée

1.4.1 Relation vectorielle inverse $\mathbf{E}(\mathbf{D})$

On rappelle l'équation (1.5)

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{v_\varphi^2} [\mathbf{E} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{u}]$$

Nous allons montrer que, par analogie, $\mathbf{E} = \mu_0 v_r^2 [\mathbf{D} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{r}]$, où \mathbf{r} représente le vecteur unitaire dans la direction du rayon : $\mathbf{r} \equiv \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|}$ et v_r est la vitesse de phase dans la direction \mathbf{r} appelée *vitesse radiale*.

Reprenons la configuration relative des champs dans le cas d'une onde plane (Fig. 1.8). On rappelle de plus que \mathbf{u} est normal à la surface d'onde .

Par définition $\mathbf{D}_\perp \equiv \mathbf{D} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{r}$ est aligné avec \mathbf{E} et $D_\perp = D \cos \alpha$. Il nous reste à comparer les amplitudes de \mathbf{D}_\perp et de \mathbf{E} . Mais la relation (1.5) peut aussi être écrite :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{v_\varphi^2} \mathbf{E}_\perp \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_\perp = E \cos \alpha \\ v_\varphi = v_r \cos \alpha \end{cases}$$

Donc, $D = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{v_r^2 \cos \alpha} E$. D'où $D_\perp = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{v_r^2} E$, ce qui implique

$$\mathbf{E} = \mu_0 v_r^2 [\mathbf{D} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{r}] \quad (1.9)$$

Remarque on passe de (1.5) à (1.9) en faisant les substitutions suivantes :

$\frac{\mathbf{E}}{\mu_0}$	\rightarrow	$\mu_0 \mathbf{D}$
\mathbf{u}	\rightarrow	\mathbf{r}
v_φ	\rightarrow	$1/v_r$

1.4.2 Surface d'onde

On la définit par analogie avec la surface des indices :

$$(\Sigma) \equiv \left\{ M, \mathbf{OM} = \frac{v_r}{c} \mathbf{r} \right\}$$

Réécrivons, au préalable, l'équation analogue à l'équation de FRESNEL pour les vitesses radiales. Les substitutions, dans l'équation de FRESNEL (1.7) :

$$\begin{aligned} u_i &\rightarrow r_i \\ v_i &\rightarrow \frac{1}{v_i} \quad \text{car pour les ondes se propageant selon l'un des axes principaux,} \\ &\quad \mathbf{u}_i = \mathbf{r}_i, \alpha_i = 0 \\ v_\varphi &\rightarrow \frac{1}{v_r} \end{aligned}$$

donnent :

$$r_1^2 \frac{v_1^2}{v_r^2 - v_1^2} + r_2^2 \frac{v_2^2}{v_r^2 - v_2^2} + r_3^2 \frac{v_3^2}{v_r^2 - v_3^2} = 0 \quad (1.10)$$

On a donc deux solutions réelles pour v_r .

L'équation de la surface d'onde est également celle d'une surface à 2 nappes, que l'on peut construire par analogie avec la surface des indices.

Choisissons le cas le plus simple d'un milieu uniaxe, tel que $v_1 = v_e$ et $v_2 = v_3 = v_o$. Alors \mathbf{OM} a pour coordonnées $\left\{ x = \frac{v_r}{c} r_1, y = \frac{v_r}{c} r_2, z = \frac{v_r}{c} r_3 \right\}$ qui satisfont

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{v_r}{c} \right)^2 \equiv R^2$$

Reportées dans (1.10), les composantes de \mathbf{OM} conduisent à la surface d'équation :

$$(y^2 + z^2) \left(\frac{v_o}{c} \right)^2 \left(R^2 - \left(\frac{v_o}{c} \right)^2 \right) \left(R^2 - \left(\frac{v_e}{c} \right)^2 \right) + x^2 \left(\frac{v_e}{c} \right)^2 \left(R^2 - \left(\frac{v_o}{c} \right)^2 \right)^2 = 0$$

qui est formée de 2 nappes :

- * $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = \left(\frac{v_o}{c} \right)^2 = \frac{1}{n_o^2}$, qui n'est autre qu'une sphère de rayon $\frac{1}{n_o}$
- * $\frac{y^2 + z^2}{(v_e/c)^2} + \frac{x^2}{(v_o/c)^2} = 1$, qui est un ellipsoïde de révolution autour de l'axe (Ox) (l'axe optique) et dont les demi-axes sont $\frac{1}{n_e}$ et $\frac{1}{n_o}$.

Dans le plan de coupe $z = 0$, contenant l'axe optique (Ox) , on retrouve les 2 cas de figure pour un milieu positif ou négatif (cf. Fig. 1.9).

1.5 Exemples de dispositifs polarisant par biréfringence

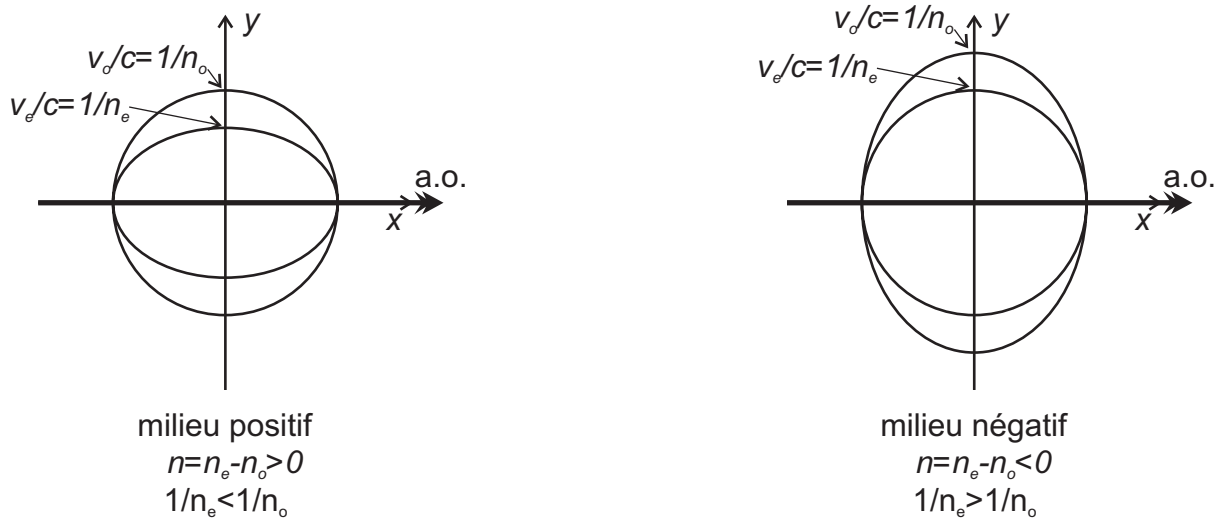


FIG. 1.9 – Coupe de la surface d'onde selon un plan contenant l'axe optique dans le cas d'un milieu uniaxe.

1.4.3 Application à la construction des rayons réfractés au passage par une interface : construction d'HUYGENS

On utilise pour cette construction la méthode de HUYGENS, qui consiste à construire les plans d'onde tangent aux surfaces d'onde (des ondelettes) émises par des sources secondaires fictives.

Notons que, dans le cas général d'une incidence quelconque sur la face d'entrée du cristal relativement à l'orientation de l'axe optique, les rayons réfractés ne sont pas situés dans le plan d'incidence. Deux *cas particuliers* d'orientation relative du plan d'incidence et de l'axe optique conduisent cependant à un rayon réfracté appartenant encore au plan d'incidence :

- (a) Lorsque l'axe optique est *contenu dans le plan d'incidence*, comme par exemple pour une lame dont la face d'entrée plane est taillée perpendiculairement à l'axe optique (voir la construction sur la Fig.1.10)
- (b) Lorsque l'axe optique est *orthogonal* au plan d'incidence. (voir la construction sur la Fig.1.11)

Remarque importante En pratique, vous serez surtout confronté à l'éclairage de lames à faces parallèles **contenant l'axe optique**, et sous **incidence normale**. Dans ce cas, il y a invariance par symétrie cylindrique autour de la normale incidente et la construction de HUYGENS décrite précédemment peut encore être réalisée dans le plan contenant la normale incidente et l'axe optique. Notons que dans cette configuration expérimentale, l'axe optique constitue l'une des lignes neutres de la lame.

1.5 Exemples de dispositifs polarisant par biréfringence

Les propriétés biréfringentes de cristaux peuvent être exploitées pour produire ou analyser de la lumière polarisée.

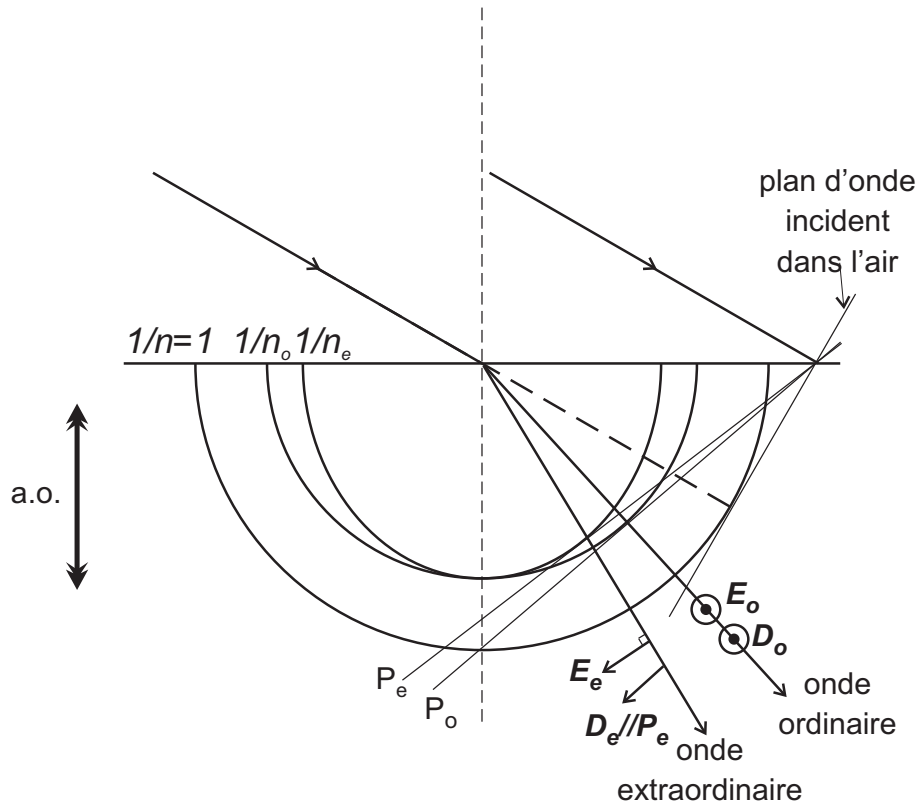


FIG. 1.10 – Construction de HUYGENS pour un *axe optique contenu dans le plan d'incidence*. Cas d'un milieu *positif* : $n_e - n_o > 0$.

1.5.1 Le prisme de WOLLASTON

Le prisme de WOLLASTON sert à séparer spatialement, deux polarisations orthogonales. Il est formé de deux prismes biréfringents (en quartz le plus souvent) accolés et dont les axes optiques sont orthogonaux (*cf.* fig.1.12). On renvoie à l'**exercice n°1** de la *planche de TD* pour la construction des normales et le calcul de la déviation entre les 2 faisceaux émergents.

1.5.2 Le prisme de NICOL

Il est formé de 2 parties d'un rhomboèdre naturel de spath scié puis recollé avec du baume du Canada (Fig. 1.13). L'orientation de l'axe optique est à 45° de la face d'entrée. Le spath étant un milieu bien transparent dans le visible, ce type de dispositif polarisant est à préférer aux polaroïds (bien plus absorbant) dès qu'on travaille avec de faibles intensités.

Principe de fonctionnement Un rayon incident donne naissance à deux rayons réfractés dans le prisme, le plus dévié étant l'ordinaire (plus fort indice) qui se propage comme dans un milieu isotrope jusqu'à l'interface. Le baume est moins réfringent que le cristal ($n_B < n_o$) et il y a, dans ce cas précis, réflexion totale². Par contre, le rayon extraordinaire est presque

²Il y a réflexion totale dès que l'angle d'incidence est supérieur à 69° environ. Ici, la déviation du rayon incident à l'entrée du prisme est supérieure à 1° . Or, pour un faisceau non dévié, l'incidence sur le baume serait de $90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$. Compte tenu de la déviation subie dans la traversée du premier prisme, l'angle d'incidence sur la couche de baume est donc supérieur à l'angle critique.

1.5 Exemples de dispositifs polarisant par biréfringence

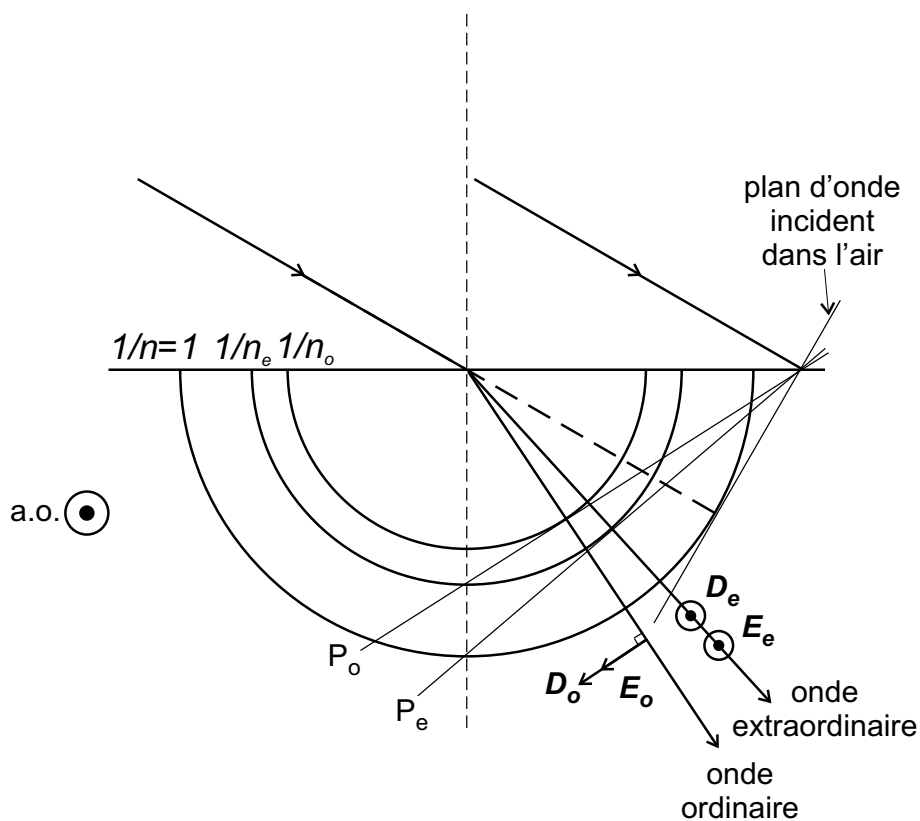


FIG. 1.11 – Construction de HUYGENS pour un axe optique *perpendiculaire au plan d'incidence*. Cas d'un milieu *négatif* : $n_e - n_o < 0$.

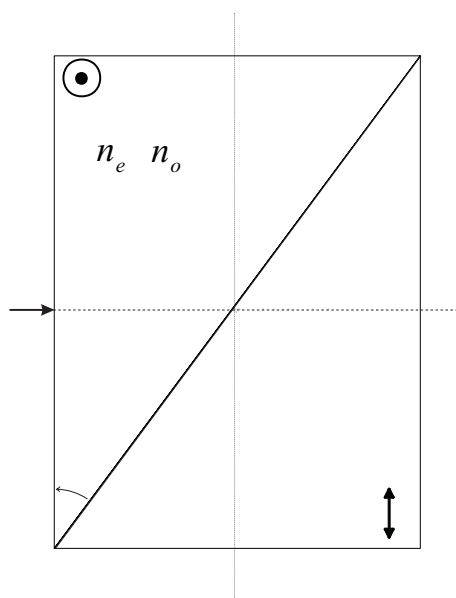


FIG. 1.12 – Prisme de Wollaston en quartz attaqué sous incidence normale. On considère le cas $\theta = 45^\circ$.

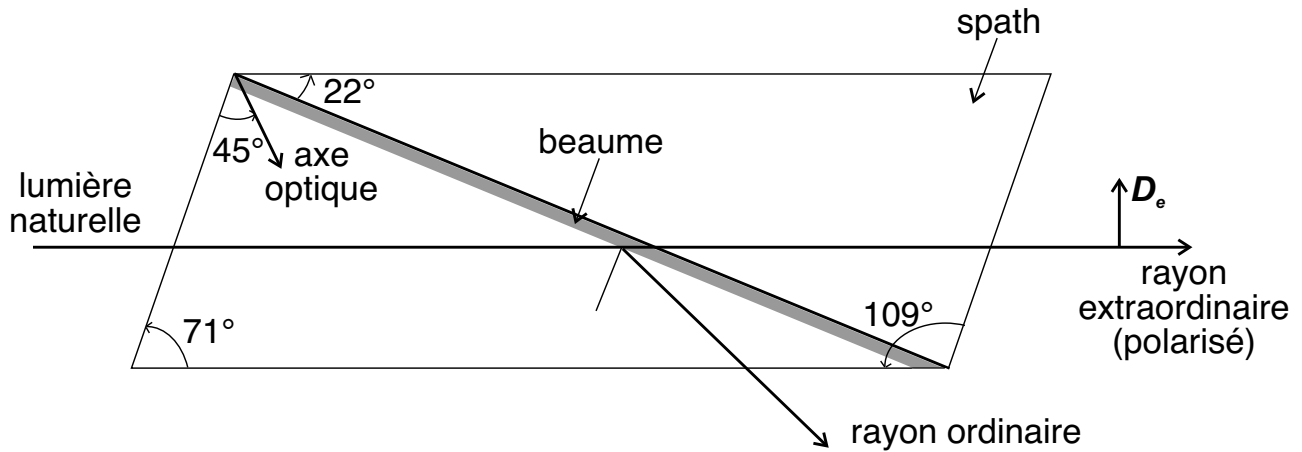


FIG. 1.13 – Prisme de Nicol

totalément transmis³. Il sort donc du dispositif une lumière polarisée dans un plan qui contient le rayon incident et l'axe optique.

Remarque Pour la construction de de la marche des rayons nous vous renvoyons aux § 173 et 319 du BRUHAT.

³Le rayon extraordinaire est dévié de moins de 1° et $n_e < n_B$

Chapitre 2

Lames minces biréfringentes. Interférences en lumière polarisée

2.1 Action d'une lame mince à faces parallèles sur une onde plane polarisée rectilignement arrivant sous *incidence normale*

2.1.1 Lignes neutres et axes propres de la lame

Lignes neutres

Le faisceau incident se propageant dans l'air donne naissance, en pénétrant dans la lame, à deux faisceaux (Fig. 2.1) qui se propagent aux vitesses de phase $v_x \equiv c/n_x$ et $v_y \equiv c/n_y$. Ces faisceaux sont polarisés linéairement selon des directions de vibrations \mathbf{D}_x et \mathbf{D}_y orthogonales. Ces deux directions de vibrations sont appelées *lignes neutres* de la lame¹.

Remarquons qu'à la différence des rayons, les vecteurs d'onde \mathbf{k}_x et \mathbf{k}_y sont superposés et orthogonaux à la face d'entrée, puisque nous n'avons considéré que le cas de l'incidence normale, si bien que, les directions de vibration \mathbf{D}_x et \mathbf{D}_y sont les mêmes que l'on soit à l'extérieur de la lame (cf. Fig. 2.1), ou bien dans la lame.

Remarque importante De façon plus générale² (*i.e.* en incidence non normale), à une direction de normale donnée sont associées deux *lignes neutres*. Lors de la réfraction d'un rayon oblique, deux directions de normales apparaissent avec pour chacune deux lignes neutres, dont une seule a physiquement un sens (bon indice de réfraction). Ces deux lignes neutres ne sont pas forcément perpendiculaires.

Axes propres

Par définition, il s'agit des directions selon lesquelles une vibration incidente du *champ électrique* \mathbf{E} ressort de la lame inchangée. Pour la situation que nous considérons ici, en incidence

¹Notons qu'en *incidence oblique*, les lignes neutres changent d'un plan d'incidence à l'autre, en particulier dans le cas où la face d'entrée de la lame est taillée perpendiculairement à l'axe optique (cf. §2.5).

²voir : Luc Dettwiler, *BUP*, **95**, 985-1002 (n°835, juin 2001)

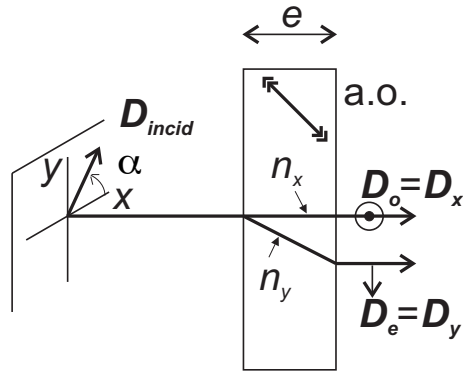


FIG. 2.1 – Onde plane en incidence normale sur une lame biréfringente à faces parallèles. Marche des rayons.

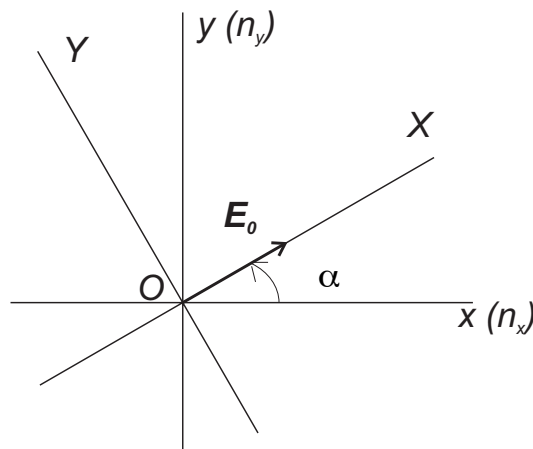


FIG. 2.2 – Repère des lignes neutres de la lame

normale, les axes propres et les lignes neutres sont confondus, et nous utiliserons indifféremment ces deux appellations.

2.1.2 Champ électrique à la sortie de la lame

Déterminons la façon dont les composantes du champ électrique \mathbf{E} se transforment à la traversée de la lame³.

On se place dans le repère (O, O_x, O_y) des lignes neutres de la lame (Fig. 2.2). À la sortie de la lame d'épaisseur e , la composante E_x^{out} a subi le retard de phase $\frac{2\pi}{\lambda} n_x e$ tandis que la composante E_y^{out} est retardée de $\frac{2\pi}{\lambda} n_y e$, si bien que ces deux composantes sont déphasées de la quantité

$$\varphi \equiv \frac{2\pi}{\lambda} (n_y - n_x) e.$$

Notons α l'angle que fait le champ électrique incident \mathbf{E}_0 avec la ligne neutre (Ox) , alors :

³On peut raisonner de façon équivalente sur \mathbf{D} puisque \mathbf{D} et \mathbf{E} sont colinéaires dans l'air.

2.1 Action d'une lame mince à faces parallèles sur une onde plane polarisée rectilignement arrivant sous *incidence normale*

Avant la lame	Après la lame
$E_x^{\text{in}} = E_0 \cos \alpha e^{-i\omega t}$	$E_x^{\text{out}} = E_0 \cos \alpha e^{-i\omega t} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} n_x e}$
$E_y^{\text{in}} = E_0 \sin \alpha e^{-i\omega t}$	$E_y^{\text{out}} = E_0 \sin \alpha e^{-i\omega t} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} n_y e}$

Par un choix judicieux de l'origine du temps⁴, on peut reporter les déphasages relatifs φ des deux composantes, sur la seule composante E_y^{out} :

$$\begin{aligned} E_x^{\text{out}} &= E_0 \cos \alpha e^{-i\omega\tau} \\ E_y^{\text{out}} &= E_0 \sin \alpha e^{-i\omega\tau} e^{+i\varphi}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Les parties réelles des deux composantes valent alors

$$\begin{aligned} \Re(E_x^{\text{out}}) &= E_0 \cos \alpha \cos(\omega\tau) \\ \Re(E_y^{\text{out}}) &= E_0 \sin \alpha \cos(\omega\tau - \varphi). \end{aligned}$$

L'extrémité du vecteur de vibration décrit donc une **ellipse** inscrite dans un rectangle de côté $2E_0 \cos \alpha$ et $2E_0 \sin \alpha$. L'intensité de la vibration sortante vaut E_0^2 , identique à l'intensité de la vibration incidente. Notons que les axes de l'ellipse ne sont en général *pas alignés* avec (Ox) ou (Oy) . La figure 2.3 montre les différentes formes et sens de parcours de cette ellipse en fonction de la valeur de φ comprise entre 0 et 2π .

2.1.3 Cas particuliers de lames

- $\varphi = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) : **lame onde**, \mathbf{E} ressort inchangé de la lame.
- $\varphi = (2k + 1)\pi$: **lame demi-onde**
En sortie de lame, d'après la relation (2.1)

$$\begin{aligned} E_x^{\text{out}} &= E_0 \cos \alpha e^{-i\omega\tau} \\ E_y^{\text{out}} &= E_0 \sin \alpha e^{-i\omega\tau} (-1) \end{aligned}$$

La vibration \mathbf{E} émergente est *symétrique* de l'onde incidente par rapport aux lignes neutres de la lame.

- $\varphi = \pm\pi/2 + 2k\pi$: **lame quart d'onde**⁵
En sortie de la lame

$$\begin{aligned} E_x^{\text{out}} &= E_0 \cos \alpha e^{-i\omega\tau} \\ E_y^{\text{out}} &= E_0 \sin \alpha e^{-i\omega\tau} e^{\pm i(\pi/2 + 2k\pi)} \\ &= \pm i E_0 \sin \alpha e^{-i\omega\tau} \end{aligned}$$

Une polarisation incidente rectiligne ressort elliptique avec *pour axes les lignes neutres de la lame*. Le sens de parcours de l'ellipse dépend de la position respective de la polarisation incidente avec les axes lent et rapide de la lame quart d'onde, ou en d'autres termes des signes de φ et de $\tan \alpha$ (voir figure 2.4).

Dans le cas particulier d'une polarisation incidente à 45° ou 135° (ie. selon l'une des bissectrices des lignes neutres), on obtient en sortie une *polarisation circulaire*.

⁴On effectue le changement de variable $\rightarrow \tau = t - \frac{2\pi}{\lambda} n_x e \frac{1}{\omega}$

⁵Le signe + (resp. -) correspond au cas où l'axe (Oy) associé à l'indice n_y est l'axe *lent* (resp. *rapide*).

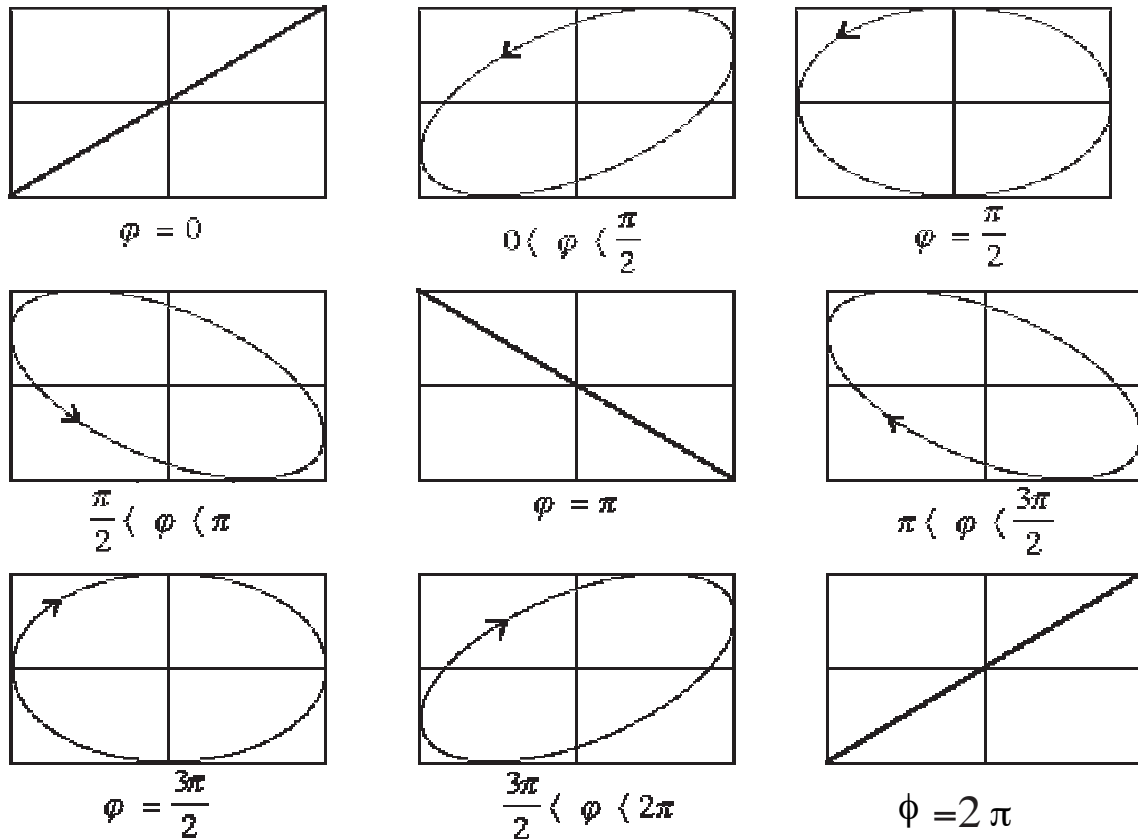


FIG. 2.3 – États de polarisation de la vibration à la sortie de la lame biréfringente en fonction du déphasage introduit φ (d’après G. Lemprière et J. Charrier, Université de Nantes, 1997)).

2.1.4 Cas particuliers d’orientation de la polarisation incidente

En changeant l’origine des temps⁶ dans les expressions des composantes du vecteur émergent, les composantes de \mathbf{E} à la sortie de la lame deviennent :

$$\begin{aligned} E_x^{\text{out}} &= E_0 \cos \alpha e^{-i\omega t'} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \\ E_y^{\text{out}} &= E_0 \sin \alpha e^{-i\omega t'} e^{+i\frac{\varphi}{2}}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pour mieux se représenter l’état de polarisation émergent il s’avère alors utile de se placer dans le repère (O, OX, OY) (Fig. 2.2) lié à la direction du champ électrique incident. Ceci revient à effectuer une rotation d’angle α autour de O , ie. à appliquer la matrice rotation

$$\mathcal{R}(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Il vient alors, en sortie de lame :

$$\begin{aligned} E_X^{\text{out}} &= E_0 e^{-i\omega t'} \left[\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \cos 2\alpha \right] \\ E_Y^{\text{out}} &= E_0 e^{-i\omega t'} \left[+i \sin \frac{\varphi}{2} \sin 2\alpha \right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Deux cas particuliers de déphasage doivent être signalés :

⁶On fait $t' = t - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n_x + n_y}{2\omega} e$

2.1 Action d'une lame mince à faces parallèles sur une onde plane polarisée rectilignement arrivant sous *incidence normale*

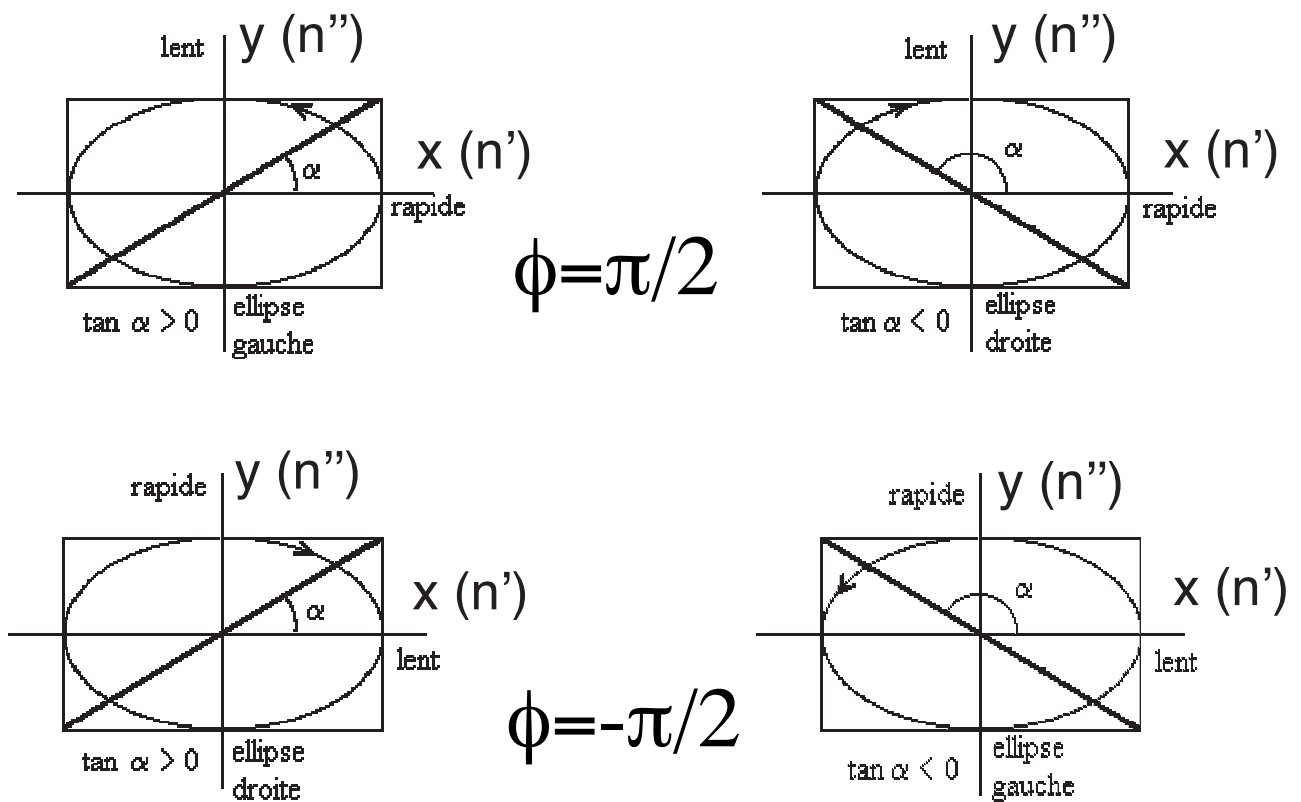


FIG. 2.4 – États de polarisation de la vibration à la sortie d'une lame $\lambda/4$ en fonction de la position respective de la polarisation incidente avec les axes lent et rapide de la lame quart d'onde (d'après G. Lemperière et J. Charrier, Université de Nantes, 1997).

- $\alpha = 0$: \mathbf{E} est suivant une ligne neutre, la polarisation reste linéaire.
- $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned} E_X^{\text{out}} &= E_0 e^{-i\omega t'} \cos \frac{\varphi}{2} & (OX, OY) \text{ sont alors les axes de l'ellipse} \\ E_Y^{\text{out}} &= iE_0 e^{-i\omega t'} \sin \frac{\varphi}{2} & \text{qui sont, dans ce cas précis seulement,} \\ & & \text{les bissectrices des lignes neutres (fig.2.5).} \end{aligned}$$

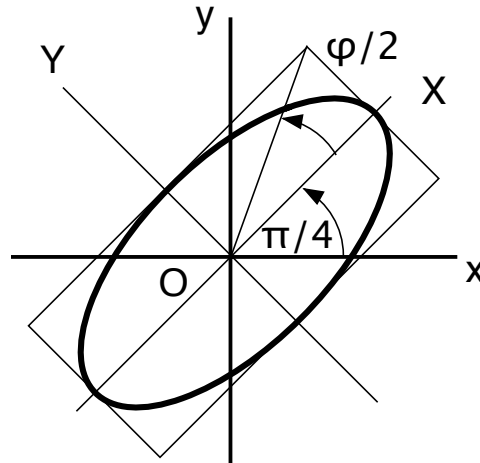


FIG. 2.5 – Si les lignes neutres (Ox) , (Oy) de la lame sont orientées à 45° de la direction de vibration incidente (OX) , alors la polarisation émergente est elliptique d'axes (OX) , (OY) .

2.2 Exemple d'analyseur de polarisation linéaire : l'analyseur à pénombre

Nous disposons au laboratoire de deux outils d'analyse d'une lumière polarisée linéairement :

- le filtre polaroïd (dichroïsme)
- le prisme de NICOL

Dans les deux cas, le repérage de la direction de polarisation revient à obtenir l'extinction du faisceau lumineux. Cette méthode comporte un inconvénient majeur : l'œil n'est en effet pas très sensible aux faibles variations d'intensités au voisinage de l'extinction. Ainsi, le pointé se fait au mieux au $1/2$ degré, voire au degré près.

Pour améliorer la précision du pointé, on utilise un *analyseur à pénombre*.

Celui-ci est constitué d'une moitié de lame demi-onde solidaire d'un analyseur \mathcal{A} et disposés de telle sorte qu'il n'y ait qu'un petit angle⁷ ε entre l'axe de l'analyseur et avec les lignes neutres de la lame (Fig. 2.6).

Le pointé de la polarisation incidente se fait en comparant les intensités dans les régions (1) et (2). Pour qu'il y ait égalité dans les pénombres de ces deux régions, il faut que la polarisation incidente \mathbf{E}^{in} soit selon Oy .

L'œil étant plus sensible à une différence de faibles intensités qu'à l'obscurité, le pointé est plus précis qu'avec un simple analyseur.

⁷L'angle ε doit être petit mais non nul, pour obtenir une pénombre et non l'obscurité complète.

2.3 Interférences en lumière polarisée

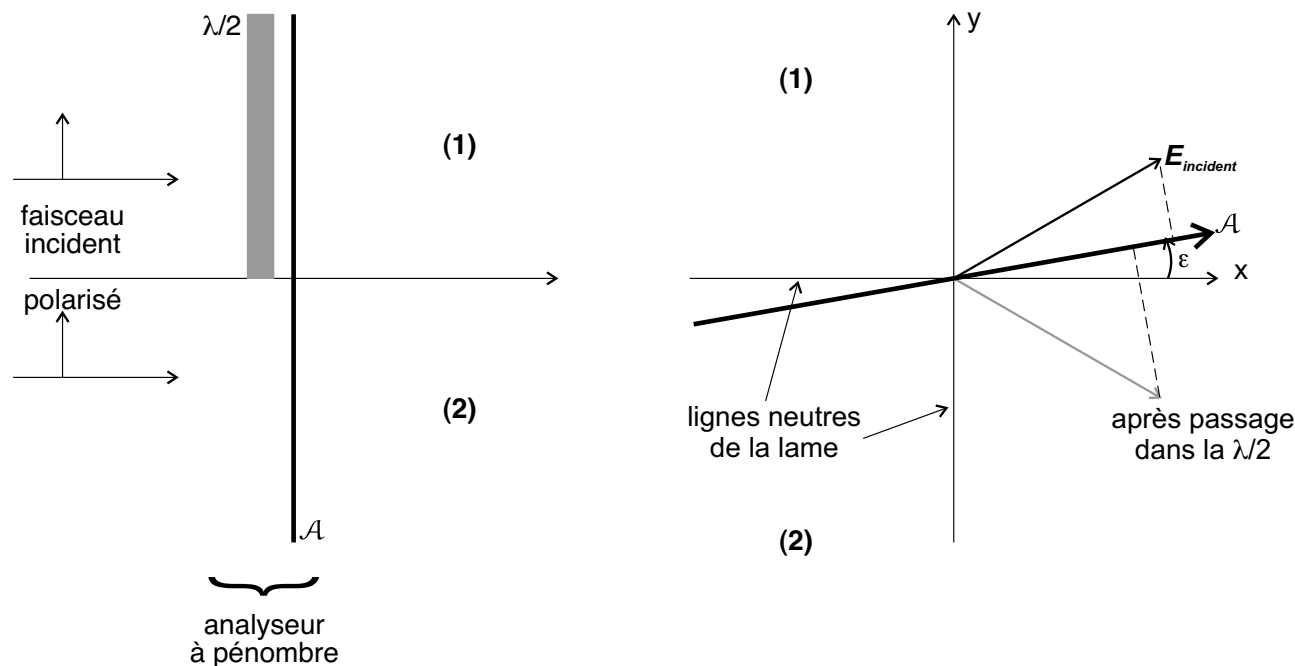


FIG. 2.6 – Analyseur à pénombre : description et principe de la mesure.

2.3 Interférences en lumière polarisée

À la sortie des lames biréfringentes, l'intensité de la lumière est uniforme comme on peut aisément s'en convaincre en considérant le module du champ électrique dont les composantes sont données par la relation (2.2). Pour faire apparaître sur l'intensité les effets d'interférence lié au déphasage φ , un analyseur, qui va "mélanger" les deux composantes du champ, doit être placé à la sortie de la lame.

2.3.1 Conditions d'observation

On observe les interférences entre les rayons ordinaire et extraordinaire. Pour qu'ils interfèrent, il faut :

- qu'ils se recouvrent dans certaines régions de l'espace, ce qui implique que la lame ne soit pas trop épaisse
- que leurs polarisations respectives ne soient pas orthogonales. C'est pourtant le cas des vibrations ordinaire et extraordinaire. Ainsi, il va falloir les "recombinaison" sur un analyseur (polaroïd, Nicol...) en sortie de lame.

Pour observer des interférences avec des lames biréfringentes, on se placera donc toujours entre polariseur et analyseur.

2.3.2 Franges d'une lame à faces parallèles éclairée perpendiculairement à sa face d'entrée (Fig. 2.7)

Intensité sur l'écran On peut montrer (cf. Annexe C) que l'intensité a une forme similaire à celle que l'on obtient dans le cas d'interférences à 2 ondes. :

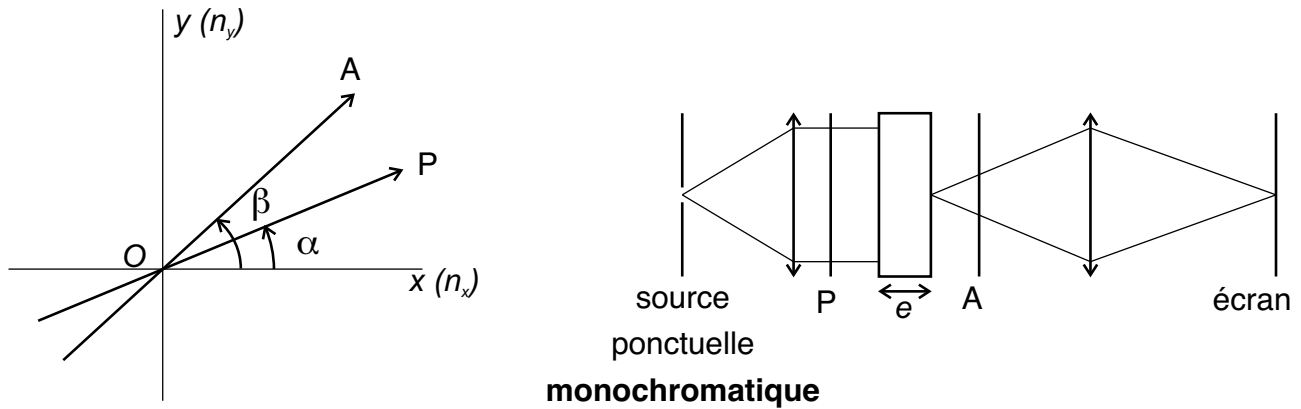


FIG. 2.7 – A droite, le dispositif utilisé pour observer des interférences en lumière polarisée. A gauche, la position du polariseur et de l’analyseur repérées par rapport aux lignes neutres de la lame.

$$I = I_1(\alpha, \beta)[1 + \mathcal{C}(\alpha, \beta) \cos \varphi] \text{ où } \varphi \equiv \frac{2\pi}{\lambda}(n_y - n_x)e$$

$$\mathcal{C}(\alpha, \beta) \equiv \frac{2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} \text{ est le contraste}$$

$$\text{et } I_1(\alpha, \beta) = I_0(\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta); I_0 \equiv \frac{E_0^2}{2}$$

En général, on travaille avec des lames d’épaisseur homogène, i.e. constante sur tout le champ d’observation. Pour faire varier le déphasage φ , il faut donc faire varier la longueur d’onde : c’est ainsi que l’on fait défiler les franges. Par contre, la position des franges sur l’écran est indépendante de l’orientation relative de \mathcal{P} et \mathcal{A} . Seul le contraste $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ en dépend.

Configurations particulières de \mathcal{P} et \mathcal{A} On remarque que $|\mathcal{C}(\alpha, \beta) \leq 1|$.

- Lorsque l’analyseur ou le polariseur est selon l’une des lignes neutres de la lame (α ou $\beta = 0$, ou bien α ou $\beta = \pi/2$), le contraste est nul.
- $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ vaut 1 lorsque $\cos^2(\alpha + \beta) = 0^8$ soit $\alpha + \beta = \pi/2$ [π].

On a alors :

$$I = I_0 \frac{\sin^2 2\alpha}{2} (1 + \cos \varphi) = I_0 \sin^2 2\alpha \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

I est maximale lorsque $2\alpha = \pi/2$ soit $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$

Si le polariseur et l’analyseur sont parallèles et à 45° des lignes neutres de la lame, alors le contraste vaut 1 et l’intensité a la valeur maximale :

$$I_{\parallel} = I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \tag{2.4}$$

⁸il suffit de développer $\cos(\alpha + \beta)$ pour s’en convaincre...

2.3 Interférences en lumière polarisée

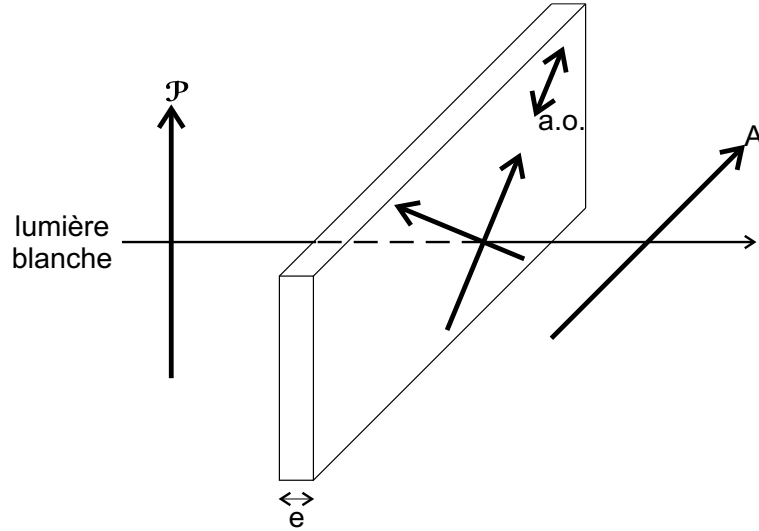


FIG. 2.8 – Observation des interférences obtenues en éclairant une lame par une lumière blanche polarisée. On a choisi la configuration polariseur et analyseur croisés faisant un angle de 45° avec les axes de la lame, qui est une façon d’obtenir un contraste maximal.

- $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ vaut -1 lorsque $\cos^2(\alpha - \beta) = 0$ soit $\alpha - \beta = \pi/2$ [π].
On obtient alors :

$$I = I_0 \sin^2 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (2.5)$$

I est maximale lorsque $2\alpha = \pi/2$ soit $\alpha = \frac{\pi}{4}$ et $\beta = \frac{3\pi}{4}$

Si le polariseur et l’analyseur sont perpendiculaires et que \mathcal{P} est à 45° des lignes neutres de la lame, alors, le contraste vaut -1 et l’intensité a la valeur maximale :

$$I_{\perp} = I_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (2.6)$$

2.3.3 Lame éclairée sous incidence normale en lumière blanche

Lames minces. Teintes de NEWTON

On se place dans une des configurations de contraste maximal décrites ci-dessus : polariseur et analyseur sont croisés et à 45° des lignes neutres de la lame (Fig. 2.8).

Dans cette condition, on a $I_{\perp} = I_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$.

La lame joue le rôle d’un filtre spectral en rejetant toutes les longueurs d’onde pour lesquelles $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0$, ie. $\frac{\varphi}{2}(\lambda) = 0$ [π], ie. $\frac{2\pi}{\lambda}(n_y - n_x)e = 2k\pi$

Considérons par exemple une lame de quartz ($\Delta n \equiv n_y - n_x = n_e - n_o \simeq 9.1 \times 10^{-3} > 0$) taillée parallèlement à l’axe optique. Les longueurs d’onde éteintes sont telles que $\Delta ne = k\lambda_k$. Si cette lame est suffisamment mince, il n’y a qu’une seule longueur d’onde éteinte dans le spectre visible. Pour une épaisseur $e = 60 \mu\text{m}$, la différence de marche $\delta = \Delta ne = 546 \text{ nm}$ correspond à la longueur d’onde éteinte pour l’ordre 1. Pour les ordres supérieur à 1, la longueur

d'onde éteinte n'est plus dans le visible. L'extinction du vert seul fait ainsi apparaître une teinte entre le rouge et le pourpre qui est le virage du rouge au bleu, que l'on appelle *teinte sensible*⁹.

L'ensemble des teintes possibles en fonction de l'épaisseur de la lame forme *l'échelle des teintes de NEWTON*. Cette échelle permet d'estimer l'épaisseur de lames constituée d'un matériau connu, lorsque ces lames ne sont pas "trop épaisses", *i.e.* lorsque la différence de marche n'excède pas quelques $\lambda/2$, soit en pratique, jusqu'au troisième ordre.

On donne en Annexe un tableau et une carte de couleur correspondant aux teintes de NEWTON.

Teintes complémentaires Remarquons que la configuration inverse de \mathcal{A} et \mathcal{P} , c'est à dire $\mathcal{A} \parallel \mathcal{P}$ éteint dans le spectre la couleur complémentaire (puisque $I_{\perp}(\lambda) + I_{\parallel}(\lambda) = I_0(\lambda)$) et que la superposition des 2 intensités redonne de la lumière blanche, ce que le prisme de WOLLASTON permet de visualiser aisément).

→ expérience de cours sur les teintes complémentaires

Lames épaisses : spectre cannelé

Si la lame est "très épaisse" (quelques mm, voire quelques cm), les couleurs de NEWTON disparaissent pour laisser place à un *blanc d'ordre supérieur* : plusieurs longueurs d'onde sont éteintes simultanément dans le spectre visible, ce que l'on met en évidence avec un prisme à vision directe placé en sortie de l'analyseur, ou bien en visualisant le spectre sur une barrette CCD à l'aide d'un spectrographe imageur. On obtient un *spectre cannelé* de biréfringence.

→ expérience de cours sur le spectre cannelé de biréfringence linéaire

Application Connaissant l'épaisseur de la lame, il est possible de remonter à la biréfringence dans le domaine de longueur d'onde étudié, à partir d'un enregistrement du spectre cannelé.

Application à la réalisation d'un filtre spectral : filtre de LYOT

Si on assemble en cascade des ensembles $\mathcal{P} \parallel \mathcal{A}$ avec une lame à 45° entre les 2 et tels que les épaisseurs de lames soient des multiples pairs d'une même épaisseur e : $e, 2e, 4e, \dots$, on obtient un filtre sélectif (Fig. 2.9).

Les inconvénients de ce type de montage sont :

- le champ est réduit
- il faut travailler en incidence normale.

L'avantage majeur de ce dispositif sur les filtres interférentiels est qu'il absorbe très faiblement la longueur d'onde sélectionnée.

2.4 Mesure de la biréfringence de lames minces

Deux méthodes *complémentaires* sont présentées.

⁹Cette appellation vient du fait que le maximum de sensibilité de l'oeil humain est dans le vert.

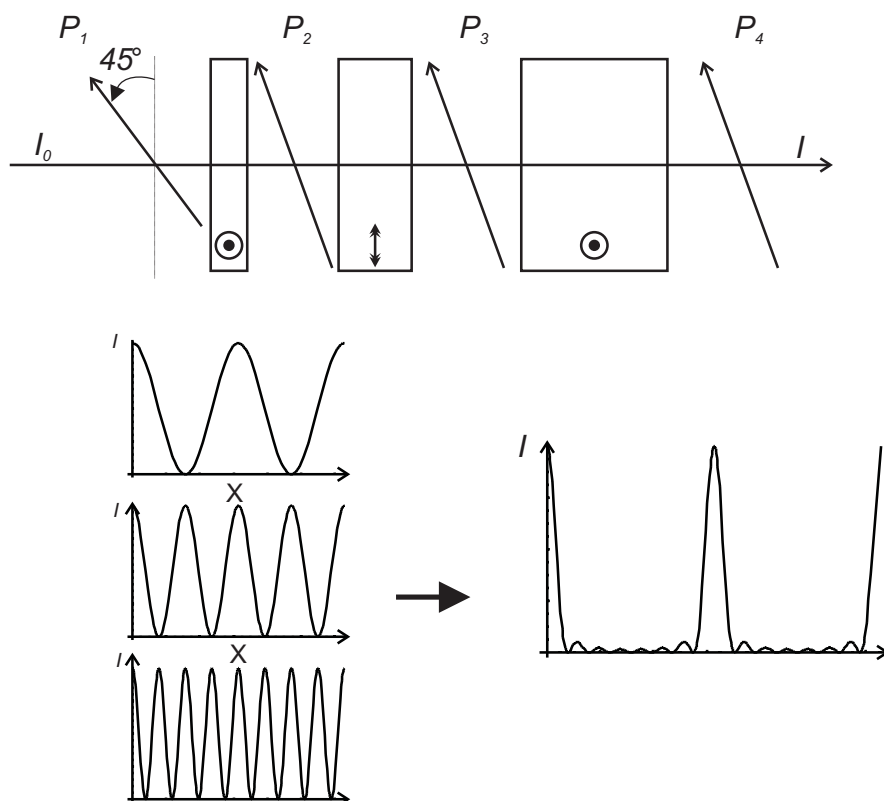


FIG. 2.9 – Schéma “éclaté” d’un filtre de LYOT. Spectres, en fonction du nombre d’onde $\sigma \equiv 1/\lambda$, après chaque ensemble lame+polariseurs d’épaisseurs e , $2e$, $4e$. Spectre en sortie du filtre constitué des 3 lames en cascade. Les axes optique de deux lames consécutives sont croisés afin d’accroître la dimension du champ d’observation, ce qui était utile pour les observations de la photosphère solaire faite par LYOT avec son filtre.

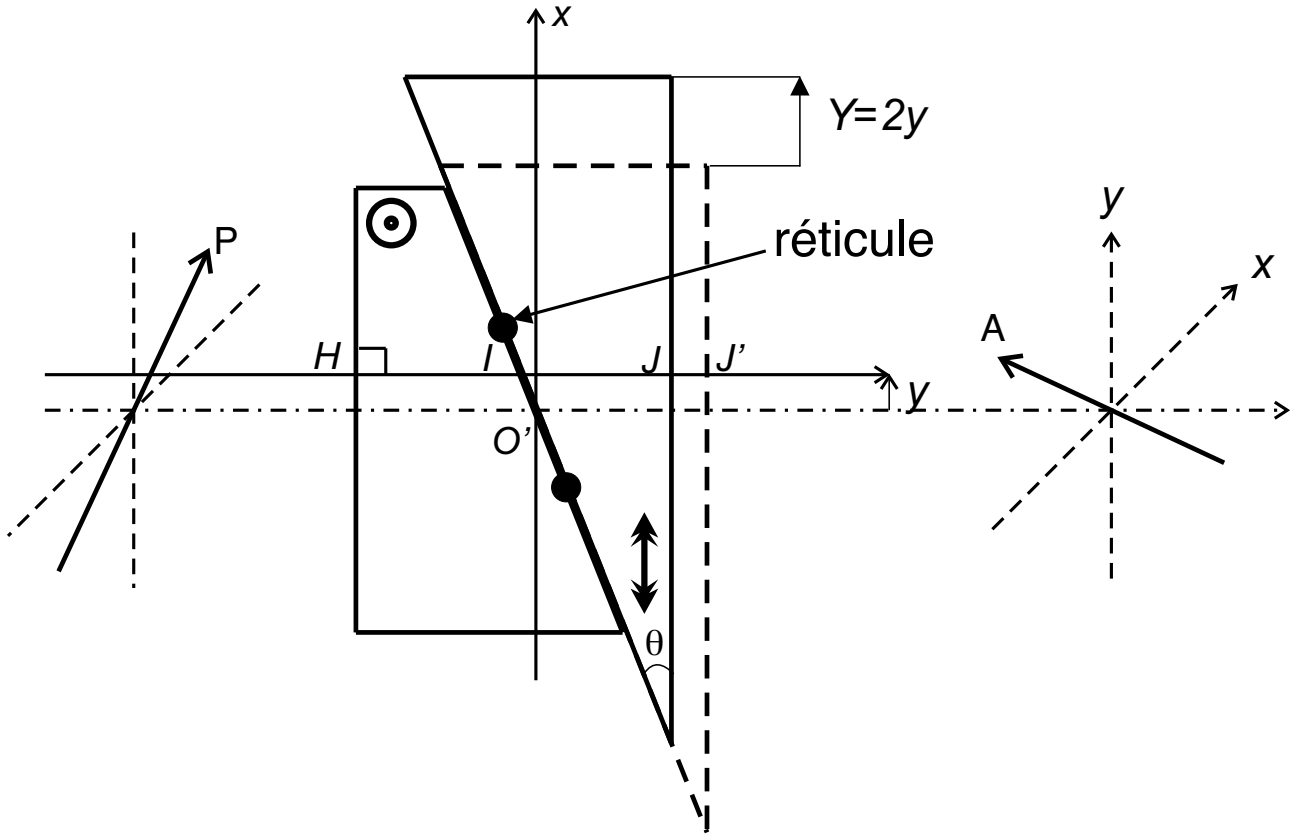


FIG. 2.10 – Schéma sur lequel s'appuie le calcul de la différence de marche entre vibrations ordinaire et extraordinaire, pour un rayon repéré par y . Sur ce schéma, le prisme mobile apparaît déplacé de Y par rapport à la position de référence marquée en pointillés, pour laquelle le rayon central ($y = 0$) ne présente aucune différence de marche.

2.4.1 Compensateur de BABINET

Le compensateur de BABINET est un prisme de WOLLASTON¹⁰ dont l'un des coins peut être déplacé à l'aide d'une vis micrométrique. Ceci permet de contrôler l'épaisseur traversée par un rayon dans le deuxième prisme, et donc la différence de marche entre les vibrations ordinaire et extraordinaire associées à ce rayon. Un réticule formé de deux traits fins horizontaux est fixé sur la face de sortie et permet d'encadrer une frange sombre.

À l'aide de ce dispositif, il est possible de compenser la différence de marche introduite par une lame mince à faces parallèles, et de la mesurer.

Différence de marche δ , entre rayons ordinaire et extraordinaire.

Le déplacement du prisme mobile du compensateur verticalement est repéré par Y .

Compensateur non déplacé ($Y = 0$) Considérons d'abord le cas où le prisme mobile occupe la position de référence $Y = 0$, telle que le rayon central (celui qui passe au milieu du

¹⁰Deux coins de quartz taillés parallèlement à l'axe et orientés de telle manière que leurs axes optiques respectifs soient orthogonaux

2.4 Mesure de la biréfringence de lames minces

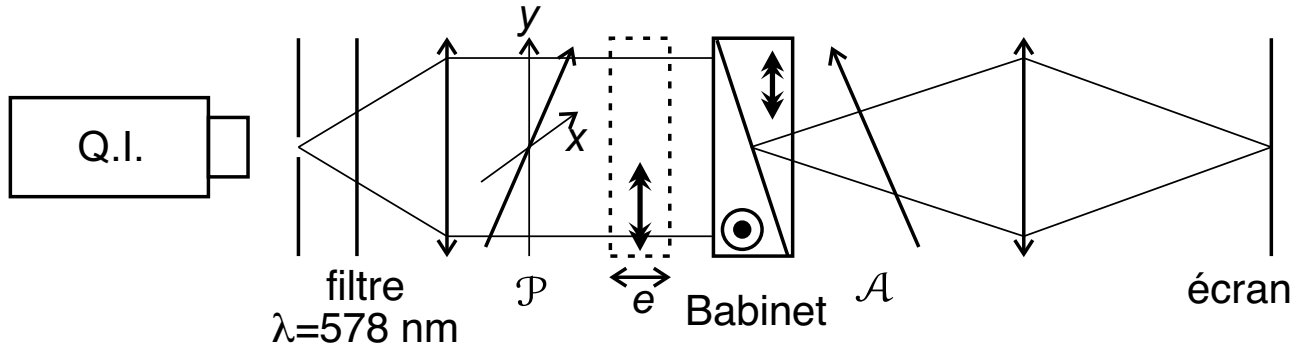


FIG. 2.11 – Montage optique pour visualiser les franges d'interférence d'un compensateur de BABINET. En pointillé est indiqué l'endroit où il faut placer la lame mince d'épaisseur e , dont le compensateur va permettre de mesurer la biréfringence.

réticule) traverse la même épaisseur $L/2$ de verre dans chaque prisme et ne subit alors aucune différence de marche.

Le prisme mobile occupant toujours la position non déplacée ($Y = 0$), déterminons à présent la différence de marche $\delta(y)$ entre la vibration ordinaire dans le premier prisme (**vibration alignée avec l'axe (Oy)**) et la vibration extraordinaire (**vibration alignée avec l'axe (Ox)**), et ce pour un rayon repéré par la hauteur y par rapport au rayon centrale ($y = 0$). On rappelle que la vibration ordinaire dans le premier prisme excite l'extraordinaire dans le deuxième prisme et vice versa. En prenant les notations de la Fig.2.10 on obtient alors :

$$\delta(y) = (n_o \overline{HI} + n_e \overline{I'J'}) - (n_e \overline{HI} + n_o \overline{I'J'}),$$

avec :

$$\begin{aligned} \overline{I'J'} &= L/2 + y \tan \theta \\ \overline{HI} &= L/2 - y \tan \theta \end{aligned}$$

si bien que :

$$\delta(y) = 2\Delta n_B y \tan \theta,$$

où $\Delta n_B \equiv n_e - n_o$ est la biréfringence du matériau constituant le compensateur de BABINET, en l'occurrence du quartz.

On se place d'abord en **lumière monochromatique** (longueur d'onde λ_0) et entre polariseur et analyseur croisés (voir Fig.2.11). L'intensité sur l'écran est alors donnée par

$$I_{\perp}(y) = I_0 \sin^2 \left[\pi \frac{\delta(y)}{\lambda_0} \right].$$

On observe ainsi des franges d'interférence horizontales. Les franges sombres apparaissent pour les différences de marches $\delta_k = k\lambda_0$ correspondant aux rayons repérés par les hauteurs $y_k = \frac{k\lambda_0}{2\Delta n_B \tan \theta}$. On peut montrer que les franges sont *localisées* dans un plan quasiment confondu avec l'interface de contact des deux prismes. Ce plan est défini comme le lieu des points d'intersection des rayons ordinaire et extraordinaire émergents associés à un rayon incident (on a vu, cf. *Exercice n°1* de la planche de TD, que ces deux rayons n'étaient pas

parallèles). Pour observer les franges nettes sur l'écran, il est donc nécessaire de faire l'image de l'interface entre les prismes.

En **lumière blanche** il apparaît une *frange noire* au centre du réticule. En effet, pour le rayon passant par le centre ($y = 0$) la différence de marche est nulle quelle que soit la longueur d'onde. Notons par contre que, de part et d'autre du centre, les franges sont irisées.

Principe de mesure de la différence de marche introduite par une lame biréfringente

La lame introduit une différence de marche supplémentaire $\delta_L \equiv \Delta n_L e = (n_y - n_x) e$ que l'on cherche à compenser en déplaçant le prisme mobile du BABINET. Désormais au rayon repéré par y , est associée la différence de marche

$$\delta'(y) = \Delta n_L e + 2\Delta n_B y \tan \theta \quad (2.7)$$

En lumière blanche, la *frange noire* ($\delta'(y_0) = 0$) est maintenant associée au rayon de hauteur $y_0 = -\Delta n_L e / (2\Delta n_B \tan \theta)$. Supposons par exemple que $n_y > n_x$. L'axe lent de la lame est alors porté par la direction (Oy). Sur l'image inversée (par la lentille) du compensateur sur l'écran, l'introduction de cette lame déplace la frange noire vers le haut¹¹. Il faut alors déplacer le prisme mobile *vers le haut* de la valeur $Y_0 > 0$ pour ramener la frange noire à sa position initiale, à savoir, entre les deux traits du réticule.

Pour déterminer analytiquement Y_0 , considérons la différence de marche¹² subie par le rayon de hauteur y lorsque le prisme mobile occupe la position $Y \neq 0$.

$$\delta'(y) = \Delta n_L e + (n_o \overline{HI} + n_e \overline{IJ}) - (n_e \overline{HI} + n_o \overline{IJ}),$$

Mais $\overline{IJ} = \overline{I'J'} - \overline{JJ'}$, où $\overline{JJ'} = Y \tan \theta$, si bien que :

$$\delta'(y) = \Delta n_L e + \Delta n_B \tan \theta (2y - Y). \quad (2.8)$$

La frange noire ($\delta' = 0$) est ramenée entre les deux traits du réticule ($y = 0$) lorsque le prisme mobile a été déplacé de :

$$Y_0 = \frac{\Delta n_L e}{\Delta n_B \tan \theta}. \quad (2.9)$$

Remarquons que la différence de marche introduite par la lame dépend de la longueur d'onde considérée λ_0 , du fait de la dispersion. Ainsi, pour exploiter la relation (2.9), il est nécessaire d'avoir au préalable mesuré indépendamment¹³ $\Delta n_B(\lambda_0) \tan \theta$. Pour ce faire, on se place en *lumière monochromatique* (λ_0) et on mesure le déplacement Y_i du prisme qui fait défilier une interfrange sur l'écran. Ce déplacement est donné par :

$$Y_i = \frac{\lambda_0}{\Delta n_B(\lambda_0) \tan \theta}.$$

La différence de marche introduite par la lame à la longueur d'onde λ_0 est alors donnée par :

$$\Delta n_L(\lambda_0) e = \frac{Y_0}{Y_i} \lambda_0.$$

¹¹Ce raisonnement suppose que le compensateur de BABINET soit orienté comme sur le figure 2.11, c'est à dire tel que l'axe optique du prisme par lequel rentre la lumière provenant de la source soit porté par (Ox). Dans ce cas $\Delta n_B = n_y - n_x \equiv n_o - n_e < 0$

¹²La lame étant présente.

¹³Ceci revient à calibrer le déplacement du prisme mobile en terme de différence de marche ajoutée.

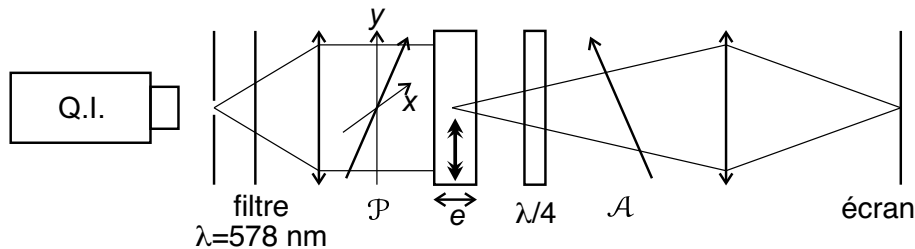


FIG. 2.12 – Montage optique pour la méthode de la lame quart d'onde

Protocole de mesure

On résume ici le protocole de mesure de la différence de marche.

- En l'absence de la lame, et *en lumière blanche*, on place la frange noire au centre du réticule, et on repère la position de la vis micrométrique.
- La lame biréfringente est ensuite ajoutée avec ses axes propres parallèles à ceux du compensateur. La frange noire n'est alors plus au centre du réticule¹⁴.
- On ramène la frange noire au centre du réticule en déplaçant le prisme mobile de la valeur Y_0 par rapport à sa position initiale.
- On calibre pour la longueur d'onde qui nous intéresse (λ_0), le déplacement du prisme en terme de différence de marche et on en déduit celle introduite par la lame.

Remarques

- Le compensateur de BABINET est bien adapté à la mesure de différences de marche pouvant excéder plusieurs fois la longueur d'onde. Pour des différences de marche plus petite, la méthode de la lame $\lambda/4$ décrite ci-après est plus précise.
- Sachant que $\Delta n_B > 0$, on peut en principe, à l'aide du compensateur de BABINET, déterminer l'axe lent d'une lame $\lambda/4$, à condition de connaître l'orientation de l'axe optique du prisme d'entrée (supposé être selon (Ox) sur la Fig. 2.10).

2.4.2 Méthode de la lame $\lambda/4$

Une lame $\lambda/4$ est introduite derrière la lame biréfringente, avec ses lignes neutres (OX) et (OY) , parallèles aux directions de \mathcal{P} et \mathcal{A} (cf. Fig.2.12), ces deux directions étant croisées ($\mathcal{P} \perp \mathcal{A}$) et orientées à 45° des lignes neutres de la lame biréfringente.

On cherche à mesurer le déphasage introduit par la lame biréfringente, entre les composantes x et y :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_y - n_x)e \equiv \varphi_0 + 2k\pi \quad \text{où } \varphi_0 \in [-\pi, \pi] \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

. À la sortie de cette lame, la polarisation est elliptique d'axes portés par $\mathcal{P} = (OX)$ et $\mathcal{A} = (OY)$ (cf. Fig.2.5) et d'après la relation 2.3 :

$$\begin{cases} E_X^{\text{out}} &= E_0 \cos \frac{\varphi}{2} e^{-i\omega t'} \\ E_Y^{\text{out}} &= iE_0 \sin \frac{\varphi}{2} e^{-i\omega t'}, \end{cases}$$

¹⁴Si cette frange noire s'est déplacée vers le haut, cela signifie que l'axe (Oy) est l'axe lent de la lame.

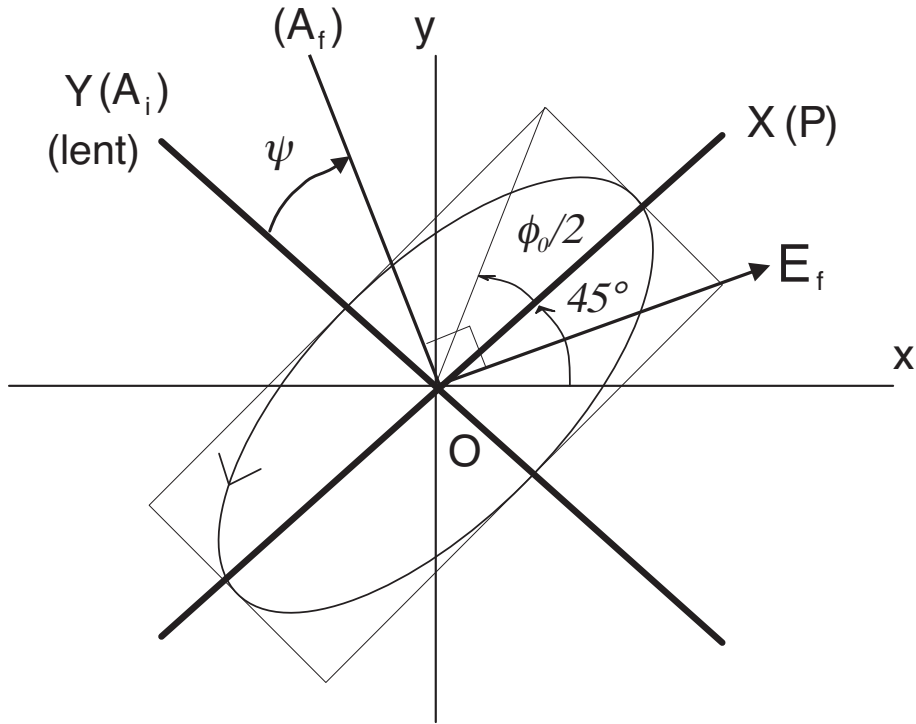


FIG. 2.13 – Action de la lame $\lambda/4$ sur la polarisation elliptique gauche issue de la lame biréfringente. A_i et A_f indiquent les positions de l'analyseur pour obtenir l'extinction, respectivement avant et après l'introduction de la $\lambda/4$.

soit, pour les composantes réelles :

$$\begin{aligned} \Re(E_X^{\text{out}}) &= (-1)^{|k|} E_0 \cos \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega t' \\ \Re(E_Y^{\text{out}}) &= (-1)^{|k|} E_0 \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin \omega t' \end{aligned} \tag{2.10}$$

Sens de parcours de l'ellipse. Le signe de $(-1)^{|k|}$ n'influe pas sur le sens de rotation puisqu'il change simultanément pour les deux composantes. On supposera k pair, pour simplifier.

- $0 \leq \varphi_0 \leq \pi$: $\cos \varphi_0/2 > 0$, $\sin \varphi_0/2 > 0$
Lorsque t' augmente à partir de $t' = 0$, $\Re(E_X)$ diminue et $\Re(E_Y)$ augmente : l'ellipse est donc *GAUCHE*
- $-\pi \leq \varphi_0 \leq 0$: $\cos \varphi_0/2 > 0$, $\sin \varphi_0/2 < 0$
Lorsque t' augmente, $\Re(E_X)$ diminue ainsi que $\Re(E_Y)$: l'ellipse est donc *DROITE*

L'ellipticité est donnée par

$$e \equiv \frac{\Re(E_Y^{\text{out}})}{\Re(E_X^{\text{out}})} = \tan \frac{\varphi_0}{2}$$

Nous remarquons que e est indépendante de la parité de k et que le signe de l'ellipticité donne le sens de parcours de l'ellipse, à savoir gauche si $e > 0$ et droite si $e < 0$.

Action de la lame $\lambda/4$ sur la polarisation elliptique de mêmes axes (OX, OY) On fait pour la suite l'hypothèse que l'axe lent¹⁵ de la lame quart d'onde est porté par (OY) (cf. Fig. 2.13).

2.4 Mesure de la biréfringence de lames minces

La lame quart d'onde transforme la polarisation elliptique obtenue en sortie de lame, en une polarisation linéaire. En effet, la lame $\lambda/4$ retarde de $\pi/2$ la phase de la composante selon (OY) de la vibration, par rapport à la composante selon (OX) . Donc, après la lame quart d'onde, les composantes du champ données en entrée par (2.10) valent :

$$\begin{cases} E'_X = E_0 \cos \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega t' \\ E'_Y = E_0 \sin \frac{\varphi_0}{2} \sin(\omega t' - \pi/2) = -E_0 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cos \omega t' \end{cases}$$

L'onde émergente a une polarisation linéaire correspondant à l'une des *diagonales du rectangle* dans lequel est inscrit l'ellipse (voir Fig. 2.13).

- Si l'ellipse est *gauche* (ie. $\varphi_0 \in [0, \pi]$) alors $\cos \varphi_0/2 > 0$ et $\sin \varphi_0/2 > 0$ et la vibration rectiligne émergente est selon la diagonale de pente *négative* du rectangle (dans le repère (O, OX, OY)). Pour éteindre cette rectiligne, il faut tourner l'analyseur, qui avant l'introduction de la lame biréfringente, était selon (OY) de l'angle $\boxed{\psi = -\varphi_0/2 < 0}$.
- Si l'ellipse est *droite* (ie. $\varphi_0 \in [-\pi, 0]$) alors $\cos \varphi_0/2 > 0$, $\sin \varphi_0/2 < 0$: la vibration rectiligne émergente est selon la diagonale de pente *positive* du rectangle. Pour éteindre cette rectiligne, il faut tourner l'analyseur, de l'angle $\boxed{\psi = -\varphi_0/2 > 0}$.

Notons que dans les deux cas de figures :

$$\tan \frac{\varphi_0}{2} = -\tan \psi.$$

Remarquons que cette relation change de signe si l'on choisit d'aligner l'axe lent de la lame $\lambda/4$ avec (OX) au lieu de (OY) .

Mode opératoire pour déterminer φ

Détermination de φ_0 ayant mesuré le signe et la valeur de ψ , pour une rotation d'un angle inférieur à π en valeur absolue, on obtient φ_0 .

φ_0	$-\pi$	0	π
signe de ψ	+		-
sens de parcours de l'ellipse	droit		gauche

Détermination de l'entier relatif k Pour accéder à la valeur de k ($\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$), il est indispensable d'utiliser une autre méthode, telle que le compensateur de Babinet. La méthode $\lambda/4$ trouve cependant son utilité dans le fait qu'elle offre une précision¹⁶ de mesure pour φ_0 plus grande que celle du compensateur de Babinet. Ce dernier fournit en lumière monochromatique à λ_0 la mesure du déphasage total que l'on peut écrire $\varphi = 2\pi\varepsilon + 2p\pi$. Cette expression fait ressortir l'entier p qui est défini par rapport aux déplacements du prisme mobile du compensateur $p \equiv E(Y_0/Y_i)$, et un excédent fractionnaire ε . Par simple identification, on constate que $p = k$ et $2\pi\varepsilon = \phi_0$. De plus :

- Si $0 \leq \varepsilon \leq 1/2$, alors $0 \leq 2\pi\varepsilon \leq \pi$ et $\varphi_0 = 2\pi\varepsilon > 0$
- Si $1/2 < \varepsilon < 1$, alors $\pi < 2\pi\varepsilon < 2\pi$ et $\varphi_0 = \pi - 2\pi\varepsilon < 0$.

Notons que si la mesure de l'entier p est facilement accessible sans ambiguïté avec le compensateur de Babinet, le compensateur est par contre bien moins adapté à la mesure précise de l'excédent fractionnaire. Pour une détermination précise de ϕ_0 (ou ε) la méthode de la lame quart-d'onde est préférable à celle du compensateur de Babinet.

¹⁶Cette précision est obtenue grâce au pointé précis de polarisation que permet un analyseur à pénombre utilisé à la place d'un simple polariseur dichroïque.

2.5 Lames minces en éclairage convergent

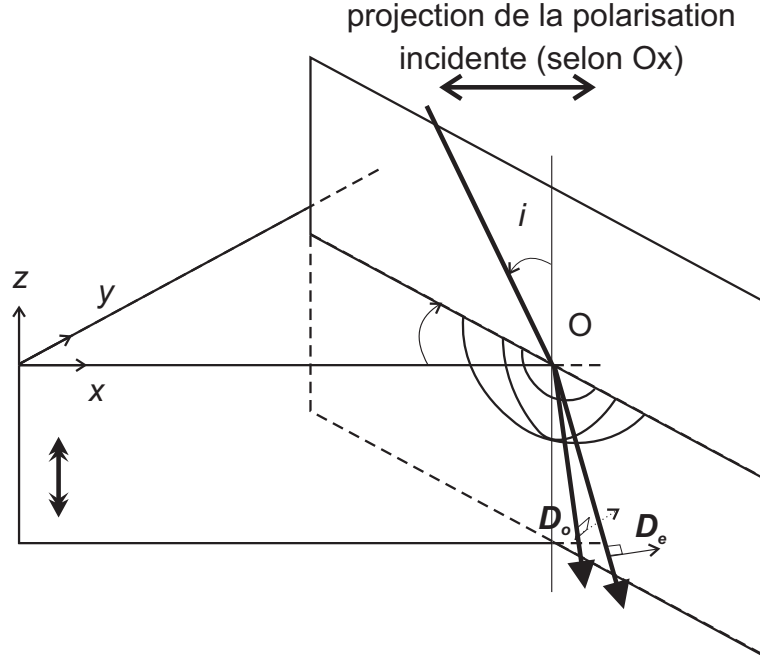


FIG. 2.15 – Rayon arrivant sous incidence oblique sur une lame taillée perpendiculairement à l’axe optique. La direction Ox correspond à la projection de la polarisation incidente sur l’interface. La construction de DESCARTES a été utilisée pour construire les normales réfractées.

$$N_e \text{ appartient à l'ellipse de } 1/2 \text{ axes } n_e, n_o \quad : \quad \frac{y^2}{n_e^2} + \frac{z_e^2}{n_o^2} = 1 \quad (\text{a})$$

$$N_o \text{ appartient au cercle de rayon } n_o \quad : \quad y^2 + z_o^2 = n_o^2 \quad (\text{b})$$

où $y \equiv OH \simeq \sin i$

En supposant l’angle d’incidence pas “trop” grand : $x \simeq i$

$$\left. \begin{array}{l} (\text{a}) \rightarrow z_e \simeq n_o \left(1 - \frac{i^2}{2n_e^2}\right) \\ (\text{b}) \rightarrow z_o \simeq n_o \left(1 - \frac{i^2}{2n_o^2}\right) \end{array} \right| \Rightarrow N_e N_o = z_e - z_o \simeq \frac{1}{2} i^2 \Delta n \frac{n_e + n_o}{n_e^2 n_o^2}$$

Et $n_e + n_o = 2n_o + \Delta n$
Ainsi, au premier ordre en $\frac{\Delta n}{n}$: $N_e N_o \simeq \frac{1}{2} i^2 2n_o \frac{\Delta n}{n_e^2 n_o^2}$

$$\boxed{\delta = \frac{i^2}{n_e n_o} \frac{\Delta n}{n_e} e}$$

Les franges d’interférences forment des *anneaux d’égale inclinaison à l’infini*.

2.5.2 Origine des lignes sombres (la croix noire)

Le plan d’incidence est repéré par l’angle θ par rapport à la projection de la polarisation incidente \mathcal{P} sur l’interface (direction Ox), et l’on note i l’angle d’incidence (voir Fig. 2.15).

Dans le cristal, les vibrations \mathbf{D}_e et \mathbf{D}_o sont respectivement contenues dans le plan d'incidence et orthogonale à celui-ci.

Les projections de $\mathbf{D}_e(\theta)$ et $\mathbf{D}_o(\theta)$ sur le plan d'observation font les angles θ et $\pi/2 - \theta$ avec la projection de \mathcal{P} .

Ces deux axes $Ox(\theta)$ et $Oy(\theta)$ définissent les lignes neutres de la lame pour le plan d'incidence repéré par θ . On sait alors (voir relation (2.5)) que l'intensité a pour expression :

$$I_{\perp}(\theta) = I_0 \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

On constate que $I_{\perp}(\theta) = 0$ pour tout i si $\theta = 0$ ou $\pi/2$ définissant ainsi 2 lignes noires correspondant aux directions de l'analyseur et du polariseur.

Chapitre 3

Biréfringence induite par un champ électrique

3.1 Introduction

Des contraintes extérieures appliquées sur un milieu optiquement transparent peuvent induire une polarisation (par création de dipôles ou réorientation de dipôles permanents) qui crée ou modifie la biréfringence.

C'est le cas de l'application d'un champ électrique statique ou "lentement" variable (à la pulsation $\omega_{\text{mod}} \ll \omega_{\text{opt}}$) qui déforme la distribution de charges. Si le milieu est initialement isotrope, il devient biréfringent uniaxe (dans la direction de \mathbf{E}) sous l'action d'un champ \mathbf{E}^{mod} . C'est l'effet *électrooptique*¹.

Nous distinguerons deux effets électrooptiques suivant que la variation de $1/n^2$ en fonction de \mathbf{E}^{mod} est :

- linéaire : cas des milieux *non centrosymétriques*. C'est l'effet POCKELS
- quadratique : cas des milieux *centrosymétriques*. C'est l'effet KERR

Ces deux effets sont largement utilisés notamment dans le domaine des télécommunications optiques pour moduler l'intensité ou la phase d'un faisceau lumineux. Ils permettent entre autres le multiplexage et la commutation (interrupteur) à haut débit (plusieurs Gbits/s) compte tenu des temps de réponse très courts (sub picoseconde) des propriétés électrooptiques à l'excitation extérieure.

3.2 Généralités sur les effets électro-optiques

3.2.1 Hypothèse du régime optique linéaire

On considère un milieu (cristal ou fluide) transparent dont l'indice linéaire de réfraction va être modifié par l'application d'un champ extérieur lentement variable à la pulsation ω_{mod} . On se place donc dans l'hypothèse où la modification de l'indice de réfraction n'est due qu'au

¹Les contraintes mécaniques déforment également la maille cristalline et modifient le champ électrique local vu par les "nuages" électroniques : c'est l'effet *photoélastique*. Dans un milieu non centrosymétrique, un champ électrique appliqué produit aussi un effet *piézoélectrique* : la maille cristalline est déformée sous l'effet du champ. Cette déformation produit à son tour un changement d'indice par effet photoélastique. Pour des fréquences de modulation très supérieures aux fréquences propres de résonance mécanique du cristal, la contribution photoélastique à la variation d'indice est cependant négligeable devant la contribution électrooptique.

champ lentement variable appliqué $\mathbf{E}^{\text{mod}}(\omega_{\text{mod}})$ et non au champ \mathbf{E}^{opt} présent dans le matériau² lorsqu'un faisceau le traverse, ce qui est toujours le cas si :

$$\|\mathbf{E}^{\text{opt}}\| \ll \|\mathbf{E}^{\text{mod}}(\omega_{\text{mod}})\|$$

3.2.2 Déformation de l'ellipsoïde des indices sous l'effet du champ électrique

Lorsque le milieu transparent est traversé par un faisceau lumineux, et dans le même temps placé dans le champ électrique extérieur \mathbf{E}^{mod} , le champ électrique total \mathbf{E}^{tot} à l'intérieur du matériau peut être écrit :

$$\mathbf{E}^{\text{tot}} = \mathbf{E}^{\text{opt}} \cos \omega_{\text{opt}} t + \mathbf{E}^{\text{mod}} \cos \omega_{\text{mod}} t$$

avec l'hypothèse que $\|\mathbf{E}^{\text{opt}}\| \ll \|\mathbf{E}^{\text{mod}}(\omega_{\text{mod}})\|$.

Ce champ total provoque un changement d'indice n , de telle sorte que le tenseur d'imperméabilité $[\varepsilon_r^{-1}] \equiv \frac{\varepsilon_0}{[\varepsilon]}$ varie d'une quantité $\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{ij}$. Dans le système d'axes propres (Ox, Oy, Oz) , le champ électrique appliqué déforme l'ellipsoïde des indices en introduisant des termes croisés

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{n_x^2} + \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{xx} \right] x^2 + \left[\frac{1}{n_y^2} + \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{yy} \right] y^2 + \left[\frac{1}{n_z^2} + \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{zz} \right] z^2 \\ & + 2\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{yz} yz + 2\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{xz} xz + 2\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{xy} xy = 1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Les axes (Ox, Oy, Oz) ne sont plus les axes propres : l'ellipsoïde a subi une déformation (termes diagonaux : dilatation/contraction) ainsi qu'une rotation (termes extra diagonaux).

Les variations d'indices³ peuvent être développées en puissance de \mathbf{E}^{tot} :

$$\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{ij} = \sum_{k=1}^3 r_{ijk} E_k^{\text{tot}} + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \rho_{ijkl} E_k^{\text{tot}} E_l^{\text{tot}} + \dots$$

Les tenseurs $[r]$ et $[\rho]$ étant respectivement de rang 3 et 4. Les produits $E_k^{\text{tot}} E_l^{\text{tot}}$ contiennent deux types de termes :

- des termes carrés : $E_k^{\text{opt}} E_l^{\text{opt}} \cos^2 \omega_{\text{opt}} t + E_k^{\text{mod}} E_l^{\text{mod}} \cos^2 \omega_{\text{mod}} t$
- des termes croisés : $E_k^{\text{opt}} E_l^{\text{mod}} \cos \omega_{\text{opt}} t \cos \omega_{\text{mod}} t$

Dans l'approximation de l'optique linéaire, on ne retient que les termes dominant à l'ordre le plus bas

$$\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{ij} = \sum_{k=1}^3 r_{ijk} E_k^{\text{mod}} \cos \omega_{\text{mod}} t + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \rho_{ijkl} E_k^{\text{mod}} E_l^{\text{mod}} \cos^2 \omega_{\text{mod}} t \quad (3.2)$$

Lorsque le cristal est centrosymétrique, ses propriétés optiques sont invariantes par inversion ce qui impose que $r_{ijk} \equiv 0$ (puisque r_{ijk} se transforme, dans une inversion, en $-r_{ijk}$ comme xyz) : il n'y a pas d'effet de biréfringence linéaire induite par un champ électrique (effet POCKELS) dans un cristal centrosymétrique. Le premier effet non nul est quadratique (effet KERR).

²Il existe aussi des effets électrooptiques auto-induits par le champ optique intense, dont on doit tenir compte dans le régime de l'optique non linéaire (éclairage par laser intense).

³on utilisera indifféremment les indices i, j, k ou x, y, z

3.3 Biréfringence induite linéaire : effet POCKELS

On ne considère dans ce paragraphe que le premier terme linéaire en \mathbf{E} , alors

$$\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{ij} \simeq \sum_{k=1}^3 r_{ijk} E_k^{\text{mod}} \cos \omega_{\text{mod}} t$$

Puisque $[\varepsilon_r^{-1}]$ est symétrique, on doit avoir $\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{ij} = \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{ji}$.

Or, $\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{ij} = \sum_{k=1}^3 r_{ijk} E_k^{\text{mod}} \cos \omega_{\text{mod}} t$ et $\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{ji} = \sum_{k=1}^3 r_{jik} E_k^{\text{mod}} \cos \omega_{\text{mod}} t$. Ceci étant valable quel que soit E^{mod} , on en déduit que

$$r_{ijk} = r_{jik}$$

Exemples de cristaux non centrosymétriques présentant un effet POCKELS :

Niobate de lithium	:	LiNbO ₃
KDP	:	KH ₂ PO ₄
ADP	:	(NH ₄)H ₂ PO ₄

Ordre de grandeur des coefficients du tenseur électrooptique :

$$|r_{ijk}| \simeq 10^{-12} \text{ m/V}$$

3.3.1 Notations de VOIGT

Pour décrire les modifications de $\left(\frac{1}{n^2} \right)_{ij}$, on peut regrouper les indices par paires :

$x, x \equiv 1, 1 \rightarrow 1$	$y, z \equiv 2, 3 \rightarrow 4$
$y, y \equiv 2, 2 \rightarrow 2$	$z, x \equiv 3, 1 \rightarrow 5$
$z, z \equiv 3, 3 \rightarrow 3$	$x, y \equiv 1, 2 \rightarrow 6$

On regroupe les 2 premiers indices ij du tenseur $[r]_{ijk}$ en leur affectant les notations réduites décrites ci-dessus, l'indice k courant de 1 à 3. Ainsi, la connaissance d'une matrice 6×3 suffit à décrire complètement le tenseur $[r]_{ijk}$.

Finalement, on obtient

$$\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{\alpha} = \sum_{k=1}^3 r_{\alpha k} E_k$$

où $\alpha = 1 \dots 6$ et $k = 1 \dots 3$

3.3.2 Exemple de modulateur électrooptique en configuration d'électrodes transverses : le niobate de lithium (LiNbO₃)

Le niobate de lithium est un milieu biréfringent uniaxe *néгатif*. On note 3 ou (Oz) son axe optique. Le cristal de LiNbO₃ possède une maille rhomboédrique (trigonale). Il appartient au groupe de symétrie d'espace $3m$. Ce qui signifie que l'axe (Oz) est un axe de symétrie d'ordre 3 et qu'il existe trois symétries miroirs selon des plans contenant (Oz) (voir fig.3.2). On va

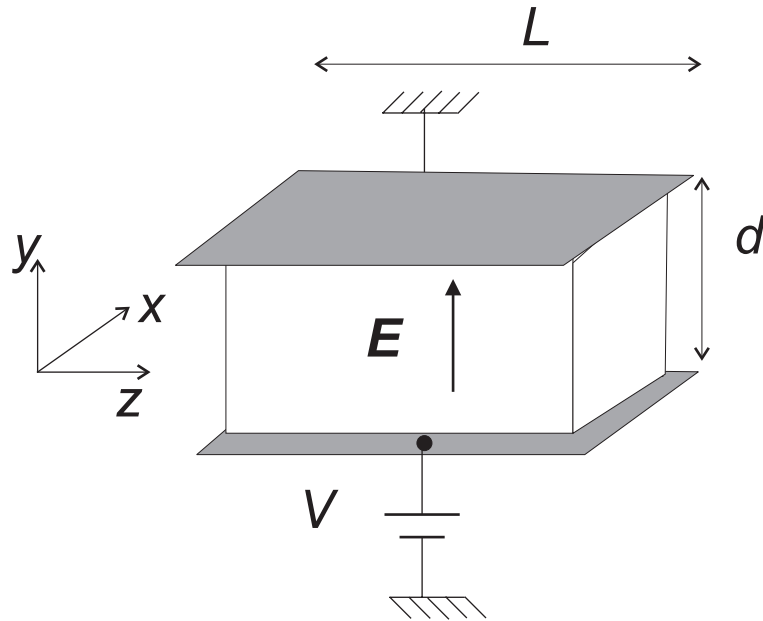


FIG. 3.1 – Cellule Pockels en niobate de lithium : configuration transverse des électrodes.

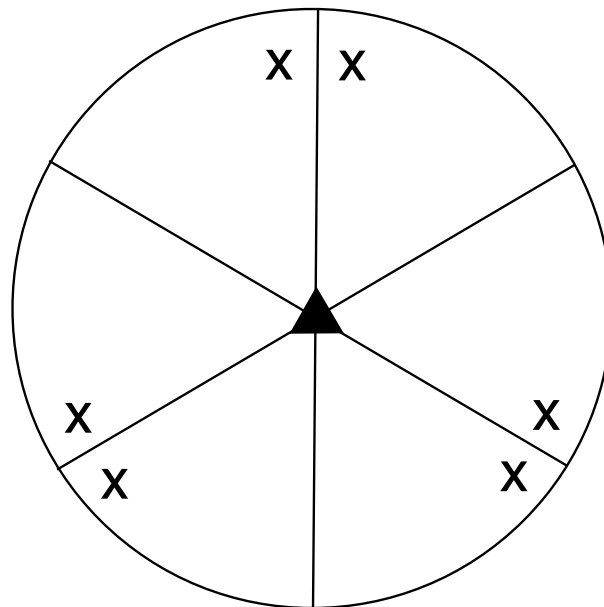


FIG. 3.2 – Éléments de symétrie du groupe de symétrie d'espace $3m$. Le triangle au centre indique que l'axe (Oz) perpendiculaire à la feuille est de symétrie 3. Les lignes indiquent les trois symétries miroir. Les croix symbolisent les positions atomiques équivalentes, du même côté du plan de la feuille (en l'occurrence, sous cette feuille).

3.3 Biréfringence induite linéaire : effet POCKELS

passer en revue ces différents éléments de symétrie afin de voir quelles conditions ils imposent sur les coefficients du tenseur $[r]$. L'application des éléments de symétrie ne doit pas modifier les propriétés du cristal et doit donc laisser invariants les différentes grandeurs caractéristiques de ces propriétés.

- Par la symétrie miroir par rapport au plan (Oy, Oz) les coordonnées se transforment selon :

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow -x_1 \\ x_2 &\rightarrow x_2 \\ x_3 &\rightarrow x_3 \end{aligned}$$

Ainsi, r_{221} devient $-r_{221}$.

Or, par cette rotation, r_{221} doit rester inchangé,

donc $r_{221} = 0$, c'est à dire, pour la matrice simplifiée, $r_{21} = 0$. Il en sera de même pour tous les coefficients comportant un nombre impair de 1, à savoir :

coefficient	indices
$r_{11} = 0$	$(1,1,1)$
$r_{21} = 0$	$(2,2,1)$
$r_{31} = 0$	$(3,3,1)$
$r_{41} = 0$	$(2,3,1)$
$r_{52} = 0$	$(3,1,2)$
$r_{53} = 0$	$(3,1,3)$
$r_{62} = 0$	$(1,2,2)$
$r_{63} = 0$	$(1,2,3)$

- Effet de la symétrie d'ordre 3 par rapport à l'axe Oz . Il s'agit d'écrire l'invariance des composantes du tenseur $[r]$ par la rotation d'angle $2\pi/3$. Cette dernière conduit à l'égalité de plusieurs coefficients, ou a des coefficients égaux mais de signes opposés. Nous ne détaillerons pas ici les démonstrations.

Bilan Il n'y a finalement que 8 coefficients non nuls dont 4 indépendants :

$$\begin{pmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ellipsoïde des indices pour le LiNbO_3

On considère la situation de la figure 3.1, dans laquelle la lumière se propage selon l'axe optique (Oz) et le champ électrique est appliqué transversalement selon la direction (Oy) . L'équation de l'ellipsoïde des indices modifié s'écrit alors, après simplification par les coefficients nuls du tenseur électrooptique :

$$\left(\frac{1}{n_o^2} - r_{22}E_y\right)x^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_y\right)y^2 + \frac{z^2}{n_e^2} + 2r_{51}E_yyz = 1. \quad (3.3)$$

Le champ électrique appliqué a pour effet de rendre le milieu biaxe et de tourner l'ellipsoïde des indices dans le plan (Oyz) mais d'un petit angle seulement.

Soient (Oy') et (Oz') les nouveaux axes propres. (Ox) reste axe propre car il n'y a pas de termes croisés faisant intervenir la composante x . On note θ l'angle dont ont tourné (Oy) et (Oz) , et alors :

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \cos \theta - z' \sin \theta \\ z &= z' \cos \theta + y' \sin \theta \end{aligned}$$

Pour que (Oy') et (Oz') soient les nouveaux axes propres de l'ellipsoïde, il faut que le coefficient du terme croisé $y'z'$ soit nul, soit :

$$\left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2} - r_{22}E_y \right) \sin \theta \cos \theta + r_{51}E_y(2 \cos^2 \theta - 1) = 0$$

On peut alors se convaincre que θ est un petit angle, en considérant les **valeurs numériques** des paramètres :

- indice de réfraction à la longueur d'onde de 632.8 nm : $n_e = 2.21$ et $n_o = 2.29$
 - coefficients du tenseur électrooptique $r_{51} = 28$ pm/V, $r_{22} = 6.4$ pm/V
 - différence de potentiel appliquée de $V \approx 500$ V entre les électrodes séparées de $d = 3$ mm.
- Ces paramètres conduisent à $\theta = 3.3 \times 10^{-4}$ rad (soit 0.02°) $\ll 1$.

L'équation (3.3) de l'ellipsoïde des indices devient, dans le repère des axes propres :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n_o^2} - r_{22}E_y \right) x'^2 + \left[\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_y \right) \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + r_{51}E_y \sin 2\theta \right] y'^2 \\ + \left[\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_y \right) \sin^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{n_e^2} - r_{51}E_y \sin 2\theta \right] z'^2 = 1. \end{aligned}$$

et pour θ petit, $\cos \theta \approx 1$ et $\sin \theta \approx \theta$, d'où :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n_o^2} - r_{22}E_y \right) x'^2 + \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_y + \frac{\theta^2}{n_e^2} + 2r_{51}E_y\theta \right) y'^2 \\ + \left[\left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_y \right) \theta^2 + \frac{1}{n_e^2} - 2r_{51}E_y\theta \right] z'^2 = 1. \end{aligned}$$

Les nouveaux indices principaux satisfont donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{n_{x'}^2} = \frac{1}{n_o^2} - r_{22}E_y \\ \frac{1}{n_{y'}^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_y + \frac{\theta^2}{n_e^2} + 2r_{51}E_y\theta \\ \frac{1}{n_{z'}^2} = \left(\frac{1}{n_o^2} + r_{22}E_y \right) \theta^2 + \frac{1}{n_e^2} - 2r_{51}E_y\theta. \end{cases}$$

En première approximation (*i.e.* pour θ très petit), on peut négliger la rotation et alors les

indices sont donnés par

$$\begin{cases} n_{x'} \approx \frac{n_o}{\sqrt{1 - n_o^2 r_{22} E_y}} \approx n_o \left(1 + \frac{1}{2} n_o^2 r_{22} E_y \right) \\ n_{y'} \approx \frac{n_o}{\sqrt{1 + n_o^2 r_{22} E_y}} \approx n_o \left(1 - \frac{1}{2} n_o^2 r_{22} E_y \right) \\ n_{z'} \approx n_e \end{cases}$$

3.4 Biréfringence induite quadratique : effet KERR

Le déphasage introduit par le modulateur entre les composantes x et y de la vibration à la longueur d'onde λ_0 est ainsi donné par :

$$\varphi \equiv \frac{2\pi}{\lambda_0} L(n_{y'} - n_{x'}) = -\frac{2\pi L n_o^3 r_{22} V}{\lambda_0 d}$$

La différence de potentiel V_π correspondant à la valeur pour laquelle le modulateur se comporte comme une lame demi-onde ($\varphi = \pi$) est donnée par :

$$V_\pi = \frac{\lambda_0 d}{2L n_o^3 r_{22}}$$

L'application numérique dans le cas de la cellule de la préparation à l'agrégation de longueur $L = 40$ mm et d'épaisseur $d = 3$ mm (voir les valeurs des indices et des coefficients électrooptiques à la page précédente) donne $V_\pi \approx 310$ V, ce qui est conforme à la mesure que l'on peut faire expérimentalement.

3.3.3 Application à la modulation

La principale application des cellules de Pockels est la modulation électro-optique de la phase ou de l'intensité de la lumière qui les traverse. Il faut pour cela au préalable se placer dans une plage *linéaire* de la caractéristique intensité lumineuse–tension appliquée. Pour cela deux méthodes existent. Soit on applique une la modulation BF autour de la tension $V_{\pi/2}$, soit on fait précéder la cellule d'une lame $\lambda/4$ qui a le même effet, et on module autour de la tension nulle.

On se contentera dans ce cours d'illustrer la modulation d'intensité.

→ Expérience de modulation d'intensité avec un signal radio BF.

3.4 Biréfringence induite quadratique : effet KERR

Lorsque le milieu est *centrosymétrique* (cas des liquides, ou de certaines céramiques par exemple), l'effet linéaire (POCKELS) est absent et le premier effet électrooptique non nul est quadratique en champ \mathbf{E} : c'est l'effet KERR.

On peut montrer (cf. Annexe D) que, dans les notations de VOIGT⁴, le tenseur $[\rho]$ d'un milieu isotrope peut être représenté par la matrice 6×6 :

$$[\rho] = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{12} & \rho_{11} & \rho_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{12} & \rho_{12} & \rho_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\rho_{11} - \rho_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\rho_{11} - \rho_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\rho_{11} - \rho_{12}) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

⁴On peut effectivement encore utiliser la notation de VOIGT, comme pour r_{ijk} . En effet, en ne retenant que l'effet KERR, $\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \rho_{ijkl} E_k E_l$ mais $E_k E_l$ est symétrique ainsi que le tenseur perméabilité $\left[\frac{1}{n^2} \right]$, donc $\rho_{ijkl} = \rho_{jilk}$.

Si on choisit le champ électrique selon l'axe (Ox_3), le tenseur d'imperméabilité devient :

$$[\varepsilon_r^{-1}] = [\varepsilon_r^{-1}]_0 + \begin{pmatrix} \rho_{12} \\ \rho_{12} \\ \rho_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} E_3^2 \text{ et l'ellipsoïde des indices a pour équation :}$$

$$\left(\frac{1}{n^2} + \rho_{12}E^2\right) x_1^2 + \left(\frac{1}{n^2} + \rho_{12}E^2\right) x_2^2 + \left(\frac{1}{n^2} + \rho_{11}E^2\right) x_3^2 = 1$$

C'est un ellipsoïde de révolution d'axe (Ox_3), d'équation :

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{n_o^2} + \frac{x_3^2}{n_e^2} = 1$$

Le milieu est devenu biréfringent uniaxe.

$$\begin{cases} n_o \simeq n - \frac{1}{2}\rho_{12}n^3E^2 \\ n_e \simeq n - \frac{1}{2}\rho_{11}n^3E^2 \end{cases} \quad \boxed{\Delta n = -\frac{n^3}{2}E^2(\rho_{11} - \rho_{12})}$$

On trouve bien une biréfringence quadratique en champ électrique : $\boxed{\Delta n = K\lambda E^2}$, où K est dite constante de KERR.

Ordre de grandeur : $K \simeq 10^{-16}$ à 10^{-9} m.V⁻².

Exemples de milieux KERR

- liquides nitrobenzène C₆H₅NO₂ | Les 2 produits sont À la prépa. agreg.
 sulfure de carbone CS₂ | nocifs et explosifs!!
- cristaux céramique PLZT
 (Pb, Lanthane, Zirconium, Tantale)

nous possédons une cellule Kerr du type PLZT qui présente une très fort effet KERR : $K \approx 2 \times 10^{-9}$ m.V⁻².

De la même manière qu'avec une cellule Pockels, on peut aussi avec une cellule Kerr réaliser des modulateurs, tel un modulateur d'intensité entre polariseur et analyseur croisés à 45° de \mathbf{E} .

Chapitre 4

Biréfringence circulaire

On s'intéresse dans ce dernier chapitre, à la propriété qu'ont certains corps, cristaux, molécules en solution, . . . de faire tourner la polarisation. On parle alors de "*pouvoir rotatoire*".

4.1 Historique

- 1811 ARAGO découvre qu'un *cristal de quartz* (taillé perpendiculairement à l'axe optique) fait tourner la polarisation d'une onde polarisée rectilignement.
- 1815 BIOT découvre le *pouvoir rotatoire* de molécules organiques (essence de térébentine) en solution.
- 1822 HERSCHEL prouve que le pouvoir rotatoire du quartz est associé à 2 structures cristallines distinctes (droite et gauche) images l'une de l'autre dans un miroir.
- 1825 FRESNEL propose un modèle étendant la théorie de la biréfringence linéaire : il introduit les états propres de polarisation circulaire droits et gauches. Il "vérifie" sa théorie en construisant un prisme séparateur de polarisation circulaire.
- 1848 PASTEUR sépare le racémique de l'acide tartrique en ses deux formes énantiomères : c'est le début de la *stéréochimie*.

Le pouvoir rotatoire trouve donc son origine dans *l'arrangement relatif des atomes*.

Il est remarquable que la quasi totalité des molécules naturelles de la vie sur Terre soient produites sous un seul type d'énantiomère¹. Par exemple, les sucres sont D et les acides aminés L².

4.2 Modélisation microscopique élémentaire

On considère le cristal de quartz (SiO_2). Les atomes de Si et O sont disposés sur une hélice d'axe l'axe optique³. En suivant les liaisons Si–O–Si, on tourne soit vers la droite, soit vers la gauche suivant le type de quartz considéré.

¹Il existe cependant une exception à cette loi naturelle : certains antibiotiques, comme la pénicilline. Là se trouve peut-être l'origine de leur pouvoir léthal sur les bactéries. . .

²cf. nomenclature des biochimistes pour la signification de D et L

³cf. *Optics*, E. Hecht, Addison Wesley.

Soit la situation dans laquelle le champ \mathbf{E}^{in} de l'onde plane incidente est parallèle à l'axe optique. Sous l'effet de ce champ oscillant, les électrons se déplacent le long de l'hélice (supposée "conductrice") engendrant un dipôle électrique oscillant $\mathbf{p}(t)$, associé au mouvement axial, et un dipôle magnétique oscillant $\mathbf{m}(t)$ correspondant au mouvement de rotation, source d'une densité de courant \mathbf{j} .

Le sens de $\mathbf{p}(t)$ est indépendant de celui de l'hélice mais pas celui de $\mathbf{m}(t)$.

On sait que pour un dipôle électrique oscillant, le champ électrique rayonné *en un point du plan d'observation perpendiculaire à \mathbf{p} , situé à une distance r* , peut être écrit :

$$\boxed{\mathbf{E}_p^{\text{ray}} = \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{c^2 r}} \quad \text{où } \mathbf{p}(t) = \alpha e^{-i\omega t} \mathbf{E}^{\text{in}} \text{ avec } \alpha > 0 \text{ polarisabilité.}$$

Donc $\ddot{\mathbf{p}} = -\alpha\omega^2 \mathbf{E}^{\text{in}}$

$\mathbf{E}_p^{\text{ray}}$ est donc opposé à \mathbf{E}^{in} à chaque instant.

De même le champ magnétique produit par $\mathbf{m}(t)$ s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{B}_m^{\text{ray}} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \frac{\ddot{\mathbf{m}}}{c^2 r}}$$

Le champ électromagnétique ($\mathbf{E}_m^{\text{ray}}, \mathbf{B}_m^{\text{ray}}$) rayonné par le dipôle magnétique a localement, la structure d'une onde plane : $\mathbf{E}_m^{\text{ray}} = \omega \mathbf{B}_m^{\text{ray}} \wedge \mathbf{k} / k^2 = c \mathbf{B}_m \wedge \mathbf{u}$.

On en déduit l'orientation de $\mathbf{E}_m^{\text{ray}}$.

Pour un quartz gauche, la superposition des 3 champs \mathbf{E}^{in} , $\mathbf{E}_m^{\text{ray}}$ et $\mathbf{E}_p^{\text{ray}}$ produit un champ \mathbf{E} qui a tourné vers la gauche par rapport à \mathbf{E}^{in} .

4.3 Théorie macroscopique de l'activité optique naturelle

4.3.1 Relation entre \mathbf{D} et \mathbf{E} dans un milieu optiquement actif

Nous avons vu que, pour rendre compte de la biréfringence linéaire, il fallait que \mathbf{D} et \mathbf{E} soient reliés par une relation tensorielle qui traduit l'anisotropie du milieu. Cette relation peut être écrite dans l'espace réciproque (après transformée de FOURIER)

$$D_j(\omega) = \varepsilon_{jl}(\omega) E_l(\omega).$$

La dépendance en fréquence de ε_{jl} rend compte de la dispersion en fréquence du milieu et provient de ce que $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ peut dépendre de $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t')$ à des instants t' antérieurs à t . Dans un modèle d'électron élastiquement lié, cet effet résulte de l'inertie de l'électron.

De façon analogue, il peut exister une *dispersion spatiale* : $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ peut en effet dépendre de \mathbf{E} en des points \mathbf{r}' voisins de \mathbf{r} . Si $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ n'est pas uniforme, on ne pourra alors déterminer le moment dipolaire induit sur une molécule que si l'on connaît $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ dans tout le volume qu'occupe cette molécule, de taille $\simeq a$. De façon plus formelle, on écrit :

$$D_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi^3} \int \varepsilon(\mathbf{r}')_{jl} E_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

On peut aussi prendre en compte la dispersion spatiale dans le développement en série de TAYLOR $\mathbf{D}(\mathbf{E})$. Ce développement fait apparaître les termes $\frac{\partial E_l}{\partial x_m} x_m$ et $\frac{\partial^2 E_l}{\partial x_m \partial x_p} x_m x_p \dots$, dont

4.3 Théorie macroscopique de l'activité optique naturelle

les ordres de grandeur respectifs sont $\frac{aE_l}{\lambda}$ et $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 E_l \dots$. Ce développement correspond donc à un développement en puissances de $\frac{a}{\lambda}$.

À l'ordre le plus bas en $\frac{a}{\lambda}$, on peut écrire que $D_j = \varepsilon_{jl}E_l + \varepsilon_0 \gamma_{jlm} \frac{\partial E_l}{\partial x_m}$ qui n'est autre que la relation (1).

Considérons la propagation d'une onde plane monochromatique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$, alors $\frac{\partial E_l}{\partial x_m} = ik_m E_l$. La composante D_j peut alors être réécrite dans l'espace réciproque (ω, \mathbf{k})

$$D_j(\omega, \mathbf{k}) = \tilde{\varepsilon}_{jl}(\omega, \mathbf{k}) E_l(\omega, \mathbf{k}),$$

où le tenseur de permittivité $[\tilde{\varepsilon}]$ défini par $\tilde{\varepsilon}_{jl}(\omega, \mathbf{k}) \equiv \varepsilon_{jl}(\omega) + i \varepsilon_0 k_m \gamma_{jlm}$ prend aussi en compte un effet de dispersion spatiale en plus de l'effet de dispersion en fréquence.

Cette dispersion spatiale, à travers le tenseur d'ordre 3 $[\gamma]$ *a priori* complexe, rend compte de la polarisation rotatoire à l'échelle macroscopique comme nous allons le voir. C'est un tenseur *intrinsèque* du matériau et de ses symétries cristallines. Cet effet de dispersion est difficile à observer car il est dans le rapport $\frac{a}{\lambda}$ avec celui de la dispersion spectrale.

Propriétés du tenseur $[\gamma]$

Le tenseur $[\tilde{\varepsilon}](\omega, \mathbf{k})$ est la transformée de FOURIER du tenseur diélectrique effectif. Rappelons que pour un milieu parfaitement transparent, ce dernier est un tenseur symétrique réel (voir Annexe A) donc $\tilde{\varepsilon}_{jl}(\mathbf{r}) = \tilde{\varepsilon}_{lj}(\mathbf{r})$, ce qui se traduit pour sa transformée de Fourier par

$$\tilde{\varepsilon}_{jl}^*(\mathbf{k}) = \tilde{\varepsilon}_{lj}(\mathbf{k}) \quad (4.1)$$

De plus, comme le tenseur diélectrique est réel, $[\tilde{\varepsilon}](\omega, \mathbf{k})$ est paire en \mathbf{k} , d'où

$$\tilde{\varepsilon}_{jl}^*(-\mathbf{k}) = \tilde{\varepsilon}_{jl}(\mathbf{k}) \quad (4.2)$$

De la relation (4.2) on en déduit que $[\gamma]$ est un tenseur *réel* et de la relation (4.1) on déduit qu'il s'agit d'un tenseur antisymétrique

$$\gamma_{jlm} = -\gamma_{ljm} \text{ et } \gamma_{jjm} = 0. \quad (4.3)$$

4.3.2 Tenseur et vecteur gyration

Il s'agit là d'introduire une notion équivalente à celle du tenseur diélectrique, qui soit *intrinsèque* du matériau et ne dépende que des symétries cristallines.

Pseudo-tenseur gyration $[g]$ d'ordre 2, et vecteur gyration \vec{g}

Écrivons tout d'abord $k_m = nk_0 u_m$, où n est l'indice de réfraction selon la direction de \mathbf{k} et k_0 est le module du vecteur d'onde dans le vide. Alors :

$$D_j = \varepsilon_{jl}E_l + i \varepsilon_0 nk_0 \gamma_{jlm} u_m E_l.$$

Introduisons alors le pseudo-tenseur⁴ $[g]$ défini par la relation⁵

$$\epsilon_{jln} g_{nm} \equiv k_0 \gamma_{jlm}, \quad (4.4)$$

où le tenseur de composantes ϵ_{jml} est le tenseur symbole de LEVI-CIVITA. On remarque que le tenseur $[g]$ est sans dimension. L'expression du vecteur déplacement est alors donnée par :

$$\begin{aligned} D_j &= \epsilon_{jl} E_l + i \epsilon_0 n \epsilon_{jln} g_{nm} u_m E_l \\ D_j &= \epsilon_{jl} E_l + i \epsilon_0 n \epsilon_{jln} g_n E_l \\ &= \epsilon_{jl} E_l + i \epsilon_0 n (\mathbf{g} \times \mathbf{E})_j, \end{aligned} \quad (4.5)$$

où nous avons introduit le *vecteur gyration* \mathbf{g} défini par $g_n \equiv g_{nm} u_m$.

Cas particuliers de symétrie cristalline

- Lorsque le cristal possède un centre de symétrie, ces propriétés optiques sont invariantes par inversion. Il en est de même de tout liquide ne contenant pas de stéréoisomère : tout point du liquide est alors centre d'inversion. La composante γ_{jlm} change de signe dans cette inversion, si bien que la centrosymétrie donne $\gamma_{jlm} = -\gamma_{jlm}$, soit $[\gamma] = 0$. Un corps *centrosymétrique* n'a donc pas d'activité optique.
- Si le liquide contient des stéréoisomère (sucre, acide aminé, ...), malgré son caractère isotrope, il possède une activité optique. Le pseudo-tenseur $[g]$ se réduit néanmoins à un pseudo-scalaire g et le vecteur gyration est alors aligné avec le vecteur d'onde : $\mathbf{g} = g \mathbf{u}$.
- **Cristal de Quartz- α** . Il appartient au groupe de symétrie 32 : l'axe (Oz) est axe de symétrie d'ordre 3 (invariance par rotation de $k \times 2\pi/3, k = 1, 2, 3$), et l'axe (Ox) est un axe de symétrie d'ordre 2. On peut alors montrer que $[g]$ est diagonal :

$$[g]_{\text{Quartz}} = \begin{pmatrix} g' & 0 & 0 \\ 0 & g' & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix},$$

où $g' \neq g$. À la longueur d'onde $\lambda = 510$ nm, $g' = \mp 5.82 \times 10^{-5}$ et $g = \pm 12.96 \times 10^{-5}$ (voir *Optical Properties of Solids*, Nye, Oxford ; p. 273). Le signe supérieur (resp. inférieur) correspond au Quartz Droit (resp. Gauche).

4.3.3 Propagation d'une onde plane électromagnétique dans un cristal de quartz Q_{\perp}

On considère une onde plane (faisceau collimaté) de direction de normale $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$, arrivant sous incidence normale sur une lame de quartz à faces parallèles dont la direction de l'axe optique est selon la direction de propagation ($\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$). Dans cette configuration, la lame de quartz se comporte, vis-à-vis de la biréfringence linéaire, comme un milieu isotrope.

Par ailleurs on montre aisément que, compte tenu de la forme de $[g]$ pour le quartz, le vecteur gyration est longitudinal $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$. La relation constitutive du milieu optiquement actif devient alors :

$$\mathbf{D} = [\epsilon]\mathbf{E} + i \epsilon_0 n g \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}, \quad (4.6)$$

⁴pseudo car ses composantes se transforment comme celles d'un pseudo-vecteur, et non comme celles d'un vecteur.

⁵Cette définition est choisie en accord avec celle de L. Landau & E. Lifchitz *Electrodynamique des milieux continus* (MIR, 1969), p. 441.

4.4 Action d'une lame optiquement active sur une polarisation linéaire

avec $[\varepsilon] = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} n_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}$

Rappelons que nous avons aussi établi dans le chapitre 1, à partir des équations de MAXWELL, que :

$$\mathbf{D} = n^2 \varepsilon_0 [\mathbf{E} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{u}] \quad (4.7)$$

Les composantes de \mathbf{E} doivent alors simultanément satisfaire (4.6) et (4.7), ce qui impose

$$\begin{cases} n^2 \varepsilon_0 E_x = \varepsilon_0 n_0^2 E_x + i g n (-E_y) \\ n^2 \varepsilon_0 E_y = \varepsilon_0 n_0^2 E_y + i g n (+E_x) \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} (n^2 - n_0^2) E_x + i g n (-E_y) = 0 \\ -i g n (+E_x) + (n^2 - n_0^2) E_y = 0 \end{cases}$$

Ce système d'équation admet des solutions non nulles si et seulement si :

$$\boxed{n_{\pm}^2 = n_0^2 \pm g n_{\pm}}$$

Les effets de polarisation rotatoire étant petits devant ceux de la biréfringence linéaire, $n_{\pm} = n_0 \left(1 \pm g \frac{n_{\pm}}{n_0^2}\right)^{1/2}$ peut être développé selon : $n_{\pm} = n_0 \pm g \frac{n_{\pm}}{2n_0}$. Or l'anisotropie circulaire est un effet du second ordre, donc au premier ordre en le terme en g :

$$\boxed{n_{\pm} = n_0 \pm g/2}$$

Il apparaît deux vitesses possibles de propagation, et à chacune est associée une vibration propre :

→ $\boxed{\text{pour } n_+}$: on a $E_x = -iE_y$

E_x est déphasé de $-\pi/2$ par rapport à E_y .

La vibration propre associée est *circulaire droite* :

$$\begin{cases} E_x = E_0 \cos \omega t \\ E_y = E_0 \cos(\omega t + \pi/2) = -E_0 \sin \omega t \end{cases}$$

→ $\boxed{\text{pour } n_-}$: on a $E_x = iE_y$

La vibration propre associée est *circulaire gauche* :

Ces 2 états propres de polarisation se propagent dans le milieu, sans déformation, aux vitesses de phases respectives $v_{\pm} = \frac{c}{n_{\pm}}$.

4.4 Action d'une lame optiquement active sur une polarisation linéaire

Lorsqu'une polarisation linéaire incidente traverse un milieu présentant une biréfringence circulaire, la polarisation reste linéaire mais tourne d'un angle ψ (Fig. 4.1) que nous allons déterminer.

Il existe des milieux qui font tourner la polarisation linéaire vers la droite (direction vue par l'observateur derrière l'épaisseur de milieu e) *DEXTROGYRES* (D) et d'autres vers la gauche, *LEVOGYRES* (L).

Exemples : dans la nature

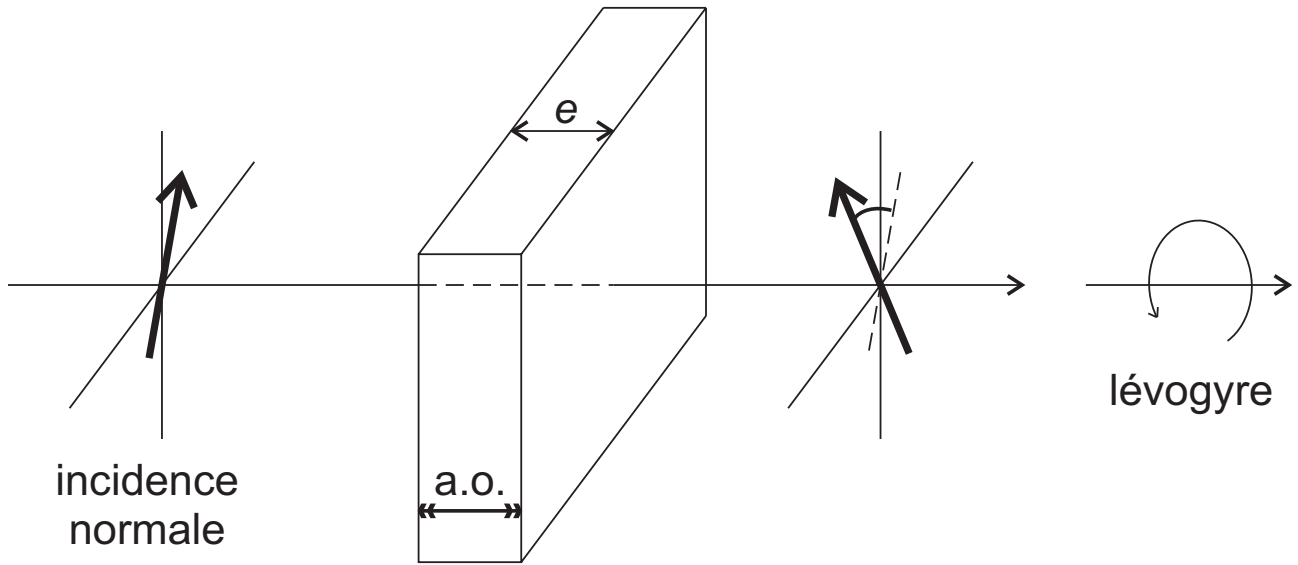


FIG. 4.1 – Pouvoir rotatoire : exemple d’une lame de quartz taillé perpendiculairement à l’axe optique et d’épaisseur 4 mm, lévogyre.

- il existe du quartz D et L⁶.
- les acides aminés et les sucres n’existent naturellement que dans une seule forme d’énantiomère.

On considère une polarisation incidente selon e_x : $\mathbf{E}^{\text{in}} = \begin{pmatrix} Ee^{-i\omega t} \\ 0 \end{pmatrix}$

que l’on décompose sur une base de deux ondes circulaires $\mathbf{e}_{\mp} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)$: $E_+^{\text{in}} = E_-^{\text{in}} = \frac{E}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}$ par équirépartition de l’énergie.

Après la lame d’épaisseur e :

$$\begin{cases} E_+^{\text{out}} = \frac{E}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{2\pi}{\lambda_0}n_+e - \omega t)} \\ E_-^{\text{out}} = \frac{E}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{2\pi}{\lambda_0}n_-e - \omega t)} \end{cases}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E_y = iE_x & \text{pour } n_+ \\ E_y = -iE_x & \text{pour } n_- \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} E_x^{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_+^{\text{out}} + E_-^{\text{out}}) = \frac{E}{2}e^{-i\omega t} \left(e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0}n_+e} + e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0}n_-e} \right) \\ E_y^{\text{out}} = \frac{i}{\sqrt{2}}E_+^{\text{out}} - \frac{i}{\sqrt{2}}E_-^{\text{out}} = i\frac{E}{2}e^{-i\omega t} \left(e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}n_+e} - e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}n_-e} \right) \end{cases}$$

ou bien encore

$$\begin{cases} E_x^{\text{out}} = Ee^{-i\omega t} e^{\frac{i2\pi}{\lambda_0}(n_++n_-)e/2} \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}(n_+-n_-)e/2} + e^{\frac{i2\pi}{\lambda_0}(n_+-n_-)e/2} \right) \\ E_y^{\text{out}} = Ee^{-i\omega t} e^{\frac{i2\pi}{\lambda_0}(n_++n_-)e/2} \frac{i}{2} \left(e^{-\frac{2i\pi}{\lambda_0}(n_+-n_-)e/2} - e^{\frac{+2i\pi}{\lambda_0}(n_+-n_-)e/2} \right) \end{cases}$$

Finalement

$\begin{aligned} E_x^{\text{out}} &= Ee^{-i\omega t} e^{\frac{2i\pi}{\lambda_0}(n_++n_-)e/2} \cos \psi && \text{où } \psi \equiv -\varphi/2 \\ E_y^{\text{out}} &= Ee^{-i\omega t} e^{\frac{2i\pi}{\lambda_0}(n_++n_-)e/2} \sin \psi && \text{avec } \varphi \equiv \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_+ - n_-)e \end{aligned}$

La polarisation linéaire incidente a donc tourné d’un angle $\psi \propto \frac{1}{\lambda^2}$ car on peut montrer que la

⁶le spath n’a pas de pouvoir rotatoire

4.5 Mesure de la biréfringence circulaire

différence des indices $(n_+ - n_-) = g$ dépend de la longueur d'onde comme $\frac{1}{\lambda}$.

On remarque que le bleu tourne plus que le rouge.

On appelle *biréfringence circulaire* la quantité $\Delta n_c \equiv (n_+ - n_-)$. On introduit aussi couramment la notion de *pouvoir rotatoire* ρ défini par :

$$\rho \equiv \frac{\pi \Delta n_c}{\lambda_0}.$$

Pour une lame de Q_{\perp} d'épaisseur e , la polarisation incidente tourne alors de l'angle $\psi = \rho e$.

Pour une lame épaisse, ψ peut être supérieur à π . Dans ce cas, il y a une indétermination sur l'angle. Par exemple, pour le quartz, $\Delta n_c = (n_+ - n_-) = 7,1 \times 10^{-5}$, à 589 nm. Ainsi, la rotation du plan de polarisation reste inférieure à 180° tant que la lame fait moins de 8,3 mm d'épaisseur.

4.5 Mesure de la biréfringence circulaire

4.5.1 Couleurs de biréfringence circulaire

Entre $\mathcal{P} \parallel \mathcal{A}$, une lame "mince" (épaisseur de quelques mm) de Q_{\perp} qui fait tourner la longueur d'onde λ_0 de $\pi/2$, va l'éteindre, et faire ainsi apparaître la couleur complémentaire sur l'écran.

Cas particulier : Teinte "lie de vin" Considérons une lame de Q_{\perp} D ou G d'épaisseur $e = 3.75$ mm utilisée à $\lambda_0 = 560$ nm. Puisque $\Delta n_c(560 \text{ nm}) = 589/560 \times \Delta n_c(589 \text{ nm}) = 7.47 \times 10^{-5}$, alors $\psi(\lambda_0) = \pi/2$. Entre $\mathcal{P} \parallel \mathcal{A}$, la lame éteint donc le jaune moyen (λ_0), et la coloration qui apparaît est nommée teinte "lie de vin".

→ lames de quartz Q_{\perp} ($e = 3,75$ mm) D et G entre polariseur et analyseur parallèle.

Remarquons que la teinte lie de vin peut être obtenue pour une lame d'épaisseur différente de $e = 3.75$ mm, mais alors \mathcal{P} et \mathcal{A} ne seront pas parallèles.

Utilisation de la teinte "lie de vin" : détermination du sens d'une lame (D ou G ?)

On part de la teinte lie de vin pour une lame quelconque (on oriente pour ce faire l'analyseur convenablement). Comme le bleu tourne plus que le rouge, lorsque l'on tourne l'analyseur *vers la droite* :

- si la teinte vire au *rouge*, la lame est *Droite*
- si la teinte vire au *bleu*, la lame est *Gauche*

4.5.2 Mesures de $\Delta n_c(\lambda)$ à l'aide du biquartz de SOLEIL

Le biquartz de SOLEIL, est constitué de 2 demi disques de quartz l'un droite, l'autre gauche, d'épaisseur $e = 3,75$ mm correspondant à la teinte lie de vin entre \mathcal{P} et \mathcal{A} parallèles. Il sert à pointer une polarisation *linéaire*, avec une précision comparable à celle de l'analyseur à pénombre.

Le pointé consiste à comparer la teinte des deux 1/2 disques. En lumière blanche polarisée rectilignement lorsque les deux teintes sont identiques (lie de vin), l'analyseur est parfaitement aligné avec la polarisation incidente comme l'indique la Fig. 4.2.

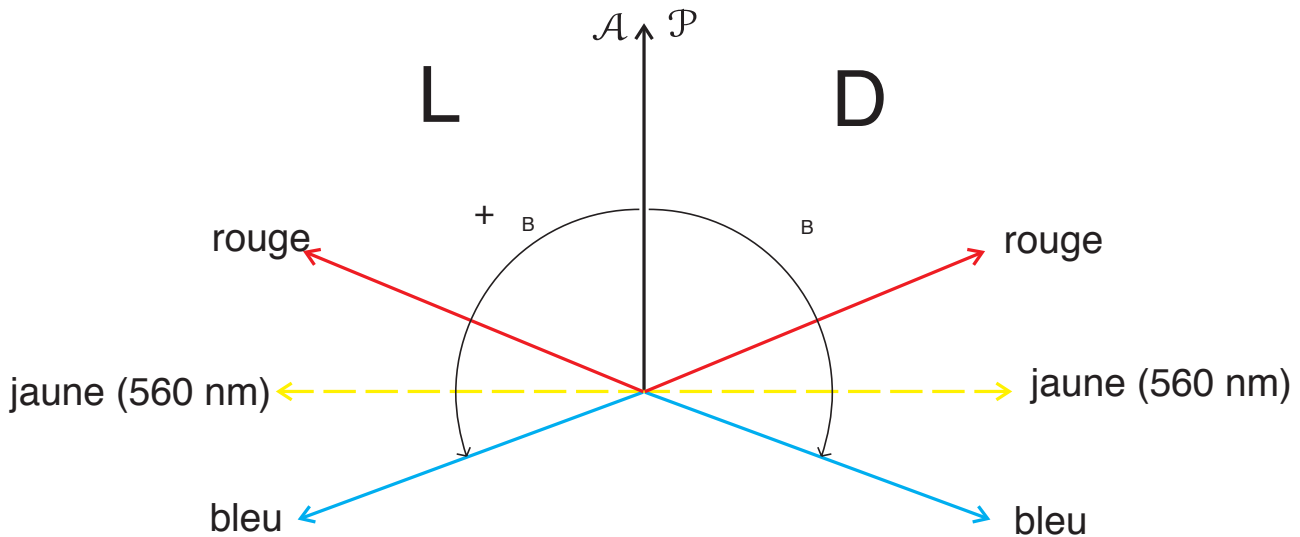


FIG. 4.2 – Pointé à l’aide du biquartz de soleil.

“**Canon de quartz**” et application à la mesure de $\Delta n_c(\lambda)$ Il s’agit d’un “long” cristal de Q_{\perp} de longueur $e = 42.7$ mm. Il n’y a pas de coloration entre $\mathcal{P} \parallel \mathcal{A}$: il s’agit d’un blanc d’ordre supérieur, car un grand nombre de longueurs d’onde sont éteintes simultanément dans le spectre visible ; plus précisément toutes les longueurs d’onde λ_i pour lesquelles l’angle de rotation ψ_i vaut :

$$\psi_i = \frac{\pi g(\lambda_i) e}{\lambda_i} = \frac{A}{\lambda_i} = (k + i - 1) \frac{\pi}{2},$$

où A est pratiquement constant pour l’épaisseur e donnée. La variation de $1/\lambda_i^2$ en fonction de i , permet d’accéder à k et à g , et connaissant e , on peut ainsi remonter à $\Delta n_c(\lambda)$.

4.6 Biréfringence induite : effet FARADAY

Sous l’effet d’un champ magnétique \mathbf{B} , un barreau de verre lourd (flint) présente une biréfringence circulaire. Une onde plane polarisée linéairement se propageant suivant \mathbf{B} , subit une rotation de polarisation d’un angle :

$$\theta = V\ell|\mathbf{B}|,$$

où V est appelée “constante” de VERDET⁷.

Ce résultat est démontré dans l’exercice n°3 de la planche de TD, à l’aide d’un modèle semi-classique d’électron élastiquement liés, puis en introduisant une approche quantique.

→ L’expérience peut être réalisée au département de physique, avec un électroaimant muni de pièces polaires percées, à travers lesquelles on fait passer un faisceau laser (laser HeNe rouge NEC de préférence, pour sa stabilité en polarisation et en intensité).

⁷ V dépend en fait de la longueur d’onde : $V(\lambda)$.

Bibliographie

- [1] **G. BRUHAT** *Cours de Physique Générale : Optique* (6^eédition); Masson, 1992. 5^epartie.
- [2] **D. SIVOUKHINE** *Cours de Physique Générale : Tome IV (Optique)*, vol.2; Mir, 1984. **Chapitre VII.**
- [3] **HECHT** *Optics* (2nd edition); Addison Wesley, 1987. **Chapter 8, §8.4.**
- [4] **M. BORN & E. WOLF** *Principle of Optics*; Pergamon Press, 1980. **Chapter XIV.**
- [5] **L. DETTWILLER** *Détermination de l'“axe lent” d'une lame quart d'onde*; BUP n°835 (juin 2001).
- [6] **L. DETTWILLER** *Commentaire pour une présentation d'expériences d'optique*; BUP n°836, p.1151 (2001).
- [7] **R. JOUANISSON** *Lumière polarisé : matériel et expérience*; BUP n°838(1), p.1579 (2001).

Annexe A

$[\varepsilon_r]$ est un tenseur symétrique réel

En effet : Le milieu étant non magnétique : $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ d'où

$$\frac{dw_m}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) = \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{H}.$$

Remarquons que $\text{div} \mathbf{S} = -\mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H} + \text{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ c'est à dire que $\text{div} \mathbf{S} = -\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{H}$. Mais par ailleurs, $D_i = \varepsilon_0 [\varepsilon_r]_{ij} E_j = [\varepsilon]_{ij} E_j$ donc

$$\text{div} \mathbf{S} = -E_i [\varepsilon]_{ij} \dot{E}_j - \frac{dw_m}{dt} \quad (\text{A.1})$$

Enfin,

$$\frac{dw_e}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} E_i [\varepsilon]_{ij} E_j \right] = \frac{1}{2} [\varepsilon]_{ij} \left[E_i \dot{E}_j + \dot{E}_i E_j \right] \quad (\text{A.2})$$

si bien qu'en reportant (A.1) et (A.2) dans l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique (1.2), on obtient $\frac{1}{2} [\varepsilon]_{ij} (E_i \dot{E}_j + \dot{E}_i E_j) - [\varepsilon]_{ij} E_i \dot{E}_j = 0$, soit $\frac{1}{2} [\varepsilon]_{ij} (E_i \dot{E}_j - \dot{E}_i E_j) = 0$, ou bien encore $\frac{1}{2} E_i \dot{E}_j ([\varepsilon]_{ij} - [\varepsilon]_{ji}) = 0$ pour tout \mathbf{E} , ce qui impose :

$$[\varepsilon]_{ij} = [\varepsilon]_{ji}$$

$[\varepsilon_r]$ est donc symétrique réelle. Ce résultat peut être généralisé si l'on imagine que la permittivité diélectrique est complexe (cela peut être le cas si l'on considère la transformée de Fourier spatiale de $[\varepsilon]$, dans l'espace des vecteurs d'onde \mathbf{k}). La partie non-dissipative (celle qui n'est pas liée à l'absorption) du tenseur $[\varepsilon]$ qui doit alors être *hermitienne* :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*.$$

Annexe B

D satisfait une équation aux valeurs propres pour la matrice $[\varepsilon_r^{-1}]$

En effet, reprenons l'équation (1.5) Si on choisit $\mathbf{e}_3 = \mathbf{u}$, $[\varepsilon_r]$ et $[\varepsilon_r^{-1}]$ ne sont pas forcément diagonales dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, mais ils sont symétriques à coefficients réels.

La relation (1.5) projetée sur un plan perpendiculaire à \mathbf{e}_3 donne alors :

$$D_j = \frac{1}{\mu_0 v_\varphi^2} E_j \text{ avec } j = \text{ou } 2.$$

Mais, E_j est aussi relié à D_j par la relation $E_j = [\varepsilon_r^{-1}]_{jk} D_k$, si bien que le vecteur \mathbf{D}_\perp , de coordonnées (D_1, D_2) dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ (\mathbf{D}_\perp est donc perpendiculaire à \mathbf{e}_3) satisfait l'équation aux valeurs propres :

$$(\mu_0 v_\varphi^2 - [\varepsilon_r^{-1}]) \mathbf{D}_\perp = \mathbf{0}$$

dont les deux directions propres sont \mathbf{d}' et \mathbf{d}'' qui doivent être nécessairement orthogonales puisque $[\varepsilon_r^{-1}]$ est symétrique à coefficients réels.

Annexe C

Calcul de l'intensité des franges d'interférences en lumière polarisée

A la sortie de la lame¹,

$$\begin{cases} E_x^{\text{out}} = E_0 \cos \alpha e^{-i\omega\tau} \\ E_y^{\text{out}} = E_0 \sin \alpha e^{-i\omega\tau} e^{i\varphi} \end{cases}$$

A la sortie de l'analyseur, \mathbf{E} est selon \mathbf{u} et son amplitude vaut :

$$E_{\mathcal{A}} = E_0 [\cos \alpha \cos \beta e^{-i\omega\tau} + \sin \alpha \sin \beta e^{-i\omega\tau} e^{i\varphi}]$$

soit encore,

$$I = \frac{1}{2} E_{\mathcal{A}} \cdot E_{\mathcal{A}}^* = (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta e^{i\varphi})(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta e^{-i\varphi}) \frac{E_0^2}{2}$$

$$I = [(\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) + 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi] \frac{E_0^2}{2}$$

$$I = \frac{E_0^2}{2} (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) [1 + \mathcal{C}(\alpha, \beta) \cos \varphi]$$

où l'on a introduit le contraste

$$\mathcal{C}(\alpha, \beta) = \frac{2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

¹On rappelle que $\tau = t - \frac{2\pi}{\lambda} n_x e \frac{1}{\omega}$.

Annexe D

Tenseur $[\rho]$ pour un milieu isotrope

On utilise les notations de VOIGT, ie. le tenseur $[\rho]$ est entièrement déterminé par la connaissance d'une matrice 6×6 .

- Rotation de π autour de Ox :

Les coefficients avec un nombre impair d'indices 2 ou 3 sont nuls, i.e.¹ :

$$[\rho] = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \bullet & \bullet \\ \times & \times & \times & \times & \bullet & \bullet \\ \times & \times & \times & \times & \bullet & \bullet \\ \times & \times & \times & \times & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \times & \times \end{pmatrix}$$

- Rotation de π autour de Oy :

Les coefficients avec un nombre impair d'indices 1 ou 3 sont nuls, i.e. :

$$[\rho] = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \bullet & \bullet & \bullet \\ \times & \times & \times & \bullet & \bullet & \bullet \\ \times & \times & \times & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \times & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \times & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \times \end{pmatrix}$$

- Rotation de π autour de Oz :

pas de condition supplémentaire

- Rotation de $\pi/2$ autour de Ox :

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow -2 \end{array} \Bigg| \Rightarrow \begin{cases} \rho_{33} = \rho_{22} \\ \rho_{13} = \rho_{12} \\ \rho_{21} = \rho_{31} \\ \rho_{55} = \rho_{66} \end{cases}$$

¹ \times : coefficient non nul ; \bullet : coefficient nul

– Rotation de $\pi/2$ autour de Oy :

$$\begin{array}{l|l} 1 \rightarrow -3 & \\ 2 \rightarrow 2 & \\ 3 \rightarrow 1 & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \rho_{33} = \rho_{11} \\ \rho_{23} = \rho_{21} \\ \rho_{32} = \rho_{12} \\ \rho_{44} = \rho_{66} \end{cases}$$

– Rotation de $\pi/2$ autour de Oz :

$$\begin{array}{l|l} 1 \rightarrow 2 & \\ 2 \rightarrow -1 & \\ 3 \rightarrow 3 & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \rho_{11} = \rho_{22} \\ \rho_{13} = \rho_{23} \\ \rho_{32} = \rho_{31} \\ \rho_{44} = \rho_{55} \end{cases}$$

Finalement :

$$\rho_{11} = \rho_{22} = \rho_{33}$$

$$\rho_{44} = \rho_{55} = \rho_{66}$$

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = \rho_{21} = \rho_{31} = \rho_{32}$$

Enfin, en considérant l'invariance par la rotation de $\pi/4$ autour de l'axe $1 = (Ox)$,

$$\begin{array}{l|l} y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z) & \\ z \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-y+z) & \end{array} \Rightarrow yz \rightarrow \frac{1}{2}(-yy + zz)$$

Ainsi, $yz.yz \rightarrow \frac{1}{4}(yy.yy + zz.zz - 2 \times yy.zz)$, c'est à dire, puisque $yy.yy = zz.zz = xx.xx \equiv 11$ et $yy.zz \equiv 23 = 12$:

$$\rho_{44} = \frac{1}{2}(\rho_{11} - \rho_{12}),$$

d'où la forme (3.4) donnée dans le corps du chapitre 3.