

# COURS DE PHYSIQUE



## ÉLECTROMAGNÉTISME

JIMMY ROUSSEL

2020 – [femto-physique.fr](http://femto-physique.fr)

Cours d'électromagnétisme – [femto-physique.fr](http://femto-physique.fr)

JIMMY ROUSSEL, professeur agrégé à l'Ecole Nationale Supérieure de Chimie de Rennes

**Copyright** © 2020 Jimmy Roussel

© ⓘ ⓘ Ce document est sous licence *Creative Commons* « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».

Pour plus d'informations : <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>

Ce document est réalisé avec l'aide de KOMA-Script et L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X en utilisant la classe [kaobook](#).

**1<sup>re</sup> édition** – Nov. 2015

**Version en ligne** – [femto-physique.fr/electromagnetisme](http://femto-physique.fr/electromagnetisme)

# Preface

Ce cours a pour objectif d'introduire les phénomènes électromagnétiques dans le vide et dans la matière. La première partie se concentre sur les phénomènes stationnaires, pour lesquels les effets magnétiques et électriques sont découplés. Dans la deuxième partie on s'intéresse plus particulièrement à l'électrocinétique, ce qui nous obligera à faire une petite digression du côté des phénomènes lentement variables dans le temps. La troisième partie s'intéresse au phénomène d'induction et aux équations de Maxwell, dont une conséquence importante est l'existence d'ondes électromagnétiques dans le vide. Enfin, une dernière partie est consacrée aux phénomènes électromagnétiques dans la matière.

Ce cours s'adresse plus particulièrement à des étudiants de premier cycle universitaire ou élèves des CPGE. Les candidats au CAPES ou à l'Agrégation peuvent y trouver également matière à réflexion.

J'ai essayé le plus possible d'illustrer les différentes notions par des exemples ou de simples exercices. Mais pour un entraînement plus poussé, j'invite le lecteur à se procurer les eBooks suivants :

- *Électromagnétisme 1<sup>re</sup> Partie – 83 exercices et problèmes corrigés* ;
- *Électrocinétique – 50 exercices et problèmes corrigés*.

disponibles à l'adresse [payhip.com/femto](http://payhip.com/femto)

**Remarque** : ce recueil est en cours d'élaboration ce qui explique la présence de certains chapitres encore inactifs.

*Jimmy Roussel*



# Table des matières

<b>Preface</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>ÉLECTROSTATIQUE ET MAGNÉTOSTATIQUE</b>	<b>1</b>
<b>1 INTERACTION ÉLECTROSTATIQUE</b>	<b>3</b>
1.1 Loi de Coulomb . . . . .	3
1.2 Le champ électrique . . . . .	6
<b>2 POTENTIEL ET ÉNERGIE ÉLECTRIQUES</b>	<b>13</b>
2.1 Potentiel électrostatique . . . . .	13
2.2 L'énergie électrostatique . . . . .	17
<b>3 LE DIPÔLE ÉLECTRIQUE</b>	<b>21</b>
3.1 L'approximation dipolaire . . . . .	21
3.2 Interactions dipolaires . . . . .	26
<b>4 CONDUCTEURS ÉLECTRIQUES</b>	<b>31</b>
4.1 Conduction électrique . . . . .	31
4.2 Conducteur en équilibre . . . . .	35
4.3 Notion de capacité . . . . .	39
<b>5 INTERACTIONS MAGNÉTIQUES</b>	<b>45</b>
5.1 Les aimants . . . . .	45
5.2 Force de Lorentz . . . . .	46
5.3 Interaction avec les courants . . . . .	51
<b>6 CHAMP B CRÉÉ PAR DES COURANTS ÉLECTRIQUES</b>	<b>57</b>
6.1 Loi de Biot et Savart . . . . .	57
6.2 Champ dipolaire . . . . .	62
<b>ÉLECTROCINÉTIQUE</b>	<b>67</b>
<b>7 ÉTUDE DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES</b>	<b>69</b>
7.1 Lois de l'électrocinétique . . . . .	69
7.2 Phénomènes résistifs . . . . .	73
7.3 Dipôles actifs . . . . .	75
7.4 Phénomènes capacitifs . . . . .	80
7.5 Phénomène d'auto-induction . . . . .	84
<b>8 RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ</b>	<b>89</b>
8.1 Signaux périodiques . . . . .	89
8.2 Impédance et admittance . . . . .	94
8.3 Puissance en régime forcé . . . . .	97

<b>9</b>	<b>FILTRAGE</b>	<b>101</b>
	<b>ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE</b>	<b>103</b>
<b>10</b>	<b>PROPRIÉTÉS LOCALES DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE</b>	<b>105</b>
10.1	Théorème de Gauss . . . . .	105
10.2	Circulation du champ . . . . .	112
10.3	Potentiel électrique . . . . .	116
10.4	Énergie électrostatique . . . . .	121
<b>11</b>	<b>PROPRIÉTÉS DU CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE</b>	<b>127</b>
11.1	Théorème d'Ampère . . . . .	127
11.2	Flux du champ . . . . .	131
11.3	Potentiel vecteur . . . . .	133
11.4	Relations de passage . . . . .	137
11.5	Résumé . . . . .	140
<b>12</b>	<b>PHÉNOMÈNE D'INDUCTION MAGNÉTIQUE</b>	<b>143</b>
<b>13</b>	<b>ÉQUATIONS DE MAXWELL</b>	<b>145</b>
	<b>Références</b>	<b>147</b>
	<b>Notations</b>	<b>148</b>
	<b>Grandeurs et constantes physiques</b>	<b>149</b>

# Table des figures

1.1	Expérience 1	4
1.2	Plus la baguette se rapproche de l'électroscope, plus les aiguilles s'écartent.	4
1.3	Répulsion ou attraction électrostatique	4
1.4	Expérience de Coulomb	6
1.5	Distribution de $N$ charges $q_i$ placées en $P_i$ .	7
1.6	Ligne de champ $\mathcal{C}$	7
1.7	Carte de champ d'une charge ponctuelle positive.	8
1.8	Carte de champ d'un doublet électrostatique.	8
1.9	Carte de champ d'un système de 2 charges positives.	8
1.10	Distribution présentant un plan de symétrie.	8
1.11	Distribution présentant un plan d'anti-symétrie.	9
1.12	Calcul du champ créé par un segment chargé	10
2.1	Travail de la force électrostatique.	13
2.3	Les équipotentielles coupent les lignes de champ à angle droit.	16
2.2	Représentations d'un champ scalaire.	16
2.4	Distribution de $N$ charges ponctuelles.	18
3.1	Doublet électrostatique	21
3.2	Distribution de $N$ charges ponctuelles.	22
3.3	Lignes de champ et équipotentielles créées par un dipôle.	26
3.4	Dipôle rigide dans un champ uniforme.	27
3.5	Profil énergétique	27
3.6	Potentiel de Lennard-Jones.	30
4.1	Calcul du débit de charge traversant une section.	32
4.2	Modèle de Drude.	33
4.3	Cylindre conducteur.	34
4.4	Champ au voisinage de la surface d'un conducteur.	36
4.5	Flux du champ électrique d'une charge ponctuelle à travers une sphère	37
4.6	Influence partielle. ©2004 Thomson - Brooks/Cole	41
4.7	Effets de bords d'un condensateur plan	41
4.8	Fabrication d'un condensateur plan réel	42
5.1	Aiguille aimantée	45
5.2	Interactions entre aimants.	45
5.3	Spectre magnétique	46
5.4	Déflexion magnétique.	47
5.5	Force magnétique.	47
5.6	Mouvement hélicoïdal d'une particule dans un champ magnétique	48
5.7	Principe du cyclotron (la charge est négative ici).	49
5.8	Principe du spectromètre de masse	50
5.9	Notations pour la force de Laplace.	51
5.10	Effet Hall	52
5.11	Circuit électrique rectangulaire en mouvement dans un champ magnétique.	53
5.13	Moment dipolaire magnétique	55

5.12	Illustration de la règle du flux maximum. . . . .	55
5.14	Dipôle rigide dans un champ uniforme. . . . .	56
6.1	Expérience d'Ersted. . . . .	57
6.2	Expériences d'Ampère. . . . .	57
6.3	Expérience de Rowland . . . . .	58
6.4	Notations utilisées dans la loi de Biot et Savart. . . . .	58
6.5	Champ magnétique créé par un fil rectiligne infini. . . . .	59
6.6	Champ magnétique créé par un fil infini. . . . .	60
6.7	Cartes de champ d'une spire (à gauche) et d'un solénoïde (à droite). . . . .	60
6.8	Transformation d'un vecteur axial par un plan de symétrie. . . . .	61
6.9	Solénoïde cylindrique. . . . .	62
6.10	Calcul du champ magnétique produit sur l'axe d'une spire. . . . .	62
6.11	Carte de champ d'un dipôle magnétique dans l'approximation dipolaire . . . . .	63
6.12	Champ magnétique terrestre . . . . .	64
6.13	Origine du magnétisme des aimants - Expérience de l'aimant brisée. . . . .	64
7.1	Les différentes conventions . . . . .	70
7.2	Représentation d'une tension . . . . .	71
7.3	maïlle d'un circuit orientée par le sens de parcours positif indiqué. . . . .	71
7.5	Réseau constitué de deux résistances . . . . .	73
7.4	Schéma et caractéristique d'un conducteur ohmique. . . . .	73
7.6	Conducteurs ohmiques en série. . . . .	74
7.7	Conducteurs ohmiques en parallèle. . . . .	74
7.8	Pont diviseur de tension . . . . .	75
7.9	Pont diviseur de courant . . . . .	75
7.10	Source idéale de tension : schéma et caractéristique . . . . .	76
7.12	Puissance produite en fonction du courant débité. . . . .	76
7.11	Source réelle de tension : schéma et modélisation linéaire. . . . .	76
7.13	Source de courant idéale : schéma et caractéristique. . . . .	76
7.15	Puissance fournie par une source de courant . . . . .	77
7.14	Source réelle de courant : schéma et caractéristique. . . . .	77
7.16	Équivalence Thévenin-Norton. . . . .	77
7.17	Batterie en charge. . . . .	78
7.18	Moteur à courant continu . . . . .	78
7.19	Charge d'une batterie. . . . .	79
7.20	Étude d'un circuit. . . . .	80
7.21	Condensateurs idéal et réel. . . . .	81
7.22	Deux condensateurs associés en parallèle. . . . .	81
7.24	Montage RC . . . . .	82
7.23	Deux condensateurs associés en série. . . . .	82
7.25	Évolution de la tension capacitive et du courant de décharge. . . . .	83
7.26	Modélisations d'une bobine. . . . .	86
7.27	Montage R-L. . . . .	87
7.28	Évolution de la tension inductive et du courant. . . . .	87
8.1	Caractéristiques d'un signal périodique. . . . .	89
8.2	Signal sinusoïdal. . . . .	90
8.3	Déphasage. . . . .	90
8.4	Deux signaux sinusoïdaux déphasés de $\phi$ en mode XY. . . . .	91

8.5	Représentation de Fresnel . . . . .	92
8.6	Montage RLC. . . . .	93
8.7	Établissement du régime sinusoïdal (paramètres : $\omega = 0,35 \omega_0$ et $Q = 10$ ). . . . .	93
8.8	Impédances : représentations de Fresnel. . . . .	95
8.9	Exemple de circuit avec sa représentation complexe. . . . .	96
10.1	Le flux du champ électrique à travers S est nul ici. . . . .	105
10.2	Le flux est-il toujours nul ? . . . . .	106
10.3	Le flux à travers une surface fermée est nul si la charge est à l'extérieur . . . . .	106
10.4	Le flux du champ électrique à travers S est le même que celui à travers S'. . . . .	106
10.5	Fil rectiligne infini et uniformément chargé de densité linéique $\lambda$ . . . . .	108
10.6	Calcul du flux à travers un cylindre fermé. . . . .	108
10.7	Calcul du flux à travers un cube. . . . .	109
10.8	Flux à travers deux cubes adjacents . . . . .	109
10.9	Interface chargée séparant deux milieux différents notés 1 et 2. . . . .	111
10.10	Nappe d'épaisseur $2a$ , chargée uniformément en volume. . . . .	111
10.11	Evolution du champ électrique $E(x)$ . . . . .	112
10.12	Circulation du champ électrique le long d'un circuit fermé orienté. . . . .	112
10.13	Circulation le long d'un carré orienté d'arête $a$ . . . . .	113
10.14	Contours cote à côte. . . . .	114
10.15	Théorème de Stokes . . . . .	114
10.16	Contour rectangulaire coupant la surface chargée perpendiculairement. . . . .	115
10.17	Boule de rayon $a$ , uniformément chargée. . . . .	118
10.18	Cavité dans un conducteur chargé à l'équilibre. . . . .	119
10.19	Méthode des images électriques . . . . .	120
10.20	Influence d'une charge sur une plaque conductrice . . . . .	121
10.21	Distribution de $N$ charges ponctuelles. . . . .	122
10.22	Distribution formée de deux corps chargés. . . . .	124
11.1	Flux électrique. . . . .	127
11.2	Notations associées à la loi de Biot et Savart. . . . .	127
11.3	Tube de courant élémentaire dans lequel on isole une portion conductrice de volume $d\tau = dSd\ell$ . . . . .	128
11.4	Fil infini rectiligne parcouru par un courant électrique permanent. . . . .	128
11.5	Circulation du champ magnétique à travers un circuit C orienté. . . . .	128
11.7	Le courant enlacé est compté positivement ici. . . . .	129
11.8	Circulation à calculer . . . . .	129
11.6	Différents enlacements. Le circuit $C_1$ enlace une fois le fil électrique alors que $C_2$ l'enlace deux fois. . . . .	129
11.9	Calcul du courant enlacé en termes de densité de courant. . . . .	130
11.10	Conducteur cylindrique de rayon $a$ parcouru par un courant axial uniforme et permanent. . . . .	130
11.11	Le flux magnétique ne dépend que du contour C et du champ magnétique. . . . .	132
11.12	Fil conducteur rectiligne de section non négligeable. . . . .	135
11.13	Nappe de courant. . . . .	137
11.14	Contour rectangulaire coupant une nappe de courant. . . . .	138
11.15	Solénoïde infini. . . . .	139

11.1 Enroulement solénoïdal. . . . .	140
--------------------------------------	-----

## Liste des tableaux

2.1 Ordres de grandeur . . . . .	17
3.1 Entités chimiques et types d'actions électriques produits. . . . .	24
3.2 Moments dipolaires des halogénures d'hydrogène. . . . .	24
4.1 Quelques ordres de grandeur . . . . .	32
4.2 Ordres de grandeur de conductivités électriques. . . . .	33
4.3 Permittivités diélectriques relatives de quelques matériaux. . . . .	42
7.1 Puissance électrique : quelques ordres de grandeur. . . . .	73
11.1 Résumé des propriétés des champs électrostatique et magnétostatique. . .	141

# ÉLECTROSTATIQUE ET MAGNÉTOSTATIQUE



# INTERACTION ÉLECTROSTATIQUE

# 1

L'électromagnétisme consiste en l'étude des phénomènes qui font intervenir des charges en mouvement (courants électriques, antenne radio, conductimétrie, courants de Foucault,...). On se restreint, pour l'instant, aux phénomènes indépendants du temps ce qui permet de séparer l'étude des effets magnétiques et électriques. Ce cours aborde l'électrostatique, c'est-à-dire l'étude du champ électrique produit par des charges immobiles.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

[femto – physique.fr/electromagnetisme/interaction – electrostatique.php](http://femto-physique.fr/electromagnetisme/interaction-electrostatique.php)

1.1 Loi de Coulomb . . . . .	3
Quelques faits . . . . .	3
Notion de charge électrique . . . . .	4
Loi de Coulomb . . . . .	5
1.2 Le champ électrique . . . . .	6
Cas d'un système de charges . . . . .	6
Topographie - Symétrie . . . . .	7
Distribution continue . . . . .	9

## 1.1 Loi de Coulomb

### Quelques faits expérimentaux

#### Les premières observations

Il y a plus de 2 600 ans, les savants grecs avaient déjà constaté que l'ambre jaune (une résine naturelle) frottée énergiquement avec une fourrure avait la faculté d'attirer les corps légers tels que les cheveux ou fetus de paille. C'est d'ailleurs le mot grec *ηλεκτρον*<sup>1</sup>, signifiant ambre, qui est à l'origine du terme « électricité »<sup>2</sup>. Cette électrisation par frottement, dite *triboélectricité*, s'observe facilement dans la vie quotidienne. Parfois une forte électrisation peut même produire des étincelles comme lorsqu'on enlève un pull de laine rapidement (à condition d'être dans une pièce sombre pour percevoir ces étincelles). L'éclair, lors d'un orage, est un phénomène d'électricité statique impressionnant qui fut longtemps craint par les hommes. Il fallut attendre B. Franklin en 1752 pour identifier la nature électrique du phénomène et pour maîtriser les dégâts du tonnerre par l'invention du paratonnerre.

1. *ēlektron*

2. Terme introduit en 1600 par William Gilbert dans son ouvrage *De Magnete*.

#### Les deux formes de l'électricité

C'est Charles du Fay qui observa les deux formes d'électricité. On peut mettre en évidence ces deux formes par les expériences suivantes.

**Expérience 1** Un pendule électrostatique est constitué d'une bille de polystyrène recouverte d'une feuille d'aluminium suspendue à une potence par un fil. Lorsqu'on approche une baguette électrisée du pendule, la bille est attirée par la baguette. Après contact avec la baguette, elle est repoussée.

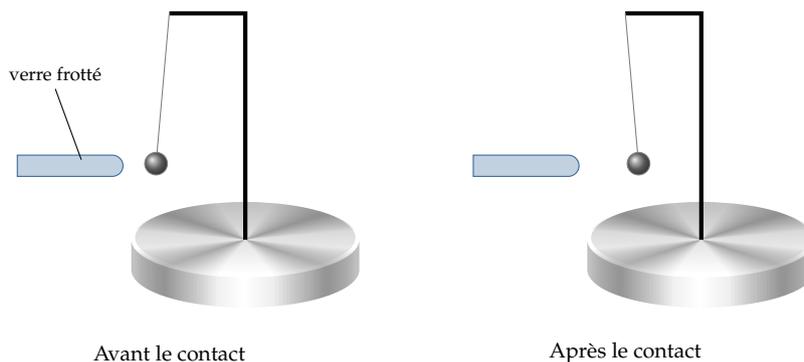


FIGURE 1.1 – Expérience 1

**Expérience 2** Si on électrise un pendule électrostatique par contact avec une baguette chargée, et que l'on approche successivement d'autres baguettes électrisées, on s'aperçoit que la boule du pendule est soit attirée, soit repoussée par les diverses baguettes. On peut donc en déduire qu'il existe deux types de forces électriques.

### Électrisation par influence

**Expérience 3** Un électroscope est constitué d'une tige métallique à laquelle on fixe une aiguille métallique pouvant librement tourner autour d'un axe. On fixe parfois deux feuilles très fines en or ou en aluminium. L'ensemble est placé dans une enceinte transparente et isolante (verre). Lorsqu'on approche une baguette électrisée de l'électroscope (sans le toucher), l'aiguille s'écarte de la verticale. Si on éloigne la baguette, l'aiguille retrouve sa position verticale de repos. Il y a électrisation de la tige et de l'aiguille sans contact, seulement par influence.

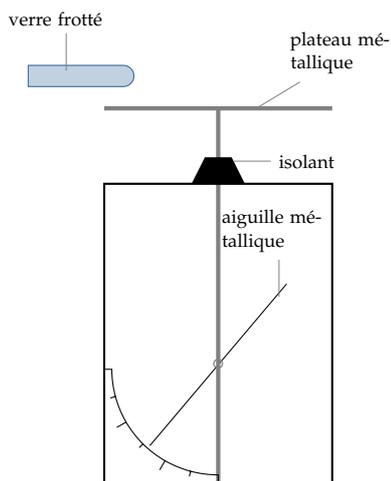


FIGURE 1.2 – Plus la baguette se rapproche de l'électroscope, plus les aiguilles s'écartent.

### Notion de charge électrique

Jusqu'au XVIII<sup>e</sup> siècle, l'électricité est une science essentiellement qualitative et il faut attendre le début du XIX<sup>e</sup> siècle pour qu'une théorie mathématique de l'électricité émerge : c'est l'électrostatique. La notion de charge électrique algébrique s'est imposée au fil du temps car elle permettait de décrire correctement les phénomènes. De nos jours, on admet les hypothèses suivantes.

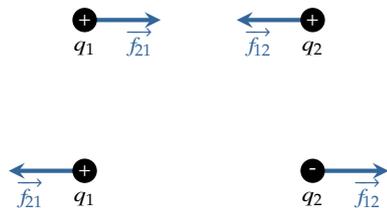


FIGURE 1.3 – Répulsion ou attraction électrostatique

1. La matière est constituée de particules que l'on peut caractériser par une propriété scalaire, noté  $q$  et désignant la **charge électrique**. Cette charge est positive, négative ou nulle (on parle de particule neutre dans ce cas).
2. Deux particules possédant une électricité de même nature, c'est-à-dire une charge de même signe, se repoussent ; elles s'attirent dans le cas contraire.
3. La charge étant caractéristique de la matière, elle ne dépend pas du référentiel.
4. Par ailleurs, la charge électrique d'un système isolé se conserve.

5. Enfin, Millikan a montré en 1906 (Prix Nobel 1923) que la charge électrique est quantifiée. C'est en étudiant la chute de microscopiques gouttes d'huile électrisées, entre les armatures d'un condensateur, qu'il mit en évidence le caractère discontinu de la charge :

$$q = Ne \quad \text{avec} \quad N \in \mathbb{Z}$$

où  $e$  désigne la **charge élémentaire**. De nos jours, on sait que ce caractère granulaire de la charge trouve son origine dans la structure atomique de la matière : tout corps matériel est constitué d'atomes eux même formés d'un noyau chargé positivement (découvert en 1911 par Rutherford) autour duquel « gravitent » des électrons, particules élémentaires possédant toutes la même charge  $q_e = -e$ . La plupart des phénomènes électriques sont liés à un déplacement et/ou apport et/ou retrait d'électrons à la matière.

Le concept de charge permet d'expliquer les différents expériences décrites précédemment :

**Expérience 1** Lorsqu'on approche la baguette électrisée de la sphère métallique, les électrons libres du métal sont attirés par le verre chargé positivement, laissant derrière eux des charges positives. Bien que la charge globale reste nulle, la force résultante est attractive : en effet, l'attraction entre les électrons et le verre l'emporte sur la répulsion entre les charges positives du conducteur et le verre. Après un contact, quelques électrons sont transférés sur la baguette en verre ce qui rend la sphère métallique globalement positive d'où la répulsion observée<sup>3</sup>.

**Expérience 2** Le frottement d'un corps sur un autre induit un transfert d'électrons dans un sens qui dépend des corps frottés l'un contre l'autre. C'est pourquoi, il est possible d'électriser positivement ou négativement une baguette. On peut donc produire une répulsion ou une attraction.

**Expérience 3** Les charges positives du verre électrisé attirent les électrons libres du plateau métallique faisant apparaître au niveau de l'aiguille et de la tige métallique un défaut d'électrons (des charges +). L'aiguille métallique est alors d'autant plus repoussée par la tige qu'elle est chargée. La rotation de l'aiguille est donc d'autant plus importante que la baguette se rapproche.

3. Il faut quand même signaler que lorsque l'expérience est réalisée avec une baguette faiblement électrisée, la sphère conductrice vient s'y coller sans être ensuite repoussée : c'est le phénomène d'adhérence électrique. En revanche si la baguette est suffisamment chargée, la pression entre les deux corps est plus forte ce qui favorise un transfert d'électrons. À l'extrême, lorsque le verre est fortement chargé, le transfert de charge s'effectue sans qu'il y ait contact, mais par un simple effet de pointe (cf. le [Chapitre 4](#) sur les conducteurs)

## Loi de Coulomb

À la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, l'idée que les charges produisent une force de type newtonien (en  $1/r^2$ ) était une hypothèse séduisante mais difficile à prouver expérimentalement.

### L'expérience de Coulomb

C'est en 1785 que Coulomb<sup>4</sup> met en évidence, à l'aide d'une balance de torsion qu'il a réalisée lui-même, la loi qui porte désormais son

4. **Charles-Augustin Coulomb (1736-1806)** : ingénieur militaire français et fin expérimentateur distingué par l'Académie des Sciences. Il est connu pour ses travaux sur l'électricité et le magnétisme, son invention du pendule de torsion et ses travaux sur les frottements.

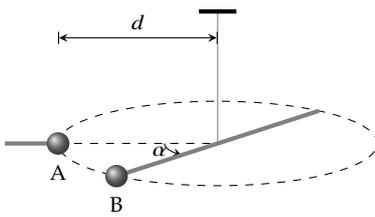


FIGURE 1.4 – Expérience de Coulomb

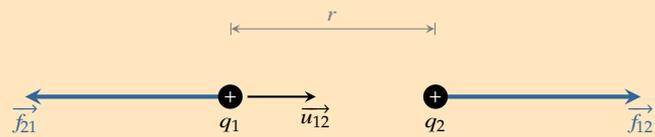
nom. L'expérience consiste à fixer une boule de sureau B à l'extrémité d'une tige isolante, suspendue en son milieu à un fil d'argent dont on peut contrôler l'angle de torsion. Ce système étant au repos, on approche une autre boule A tenue par une tige isolante au contact de la boule B. Ensuite, on électrise les deux boules simultanément de sorte qu'elles acquièrent la même charge  $Q$ . La boule A est maintenue en place et la boule B s'éloigne sous l'action de la force électrique. À l'équilibre, le moment de la force électrique compense le couple de torsion. Il suffit ensuite d'augmenter, de façon contrôlée, la torsion du fil pour rapprocher les boules et mesurer la force pour des distances plus faibles. C'est ainsi que Coulomb trouva que la force électrique varie en  $1/r^2$ .

Pour résumer, la force électrique - dite aussi *force coulombienne* - entre deux charges ponctuelles immobiles dans le vide varie comme l'inverse du carré de la distance qui les sépare et dépend de leur quantité de charge.

### Histoire

Les résultats de Coulomb furent contestés en son temps et il faudra une vingtaine d'années pour que la loi en  $1/r^2$  s'impose partout, plus pour la validité de ses conséquences que par les mesures de Coulomb. L'histoire a finalement retenu la démonstration expérimentale de Coulomb. Cependant, il ne faudrait pas oublier la contribution de Cavendish, un brillant expérimentateur, qui, avant Coulomb, a réussi à montrer de façon fort élégante que l'interaction électrique pouvait se décrire par une force en  $1/r^n$  avec  $n = 2,00 \pm 0,04$ ; résultat beaucoup plus précis que celui de Coulomb[1].

### Loi de Coulomb



$$\vec{f}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12} \quad (1.1)$$

où  $\vec{u}_{12}$  est un vecteur unitaire. Dans le Système International d'Unités, les charges s'expriment en coulomb (symbole : C) et la constante  $K$  vaut

$$K \triangleq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9,0 \cdot 10^9 \text{ m.F}^{-1}$$

où  $\epsilon_0$  désigne la *permittivité diélectrique du vide*.

**Exercice** – Dans l'atome d'hydrogène, comparer la force électrique que ressent l'électron de la part du proton avec la force gravitationnelle. On donne la charge élémentaire  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , la masse de l'électron  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  et la masse du proton  $m_p = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

*Rép.* Le rapport de la force électrique sur la force gravitationnelle vaut environ  $2 \cdot 10^{39}$

## 1.2 Le champ électrique

### Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

Considérons une distribution de charges ponctuelles ( $q_1, \dots, q_N$ ) placées en différents points  $P_{i=1\dots N}$  et une charge test  $Q$  placée en M. Cherchons à exprimer la force qu'exerce cette ensemble de charges sur la charge test. On admet que l'interaction électrique obéit au principe

de superposition : la force résultante est la *somme vectorielle* des forces qu'exercent chacune des charges  $q_i$  sur la charge  $Q$  soit

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i = \sum_{i=1}^N \frac{Qq_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i \quad \text{avec } r_i = P_iM$$

Ce qui permet d'écrire

$$\vec{F} = Q\vec{E}(M) \quad \text{avec} \quad \vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i \quad \heartsuit \quad (1.2)$$

Où  $\vec{E}(M)$  désigne le champ électrique créé en  $M$  par la distribution de charges. Ce vecteur est défini en tout point de l'espace<sup>5</sup> : il s'agit d'un **champ vectoriel**. On peut voir  $\vec{E}(M)$  comme une propriété locale de l'espace. Notez que lorsque l'on change la charge  $q_i$  en  $q'_i$  cela modifie le champ électrique en  $M$  mais de façon non instantané. On verra que toute perturbation électromagnétique se propage à la vitesse de la lumière dans le vide.

**Ordre de grandeur** – Dans le Système international d'unités, l'intensité du champ électrique se mesure en **volt par mètre** (symbole  $V.m^{-1}$ ). Le champ à la surface de la Terre vaut environ 100-150 V/m en dehors des périodes d'orage. En période d'orage, le champ terrestre est inversé et est de l'ordre de 10 kV/m. Il peut même atteindre 100 kV/m près des pointes conductrices.

La lumière solaire qui nous arrive sur Terre est une **onde électromagnétique** : le champ électrique de l'onde est de l'ordre de (en valeur efficace) 1000 V/m.

Dans l'atome, la cohésion est assurée grâce à des champs électriques énormes, de l'ordre de 100 GV/m.

## Topographie - Symétrie

Décrivons différentes situations pour dégager quelques propriétés du champ électrique. Tout d'abord, la représentation d'un champ vectoriel fait généralement appel à la notion de *ligne de champ*.

### Ligne de champ

Pour représenter un champ vectoriel  $\vec{A}(x, y, z)$ , on trace des courbes orientées  $\mathcal{C}$  telles que leur tangente, en chaque point  $M(x, y, z)$ , ait la même direction et le même sens que le champ vectoriel en ce point. Ces courbes sont des lignes de champ.

D'un point de vue mathématique, si l'on note  $\vec{d\ell} = (dx, dy, dz)$ , le vecteur déplacement infinitésimal le long de la ligne de champ  $\mathcal{C}$ , on a

$$\vec{d\ell} \wedge \vec{A}(M) = \vec{0} \quad \text{pour tout } M \in \mathcal{C}$$

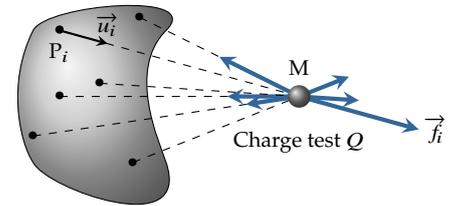


FIGURE 1.5 – Distribution de  $N$  charges  $q_i$  placées en  $P_i$ .

5. Ce champ diverge lorsque  $M = P_i$ . Cette divergence provient d'une modélisation qui n'est plus valide dès que l'on s'approche de trop près des charges : la charge ponctuelle n'existe pas en réalité, il faut reconsidérer la modélisation dans ce cas.

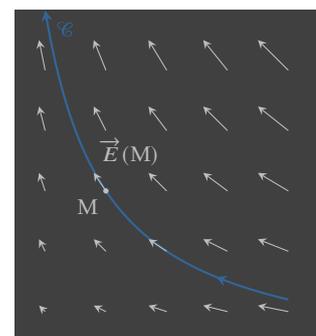


FIGURE 1.6 – Ligne de champ  $\mathcal{C}$

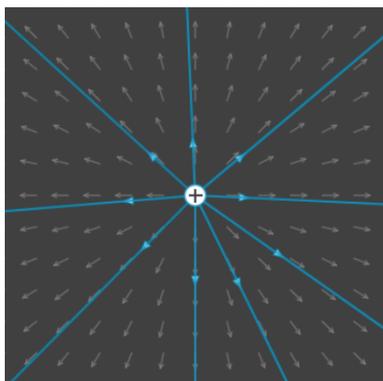


FIGURE 1.7 – Carte de champ d'une charge ponctuelle positive.

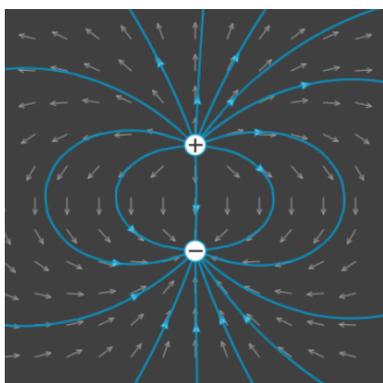


FIGURE 1.8 – Carte de champ d'un doublet électrostatique.

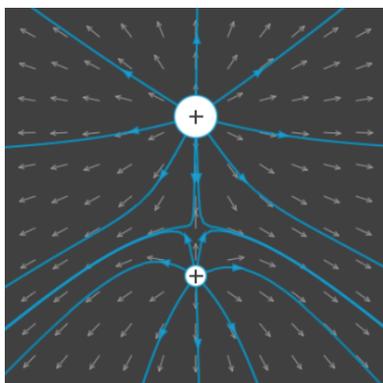


FIGURE 1.9 – Carte de champ d'un système de 2 charges positives.

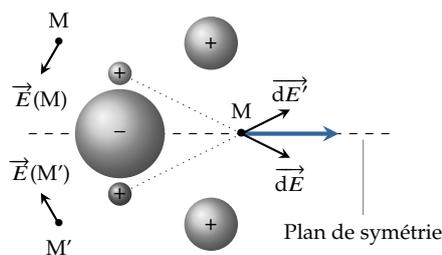


FIGURE 1.10 – Distribution présentant un plan de symétrie.

**Champ créé par une charge ponctuelle** – Plaçons une charge ponctuelle  $q$  à l'origine d'un repère et calculons le champ électrique créé en un point  $M$  de l'espace situé à la distance  $r$  de l'origine. On obtient

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} = \frac{q\vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

où  $\vec{u}_r$  désigne le vecteur unitaire radial du système de coordonnées sphériques.

On peut voir ci-contre la carte du champ électrique créé par une telle charge ponctuelle. Notez que les vecteurs sont normalisés de sorte qu'ils indiquent seulement la direction et le sens du champ électrique. On a ajouté quelques lignes de champ. On observe que le champ est radial et centrifuge si la charge est positive. Evidemment, si l'on inverse le signe de la charge, les lignes de champ sont radiales et orientées vers la charge.

**Champ créé par un doublet** – Considérons deux charges ponctuelles de signe opposé,  $q$  et  $-q$ . Ce système forme ce que l'on appelle un doublet électrostatique. Regardons la carte de champ correspondante.

On peut voir que les lignes de champ partent de la charge positive pour converger vers la charge négative sans jamais se refermer. Par ailleurs, la distribution présente un plan de symétrie (plan miroir, vertical ici). On constate que pour tout point  $M$  de ce plan,  $\vec{E}(M)$  est dans ce plan. La distribution présente également un plan d'antisymétrie (plan horizontal équidistant des deux charges) qui échange le signe des charges après une opération miroir. On peut noter que pour tout point  $M$  de ce plan,  $\vec{E}(M)$  est perpendiculaire à ce plan.

**Champ créé par deux charges de même signe** – Considérons deux charges de même signe et de valeur différente situées sur un axe horizontal.

On peut faire les mêmes remarques que précédemment. Les lignes de champ partent des charges positives. Là encore, les lignes de champ, ne se referment pas sur elles mêmes. En terme de symétrie, la distribution de charges présente un plan de symétrie horizontal et, comme précédemment, pour tout point  $M$  de ce plan,  $\vec{E}(M)$  est dans ce plan. En revanche, la distribution ne présente pas de plan d'antisymétrie. Enfin, il existe un point où le champ est nul situé entre les deux charges. Ce point est un *point singulier*.

**Symétries** – Les exemples précédents mettent en évidence quelques propriétés de symétrie très générales.

Supposons qu'une distribution présente un plan de symétrie  $\mathcal{P}$ , c'est-à-dire que la distribution de charge est *invariante par rapport à une réflexion de plan  $\mathcal{P}$* . On montre alors que le plan se comporte également comme un miroir vis-à-vis du champ électrique. Autrement dit, si l'on note  $M'$  l'image de  $M$  par une symétrie de plan  $\mathcal{P}$ , on a

$$\vec{E}(M') = \text{sym}(\vec{E}(M))$$

Intéressons nous aux points situés dans le plan de symétrie. On voit alors qu'à tout point P de la distribution, créant un champ  $\vec{dE}(M)$ , correspond un point symétrique P' créant un champ  $\vec{dE}'(M)$  telle que  $\vec{dE}(M) + \vec{dE}'(M)$  se trouve dans le plan  $\mathcal{P}$ . Ainsi le champ résultant  $\vec{E}(M)$  est nécessairement dans le plan  $\mathcal{P}$ . Une conséquence immédiate est que le champ électrique est nécessairement nul au centre de symétrie d'une distribution.

Supposons maintenant que la distribution change de signe par rapport à un plan  $\mathcal{P}'$ . On dit alors que  $\mathcal{P}'$  est un plan anti-symétrique. Cette symétrie se retrouve également dans le champ électrique : si l'on note M' l'image de M par une symétrie de plan  $\mathcal{P}'$ , on a

$$\vec{E}(M') = -\text{sym}\vec{E}(M)$$

Cherchons le champ créé en un point  $M \in \mathcal{P}'$ . On voit alors qu'à tout point P de la distribution, créant un champ  $\vec{dE}(M)$ , correspond un point symétrique P' créant un champ  $\vec{dE}'(M)$  telle que  $\vec{dE}(M) + \vec{dE}'(M)$  est perpendiculaire au plan  $\mathcal{P}'$ . Ainsi le champ résultant  $\vec{E}(M)$  est nécessairement perpendiculaire au plan  $\mathcal{P}'$ .

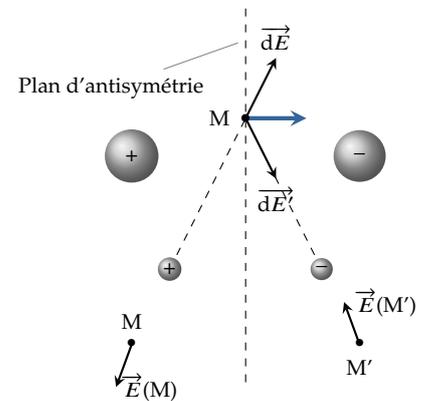


FIGURE 1.11 – Distribution présentant un plan d'anti-symétrie.

#### À savoir

- En tout point d'un plan de symétrie, le champ électrique est contenu dans ce plan.
- En tout point d'un plan d'anti-symétrie, le champ électrique est perpendiculaire à ce plan.
- De manière plus générale, lorsque que certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétries des causes doivent se retrouver dans les effets produits (Principe de Curie). Ici, les causes sont représentées par la distribution de charges et les effets par le champ électrostatique.

## Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

**Fonction de répartition** – On sait que toute distribution de charges est rigoureusement discontinue puisque tout transfert de charge ne se fait que par multiple entier de  $e$ . Cependant, à l'échelle macroscopique, un corps électrisé par frottement acquiert facilement une quantité de charge de l'ordre de

$$q = Ne \simeq \text{qqes nC} \quad \text{soit} \quad N \simeq 10^{10} \gg 1$$

Le nombre de particules est si grand que l'aspect discontinue passe inaperçu. On peut alors décrire la distribution de charges comme une *répartition continue de charges* et définir une fonction de répartition.

La **densité volumique de charge**  $\rho(M)$  décrit la répartition en volume d'une quantité de charge. En un point M contenu dans un volume

infinitésimal  $d\tau$ , la quantité de charge s'écrit

$$dq = \rho(M) d\tau \quad \heartsuit \quad (1.3)$$

où  $\rho(M)$  s'exprime en  $\text{C.m}^{-3}$ . Si le milieu est homogène  $\rho = q_{\text{total}}/V = \text{C}^{\text{te}}$ .

La **densité surfacique de charge**  $\sigma(M)$  décrit une répartition en surface d'une quantité de charge. En un point M contenu dans un élément d'aire infinitésimal  $dS$ , la quantité de charge s'écrit

$$dq = \sigma(M) dS \quad \heartsuit \quad (1.4)$$

où  $\sigma(M)$  s'exprime en  $\text{C.m}^{-2}$ . Si le milieu est homogène  $\sigma = q_{\text{total}}/S = \text{C}^{\text{te}}$ .

Enfin, la **densité linéique de charge** caractérise la répartition de la charge le long d'un fil chargé. Pour un élément de longueur infinitésimal  $d\ell$  situé en M, la quantité de charge s'écrit

$$dq = \lambda(M) d\ell \quad \heartsuit \quad (1.5)$$

où  $\lambda(M)$  s'exprime en  $\text{C.m}^{-1}$ . Le passage du discret au continu pour le calcul du champ électrostatique transforme la somme en une intégrale :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{D}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \quad \heartsuit \quad (1.6)$$

où  $\mathcal{D}$  représente le domaine d'intégration (volume, surface, ligne). Suivant le type de problème, on remplacera  $dq$  par  $\rho d\tau$  ou  $\sigma dS$  ou  $\lambda d\ell$ . Le calcul de cette intégrale est en général grandement simplifié si la distribution présente des symétries. C'est pourquoi, avant tout calcul direct, il est conseillé de faire une première analyse des propriétés de symétrie.

Les densités de charge introduites sont des grandeurs considérées locales à notre échelle, mais sont en réalité le résultat d'une moyenne effectuée à une échelle intermédiaire entre l'échelle atomique (ou la densité de charge varie de façon extrêmement brutale et erratique) et l'échelle macroscopique. Ainsi, l'intégrale (1.6) représente un champ local moyenné qui a, certes, le bon goût de varier continuellement, mais qui n'a plus de sens à l'échelle atomique.

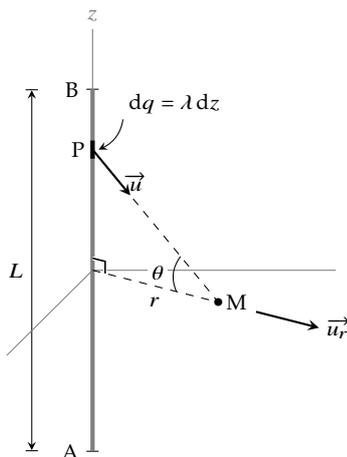


FIGURE 1.12 – Calcul du champ créé par un segment chargé

#### Exemple – Champ créé dans le plan médiateur d'un segment chargé

On considère un segment AB de longueur  $L$ , contenant une charge  $Q$  uniformément répartie le long du segment. On cherche à calculer le champ électrique créé dans un plan médiateur du segment à la distance  $r$ . Ici la densité de charge est constante :  $\lambda = Q/L$ . Le plan médiateur est un plan de symétrie et le plan contenant le fil également de sorte que le champ est radial dirigé suivant le vecteur polaire  $\vec{u}_r$ . Par ailleurs, par symétrie de révolution, le champ ne dépend que de  $r$ . Nous avons donc

$$\vec{E}(M) = E_r \vec{u}_r$$

Il suffit donc de calculer la composante radiale du champ :

$$E_r = \vec{E} \cdot \vec{u}_r = \int \frac{dq \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 PM^2} = \int_{AB} \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 PM^2} dz$$

Attention à ne pas écrire  $E = \int dE$  car la somme d'une norme n'est pas égale, en général, à la norme de la somme. Les variables  $PM$ ,  $z$  et  $\theta$  étant liées, il faut choisir une variable d'intégration. L'angle  $\theta$  est un bon choix.

À l'aide des relations  $PM = r/\cos \theta$  et  $z = r \tan \theta$  (et donc  $dz = r d\theta/\cos^2 \theta$ ), on a

$$E_r = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} 2 \sin \theta_0 \quad \text{avec} \quad \sin \theta_0 = \frac{L}{2\sqrt{r^2 + (L/2)^2}}$$

on peut finalement écrire le champ électrique :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{Q}{\sqrt{r^2 + (L/2)^2}} \vec{u}_r$$

Remarquons que pour  $r \rightarrow \infty$  on retrouve  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  ce qui est cohérent avec le fait qu'à grande distance le segment est assimilable à une charge ponctuelle.



# POTENTIEL ET ÉNERGIE ÉLECTRIQUES

# 2

La force électrostatique présente les mêmes propriétés que la force gravitationnelle, à savoir qu'elle est conservative ce qui permet d'introduire tout naturellement les notions d'énergie et de potentiel électrostatique. La connaissance du potentiel suffit alors à décrire complètement les effets électriques.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

[femto-physique.fr/electromagnetisme/potentiel-electrostatique.php](http://femto-physique.fr/electromagnetisme/potentiel-electrostatique.php)

2.1 Potentiel électrostatique . . .	13
Énergie d'interaction . . . . .	13
Potentiel électrostatique . . .	14
Topographie . . . . .	15
Tension électrique . . . . .	16
2.2 L'énergie électrostatique . . .	17
Énergie d'une charge . . . . .	17
Énergie d'un système chargé	18

## 2.1 Potentiel électrostatique

### Énergie d'interaction entre deux charges ponctuelles

Pour introduire la notion de potentiel électrostatique, intéressons nous à l'interaction entre deux charges électriques  $q$  et  $q'$ . Supposons la première charge fixe et l'autre se déplaçant entre deux points A et B suivant un parcours  $\mathcal{C}$  quelconque.

En vertu de la loi de Coulomb, la charge  $q'$  subit au cours de son mouvement une force

$$\vec{f} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire dirigé de la charge  $q$  vers la charge  $q'$ . Cette force produit un travail mécanique

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$$

Le déplacement présente une composante parallèle à  $\vec{u}_r$  et une composante perpendiculaire :  $d\vec{\ell} = d\vec{\ell}_\perp + d\vec{\ell}_\parallel$ . La composante parallèle, la seule qui nous intéresse pour le calcul du travail, correspond au déplacement radial  $d\vec{\ell}_\parallel = dr \vec{u}_r$  de sorte que le travail s'écrit

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\mathcal{C}} \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

On constate que le travail ne dépend pas du trajet emprunté par la particule entre A et B : **la force électrique est une force conservative**. On peut donc définir une énergie potentielle électrique  $\mathcal{E}_p$ . Or, on sait<sup>7</sup> que

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B)$$

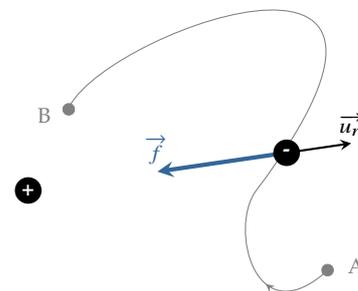


FIGURE 2.1 – Travail de la force électrostatique.

7. cf. cours de mécanique

ce qui donne, à une constante près (sans signification physique)

$$\mathcal{E}_p = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \heartsuit \quad (2.1)$$

Finalement, en voyageant dans l'espace, la particule « puise une énergie potentielle dans le champ électrique ».

## Potentiel électrostatique

Poursuivons notre raisonnement en faisant intervenir le champ électrique. On peut dire que la charge  $q'$  se déplace dans un champ électrique  $\vec{E}$  créé par  $q$  ce qui produit une force  $\vec{f} = q'\vec{E}$ . Cette force conservative est reliée à l'énergie potentielle *via* la relation  $\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p$  d'où l'on tire facilement

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$$

### L'opérateur « gradient »

L'opérateur  $\overrightarrow{\text{grad}}$  est un opérateur *différentiel linéaire*. Il s'applique à une fonction scalaire de l'espace (champ scalaire) et retourne une fonction vectorielle de l'espace (champ vectoriel). Il se lit *gradient* ou *nabla* et se note :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y, z) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla}f(x, y, z)$$

L'expression de l'opérateur gradient dépend du système de coordonnées. En coordonnées cartésiennes on retiendra la formule suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

On voit donc que le champ électrique créé par une charge ponctuelle **est le gradient d'une fonction**. Cette propriété se généralise. En effet, comme le champ électrique créé par une distribution de charges est la somme de tous les champs individuels et que l'opérateur gradient est linéaire, il est facile de montrer que le champ créé par une distribution de charges peut toujours s'écrire

$$\vec{E}(M) \triangleq -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) \quad \heartsuit \quad (2.2)$$

Cette relation définit la fonction  $V(M)$  appelée le **potentiel électrostatique au point M**.

On vient de voir que le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle  $q$  s'écrit

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad [\text{charge ponctuelle}]$$

Il en découle, en vertu du principe de superposition, l'expression générale pour une distribution de charges  $(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N)$  :

$$V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad \heartsuit \quad (2.3)$$

Le passage discret  $\rightarrow$  continu s'obtient par l'intégrale

$$V(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \heartsuit \quad (2.4)$$

où  $dq = \lambda dl$  ou  $\sigma dS$  ou  $\rho_e dV$  suivant le type de distribution.

Le potentiel s'exprime en **volt** (symbole :  $V$ ), en hommage à Volta<sup>8</sup>. Une analyse dimensionnelle montre que  $[V] = [E] L$  de sorte que le champ électrique peut s'exprimer en  $V.m^{-1}$ .

Finalement, on peut dire qu'un ensemble de charges électriques fixes produit un champ de potentiel  $V(M)$  et que toute charge  $q$  « baignant » dans ce champ subit une force

$$\vec{f} = -q \overrightarrow{\text{grad}} V$$

La connaissance du potentiel  $V(M)$  permet de connaître le champ électrique  $\vec{E}(M)$  et vice versa.

**Remarque** : La relation (2.2) implique que le potentiel est défini à une constante additive près, dont la valeur est arbitraire. En l'absence d'autres conventions, nous ferons le choix de la prendre égale à zéro.

## Topographie

En général, le potentiel  $V(M)$  dépend des trois coordonnées de l'espace mais, pour simplifier, nous allons supposer que le champ  $V(M)$  ne dépend que de deux coordonnées, disons  $x$  et  $y$ . Cela revient finalement à étudier le potentiel dans un plan particulier. Il y a deux façons de représenter le champ scalaire  $V(x, y)$  :

1. On peut tracer l'ensemble des points  $z = V(x, y)$  dans un repère cartésien et l'on obtient alors une surface donnant l'évolution du potentiel. En chaque point de cette surface, la plus grande pente donne accès au gradient du potentiel, c'est-à-dire au champ électrique. Plus exactement le champ électrique

$$\vec{E} = - \left( \begin{array}{c} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{array} \right)$$

correspond à la plus grande pente dans le sens de la descente. Ainsi le champ électrique est nul pour les points  $(x, y)$  correspondant aux sommets, vallées ou col de la surface. On comprend aussi pourquoi les lignes de champ ne se referment pas : en effet, si l'on suit un chemin qui ne cesse de descendre, on ne pourra jamais revenir au point de départ.

Il faut noter cependant que le passage discret  $\rightarrow$  continu introduit des difficultés mathématiques. Par exemple, l'intégrale citée diverge pour un segment infini uniformément chargé. Cette divergence est levée dès que la taille du système devient fini ce qui montre qu'elle est liée à une modélisation non physique.  
8. **Alessandro Volta (1745 -1827)** : physicien italien et inventeur de la première pile en 1800.

2. À l'instar des cartes topographiques, on préfère souvent représenter des **équipotentiels**, c'est-à-dire des courbes de niveau correspondant à une unique valeur de potentiel.

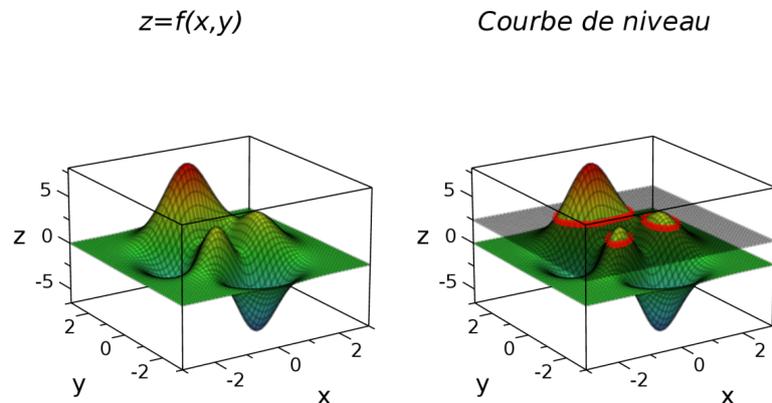


FIGURE 2.2 – Représentations d'un champ scalaire.

**Remarque :** Si le potentiel ne dépend que de deux coordonnées, l'équipotentielle  $V(x, y) = C^{\text{te}}$  est **une courbe**. En revanche, si le potentiel dépend de trois coordonnées, l'équipotentielle  $V(x, y, z) = C^{\text{te}}$  correspond à **une surface**.

### Relation entre les lignes de champ électrique et les équipotentiels

– Considérons un point M se déplaçant le long d'une équipotentielle particulière. Le potentiel conservant une valeur constante, on a  $dV = 0$ . Or, on peut écrire

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Ainsi, le long d'une équipotentielle, on a  $\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$  ce qui signifie que si l'on se déplace le long d'une équipotentielle, on croise toujours le champ électrique avec un angle droit. Autrement dit, **les lignes de champ électrique sont perpendiculaires aux équipotentiels**.

En conséquence, si la distribution de charges présente un plan d'antisymétrie, celui-ci est nécessairement une surface équipotentielle puisque le champ y est perpendiculaire.

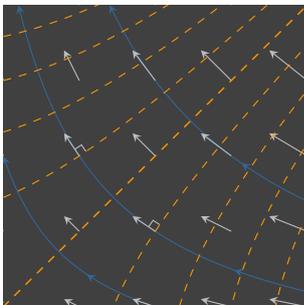


FIGURE 2.3 – Les équipotentiels (en pointillées) coupent les lignes de champ (en bleu) à angle droit.

### Notion de tension électrique

Par définition, la tension électrique est une différence de potentiel électrique ou *d.d.p.* entre deux points. On notera  $U_{AB}$  la *d.d.p.* entre A et B :

$$U_{AB} \triangleq V(A) - V(B) \quad \heartsuit \quad (2.5)$$

La tension, comme le potentiel électrique, s'exprime en volt. Notez que si le potentiel présente une indétermination, la tension est par contre bien déterminée ce qui en fait une grandeur mesurable indépendante du choix arbitraire de l'origine des potentiels.

Électronique	Piles	Électrotechnique ( moteurs, centrales)
$\mu\text{ V} - \text{V}$	1-10 V	100 V - 400 kV

TABLE 2.1 – Ordres de grandeur

La connaissance du champ électrique en tout point d'une région de l'espace permet de calculer la tension entre deux points de cette région par un calcul intégral :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B dV = V(A) - V(B) = U_{AB} \quad \heartsuit \quad (2.6)$$

En conséquence, si le champ électrique possède une norme constante  $E$  le long d'une ligne de champ, la tension existante entre deux points de cette ligne de champ distants de  $d$  vaut  $U = Ed$ .

## 2.2 L'énergie électrostatique

Nous distinguerons deux cas de figure.

1. Soit une charge électrique est plongée dans un champ électrique créé par un système électrique extérieur. On dira que la charge est en interaction avec un champ électrique extérieur et on montrera que l'on peut définir une énergie potentielle électrique.
2. Soit  $N$  charges sont en interaction mutuelle. On montrera que ce système de charges possède une énergie potentielle interne.

### Énergie potentielle d'une charge dans un champ extérieur

La force électrostatique que subit une charge  $q$  plongée dans un champ extérieur  $\vec{E}_{\text{ext}}$  vaut  $\vec{F} = q\vec{E}_{\text{ext}}$ . En vertu de la définition du potentiel électrique, on a

$$\vec{E}_{\text{ext}} = -\overrightarrow{\text{grad}}V_{\text{ext}}$$

où  $V_{\text{ext}}$  désigne le potentiel électrique. On peut aussi écrire

$$\vec{F} = q\vec{E}_{\text{ext}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_p = qV_{\text{ext}} \quad \heartsuit \quad (2.7)$$

où  $\mathcal{E}_p$  désigne l'énergie potentielle électrostatique. Cette énergie s'exprime en joule et n'est pas à confondre avec le potentiel électrostatique.

#### L'électron-volt

Une charge électrique  $q$  soumise à un champ électrique voit donc son énergie cinétique varier suivant la relation (conservation de l'énergie) :

$$\mathcal{E}_{cA} + qV_A = \mathcal{E}_{cB} + qV_B \Rightarrow \mathcal{E}_{cB} = \mathcal{E}_{cA} + qU_{AB}$$

Autrement dit, le gain d'énergie ne dépend que de la tension électrique entre la position initiale et la position finale :

$$\Delta \mathcal{E}_c = qU_{AB}$$

Lorsque  $q = e$  et  $U_{AB} = 1 \text{ V}$ , le gain d'énergie vaut, *par définition*, 1 électron-volt. Ainsi,

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

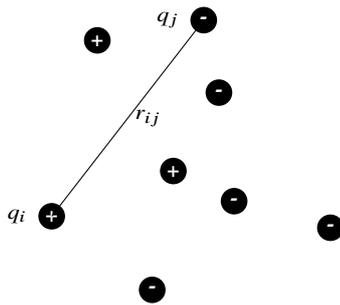


FIGURE 2.4 – Distribution de  $N$  charges ponctuelles.

## Énergie d'interaction d'un système de charges

Considérons une distribution stationnaire de  $N$  charges électriques  $\{q_{i=1,\dots,N}\}$  situées en  $P_i$ . On note  $r_{ij}$  la distance qui sépare les charges  $q_i$  et  $q_j$ . Par définition, l'énergie électrostatique  $\mathcal{E}_{p,\text{int}}$  d'un tel système représente le travail qu'un opérateur doit fournir pour amener, de façon quasi-statique et depuis l'infini, les charges dans leur position finale. Puisque la force électrique est conservative, l'énergie que l'on doit dépenser ne dépend pas de la manière dont on s'y prend pour constituer le système.

Commençons donc par placer la charge  $q_1$  en  $P_1$ , ce qui ne nous coûte aucun travail. Ensuite amenons depuis l'infini la charge  $q_2$  en  $P_2$ . Lors de cette opération, la force électrique qui agit sur  $q_2$  produit un travail

$$W = -\Delta \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p|_{\text{initial}} - \mathcal{E}_p|_{\text{final}} = q_2 (V_{\text{initial}} - V_{\text{final}})$$

Ici, le potentiel électrique auquel est soumis la charge  $q_2$  vaut

$$V(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + C^{\text{te}} \quad \text{d'où} \quad W = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Ce que l'on cherche n'est pas le travail de la force électrique mais le travail qu'il faut fournir pour s'opposer à celle-ci. Si le déplacement se fait de manière quasi-statique, on doit fournir un travail opposé à  $W$ . Pour un système de 2 charges, on trouve donc

$$\mathcal{E}_{p,\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Ajoutons maintenant une troisième charge  $q_3$ . Cette opération nous coûte une énergie supplémentaire

$$q_3 (V_{\text{final}} - V_{\text{initial}}) = q_3 \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right)$$

de sorte que l'énergie d'un système de trois charges vaut

$$\mathcal{E}_{p,\text{int}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

On trouve ainsi autant de termes  $q_i q_j / (4\pi\epsilon_0 r_{ij})$  que de couples en interaction, ce qui se généralise sans difficulté : l'énergie d'interaction

d'un système<sup>9</sup> constitué par  $N$  charges ponctuelles vaut

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \sum_{\text{couples } (i,j)} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad \heartsuit \quad (2.8)$$

On peut aussi reformuler en faisant intervenir le potentiel que subit la charge  $q_i$ , à savoir :

$$V_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{p int}} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (2.9) \end{aligned}$$

Notez que cette énergie ne dépend que des positions relatives des charges les unes par rapport aux autres. En effet, l'expression (2.8) est invariante par translation et/ou rotation du système de charges. De ce fait cette énergie est liée à la configuration de l'ensemble; il caractérise donc le système et on ne peut imputer une partie de l'énergie à une charge particulière.

**Exercice** – Calculer l'énergie potentielle électrostatique d'un système constitué de  $N \gg 1$  charges  $q$  disposées de façon alternative avec  $N$  charges  $-q$  le long d'une ligne; l'espacement entre deux voisins étant constant et fixé à  $a$ .



On donne  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \ln 2$

Rép.  $\mathcal{E}_{\text{p int}} = -\frac{2N \ln 2 q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$

La valeur négative d'une telle énergie, comme dans l'exercice précédent, signifie simplement qu'il faut fournir de l'énergie pour séparer les charges et les emmener à l'infini.

9. On parle aussi d'énergie de mutuelle interaction.

On rappelle que

$$\sum_{i,j \neq i} u_{ij} = \sum_{i,j < i} u_{ij} + \sum_{i,j > i} u_{ij}$$

ce qui donne lorsque  $u_{ij} = u_{ji}$

$$\sum_{i,j \neq i} u_{ij} = 2 \sum_{i,j < i} u_{ij}$$



Les faits montrent que des corps neutres peuvent malgré tout interagir via des forces de nature électriques, dite dipolaires. Ce cours aborde ces aspects qui jouent un rôle important dans la modélisation des interactions moléculaires ainsi que dans le phénomène de polarisation de la matière en général.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/dipole-electrique.php>

- 3.1 L'approximation dipolaire . . . 21
  - Le doublet électrostatique . . . 21
  - Généralisation . . . . . 22
  - Moment dipolaire électrique 23
  - Champ électrique dipolaire 25
- 3.2 Interactions dipolaires . . . 26
  - Énergie d'un dipôle . . . . . 26
  - Action d'un champ uniforme 27
  - Force dipolaire . . . . . 28
  - Interactions de van der Waals 28

## 3.1 L'approximation dipolaire

### Potentiel créé par un doublet électrostatique

On appelle doublet électrostatique, un ensemble de deux charges ponctuelles opposées  $+q$  et  $-q$  séparées d'une distance  $a$ . Sur la figure ci-contre, on note que l'axe AB est un axe de révolution. De plus, le plan contenant le doublet et le point M, est un plan de symétrie de la distribution. Par conséquent,

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta$$

Si l'on note  $r_1 = AM$  et  $r_2 = BM$ , le potentiel créé par ce doublet en un point M s'écrit

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Notons que l'équipotentielle  $V = 0$  est l'ensemble des points telles que  $r_1 = r_2$  ce qui correspond au plan médiateur du segment [AB], lequel représente également un plan d'antisymétrie de la distribution.

Cherchons maintenant à calculer le potentiel loin du doublet; c'est-à-dire à une distance  $r \gg a$ . Calculons le terme prépondérant du potentiel à l'aide d'un développement limité. On a (théorème de Pythagore généralisé)

$$r_1^2 = \left\| \vec{AO} + \vec{OM} \right\|^2 = \left( \frac{a}{2} \right)^2 + r^2 - ar \cos \theta$$

D'où

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{a}{2r} \right)^2 - \frac{a \cos \theta}{r} \right]^{-1/2}$$

Si on se contente d'une approximation à l'ordre 1 en  $a/r$ , on trouve

$$\frac{1}{r_1} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a \cos \theta}{2r} \right)$$

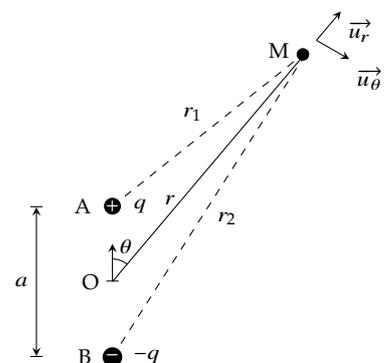


FIGURE 3.1 – Doublet électrostatique

De même pour  $1/r_2$  ( $\theta \rightarrow \pi - \theta$ ) :

$$\frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{2r} \right)$$

Finalement, loin du dipôle, on peut approcher le potentiel par

$$V \simeq \frac{qa \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{pour } r \gg a$$

Cela constitue l'*approximation dipolaire*. On remarque que le potentiel décroît à grande distance comme  $1/r^2$ . En effet, loin du doublet, on « voit » une charge totale nulle ce qui explique que les effets électriques diminuent plus vite que ceux d'une charge ponctuelle.

**Moment dipolaire électrique** – On note également que le potentiel dépend du produit  $qa$  qui représente le *moment dipolaire électrique* du doublet. On définit le moment dipolaire  $\vec{p}$  du doublet par

$$\vec{p} = q\vec{BA} \quad \heartsuit \quad (3.1)$$

orienté de la charge négative vers la charge positive. Ce moment s'exprime en C.m. On peut alors exprimer le potentiel dans l'approximation dipolaire à l'aide du moment dipolaire :

$$V_{\text{dipolaire}} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \heartsuit \quad (3.2)$$

### Généralisation

Généralisons le résultat précédent en considérant une distribution localisée de charges. On suppose qu'un ensemble de  $N$  charges ( $q_1, \dots, q_N$ ) occupe un volume fini. Nous noterons  $a$ , la *dimension caractéristique* de cette distribution. Cette distribution peut par exemple modéliser une molécule, un ion complexe, un métal chargé etc. On cherche à calculer les effets électriques (potentiel et champ électrique) dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire pour des points  $M$  situés à une distance grande devant  $a$ .

Plaçons l'origine  $O$  d'un repère dans la distribution puis adoptons les notations suivantes :

- $r = OM$ , la distance entre  $O$  et  $M$ ;
- $r_i = P_iM$  où  $P_i$  repère la position de la charge  $q_i$ ;
- $a_i = OP_i$ , la distance entre  $O$  et  $P_i$ .

Le potentiel électrostatique créé en  $M$  par la distribution de charges s'écrit

$$V(M) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

avec

$$r_i = \|\vec{OM} - \vec{OP}_i\| = r \sqrt{1 + \left(\frac{a_i}{r}\right)^2 - 2 \frac{\vec{OM} \cdot \vec{OP}_i}{r^2}}$$

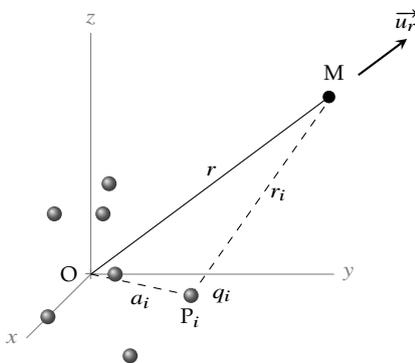


FIGURE 3.2 – Distribution de  $N$  charges ponctuelles.

Puisque  $a_i/r \ll 1$ , effectuons un développement limité du potentiel à l'ordre 2 en  $a_i/r$  à l'aide de la relation  $(1 + \epsilon)^{-1/2} = 1 - 1/2\epsilon + 3/8\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$  :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ 1 + \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP_i}}{r^2} + \frac{3(\overrightarrow{OP_i} \cdot \overrightarrow{u_r})^2 - OP_i^2}{2r^2} + o\left(\frac{a_i^2}{r^2}\right) \right]$$

Si l'on néglige les termes d'ordre supérieur à 2, on obtient l'approximation suivante :

$$V(M) \simeq \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{(\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}) \cdot \overrightarrow{u_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\mathcal{Q}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

On voit apparaître des termes décroissant en  $1/r^n$ . Les trois termes sont les premiers termes de ce que l'on appelle le *développement multipolaire* de  $V(M)$  :

1. Le premier terme désigne le *terme unipolaire*. C'est le terme prépondérant lorsque la charge totale est non nulle. Par exemple, un ion crée un champ quasi-newtonien dès que l'on se trouve à une distance grande devant sa taille<sup>11</sup>.
2. Le deuxième terme représente le *terme dipolaire*. Il devient prépondérant lorsque la charge totale est nulle à condition que  $\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} \neq \vec{0}$ . C'est par exemple le cas d'une molécule neutre qui ne présente pas de centre de symétrie (on parle de molécule polaire), comme par exemple  $H_2O$ ,  $HCl$ , etc.
3. Le troisième terme représente le *terme quadrupolaire*. Il décroît en  $1/r^3$  et dépend du moment quadrupolaire  $\mathcal{Q} = \sum \frac{1}{2} q_i a_i^2 (3 \cos^2 \theta_i - 1)$  qui mesure l'écart à la symétrie sphérique.

11. On montre que dans ce cas, si l'on place O au barycentre des charges, le deuxième terme disparaît et le terme suivant varie en  $1/r^3$  (terme quadrupolaire).

### À retenir

Pour une distribution électriquement neutre, on définit le moment dipolaire électrique

$$\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OP_i}$$

Si ce moment dipolaire est non nul, le potentiel électrique s'écrit dans l'approximation dipolaire :

$$V_{\text{dipolaire}}(M) = \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{u_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

## Moment dipolaire électrique

La notion de dipôle trouve naturellement sa place dans la description de certaines molécules pour lesquelles le barycentre des charges positives ne coïncide plus avec le barycentre des charges négatives. En effet, supposons une distribution de charges électriquement neutre, contenant  $N_+$  charges positives  $\{q_i^+\}$  et  $N_-$  charges négatives  $\{q_i^-\}$ .

TABLE 3.1 – Entités chimiques et types d'actions électriques produits.

Entité chimique	H <sub>2</sub> O	H <sub>2</sub>	HCl	CO <sub>2</sub>	NH <sub>4</sub> <sup>+</sup>	He
Charge	0	0	0	0	≠ 0	0
Moment dipolaire	≠ 0	0	≠ 0	0	0	0
Moment quadrupolaire	≠ 0	≠ 0	≠ 0	≠ 0	≠ 0	0
Potentiel à longue distance	1/r <sup>2</sup>	1/r <sup>3</sup>	1/r <sup>2</sup>	1/r <sup>3</sup>	1/r	1/r <sup>n</sup> n ≥ 4

L'électroneutralité se traduit par la relation

$$N_+q_i^+ = -N_-q_i^- = Q$$

Cette neutralité électrique induit que le moment dipolaire ne dépend pas du choix de l'origine<sup>12</sup>. En effet,

$$\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_i q_i \overrightarrow{OO'} + \sum_i q_i \overrightarrow{O'P_i} = \sum_i q_i \overrightarrow{O'P_i}$$

12. Un théorème général stipule que le premier moment multipolaire non nul est indépendant du choix de l'origine ([2] p.181).

Notons maintenant B<sub>+</sub> le barycentre des charges positives et B<sub>-</sub> celui des charges négatives. Par définition du barycentre, on a

$$Q \overrightarrow{OB_+} = \sum_{\text{charges } +} q_i^+ \overrightarrow{OP_i} \quad \text{et} \quad -Q \overrightarrow{OB_-} = \sum_{\text{charges } -} q_i^- \overrightarrow{OP_i}$$

Par conséquent

$$\sum_i q_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_{\text{charges } +} q_i^+ \overrightarrow{OP_i} + \sum_{\text{charges } -} q_i^- \overrightarrow{OP_i} = Q \overrightarrow{OB_+} - Q \overrightarrow{OB_-}$$

Ainsi, le moment dipolaire peut se réécrire

$$\vec{p} = Q \overrightarrow{B_- B_+} \quad \heartsuit \quad (3.3)$$

Le moment dipolaire est donc lié au fait que le barycentre des charges négatives ne coïncide pas avec le barycentre des charges positives. Quand une molécule présente cette propriété on dit qu'elle est polaire (H<sub>2</sub>O, HCl, NO, etc.) alors que si elle présente un centre de symétrie on dit qu'elle est apolaire (He, N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub>, etc.). Le tableau ci-dessous recense quelques exemples d'entités chimiques et le type d'action qu'elles produisent.

Halogénure	Moment dipolaire
HF	1,97 D
HCl	1,03 D
HBr	0,78 D
HI	0,38 D

TABLE 3.2 – Moments dipolaires des halogénures d'hydrogène.

**Ordre de grandeur** – Le moment dipolaire s'exprime en C.m dans le Système international d'unités mais les chimistes préfèrent une unité plus adaptée au monde moléculaire : le debye (symbole : D). Par définition

$$1 \text{ D} = 3,335 \, 64 \cdot 10^{-30} \text{ C.m} \simeq \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$$

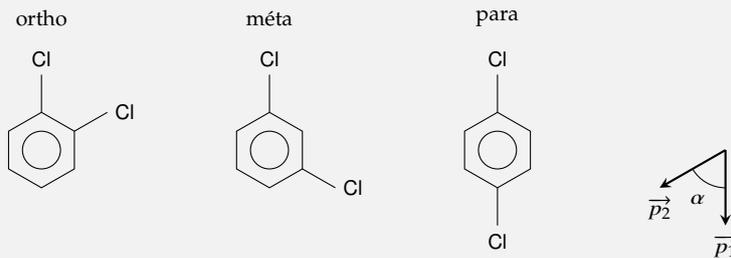
Le Table 3.2 donne les moments dipolaires des halogénures d'hydrogène mettant en évidence le phénomène d'électronégativité : l'halogène déplace vers lui le barycentre des charges négatives ce qui induit un moment dipolaire dirigé vers H. Ce phénomène augmente de l'iode vers le fluor, élément le plus électronégatif du tableau périodique.

Il est pratique parfois de décomposer un système neutre en N sous-systèmes neutres auxquels on associe un moment dipolaire  $\vec{p}_i$ . Dans

ce cas, le moment dipolaire de la distribution complète est la somme vectorielle  $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$ . C'est pourquoi, on peut calculer le moment dipolaire d'une molécule en sommant vectoriellement les moments dipolaires associées à chaque liaison.

#### Exemple – Identification d'un isomère

L'un des isomères du dichlorobenzène a pour moment dipolaire  $p = 1,5$  D. Sachant que la liaison C – Cl possède un moment  $p_0 = 1,6$  D et que la liaison C – H est quasi apolaire, on peut déterminer cet isomère. En effet, le dichlorobenzène existe sous trois formes possibles :



Si l'on néglige le moment dipolaire des liaisons C – H, alors le moment dipolaire résulte de la somme vectorielle des moments dipolaires associées aux liaisons C – Cl. Si l'on note  $\alpha$  l'angle entre ces liaisons, on a

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \implies p = 2p_0 \cos(\alpha/2)$$

On en déduit  $\alpha = 124^\circ$ , valeur assez proche de  $120^\circ$ . Par conséquent, il s'agit de la forme méta-dichlorobenzène.

### Champ électrique dans l'approximation dipolaire

Intéressons au champ électrique créé par une distribution électrique neutre et présentant un moment dipolaire. Se plaçant dans l'approximation dipolaire, il suffit de calculer l'opposé du gradient<sup>13</sup> du potentiel  $V_{\text{dipolaire}}(\mathbf{M})$  :

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = -\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{OM}}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right)$$

Utilisons l'identité  $\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\overrightarrow{\text{grad}}(g) + g\overrightarrow{\text{grad}}(f)$  en prenant  $g = \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{OM}}$  et  $f = 1/r^3$  :

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r^3} \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{OM}}) + (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{OM}}) \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r^3} \right) \right]$$

D'une part,

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{OM}}) = \overrightarrow{\text{grad}}(p_x x + p_y y + p_z z) = \vec{p}$$

d'autre part,

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3\vec{u}_r}{r^4}$$

13. D'un point de vue mathématique, la démarche n'est pas rigoureuse. Il faudrait, en principe, calculer directement le champ électrique puis faire tendre  $r$  vers l'infini : on obtient le même résultat.

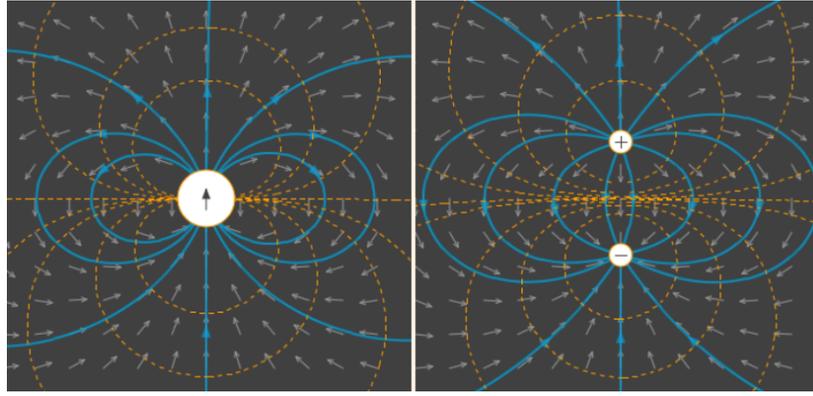


FIGURE 3.3 – Lignes de champ (lignes continues) et équipotentielles (lignes discontinues) créées par un dipôle. À gauche, dans l'approximation dipolaire, à droite au voisinage de l'origine.

On obtient finalement

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} 2p \cos \theta \\ p \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

où la dernière expression est obtenue en orientant le moment dipolaire suivant l'axe (Oz) et en repérant le point M en coordonnées sphériques.

Notons que le champ électrique décroît en  $1/r^3$  et qu'il n'est pas isotrope. La Figure 3.3 représente les lignes de champs électriques et les équipotentielles, vues de loin et vues de près.

On serait tenté de conclure que, comme le laisse penser le schéma, les lignes de champ se referment à l'origine. Cependant au voisinage de l'origine, l'approximation dipolaire n'est plus valide. Un examen attentif de ce qui se passe près de l'origine montre que les lignes ne se referment pas : cette propriété est générale en électrostatique.

- On remarque que les lignes de champ présentent deux lobes symétriques perpendiculaires au moment dipolaire. On peut montrer que les lignes de champ ont pour équation paramétrique  $r(\theta) = K' \sin^2 \theta$ .
- Quant au potentiel électrique, la formule (3.2) permet de trouver l'équation paramétrique des équipotentielles :  $r = K \sqrt{\cos \theta}$ .

## 3.2 Interactions dipolaires

### Énergie d'un dipôle dans un champ électrique extérieur

Supposons un dipôle électrique situé en O et plongeant dans le champ électrique  $\vec{E}_{\text{ext}}$  créé par une autre distribution de charges. Notons  $V_{\text{ext}}(x, y, z)$  le potentiel associé. Insistons sur le fait que ces champs sont sans rapport avec les champs produits par le dipôle lui-même.

Cherchons à exprimer l'énergie du dipôle  $\mathcal{E}_p$  dans l'hypothèse où le champ extérieur varie peu à l'échelle du dipôle. Si l'on adopte un modèle de distribution discrète pour le dipôle, on a

$$\mathcal{E}_p = \sum_i q_i V_{\text{ext}}(x_i, y_i, z_i)$$

où  $x_i, y_i$  et  $z_i$  sont les coordonnées du point  $P_i$ .

Attention, il ne faut pas confondre cette énergie avec

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \sum_{\text{couples } (i,j)} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

qui représente l'énergie interne du dipôle, somme des énergie d'interactions mutuelles entre les charges du dipôle.

Compte tenu des hypothèses, contentons nous d'effectuer un développement du potentiel à l'ordre un, autour de O :

$$V_{\text{ext}}(x_i, y_i, z_i) \simeq V_{\text{ext}}(0, 0, 0) + x_i \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial x} + y_i \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial y} + z_i \frac{\partial V_{\text{ext}}}{\partial z} = V_0 - \vec{E}_{\text{ext}} \cdot \vec{OP}_i$$

L'expression de l'énergie devient

$$\mathcal{E}_p = \sum_i q_i V_0 - \left( \sum_i q_i \vec{OP}_i \right) \cdot \vec{E}_{\text{ext}}$$

En vertu de la neutralité électrique du dipôle et de la définition du moment dipolaire, on trouve

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}} \quad \heartsuit \quad (3.4)$$

**Exercice** – On considère une molécule A de taille caractéristique  $a$  de moment dipolaire  $\vec{p}$  en interaction avec un ion B assimilable à une charge ponctuelle  $q_0$  située à la distance  $AB \gg a$  de la molécule. On peut déterminer l'énergie de cette interaction en considérant que la charge est plongée dans le potentiel produit par la molécule, ou que la molécule est plongée dans le champ créé par la charge ponctuelle. Déterminer l'énergie d'interaction de ces deux manières, et vérifier la cohérence.

Rép. – Les deux approches donnent  $\mathcal{E}_p = \frac{q_0 \vec{p} \cdot \vec{AB}}{4\pi\epsilon_0 AB^3}$ .

## Dipôle rigide dans un champ uniforme

Plongeons une molécule polaire dans un champ électrostatique extérieur *uniforme*  $\vec{E}_{\text{ext}}$ . On suppose que cette molécule conserve un moment dipolaire constant : on dit que le dipôle est rigide. Quelles sont les actions que subit le dipôle de la part du champ extérieur ?

Commençons par écrire l'énergie d'interaction :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{\text{ext}} = -pE_{\text{ext}} \cos \theta$$

Notons tout d'abord que l'énergie ne dépend pas de la position du dipôle. Cette invariance par translation se traduit par une résultante des forces nulles. On peut le vérifier en calculant directement la force électrique :

$$\vec{F} = \sum_i q_i \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_{\text{ext}} \sum_i q_i = \vec{0}$$

Ainsi la molécule n'est pas accélérée. En revanche, elle est soumise à un couple qui tend à la faire tourner. D'après le profil de l'énergie potentielle, on voit que le système va chercher à adopter la configuration la plus stable, c'est-à-dire celle correspondant à un alignement du dipôle avec le champ extérieur ( $\theta = 0$ ). On peut calculer le moment de ce couple d'orientation :

$$\vec{\Gamma} = \sum_i \vec{OP}_i \wedge q_i \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{\text{ext}}$$

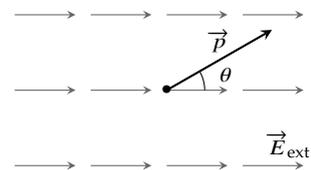


FIGURE 3.4 – Dipôle rigide dans un champ uniforme.

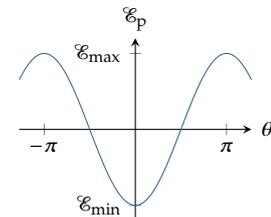


FIGURE 3.5 – Profil énergétique

14. Mathématiquement le couple est nul lorsque le dipôle est antiparallèle avec le champ électrique. Cependant, on peut voir sur le profil énergétique que cette configuration n'est pas stable : toute perturbation angulaire suffit à faire apparaître un couple qui tend à éloigner le dipôle de cette configuration.

moment qui tend à aligner le dipôle avec le champ électrique<sup>14</sup>. Ainsi, l'action d'un champ électrique uniforme consiste en une orientation du moment dipolaire suivant le champ électrique.

#### Exemple

Lorsque l'on dissout un ion en solution aqueuse, les molécules d'eau entourent l'ion en orientant le moment dipolaire de la molécule d'eau dans le sens du champ créé par l'ion. Ce processus permet d'atténuer efficacement le champ électrique créé par l'ion.

### Dipôle rigide dans un champ non uniforme

Supposons maintenant que le champ ne soit plus uniforme et admettons que le processus d'orientation du moment dipolaire suivant le champ électrique soit réalisé à tout instant. Dans ce cas, l'énergie du dipôle s'écrit  $\mathcal{E}_p = -pE_{\text{ext}}$ . Les actions qui apparaissent font en sorte de diminuer cette énergie : autrement dit, le dipôle est soumis à une force qui tend à le déplacer dans la zone où règne le champ le plus fort. Mathématiquement, on a

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p = p \overrightarrow{\text{grad}}E_{\text{ext}}$$

#### Actions d'un champ non uniforme sur un dipôle

Un dipôle rigide dans un champ non uniforme est soumis à une force qui tend à le déplacer vers les zones où règne un champ électrique fort (une fois le dipôle aligné avec le champ).

C'est ce qui explique par exemple qu'un bâton d'ébonite frotté (et donc chargé) attire des morceaux de papier (isolants neutres). En effet, la tige d'ébonite crée un champ électrique qui polarise le morceau de papier, lequel acquiert un moment dipolaire forcément orienté avec le champ électrique. Ce champ étant plus intense près de l'extrémité du bâton, le morceau de papier va venir s'y coller.

### Interactions de van der Waals

Au sein de la matière, les molécules, bien qu'électriquement neutres, sont soumises à de faibles interactions attractives que l'on désigne par *interactions de van der Waals*<sup>15</sup>. Ces interactions jouent un rôle important dans la science du vivant, en chimie et en physique des interfaces. Elles sont par exemple responsables de la cohésion des cristaux liquides et moléculaires. Les phénomènes de tension de surface reposent également sur cette force. On peut interpréter l'interaction de van der Waals comme le résultat d'une interaction entre dipôles dont l'énergie d'interaction se décompose en trois termes :

$$\mathcal{E}_{\text{vdW}} = \mathcal{E}_{\text{Keesom}} + \mathcal{E}_{\text{Debye}} + \mathcal{E}_{\text{London}}$$

15. Nommées ainsi en l'honneur du physicien néerlandais Johannes Diderik van der Waals (1837 — 1923), prix Nobel de physique 1910, qui fut le premier à introduire leurs effets dans les équations d'état des gaz en 1873.

**Terme de Keesom :** deux molécules polaires de moment dipolaire  $p_1$  et  $p_2$  auront tendance à orienter leur moment dipolaire dans le sens du champ produit par l'autre dipôle puis à se rapprocher du fait de l'attraction vers les champs forts. Du fait de l'agitation thermique, il faut moyenner cette interaction sur toutes les orientations possibles. On montre alors que l'énergie d'interaction moyenne entre deux dipôles permanents distants de  $r$  s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{Keesom}} = -\frac{p_1^2 p_2^2}{k_B T (4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{r^6}$$

**Terme de Debye :** il s'agit de l'interaction d'une molécule polaire avec une molécule apolaire, comme par exemple l'interaction entre  $\text{H}_2\text{O}$  et  $\text{O}_2$ . La molécule apolaire ne présente pas de moment dipolaire en raison de l'existence d'un centre de symétrie, cependant, en présence d'un champ électrique, le nuage électronique se déforme ce qui déplace le barycentre des charges négatives et induit l'apparition d'un moment dipolaire : on dit que la molécule s'est polarisée. Le moment dipolaire induit est proportionnel au champ électrique extérieur :

$$\vec{p}_{\text{induit}} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_{\text{ext}}$$

où  $\alpha$  désigne la **polarisabilité**. Ainsi, en présence d'un dipôle permanent, une molécule apolaire se polarise et a tendance à s'orienter suivant le champ polarisant puis à se rapprocher de la molécule responsable de cette polarisation. On trouve une énergie d'interaction

$$\mathcal{E}_{\text{Debye}} = -\frac{p_1^2 \alpha}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^6}$$

**Force de London :** on pourrait penser que deux atomes apolaires (comme les gaz rares) ou deux molécules apolaires (comme  $\text{O}_2$ ) n'interagissent pas puisqu'ils ne présentent pas de moment dipolaire. En réalité, chaque molécule présente un moment dipolaire fluctuant  $p(t)$  de moyenne nulle :  $\overline{p(t)} = \vec{0}$ . Le terme d'interaction est alors proportionnel à la moyenne  $\overline{p^2}$  qui elle n'est pas nulle. On montre que le terme d'interaction varie également comme  $1/r^6$ .

### Forces de van der Waals

En résumé, dans la matière il existe des interactions attractives entre toutes les molécules. L'énergie d'interaction s'écrit

$$\mathcal{E}_{\text{vdW}} = -\frac{C}{r^6}$$

ce qui donne naissance à une force moyenne attractive

$$\vec{F}_{\text{VDW}} = -\frac{6C}{r^7}\vec{u}_r$$

La décroissance rapide de la force de van der Waals permet d'expliquer sa courte portée et son influence dans les milieux denses (liquide et solide).

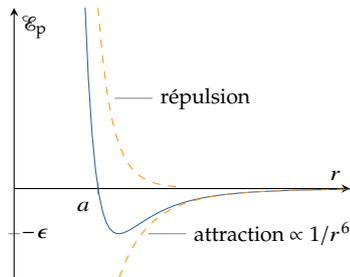


FIGURE 3.6 – Potentiel de Lennard-Jones.

Bien entendu, les molécules finissent par se repousser lorsqu'elles sont en contact proche du fait de la répulsion électronique et du principe d'exclusion de Pauli. Cette effet stérique est en général décrit par un terme d'énergie répulsif en  $1/r^{12}$ . Un modèle très souvent utilisé en dynamique moléculaire pour sa simplicité, est le modèle de Lennard-Jones :

$$\mathcal{E}_p(r) = 4\epsilon \left[ \left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{a}{r}\right)^6 \right]$$

où  $\epsilon$  représente la profondeur du puits de potentiel et  $a$  la position correspondant à une énergie nulle (cf. Figure 3.6). La profondeur du puits est de l'ordre du kJ/mol ce qui explique l'existence de cristaux moléculaires, à basse température.

**Remarque :** La force de van der Waals entre deux atomes isolés a pu être mesurée directement pour la première fois par une équipe de physiciens français en 2013[3]. Cette prouesse a été rendue possible grâce aux technologies associées au refroidissement laser et au piégeage optique.

# CONDUCTEURS ÉLECTRIQUES

# 4

Ce cours aborde les propriétés électriques des conducteurs, aussi bien à l'équilibre que hors équilibre (phénomène de conduction). Ce sera l'occasion d'introduire les notions de capacité d'un condensateur et de résistance d'un conducteur ohmique utiles en électricité.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

[femto-physique.fr/electromagnetisme/conducteurs-electriques.php](http://femto-physique.fr/electromagnetisme/conducteurs-electriques.php)

## 4.1 Conduction électrique

Un conducteur est un système macroscopique qui contient des porteurs de charge libres, susceptibles de se mettre en mouvement sous l'action d'une force extérieure.

Conducteur	Porteurs de charge libres
Métal (Cu, Ag, Au, Al, ...)	Électrons libres délocalisés
Semi conducteur dopé (Si, AsGa, ...)	Paires électron-trou
Solution électrolytique (KOH <sub>aq</sub> , NaCl <sub>aq</sub> , ...)	Ions dissous
Plasma (gaz ionisé)	Protons, électrons

## Courant électrique

### Définition

Le courant électrique est le résultat d'un *déplacement d'ensemble* de particules chargées. Son intensité  $I$  est donnée par le flux (ou le débit) de charge qui traverse une section ( $S$ ). Plus précisément, la quantité de charge  $dq$  qui passe au travers de ( $S$ ) entre  $t$  et  $t + dt$  vaut

$$dq = I(t) dt$$

L'intensité électrique s'exprime en **ampère** (symbole : A) en hommage à André-Marie Ampère. On a donc  $1 \text{ A} = 1 \text{ C}\cdot\text{s}^{-1}$

On peut exprimer l'intensité du courant électrique en fonction des caractéristiques de l'écoulement des porteurs de charge, à savoir leur vitesse moyenne et leur densité volumique. Pour simplifier la démonstration, supposons un seul type de porteurs se déplaçant tous à la vitesse moyenne  $v$ . Notons  $\rho$  leur densité volumique de charge (en  $\text{C}\cdot\text{m}^{-3}$ ). Considérons une section ( $S$ ) orientée par la normale  $\vec{n}$  et calculons la quantité de charge la traversant pendant une durée  $dt$ .

Tous les porteurs de charge qui traversent l'élément infinitésimal  $dS$  de la section à l'instant  $t + dt$ , se trouvaient entre les instants  $t$  et  $t + dt$  dans un cylindre de base  $dS$  et de génératrice  $\vec{v} dt$ , dont le volume

4.1 Conduction électrique . . .	31
Courant électrique . . . . .	31
Loi d'Ohm locale . . . . .	33
Modèle de Drude . . . . .	33
Notion de résistance . . . . .	34
4.2 Conducteur en équilibre . .	35
Généralités . . . . .	35
Théorème de Coulomb . . . . .	36
Le théorème de Gauss . . . . .	37
4.3 Notion de capacité . . . . .	39
Capacité d'un conducteur . .	39
Les condensateurs . . . . .	40
Condensateur plan . . . . .	41
Énergie d'un condensateur . .	43

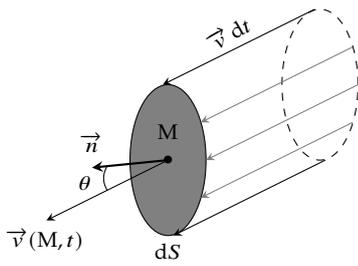


FIGURE 4.1 – Calcul du débit de charge traversant une section.

s'écrit  $d\tau = dS dt \vec{v} \cdot \vec{n}$ . Ainsi, la quantité de charge  $d^2q$  qui traverse la section  $dS$  entre  $t$  et  $t + dt$  vaut  $d^2q = \rho d\tau$ . En intégrant sur toute la section, on trouve

$$dq = dt \iint_{(S)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Mathématiquement, l'intensité s'interprète donc comme le flux d'un vecteur  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  appelé **densité de courant électrique** :

$$\begin{aligned} I(t) &= \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{n} dS \\ [A] &= [A \cdot m^{-2}] \times [m^2] \end{aligned} \quad \heartsuit \quad (4.1)$$

Si le courant est réparti uniformément, le vecteur densité de courant est constant sur la section  $S$  et l'intégrale se réduit à :

$$I = \vec{j} \cdot \vec{n} S$$

Dans le cas où plusieurs porteurs de charge transportent le courant il faut sommer toutes les contributions :

$$\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i \quad \heartsuit \quad (4.2)$$

Arrêtons nous un instant sur les ordres de grandeur. Le [Table 4.1](#) donne quelques valeurs d'intensité que l'on rencontre dans le quotidien. Es-

TABLE 4.1 – Quelques ordres de grandeur

Ordre de grandeur	Phénomène
1 mA	seuil de perception chez l'humain
75 mA	seuil de fibrillation cardiaque irréversible
1 A	fonctionnement d'une lampe halogène
10 A	radiateur électrique en fonctionnement
1 kA	alimentation d'un moteur de locomotive
1-100 kA	courant de foudre

sayons d'estimer la vitesse des porteurs de charge dans une installation domestique. Par exemple, un fil de cuivre de section  $s = 2,5 \text{ mm}^2$  supporte un courant d'intensité  $I_{\max} = 20 \text{ A}$  (normes françaises). La densité de courant correspondante vaut

$$j = \frac{I_{\max}}{s} = 8 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

Le cuivre a pour densité  $d = 8,96$  et une masse atomique  $m = 63,5 \text{ u.a.}$  De plus, chaque atome de cuivre libère un électron libre. Ainsi,  $1 \text{ m}^3$  pèse  $8,96 \cdot 10^3 \text{ kg}$  ce qui correspond à  $8,96 \cdot 10^3 / 63,5 \cdot 10^{-3}$  mole de cuivre. La densité volumique des porteurs de charge vaut donc

$$\rho = \frac{8,96 \cdot 10^3}{63,5 \cdot 10^{-3}} \times 6,02 \cdot 10^{23} \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$$

la vitesse moyenne des électrons est alors donnée par  $v = j/\rho = 0,6 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ . La vitesse moyenne correspondant au transport de l'électricité est très faible devant la vitesse d'agitation thermique qui est de l'ordre de  $10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On peut aussi noter que si le fil est traversé par un courant alternatif de fréquence  $f = 50 \text{ Hz}$  et d'intensité maximum

20 A, le déplacement moyen des électrons libres oscillera avec une amplitude

$$A = \frac{v}{2\pi f} = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{100 \times \pi} \approx 2 \mu\text{m}$$

### Loi d'Ohm locale

Un conducteur soumis à un champ électrique  $\vec{E}$  est le siège d'un courant électrique de densité de courant

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (4.3)$$

où  $\gamma$  désigne la **conductivité électrique** et s'exprime en siemens par mètre ( $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ ). Elle dépend du conducteur, de la température et de la pression. Par exemple, dans les métaux,  $\gamma$  diminue quand la température augmente. Le Table 4.2 donne quelques valeurs de conductivités à 20°C. Notez le rapport d'échelle entre les isolants et les conducteurs.

Bons conducteurs		Mauvais conducteurs		Isolants	
Substance	$\gamma$ ( $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ )	Substance	$\gamma$ ( $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ )	Substance	$\gamma$ ( $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$ )
Argent	$6,1 \cdot 10^7$	Eau de mer	0,2	Huile minérale	$2 \cdot 10^{-11}$
Cuivre	$5,8 \cdot 10^7$	Silicium	$4,3 \cdot 10^{-4}$	Verre Pyrex	$10^{-15}$
Or	$4,5 \cdot 10^7$	Eau distillée	$2 \cdot 10^{-4}$	Quartz	$2 \cdot 10^{-17}$

TABLE 4.2 – Ordres de grandeur de conductivités électriques.

### Modèle de Drude

En 1900, Paul Drude propose un modèle classique qui explique qualitativement la conduction électrique. Ce modèle repose sur les hypothèses suivantes.

1. Approximation des électrons libres : les électrons de conduction forment un *gaz parfait de particules chargées indépendantes* (malgré la présence des ions métalliques). En l'absence de champ extérieur, ces électrons libres ne ressentent aucune force en moyenne et se déplacent en ligne droite du fait de l'agitation thermique.
2. Les électrons sont diffusés par les défauts cristallins. Après chaque collision, la vitesse est redistribuée de façon aléatoire.
3. Le temps de libre parcours moyen ou temps de relaxation  $\tau$  est la durée moyenne entre 2 collisions.  $\tau$  est indépendant de la vitesse des électrons. Son ordre de grandeur est  $10^{-14}$  s.

Dans ce modèle, entre deux collisions, la vitesse d'un électron soumis à un champ électrique extérieur  $\vec{E}$ , vérifie la seconde loi de Newton (modèle classique) :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \quad \text{soit} \quad \vec{v} = -\frac{e\vec{E}}{m_e}t + \vec{v}_0$$

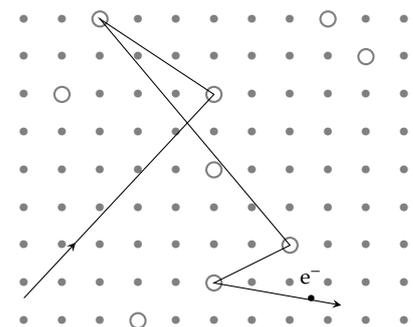


FIGURE 4.2 – Modèle de Drude.

où  $\vec{v}_0$  désigne la vitesse après la dernière collision et  $t$  le temps compté à partir de la dernière collision. Le courant étant lié au mouvement d'ensemble, il faut effectuer une moyenne sur l'ensemble des électrons au même instant.

$$\vec{v}_{\text{moy}} = -\frac{e\vec{E}}{m_e} \langle t \rangle + \langle \vec{v}_0 \rangle$$

Or, la vitesse étant redistribuée dans toutes les directions après chaque collision, ceci de façon aléatoire, on a  $\langle \vec{v}_0 \rangle = \vec{0}$ . De plus, la moyenne  $\langle t \rangle$  correspond à la moyenne des temps de collision c'est-à-dire  $\tau$ . Finalement, on obtient une vitesse d'ensemble

$$\vec{v}_{\text{moy}} = -\frac{e\tau}{m_e} \vec{E}$$

La vitesse d'ensemble est proportionnelle au champ électrique. Le coefficient de proportionnalité s'appelle *la mobilité*  $\mu$  :

$$\vec{v}_{\text{moy}} = \mu \vec{E}$$

Si l'on note  $n$  la densité d'électrons libres (en  $\text{m}^{-3}$ ), on voit que le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique et s'écrit  $\vec{j} = ne \vec{v}_{\text{moy}} = \frac{ne^2\tau}{m_e} \vec{E}$ . On retrouve donc la loi d'Ohm locale

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{ne^2\tau}{m_e}$$

Ce modèle permet d'expliquer, par exemple, pourquoi la conductivité des métaux diminue quand la température augmente. En effet, lorsque l'on chauffe un métal, les vibrations du réseau s'amplifient ce qui augmente la probabilité qu'il y ait collision et donc diminue le temps de relaxation.

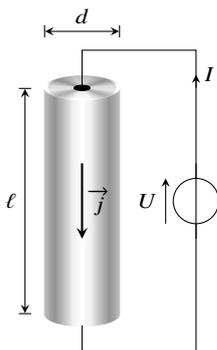


FIGURE 4.3 – Cylindre conducteur.

## Notion de résistance

Pour introduire la notion de résistance d'un conducteur, considérons un cylindre conducteur de longueur  $\ell$ , de diamètre  $d$  et donc de section droite  $s = \pi d^2/4$ , soumis à une tension électrique  $U$  entre ses extrémités.

Faisons l'hypothèse que le courant électrique est uniforme sur la section et axial. La section étant constante, la densité de courant est constante le long du cylindre. De plus, la relation  $j = \gamma E$  implique que le champ électrique est axial et constant le long du conducteur. L'intensité électrique vaut alors  $I = js = \gamma E s$  et la tension électrique entre les extrémités vaut  $U = \int E \, d\ell = E\ell$ . Le rapport des deux relations permet d'obtenir la loi d'Ohm pour un fil conducteur cylindrique :

$$U = RI \quad \text{avec} \quad R = \frac{1}{\gamma} \frac{\ell}{s} \quad \heartsuit \quad (4.4)$$

De manière générale, la loi  $U = RI$  constitue la *loi d'Ohm intégrale* et  $R$  désigne la résistance du conducteur dont l'expression dépend de

la conductivité et de la géométrie. La résistance s'exprime en ohm (symbole  $\Omega$ ) en hommage à Georg Ohm.

#### Application – La thermistance

L'inverse de la conductivité d'un métal, appelée résistivité, varie linéairement avec la température ( $\frac{1}{\gamma} = \rho_0 + \alpha T$ ) de telle sorte que la résistance peut servir de thermomètre une fois étalonné. Le fil de platine est couramment utilisé ainsi : on parle de thermomètre à résistance de Platine.

## 4.2 Conducteurs en équilibre électrostatique

On s'intéresse dorénavant à l'équilibre de conducteurs électrisés (chargés) placés dans le vide.

### Propriétés des conducteurs en équilibre

À l'équilibre, un conducteur n'est soumis à aucun mouvement macroscopique. Notamment, Il n'y a pas de courant électrique macroscopique. Par conséquent,

$$\vec{j} = \vec{0}$$

Bien évidemment, à l'échelle de l'atome les électrons sont en mouvement, mais à l'échelle mésoscopique<sup>17</sup> ces mouvements incessants se compensent en moyenne. Donc, selon la loi d'Ohm, il ne règne aucun champ électrique au sein du conducteur :

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0} \quad \heartsuit \quad (4.5)$$

Insistons sur le fait qu'il s'agit ici du champ électrique local moyenné à l'échelle mésoscopique. Bien entendu, à l'échelle de l'atome, règne un champ électrique extrêmement important et fluctuant.

À l'intérieur du conducteur, le potentiel doit vérifier  $\vec{E}_{\text{int}} = -\vec{\text{grad}}V_{\text{int}} = \vec{0}$  soit

$$V_{\text{int}} = C^{\text{te}} \quad \heartsuit \quad (4.6)$$

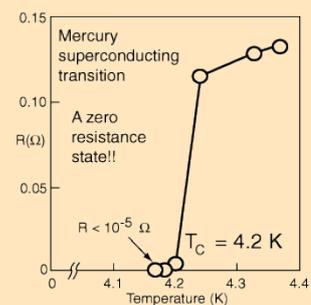
Le potentiel électrique est uniforme au sein du conducteur à l'équilibre. Autrement dit, **le conducteur à l'équilibre est un volume équipotentiel**. Les lignes de champ électrique étant perpendiculaires aux équipotentielles, on voit ici que le champ électrique au voisinage extérieur du conducteur est normal à la surface.

En vertu du théorème de Gauss, que nous verrons ultérieurement, le fait que le champ électrique soit nul à l'intérieur du conducteur implique que la densité de charge volumique est nulle partout.

$$\rho_{\text{int}} = 0 \quad \heartsuit \quad (4.7)$$

### Supraconduction

En 1911, Kamerlingh Onnes (Prix Nobel 1913), découvre le phénomène de supraconduction sur le mercure : en dessous d'une certaine température, dite température critique et notée  $T_c$ , certains métaux perdent complètement leur résistivité[4].



La supraconduction ouvre des perspectives de transport de l'électricité sans perte d'énergie (voir effet joule en électricité) à condition de trouver un supraconducteur de température critique située dans le domaine de température ambiante.

Depuis 1911, ce phénomène fut découvert dans de nombreux métaux et alliages avec des records de température critique qui progressèrent doucement.

Un grand saut fut fait en 1986 avec la découverte d'une nouvelle famille de supraconducteurs : les cuprates, composés de couches d'oxyde de cuivre. Récemment, la barre des  $-100^\circ\text{C}$  a été franchie puisqu'un matériau à base de sulfure d'hydrogène a conservé sa supraconductivité jusqu'à  $-73^\circ\text{C}$ . Il reste donc encore du chemin à parcourir avant de trouver un matériau supraconducteur à température ambiante.

17. Échelle intermédiaire entre l'échelle atomique et macroscopique. Typiquement c'est l'échelle du micromètre.

Cela signifie que tout apport de charge à un conducteur va se répartir à la surface de celle-ci de façon à créer un champ électrique nul à l'intérieur. On caractérise alors le conducteur par sa distribution de charge surfacique  $\sigma(P)$  où  $P$  désigne un point de la surface du conducteur. Le champ électrique à la surface du conducteur dépend donc de la manière dont se répartissent les charges en surface.

### Théorème de Coulomb

Plaçons nous à l'extérieur d'un conducteur à l'équilibre tout en restant dans le voisinage immédiat d'un point  $P$  de sa surface. Dans ce cas, le champ électrique produit ne dépend que de la densité surfacique en ce point. C'est ce que montre le théorème de Coulomb.

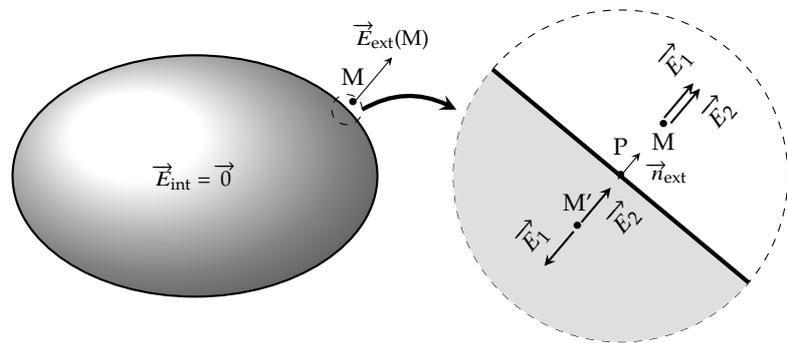


FIGURE 4.4 – Champ au voisinage de la surface d'un conducteur.

Pour le montrer, plaçons-nous en un point  $M$  au voisinage d'un conducteur. On peut considérer que le champ créé en  $M$  est le résultat de deux contributions :

$$\vec{E}_{\text{ext}}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$$

où  $\vec{E}_1$  est le champ créé par une portion de conducteur suffisamment petite pour qu'on puisse l'assimiler à un plan tangent, et  $\vec{E}_2$  celui dû au reste du conducteur. On a vu qu'un plan infini uniformément chargé produit un champ électrique  $\vec{E} = \sigma/2\epsilon_0 \vec{n}$  où  $\vec{n}$  est le vecteur normal au plan. Ce résultat reste valide pour un plan fini de taille caractéristique  $L$  tant que l'on se place à une distance  $d \ll L$  du plan. Supposons donc  $M$  suffisamment proche du conducteur pour autoriser cette approximation puis notons  $\vec{n}_{\text{ext}}$  le vecteur unitaire normal à la surface du conducteur et dirigé vers l'extérieur. On a donc

$$\vec{E}_{\text{ext}}(M) = \frac{\sigma(P)}{2\epsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}} + \vec{E}_2(M)$$

Par ailleurs, si l'on considère le point  $M'$  symétrique de  $M$  par la symétrie plane passant par  $P$ , on a également

$$\vec{E}_{\text{int}}(M') = -\frac{\sigma(P)}{2\epsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}} + \vec{E}_2(M')$$

Nous savons qu'à l'intérieur du conducteur le champ électrique est nul ce qui implique  $\vec{E}_2(M') = \sigma(P)/\epsilon_0 \vec{n}_{\text{ext}}$ . Or, par continuité,  $\vec{E}_2(M') = \vec{E}_2(M)$  puisque  $M$  et  $M'$  sont infiniment voisins<sup>18</sup>. Finalement, on trouve  $\vec{E}_{\text{ext}}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}}$ .

18. Pour être précis, on montre que le champ électrique est continu sauf si le trajet  $MM'$  coupe une distribution surfacique de charge, ce qui n'est pas le cas ici, car on s'intéresse au champ créé par la surface conductrice à laquelle on a retiré la portion contenant  $P$ .

### Théorème de Coulomb

Dans un conducteur à l'équilibre, le champ électrique intérieur est nul, le potentiel électrique est uniforme et les charges se répartissent à la surface du conducteur. Il règne alors au voisinage immédiat de la surface chargée (et à l'extérieur) un champ électrique :

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma(P)}{\epsilon_0} \vec{n}_{\text{ext}}$$

### Le théorème de Gauss et ses conséquences

Le théorème de Gauss est un théorème très général qui relie le flux électrique et la quantité de charge électrique.

Par définition, le flux du champ électrique  $\vec{E}$  à travers une surface fermée  $S$  vaut

$$\Phi \triangleq \iint_S \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \, dS \quad \heartsuit \quad (4.8)$$

où  $\vec{n}$  désigne un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface en  $M$  et dirigé vers l'extérieur.

Pour introduire le théorème de Gauss, calculons le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle, à travers une sphère de rayon  $r$  centrée sur la charge. Le champ électrique en un point  $M$  de la surface sphérique vaut

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

où  $\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire du système sphérique. La normale à la surface est également suivant  $\vec{u}_r$  de sorte que le flux s'écrit

$$\Phi = \iint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r \, dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iint dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Autrement dit, le flux est proportionnel à la quantité de charge enfermée par la sphère mais ne dépend pas de la taille de la sphère. On peut se demander ce que devient le flux lorsque la surface qui enferme la charge n'est plus sphérique. On trouve un résultat surprenant puisque le flux reste identique : tant que la surface englobe la charge,  $\Phi = q/\epsilon_0$ . En revanche, si la surface n'englobe pas la charge, on obtient toujours  $\Phi = 0$ .

Si maintenant on envisage une distribution quelconque de charges et une surface fermée  $S$  englobant une partie des charges, seule la quantité de charge  $q_{\text{int}}$  intérieure à  $S$  contribue au flux : c'est le sens du théorème de Gauss.

### Théorème de Gauss

Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée quelconque, est proportionnel à la quantité de charge enfermée

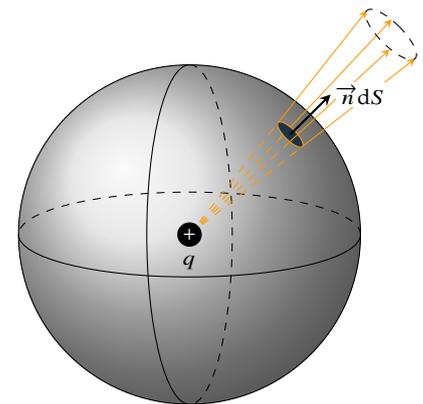


FIGURE 4.5 – Calcul du flux du champ électrique que crée une charge ponctuelle à travers une sphère de rayon  $r$ .

par cette surface. La constante de proportionnalité vaut, dans le Système International,  $\frac{1}{\epsilon_0}$ .

$$\Phi = \iint_S \vec{E}(\mathbf{M}) \cdot \vec{n} \, dS = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (4.9)$$

On peut vérifier que le théorème de Gauss est bien compatible avec le théorème de Coulomb. Imaginons que la surface  $S$  englobe un conducteur quelconque de charge totale  $q$  de façon à ce qu'elle soit infiniment proche de la surface du conducteur. D'après le théorème de Coulomb,  $E = \sigma(\mathbf{P})/\epsilon_0 \vec{n}$  de sorte que

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{P \in S} \sigma(\mathbf{P}) \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ce qui est bien conforme au théorème de Gauss.

Voyons maintenant quelques conséquences du théorème de Gauss.

- Isolons par la pensée un petit volume  $V$  situé à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre. Le champ électrique y étant nul, son flux à travers la surface qui délimite  $V$  est également nul. Par conséquent, la charge intérieure au volume est nulle. Ainsi, on peut affirmer que tout volume (mésoscopique) contient une charge nulle, ce qui revient à dire que la densité volumique de charge est partout nulle, à l'intérieur d'un conducteur ; ce qui démontre une des propriétés des conducteurs à l'équilibre.
- Considérons maintenant une sphère conductrice chargée (charge  $q$ ) de rayon  $R$ . Par symétrie, la charge se répartit uniformément en surface d'où une densité surfacique constante  $\sigma = q/(4\pi R^2)$ . On connaît le champ électrique au voisinage de la sphère, mais que vaut-il à une distance  $r$  quelconque ? Pour cela il suffit d'appliquer le théorème de Gauss en choisissant pour surface fermée  $S$  la sphère de rayon  $r$  et même centre que le conducteur. On a

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S E \, dS$$

car  $\vec{E}$  est colinéaire à  $\vec{n} = \vec{u}_r$  compte tenu de la symétrie sphérique. Par ailleurs, l'invariance par rotation implique que le champ ne dépend que de  $r$ . Ainsi,  $E$  est constant le long de la surface sphérique d'intégration. Il vient alors

$$\phi = \iint_S E \, dS = E \iint_S dS = E 4\pi r^2$$

Du théorème de Gauss, il découle donc

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{si } r > R$$

Autrement dit, une boule conductrice de charge  $q$  produit à l'extérieur le même champ qu'une charge ponctuelle  $q$  située en son centre.

- Supposons maintenant un conducteur enfermant une cavité dans laquelle se trouve une charge ponctuelle  $q$ . Le caractère ponc-

tuelle n'a pas d'importance ici ; il pourrait très bien s'agir d'un petit volume quelconque chargé. Cette charge a pour effet d'attirer ou de repousser (ça dépend de son signe) les électrons libres du conducteur de sorte que la surface interne du conducteur présente une distribution de charge  $q'$ . Pour trouver  $q'$ , il suffit d'utiliser le théorème de Gauss en choisissant une surface fermée entourant la cavité et située dans le conducteur. Puisqu'en tout point de la surface de Gauss le champ électrique est nul, alors le flux électrique l'est également. Par conséquent, en vertu du théorème de Gauss,  $q' + q = 0$  : la surface interne se remplit d'une charge opposée ; c'est ce qu'on appelle l'influence totale.

- Si maintenant on retire la charge  $q$ , dans ce cas  $q' = 0$ . Il est facile de montrer que la densité de charge est partout nulle sur la surface interne du conducteur. En effet, si la surface interne présente une distribution de charge alors elle contient des charges + et - (puisque  $q' = 0$ ). Les lignes de champ partiraient alors des charges + pour rejoindre les charges - (elles ne peuvent pas s'arrêter dans la cavité puisqu'il n'y a pas de charges). Dans ce cas, on aurait des lignes de champ qui partiraient d'un point porté au même potentiel que le point d'arrivée. Or, par nature ( $\vec{E} = -\text{grad}V$ ), une ligne de champ ne peut visiter que des points de potentiel décroissant, ce qui infirme l'hypothèse de départ. Finalement, dans une cavité vide de charge, la surface interne est également vide de charge ce qui implique un champ nul et un potentiel constant et égal à celui du conducteur. Cela signifie par exemple que toute perturbation électrique produite à l'extérieur du conducteur n'a strictement aucune action à l'intérieur de la cavité : c'est l'effet « cage de Faraday ».

## 4.3 Notion de capacité

### Capacité d'un conducteur

Portons un conducteur  $\mathcal{C}$  au potentiel  $V_0$  et notons la charge  $Q_0$  qui se répartit en surface. Ce conducteur produit à l'extérieur un potentiel

$$V(M) = \iint \frac{\sigma \, dS}{4\pi\epsilon_0 r}$$

en prenant comme convention  $V(\infty) = 0$ . Les charges se répartissent donc de façon à ce que  $V(M) = V_0$  pour tout point  $M \in \mathcal{C}$ .

Définissons maintenant un potentiel  $V'(M) = \lambda V(M)$  avec  $\lambda$  un nombre réel. Ce potentiel vérifie la condition aux limites  $V'(M \in \mathcal{C}) = \lambda V_0$ . C'est donc le potentiel produit par le conducteur mis au potentiel  $V'_0 = \lambda V_0$ . Notons  $\sigma'$  la nouvelle distribution de charges. On a

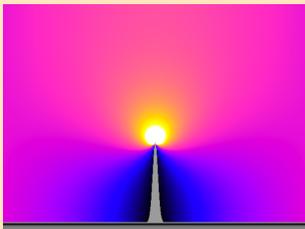
$$V'(M) = \iint \frac{\sigma' \, dS}{4\pi\epsilon_0 r} = \lambda V(M) = \lambda \iint \frac{\sigma \, dS}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \forall M$$

ce qui implique  $\sigma' = \lambda\sigma$  soit  $Q'_0 = \lambda Q_0$ .

19. **Michael Faraday (1791 - 1867)** : physicien et chimiste anglais. En 1831, il découvre l'induction électromagnétique qui permettra la construction des dynamos. En 1833, il établit la théorie de l'électrolyse. Il travailla également sur le phénomène d'électroluminescence, le diamagnétisme et l'action d'un champ magnétique sur la lumière polarisée.

#### Effet de pointe

Lorsqu'on soumet un conducteur à un potentiel  $V$ , les charges ne se répartissent pas toujours uniformément. L'exemple ci-contre montre que la charge varie comme le rayon de courbure et donc que la densité de charge varie comme l'inverse du rayon de courbure. C'est pourquoi, le champ électrique devient très important au voisinage des pointes conductrices, là où le rayon de courbure est petit. La simulation ci-dessous illustre ce phénomène. Cet effet, dit *effet de pointe*, permet d'expliquer pourquoi la foudre tombe le plus souvent sur des corps pointus (clochers, arbres) et notamment sur les paratonnerres qui servent précisément à cela : près d'une pointe le champ électrique peut être suffisamment important pour ioniser localement l'air et produire un canal conducteur qui peut entrer en contact avec un canal conducteur descendant ; un éclair se produit alors.



#### Capacité d'un conducteur

Le rapport

$$\frac{Q'_0}{V'_0} = \frac{Q_0}{V_0} = C > 0$$

est une constante caractéristique de la géométrie du conducteur.  $C$  désigne la capacité du conducteur seul. Elle mesure la capacité d'un conducteur à stocker une quantité de charge sous un potentiel électrique donné. La capacité se mesure en **farad** (F) en hommage à Faraday<sup>19</sup>.

#### Exemple – Capacité d'une sphère conductrice de rayon $R$

Lorsque l'on porte un conducteur sphérique au potentiel  $V_0$ , du fait de la symétrie sphérique, les charges se répartissent de façon uniforme :  $\sigma$  est constant. Le potentiel électrique  $V_c$  produit au centre de la boule se calcule aisément :

$$V_c = \iint \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R}$$

La capacité d'un conducteur sphérique s'écrit donc

$$C = \frac{Q_0}{V_0} = \frac{Q_0}{V_c} = 4\pi\epsilon_0 R$$

La capacité d'une boule conductrice est proportionnelle à son rayon. Notez que si l'on prend un conducteur sphérique de rayon égal au rayon de la Terre, on trouve une capacité  $C = 0,7$  mF, ce qui montre que le farad n'est pas une unité très adaptée ; aussi utilise-t-on ses sous multiples.

### Les condensateurs

Considérons deux conducteurs  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . On électrise  $\mathcal{C}_1$  en le portant au potentiel  $V_1$  : il s'entoure alors d'une charge  $Q_1$  (positivement pour fixer les idées). Quant à  $\mathcal{C}_2$ , il est neutre. Approchons maintenant le conducteur chargé vers le conducteur neutre : le champ électrique créé par  $\mathcal{C}_1$  éloigne alors les charges positives et attire les charges négatives. Ainsi,  $\mathcal{C}_2$  se recouvre d'une distribution de charge non uniforme telle que  $\int \sigma dS = 0$ . Si maintenant, le conducteur  $\mathcal{C}_2$  est mis à la Terre ( $V_2 = 0$ ), les charges positives vont être neutralisées par des charges provenant de la Terre. Le résultat est que le conducteur  $\mathcal{C}_2$  se charge négativement : on dit que le conducteur s'est chargé par *influence partielle*. On a la relation

$$Q_2 = C_{21} V_1$$

où  $C_{21} < 0$  désigne le coefficient d'influence.

Examinons maintenant le cas particulier où le conducteur  $\mathcal{C}_2$  entoure  $\mathcal{C}_1$ . Dans cette configuration, toutes les lignes de champ issues de  $\mathcal{C}_1$  arrivent nécessairement sur  $\mathcal{C}_2$ . La surface intérieure de  $\mathcal{C}_2$  se recouvre d'une charge  $Q_{2\text{int}}$  de signe opposé à celle que contient  $\mathcal{C}_1$ . Par ailleurs, en vertu du théorème de Gauss on a

$$Q_1 = -Q_{2\text{int}}$$

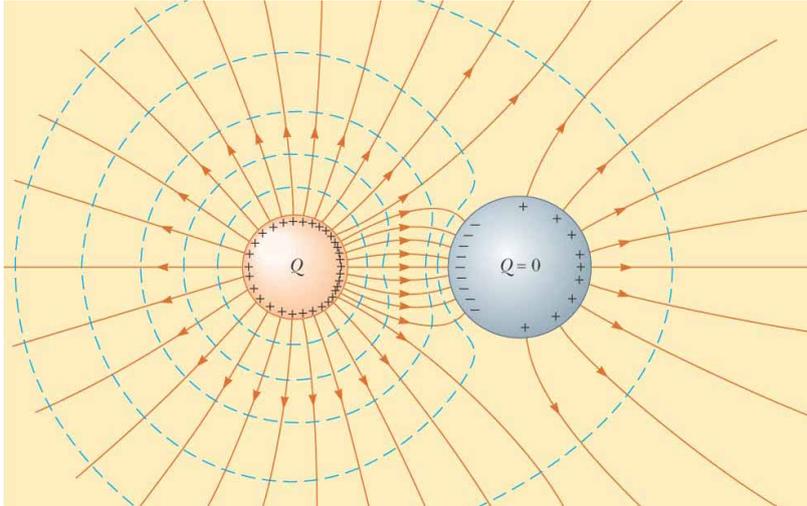


FIGURE 4.6 – Influence partielle. ©2004 Thomson - Brooks/Cole

On parle d'*influence totale* et l'ensemble des deux conducteurs forme alors ce que l'on appelle un *condensateur constitué de deux armatures conductrices*.

La capacité d'un condensateur mesure l'aptitude à stocker une quantité de charge sur l'armature interne. En effet, on montre que si l'on soumet le condensateur à une tension  $U = V_1 - V_2$ , l'armature interne se recouvre d'une charge

$$Q_1 = CU \quad \heartsuit \quad (4.10)$$

où  $C$  mesure la capacité du condensateur et ne dépend que de sa géométrie. La capacité d'un condensateur se mesure, comme la capacité d'un conducteur, en farad (symbole : F). L'ordre de grandeur de  $C$  est variable ; ça va *grosso modo* de  $10^{-12}$  F à  $10^{-3}$  F.

### Capacité d'un condensateur plan

On forme un condensateur plan en approchant deux conducteurs plans soumis à une différence de potentiel. Sur la figure ci-contre, l'armature du bas est soumise à un potentiel positif  $V_+$  et celle du haut à un potentiel  $V_-$  de sorte que la tension qui règne entre les armatures vaut  $U = V_+ - V_-$ . Sur les faces en regard se condensent des charges de signe opposé : on a influence totale. En revanche, sur les faces externes

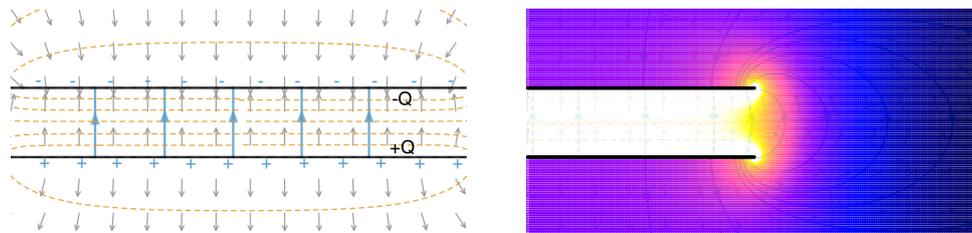


FIGURE 4.7 – À gauche : condensateur plan. À droite : effets de bord. Pour une animation interactive, voir [femto – physique.fr/simulations/condensateur – plan.php](http://femto-physique.fr/simulations/condensateur-plan.php).

des armatures, la densité de charge est quasi nulle. En effet, comme on peut le voir sur la carte d'intensité du champ, le champ électrique

est intense entre les armatures et quasi-nul à l'extérieur. On remarque également qu'entre les armatures, les lignes de champ sont rectilignes ce qui signifie que le champ est uniforme comme on peut également le voir sur la carte d'intensité. Notez enfin ce qui se passe aux bords des armatures : les charges ont tendance à se concentrer sur les bords par effets de pointe, ce qui explique la valeur intense du champ près des bords. Le caractère uniforme du champ n'est donc valable qu'entre les armatures et tant qu'on reste éloigné des bords.

Calculons la capacité de ce condensateur en supposant les armatures suffisamment proches pour pouvoir utiliser le théorème de Coulomb. Le champ électrique qui règne entre les armatures vaut donc  $\vec{E} = \sigma/\epsilon_0 \vec{n}_{\text{ext}}$ . La tension qui règne entre les armatures s'obtient en intégrant ce champ le long d'une ligne de champ :

$$U = V_+ - V_- = \int_{A_+}^{A_-} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e$$

où  $e$  désigne l'espacement entre les armatures. De plus, si l'on néglige les *effets de bord*, on peut considérer que la répartition des charges est uniforme, d'où  $Q = \sigma S$  avec  $S$  l'aire de chaque face en regard et  $\pm Q$  les charges des faces en influence totale. Ainsi, on trouve

$$Q = \left( \frac{\epsilon_0 S}{e} \right) U$$

Un condensateur plan, possède donc une capacité

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e} \quad \heartsuit \quad (4.11)$$

La relation obtenue indique que plus l'espacement est petit, plus le phénomène de condensation est important.

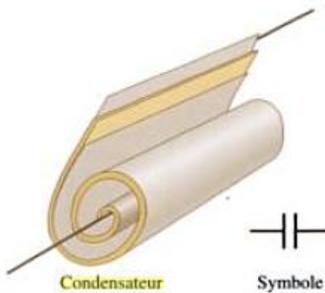


FIGURE 4.8 – Fabrication d'un condensateur plan réel

**Rôle du diélectrique** – La formule précédente est valable si l'espace inter-armatures est vide. En pratique, on enroule deux rubans métalliques (aluminium ou étain) jouant le rôle des armatures, que l'on sépare par deux rubans isolants (papier paraffiné, plastique). La présence de cet isolant, dit diélectrique, a pour effet d'augmenter la capacité du condensateur formé suite au phénomène de polarisation électrique (voir cours Électromagnétisme II). On montre que la capacité s'écrit sous la forme

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad \text{avec} \quad \epsilon = \epsilon_0 \times \epsilon_r$$

où  $\epsilon_r$  désigne la *permittivité diélectrique relative* qui dépend du matériau diélectrique utilisé.

TABLE 4.3 – Permittivités diélectriques relatives de quelques matériaux.

Diélectrique	$\epsilon_r$	Diélectrique	$\epsilon_r$
vide	1	Mica	3-6
air	1,0006	Bois	2,5-8
paraffine	2,5-3,5	Porcelaine	6
huile	4	Glycérine	56
verre	5-10	Eau Pure	81

## Énergie stockée par un condensateur

Par définition, l'énergie d'un condensateur chargé  $W_E$  est l'énergie qu'il est susceptible de libérer lors de sa décharge, c'est-à-dire lorsqu'on ramène sa tension à zéro en reliant les deux armatures par un fil conducteur, par exemple.

Considérons l'armature interne au potentiel  $V_A$  et portant une charge  $Q$ . L'armature externe soumise au potentiel  $V_B$  porte, quant à elle, une charge interne  $-Q$  et une charge externe  $Q'$  qui ne dépend que du potentiel  $V_B$ .

Lorsque le condensateur est chargé, l'énergie électrostatique du système de charge vaut :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i = \frac{1}{2} (QV_A - QV_B + Q'V_B)$$

On décharge le condensateur en augmentant le potentiel  $V_A$  à la valeur  $V_B$  : il n'y a plus de charge en influence mais il reste éventuellement une charge  $Q'$  sur la face externe de l'armature :

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i = \frac{1}{2} Q' V_B$$

Par définition, l'énergie électrostatique du condensateur  $W_E$  vaut

$$W_E = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} Q U_{AB} = \frac{1}{2} C U_{AB}^2 \quad \heartsuit \quad (4.12)$$



# INTERACTIONS MAGNÉTIQUES

# 5

Ce cours introduit la notion de champ magnétique en laissant de côté pour l'instant son origine. On se concentre ici sur les interactions magnétiques :

- l'interaction de Lorentz entre une charge et un champ magnétique ;
- l'interaction de Laplace entre un conducteur parcouru par un courant électrique et un champ magnétique.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

[femto – physique.fr/electromagnetisme/interaction – magnetique.php](http://femto-physique.fr/electromagnetisme/interaction-magnetique.php)

5.1 Les aimants . . . . .	45
Propriétés des aimants . . . . .	45
Notion de champ magnétique	45
5.2 Force de Lorentz . . . . .	46
Définition du champ B . . . . .	46
Particule dans un champ B . . . . .	48
Quelques applications . . . . .	49
5.3 Interaction avec les courants	51
Force de Laplace . . . . .	51
Effet Hall (1879) . . . . .	52
Travail des forces de Laplace	53
Actions sur un dipôle . . . . .	55

## 5.1 Les aimants

### Propriétés des aimants

La « pierre d'aimant » qui a la propriété d'attirer les petits morceaux de fer, est connue depuis l'antiquité grecque. On trouve cette pierre étonnante dans la région de Magnésie, en Asie Mineure. On sait aujourd'hui qu'elle est formée essentiellement d'oxyde de Fer  $Fe_3O_4$  que l'on appelle magnétite. Façonnée et polie en forme de cuiller, elle est utilisée en Chine dès le III<sup>e</sup> siècle à des fins divinatoires. Il faut attendre l'an Mille environ pour voir apparaître les premières boussoles. Elle est adoptée par les navigateurs arabes puis européens pour s'orienter en mer. L'usage du compas de marine devient primordial avec les grandes explorations à la Renaissance. Sa pièce principale est une aiguille d'acier que l'on a aimantée par frottement contre une pierre d'aimant.

Les aimants présentent toujours au moins deux pôles, appelés pôle sud et pôle nord. Lorsque l'on approche deux aimants, on met aisément en évidence deux types d'interaction : deux pôles de même nature se repoussent alors que deux pôles de nature différente s'attirent.

### Notion de champ magnétique

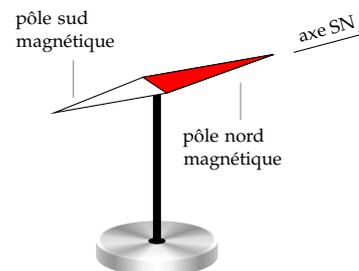


FIGURE 5.1 – Aiguille aimantée

FIGURE 5.2 – Interactions entre aimants.

**Expérience**

En un point de la surface terrestre et en l'absence d'aimants et/ou de circuits électriques, l'aiguille d'une boussole s'oriente dans la direction Sud-Nord. Approchons un aimant : l'orientation de la boussole s'en trouve modifiée. Déplaçons la boussole autour de l'aimant : la direction de la boussole varie d'un point à l'autre. Enfin, perturbons l'aiguille de la boussole : elle se met à osciller autour de la direction indiquée initialement. Si l'on rapproche l'aimant, l'aiguille oscille de plus en plus vite.

21. Il s'agit du nord magnétique terrestre situé dans l'océan arctique, à quelques degrés de latitude du Nord géographique

**Interprétation** – Sur Terre, il règne un champ de force magnétique qui oriente toutes les boussoles dans l'axe Sud-Nord. Par convention, le pôle qui indique le Nord<sup>21</sup> est appelé pôle nord de la boussole, l'autre étant alors le pôle sud.

Un aimant modifie les propriétés magnétiques de l'espace : il crée un champ magnétique. Ce champ présente une direction donnée par la boussole et un sens donné par l'axe SN de la boussole.

Enfin, plus ce champ est important, plus l'aiguille est forcée de s'aligner avec ce champ ce qui explique l'augmentation de la fréquence des oscillations.

**Conclusion**

L'espace est caractérisé par un champ de force qui présente les attributs d'un vecteur que l'on nomme vecteur champ magnétique et que l'on note généralement  $\vec{B}$  (M). Ce champ est détectable par une boussole.

Une façon de visualiser le champ magnétique que produit un aimant consiste à disperser autour, de la limaille de fer : les aiguilles de fer s'aimantent puis de comportent comme de petites boussoles qui s'orientent suivant le champ magnétique local.

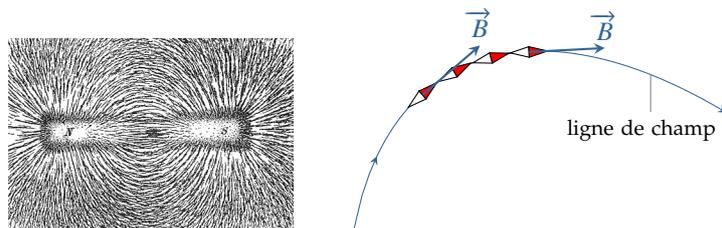


FIGURE 5.3 – Spectre magnétique : les grains de limaille de fer se comportent comme de petites boussoles, matérialisant ainsi les lignes de champ.

## 5.2 Force de Lorentz

### Définition du champ magnétique

Le champ magnétique est défini à partir de la force de déflexion que ressent une particule chargée en présence d'une source de champ magnétique.

Considérons un tube de Crookes dans lequel on produit un faisceau d'électrons entre deux électrodes. Les électrons, en entrant en collision avec les quelques molécules du gaz résiduel du tube, produisent une lumière de fluorescence, rendant ainsi visible leur trajectoire.

Approchons maintenant un aimant perpendiculairement à la vitesse initiale : le faisceau est alors dévié tout en restant dans un plan perpendiculaire au champ magnétique. Ainsi, une charge électrique en mouvement ressent, en plus de la force électrique, une force de nature magnétique. L'analyse de la trajectoire montre que la force électromagnétique que subit une particule chargée en mouvement s'écrit

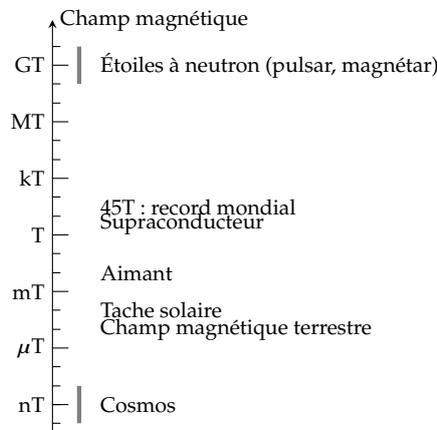
$$\vec{f} = \underbrace{q\vec{E}}_{\text{force électrique}} + \underbrace{q\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\text{force magnétique}} \quad (5.1)$$

ce qui définit le champ magnétique  $\vec{B}$ .

Dans le Système International d'Unités, le champ magnétique s'exprime en Tesla en hommage à Nikola Tesla<sup>22</sup>. L'analyse dimensionnelle montre que

$$[f] = ILB \implies 1 \text{ T} = 1 \text{ N} \cdot \text{A}^{-1} \text{m}^{-1}$$

La figure ci-dessous donne quelques ordres de grandeurs du champ magnétique.



La force magnétique étant constamment perpendiculaire au vecteur vitesse, elle ne fournit pas de puissance mécanique et donc pas de travail.

$$\vec{f} \perp \vec{v} \implies \mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$$

Par conséquent, en vertu du théorème de l'énergie cinétique, une particule soumise uniquement à la force magnétique conserve sa vitesse constante en norme :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) = \mathcal{P} = 0$$

La force magnétique incurve la trajectoire sans modifier la vitesse de la particule.

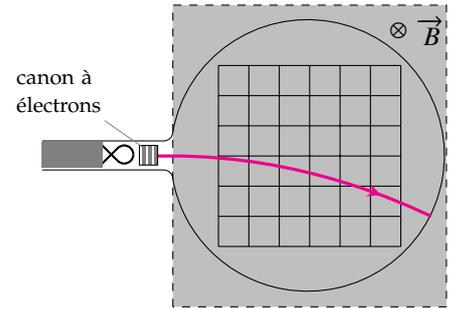


FIGURE 5.4 – Déflexion magnétique.

22. **Nikola Tesla (1856-1943)** : ingénieur électricien croate (Empire Austro-hongrois) naturalisé américain, il est considéré comme l'un des plus grands inventeurs du 20ème siècle avec plus de 900 brevets à son actif. Il fut l'opposant à Edison concernant le transport de l'électricité et partisan de l'utilisation des courants alternatifs.

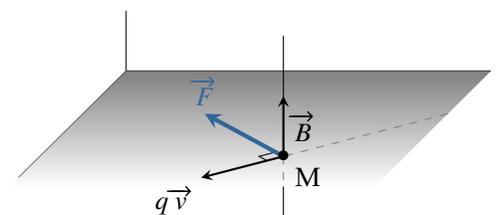


FIGURE 5.5 – Force magnétique.

**Remarque :** La force magnétique ne travaille pas. Cependant, si le champ magnétique varie dans le temps, il apparaît un champ électrique lié à la variation du champ magnétique (phénomène d'induction) qui, lui, travaille.

### Particule dans un champ magnétique uniforme

Étudions le mouvement d'une particule de charge  $q$  située dans une zone où règne un champ magnétique uniforme et permanent  $\vec{B}$ . On néglige la force de gravitation devant la force de Lorentz.

Dans la base de Frenet, l'accélération de la particule s'écrit (cf. Mécanique du point - Cinématique) :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n} = \frac{v^2}{R} \vec{n} \quad \text{car } v = C^{\text{te}}$$

Dans le référentiel d'étude supposé galiléen, la seconde loi de Newton  $f = ma$  donne

$$|q| v B \sin \alpha = m \frac{v^2}{R}$$

où  $\alpha$  représente l'angle que fait le vecteur vitesse avec le vecteur champ magnétique. Trois cas de figure se présentent :

- $\alpha = 0$  ou  $\pi$  : la force magnétique est nulle et le vecteur vitesse reste constant en direction et en norme. Le mouvement est rectiligne uniforme.
- $\alpha = \pi/2$  : la vitesse n'a pas de composante suivant  $\vec{B}$ , et la force est perpendiculaire au champ magnétique. Ainsi, le mouvement s'effectue dans le plan formé par la vitesse  $\vec{v}$  et la force de Lorentz. Par ailleurs, le rayon de courbure vaut  $R = \frac{mv}{|q|B}$ . Ce rayon de courbure est constant si le champ magnétique est uniforme et permanent : la trajectoire est donc un cercle<sup>23</sup> de rayon

$$R = \frac{mv}{|q|B} \quad \heartsuit \quad (5.2)$$

Ce cercle est décrit à la vitesse angulaire

$$\omega_c = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m}$$

qui ne dépend que du rapport  $q/m$  et du champ magnétique. Cette vitesse angulaire est aussi appelée **pulsation cyclotron**.

- Dans les autres cas, il est facile de montrer que la composante de la vitesse suivant la direction du champ magnétique reste constante. Le mouvement se décompose alors en un mouvement uniforme suivant le champ magnétique et un mouvement circulaire dans un plan perpendiculaire. On obtient un **mouvement hélicoïdal** dont l'axe est le champ magnétique et le rayon de courbure

$$R = \frac{mv}{|q|B \sin \alpha}$$

23. Une particule accélérée dissipe de l'énergie sous la forme d'un rayonnement électromagnétique, dit rayonnement cyclotron, et a pour effet une diminution de la vitesse – et donc du rayon de courbure – au cours du temps. Cet effet est négligé ici.

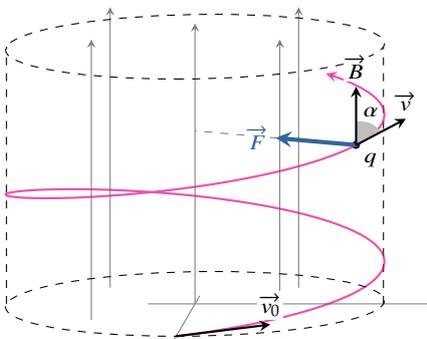


FIGURE 5.6 – Mouvement hélicoïdal d'une particule de charge négative dans un champ magnétique.

**Remarque :** La formule (5.2) peut s'écrire  $R = \frac{p}{|q|B}$  avec  $p$  la quantité de mouvement de la particule. Cette formule a l'intérêt d'être applicable dans le cas où les particules sont relativistes.

## Quelques applications

**Le cyclotron** – Le cyclotron est un accélérateur de particules inventé par l'américain Lawrence en 1932 (Prix Nobel 1939). Il est constitué de deux demi-cylindres creux, appelés « dees », séparés par un intervalle étroit. Dans les « dees », il règne un champ magnétique uniforme perpendiculaire à leur base. Une tension électrique sinusoïdale est appliquée entre les « dees » dans un plan perpendiculaire au champ magnétique.

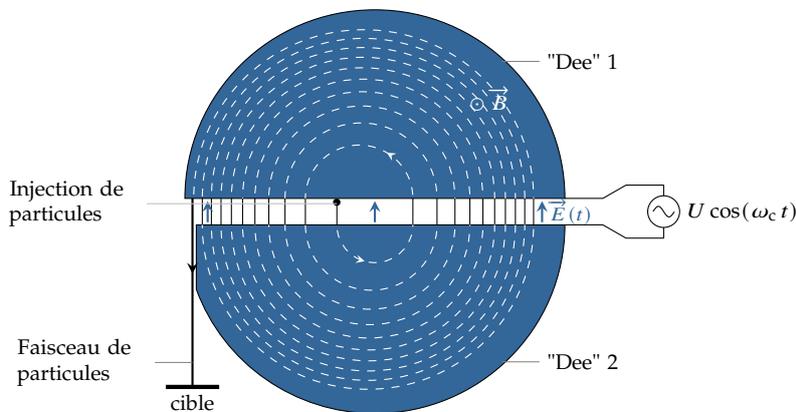


FIGURE 5.7 – Principe du cyclotron (la charge est négative ici).

Le principe du cyclotron repose essentiellement sur le fait que la fréquence de révolution d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme est indépendante de la vitesse de la particule. On injecte au centre du dispositif des particules chargées, en général des protons ou des ions. La tension produite entre les « dees » accélère les particules. Ensuite, arrivées dans un des « dees », elles décrivent des portions de cercle à la vitesse angulaire  $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$  indépendante de leur vitesse. La tension appliquée oscille à la fréquence cyclotron de sorte que les particules en sortant du « dee » sont à nouveau accélérées. Gagnant de la vitesse, ils décrivent dans le « dee » suivant un arc de cercle de rayon plus grand. Ainsi, à chaque tour, le rayon de courbure augmente jusqu'à atteindre le rayon maximum  $R_{\max}$  imposé par la taille du cyclotron. En sortie du cyclotron, le faisceau de particules accélérées est en général envoyé sur une cible.

La quantité de mouvement maximum des particules vaut alors

$$p = mv_{\max} = |q|BR_{\max}$$

L'énergie cinétique maximum s'écrit simplement

$$\mathcal{E}_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{q^2 B^2 R_{\max}^2}{2m}$$

Pour un proton par exemple, en prenant  $B \approx 1$  T et  $R_{\max} \approx 1$  m, on obtient  $\mathcal{E}_c \approx 50$  MeV.

Le cyclotron est utilisé de nos jours pour produire des Radio-Isotopes utilisés en médecine nucléaire (radio-thérapie) et en recherche pour la physique nucléaire.

**Le spectromètre de masse à analyseur magnétique** – La spectrométrie de masse est une technique d'analyse permettant d'identifier les molécules d'un composé à analyser. Dans un spectromètre de masse à analyseur magnétique, on injecte les molécules dans une chambre d'ionisation : un bombardement électronique permet de briser les molécules de façon à former des fragments d'ions moléculaires positifs. Ces ions sont ensuite accélérés grâce à un champ électrique et un dispositif de filtrage garantit que les ions sortent avec la même vitesse  $v_0$ . Ils entrent ensuite dans une zone où règne un champ magnétique uniforme produit par un électroaimant. Ces ions décrivent alors un arc de cercle de rayon  $R = mv_0/|q|B$  avant d'être reçu sur un détecteur. La vitesse et le champ magnétique étant contrôlés, la position de l'impact est en fait une mesure du rapport  $q/m$  des ions détectés. En faisant varier le champ magnétique on détecte des ions de masse différentes (ions différents ou ions isotopes); l'enregistrement de l'intensité du signal en fonction de la masse s'appelle le *spectre de masse*. De ces informations il est possible d'en déduire la formule brute des molécules présents dans le composé.

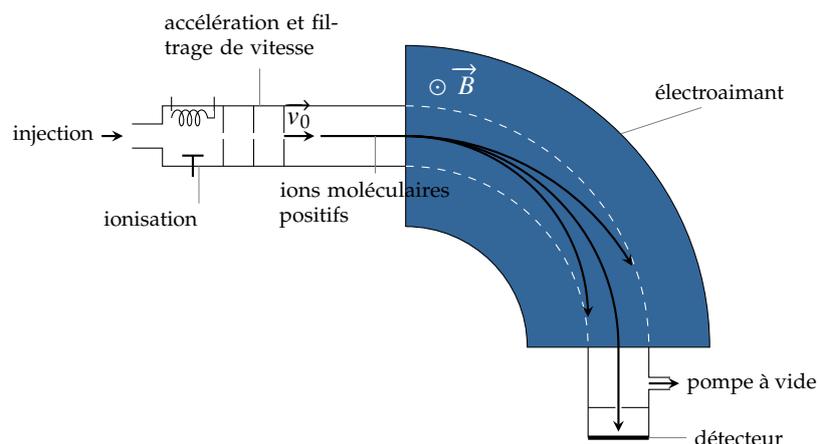


FIGURE 5.8 – Principe du spectromètre de masse

L'étendue des applications de cette technologie est assez vaste.

- En chimie analytique : détermination de la formule brute des molécules;
- En chimie de l'environnement : analyse de l'air et de l'eau ; suivi de la pollution par des pesticides ou des processus industriels.
- En biochimie : identification de protéines (séquençage d'acides aminés) et de micro-organismes ; analyse de gaz sanguins ; pharmacologie ; toxicologie.
- En physique fondamentale : mesure de masse d'atomes stables.
- En sciences de la Terre : mesure des rapports isotopiques (géologie, océanographie, glaciologie, volcanologie, physique de l'atmosphère, étude des météorites, planétologie, etc.).

## 5.3 Interaction magnétique avec les courants électriques

### Force de Laplace

Considérons un conducteur filiforme parcouru par un courant électrique d'intensité  $I$  en présence d'un champ magnétostatique  $\vec{B}$ . Admettons que ce conducteur soit en mouvement dans le champ magnétique et analysons les forces qui s'exercent sur une portion orientée  $d\vec{\ell}$  de conducteur.

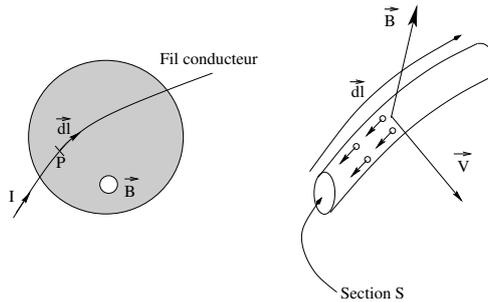


FIGURE 5.9 – Notations pour la force de Laplace.

Adoptons les notations suivantes :

- $s$  est la section droite du fil conducteur ;
- $n_-$  est le nombre de porteurs de charges mobiles (charges  $q_-$ ) par unité de volume ;
- $n_+$  est le nombre de cations fixes (charges  $q_+$ ) par unité de volume assurant la neutralité de la matière ;
- $\vec{V}$  est la vitesse de la portion de conducteur *par rapport au laboratoire* ;
- $\vec{v}$  est la vitesse moyenne des porteurs de charge libres *par rapport au conducteur*.

L'électroneutralité du conducteur impose

$$n_- q_- + n_+ q_+ = 0$$

Intéressons-nous à la force magnétique que ressent une portion de conducteur. Appelons  $d\vec{\ell}$  un élément de longueur du conducteur situé en M et orienté par le sens algébrique du courant. Sommons toutes les forces magnétiques de Lorentz subies par toutes les particules chargées :

$$d\vec{F} = n_- s d\ell q_- (\vec{v} + \vec{V}) \wedge \vec{B} + n_+ s d\ell q_+ \vec{V} \wedge \vec{B} = n_- s d\ell q_- \vec{v} \wedge \vec{B}$$

On reconnaît dans cette expression le vecteur densité de courant  $\vec{j} = q_- n_- \vec{v}$  d'où

$$d\vec{F} = s d\ell \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Dans le cas d'un circuit filiforme, on a  $\vec{j} s d\ell = I d\vec{\ell}$ . Ainsi

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

La résultante des forces s'écrit alors

$$\vec{F} = \oint_{\mathcal{C}} I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad \heartsuit \quad (5.3)$$

Cette force, dite force de Laplace, représente la force macroscopique que ressent un conducteur dans un champ magnétique.

**Remarque :** si le conducteur n'est pas filiforme, on utilisera la formule plus générale

$$\vec{F} = \iiint \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$

où l'intégration est effectuée sur le volume du conducteur ( $d\tau$  représente l'élément de volume).

La force de Laplace possède de nombreuses applications dans le domaine électrotechnique :

- le moteur électrique continu produit un mouvement rotatif à l'aide d'un courant continu dans un champ magnétique radial ;
- le haut-parleur électrodynamique produit un déplacement alternatif d'une membrane à l'aide d'un courant alternatif transformant ainsi l'énergie électrique en énergie sonore ;
- l'ampèremètre à aiguille relie la mesure d'une intensité électrique à un angle de torsion d'un circuit électrique dans un champ magnétique.

### Effet Hall (1879)

On peut se demander comment les porteurs de charge libres réussissent à transmettre la force magnétique à l'ensemble du conducteur. En fait, en présence d'un champ magnétique, ces porteurs de charge sont déviés et tentent de sortir du conducteur. Cependant, les charges fixes du cristal les retiennent au sein du conducteur : c'est par ce processus que la force magnétique est transmise au conducteur.

De surcroît, en s'accumulant sur les parois, les porteurs de charge libres créent un champ électrique dont l'effet compense la force magnétique et assure ainsi un régime permanent (les porteurs de charge se déplacent à une vitesse moyenne constante). Ce champ électrique produit une tension que l'on peut mesurer : c'est l'effet Hall<sup>24</sup>.

24. Découvert en 1879 par Edwin Herbert Hall.

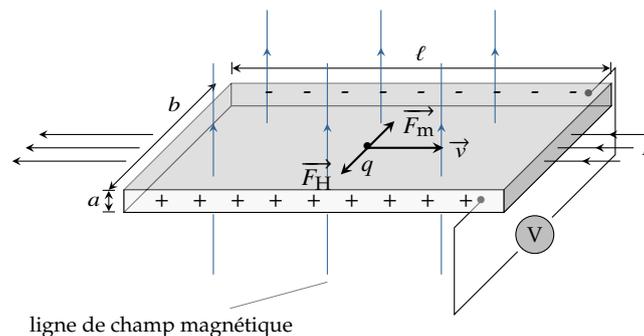


FIGURE 5.10 – Effet Hall

Considérons une plaquette conductrice de longueur  $\ell$ , de largeur  $b$  et de faible épaisseur  $a$ . La plaquette, parcourue par un courant d'intensité  $I$ , est placée dans un champ magnétostatique uniforme et perpendiculaire à sa plus grande face. La force magnétique concentre les charges mobiles sur un bord ce qui produit une force électrique s'opposant à la force magnétique. Une situation d'équilibre apparaît très vite quand :

$$q_- \vec{E} + q_- \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0} \implies E = vB$$

Le champ électrique est tel que le trièdre  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{v})$  est direct. Il règne donc une tension  $U_H$ , dite tension de Hall, entre les bords de la plaquette. Cette tension s'obtient en calculant la circulation du champ électrique entre les bords. Le champ électrique étant constant on a tout simplement

$$U_H = E \times b = vBb$$

Or, le courant électrique présente une intensité

$$I = j s = n_- |q_-| v ab$$

D'où

$$U_H = R_H \frac{IB}{a} \quad \text{avec} \quad R_H = \frac{1}{|q_-| n_-} \quad \heartsuit \quad (5.4)$$

où la grandeur  $R_H$  désigne la *constante de Hall*. Ainsi, on prévoit que la tension de Hall est proportionnelle au champ magnétique. Cet effet est mis à profit dans les *Teslamètres à effet Hall*<sup>25</sup>. On trouve également des sondes à effet Hall dans les téléphones portables ce qui permet de mesurer l'orientation du champ magnétique terrestre et donc de s'orienter. Par ailleurs, la polarité de la tension de Hall permet d'identifier la nature des porteurs de charge libres.

**Remarque** : L'étude de l'effet hall dans des systèmes ultra minces (systèmes 2D) à basse température et en présence d'un fort champ magnétique a mis en évidence l'effet Hall quantique qui valu le prix Nobel de Physique à Klaus von Klitzing en 1985. Evidemment, une description quantique de la conduction est nécessaire pour interpréter ce phénomène.

## Travail des forces de Laplace

Cherchons à calculer le travail des forces de Laplace lors du déplacement d'un circuit alimenté par un courant constant dans un champ indépendant du temps.

**Cas d'un cadre rectangulaire** – Considérons un cadre ABCD rectangulaire parcouru par un courant d'intensité  $I$  se déplaçant dans un champ magnétique uniforme. Pour simplifier nous supposons que le cadre se déplace suivant (AB) et qu'il peut se déformer (son aire peut donc varier). Notons  $\vec{AA}'$  le déplacement de la portion AD et  $\vec{BB}'$  celui de la portion BC.

25. Pour un champ magnétique de 1 T, une intensité électrique de 1 A et une épaisseur  $a = 100 \mu\text{m}$  on obtient  $U_H \approx 1 \mu\text{V}$  dans un métal. Cette tension est donc difficilement mesurable. En revanche, dans un semi-conducteur l'effet est multiplié par  $10^6$  car la densité des porteurs de charge est beaucoup plus faible ce qui explique leur utilisation dans les teslamètres.

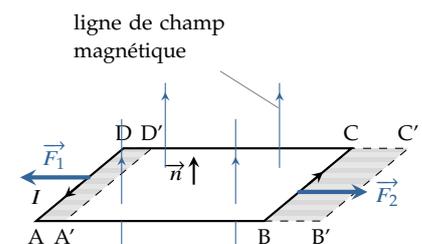


FIGURE 5.11 – Circuit électrique rectangulaire en mouvement dans un champ magnétique.

Seules les forces qui s'exercent sur AD et BC travaillent. La portion AD subit une force de Laplace  $\vec{F}_1$  dont le travail s'écrit

$$W_1 = I(\overrightarrow{DA} \wedge \vec{B}) \cdot \overrightarrow{AA'} = I(\overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{DA}) \cdot \vec{B}$$

Or, le vecteur  $\overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{DA}$  a pour norme, l'aire  $S_1$  de la surface balayée et est dirigé perpendiculairement à celle-ci. On a

$$W_1 = -I\vec{B} \cdot \vec{n} S_1$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface du cadre dont le sens est lié au sens positif du courant *via* la règle du tire-bouchon<sup>26</sup>. De la même manière, la force  $\vec{F}_2$  qui s'exerce sur la portion BC produit un travail

$$W_2 = I(\overrightarrow{BC} \wedge \vec{B}) \cdot \overrightarrow{BB'} = I(\overrightarrow{BB'} \wedge \overrightarrow{BC}) \cdot \vec{B}$$

Ici, le vecteur  $\overrightarrow{BB'} \wedge \overrightarrow{BC}$  a pour norme l'aire de la surface balayée par la branche BC et un sens identique à  $\vec{n}$ . On a donc

$$W_2 = I\vec{B} \cdot \vec{n} S_2$$

Finalement, le travail des forces de Laplace qui s'exerce sur le cadre vaut  $W = I\vec{B} \cdot \vec{n} (S_2 - S_1)$ . Si l'on note  $\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{n} S$  le flux magnétique à travers le cadre, on trouve

$$W = I \Delta \phi_B$$

Le travail est proportionnel à l'intensité du courant et à la variation du flux magnétique.

**Généralisation** – Le calcul réalisé précédemment se généralise à tout circuit dans un champ magnétique permanent. On retiendra que le travail des forces de Laplace vaut

$$W = I \Delta \phi_B \quad \text{avec} \quad \phi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS \quad \heartsuit \quad (5.5)$$

**Énergie d'interaction d'un circuit dans un champ magnétique** – Selon (5.5), le travail des forces de Laplace ne dépend que de l'état initial et final quel que soit le chemin suivi entre ces deux états. On peut donc définir l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p^{\text{mag}}$  :

$$W = -\Delta \mathcal{E}_p^{\text{mag}} \implies \mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -I \phi_B \quad \heartsuit \quad (5.6)$$

**Règle du flux maximum** – Ainsi, un circuit électrique en présence d'un champ magnétique cherchera à minimiser son énergie potentielle magnétique c'est-à-dire à maximiser son flux magnétique : c'est la règle du flux maximum. Pour illustrer cette propriété, imaginons une spire alimentée par un courant d'intensité  $I$  et suspendue par deux fils électriques rigides. Approchons le pôle sud d'un aimant. Imaginons que l'orientation du courant soit telle que le flux est positif. Pour maximiser le flux magnétique, la spire doit se rapprocher de l'aimant,

26. Un tire-bouchon que l'on fait tourner dans le sens du courant électrique progresse dans le sens de  $\vec{n}$

On peut s'étonner de l'apparente contradiction qu'il y a entre le fait que la force de Laplace est d'origine magnétique et qu'elle produit paradoxalement du travail. En réalité, le travail des forces magnétiques qui s'exercent sur les charges (libres et fixes) est bien nul. En effet

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum (q_i \vec{v}_i \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_i \, dt = \vec{0}$$

Cependant, ce que l'on a calculé représente le travail macroscopique des forces magnétiques et s'écrit

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \sum (q_i \vec{v}_i \wedge \vec{B}) \cdot \vec{V} \, dt$$

où  $\vec{V}$  est la vitesse de déplacement du conducteur (et non des charges). Ce travail non nul est en fait compensé par un travail microscopique dit travail électromoteur.

là où le champ magnétique est le plus fort : la spire est alors attirée vers l'aimant. Invertissons maintenant le sens du courant. Le flux magnétique est négatif et chercher à le maximiser revient à s'éloigner de l'aimant : la spire est repoussée par l'aimant.

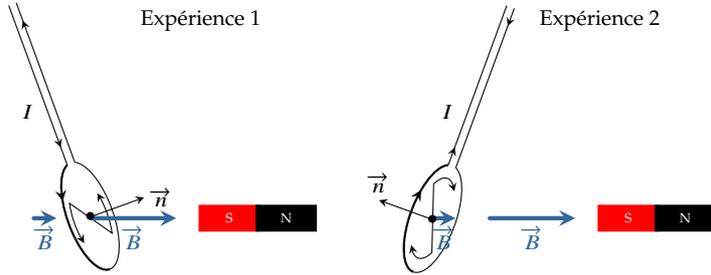


FIGURE 5.12 – Illustration de la règle du flux maximum.

Finalement, ces expériences montrent qu'une spire se comporte comme un aimant dont la polarité dépend du sens du courant. Le vecteur  $\vec{n}$  indique l'axe sud-nord de l'aimant équivalent.

### Dipôle magnétique dans un champ magnétique

Comme on vient de le voir, une boucle de courant se comporte comme un aimant. On peut donc lui associer un pôle sud et un pôle nord. Pour caractériser cette polarité, on définit un vecteur orienté du sud vers le nord dit *moment magnétique* et noté  $\vec{m}$ .

Pour une spire plane quelconque, le moment magnétique s'écrit

$$\vec{m} = IS \vec{n} \quad \heartsuit \quad (5.7)$$

où  $S$  est l'aire de la surface de la spire et  $\vec{n}$  un vecteur unitaire perpendiculaire à la spire et dont l'orientation est associée au sens positif du courant par la règle du tire-bouchon.  $m$  s'exprime en  $A.m^2$ .

**Action d'un champ magnétique sur un dipôle magnétique** – Plaçons un dipôle magnétique dans un champ magnétique permanent. Si le dipôle est de petite taille, on peut considérer que le champ magnétique est localement uniforme. Ainsi l'énergie potentielle magnétique s'écrit

$$\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -I\phi_B = -I\vec{B} \cdot \vec{n}S = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad \heartsuit \quad (5.8)$$

Le dipôle ressent une résultante des forces magnétiques (qui correspond à la force de Laplace)

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

Par conséquent, si le champ magnétique est partout le même, la quantité  $\vec{m} \cdot \vec{B}$  ne dépend pas de l'espace et la force magnétique est donc nulle<sup>27</sup>. En revanche, en vertu de la règle du flux maximum, le dipôle va chercher à s'orienter de façon à maximiser son flux magnétique. Appelons  $\theta$  l'angle entre le moment dipolaire magnétique et le champ magnétique. L'énergie magnétique vaut

$$\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = -mB \cos \theta$$

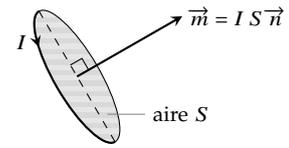


FIGURE 5.13 – Moment dipolaire magnétique

De manière plus générale, toute distribution de courant localisée dans l'espace est caractérisée par un moment dipolaire magnétique. Pour une boucle filiforme quelconque (pas forcément plane), le moment magnétique s'écrit

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} \vec{OP} \wedge I d\vec{\ell}$$

Avec  $P$  un point parcourant la boucle.

27. On peut retrouver ce résultat à partir de l'expression de la force de Laplace puisque si le champ magnétique est uniforme, la force de Laplace donne

$$\vec{F} = I \vec{L} \wedge \vec{B}$$

avec  $\vec{L}$  le vecteur qui joint les extrémités de la portion de circuit qui plonge dans le champ magnétique. Pour une boucle de courant,  $\vec{L} = \vec{0}$ , donc  $\vec{F} = \vec{0}$ .

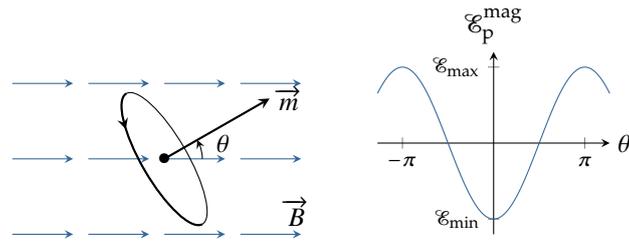


FIGURE 5.14 – Dipôle rigide dans un champ uniforme.

On constate alors qu'il existe une position d'équilibre stable lorsque le moment magnétique est aligné avec le champ magnétique extérieur. Autrement dit, les forces magnétiques présentent un couple d'orientation dont on peut exprimer le moment  $\Gamma$ . En effet, supposons le dipôle magnétique animé d'un mouvement de translation (vitesse  $\vec{V}$ ) et d'un mouvement de rotation (vecteur rotation  $\vec{\Omega}$ ). Pendant  $dt$ , le travail des forces magnétiques s'écrit

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{V} dt + \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega} dt = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\Omega} dt \quad (5.9)$$

puisque la résultante des forces est nulle. Par ailleurs, le travail produit est relié à la variation d'énergie magnétique *via*

$$dW = -d\mathcal{E}_p^{\text{mag}} = d(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

Or, le dipôle étant considéré rigide, le moment magnétique conserve la même norme et seule son sens varie. La formule de dérivation vectorielle (*cf.* cours de mécanique sur le vecteur rotation) donne  $d\vec{m}/dt = \vec{\Omega} \wedge \vec{m}$  ce qui permet d'écrire

$$dW = d(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{\Omega} \wedge \vec{m}) \cdot \vec{B} dt = (\vec{m} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{\Omega} dt$$

En comparant avec la formule (5.9), on obtient :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} \quad \heartsuit \quad (5.10)$$

On retrouve le fait que lorsque le dipôle est aligné avec le champ magnétique, le couple s'annule : le dipôle est en équilibre mécanique.

### Analogies

Ces formules sont analogues à celle rencontrées dans l'étude de l'interaction d'un dipôle électrique avec un champ électrique.

grandeurs	électriques	magnétiques
moment dipolaire	$\vec{p}$	$\vec{m}$
champ extérieur	$\vec{E}$	$\vec{B}$
énergie d'interaction	$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$	$\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$
couple d'orientation	$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$	$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$

# CHAMP B CRÉÉ PAR DES COURANTS

# 6

La loi de Biot et Savart permet de relier le courant électrique aux effets magnétiques qu'il produit dans l'hypothèse où ce courant est stationnaire. Cette loi permet, d'une part de dégager les propriétés de symétrie du champ magnétostatique et d'autre part de le calculer analytiquement dans certains cas simples comme le fil infini et la spire. Enfin, le champ créé par un dipôle magnétique est traité ce qui permet d'aborder la question de l'origine du magnétisme des aimants.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/biot-et-savart.php>

6.1 Loi de Biot et Savart . . . . .	57
Quelques faits historiques . . . . .	57
Énoncé . . . . .	58
Illustration sur un exemple . . . . .	59
Topographies - Symétries . . . . .	59
6.2 Champ dipolaire . . . . .	62
Champ d'une spire . . . . .	62
Approximation dipolaire . . . . .	63
Origines du magnétisme . . . . .	64

## 6.1 Loi de Biot et Savart

### Quelques faits historiques

**1820 : expérience d'Ørsted** – Lors d'un cours, le danois Hans Christian Ørsted découvre qu'un fil conducteur parcouru par un courant électrique<sup>29</sup> fait dévier l'aiguille d'une boussole placée à proximité.

Cette expérience prouve sans ambiguïté le lien entre courant électrique et champ magnétique. Par ailleurs, si on inverse le sens du courant, l'aiguille tourne de 180°. L'expérience d'Ørsted suscite un grand intérêt car c'est la première fois qu'on met en évidence une force qui n'est pas suivant la ligne joignant les deux corps en interaction.

**1820 : les travaux d'Ampère et d'Arago** – C'est François Arago qui, après avoir assisté à une démonstration de l'expérience d'Ørsted à Genève, la présente à l'Académie des sciences de Paris. Dans l'assemblée, Ampère\* est enthousiaste et se lance dans un travail expérimental et théorique. Ampère montre notamment que deux fils rectilignes parcourus par un courant s'attirent ou se repoussent selon que les courants sont dans le même sens ou pas. Il montre également qu'une spire parcourue par un courant se comporte comme un aimant. On peut associer à une spire un pôle nord et un pôle sud. Si l'on change le sens du courant, la polarité change.

29. À l'époque, la pile de Volta est déjà inventée.

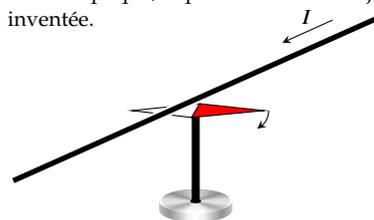


FIGURE 6.1 – Expérience d'Ørsted.

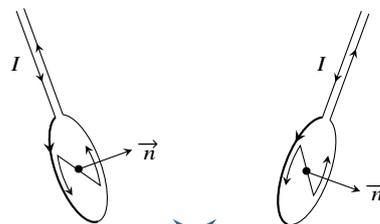


FIGURE 6.2 – Expériences d'Ampère.

\*. **André-Marie Ampère (1775 - 1836)** : physicien et chimiste français, considéré comme le « Newton de l'électricité ». Né à Polémieux-au-Mont-d'Or, près de Lyon, fils d'un juge de paix lyonnais guillotiné sous la Révolution, André-Marie Ampère mène une brillante carrière scientifique : titulaire de la chaire de mécanique à l'École Polytechnique en 1809, il est élu à l'Académie des Sciences en 1814, puis à la chaire de physique du Collège de France en 1824. Il publie en 1827 son dernier grand ouvrage *Sur la théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques uniquement déduite de l'expérience*. Il termine sa vie en tant qu'inspecteur général de l'instruction publique et laissera son nom à l'unité de courant électrique, l'ampère.

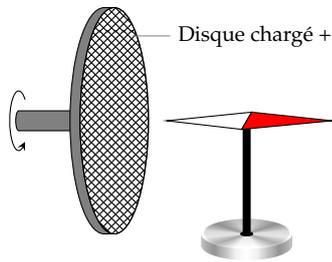


FIGURE 6.3 – Expérience de Rowland

Par ailleurs, Arago qui collabore avec Ampère découvre que le courant électrique a la propriété d'aimanter le fer ce qui mènera à l'invention de l'électroaimant.

**1876 : expérience de Rowland** – Henry Rowland démontre, à l'aide d'un travail expérimental très soigné, qu'un disque chargé électriquement en rotation rapide produit un champ magnétique. Autrement dit, les charges électriques en déplacement produisent les mêmes effets magnétiques qu'un courant électrique ce qui suggère que le courant électrique est lié à un déplacement de charges électriques.

### Conclusion

Tout mouvement de charges, et notamment le courant électrique, est source de champ magnétique.

### Énoncé

L'étude quantitative des interactions entre aimants et courants fut réalisée par les physiciens Biot et Savart (1820). Ils mesurèrent la durée des oscillations d'une aiguille aimantée en fonction de sa distance à un courant rectiligne. Ils trouvèrent que la force agissant sur un pôle est dirigée perpendiculairement à la direction reliant ce pôle au conducteur et qu'elle varie en raison inverse de la distance. De ces expériences, Laplace déduisit ce qu'on appelle aujourd'hui la loi de Biot et Savart.

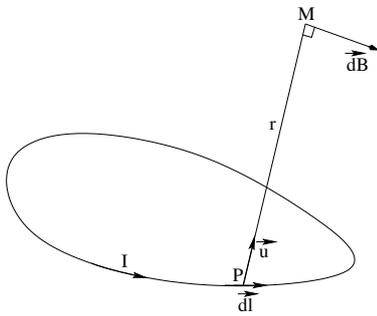


FIGURE 6.4 – Notations utilisées dans la loi de Biot et Savart.

Le champ magnétique que produit une distribution filiforme de courant peut s'obtenir en décomposant la distribution en petits éléments de courant. On considère que chaque élément de courant de longueur orientée  $d\vec{l}$  traversé par un courant d'intensité  $I$  produit un champ magnétique élémentaire en  $M$  :

$$d\vec{B}(M) = K \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

où  $K$  est une constante,  $\vec{u}$  le vecteur unitaire joignant l'élément de courant à  $M$ , et  $r$  la distance entre  $M$  et la portion de circuit. Il faut voir  $d\vec{B}$  comme un intermédiaire de calcul, seule la somme de toutes les contributions a un sens physique. Le champ magnétique résultant s'obtient donc en intégrant l'expression précédente, le point  $P$  parcourant tout le circuit :

$$\vec{B}(M) = \oint d\vec{B} = K \oint_{\text{circuit}} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

le symbole  $\oint$  signifiant que l'intégration s'effectue le long du circuit fermé.

### Loi de Biot et Savart

Dans le Système international d'unités, on pose

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad \text{avec} \quad \mu_0 \simeq 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$$

$\mu_0$  est appelé *perméabilité magnétique du vide*. Ainsi, un circuit filiforme alimenté par un courant stationnaire d'intensité  $I$  produit un champ magnétique en M donné par

$$\vec{B}(\text{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{\text{PM}}}{\text{PM}^3}$$

La loi de Biot et Savart permet de calculer le champ magnétique créé par une distribution de courant stationnaire filiforme. Cela conduit au calcul de trois intégrales scalaires voire moins lorsque le problème présente suffisamment de symétries.

Il peut arriver que le calcul analytique s'avère ardu, il faut alors envisager une approche numérique.

### Exemple de calcul : le fil rectiligne infini

Considérons un fil infini d'axe Oz, parcouru par un courant constant d'intensité  $I$  et cherchons le champ magnétique produit à la distance  $r$  du fil. À l'aide de la formule de Biot et Savart, on peut exprimer le champ magnétique  $d\vec{B}$  produit par la portion de longueur  $d\ell$  :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \cos \varphi}{\text{PM}^2}$$

avec  $\varphi$  l'angle que fait la droite (MP) avec le plan médiateur passant par M. Choisissons la variable  $\varphi$  comme variable d'intégration. Sachant que  $\text{PM} = r/\cos \varphi$  et  $\ell = r \tan \varphi$  (d'où l'on tire  $d\ell = r \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$ ) on obtient

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \varphi}{r} d\varphi$$

Vu que tous les champs élémentaires sont colinéaires et dirigés suivant le vecteur orthoradial  $\vec{u}_\theta$ , on peut ajouter les intensités des champs pour avoir le champ magnétique total

$$B(\text{M}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Finalement, il règne dans l'espace un champ magnétique

$$\vec{B}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \quad (6.1)$$

### Topographies - Symétries

Décrivons différentes situations afin de dégager les propriétés essentielles du champ magnétique.

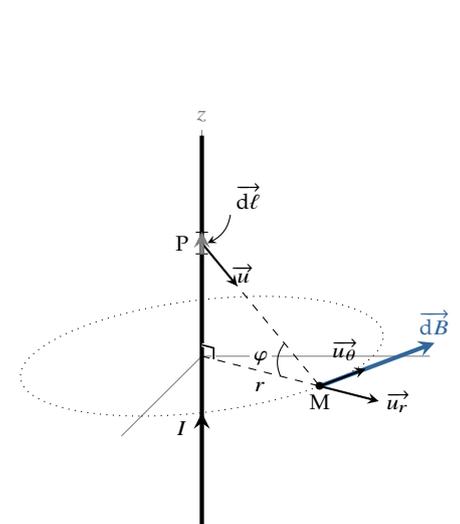


FIGURE 6.5 – Champ magnétique créé par un fil rectiligne infini.

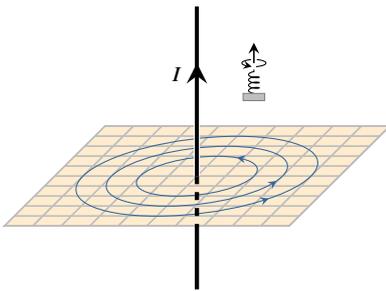


FIGURE 6.6 – Champ magnétique créé par un fil infini.

**Le fil infini** – Comme on vient de le voir sur l'exemple précédent, le champ magnétique créé par un long fil rectiligne est *orthoradial*. Par conséquent, les lignes de champ sont des cercles. Contrairement au champ électrique, les lignes de champ magnétique se referment sur elle-même. On peut noter que le champ magnétique tourne autour du fil dans un sens imposé par la règle du tire-bouchon : **un tire bouchon tournant dans le sens du champ magnétique progresse dans le sens du courant**.

**La spire circulaire** – La figure Figure 6.7 présente les lignes de champ magnétique que produit une spire circulaire alimentée par un courant électrique permanent. Ces lignes de champ sont dans des plans perpendiculaires à la spire et contenant son centre. On peut noter, là encore, la structure fermée de ces lignes. Comme on l'a déjà vu précédemment, on peut associer à cette spire un moment magnétique qui indique la direction sud-nord de l'aimant équivalent. Cela correspond également au sens du champ magnétique qui règne au centre de la spire.

**Le solénoïde** – Enroulons de façon jointive un fil conducteur sur un cylindre de longueur  $L$  : on obtient une bobine ou solénoïde. Cet enroulement est caractérisé par une densité linéique d'enroulement  $n = N/L$ , avec  $N$  le nombre d'enroulements. Bien que cet enroulement soit légèrement hélicoïdal, on peut, dans une première approximation, assimiler le solénoïde à une superposition de spires très rapprochées. Dans ce cas, les lignes de champ sont des courbes planes situées dans un plan coupant en deux le solénoïde dans le sens de la longueur. La Figure 6.7 montre l'allure des lignes de champ. À l'intérieur de la bobine, les lignes sont quasiment parallèles ce qui traduit le caractère quasi-uniforme du champ. On montre que lorsque  $L \rightarrow \infty$ , le champ magnétique à l'intérieur est axial, uniforme et ne dépend que de l'intensité électrique et de la densité d'enroulement :  $B_{int} = \mu_0 n I$ .

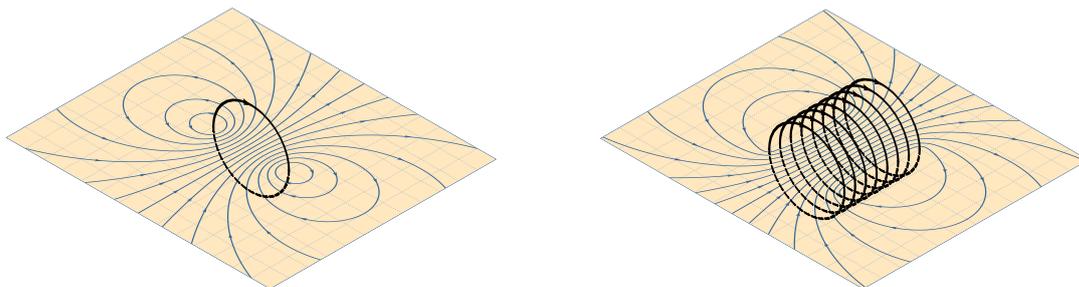


FIGURE 6.7 – Cartes de champ d'une spire (à gauche) et d'un solénoïde (à droite).

#### À retenir

Pour un enroulement de spires, un tire-bouchon que l'on fait tourner dans le sens du courant électrique progresse dans le sens du champ magnétique au centre et correspond au sens sud-nord de l'aimant équivalent.

**Symétries** – Le champ magnétique ne présente pas les mêmes propriétés de symétrie que le champ électrique. En effet, la formule de Biot

et Savart montre que le champ magnétique se transforme comme un produit vectoriel. On dit que le champ magnétique est un *vecteur axial* ou *pseudovecteur*.

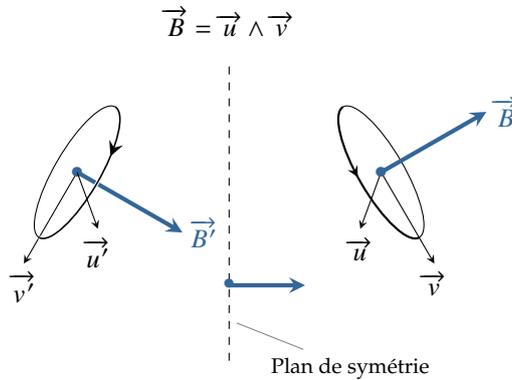


FIGURE 6.8 – Transformation d’un vecteur axial par un plan de symétrie.

En présence d’un plan de symétrie, un vecteur normal<sup>30</sup> se transforme comme dans un miroir. En conséquence, le produit vectoriel de deux vecteurs normaux ne se transforme pas comme dans un miroir. Sur la Figure 6.8, on voit que  $\vec{B}$  se transforme ainsi :

30. On dit également vecteur polaire.

$$M \xrightarrow{\text{symétrie}} M' \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) \xrightarrow{\text{symétrie}} -\text{sym}\vec{B}(M)$$

En vertu du principe de Curie, si la distribution de courant est invariante par symétrie, l’opération de la symétrie ne doit pas changer la valeur du champ magnétique. Par conséquent

$$\vec{B}(M') = -\text{sym}\vec{B}(M) \quad \heartsuit \quad (6.2)$$

Cette propriété implique que **pour tout point M situé dans un plan de symétrie, le champ magnétique est obligatoirement perpendiculaire au plan de symétrie.**

On dit que la distribution présente un plan d’anti-symétrie  $\mathcal{P}'$  lorsque la distribution de courant est invariante par l’opération de symétrie de plan  $\mathcal{P}'$  suivi de l’inversion du sens des courants. Dans ce cas, en un point M de l’espace, le champ magnétique ne doit pas varier lorsque l’on effectue cette transformation (principe de Curie). Détaillons la transformation

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\text{symétrie}} & M' & \xrightarrow{\text{inversion}} & M' \\ \vec{B}(M) & \xrightarrow{\text{symétrie}} & -\text{sym}\vec{B}(M) & \xrightarrow{\text{inversion}} & \text{sym}\vec{B}(M) \end{array}$$

On en déduit que

$$\vec{B}(M') = \text{sym}\vec{B}(M) \quad \heartsuit \quad (6.3)$$

Cette propriété implique que **pour tout point M situé dans un plan d’anti-symétrie, le champ magnétique est obligatoirement contenu dans ce plan.**

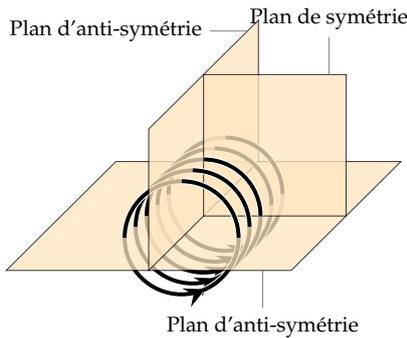


FIGURE 6.9 – Solénoïde cylindrique.

**Exemple**

Identifions les plans de symétrie et d'anti-symétrie d'un solénoïde cylindrique (considéré comme un ensemble de spires parallèles). Tout plan contenant l'axe du solénoïde est un plan d'anti-symétrie. Les lignes de champ doivent donc appartenir à ces plans. En conséquence, l'axe du solénoïde est nécessairement une ligne de champ. Par ailleurs, le plan perpendiculaire à l'axe du solénoïde et passant par le milieu du solénoïde est un plan de symétrie. Les lignes de champ doivent traverser ce plan à angle droit.

## 6.2 Champ créé par un dipôle magnétique

On cherche à déterminer l'expression du champ magnétique créé par un dipôle magnétique c'est-à-dire une distribution localisée de courant auquel on peut associer un moment magnétique  $\vec{m}$ . Nous verrons que loin du dipôle magnétique la structure du champ magnétique présente des analogies avec celui du champ électrique créé par un dipôle électrique.

### Champ magnétique créé le long de l'axe d'une spire

Commençons par étudier le champ magnétique produit par une spire circulaire de rayon  $R$  parcouru par un courant permanent d'intensité  $I$ . Dans le cas général, le calcul fait appel aux intégrales elliptiques ; on se contente ici d'étudier l'évolution du champ magnétique le long de l'axe ( $Oz$ ) de la spire.

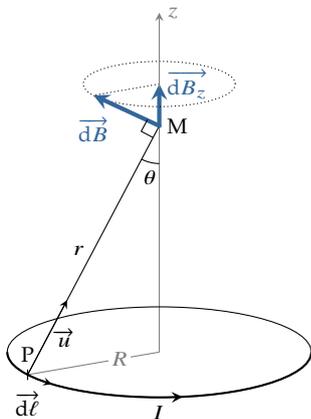


FIGURE 6.10 – Calcul du champ magnétique produit sur l'axe d'une spire.

Tout d'abord, appelons  $\theta$  le demi-angle au sommet du cône formé par la spire et un point  $M$  de l'axe. D'après la loi de Biot et Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

le champ  $d\vec{B}(M)$ , fait un angle  $\pi/2 - \theta$  avec l'axe ( $Oz$ ).

Par ailleurs, tout plan contenant l'axe de la spire est un plan d'anti-symétrie (il y en a une infinité). Il en résulte que le champ magnétique est nécessairement le long de l'axe pour les points  $M$  de cet axe. Il suffit dès lors de sommer toutes les composantes verticales des champs élémentaires :

$$dB_z = dB \cos(\pi/2 - \theta) \quad \text{avec} \quad dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \quad \text{soit} \quad dB_z = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2}$$

Lorsque le point  $P$  décrit le circuit fermé, l'angle  $\theta$ , la distance  $r$  et l'intensité  $I$  restent constants :

$$B_z = \frac{\mu_0 I \sin \theta}{4\pi r^2} \oint d\ell = \frac{\mu_0 I R \sin \theta}{2r^2}$$

Finalement, compte tenu du fait que  $\sin \theta = R/r$ , le champ magnétique créé par une spire le long de son axe s'écrit

$$\vec{B}(M) = B_{\max} \sin^3 \theta \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad B_{\max} = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad \heartsuit \quad (6.4)$$

$B_{\max}$  représente le champ créé au centre de la spire.

### Approximation dipolaire

À partir du résultat précédent, regardons maintenant comment le champ magnétique varie loin de la boucle de courant. Sachant que  $\sin \theta = R/\sqrt{R^2 + z^2}$ , on peut écrire le résultat précédent en fonction uniquement de la variable  $z$  :

$$B(M \in Oz) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Faisons intervenir le moment dipolaire de la spire,  $m = \pi R^2 I$  :

$$B(M \in Oz) = \frac{\mu_0 m}{2\pi} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Expression qui, loin de la spire, devient ( $R^2 + z^2 \simeq z^2$ )

$$B(M \in Oz) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{z^3} \quad \text{si} \quad z \gg R$$

Le champ magnétique décroît donc comme l'inverse du cube de la distance lorsque l'on se situe loin de la spire. Cette formule n'est pas sans rappeler l'évolution du champ électrique créé par un dipôle électrique le long de l'axe du dipôle. En effet, le champ créé par un dipôle électrique le long de son axe vaut, dans l'approximation dipolaire,

$$E_{\text{dipolaire}}(M \in Oz) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{z^3}$$

On retrouve l'analogie déjà rencontrée au chapitre précédent :

$$\left[ \begin{array}{l} \vec{m} \leftrightarrow \vec{p} \\ \vec{B} \leftrightarrow \vec{E} \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \end{array} \right]$$

On peut montrer que cette analogie fonctionne dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire dès que l'on se trouve loin du dipôle magnétique.

#### Approximation dipolaire

Le champ magnétique créé par un dipôle magnétique a la même structure que le champ électrique créé par un dipôle dès lors que

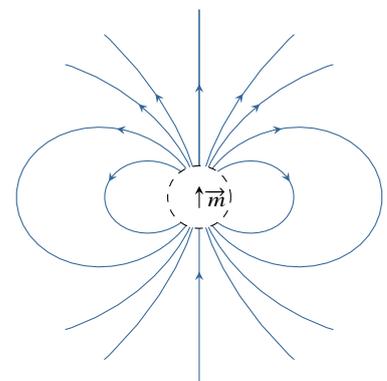


FIGURE 6.11 – Lignes de champ magnétique produit par un dipôle magnétique dans l'approximation dipolaire.

l'on se place dans l'approximation dipolaire. On a

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m}]$$

## Origines du magnétisme

**Géomagnétisme** – La Terre produit un champ magnétique de l'ordre de  $10 \mu\text{T}$ . Ce champ est de nature dipolaire et peut s'interpréter comme lié à l'existence d'un dipôle magnétique au centre de la Terre de moment magnétique  $m \approx 10^{23} \text{ A}\cdot\text{m}^2$  et dont l'axe est quasi-aligné avec l'axe des pôles. Le dipôle pointe vers le Sud géographique de telle sorte qu'une boussole à la surface de la Terre indiquera le Nord Géographique. Autrement dit, le Nord géographique est un pôle sud magnétique.

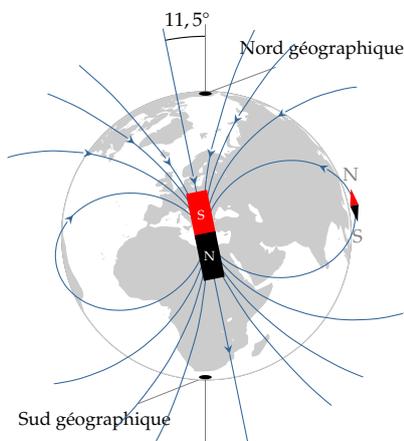


FIGURE 6.12 – Champ magnétique terrestre

En réalité, l'axe nord-sud magnétique n'est pas confondu avec l'axe Sud-Nord géographique. Il est incliné de  $11,5^\circ$  et subit quelques fluctuations journalières. Ce fait reste encore énigmatique pour les théoriciens. Il est des astres où la configuration est encore plus exotique : par exemple, sur Neptune l'axe fait  $90^\circ$  avec l'axe de rotation !

L'étude de l'évolution du magnétisme terrestre (paléomagnétisme) soulève encore quelques énigmes. Par exemple l'inversion du champ magnétique terrestre ne se produit pas régulièrement (la dernière remonte à 800 000 ans) alors que le champ magnétique solaire s'inverse lui à une cadence régulière ; tous les 11 ans.

**Le magnétisme des aimants** – C'est Ampère qui, le premier, pressentit que le magnétisme des aimants tenait son origine dans l'existence de minuscules boucles de courants au sein des molécules de la matière. Il a fallu attendre les découvertes du XX<sup>e</sup> siècle sur l'atome pour confirmer l'intuition d'Ampère. En effet, de nos jours, on sait que certains atomes (ou molécules) possèdent un moment dipolaire magnétique du fait de leur structure électronique. Dans un matériau non aimanté, les moments dipolaires sont orientés de façon aléatoires de sorte que les effets s'annihilent. C'est la situation que l'on rencontre quand le matériau est non aimanté ou trop chaud, l'agitation thermique étant alors responsable de ce désordre.

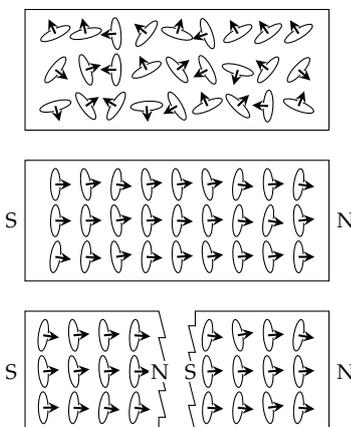


FIGURE 6.13 – Origine du magnétisme des aimants - Expérience de l'aimant brisée.

En revanche, dans un aimant, les moments microscopiques tendent à s'aligner grâce à une interaction d'origine quantique (on parle de couplage ferromagnétique) et parce que l'agitation thermique n'est pas trop importante. Dans ce cas, l'aimant présente un moment magnétique macroscopique suffisamment important pour créer un fort champ magnétique. Bien entendu, lorsqu'on chauffe l'aimant au delà d'une certaine température (dite température critique), l'ordre ferromagnétique est rompu et l'aimant perd son aimantation.

Cette description permet de comprendre une expérience qui remonte au XIII<sup>e</sup> siècle : l'expérience de l'aimant brisée. Si l'on coupe un aimant en deux, on se retrouve avec deux nouveaux aimants possédant chacun un pôle nord et un pôle sud. Autrement dit, il est impossible d'isoler un seul pôle magnétique.

### Relation entre structure électronique et magnétisme

Le magnétisme des atomes est essentiellement dû au mouvement électronique. En effet, imaginons un électron de masse  $m_e$  décrivant une orbite circulaire de rayon  $r$  à la vitesse  $v$  autour du noyau avec lequel il est en interaction. On peut considérer qu'il s'agit d'une boucle de courant de rayon  $r$  et de courant  $I = e/T$  où  $T$  représente la période orbitale du mouvement. Sachant que  $T = 2\pi r/v$ , le moment magnétique de cette « boucle de courant » vaut donc

$$m = \pi r^2 I = \pi r^2 \frac{ev}{2\pi r} = \frac{evr}{2}$$

L'électron ainsi en mouvement présente également un moment cinétique orbital  $L_O = m_e v r$  de sorte qu'il y a proportionnalité entre le moment magnétique et le moment orbital.

$$m = \gamma_0 L \quad \text{avec} \quad \gamma_0 = \frac{e}{2m_e} \quad (6.5)$$

Le facteur  $\gamma_0$  porte le nom de facteur gyromagnétique. On peut montrer que tout modèle classique conduit à ce résultat quel que soit le mouvement de l'électron. Le noyau présente également un moment magnétique mais sa masse étant plus de mille fois supérieure à celle de l'électron, le facteur gyromagnétique nucléaire est négligeable devant celui de l'électron de sorte que le moment magnétique de l'atome est essentiellement dû au mouvement des électrons.

La description classique que l'on vient de voir n'est hélas pas en accord avec l'expérience et seule une description quantique parvient à appréhender complètement les phénomènes magnétiques. Par exemple, on s'est rendu compte que l'électron possédait un moment cinétique propre dit **moment cinétique de spin**  $L_s$ . Pour prendre une image classique, l'électron est comme une petite boule chargée en rotation sur elle-même et possède donc également un moment magnétique lié à son spin. Là s'arrête l'analogie classique, car la relation entre le moment magnétique et le moment cinétique de spin ne vérifie pas l'équation (6.5). On obtient plutôt

$$m_s = g\gamma_0 L_s \quad \text{avec} \quad g \simeq 2 \quad (6.6)$$

avec  $g$  un paramètre sans dimension, appelé facteur de Landé, dont la valeur expérimentale est en accord avec les calculs d'électrodynamique quantique.

Finalement, on retiendra que les propriétés magnétiques de l'atome sont essentiellement gouvernées par la façon dont les moments cinétiques orbitaux et de spin des électrons se composent.



# ÉLECTROCINÉTIQUE



# ÉTUDE DES RÉSEAUX ÉLECTRIQUES

# 7

Comment courants et potentiels électriques se répartissent au sein d'un circuit électrique? C'est à cette question que ce cours entend répondre, sachant qu'on limitera notre propos aux réseaux électriques linéaires. En effet, ces réseaux ont le bon goût de mener à des équations analytiquement solubles.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

[femto – physique.fr/electromagnetisme/etude – des – reseaux –  
electriques.php](http://femto-physique.fr/electromagnetisme/etude-des-reseaux-electriques.php)

## 7.1 Lois de l'électrocinétique

Les lois de l'électrocinétique ou **lois de Kirchhoff**<sup>32</sup> se résument en deux lois : la *loi des nœuds* et la *loi des mailles*.

### Introduction

Un **réseau électrique** (ou circuit électrique) est un ensemble d'éléments présentant des propriétés électriques, reliés entre eux par des conducteurs que l'on considérera parfaits (conductivité infini). Les lois de l'électricité permettent de trouver la façon dont les courants et les potentiels électriques se répartissent au sein de ce circuit.

Lorsque les grandeurs électriques ne varient pas dans le temps, on parle de **régime continu** ; le **régime variable** désigne la situation contraire. En général, les grandeurs électriques stationnaires sont notées en majuscule (tension  $U$  et intensité du courant  $I$ ) alors que les grandeurs variables sont en minuscules ( $u(t)$  et  $i(t)$ ).

En régime variable, les fluctuations de courant se propagent à une vitesse proche de la vitesse de la lumière. Pour des circuits de taille raisonnable, la durée de propagation  $\tau$  est très petite devant le temps caractéristique  $T$  des fluctuations (période du signal s'il est périodique). Il est alors légitime de négliger  $\tau$  devant  $T$  ; c'est ce qu'on appelle *l'approximation des régimes quasi-stationnaires*.

### Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS)

Nous admettrons que les lois des régimes permanents restent valables en régime variable si l'on peut considérer les phénomènes de propagation négligeables. Notamment, dans une branche d'un circuit, à un instant donné, le courant a la même intensité en tout point.

7.1 Lois de l'électrocinétique . . .	69
Introduction . . . . .	69
Loi des nœuds . . . . .	70
Loi des mailles . . . . .	71
Puissance électrique . . . . .	72
7.2 Phénomènes résistifs . . . . .	73
Loi d'ohm - effet Joule . . . . .	73
Association de résistances . . . . .	74
Ponts diviseurs . . . . .	75
7.3 Dipôles actifs . . . . .	75
Source de tension . . . . .	75
Source de courant . . . . .	76
Sources de Thévenin-Norton . . . . .	77
Récepteur actif . . . . .	78
Loi de Pouillet . . . . .	79
Méthodes de résolution . . . . .	79
7.4 Phénomènes capacitifs . . . . .	80
Rappels . . . . .	80
Association de condensateurs . . . . .	81
Décharge d'un condensateur . . . . .	82
7.5 Phénomène d'auto-induction . . . . .	84
Phénomène d'induction . . . . .	84
Auto-induction . . . . .	85
Energie magnétique . . . . .	86
Circuit R-L . . . . .	87

32. **Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)** : physicien allemand qui énonça les lois relatives au courant électrique dans les circuits alors qu'il était encore étudiant. On lui doit surtout des avancées en spectroscopie.

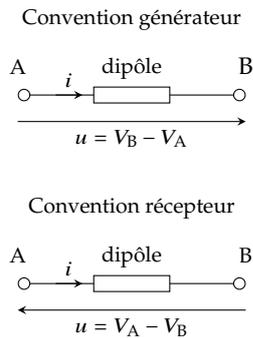


FIGURE 7.1 – Les différentes conventions

Un **dipôle électrocinétique** est une partie d'un circuit qui peut être reliée au reste du circuit par deux fils. On décrit le comportement d'un dipôle par sa relation courant-tension ( $i = f(u)$ ) dans une convention précisée. Il en existe deux :

- dans la convention récepteur, si le courant algébrique est orienté dans le sens AB, alors  $u = V_A - V_B$  ;
- dans la convention générateur, si le courant est orienté dans le sens AB, alors  $u = V_B - V_A$ .

Enfin, nous restreindrons notre propos aux réseaux constitués seulement de dipôles électrocinétiques linéaires, c'est-à-dire ceux dont la relation entre  $u$  et  $i$  est soit affine ( $i = a \times u + b$ ), soit intégrable-différentielle.

## Loi des nœuds

Dans chaque branche d'un réseau électrique, on définit un sens positif (le choix est arbitraire!) du courant et une intensité algébrique  $i$ . Si  $i > 0$ , le courant circule dans le sens positif; si  $i < 0$ , le courant circule dans le sens opposé.

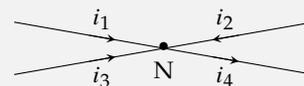
Un nœud est la rencontre d'au moins trois conducteurs électriques. Considérons  $n$  branches de conducteurs liées par un nœud N. Définissons  $i_k$ , l'intensité algébrique du courant de la  $k^e$  branche. La loi des nœuds traduit la conservation de la charge en régime stationnaire et exprime le fait que la charge ne peut pas s'accumuler en N : le courant électrique qui arrive en N doit être compensé par le courant qui sort. Cette loi, rigoureusement vérifiée en régime continu, est admise en régime variable dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

### Loi des nœuds

En chaque nœud d'un circuit, on a  $\sum_{k=1}^n \epsilon_k i_k = 0$  où  $\epsilon_k = +1$  quand le courant est entrant et où  $\epsilon_k = -1$  dans le cas contraire.

### Exemple

On considère le schéma suivant :



la loi des nœuds exprimée en N donne

$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 = 0 \quad \text{soit} \quad i_4 = i_1 + i_2 + i_3$$

ce qui traduit bien le fait que le courant qui arrive en N est égale au courant qui en sort.

## Loi des mailles

Le transport électrique est assuré grâce aux forces électrostatiques. On peut dès lors définir un potentiel électrique en chaque point du circuit. Lorsque le potentiel électrique est le même partout, le réseau est à l'équilibre et n'est le siège d'aucun courant électrique. En revanche, lorsque le potentiel électrique n'est plus uniforme, le conducteur n'est plus à l'équilibre ce qui génère un courant électrique (qui tente de rétablir l'équilibre). Aux extrémités d'une branche il existe alors une tension qui dépend du courant électrique et de la nature du dipôle traversé par ce courant. Il est traditionnel de représenter une tension  $u_{AB} = V_A - V_B$  par une flèche allant de B vers A.

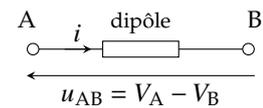


FIGURE 7.2 – Représentation d'une tension

Les tensions qui règnent dans un circuit obéissent à quelques contraintes physiques. En effet, si l'on parcourt un circuit fermé (on parle de maille) en partant d'un nœud N pour revenir à ce même nœud, on doit trouver une tension nulle en vertu du caractère conservatif du champ électrique ( $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ ). Autrement dit, si l'on décompose le circuit  $\mathcal{C}$  en  $n$  branches adjacentes on aura :

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0$$

où  $u_k$  est la tension qui règne aux extrémités de la  $k^e$  branche. Cette loi est à appliquer si toutes les tensions sont orientées dans le même sens, ce qui n'est pas toujours le cas à cause des différentes conventions choisies pour les dipôles, c'est pourquoi on retiendra la règle suivante :

### Loi des mailles

Prenons une maille et choisissons arbitrairement un sens de parcours. Visitions toutes les branches de la maille et associons un coefficient  $\epsilon_k = +1$  à la tension rencontrée lorsqu'elle est orientée (sa flèche représentative) dans le sens de parcours et un coefficient  $\epsilon_k = -1$  lorsque la tension rencontrée est orientée dans l'autre sens. La loi des mailles se traduit alors par

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_k u_k = 0 \quad (7.1)$$

### Exemple

Dans le circuit ci-contre, appliquons la loi des mailles en parcourant la maille dans le sens indiqué. On trouve

$$1 \times u_{BC} + 1 \times u_{AB} - 1 \times u_{AC} = 0$$

soit

$$u_{AC} = u_{AB} + u_{BC}$$

On retrouve d'ailleurs une loi identique à celle de Chasles propre aux vecteurs.

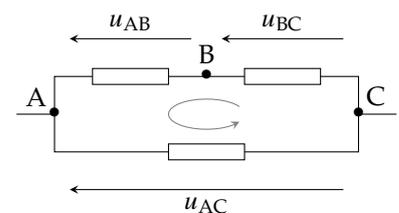


FIGURE 7.3 – maille d'un circuit orientée par le sens de parcours positif indiqué.

**Remarques** : il existe une indétermination du potentiel; ceci reste vrai au sein d'un réseau électrique. Cependant, une convention souvent rencontrée consiste à poser l'origine du potentiel au niveau du pôle - de l'alimentation. Ce potentiel de référence est appelée **masse du circuit**.

Un équipement sous tension présente, en général, une connexion physique avec la terre. Elle permet de protéger l'utilisateur et également d'évacuer les courants induits par la foudre. Cependant, il ne faudrait pas confondre ligne de terre et ligne de masse, car le potentiel de la terre n'est pas nécessairement constant et sa fonction est uniquement liée à la sécurité.



ligne de masse

ligne de terre

### Puissance reçue par un dipôle électrocinétique

On appelle  $\mathcal{P}(t)$  la puissance électrique reçue à l'instant  $t$  par un dipôle électrocinétique. La puissance électrique se mesure en **watt** (symbole : W) en hommage à James Watt<sup>33</sup> et on rappelle que

$$1 \text{ W} \triangleq 1 \text{ J.s}^{-1}$$

Entre  $t$  et  $t + dt$ , la quantité de charge  $dq = i(t) dt$  arrive en une extrémité du dipôle (point A) pendant que la même quantité – nous sommes en régime stationnaire ou quasi-stationnaire – en sort par l'autre extrémité (point B). Cette quantité de charge possède une énergie électrique  $\mathcal{E}_p(A) = dqV_A$  en A et  $\mathcal{E}_p(B) = dqV_B$  en B. Remarquons qu'entre A et B l'énergie des charges n'a pas changé du fait que la distribution des charges et du potentiel est la même entre  $t$  et  $t + dt$ . Autrement dit, d'un point de vue énergétique, tout se passe comme si l'on avait transporté la charge  $dq$  de A en B. Pendant ce transport la charge perd une énergie potentielle  $dqV_A - dqV_B$  qu'elle cède intégralement au dipôle. Celui-ci reçoit donc une quantité d'énergie

$$\delta W = dqV_A - dqV_B = i(t) u_{AB}(t) dt \quad (7.2)$$

#### Puissance électrique reçue par un dipôle

La puissance électrocinétique reçue (l'énergie reçue par unité de temps) par un dipôle D à l'instant  $t$ , soumis à une tension  $u(t)$  et traversé par un courant d'intensité  $i(t)$  vaut, en convention récepteur,

$$\mathcal{P}(t) = u(t) i(t) \quad (7.3)$$

Si  $\mathcal{P}(t) > 0$ , le dipôle absorbe effectivement, à l'instant  $t$ , de l'énergie électrique. On dit que le dipôle a un caractère **récepteur**. Cette énergie reçue par le dipôle est soit stockée, soit convertie sous une autre forme (effet Joule dans une résistance, énergie mécanique dans un moteur).

Si  $\mathcal{P}(t) < 0$ , le dipôle fournit effectivement de l'énergie électrique; on dit que le dipôle a un caractère **générateur** (ex : batterie).

33. **James Watt (1736-1819)** : ingénieur britannique, dont les améliorations sur la machine à vapeur furent une étape clé dans la révolution industrielle.

TABLE 7.1 – Puissance électrique : quelques ordres de grandeur.

électronique $\mu\text{W}$ - $\text{mW}$	lampe de poche W	consommation des français en hiver 100 GW	centrale électrique GW	moteur TGV MW
---	---------------------	--	---------------------------	------------------

## 7.2 Phénomènes résistifs

### Loi d'ohm - effet Joule

Comme on l'a vu précédemment au [Chapitre 4](#), un conducteur ohmique obéit à la loi d'Ohm

$$u(t) = R i(t) \quad [\text{Convention récepteur}]$$

où  $R$  désigne la résistance du conducteur ohmique dont la valeur dépend de la géométrie et de la conductivité du matériau conducteur. Rappelons que  $R$  s'exprime en ohm (symbole  $\Omega$ ). La caractéristique  $i = f(u)$  est donc une droite passant par l'origine.

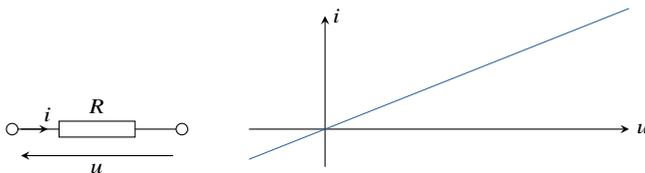


FIGURE 7.4 – Schéma et caractéristique d'un conducteur ohmique.

Un circuit uniquement composé de résistances ne peut pas produire de courant. On dit que le conducteur ohmique est un *dipôle linéaire passif*. Par exemple, si l'on branche deux résistances ensemble, la loi des mailles donne

$$u_1 + u_2 = 0$$

soit

$$R_1 i + R_2 i = 0 \quad \Rightarrow \quad i = 0$$

Aucun courant ne circule et par conséquent tous les conducteurs sont au même potentiel. On retrouve une des propriétés des conducteurs à l'équilibre.

La puissance reçue par un conducteur ohmique vaut

$$\mathcal{P} = u i = R i^2 > 0 \quad \heartsuit \quad (7.4)$$

Le conducteur ne peut que recevoir de l'énergie électrique, sans pouvoir en fournir. On parle alors de *récepteur* électrique. En revanche cette énergie électrique est convertie essentiellement sous forme de chaleur si le conducteur n'est pas thermiquement isolé. En effet, si le conducteur est maintenu à température et pression constantes, le premier principe de la thermodynamique donne, pendant la durée  $\tau$  :

$$\Delta H = Q_p + W_{\text{elec}} = Q_p + \int R i^2 dt = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_p = - \int R i^2 dt$$

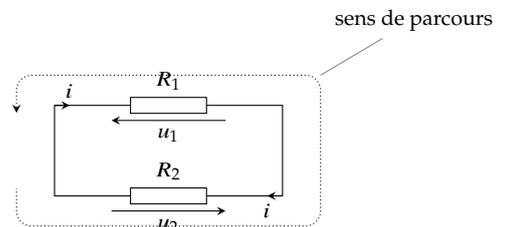


FIGURE 7.5 – Réseau constitué de deux résistances

Notez qu'en général le conducteur voit sa température varier, ce qui fait augmenter son enthalpie ( $\Delta H = \int mc_p dT$ ). Dans ce cas, une partie de l'énergie électrique sert à augmenter l'énergie interne du conducteur et à le dilater.

Cette dissipation de l'énergie électrique sous forme de chaleur porte le nom d'*effet Joule*. Cet effet est mis à profit dans les bouilloires électriques par exemple.

### Association de résistances

Tout dipôle constitué uniquement de résistances équivaut à une résistance équivalente  $R_{eq}$ . Intéressons-nous à deux configurations simples.

**Résistances en série** – On dit que des résistances sont en série lorsqu'elles sont traversées par le même courant électrique. Appelons  $i$

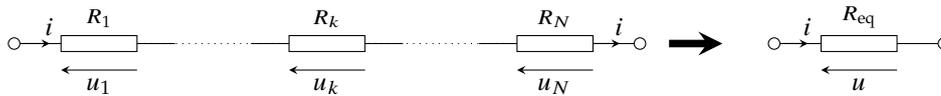


FIGURE 7.6 – Conducteurs ohmiques en série.

l'intensité du courant. On a

$$u = R_{eq} i = \sum_{k=1}^N u_k = i \sum_{k=1}^N R_k$$

Par conséquent, on obtient

$$R_{eq} = \sum_k R_k \quad \heartsuit \quad (7.5)$$

**Résistances en parallèle** – On dit que des résistances sont associées en parallèle lorsqu'elles sont soumises à la même tension. Appelons  $u$

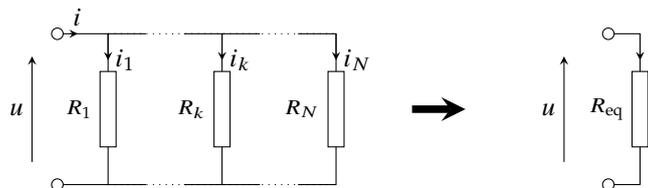


FIGURE 7.7 – Conducteurs ohmiques en parallèle.

la tension commune. On a

$$i = \frac{u}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^N i_k = u \sum_{k=1}^N \frac{1}{R_k}$$

On trouve donc

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_k \frac{1}{R_k} \quad \heartsuit \quad (7.6)$$

On pourra retenir par exemple que :

- deux résistances en parallèle équivalent à un conducteur de résistance  $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  ;
- $N$  résistances identiques  $R$  en parallèle équivalent à un conducteur de résistance  $R/N$ .

## Ponts diviseurs

Considérons deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  *en série* soumises à une tension globale  $u$ .

En vertu de la loi des mailles, on a  $u = u_1 + u_2 = (R_1 + R_2)i$ . La tension aux bornes de chaque résistance  $u_k = R_k i$  est alors une fraction de la tension  $u$

$$u_k = \frac{R_k}{R_1 + R_2} u \quad k = 1 \text{ ou } 2 \quad \heartsuit \quad (7.7)$$

On parle alors de montage *diviseur de tension*.

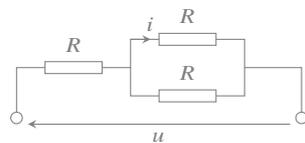
On considère maintenant deux résistances  $R_1$  et  $R_2$  *en parallèle* alimentées par un courant global  $i$ .

Définissons les conductances  $G_k = 1/R_k$ , exprimées en siemens (symbole : S). Le courant traversant chacune des résistances a pour intensité  $i_k = G_k u$  et  $u = (G_1 + G_2)i$ . En conséquence, on obtient

$$i_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2} i \quad k = 1 \text{ ou } 2 \quad \heartsuit \quad (7.8)$$

Le courant se répartit au prorata des conductances et l'on parle de montage *diviseur de courant*.

**Exercice** – On considère le montage ci-dessous. Calculer l'intensité du courant  $i$ .



Rép.  $i = u/(3R)$ .

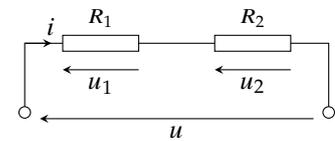


FIGURE 7.8 – Pont diviseur de tension

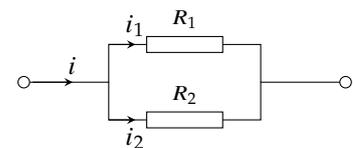


FIGURE 7.9 – Pont diviseur de courant

## 7.3 Modélisation linéaire d'un dipôle actif

Contrairement aux dipôles passifs, les dipôles actifs produisent une tension en circuit ouvert. On distingue les sources (piles, alimentation stabilisée, batteries en utilisation,...) et les récepteurs (électrolyseurs, batteries en charge, moteurs électriques).

### Source de tension

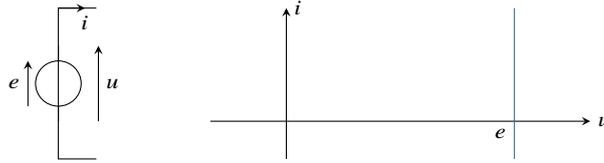
Une source de tension permet aux charges de « remonter » le potentiel grâce à l'existence d'un champ électromoteur au sein de la source. Ce champ électromoteur produit une tension, dite force électromotrice (f.é.m) que nous noterons  $e$ .

La caractéristique d'une source de tension idéale s'écrit en *convention générateur* :

$$u = e \quad \forall i$$

où  $e$  est la *force électromotrice* (f.é.m) de la source de tension.

FIGURE 7.10 – Source idéale de tension : schéma et caractéristique

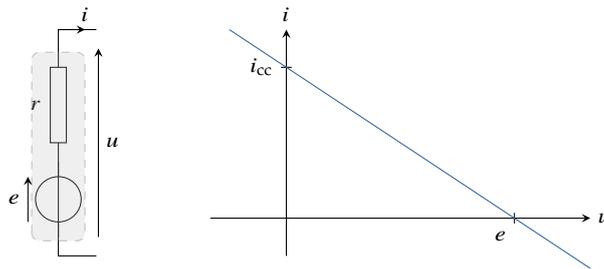


Pour tenir compte des pertes par effet Joule d'une source de tension, on modélise la source par une source idéale en série avec une résistance  $r$  dite *résistance interne*. La caractéristique s'écrit alors :

$$u = e - ri \quad \heartsuit \quad (7.9)$$

Il ressort de cette caractéristique que la source de tension acquiert

FIGURE 7.11 – Source réelle de tension : schéma et modélisation linéaire.



un comportement quasi-idéal à la condition que  $ri \ll e$  : le courant débité par la source doit rester faible. C'est ce que l'on obtient lorsque que l'on branche un voltmètre aux bornes de la source : la résistance interne du voltmètre étant très grande, le courant débité est quasi-nul de sorte que le voltmètre indique la f.é.m de la source. Par ailleurs, lorsque l'on court-circuite la source en reliant ses deux bornes ( $u = 0$ ), on trouve un courant de court-circuit

$$i_{cc} = e/r$$

Du point de vue énergétique, la puissance délivrée par la source de tension vaut  $\mathcal{P} = ui = ei - ri^2$ . Ainsi, la puissance atteint une valeur maximale lorsque  $i = e/2r$ . Une source réelle de tension délivre donc une puissance maximale

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{e^2}{4r}$$

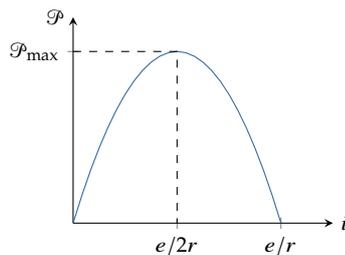
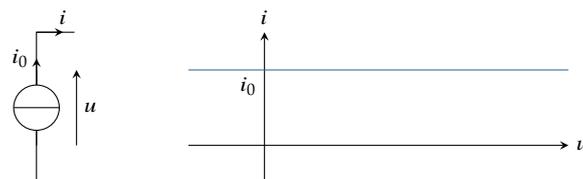


FIGURE 7.12 – Puissance produite en fonction du courant débité.

## Source de courant

Le rôle d'une source de courant est d'imposer un courant constant indépendamment de la tension qui règne à ses bornes. Une source de

FIGURE 7.13 – Source de courant idéale : schéma et caractéristique.



courant idéale aura la caractéristique suivante :

$$i = i_0 \quad \forall u$$

où  $i_0$  désigne le *courant électromoteur* (c.é.m).

Pour tenir compte des pertes par effet Joule d'une source de courant réelle, on la modélise par une source idéale en parallèle avec une *conductance interne*  $g$ . La caractéristique s'écrit alors :

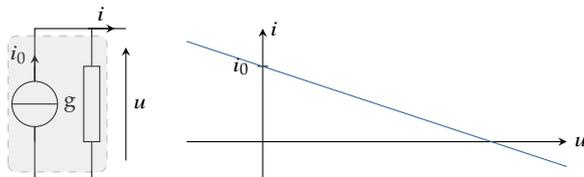


FIGURE 7.14 – Source réelle de courant : schéma et caractéristique.

$$i = i_0 - g u \quad \text{avec} \quad g = \frac{1}{r}$$

où  $g$  est la conductance interne ( $r$  la résistance interne). On notera qu'une source de courant se rapproche d'une source de courant idéale quand sa conductance interne  $g \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ).

La puissance fournie par une source de courant réelle vaut  $\mathcal{P} = ui = ui_0 - gu^2$ . Suivant le dipôle que charge la source de courant, la tension et donc la puissance délivrée varie. La courbe ci-contre montre que lorsque  $u = i_0/2g$  la puissance atteint une valeur maximale

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{i_0^2}{4g}$$

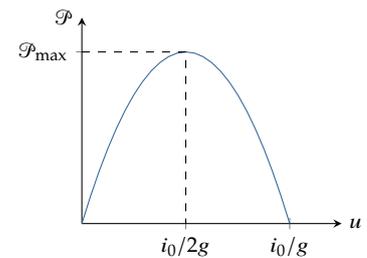


FIGURE 7.15 – Puissance fournie par une source de courant en fonction de la tension à ses bornes.

## Équivalence Thévenin-Norton

Considérons une source de tension réelle dont la modélisation linéaire est donnée par  $u = e - ri$ . Cette caractéristique peut se ré-écrire  $i = e/r - gu$  avec  $g = 1/r$ . En d'autres termes, une source de tension réelle peut s'interpréter comme une source de courant de c.é.m  $i_0 = e/r$  et de conductance  $g = 1/r$ . Ainsi, toute source linéaire présente deux représentations possibles :

- la modélisation de Thévenin correspondant à une source de tension idéale en série avec une résistance;
- la modélisation de Norton correspondant à une source de courant idéale en parallèle avec une conductance.

On passe d'une représentation à une autre en retenant l'équivalence Thévenin-Norton suivante :

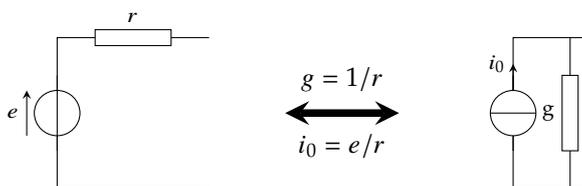


FIGURE 7.16 – Équivalence Thévenin-Norton.

## Récepteur actif

Étudions le cas d'une batterie chimique. On distingue deux comportements : la décharge ou la charge. Lorsque la batterie se décharge, elle est alors source d'énergie et est modélisée par une source de tension de f.é.m  $e$  et de résistance interne  $r$ . On a en convention générateur

$$u = e - ri \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = ei - ri^2 > 0$$

En fonctionnement générateur, la puissance fournie est positive et le sens du courant est dictée par la polarité de la source.

En revanche, lorsque la batterie est en charge, le courant est dans l'autre sens. Dans ce cas, le dipôle reçoit de la puissance : on dit qu'il s'agit d'un récepteur actif et  $e$  est désigné par le terme *force contre-électromotrice* (f.c.é.m). En convention récepteur, on écrira donc

$$u = e + ri$$

et la puissance fournie à la batterie vaut

$$\mathcal{P} = ei + ri^2$$

Une partie de cette puissance ( $ri^2$ ) est dissipée par effet joule et l'autre partie ( $ei$ ) est convertie en énergie chimique. On peut d'ailleurs définir un rendement de conversion

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{\text{convertie}}}{\mathcal{P}_{\text{fournie}}} = \frac{e}{e + ri}$$

Finalement, une batterie est une source de tension qui peut fonctionner, soit en générateur, soit en récepteur, la polarité étant fixée par la borne + de la batterie. On parle alors de *récepteur réversible*. Les accumulateurs, les électrolyseurs ont ce comportement.

Il existe cependant des dipôles actifs dont le comportement est toujours récepteur quel que soit le sens du courant. La polarité de la f.c.é.m est toujours orientée à contre sens du courant. On parle de *récepteur non réversibles* (ou non polarisés). Le moteur à courant continu en est un exemple.

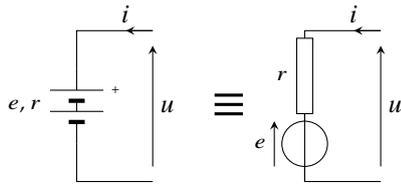


FIGURE 7.17 – Batterie en charge.

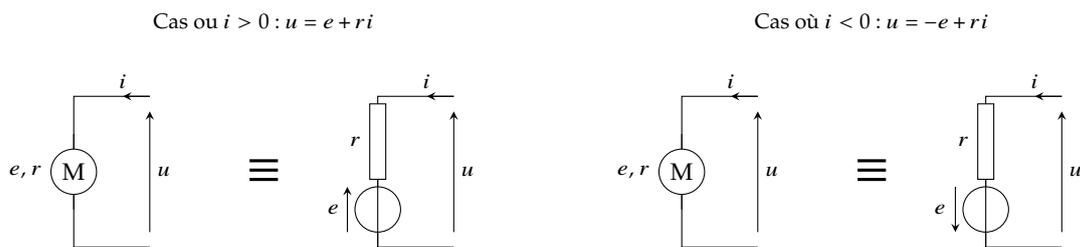


FIGURE 7.18 – Moteur à courant continu

## Loi de Pouillet

Imaginons une maille constituée de dipôles actifs (en représentation de Thévenin) et de résistances. Appelons  $R$  la somme de toutes les résistances (résistances internes incluses). Imposons un sens positif du courant et notons  $i$  l'intensité algébrique du courant qui circule dans la maille. Notons  $e_k$  les f.é.m (orientées dans le sens positif) et  $e'_k$  les f.c.é.m (orientées dans le sens contraire). La loi des mailles permet d'écrire

$$\sum_k e_k - \sum e'_k - Ri = 0$$

Ce qui donne la loi connue sous le nom de loi de Pouillet :

$$i = \frac{\sum_k e_k - \sum e'_k}{R} \quad \heartsuit \quad (7.10)$$

**Exercice** – Une source de tension continue, de f.é.m  $e = 15$  V, charge une batterie de f.c.é.m  $e' = 12$  V. Déterminer le courant de charge  $i$  à l'aide de la loi de Pouillet.

Rép.  $i = 50$  mA

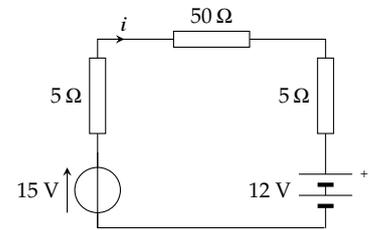


FIGURE 7.19 – Charge d'une batterie.

## Méthodes de résolution

Dans un réseau constitué de  $b$  branches et  $n$  nœuds, il y a  $N = b - n + 1$  courants indépendants. En effet, les  $b$  courants circulant dans les  $b$  branches vérifient  $n - 1$  relations (lois des nœuds). Il nous faut donc  $N$  relations pour déterminer ces inconnues. Ces relations sont obtenues en appliquant la loi des mailles dans  $N$  mailles indépendantes associées aux caractéristiques des dipôles. On obtient alors un système d'équations à résoudre.

### Méthodologie

1. Parcourir toutes les branches du réseau en définissant les courants algébriques et en appliquant le plus possible la loi des nœuds à chaque fois que l'on rencontre un nœud.
2. Compter le nombre  $N$  de courants inconnues puis choisir  $N$  mailles avec un sens de parcours.
3. Écrire  $N$  lois des mailles en utilisant les caractéristiques des dipôles. Notez que si une branche contient une source de courant, l'intensité électrique dans cette branche est alors déterminée, mais la tension aux bornes de la source est alors une inconnue.
4. Résoudre le système d'équations.

Cette méthode présente l'avantage de déterminer toutes les grandeurs électriques et s'applique à tous les réseaux électriques. Son inconvénient majeur étant qu'elle nécessite de résoudre un système de  $N$

équations même si l'on ne cherche qu'une seule grandeur électrique. Le risque d'erreur de calcul peut devenir important.

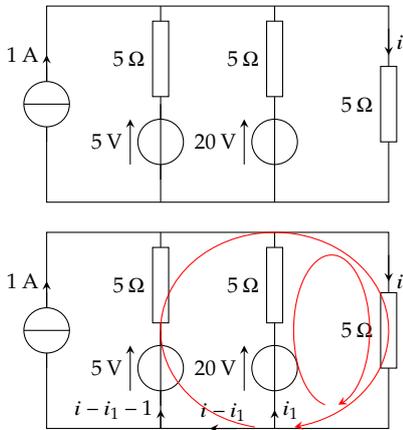


FIGURE 7.20 – Étude d'un circuit.

### Exemple

À l'aide des lois de Kirchhoff, déterminons l'intensité du courant  $i$  dans le circuit ci-contre.

Commençons par définir tous les courants. Appelons  $i_1$  le courant qui traverse le dipôle (20 V, 5 Ω). En parcourant tout le réseau, on s'aperçoit qu'il n'y a que deux courants inconnus :  $i$  et  $i_1$  (notez qu'il y a une source de courant qui impose la valeur de l'intensité du courant dans une branche). Il suffit donc de deux relations pour les déterminer. On choisira les mailles représentées en couleur sur la figure. La loi des mailles donne alors

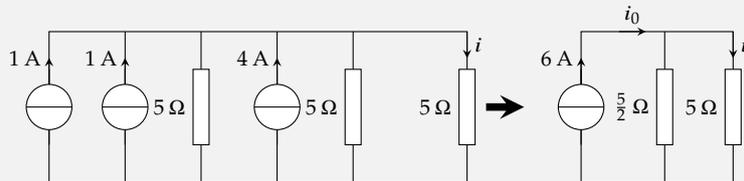
$$\begin{cases} 20 - 5i_1 - 5i = 0 \\ 5 - 5(i - i_1 - 1) - 5i = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 5i_1 + 5i = 20 \\ -5i_1 + 10i = 10 \end{cases}$$

En sommant les deux relations, on trouve  $15i = 30$ , soit  $i = 2$  A.

Pour remédier à ce défaut, on peut utiliser de façon judicieuse l'équivalence électrique entre une source de tension réelle et une source de courant réelle ainsi que l'association des résistances. Cela permet de simplifier une partie d'un réseau électrique, et de diminuer le nombre de mailles, quand le but est de calculer le courant dans une branche particulière.

### Exemple

Reprenons l'exemple précédent en utilisant l'équivalence Thévenin-Norton.



Après plusieurs simplifications, on aboutit à un simple diviseur de courant. La formule du diviseur donne alors

$$i = \frac{1/5}{2/5 + 1/5} \times 6 = 2 \text{ A}$$

## 7.4 Phénomènes capacitifs

### Rappels

On a vu dans le chapitre consacré aux conducteurs qu'un condensateur soumis à une tension électrique constante  $U$  accumule au niveau de ses armatures des charges électriques de signe opposé ( $Q$  et  $-Q$ ) telles que  $Q = CU$ . On admettra que dans le cadre de l'ARQS un condensateur

idéal répond à cette loi. On a donc en convention récepteur

$$q(t) = C u(t) \implies i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad [\text{Convention récepteur}] \quad \heartsuit \quad (7.11)$$

où  $C$  se mesure en farad (symbole : F). La relation étant linéaire, le condensateur est un dipôle linéaire.

Un condensateur réel s'écarte un peu de l'idéalité pour deux raisons essentielles.

1. La tension est en général limitée. En effet, il existe un champ électrique qu'il ne faut pas dépasser au risque de détruire le diélectrique placée entre les armatures du condensateur (existence d'un champ disruptif).
2. Il existe un courant de fuite à travers le diélectrique du fait de la conductivité finie de ce dernier. Par exemple, lorsqu'un condensateur chargé est abandonné en circuit ouvert, on constate que sa charge diminue au cours du temps. Pour modéliser cette fuite, on introduit la notion de **résistance de fuite**  $R_f$ . Son ordre de grandeur varie entre le  $M\Omega$  et la centaine de  $M\Omega$ .

**Énergie emmagasinée dans un condensateur** – On rappelle qu'un condensateur idéal stocke une énergie électrique

$$W_E = \frac{1}{2} q u = \frac{1}{2} C u^2$$

Le condensateur chargé agit comme un réservoir d'énergie qu'il peut fournir au reste du circuit. La puissance que reçoit un condensateur idéal s'écrit

$$\mathcal{P} = u i = C u \frac{du}{dt} = \frac{dW_E}{dt}$$

Lorsque l'énergie stockée décroît,  $\mathcal{P} < 0$  : le condensateur se décharge en fournissant de l'énergie au reste du circuit, agissant ainsi comme un générateur.

## Association de condensateurs

**Association en parallèle** – Soient deux condensateurs de capacité  $C_1$  et  $C_2$  montés en parallèle. On suppose que ces condensateurs sont

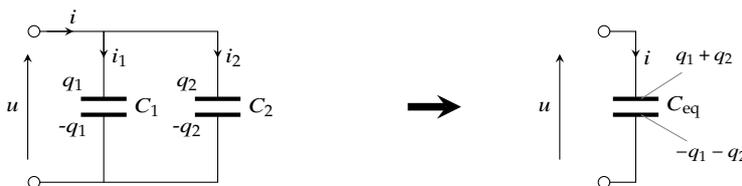


FIGURE 7.22 – Deux condensateurs associés en parallèle.

suffisamment éloignés pour pouvoir négliger toute influence mutuelle (ce qui est fréquemment réalisé). Exprimons l'énergie emmagasinée :

$$W_E = \frac{1}{2} C_1 u^2 + \frac{1}{2} C_2 u^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) u^2$$

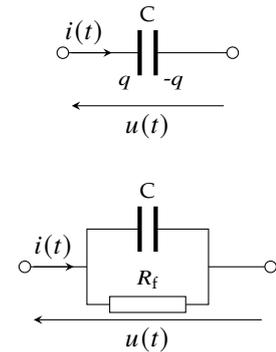


FIGURE 7.21 – Condensateurs idéal et réel.

Par conséquent, l'ensemble est équivalent à un condensateur de capacité  $C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$  soumis à la tension commune  $u$ . Cette propriété se généralise aisément :  $N$  condensateurs montés en parallèle et sans influence mutuelle équivalent à un condensateur de capacité :

$$C_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^N C_i \quad \heartsuit \quad (7.12)$$

**Association en série** – Considérons deux condensateurs de capacité  $C_1$  et  $C_2$  montés en série. Appelons  $i$  l'intensité du courant qui les

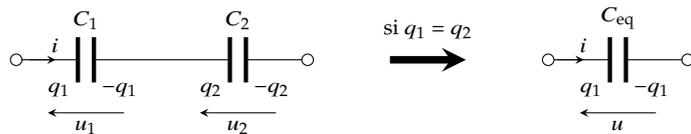


FIGURE 7.23 – Deux condensateurs associés en série.

traverse. La conservation de la charge implique que

$$i = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} \implies q_2 - q_1 = C^{\text{te}}$$

la quantité de charge  $q_2 - q_1$  représente la charge répartie sur la liaison conductrice entre les deux condensateurs. Supposons la liaison initialement neutre :  $q_1 = q_2 = q$ . Dans ce cas, l'ensemble est équivalent à un condensateur portant une charge  $q$  et une capacité  $C_{\text{eq}}$ . En effet, l'énergie de l'association s'écrit

$$W_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_2} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_{\text{eq}}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

On peut étendre cette démonstration à un nombre quelconque de condensateurs. Ainsi,  $N$  condensateurs associés en série, sans influence mutuelle et tels que les liaisons inter-armatures soient neutres, se comportent comme un condensateur de capacité

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad \heartsuit \quad (7.13)$$

## Décharge d'un condensateur

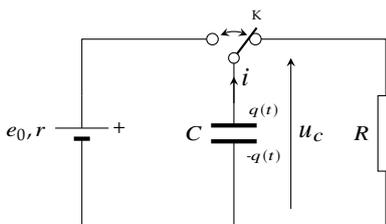


FIGURE 7.24 – Montage RC

Considérons un circuit constitué d'une source réelle de f.é.m  $e_0$ , d'un condensateur de capacité  $C$ , d'un conducteur ohmique de résistance  $R$  et d'un inverseur  $K$ . On commence par charger le condensateur en basculant  $K$  de manière à mettre en contact la source de tension et le condensateur. Le condensateur se trouve alors chargé et stocke ainsi la quantité de charge

$$q_0 = C e_0$$

À  $t = 0$ , on bascule  $K$ . Le condensateur se décharge alors dans la résistance : c'est le régime libre du dipôle RC. Cherchons l'évolution de la tension capacitive  $u_c(t)$  ainsi que le courant de décharge  $i(t)$ .

La loi des mailles donne

$$u_c(t) - Ri(t) = 0 \quad \text{avec} \quad i(t) = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{du_c}{dt}$$

La tension  $u_c$  vérifie donc l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

On voit immédiatement, par l'analyse dimensionnelle de l'équation différentielle, que  $\tau$  représente une durée. Les solutions sont de la forme  $u_c(t) = Ae^{-t/\tau}$ . On détermine  $A$  grâce à la condition initiale  $u_c(0) = e_0$ , ce qui donne  $A = e_0$ . Finalement, la tension  $u_c$  évolue au cours du temps suivant la loi

$$u_c(t) = e_0 e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad i(t) = -C \frac{du_c}{dt} = \frac{e_0}{R} e^{-t/\tau}$$

La tension capacitive décroît exponentiellement jusqu'à s'annuler au bout d'un certain temps. Le temps caractéristique de cette décharge peut s'obtenir en prenant l'intersection de la tangente à l'origine avec la valeur finale  $u_c = 0$ . Il est facile de montrer que cette intersection a lieu lorsque  $t = \tau$ . La durée  $\tau = RC$  donne ainsi un ordre de grandeur de la durée de la décharge. **On retiendra qu'au bout de  $5\tau$  la décharge peut être considérée terminée.** On voit donc qu'une grande résistance ralentit le temps de décharge du condensateur. Le courant de décharge,

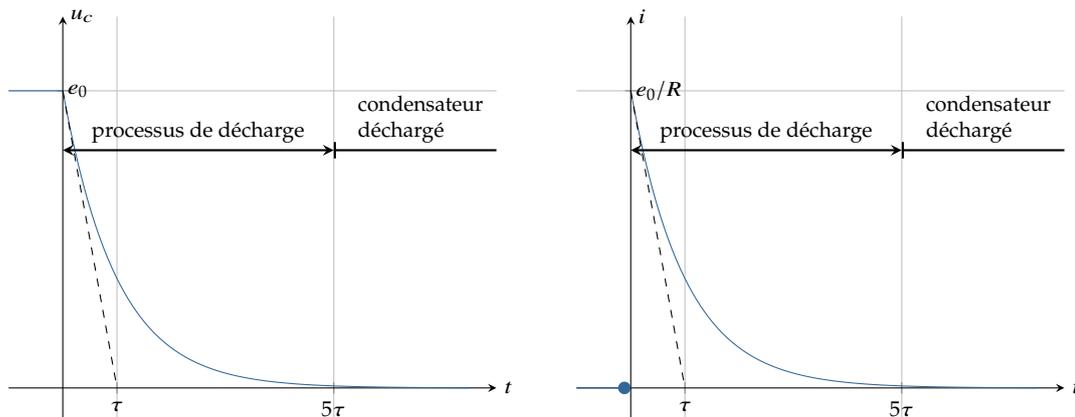


FIGURE 7.25 – Évolution de la tension capacitive et du courant de décharge.

quant à lui, n'est pas constant lors de ce processus. Il est maximum à  $t = 0^+$  et vaut  $e_0/R$ . Notez que le courant n'est pas une fonction continue puisqu'il subit une discontinuité entre  $t = 0^-$  et  $t = 0^+$ . En effet, lorsque l'on bascule l'interrupteur  $K$  sur la branche contenant la résistance, on met brutalement la résistance sous tension ( $e_0$ ) ce qui impose un courant initial  $e_0/R$ .

**Bilan d'énergie.** – D'un point de vue énergétique, l'énergie stockée sous forme électrique  $W_E = \frac{1}{2}Cu_c^2$  décroît avec un temps de relaxation  $\tau_E = 2\tau$ . L'énergie initialement emmagasinée par le condensateur est complètement dissipée par effet Joule. En effet, on pourra vérifier que

$$\int_0^{\infty} Ri^2(t) dt = \frac{1}{2}Ce_0^2$$

**Remarque :** l'énergie dissipée ne dépend pas de la résistance. C'est la durée de la dissipation qui en dépend.

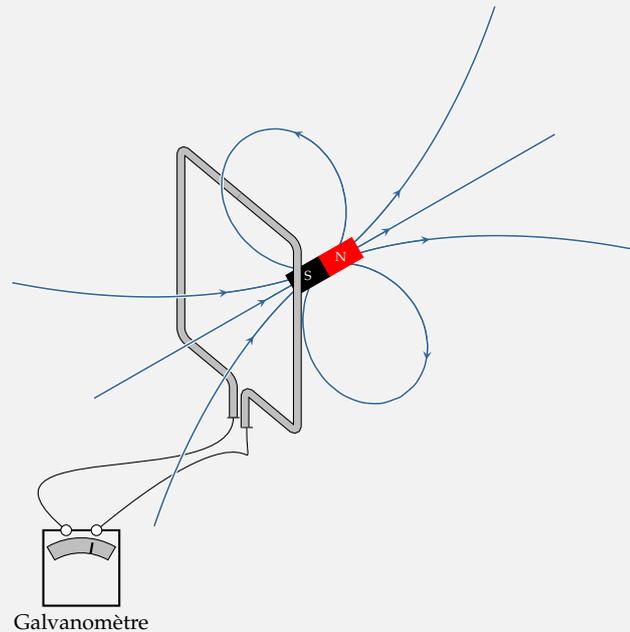
## 7.5 Phénomène d'auto-induction

### Introduction à l'induction magnétique

Le phénomène d'induction électromagnétique, découvert par Faraday en 1831, a une grande portée industrielle puisqu'il permet de convertir une énergie mécanique en une énergie électrique et vice-versa. Décrivons le principe à l'aide de l'expérience suivante.

#### Expérience

Mettons en mouvement un aimant au voisinage d'un cadre conducteur reliée à un galvanomètre (détecteur de courant).



On observe l'existence d'un courant induit par le mouvement de l'aimant. Plus précisément, on constate que l'intensité du courant dépend de la façon dont on déplace l'aimant.

- Si l'on approche l'aimant de façon à ce que le champ magnétique augmente au voisinage de la spire, le courant électrique qui apparaît circule dans un sens tel qu'il produit un champ opposé au champ magnétique imposé par l'aimant.
- à l'inverse, quand l'aimant s'éloigne de façon à ce que le champ magnétique diminue, le courant électrique induit circule de façon à renforcer le champ magnétique imposé.
- le sens du courant dépend du sens de l'aimant et du mouvement mais dans tous les cas, le courant induit crée un champ magnétique qui s'oppose à la variation du champ magnétique imposé par le mouvement de l'aimant.

- Ce phénomène est amplifié par la vitesse du mouvement et par la puissance de l'aimant.

Répétons la même expérience en remplaçant l'ampèremètre par un volt-mètre. Dans ce cas, on note que le mouvement de l'aimant induit également une tension d'autant plus importante que le mouvement de l'aimant est rapide. La polarité de la tension induite dépend du sens de l'orientation de l'aimant.

La première expérience montre que la spire se comporte comme un aimant dont l'action sur l'aimant consiste à le freiner dans son mouvement. On en tire la loi de modération suivante :

### Loi de Lenz

Dans un circuit fermé, la variation de flux magnétique produit un courant induit dont les effets s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

Dans la deuxième expérience, le circuit ouvert n'est plus le siège d'un courant mais voit apparaître à ses bornes, une tension électrique. Le circuit se comporte alors comme une source de tension de f.é.m  $e$ , dite **force électromotrice induite**. Quantitativement, on montre que

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt} \quad \heartsuit \quad (7.14)$$

Cette loi, dite **loi de Faraday**, fait intervenir le flux magnétique  $\phi_B$  à travers le circuit. Rappelons que

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS \quad [\text{Wb}]$$

Sa valeur, exprimée en weber (Wb), dépend de la forme du circuit et du champ magnétique mais en aucune manière il ne dépend du choix de la surface  $S$  s'appuyant sur le circuit. Comme d'habitude,  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire localement normal à la surface  $S$  et dont le sens est lié au sens positif du circuit *via* la règle du tire-bouchon.

## Auto-induction

On parle d'auto-induction quand la source de champ magnétique à l'origine du phénomène d'induction dans un circuit est produit par le circuit même.

Considérons une bobine, c'est-à-dire un enroulement de fil électrique. Lorsque cette bobine est traversée par un courant électrique, celui-ci produit un champ magnétique ainsi qu'un flux magnétique  $\phi_B$ , dit *flux propre*, à travers la bobine. Étant donné que le champ magnétique créé est proportionnel à l'intensité  $i$  du courant (d'après la loi de Biot et Savart), on peut écrire

$$\phi_B = Li$$

34. On dit aussi inductance propre

où  $L$  désigne le *coefficient d'auto-inductance*<sup>34</sup>. La grandeur  $L$  s'exprime en henry (symbole : H) en hommage à Joseph Henry\*. Lorsque le courant varie au cours du temps, la bobine se comporte comme une source de f.é.m  $e = -L \frac{di}{dt}$  en convention générateur. Ainsi, la caractéristique d'une bobine idéale s'écrit, en convention récepteur :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \quad [\text{convention récepteur}] \quad \heartsuit \quad (7.15)$$

En régime continu, le courant étant permanent,  $u_L = 0$ . Autrement-dit, la bobine peut être remplacée par un fil conducteur parfait. Dans la pratique, le fil formant la bobine est résistive. C'est pourquoi, on modélise une bobine réelle en ajoutant en série une résistance (quelques ohms). À moyenne et haute fréquence, une modélisation plus fidèle exige la présence d'un condensateur en parallèle.

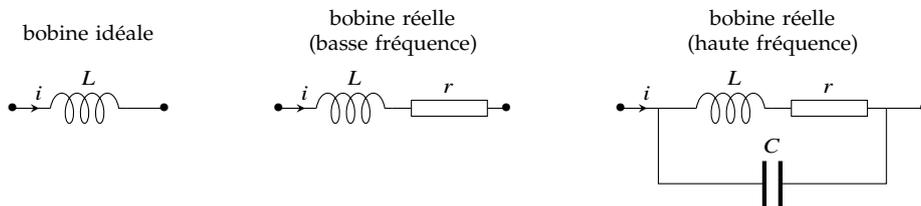


FIGURE 7.26 – Modélisations d'une bobine.

## Énergie emmagasinée dans une bobine

La puissance électrique que reçoit une bobine parcourue par un courant électrique s'écrit

$$\mathcal{P} = ui = iL \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Par définition, l'énergie stockée par une bobine idéale  $W_B$  est l'énergie qu'elle est susceptible de libérer lorsque l'on coupe son alimentation ( $i = 0$ ).

$$W_B = - \int \mathcal{P} dt = - \int_{i'=i}^0 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li'^2 \right) dt = \frac{1}{2} Li^2$$

Cette énergie ne dépend pas de la façon dont on coupe l'alimentation. Ainsi, on dira qu'une bobine idéale alimentée par un courant électrique emmagasine une énergie sous forme magnétique qui vaut

$$W_B = \frac{1}{2} Li^2 \quad \heartsuit \quad (7.16)$$

\*. **Joseph Henry (1797 - 1878)** : physicien américain. En 1830, Henry découvre qu'un courant peut être induit dans un conducteur par déplacement d'un champ magnétique; découverte qu'il ne publiera pas. Dès 1831, il démontre la possibilité de transmettre des messages à distance en utilisant simplement une source de courant, un interrupteur et un électro-aimant, mais il ne breveta pas son invention. Henry sera « doublé » par Michael Faraday qui découvrira seul le phénomène d'induction magnétique et par Samuel Morse qui appliquera cette découverte à la transmission d'information. On lui attribue malgré tout, la découverte de l'auto-induction.

### Circuit R-L

Considérons un circuit constitué d'une source réelle de tension de f.é.m  $e_0$  en série avec une résistance  $r_0$  (si la source présente une résistance interne alors celle-ci est incluse dans  $r_0$ ) qui, dans un premier temps alimente une bobine idéale. Au bout d'un certain temps, un courant permanent s'établit. Dès lors, la bobine se comportant comme un fil, on voit immédiatement que le courant s'établit à la valeur  $i_0 = e_0/r_0$ .

À l'instant  $t = 0$ , on bascule un interrupteur K de sorte que la bobine se trouve en contact avec une résistance de charge  $R$  (si la bobine présente une résistance interne  $r$ , il suffit de remplacer dans les calculs qui suivent  $R$  par  $R + r$ ). On oriente le courant dans le sens qui correspond au sens réel du courant  $i_0$ .

Cherchons l'évolution du courant et de la tension inductive  $u_L(t)$  à partir de  $t = 0$ . La loi des mailles implique

$$u_L(t) + Ri(t) = 0 \quad \text{avec} \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

ce qui donne, en posant  $\tau = L/R$ ,

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \quad \text{pour } t > 0$$

Les solutions de cette équation différentielle du premier ordre sont de la forme  $i = Ae^{-t/\tau}$ . Pour déterminer la constante d'intégration  $A$  il faut connaître la valeur de  $i$  lorsque  $t \rightarrow 0^+$ . Or, **la bobine impose la continuité du courant**. En effet, étant donné qu'il est impossible de fournir une puissance électrique infinie, l'énergie stockée par une bobine ne peut présenter de discontinuité. En conséquence  $1/2Li^2$  varie continûment. On a donc  $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = e_0/r_0$ . Finalement on obtient

$$i(t) = \frac{e_0}{r_0} e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{Re_0}{r_0} e^{-t/\tau}$$

La tension inductive est négative et croît jusqu'à s'annuler au bout d'une durée d'environ  $5L/R$ . Le courant décroît également jusqu'à s'annuler avec le même temps de relaxation. La mesure du temps de relaxation du dipôle RL peut permettre de mesurer la résistance interne d'une bobine réelle par exemple. D'un point de vue énergétique,

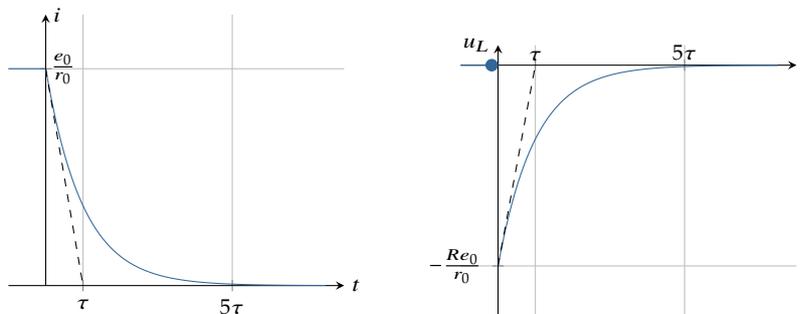


FIGURE 7.28 – Évolution de la tension inductive et du courant.

l'énergie magnétique  $W_M = \frac{1}{2}Li^2$  décroît avec un temps de relaxation

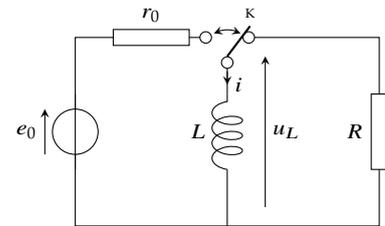


FIGURE 7.27 – Montage R-L.

$\tau_E = 2\tau$ . Là aussi, l'énergie stockée est complètement dissipée par effet Joule. En effet, on pourra vérifier que

$$\int_0^{\infty} Ri^2(t) dt = \frac{1}{2} Li_0^2$$

# RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

# 8

On étudie dans ce cours les circuits électriques linéaires en régime sinusoïdal forcé. Dans ce cas, il est intéressant d'introduire le concept d'impédance complexe. Les lois de l'électricité se transforment alors en équations algébriques simples à résoudre.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/regime-sinusoidal.php>

## 8.1 Signaux périodiques

### Généralités sur les signaux périodiques

Un signal temporel  $y(t)$  constitué par un motif de durée  $T$  qui se répète à l'identique, est dit périodique, et  $T$  représente la **période** du signal. Mathématiquement, le signal vérifie

$$y(t+T) = y(t) \quad \forall t$$

Il est facile de voir que si  $T$  est une période, alors  $2T$  l'est également. C'est pourquoi, par convention, la période est la plus petite valeur possible de  $T$  telle  $y(t+T) = y(t)$  pour tout  $t$ .

Le nombre  $\nu$  de périodes dans une seconde s'appelle la **fréquence** et s'exprime en hertz (Hz), en hommage à Hertz<sup>36</sup> :

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \heartsuit \quad (8.1)$$

Les appareils de mesure électrique (voltmètre, ampèremètre, oscilloscope, etc.) permettent d'accéder à différentes grandeurs.

- La valeur continue représente la grandeur moyenne du signal :

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

- La valeur crête-à-crête correspond à l'écart entre la valeur maximum et la valeur minimum :

$$y_{pp} = \max(y) - \min(y)$$

- La valeur efficace ou valeur RMS<sup>37</sup> représente la racine de la moyenne du carré du signal :

$$y_{rms} = \sqrt{y^2}$$

8.1 Signaux périodiques . . . .	89
Généralités . . . . .	89
Le signal sinusoïdal . . . . .	90
Représentations d'un sinus . . . . .	91
Régime forcé . . . . .	92
8.2 Impédance et admittance . . . . .	94
Définitions . . . . .	94
Exemples . . . . .	94
Lois d'association . . . . .	95
Méthodes de résolution . . . . .	96
8.3 Puissance en régime forcé . . . . .	97
Puissance active . . . . .	97
Facteur de puissance . . . . .	97

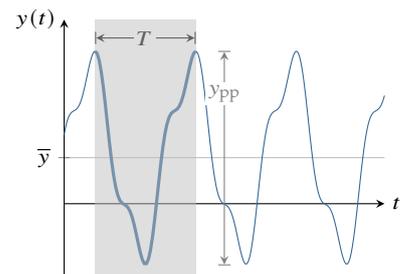


FIGURE 8.1 – Caractéristiques d'un signal périodique.

36. **Heinrich Hertz (1857-1894)** : physicien théoricien, il réussit la première émission et réception d'ondes radio en 1887, sur une distance de 20 mètres donnant du même coup une preuve de la validité de la théorie électromagnétique de Maxwell. Dans les milieux scientifiques, il est considéré comme le découvreur de la radio. C'est la raison pour laquelle on a donné le nom d'« ondes hertziennes » aux signaux radio et pourquoi l'unité de la fréquence vibratoire –appelée « cycle » au départ– a été remplacée par « hertz ».

37. Acronyme anglais pour *Root Mean Square*

38. sous certaines conditions mathématiques peu restrictives en électricité

Dans la suite, on se limite aux signaux sinusoïdaux. En effet, le théorème de Fourier stipule<sup>38</sup> qu'un signal périodique de fréquence  $\nu$  se décompose, en sinus et cosinus de fréquences multiples de la fréquence  $\nu$  :

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k\nu t) + b_k \sin(2\pi k\nu t)$$

où  $a_0$  représente la valeur moyenne (sa composante continue) et  $a_k \cos(2\pi k\nu t) + b_k \sin(2\pi k\nu t)$  la  $k^{\text{e}}$  harmonique. Si l'on connaît tous les coefficients  $a_k$  et  $b_k$ , appelés coefficients de Fourier, on peut reconstruire complètement le signal périodique. Or, puisque l'on étudie des réseaux linéaires, si l'on connaît leur comportement vis à vis d'un signal sinusoïdal quelconque, on est capable de connaître, par combinaison linéaire, la réponse vis à vis de n'importe quelle signal périodique, ce qui justifie l'étude de la réponse en régime sinusoïdal.

## Le signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal  $y(t)$  s'exprime par

$$y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$A$  désigne l'**amplitude**,  $\phi$  la **phase** (en radian) et  $\omega$  la **pulsation** (en rad/s). Le signal est bien périodique puisque l'équation

$$\cos(\omega t + \phi + \omega T) = \cos(\omega t + \phi) \quad \forall t$$

admet comme solution

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \implies \nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \heartsuit \quad (8.2)$$

Par ailleurs, on voit sur le graphe qu'un signal sinusoïdal ne présente pas de composante continue ( $\bar{y} = 0$ ). La valeur crête-à-crête donne immédiatement l'amplitude car  $y_{pp} = 2A$ . Enfin, on peut calculer la valeur efficace à partir de la définition. Pour tout signal sinusoïdal on trouve

$$y_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad \heartsuit \quad (8.3)$$

**Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux** – La phase est une grandeur qui dépend du choix de l'origine des temps ; autrement dit, la phase est arbitraire. En revanche, le **déphasage** entre deux signaux sinusoïdaux caractérise le décalage entre les deux courbes sinusoïdales et ne dépend pas du choix de l'origine des temps. Considérons par exemple deux signaux sinusoïdaux :

$$y_1 = A \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad y_2 = B \cos(\omega t + \phi)$$

Les phases respectives de  $y_1$  et  $y_2$  sont  $\phi_1 = 0$  et  $\phi_2 = \phi$ .

Le déphasage de  $y_2$  par rapport à  $y_1$  vaut  $\phi_2 - \phi_1 = \phi$ . Si  $\phi > 0$  on dit que  $y_2$  est en avance sur  $y_1$ , sinon  $y_2$  est en retard sur  $y_1$ . Pour mesurer  $\phi$  il suffit de déterminer le décalage entre deux sommets par exemple.

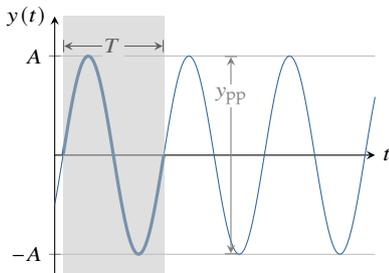


FIGURE 8.2 – Signal sinusoïdal.

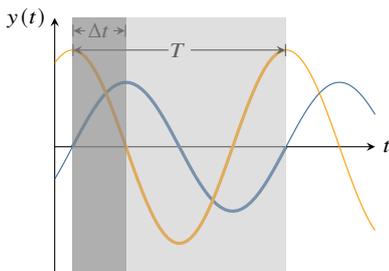


FIGURE 8.3 – Déphasage.

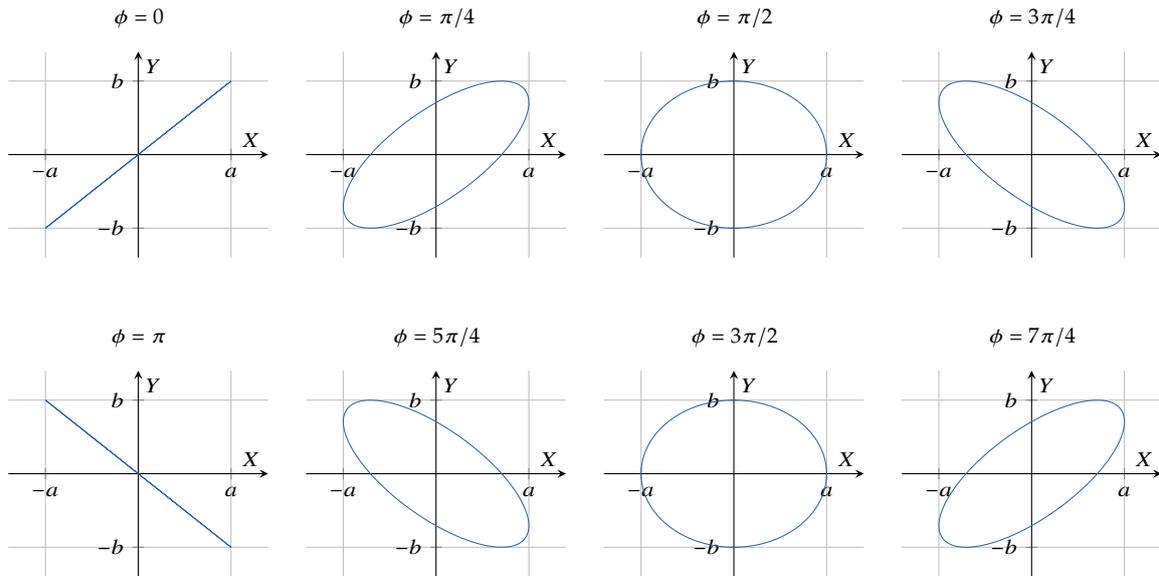


FIGURE 8.4 – Deux signaux sinusoïdaux déphasés de  $\phi$  en mode XY.

En effet, d'après l'expression de  $y_1$  on voit que le signal atteint son maximum en  $t = 0$ , alors que  $y_2$  atteint son maximum en  $t = -\frac{\phi}{\omega}$ . Ainsi si  $\phi > 0$ , le signal  $y_2$  est décalé vers la gauche et atteint son maximum avant le signal  $y_1$  : il est donc en avance. La relation entre le déphasage et le décalage temporel est donné par

$$\phi = \frac{2\pi}{T} \times \Delta t$$

**Visualisation en mode XY** – Lorsque l'on injecte un signal sinusoïdal sur la voie X d'un oscilloscope et un autre sur la voie Y, puis que l'on commute l'oscilloscope en mode XY, on obtient une courbe paramétrique d'équation

$$\begin{cases} X(t) = a \cos(\omega t) \\ Y(t) = b \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Il s'agit de l'équation paramétrique d'une ellipse circonscrite dans un rectangle  $2a \times 2b$  et dont l'excentricité  $e$  varie avec  $\phi$  (Figure 8.4). Cette représentation permet de repérer aisément la situation où les deux signaux sont en phase ( $\phi = 0$ ) ou en opposition de phase ( $\phi = \pi$ ).

**Exercice** – Un générateur délivre une tension sinusoïdale  $u_1(t)$  de fréquence 100 Hz de valeur efficace 5,0 V. Un autre générateur délivre une tension sinusoïdale de même fréquence, de tension crête-à-crête 4,8 V et en avance de  $90^\circ$  sur  $u_1(t)$ . En considérant que la phase à l'origine de  $u_1(t)$  est nulle, donner les expressions mathématiques des deux tensions.

Rép.  $u_1(t) = 7,1 \cos(200\pi t)$  et  $u_2(t) = 2,4 \cos(200\pi t + \pi/2)$

## Représentations d'un signal sinusoïdal

**Représentation de Fresnel** – Considérons un signal sinusoïdal  $y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ . On peut représenter cette grandeur sous la forme d'un vecteur dit *phaseur* ou *vecteur de Fresnel*. Il s'agit d'un vecteur faisant

un angle  $\omega t + \phi$  avec l'axe des abscisses et une longueur  $A$ . L'intérêt de cette représentation réside dans le fait que la somme de deux signaux sinusoidaux s'obtient en sommant vectoriellement les vecteurs de Fresnel. Le déphasage entre deux signaux correspond alors à l'angle entre les vecteurs de Fresnel.

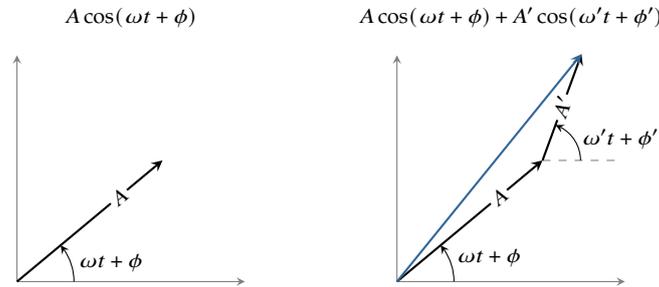


FIGURE 8.5 – Représentation de Fresnel d'un signal sinusoidal et d'une somme de deux signaux sinusoidaux.

En électricité on convient de remplacer le nombre complexe  $i$  par  $j$  pour éviter toute confusion avec l'intensité électrique.

**Représentation complexe** – Il existe une autre représentation très utile : on peut considérer que  $y(t)$  est la partie réelle d'un nombre complexe :

$$y(t) = \text{Re}(\underline{y}(t)) \quad \text{avec} \quad \underline{y}(t) = A e^{j(\omega t + \phi)} \quad \text{et} \quad j^2 = -1$$

On dira alors que  $\underline{y}(t)$  est le **nombre complexe associé au signal sinusoidal**. On peut l'écrire sous la forme

$$\underline{y}(t) = \underline{A} e^{j(\omega t)} \quad \text{avec} \quad \underline{A} = A e^{j\phi} \quad \heartsuit \quad (8.4)$$

Le nombre complexe  $\underline{A}$  est appelé **amplitude complexe**. Lorsque l'on connaît l'amplitude complexe d'un signal on peut en déduire l'amplitude du signal réel ainsi que la phase *via* les relations

$$A = |\underline{A}| \quad \text{et} \quad \phi = \arg(\underline{A})$$

Pour deux signaux sinusoidaux  $y_1$  et  $y_2$  d'amplitude complexe  $\underline{A}_1$  et  $\underline{A}_2$ , le **déphasage de  $y_2$  par rapport à  $y_1$**  vaut :

$$\phi = \arg(\underline{A}_2) - \arg(\underline{A}_1) = \arg\left(\frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1}\right)$$

L'intérêt de la notation complexe réside dans la simplification des calculs différentiels. Par exemple dériver un sinus revient à multiplier par  $j\omega$  le nombre complexe :

$$\frac{dy(t)}{dt} \rightarrow j\omega \underline{y}$$

### Établissement du régime sinusoidal forcé

Pour illustrer ce que représente le régime sinusoidal forcé, prenons l'exemple d'un circuit RLC série alimenté par un générateur basse fréquence (GBF) délivrant une tension sinusoidale de pulsation  $\omega$ . Ce signal d'excitation s'écrit  $e(t) = E \cos \omega t$ .

Observons l'évolution du signal d'excitation sur la voie 1 d'un oscilloscope (CH1) et la tension capacitive sur la voie 2 (CH2).

La loi des mailles donne

$$e(t) - Ri(t) - L \frac{di}{dt} - u_C(t) = 0 \quad \text{avec} \quad i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

ce qui donne, après avoir posé  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ ,

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E \cos(\omega t) \quad \text{pour} \quad t > 0$$

Du point de vue mathématique, la solution se compose de deux termes.

- Le premier terme correspond à la solution de l'équation homogène et représente le régime libre d'un oscillateur. Ce régime est transitoire puisqu'il se dissipe au bout d'un certain temps.
- Le second est une solution particulière de la forme  $A \cos(\omega t + \phi)$ . Il représente le régime *sinusoïdal forcé*. Ce régime ne se dissipe pas contrairement au régime transitoire ; il est entretenu par la source.

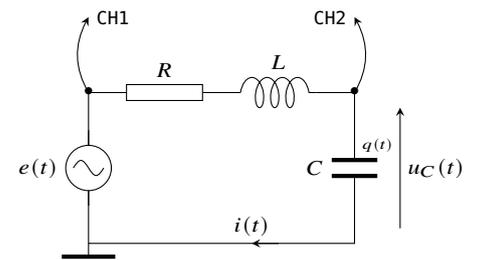
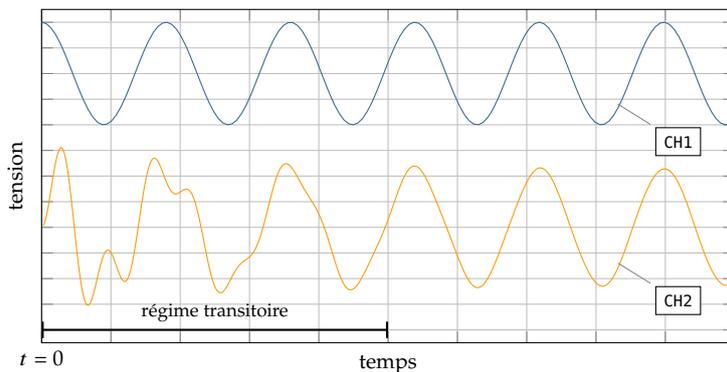


FIGURE 8.6 – Montage RLC.

FIGURE 8.7 – Établissement du régime sinusoïdal (paramètres :  $\omega = 0,35 \omega_0$  et  $Q = 10$ ).

La Figure 8.7 montre l'établissement du régime forcé, c'est-à-dire la disparition du régime transitoire au détriment d'un régime sinusoïdal permanent de même fréquence que l'excitation. On note la présence du régime transitoire par l'apparition d'interférences entre deux signaux non synchrones (de fréquences différentes). En effet, avec un grand facteur de qualité, le régime transitoire fait apparaître des oscillations faiblement amorties de fréquence voisine de la fréquence propre qui se superpose au régime sinusoïdal forcé.

### Régime sinusoïdal forcé

Lorsque le régime transitoire s'est dissipé, toutes les grandeurs électriques oscillent de façon sinusoïdale à la même fréquence que l'excitateur (fréquence imposée par le G.B.F.). On s'intéresse aux propriétés électriques des circuits une fois ce régime sinusoïdal installé.

## 8.2 Notion d'impédance et d'admittance

### Définitions

Supposons un réseau linéaire constitué de sources sinusoïdales de même fréquence  $\nu$ . Une fois le régime transitoire dissipée, un régime sinusoïdal de fréquence  $\nu$  s'installe dans toutes les branches du réseau.

On adopte la représentation complexe : notons  $\underline{U}$  l'amplitude complexe associée à la tension et  $\underline{I}$  l'amplitude complexe associée à l'intensité. Par définition, l'impédance d'un dipôle passif linéaire s'écrit

$$\underline{Z} \triangleq \frac{u(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{U}{\underline{I}} = R + jX \quad \heartsuit \quad (8.5)$$

où  $R$  désigne la résistance et  $X$  la réactance.  $Z$  se mesure en ohm ( $\Omega$ ). Notez que la notion d'impédance n'a de sens que pour un dipôle passif linéaire en régime sinusoïdal. On définit également l'admittance du dipôle, qui vaut

$$\underline{Y} \triangleq \frac{1}{\underline{Z}} = G + jS$$

où  $G$  désigne la conductance et  $S$  la susceptance.  $Y$  se mesure en siemens (S ou  $\Omega^{-1}$ ).

On peut déterminer l'impédance d'un dipôle passif linéaire en le soumettant à une tension sinusoïdale puis en effectuant les mesures de la tension efficace, de l'intensité efficace ainsi que du déphasage entre le courant et la tension électrique. En effet, d'après la définition de l'impédance, on a

$$|\underline{Z}| = \frac{U_{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}} \quad \text{et} \quad \arg(\underline{Z}) = \phi_u - \phi_i \quad \heartsuit \quad (8.6)$$

### Exemples

On retiendra les impédances des trois dipôles passifs linéaires suivants :

Conducteur ohmique	Bobine	Condensateur
$u(t) = R i(t)$	$u(t) = L \frac{di}{dt}(t)$	$i(t) = C \frac{du}{dt}(t)$
$\underline{u} = R \underline{i}$	$\underline{u} = jL\omega \underline{i}$	$\underline{i} = jC\omega \underline{u}$
$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_L = jL\omega$	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

On remarque que le conducteur ohmique n'introduit pas de déphasage entre la tension et le courant puisque l'impédance d'une résistance est réelle et se confond avec sa résistance. En revanche la bobine et le condensateur introduisent un déphasage de  $\pi/2$  : on dit que courant et tension évoluent en *quadrature de phase*. Dans le cas de la bobine

idéale, c'est la tension inductive qui est en avance de  $\pi/2$  par rapport au courant alors qu'aux bornes d'un condensateur idéal, la tension capacitive est en retard de  $\pi/2$ .

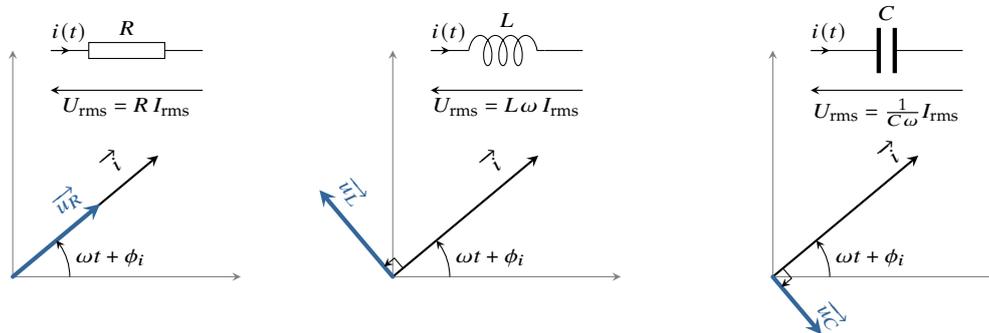


FIGURE 8.8 – Impédances : représentations de Fresnel.

## Lois d'association

En régime sinusoïdal forcé, à chaque grandeur électrique (courant, tension) correspond une grandeur complexe associée. L'écriture de la loi des mailles et celle des nœuds aboutit à des équations algébriques dans  $\mathbb{C}$ . En conséquence, les formules d'association des résistances s'étendent aux impédances complexes :

$$\text{en série, } \underline{Z}_{\text{eq}} = \sum_i \underline{Z}_i \quad \text{et en parallèle, } \underline{Y}_{\text{eq}} = \sum_i \underline{Y}_i \quad \heartsuit \quad (8.7)$$

### Exemple – la bobine réelle

On alimente une bobine réelle à l'aide d'une source de tension sinusoïdale  $u(t) = E \cos(\omega t)$ . Cherchons comment s'exprime l'intensité du courant électrique en régime forcé. On note  $r$  la résistance interne de la bobine et  $L$  sa self-inductance.

Tout d'abord, la bobine réelle se modélise par une résistance  $r$  en série avec une bobine idéale de self inductance  $L$ . Son impédance s'écrit donc

$$\underline{Z} = r + jL\omega$$

La définition de l'impédance permet d'obtenir l'intensité du courant en notation complexe :

$$\underline{i} = \frac{u}{\underline{Z}} = \frac{E e^{j\omega t}}{r + jL\omega}$$

soit

$$\underline{i} = \frac{E}{r^2 + (L\omega)^2} (r - jL\omega) e^{j\omega t}$$

On obtient l'intensité en prenant la partie réelle de  $\underline{i}$ . Sachant que  $j = e^{j\pi/2}$ , on a

$$i(t) = \frac{E}{r^2 + (L\omega)^2} [r \cos(\omega t) + L\omega \sin(\omega t)]$$

## Méthodes de résolution d'un réseau linéaire en régime sinusoïdal forcé

Dans un réseau linéaire en régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs sont sinusoïdales. On peut remplacer chaque dipôle passif par son impédance et les sources par les grandeurs complexes associées. Les équations de Kirchhoff (loi des noeuds + loi des mailles) exprimées à l'aide des grandeurs complexes associées, donnent alors des équations algébriques :

$$\sum_k \epsilon_k \underline{u}_k = 0 \quad \text{loi des mailles} \quad \text{et} \quad \sum_k \epsilon_k \underline{i}_k = 0 \quad \text{loi des noeuds}$$

Les problèmes sont donc identiques à ceux rencontrés en régime continu, à ceci près que les grandeurs recherchées sont des nombres complexes, caractérisées par une amplitude (le module) et une phase (l'argument).

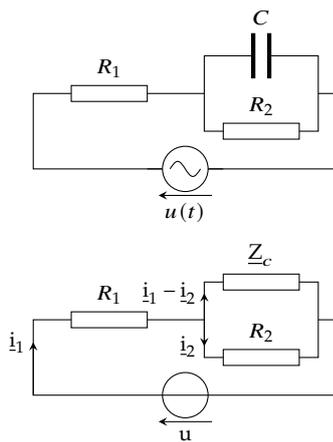


FIGURE 8.9 – Exemple de circuit avec sa représentation complexe.

### Exemple

Considérons le circuit ci-contre alimenté par un générateur basse fréquence réglé sur 50 Hz. La valeur efficace de la tension  $u(t)$  appliquée vaut 1000 V. Cherchons les valeurs efficaces des courants électriques dans chaque branche sachant que  $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 320 \text{ k}\Omega$  et  $C = 25 \text{ nF}$ .

En parcourant toutes les branches et en appliquant systématiquement loi des noeuds, on s'aperçoit qu'il y a deux inconnues en courant :  $i_1$  et  $i_2$ . Il suffit d'écrire deux lois des mailles, par exemple :

$$\begin{cases} R_1 i_1 + R_2 i_2 = \underline{u} \\ \underline{Z}_c (i_1 - i_2) - R_2 i_2 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} i_1 = \frac{\underline{Z}_c + R_2}{\underline{Z}_c (R_1 + R_2) + R_1 R_2} \underline{u} \\ i_2 = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_c (R_1 + R_2) + R_1 R_2} \underline{u} \end{cases}$$

Sachant que  $\underline{Z}_c = 1/jC\omega$ , on trouve

$$i_1 = \frac{1 + jR_2 C \omega}{(R_1 + R_2) + jR_1 R_2 C \omega} \underline{u} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{1}{(R_1 + R_2) + jR_1 R_2 C \omega} \underline{u}$$

On obtient les amplitudes en prenant les modules de ces nombres complexes. En divisant par  $\sqrt{2}$  on trouve les valeurs efficaces. On obtient

$$I_{1 \text{ rms}} = \sqrt{\frac{1 + (R_2 C \omega)^2}{(R_1 + R_2)^2 + (R_1 R_2 C \omega)^2}} U_{\text{rms}} = 7,2 \text{ mA}$$

et

$$I_{2 \text{ rms}} = \frac{1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (R_1 R_2 C \omega)^2}} U_{\text{rms}} = 2,7 \text{ mA}$$

Pour le courant  $i_c$  qui traverse le condensateur, on a

$$i_c = i_1 - i_2 = \frac{jR_2 C \omega}{(R_1 + R_2) + jR_1 R_2 C \omega} \underline{u}$$

D'où l'on tire

$$I_{c \text{ rms}} = \frac{R_2 C \omega}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (R_1 R_2 C \omega)^2}} U_{\text{rms}} = 6,7 \text{ mA}$$

## 8.3 Puissance en régime sinusoïdal forcé.

### Puissance absorbée par un dipôle linéaire

Alimentons un dipôle linéaire passif par une tension sinusoïdale  $u(t)$ . En régime sinusoïdal forcé, le courant d'alimentation d'intensité  $i(t)$  est également sinusoïdal. Écrivons

$$u(t) = \sqrt{2} U_{\text{rms}} \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad i(t) = \sqrt{2} I_{\text{rms}} \cos(\omega t - \phi)$$

avec  $\phi$  le **déphasage de la tension par rapport au courant**. Exprimons la puissance  $\mathcal{P}$  reçue par le dipôle. À partir de l'identité  $\cos a \cos b = 1/2[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ , on obtient

$$\mathcal{P}(t) = u(t) i(t) = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} [\cos \phi + \cos(2\omega t - \phi)]$$

La puissance instantanée oscille à la pulsation  $2\omega$  autour de  $U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \phi$ . Ce terme représente la puissance moyenne injectée dans le dipôle, ou *puissance active*.

#### Définition

La **puissance active** est la puissance électrique moyenne reçue par le dipôle :

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \phi$$

La puissance active permet d'obtenir l'énergie fournie à un dipôle pendant la durée  $\Delta t$ . En effet, si la durée  $\Delta t$  est grande devant la période  $T$  du signal électrique, on a

$$\mathcal{E} = \int_{t=0}^{\Delta t} \mathcal{P} dt = \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t=0}^{\Delta t} \mathcal{P} dt \right) \Delta t \simeq \overline{\mathcal{P}} \times \Delta t$$

En conséquence, l'énergie se conservant, si un circuit alimenté par une source alternative possède  $N$  dipôles passifs consommant chacun une puissance active  $\overline{\mathcal{P}}_i$ , alors la puissance moyenne délivrée par la source vaut

$$\overline{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^N \overline{\mathcal{P}}_i \quad \heartsuit \quad (8.8)$$

**Exercice** – L'emballage d'une ampoule « basse consommation » indique : 230 V – 150 mA – 20 W – 50 Hz. En déduire l'expression de son impédance complexe.

Rép.  $\underline{Z} = (889 + j1249) \Omega$ .

### Facteur de puissance

Par définition le facteur de puissance d'un dipôle passif est le rapport de la puissance active reçue  $\overline{\mathcal{P}}$  sur la puissance apparente  $U_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$  (en

V.A). En régime sinusoïdal,

$$\text{Facteur de puissance} = \frac{\overline{\mathcal{P}}}{U_{\text{rms}} I_{\text{rms}}} = \cos \phi \quad \heartsuit \quad (8.9)$$

Rappelons que le déphasage s'obtient à partir de l'impédance complexe du dipôle :

$$\phi = \arg(\underline{Z})$$

39. C'est le cas d'un conducteur ohmique mais ce n'est pas le seul cas.

Ainsi, pour un dipôle dont l'impédance est réelle<sup>39</sup> ( $\underline{Z} = R$ ), on a  $\phi = 0$  soit un facteur de puissance égal à 1. Dans ce cas, le dipôle absorbe une puissance moyenne

$$\overline{\mathcal{P}} = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} = R I_{\text{rms}}^2$$

On peut d'ailleurs donner un nouveau sens physique à l'intensité efficace : cela correspond à l'intensité du courant continu qui produirait la même dissipation d'énergie dans une résistance.

Pour un dipôle purement inductif ou capacitif (on dit réactif), l'impédance complexe est un nombre imaginaire pur d'où  $\phi = \pm\pi/2$ . Par conséquent  $\overline{\mathcal{P}} = 0$  : le dipôle n'absorbe pas de puissance électrique en moyenne<sup>40</sup>.

40. Bien entendu, le dipôle reçoit de l'énergie ou en donne mais comme il passe autant de temps à recevoir de l'énergie qu'à en délivrer, en moyenne, le bilan est nul.

Dans le cas d'un dipôle passif linéaire quelconque, c'est-à-dire présentant une impédance avec une partie réelle non nulle, on a

$$\underline{Z} = R + jX \quad \implies \quad \cos \phi = \frac{R}{|\underline{Z}|}$$

La puissance active s'écrit

$$\overline{\mathcal{P}} = U_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \frac{R}{|\underline{Z}|} = R I_{\text{rms}}^2$$

Finalement, en régime sinusoïdal tout dipôle passif linéaire reçoit une puissance moyenne

$$\overline{\mathcal{P}} = R I_{\text{rms}}^2 \quad \text{où} \quad R = \text{Re}(\underline{Z}) \quad \heartsuit \quad (8.10)$$

**Importance du facteur de puissance** – Le distributeur d'électricité facture généralement la puissance électrique moyenne consommée par l'installation concernée. En revanche, la puissance gaspillée par effet joule dans les lignes de transport est facturée globalement. C'est pourquoi les distributeurs d'électricité appliquent une surfacturation lorsque le facteur de puissance d'une installation est trop faible.

En effet, une installation industrielle présente en général un caractère inductif important dû à la présence des moteurs (bobinages) d'où un  $\cos \phi$  qui peut être faible. Si l'installation consomme une puissance active  $\overline{\mathcal{P}}$ , alors le courant d'alimentation a pour valeur efficace

$$I_{\text{rms}} = \frac{\overline{\mathcal{P}}}{U_{\text{rms}} \cos \phi}$$

À cette intensité correspond une puissance dissipée par effet joule dans la ligne de transport qui vaut

$$P_{\text{ligne}} = RI_{\text{rms}}^2 = \frac{R\overline{\mathcal{P}}^2}{U_{\text{rms}}^2 \cos^2 \phi}$$

où  $R$  représente la résistance des lignes électriques. Ainsi, une faible valeur du facteur de puissance entraîne une perte d'énergie électrique en ligne plus importante ce qui explique pourquoi le distributeur d'électricité facture le coût d'électricité d'autant plus cher que le facteur de puissance est faible.

Si l'on veut éviter cette surfacturation il faut alors procéder à un *relevage du facteur de puissance*. En général, adjoindre un condensateur en parallèle de l'installation permet de remonter la valeur du  $\cos \phi$ .



À venir...



# ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE



# PROPRIÉTÉS LOCALES DU CHAMP ÉLECTROSTATIQUE

# 10

Comme on l'a vu, une distribution statique de charges produit en tout point M un champ électrostatique donné par la loi

$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{u}_i$$

Expression qui est le résultat de la loi de Coulomb et du principe de superposition. De manière équivalente on peut relier le champ électrostatique avec les sources du champ à l'aide de relations mathématiques *locales*. C'est l'objet de ce chapitre.

## 10.1 Théorème de Gauss

Dans le [Chapitre 4](#) sur les conducteurs, nous avons admis le théorème de Gauss qui stipule que le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque est égal à la quantité de charge électrique située à l'intérieur de la surface :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Revenons un instant sur l'origine de ce théorème et voyons comment cette propriété peut s'exprimer sous forme locale.

### Flux du champ électrostatique

Pour démontrer le théorème de Gauss dans sa version intégrale, commençons par placer une charge électrique  $q$  en O. Celle-ci est responsable d'un champ électrique radial qui décroît comme l'inverse du carré de la distance :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{avec } r = OM$$

Les lignes de champ sont alors des demi-droites partant de O.

Imaginons maintenant une surface fermée  $S$  s'appuyant sur des lignes de champ et limitée par deux sections sphériques  $S_1$  et  $S_2$ . Par construction, le flux du champ électrostatique à travers  $S$  se résume au flux à travers  $S_1$  et  $S_2$ . Pour tout point situé sur la section sphérique  $S_1$  le champ électrostatique est constant (en norme) et colinéaire à  $\vec{n}$  de sorte que

$$\iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n} \, dS = -E_1 S_1$$

10.1 Théorème de Gauss . . . . .	105
Flux de $E$ . . . . .	105
Application . . . . .	107
Théorème de la divergence . . . . .	108
Équation de Maxwell-Gauss . . . . .	110
Relation de passage . . . . .	110
10.2 Circulation du champ . . . . .	112
Champ conservatif . . . . .	112
Théorème de Stokes . . . . .	113
Éq. de Maxwell-Faraday . . . . .	115
Continuité de $E_t$ . . . . .	115
10.3 Potentiel électrique . . . . .	116
Définition . . . . .	116
Équation de Poisson . . . . .	117
Théorème d'unicité . . . . .	119
Théorème de la moyenne . . . . .	121
10.4 Énergie électrostatique . . . . .	121
Rappels . . . . .	121
Densité d'énergie . . . . .	123
Discussion . . . . .	123

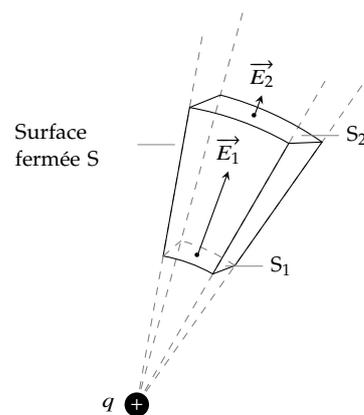


FIGURE 10.1 – Le flux du champ électrique à travers  $S$  est nul ici.

Rappelons que  $\vec{n}$  est orthogonal à la surface et orienté vers l'extérieur.

43. Vous pourrez vérifier que le résultat final ne dépend pas de cette hypothèse.

où le signe  $-$  apparaît si l'on suppose la charge positive<sup>43</sup>. De la même manière, le flux à travers la section sphérique  $S_2$  s'écrit

$$\iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n} \, dS = E_2 S_2$$

Or, à mesure que l'on s'éloigne de la charge, le champ électrostatique décroît en  $1/r^2$ , tandis que l'aire de la section sphérique augmente en  $r^2$  de sorte que  $E_1 S_1 = E_2 S_2$ . Il en résulte que

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = E_2 S_2 - E_1 S_1 = 0$$

Imaginons maintenant que les sections sphériques soient assez petites pour être assimilables à des plans, puis inclinons-les. Le résultat précédent change-t-il? Ici encore le flux ne dépend que du flux à travers  $S_1$  et  $S_2$ . Concentrons-nous sur la surface  $S_2$ . En l'inclinant d'un angle  $\theta$  par rapport à la situation précédente, on augmente son aire d'un facteur  $1/\cos \theta$ . Dans le même temps le produit scalaire  $\vec{E}_2 \cdot \vec{n}$  diminue d'un facteur  $\cos \theta$ . C'est pourquoi,  $\vec{E}_2 \cdot \vec{n} S_2$  reste inchangé et le flux total à travers  $S$  est toujours nul si la charge est à l'extérieur.

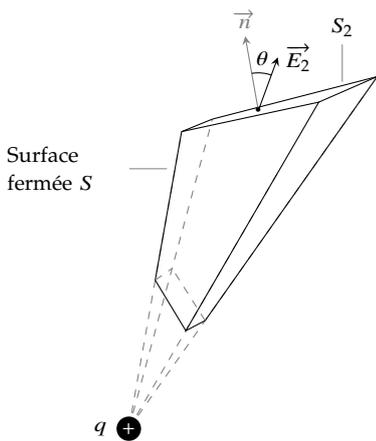


FIGURE 10.2 – Le flux est-il toujours nul?

Munis de ce résultat, on peut facilement se convaincre que le flux du champ électrique créé par une charge ponctuelle à travers une surface fermée est nul lorsque la charge ne s'y trouve pas enfermée. En effet, sélectionnons un faisceau conique de lignes de champ faiblement divergent : soit il ne traverse pas la surface fermée, soit il la traverse en découpant un volume comme étudié précédemment. Dans tous les cas, le flux produit est nul. En additionnant toutes les contributions on aboutit au résultat :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \quad \text{si la charge est à l'extérieur de } S$$

Que se passe-t-il maintenant si la charge est placée à l'intérieur d'une surface fermée  $S$ ? Pour trouver la réponse faisons intervenir une sphère  $S'$  située à l'intérieur de  $S$  et centrée sur la charge. Notez que l'on peut toujours trouver une telle sphère. Appelons  $S''$  la réunion des

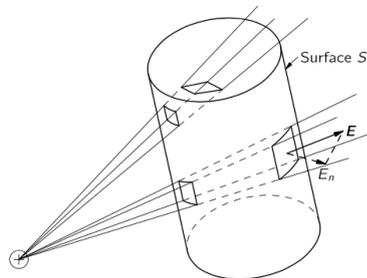


FIGURE 10.3 – Tout volume peut être décomposé en un ensemble de troncs coniques infinitésimaux de sorte que le flux total à travers la surface fermée qui délimite ce volume est nul si la charge électrique est à l'extérieur.

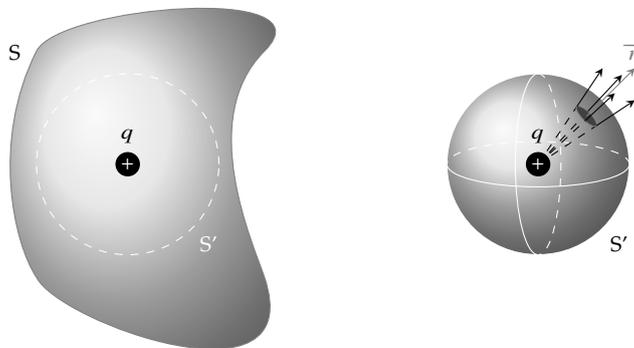


FIGURE 10.4 – Le flux du champ électrique à travers  $S$  est le même que celui à travers  $S'$ .

deux surfaces, puis notons  $\phi$ ,  $\phi'$  et  $\phi''$  les flux du champ électrostatique à travers les surfaces  $S$ ,  $S'$  et  $S''$ . Puisque  $\vec{n}$  est orienté vers l'extérieur de la surface fermée, on a la relation  $\phi'' = \phi - \phi'$ . Or,  $S''$  délimite un

volume qui ne contient pas la charge électrique. Par conséquent

$$\phi'' = 0 \quad \text{et} \quad \phi = \phi'$$

Il suffit de calculer le flux à travers la sphère  $S'$  pour déterminer le flux à travers une surface fermée quelconque. En outre ce calcul est très simple puisque  $\vec{E} \cdot \vec{n} = E$  avec  $E$  constant et égal à  $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  en tout point de la sphère. On trouve donc

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iint_{S'} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

En résumé,

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \begin{cases} 0, & \text{si la charge est à l'extérieur de } S \\ \frac{q}{\epsilon_0} & \text{si la charge est à l'intérieur de } S \end{cases}$$

Ce résultat se généralise facilement avec  $N$  charges ponctuelles. En effet, en vertu du principe de superposition, le champ électrostatique produit par une distribution  $\{q_{i=1,\dots,N}\}$  s'écrit

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N$$

dont le flux vaut

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \sum_i \iint_S \vec{E}_i \cdot \vec{n} \, dS = \frac{\text{somme des charges enfermées par } S}{\epsilon_0}$$

Ce résultat important constitue le théorème de Gauss sous sa forme intégrale :

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \heartsuit \quad (10.1)$$

Attardons-nous un instant sur la beauté de ce théorème. Ce qu'il dit est assez surprenant : le flux du champ électrique à travers une surface fermée dépend seulement de la quantité de charge qui s'y trouve. Autrement dit, une fois la surface fermée choisie, on peut toujours déplacer les charges extérieures ; le champ électrique changera partout et notamment en chaque point de la surface fermée, mais le flux à travers celle-ci restera inchangé ! Avouez que c'est contraire à l'intuition. Cette propriété surprenante est comme nous l'avons vu la conséquence de trois attributs de l'interaction électrostatique :

1. son caractère central ;
2. sa dépendance en  $1/r^2$  ;
3. et le respect du principe de superposition.

## Application du théorème de Gauss

Dans certains cas, le théorème de Gauss sous sa forme intégrale permet de déterminer le champ électrique. Le calcul du champ électrostatique créé par un fil rectiligne infini uniformément chargé servira d'illustration.

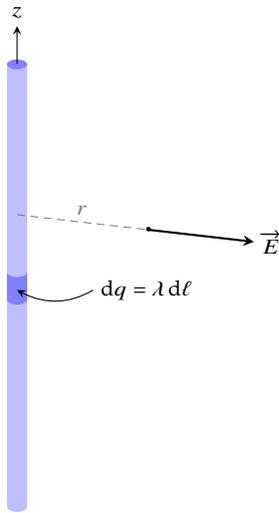


FIGURE 10.5 – Fil rectiligne infini et uniformément chargé de densité linéique  $\lambda$ .

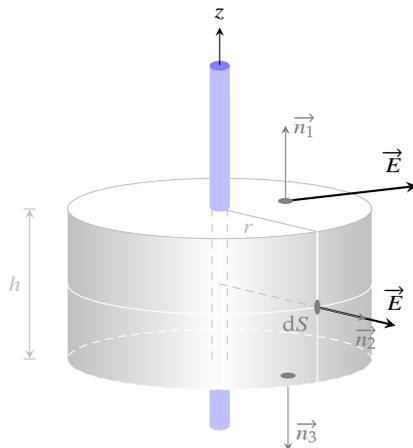


FIGURE 10.6 – Calcul du flux à travers un cylindre fermé.

44. Vu qu'en réalité un fil infini n'existe pas, il arrive un moment où la distance au fil est comparable à la longueur du fil. Dès lors on commence à « sentir » les effets de bords et l'évolution du champ commence à s'écarter sensiblement de l'expression trouvée. Si  $r$  est très grand devant la longueur du fil, on peut traiter le fil comme une charge quasi-ponctuelle de sorte que l'on attend une décroissance en  $1/r^2$  à très grande distance.

45. Ce théorème fut d'abord découvert par Lagrange en 1764, puis indépendamment par Gauss en 1813 et Green en 1828; mais c'est Ostrogradsky qui donna la première démonstration en 1831[5].

Nous avons vu au [Chapitre 1](#) comment faire un calcul direct de ce champ en sommant la contribution de chaque élément de fil.

Voyons maintenant comment le théorème de Gauss permet d'obtenir le résultat plus simplement. Tout d'abord, le problème étant invariant vis-à-vis de toute translation suivant l'axe du fil et de toute rotation par rapport à celui-ci, on en déduit que le champ électrique ne dépend que de la distance au fil, que l'on notera  $r$ . Par ailleurs, tout plan contenant le fil est un plan de symétrie de sorte que pour tout point M de ce plan, le champ est dans ce plan. Mais le plan perpendiculaire au fil qui passe par M est aussi un plan de symétrie puisque le fil est infini. Il en découle que le champ électrique est radial : en coordonnées cylindriques on a

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$$

Il nous reste à déterminer la fonction  $E(r)$  via le théorème de Gauss. L'astuce consiste à choisir une surface fermée qui permet de relier simplement le flux à  $E(r)$ . Un cylindre fermé de rayon  $r$ , dont l'axe coïncide avec le fil fera l'affaire. En effet, le flux du champ électrique à travers ce cylindre vaut

$$\Phi_E = \oiint_{\text{cylindre}} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{(1)} \vec{E} \cdot \vec{n}_1 \, dS + \iint_{(2)} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 \, dS + \iint_{(3)} \vec{E} \cdot \vec{n}_3 \, dS$$

où (1) et (3) correspondent aux bases du cylindre et (2) à la surface latérale. Comme on le voit sur le schéma, le champ électrique est perpendiculaire à  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_3$  de sorte que le flux se résume au flux à travers la surface latérale cylindrique. Pour cette surface, le champ électrique est parallèle au vecteur  $\vec{n}_2$ , aussi on a

$$\Phi_E = \iint_{(2)} E(r) \, dS = E(r) \iint_{(2)} dS = E(r) 2\pi r h$$

Selon le théorème de Gauss, ce flux vaut  $Q_{\text{int}}/\epsilon_0$ , avec  $Q_{\text{int}}$  la quantité de charge enfermée par le cylindre, c'est-à-dire ici  $Q_{\text{int}} = \lambda h$ . Finalement l'application du théorème de Gauss donne

$$E(r) 2\pi r h = \lambda h / \epsilon_0 \quad \text{soit} \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

Le champ décroît en  $1/r$  au fur et à mesure qu'on s'éloigne du fil<sup>44</sup>.

## Théorème de la divergence

Le théorème de la divergence<sup>45</sup> relie le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée  $S$ , à la somme d'un scalaire en tout point du volume enfermé par  $S$ . Ce théorème fait appel à l'opérateur *divergence*, d'où son nom.

La divergence est un *opérateur* qui s'applique à un champ vectoriel et retourne un champ scalaire. Il se note

$$\text{div} \vec{A} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

La dernière notation permet de retrouver son expression en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \begin{pmatrix} A_x(x, y, z) \\ A_y(x, y, z) \\ A_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Imaginons un petit cube d'arête  $a$  centré en  $M(x, y, z)$ , et dont les faces sont des plans cartésiens. Voyons comment s'écrit le flux d'un champ vectoriel<sup>46</sup>  $\vec{A}$  à travers ce cube.

Commençons par exprimer le flux  $\phi_1$  à travers la face (1) perpendiculaire à l'axe (Oy) et située en  $y + a/2$  :

$$\phi_1 = \iint_{(1)} \vec{A} \cdot \vec{u}_y \, dS = \iint_{(1)} A_y(x', y + a/2, z') \, dx' dz'$$

De même, le flux à travers la face située en  $y - a/2$  vaut

$$\phi_2 = \iint_{(2)} \vec{A} \cdot (-\vec{u}_y) \, dS = \iint_{(2)} -A_y(x', y - a/2, z') \, dx' dz'$$

Appelons  $\phi_y$  le flux à travers ces deux faces, et faisons tendre  $a \rightarrow 0$ . On peut alors considérer l'intégrand constant et égale à sa valeur au centre de la face :

$$\phi_y = \phi_1 + \phi_2 = [A_y(x, y + a/2, z) - A_y(x, y - a/2, z)] a^2$$

$a$  étant un infiniment petit, on peut légitimement remplacer

$$\frac{A_y(x, y + a/2, z) - A_y(x, y - a/2, z)}{a} \quad \text{par} \quad \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y}$$

ce qui donne  $\phi_y = \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} a^3$ . Ce même raisonnement réitéré sur les faces perpendiculaires aux axes (Ox) et (Oz) aboutit à

$$\phi_x = \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} a^3 \quad \text{et} \quad \phi_z = \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z} a^3$$

Finalement, le flux  $\phi$  du champ vectoriel  $\vec{A}$  à travers un cube infinitésimal centré en  $(x, y, z)$  de volume infinitésimal  $d\tau = a^3$  vaut

$$\phi = \left( \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z} \right) d\tau = \text{div} \vec{A} \, d\tau$$

Mettons dorénavant côte à côte deux cubes infinitésimaux. Lorsque l'on calcule le flux à travers ces deux cubes réunis, on s'aperçoit que la contribution due aux surfaces adjacentes se compensent, car les normales à ces faces sont opposées. Aussi, le flux total se réduit au flux à travers la surface frontière. Dès lors, on conçoit qu'en empilant de tels cubes en nombre infini, on puisse reconstituer un volume fini, de sorte que le flux à travers la surface frontière soit égal à la somme des flux élémentaires produits à travers chaque petit cube constituant le volume. C'est le sens du théorème de la divergence.

46. Que l'on suppose continûment dérivable en tout point du volume cubique.

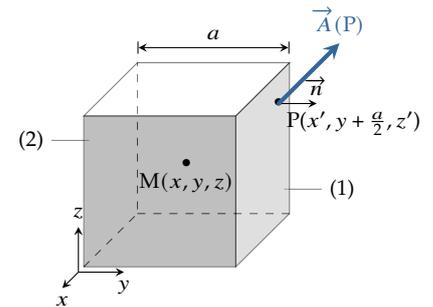


FIGURE 10.7 – Calcul du flux à travers un cube.

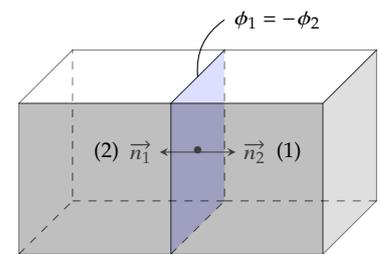


FIGURE 10.8 – Le flux à travers deux cubes adjacents se réduit au flux à travers la surface qui délimite le volume constitué par la réunion des deux cubes.

Ce théorème est aussi appelé *théorème de Green-Ostrogradsky*.

### Théorème de la divergence

L'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume  $V$  est égal au flux de ce champ à travers la surface fermée qui délimite le volume.

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} \, d\tau$$

### Équation de Maxwell-Gauss

Plaçons-nous dans le cadre d'un problème d'électrostatique, et imaginons une surface  $S$  délimitant un volume  $V$  quelconque. En vertu du théorème de Gauss, on a

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où  $Q_{\text{int}}$  est la charge électrique que contient le volume  $V$ . Adoptons une approche continue pour décrire la répartition des charges : un volume infinitésimal  $d\tau$  centré en un point  $M$  contient une charge

$$dq = \rho \, d\tau$$

avec  $\rho$  la **densité volumique de charge** (en  $\text{C.m}^{-3}$ ). On a donc

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, d\tau$$

Appliquons maintenant le théorème de la divergence :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, d\tau$$

Le volume  $V$  étant choisi quelconque, il en découle :

### Équation de Maxwell-Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (10.2)$$

Cette relation est dite locale car elle relie la source locale de charge (*via*  $\rho$ ) avec ses effets électriques locaux (le champ électrique). Il s'agit de la première équation fondamentale de l'électromagnétisme et nous verrons ultérieurement que sa validité s'étend même aux régimes variables<sup>47</sup>.

47. En régime variable la loi de Coulomb est violée ; de ce point de vue, on peut dire que l'équation de Maxwell-Gauss se révèle plus générale que la loi de Coulomb.

### Discontinuité de la composante normale du champ

La relation de Maxwell-Gauss est une équation aux dérivées partielles dont les solutions font intervenir des constantes d'intégration. On détermine généralement ces constantes grâce aux propriétés de symétrie

et aux conditions aux limites. Il est donc utile de connaître les *relations de passage* lorsque l'on traverse une interface séparant deux domaines chargés différemment.

Pour cela imaginons une surface S qui sépare deux domaines (1 et 2). Pour ne pas perdre en généralité, supposons que cette surface présente des charges avec une densité  $\sigma$ . Définissons une boîte cylindrique de petite hauteur  $h$ , qui traverse S perpendiculairement en découpant un petit contour fermé C. Appliquons le théorème de Gauss dans sa forme intégrale

$$\iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_{21} dS + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12} dS + \iint_{\text{cylindre}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où  $\vec{n}_{12}$  est un vecteur normal à la surface dirigée de 1 vers 2. Faisons tendre  $h$  vers zéro. Dans ce cas, d'une part la charge intérieure se résume à la charge surfacique, et d'autre part le flux à travers la surface cylindrique latérale tend lui aussi vers 0. Il reste alors

$$-\iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_{12} dS + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S_0} \sigma dS$$

Par ailleurs, choisissons un contour C suffisamment petit pour pouvoir considérer la densité de charge et les champ électriques quasi-uniformes. Dans ce cas, le théorème de Gauss s'écrit

$$-\vec{E}_1 \cdot \vec{n}_{12} S_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_{12} S_2 = \frac{\sigma S_0}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad S_1 = S_2 = S_0$$

avec  $\vec{E}_1$  (resp.  $\vec{E}_2$ ) le champ électrique qui règne dans le milieu 1 (resp. 2) au voisinage de S. Après simplification, on obtient la relation cherchée :

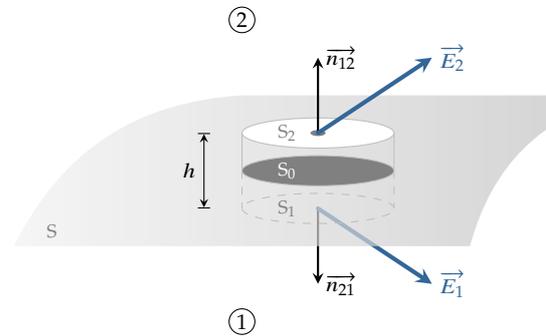


FIGURE 10.9 – Interface chargée séparant deux milieux différents notés 1 et 2.

### Relation de passage

La composante normale du champ électrique est discontinue lors de la traversée d'une interface chargée. Cette discontinuité est d'autant plus grande que la densité de charge est importante.

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{10.3}$$

### Exemple - Champ créé par une nappe chargée

Considérons une distribution de charges uniformément réparties entre les deux plans cartésiens d'équation  $x = a$  et  $x = -a$ . La densité volumique de charge est donnée par

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La distribution des charges présente une invariance par translation suivant (Oy) et (Oz). En conséquence le champ électrique ne dépend que de  $x$ . Par ailleurs, tout plan contenant l'axe  $(M, \vec{u}_x)$  est un plan de symétrie, de sorte

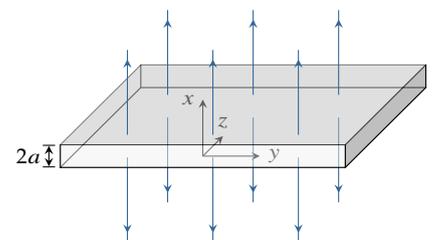


FIGURE 10.10 – Nappe d'épaisseur  $2a$ , chargée uniformément en volume.

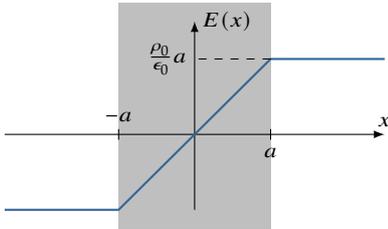


FIGURE 10.11 – Evolution du champ électrique  $E(x)$ .

que le champ électrique est nécessairement suivant  $\vec{u}_x$ . On a

$$\vec{E} = E(x) \vec{u}_x$$

Enfin, le plan  $x = 0$  étant un plan de symétrie, on a  $E(-x) = -E(x)$ , ce qui permet de restreindre l'étude à  $\mathbb{R}^+$ . L'équation de Maxwell-Gauss donne

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \frac{dE}{dx} = \begin{cases} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} & \text{si } x \leq a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

L'intégration de ces équations est élémentaire :

$$E(x) = C_1 \quad \text{si } x > a \quad \text{et} \quad E(x) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} x + C_2 \quad \text{si } x \leq a$$

Il nous reste à déterminer les deux constantes d'intégration. Tout d'abord la fonction  $E(x)$  étant impaire, on a bien sûr  $E(0) = 0$  ce qui implique  $C_2 = 0$ . Enfin, la composante normale du champ est continue en  $x = a$  (car  $\sigma = 0$ ) ce qui se traduit par

$$\lim_{x \rightarrow a^-} E(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} E(x) \quad \text{soit} \quad C_1 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} a$$

On en déduit l'évolution de la Figure 10.11.

## 10.2 Circulation du champ électrostatique

### Champ conservatif

Plaçons une charge ponctuelle  $q$  en O. Il règne alors dans l'espace un champ électrique donné par

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad r = OM$$

Faisons maintenant circuler ce champ le long d'un circuit C fermé et orienté. Par définition, la circulation est la quantité

$$\Gamma = \oint_C \vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell}$$

où M parcourt le circuit C dans le sens positif,  $d\vec{\ell}$  étant son vecteur déplacement infinitésimal.

Le déplacement présente une composante parallèle à  $\vec{u}_r$  et une composante perpendiculaire :  $d\vec{\ell} = d\vec{\ell}_\perp + d\vec{\ell}_\parallel$ . La composante parallèle, la seule qui nous intéresse pour le calcul de  $\Gamma$ , correspond au déplacement radial  $d\vec{\ell}_\parallel = dr \vec{u}_r$  de sorte que la circulation s'écrit

$$\Gamma = \oint_C \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r_i}^{r_f}$$

Mais puisque le circuit est par hypothèse fermé, on a

$$r_i = r_f \quad \text{soit} \quad \Gamma = 0$$

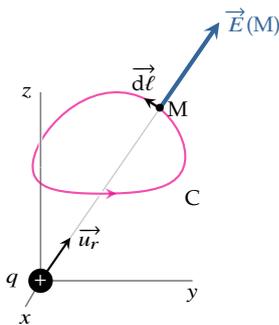


FIGURE 10.12 – Circulation du champ électrique le long d'un circuit fermé orienté.

Si le champ électrique est produit par une distribution de charges  $\{q_{i=1\dots N}\}$ , conformément au principe de superposition, on a

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \quad \text{avec} \quad \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} = 0$$

de sorte que la circulation du champ résultant est également nulle.

### Circulation de $\vec{E}$

En régime statique, la circulation de  $\vec{E}$  le long de n'importe quel contour fermé est toujours nulle :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \text{pour tout circuit fermé}$$

On dit que le champ électrostatique est à *circulation conservative*.

Notez que cette propriété serait encore vérifiée si la force électrique ne variait pas en  $1/r^2$ . Elle est à relier au fait que l'interaction coulombienne est une force centrale qui ne dépend que de  $r$ .

### Théorème de Stokes

Le théorème de Stokes relie la circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour fermé, au flux d'un champ particulier à travers une surface s'appuyant sur le contour initial. Ce théorème fait intervenir un nouvel opérateur différentiel : *le rotationnel*.

L'opérateur rotationnel agit sur un champ vectoriel, et retourne également un champ vectoriel. Il se note

$$\text{rot } \vec{A} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

La dernière notation permet de retenir l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

Imaginons un contour carré, d'arête  $a$ , centré en  $M(x, y, z)$  et orienté dans le sens trigonométrique. Disposons provisoirement le contour perpendiculairement à l'axe  $(Ox)$ .

La circulation d'un champ vectoriel  $\vec{A}$  le long de ce contour s'écrit

$$\Gamma = \int_{z-\frac{a}{2}}^{z+\frac{a}{2}} A_z \left(x, y + \frac{a}{2}, z'\right) dz' + \int_{y+\frac{a}{2}}^{y-\frac{a}{2}} A_y \left(x, y', z + \frac{a}{2}\right) dy' + \int_{z+\frac{a}{2}}^{z-\frac{a}{2}} A_z \left(x, y - \frac{a}{2}, z'\right) dz' + \int_{y-\frac{a}{2}}^{y+\frac{a}{2}} A_y \left(x, y', z - \frac{a}{2}\right) dz' \quad (10.5)$$

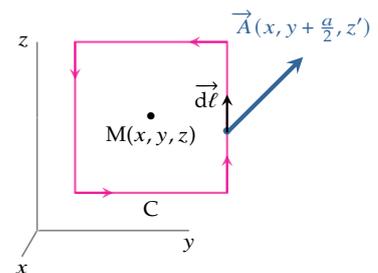


FIGURE 10.13 – Circulation le long d'un carré orienté d'arête  $a$ .

Faisons tendre  $a \rightarrow 0$ . On peut alors considérer les intégrands constants et égaux à la valeur qu'ils prennent au milieu du domaine d'intégration :

$$\Gamma \xrightarrow{a \rightarrow 0} d\Gamma = a \left[ A_z \left( x, y + \frac{a}{2}, z \right) - A_y \left( x, y, z + \frac{a}{2} \right) - A_z \left( x, y - \frac{a}{2}, z \right) + A_y \left( x, y, z - \frac{a}{2} \right) \right]$$

Comme  $a$  est un infiniment petit, on peut remplacer

$$\frac{A_z(x, y + a/2, z) - A_z(x, y - a/2, z)}{a} \text{ par } \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial y} \text{ etc...}$$

ce qui donne

$$d\Gamma = a^2 \left( \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial z} \right) = a^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{u}_x$$

Évidemment, si l'on avait choisi un contour perpendiculaire à l'axe (Oy) on aurait trouvé  $a^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{u}_y$ . De manière générale, pour un contour infinitésimal d'aire  $dS$ , on trouve

$$d\Gamma = (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{n} dS$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface du contour infinitésimal, son sens étant relié à l'orientation du contour par la règle de la main droite ou du tire-bouchon<sup>48</sup>.

Mettons dorénavant côte à côte deux contours infinitésimaux  $C_1$  et  $C_2$  orientés dans le même sens, et notons  $C$  le contour externe. Lorsque l'on somme les circulations du champ  $\vec{A}$  le long des deux contours  $C_1$  et  $C_2$ , on s'aperçoit que les contributions dues aux côtés adjacents se compensent, car les vecteurs  $d\vec{\ell}$  de ces côtés sont opposés. Ainsi la somme des circulations se réduit à la circulation de  $\vec{A}$  le long du bord extérieur  $C$ . Or, on peut toujours décomposer une surface finie  $S$  en une infinité de carrés adjacents, de sorte que si l'on somme les termes  $(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{n} dS$  on retrouve la circulation le long du contour  $C$  sur lequel s'appuie  $S$ . C'est le sens du théorème de Stokes.

48. Un tire-bouchon que l'on tourne dans le sens positif du contour orienté, se déplace dans la direction donnée par  $\vec{n}$ .

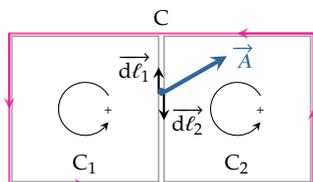


FIGURE 10.14 – 2 contours côte à côte.

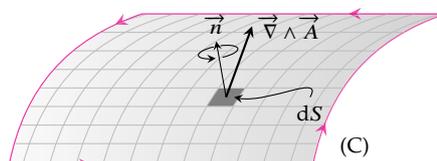


FIGURE 10.15 – La circulation le long de  $C$  d'un champ vectoriel peut se calculer à partir du flux de son rotationnel à travers une surface s'appuyant sur  $C$ .

### Théorème de Stokes

Le flux du rotationnel d'un champ vectoriel à travers une surface  $S$  est égal à la circulation de ce champ le long du circuit fermé  $C$  qui délimite la surface  $S$ .

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal à la surface  $S$ , dont le sens est associé au sens de parcours du circuit *via* la règle du tire-bouchon.

Notez qu'une conséquence de ce théorème est que le flux de tout champ qui dérive d'un rotationnel ( $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ ) ne dépend que de

$\vec{A}$  et du contour sur lequel s'appuie la surface. Cette propriété sera particulièrement intéressante dans l'étude du champ magnétique.

### Équation de Maxwell-Faraday statique

Comme nous l'avons vu, le champ électrostatique est à circulation conservative. En vertu du théorème de Stokes, on peut écrire

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \text{donc} \quad \iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

La dernière relation devant être vérifiée pour toute surface, il faut nécessairement que  $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$  partout. Nous venons de trouver la deuxième équation de Maxwell relative au champ électrostatique.

#### Equation de Maxwell-Faraday statique

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad \text{partout}$$

Cette propriété locale traduit le fait que le champ électrostatique est à circulation conservative. Associée à l'équation de Maxwell-Gauss elle permet de déterminer complètement le champ électrostatique.

**Exercice** – Soit un champ vectoriel  $\vec{A}(M) = \vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}$  avec  $\vec{B} = B \vec{u}_z$ . Ce champ peut-il être un champ électrostatique ?

Rép. Non car  $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} \neq \vec{0}$ .

### Continuité de la composante tangentielle du champ

Nous savons qu'à la traversée d'une nappe chargée, la composante normale du champ électrique subit une discontinuité donnée par la relation (10.3). Voyons maintenant ce qu'il en est pour la composante tangentielle. Pour cela, nous allons faire circuler le champ électrique le long d'un contour rectangulaire (ABCD) qui coupe perpendiculairement une surface S chargée avec une densité  $\sigma$ .

Le caractère conservatif du champ se traduit par

$$\begin{aligned} \oint_{(ABCD)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= \int_{[AB]} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[BC]} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[CD]} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &+ \int_{[DA]} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \end{aligned}$$

Appelons  $h$  la largeur du rectangle et  $\ell$  sa longueur. Si l'on fait tendre  $h \rightarrow 0$ , le deuxième et le quatrième terme disparaissent. Par ailleurs, choisissons  $\ell$  assez petit pour pouvoir considérer le champ électrique uniforme le long des tronçons rectilignes. On obtient alors l'équation

$$\vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \quad \text{soit} \quad (E_{11} - E_{21}) \ell = 0$$

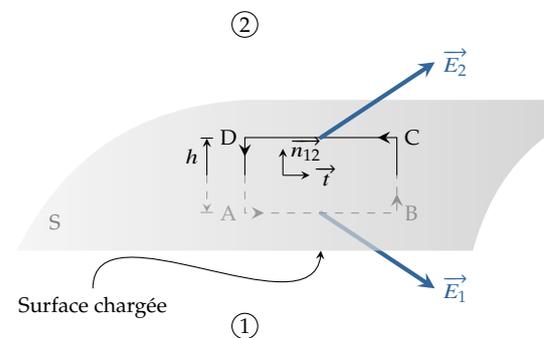


FIGURE 10.16 – Contour rectangulaire coupant la surface chargée perpendiculairement.

avec  $E_{t1}$  et  $E_{t2}$  les composantes tangentielles du champ de part et d'autre de la surface. On en déduit **la continuité de la composante tangentielle du champ à la traversée d'une surface chargée**. Finalement on retiendra la relation de passage pour le champ électrique.

#### Relation de passage du champ électrique

À la traversée d'une surface chargée, le champ électrique présente une *continuité* de sa composante tangentielle et une *discontinuité* de sa composante normale proportionnelle à la densité surfacique de charge  $\sigma$  :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \quad (10.6)$$

### 10.3 Potentiel électrique

#### Définition

Nous venons de voir qu'une distribution stationnaire de charges crée un champ électrostatique qui a la propriété d'être irrotationnel<sup>49</sup>. Or, on peut montrer que tout champ dérivant d'un gradient est irrotationnel, et réciproquement :

$$\vec{A}(M) = \vec{\nabla} \varphi(M) \iff \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M) = \vec{0}$$

où  $\varphi(M)$  est le *potentiel* associé au champ vectoriel.

#### Exemple

Considérons un potentiel  $\varphi(x, y, z) = xy$  et vérifions que le champ vectoriel associé est effectivement irrotationnel. Le champ vectoriel  $\vec{A}$  vaut

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant son rotationnel :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - 1 = 0 \end{pmatrix}$$

On a effectivement  $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{0}$ .

Dans le cas du champ électrostatique, le potentiel associé est appelé potentiel électrique et noté  $V(M)$ . Par définition, on a

$$\vec{E}(M) = -\vec{\nabla} V(M)$$

On a déjà introduit ce potentiel dans le [Chapitre 2](#) à partir du travail de la force électrique. Rappelons ses propriétés :

49. De rotationnel nul.

La présence du signe  $\ominus$  est purement conventionnelle.

- ce champ scalaire ne dépend que de l'espace, et est défini à une constante additive près;
- il s'exprime en volt dans le Système international d'unités;
- ses surfaces de niveau (équipotentiellles) coupent les lignes de champ à angle droit;
- on peut calculer directement le potentiel électrostatique *via* l'expression

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad \text{ou} \quad V(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Pour une distribution bornée, le potentiel est défini et continu.

## Équation de Poisson

Considérons une région de l'espace qui présente une distribution stationnaire de charges électriques de densité volumique  $\rho(x, y, z)$ . Désignons par  $\vec{E}(x, y, z)$  et  $V(x, y, z)$ , le champ électrique et le potentiel en un point de coordonnées  $(x, y, z)$ . On a vu que le théorème de Gauss se traduit localement par

$$\operatorname{div} \vec{E}(x, y, z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

De plus, par définition  $\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla}V(x, y, z)$ . En substituant, il vient

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}V(x, y, z) = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}$$

Cette équation aux dérivées partielles fait intervenir un nouvel opérateur différentiel que l'on appelle *laplacien* et note  $\Delta$  :

$$\Delta f \triangleq \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \quad \text{ou} \quad \Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2 f$$

La dernière notation permet de retenir l'expression du laplacien en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Finalement, le potentiel électrostatique obéit à une équation aux dérivées partielles, que l'on appelle l'*équation de Poisson* :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} = 0 \quad [\text{Eq. de Poisson}] \quad \heartsuit \quad (10.7)$$

La résolution de cette équation du second ordre introduit des constantes d'intégration que l'on détermine grâce aux conditions aux limites et à la propriété de continuité du potentiel.

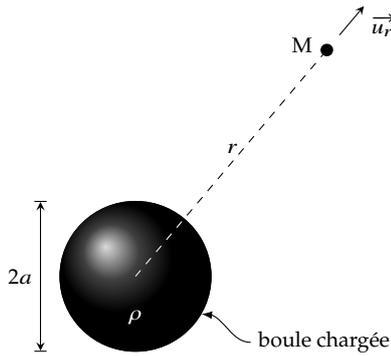


FIGURE 10.17 – Boule de rayon  $a$ , uniformément chargée.

50. On retrouve l'idée qu'une boule à symétrie sphérique produit à l'extérieur les mêmes effets que si toute la charge était concentrée en son centre.

51. On exclut  $r = 0$ . Il suffira de prolonger  $V(r)$  par continuité.

52. D'une part le potentiel est fini, d'autre part le champ électrique est nul en  $r = 0$ , car le centre de la boule est un centre de symétrie.

### Exemple – Potentiel créé par une boule chargée

Disposons dans le vide une boule de rayon  $a$ , uniformément chargée avec une densité volumique  $\rho$  constante. À l'aide de l'équation de Poisson, déterminons le potentiel électrique qui règne en tout point de l'espace.

Compte tenu de la symétrie sphérique, on adopte les coordonnées sphériques et l'on sait que le potentiel ne dépend que de la coordonnée radiale  $r$ . En coordonnées sphériques, le laplacien s'écrit

$$\Delta f(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

de sorte que l'équation de Poisson s'écrit

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > a \\ -\rho/\epsilon_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Commençons par trouver la forme du potentiel à l'extérieur de la boule. En intégrant deux fois par rapport à  $r$  on trouve

$$V(r) = \frac{C_1}{r} + C_2 \quad \text{si } r > a$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes d'intégration. Adoptons la convention habituelle  $V = 0$  à l'infini. On en tire  $C_2 = 0$  et

$$V(r) = \frac{C_1}{r} \quad \text{si } r > a$$

On peut déterminer  $C_1$  car l'on sait quel est le comportement asymptotique du potentiel. En effet, si l'on se place très loin de la boule chargée, on verra essentiellement une charge ponctuelle. On prévoit donc

$$V(r) \underset{r \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}$$

Par identification, on en déduit<sup>50</sup>  $C_1 = \rho a^3 / (3\epsilon_0)$ .

À l'intérieur de la boule, l'équation de Poisson s'écrit

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ce qui donne après une première intégration<sup>51</sup>  $r^2 \frac{dV}{dr} = -\rho \frac{r^3}{3\epsilon_0} + C_3$ , puis en intégrant à nouveau :

$$V(r) = -\rho \frac{r^2}{6\epsilon_0} - \frac{C_3}{r} + C_4$$

Si  $C_3$  était non nul on verrait le potentiel et le champ électrique diverger en  $r = 0$ , ce qui est impossible<sup>52</sup>. Par conséquent,  $C_3$  est nécessairement nul.

Pour déterminer  $C_4$  utilisons la continuité du potentiel en  $r = a$  :

$$\lim_{r \rightarrow a^-} V(r) = \lim_{r \rightarrow a^+} V(r) \quad \text{soit} \quad -\rho \frac{a^2}{6\epsilon_0} + C_4 = \rho \frac{a^2}{3\epsilon_0}$$

Ce qui donne  $C_4 = \rho a^2 / (2\epsilon_0)$ . Finalement, le potentiel s'écrit

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} & \text{si } r > a \\ \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) & \text{sinon} \end{cases} \quad (10.8)$$

Lorsque qu'une portion d'espace est exempte de charges électriques, l'équation de Poisson prend la forme simple suivante :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad [\text{Eq. de Laplace}] \quad \heartsuit \quad (10.9)$$

Il s'agit de l'équation de Laplace. L'ensemble des fonctions vérifiant cette équation aux dérivées partielles sont dites *harmoniques*.

### Théorème d'unicité

Une stratégie pour résoudre un problème électrostatique consiste à résoudre l'équation de Poisson (ou Laplace) dans un certain domaine de l'espace. Ses bords imposent ce que l'on appelle des *conditions aux limites* :

- Soit on connaît la valeur du potentiel sur la frontière de la région considérée. Il s'agit alors d'un *problème de Dirichlet*<sup>53</sup>.
- Soit on connaît la valeur de son gradient projeté sur la normale extérieure de la frontière. Il s'agit dans ce cas d'un *problème de Von Neumann*.

On montre en mathématique que si l'équation de Poisson admet une solution<sup>54</sup>, celle-ci est *unique*. Plus précisément, dans un problème de Dirichlet, il existe un seul champ scalaire qui vérifie l'équation de Poisson et les conditions aux limites. Dans un problème de Von Neumann, le potentiel électrique est indéterminé à une constante additive près mais le champ électrique qui en dérive est unique. Ce théorème d'unicité rend de précieux services dans certains cas. Illustrons cela sur deux exemples.

**La cage de Faraday** – Considérons un volume conducteur de forme quelconque présentant une cavité elle aussi de forme quelconque. Supposons cette cavité *complètement vide*, et le conducteur à l'équilibre et a priori chargé. Aucune hypothèse particulière n'est faite sur l'environnement extérieur au conducteur. Que sait-on du potentiel à l'intérieur de cette cavité? Étant donné l'absence de charges électriques, la fonction  $V(x, y, z)$  obéit à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Avec comme condition aux bords de la cavité :  $V = V_0$  où  $V_0$  est le potentiel du conducteur qui –rapellons-le– est uniforme au sein d'un conducteur à l'équilibre. Or, il y a une solution évidente à ce problème. En effet la solution  $V(x, y, z) = V_0$  vérifie bien l'équation de Laplace et

53. Par exemple un système de conducteurs dont les potentiels sont fixés par des générateurs, avec comme convention  $V = 0$  à l'infini forme un tel problème.

54. Si le problème de physique est bien posé, l'équation de Poisson admet forcément une solution.

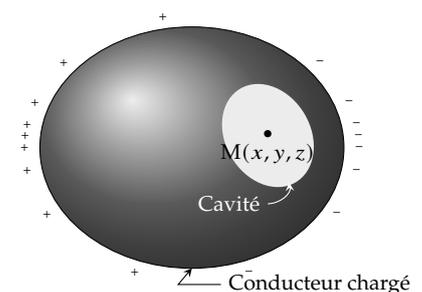


FIGURE 10.18 – Cavité dans un conducteur chargé à l'équilibre.

**Test de la loi de Coulomb**

Toute violation de l'effet « cage de Faraday » serait le signe que l'interaction électrostatique ne suit pas une loi en  $1/r^2$ . À l'heure actuelle aucune expérience n'a réussi mettre en défaut l'effet « cage de Faraday » et les mesures les plus récentes[6] permettent de conclure que la loi de Coulomb est en

$$\frac{1}{r^{2+\epsilon}} \quad \text{avec} \quad |\epsilon| < 6 \cdot 10^{-17}$$

Le premier physicien à avoir entrepris ce type d'expérience est Henry Cavendish. Il trouva  $|\epsilon| < 0,02$ , ceci bien avant la célèbre expérience de Coulomb. L'histoire a préféré retenir la preuve directe de Coulomb, pourtant moins précise...

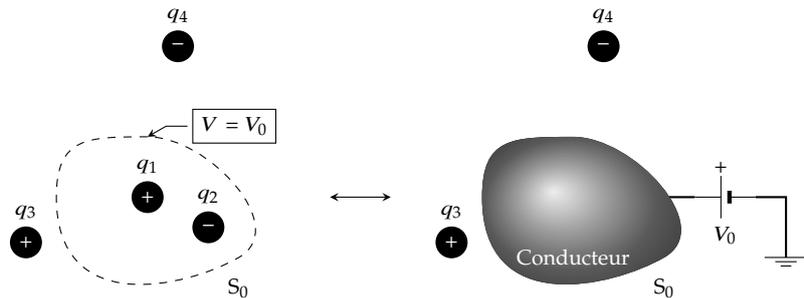
les conditions aux limites. En vertu du théorème d'unicité, nous avons donc trouvé la solution :

$$V(x, y, z) = V_0 \quad \text{et} \quad \vec{E}(x, y, z) = \vec{0} \quad \text{à l'intérieur de la cavité}$$

Autrement dit, à l'intérieur d'une cavité conductrice, le champ électrique est nul, ceci quel que soit le champ à l'extérieur du conducteur. Le conducteur sert donc de protection électrostatique entre l'extérieur et l'intérieur de la cavité : c'est l'**effet cage de Faraday**.

**Méthode des images électriques** – Imaginons différents corps chargés produisant un potentiel électrique  $V(x, y, z)$  (Figure 10.19). Supposons que l'on ait pu déterminer la surface équipotentielle  $S_0$  correspondant à  $V = V_0$ . Supprimons les corps situés à l'intérieur de  $S_0$  puis métallisons  $S_0$ . Si l'on porte le conducteur ainsi formé au potentiel  $V_0$ , un observateur extérieur à  $S_0$  ne s'est aperçu de rien : en effet, le potentiel obéit à la même équation de Poisson avec les mêmes conditions aux limites que précédemment. Autrement dit, ces deux problèmes sont interchangeables, si l'on se limite aux effets électriques produits à l'extérieur de  $S_0$ . C'est cette équivalence qui est à la base de la méthode des images électriques.

FIGURE 10.19 – Méthode des images électriques. Du point de vue d'un point situé à l'extérieur de  $S_0$ , les deux problèmes sont équivalents.



Par exemple, considérons le problème suivant : on approche une charge ponctuelle  $q$  à la distance  $d$  d'une plaque conductrice reliée à la terre (au potentiel  $V = 0$ ). On cherche à déterminer la densité  $\sigma$  avec laquelle le conducteur se charge par influence. Pour cela il suffit de connaître le potentiel au voisinage du conducteur pour en tirer le champ électrique, puis  $\sigma$  à l'aide du théorème de Coulomb. On peut utiliser la méthode des images électriques ici. En effet, on sait que deux charges opposées  $q$  et  $-q$  situés en A et B produisent une équipotentielle  $V = 0$  correspondant au plan médiateur du segment [AB]. C'est pourquoi, pour déterminer le champ et le potentiel électrique dans la portion  $z > 0$  on peut remplacer le conducteur par son image électrique, à savoir une charge  $-q$  située en  $(0,0,-d)$ . Aussi, on peut écrire que

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad \text{si} \quad z > 0$$

Pour une résolution complète de ce problème, voir le [recueil d'exercice d'électromagnétisme I](#)

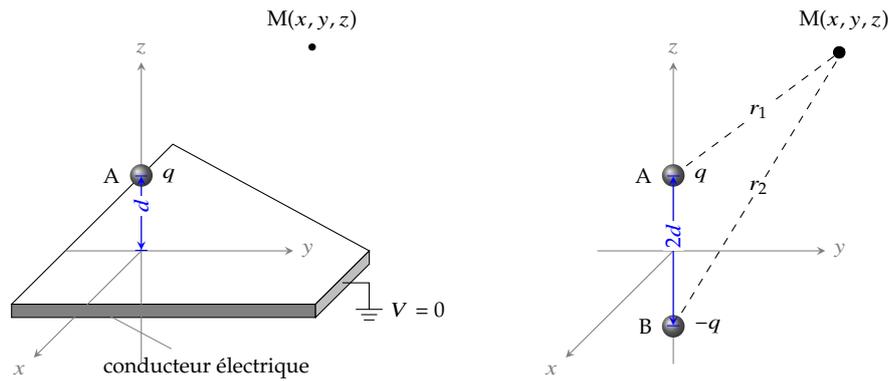


FIGURE 10.20 – Influence d’une charge sur une plaque conductrice traitée par la méthode des images électriques.

### Théorème de la moyenne

Supposons un domaine  $\mathcal{D}$  de l’espace, vide de charge, où règne champ et potentiel électrostatiques. On peut penser à la région située entre des conducteurs chargés et à l’équilibre par exemple. Dans ce domaine, le potentiel  $V(x, y, z)$  obéit à l’équation de Laplace  $\Delta V = 0$ .

Entourons un point  $M(x, y, z)$  d’une sphère  $S_M$  de rayon<sup>55</sup>  $r$ . On définit la moyenne du potentiel sur la sphère par

$$\langle V \rangle = \frac{\iint_{S_M} V \, dS}{4\pi r^2}$$

On montre alors que cette moyenne donne immédiatement la valeur du potentiel au centre de la sphère. Autrement-dit :

$$V(M) = \langle V \rangle$$

Cette propriété est mise à profit dans une méthode de résolution numérique, appelé *méthode de relaxation*. Cela consiste d’abord à produire un maillage de l’espace en le réduisant à un réseau discret. Ensuite, on fixe une valeur arbitraire aux nœuds du réseau sauf aux bords de la région où les conditions aux limites imposent une valeur précise<sup>56</sup>. L’algorithme consiste simplement à passer en revue tous les nœuds et à leur affecter une valeur correspondant à la moyenne des valeurs situées sur les nœuds voisins. En réitérant cette procédure, la valeur du potentiel en tout point converge vers la solution de l’équation de Laplace.

► simulation : [femto-physique.fr/omp/methode-de-relaxation.php](http://femto-physique.fr/omp/methode-de-relaxation.php)

55. La sphère possède un rayon quelconque. La seule condition est qu’elle doit se trouver entièrement dans  $\mathcal{D}$

56. On se place dans un problème de Dirichlet

## 10.4 Énergie électrostatique

### Rappels

Considérons une distribution stationnaire de  $N$  charges électriques  $\{q_{i=1,\dots,N}\}$ . On note  $r_{ij}$  la distance qui sépare les charges  $q_i$  et  $q_j$ . Par définition, l’énergie électrostatique d’interaction  $\mathcal{E}_p$  int d’un tel système

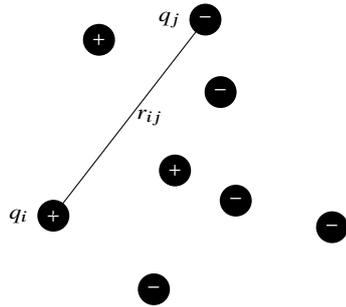


FIGURE 10.21 – Distribution de  $N$  charges ponctuelles.

On rappelle que

$$\sum_{i,j \neq i} u_{ij} = \sum_{i,j < i} u_{ij} + \sum_{i,j > i} u_{ij}$$

ce qui donne lorsque  $u_{ij} = u_{ji}$

$$\sum_{i,j \neq i} u_{ij} = 2 \sum_{i,j < i} u_{ij}$$

De manière générale, l'énergie propre d'un système chargé de charge totale  $Q$ , confiné dans un volume de taille caractéristique  $a$  présente une énergie électrostatique

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \beta \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

avec  $\beta$  un coefficient adimensionné qui dépend de la façon dont les charges sont réparties dans le volume.

représente le travail qu'un opérateur doit fournir pour amener, de façon quasi-statique et depuis l'infini, les charges dans leur position finale.

Comme on l'a démontré dans le [Chapitre 2](#), cette énergie ne dépend pas de la manière dont on s'y prend pour constituer le système, et il suffit de sommer autant de termes  $q_i q_j / (4\pi\epsilon_0 r_{ij})$  qu'il y a de couples  $(i, j)$

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \sum_{\text{couples } (i,j)} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (10.10)$$

On peut aussi reformuler en faisant intervenir le potentiel que subit la charge  $q_i$

$$V_i = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Cela donne

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{p int}} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i \quad (10.11) \end{aligned}$$

Cette dernière expression prend une forme intégrale pour une distribution continue de charges

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\mathbf{M}) V(\mathbf{M}) d\tau \quad \heartsuit \quad (10.12)$$

où  $\mathcal{D}$  est une distribution volumique de charges.

#### Exemple : énergie d'une boule uniformément chargée

Reprenons l'exemple de la boule de rayon  $a$  uniformément chargée. La résolution de l'équation de Poisson a donné

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > a \\ \rho & \text{sinon} \end{cases} \implies V(r) = \begin{cases} \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r} & \text{si } r > a \\ \frac{\rho}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) & \text{sinon} \end{cases}$$

L'énergie potentielle d'interaction vaut donc

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \iiint_{r \leq a} \frac{\rho^2}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) d\tau$$

avec  $d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$  en coordonnées sphériques. Après intégration sur  $\theta$  et  $\varphi$  on obtient l'intégrale simple

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\rho^2}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2) 4\pi r^2 dr = \frac{4}{15} \pi \frac{\rho^2 a^5}{\epsilon_0}$$

Si l'on fait intervenir la charge totale  $Q = \rho \times \frac{4}{3}\pi a^3$  on aboutit au résultat

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

## Densité d'énergie volumique

Il est possible de relier cette énergie uniquement au champ électrique. Pour cela il suffit de manipuler un peu l'équation (10.12). Commençons par remarquer que l'on peut intégrer  $\rho V$  sur tout l'espace, car dans le vide on a  $\rho = 0$  :

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\mathbf{M}) V(\mathbf{M}) \, d\tau \quad \text{où } \mathcal{D} = \text{tout l'espace}$$

Remplaçons maintenant  $\rho$  par  $\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}$  en vertu de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \epsilon_0 V \operatorname{div} \vec{E} \, d\tau$$

puis utilisons l'identité

$$\operatorname{div} (V \vec{E}) = V \operatorname{div} \vec{E} + \vec{E} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} V = V \operatorname{div} \vec{E} - E^2$$

Il vient donc

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} (V \vec{E}) \, d\tau + \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \, d\tau$$

Le théorème de la divergence permet de transformer la première intégrale :

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \oint_S V \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS + \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \, d\tau$$

où la surface  $S$  est une sphère de rayon  $r \rightarrow \infty$  de façon à pouvoir englober tout l'espace. Or nous savons que si l'on se place assez loin d'une distribution localisée, le potentiel et le champ électrique tendent vers 0 le premier en  $1/r$ , le second  $1/r^2$ . Comme l'aire de la surface d'intégration croît en  $r^2$  il vient immédiatement que l'intégrale de flux tend vers 0 quand  $r \rightarrow \infty$ <sup>57</sup>. Finalement, on aboutit à

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \, d\tau \quad \text{où } \mathcal{D} = \text{tout l'espace} \quad \heartsuit \quad (10.13)$$

Aussi surprenant que cela puisse paraître, cette dernière relation ne contient aucune référence explicite aux sources de champ. Tout se passe comme si l'énergie électrostatique d'une distribution de charges était localisée, non pas dans les charges, mais dans l'espace à raison de  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  joules par mètre cube. On définit alors une *énergie électrostatique volumique*

$$w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad [\text{J} \cdot \text{m}^{-3}] \quad \heartsuit \quad (10.14)$$

**Exercice** – Retrouver l'énergie d'une boule uniformément chargée à partir de l'expression du champ électrostatique.

## Discussion

Pour terminer, attardons-nous un instant sur quelques questions que peuvent soulever les derniers résultats.

57. Si la distribution est neutre, la convergence n'en sera que mieux assurée puisque  $V$  et  $E$  tendront vers 0 encore plus rapidement.

Tout d'abord, n'est-il pas troublant que l'expression

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\mathbf{M})V(\mathbf{M}) d\tau$$

fasse intervenir le potentiel  $V(\mathbf{M})$ , fonction qui est indéterminée? Est-ce à dire que l'énergie est indéterminée? Rassurez-vous, l'énergie est bien définie; mais l'expression ci-dessus ne fait pas intervenir n'importe quel potentiel. En effet dans l'expression

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

on a  $V_i = \sum q_j / (4\pi\epsilon_0 r_{ij})$ , c'est-à-dire le potentiel électrique qui prend la valeur nulle quand  $r_{ij} \rightarrow \infty$ . On retiendra donc que l'expression de l'énergie fait intervenir un potentiel particulier celui pour lequel l'origine est fixée à l'infini.

D'autre part, nous avons montré que l'énergie potentielle électrostatique peut s'interpréter comme une énergie de champ

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\mathbf{M})V(\mathbf{M}) d\tau = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau > 0$$

Indubitablement, la dernière expression impose  $\mathcal{E}_{p \text{ int}} > 0$ . Or, tout chimiste sait que l'énergie électrostatique d'un cristal ionique est négative, d'autant plus négative que la cohésion est importante. Par exemple deux charges  $q$  et  $q'$  de signe opposé, et disposées à une distance  $r$  présentent une énergie

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} < 0$$

Il y a donc là une contradiction.

En fait, dans la formule

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\mathbf{M})V(\mathbf{M}) d\tau$$

$V$  désigne le potentiel créé par *toutes* les charges, sans exclusion de charge située au point  $\mathbf{M}$ , alors que dans l'expression

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

$V_i$  représente le potentiel créé par toutes les charges *autres* que  $q_i$ . Aussi, la dernière expression n'inclut pas ce que l'on appelle l'énergie propre des charges.

Pour éclaircir cet aspect, prenons deux distributions  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  de charge totale respective  $q_1$  et  $q_2$ . Appelons  $\rho_1$  et  $\rho_2$  la densité de charge de chacune des distributions. L'énergie totale du système s'écrit

$$\mathcal{E}_{p \text{ int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} [\rho_1(\mathbf{M}) + \rho_2(\mathbf{M})] V(\mathbf{M}) d\tau \quad \text{avec} \quad V(\mathbf{M}) = V_1(\mathbf{M}) + V_2(\mathbf{M})$$

$V_1(\mathbf{M})$  et  $V_2(\mathbf{M})$  étant les potentiels créés par  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  en  $\mathbf{M}$ . En déve-

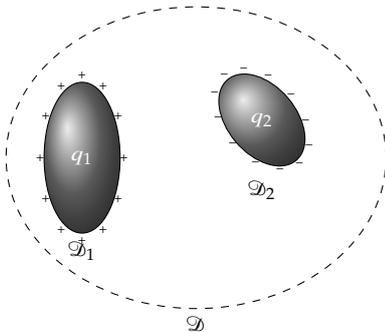


FIGURE 10.22 – Distribution formée de deux corps chargés.

loppant on trouve

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_1} \rho_1 V_1 \, d\tau}_{\text{énergie de } \mathcal{D}_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_2} \rho_2 V_2 \, d\tau}_{\text{énergie de } \mathcal{D}_2} + \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_1} \rho_1 V_2 \, d\tau + \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}_2} \rho_2 V_1 \, d\tau}_{\mathcal{E}_{\text{p}}^{12}}$$

Les deux premiers termes représentent les énergies propres à chaque distribution, et le terme  $\mathcal{E}_{\text{p}}^{12}$  est appelé *énergie d'interaction mutuelle*. Imaginez maintenant que l'on réduise le volume des distributions de façon à pouvoir les assimiler à deux charges ponctuelles. On trouve alors

$$\mathcal{E}_{\text{p}}^{12} \rightarrow \frac{1}{2} \left( V_2 \iiint_{\mathcal{D}_1} \rho_1 \, d\tau + V_1 \iiint_{\mathcal{D}_2} \rho_2 \, d\tau \right) = \frac{1}{2} (q_1 V_2 + q_2 V_1)$$

On voit alors que l'énergie d'interaction mutuelle s'identifie à l'énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles.

#### En résumé

L'énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

n'intègre pas l'énergie propre de chaque charge contrairement à l'expression

$$\mathcal{E}_{\text{p int}} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\mathbf{M}) V(\mathbf{M}) \, d\tau = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \, d\tau$$

Dans le cas d'une distribution de charges ponctuelles, l'énergie propre pose une difficulté majeure. En effet si l'on cherche par exemple à calculer l'énergie propre d'une charge ponctuelle on trouve

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \, d\tau = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0 r^2)^2} \, d\tau \rightarrow \infty$$

Ce résultat dit simplement qu'il faut fournir une énergie infinie pour concentrer une charge avec une densité infinie en un point, ce qui n'est pas vraiment surprenant. En réalité, cela souligne que le concept de charge ponctuelle n'est pas satisfaisant dans le cadre de la théorie électromagnétique.



# PROPRIÉTÉS DU CHAMP MAGNÉTOSTATIQUE

# 11

À l'instar du champ électrostatique, le champ magnétostatique obéit à des relations mathématiques locales qui renseignent sur sa structure et son lien aux courants. Nous verrons dans ce chapitre que, de la même manière qu'il existe un potentiel électrostatique, il existe également un potentiel (vectoriel) dont dérive le champ magnétique. Cette nouvelle grandeur jouera un rôle important dans l'étude du phénomène d'induction.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/electromagnetisme/proprietes-locales-B.php>

## 11.1 Théorème d'Ampère

### Loi de Biot et Savart

Considérons un conducteur C parcouru par un courant électrique d'intensité  $I$ . Comme on l'a déjà vu, le transport d'électricité est quantifié par le vecteur densité de courant volumique  $\vec{j}$  dont le flux à travers une section de C donne  $I$  :

$$\iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS = I \quad (11.1)$$

[A.m<sup>-2</sup>] × [m<sup>2</sup>]      [A]

En régime stationnaire, toutes les grandeurs électriques sont indépendantes du temps<sup>59</sup>. En conséquence, les porteurs de charge ne peuvent s'accumuler, mais simplement transiter : le flux de  $\vec{j}$  à travers n'importe quelle surface fermée est nécessairement nul ce qui se traduit mathématiquement par la relation<sup>60</sup>

$$\operatorname{div} \vec{j} = \vec{0} \quad (11.2)$$

Comme Ørsted l'a montré le premier en 1820, un circuit parcouru par un courant électrique permanent est responsable de l'apparition d'un champ magnétique. Biot et Savart en ont donné une formulation pour un circuit filiforme :

$$\vec{B} = \oint_C d\vec{B} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad (11.3)$$

Si l'on ne peut pas négliger l'épaisseur des fils, il faut considérer que le courant est distribué en volume. Prenons une portion de longueur  $d\ell$  et isolons un tube de courant de section infinitésimale  $dS$ . Ce tube

11.1 Théorème d'Ampère . . . . .	127
Loi de Biot et Savart . . . . .	127
Théorème d'Ampère . . . . .	128
Eq. de Maxwell-Ampère . . . . .	130
11.2 Flux du champ . . . . .	131
Eq. de Maxwell-Thomson . . . . .	131
Champ à flux conservatif . . . . .	132
11.3 Potentiel vecteur . . . . .	133
Définition . . . . .	133
Équation de Poisson . . . . .	134
Son expression . . . . .	134
Méthodes de calcul . . . . .	135
11.4 Relations de passage . . . . .	137
Courants surfaciques . . . . .	137
Composante normale . . . . .	137
Composante tangentielle . . . . .	138
Le solénoïde infini . . . . .	139
11.5 Résumé . . . . .	140

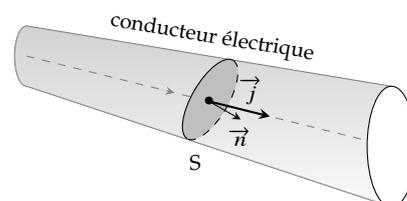


FIGURE 11.1 – Flux électrique.

59. Par exemple, la densité des porteurs de charge ou la densité volumique de courant ne dépendent que de l'espace.

60. Voir la relation de continuité au Chapitre 13.

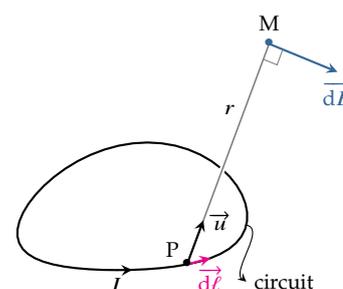


FIGURE 11.2 – Notations associées à la loi de Biot et Savart.

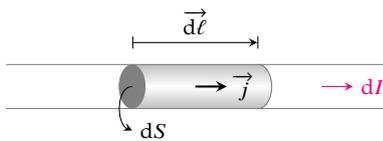


FIGURE 11.3 – Tube de courant élémentaire dans lequel on isole une portion conductrice de volume  $d\tau = dS d\ell$ .

transporte un courant d'intensité  $dI = \vec{j} \cdot \vec{n} dS$ . La quantité  $dI d\vec{\ell}$ , parfois appelé élément de courant, s'écrit

$$d\vec{C} = dI d\vec{\ell} = \vec{j} \cdot \vec{n} dS d\vec{\ell} = \vec{j} dS d\ell = \vec{j} d\tau \quad (11.4)$$

Ainsi, en décomposant une distribution volumique en une superposition de distributions filiformes d'élément de courant  $d\vec{C} = \vec{j} d\tau$ , on obtient une nouvelle formulation :

### Loi de Biot et Savart

Une distribution de courants permanents produit un champ magnétostatique  $\vec{B}$  donné par la loi

$$\vec{B} = \iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j} \wedge \vec{u}}{r^2} d\tau \quad \text{avec} \quad \text{div} \vec{j} = 0 \quad (11.5)$$

Expression dans laquelle il suffit de remplacer  $\vec{j} d\tau$  par  $I d\vec{\ell}$  pour une distribution filiforme.

**Remarque :** l'intégrale (11.5) ne pose pas de problème de convergence pour les distributions réalistes, c'est-à-dire volumiques et finies. Toutefois, dans certaines situations idéalisées (distribution filiforme ou surfacique) l'intégrale n'est pas définie pour tout point situé *sur* la distribution.

### Théorème d'Ampère

La loi de Biot et Savart relie le courant électrique au champ magnétique *via* un intermédiaire de calcul ( $d\vec{B}$ ) que l'on somme le long du circuit électrique. Le théorème d'Ampère est une autre manière d'exprimer ce lien en faisant intervenir la circulation du champ magnétique.

Pour illustrer cette propriété, considérons un conducteur rectiligne infini parcouru par un courant permanent d'intensité  $I$ . Comme on l'a vu au [Chapitre 6](#), il règne autour d'un tel conducteur un champ magnétique orthoradial dont l'intensité décroît proportionnellement à l'inverse de la distance au fil électrique. Formellement on a en coordonnées cylindriques

$$\vec{B}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

lorsque le fil est confondu avec l'axe orienté ( $Oz$ ).

Dessignons maintenant un contour  $C$ , fermé et orienté, puis calculons la circulation du champ  $\vec{B}$  le long de  $C$  ([Figure 11.5](#)). On rappelle qu'en coordonnées cylindriques, le déplacement infinitésimal s'écrit  $d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$ . On a donc

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint d\theta$$

À partir de là, distinguons deux cas :

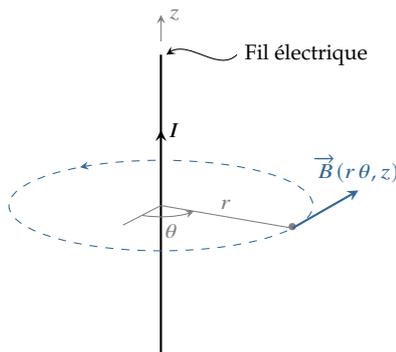


FIGURE 11.4 – Fil infini rectiligne parcouru par un courant électrique permanent.

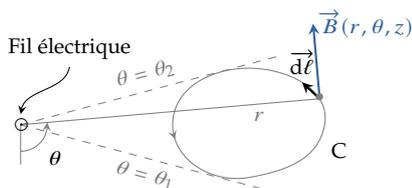


FIGURE 11.5 – Circulation du champ magnétique à travers un circuit  $C$  orienté.

1. C se referme sans enlacer le fil conducteur ;
2. C se referme en enlaçant au moins une fois le fil électrique.

Dans le premier cas,  $\theta$  augmente à partir de  $\theta_1$  puis diminue à partir de  $\theta_2$  jusqu'à retrouver sa valeur initiale. Par conséquent,  $\oint d\theta = 0$  : la circulation de  $\vec{B}$  est nulle si C n'enlace pas le fil électrique. Dans

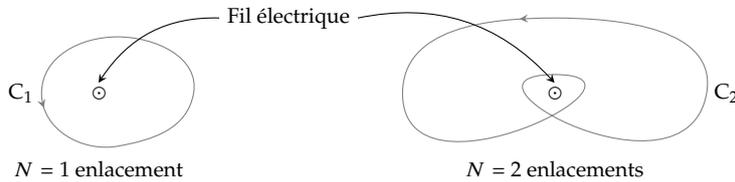


FIGURE 11.6 – Différents enlacements. Le circuit  $C_1$  enlance une fois le fil électrique alors que  $C_2$  l'enlance deux fois.

le second cas,  $\theta$  croît entre 0 et  $2\pi$  pour  $N = 1$  enlacement, entre 0 et  $4\pi$  pour  $N = 2$  enlacements, en général entre 0 et  $2N\pi$  après  $N$  enlacements. On a donc

$$\oint_0^{2N\pi} d\theta = 2N\pi \quad \text{soit} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 NI$$

La circulation du champ magnétique créé par un fil rectiligne infini ne dépend pas de la forme de C mais uniquement du nombre d'enlacements autour du conducteur ainsi que l'intensité électrique. Cette propriété étonnante, recèle une autre surprise : elle s'avère générale, c'est-à-dire valable pour **tous les circuits électriques**<sup>61</sup>.

61. Pour une démonstration voir [2].

### Théorème d'Ampère pour une distribution filiforme

Une distribution de courants filiformes permanents crée un champ magnétostatique dont la circulation le long d'un circuit C fermé quelconque vaut

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_e \tag{11.6}$$

où  $I_e$  est la somme algébrique des intensités parcourant les fils enlacés par C.

Notez que  $I_e$  est une quantité *algébrique* qui dépend du sens du courant et de l'orientation du circuit C. Si le courant enlacé a le même sens que la progression d'un tire-bouchon tournant dans le sens du circuit C, alors  $I_e$  est compté positivement. Dans le cas contraire, il est compté négativement.

**Exercice** – La Figure 11.8 représente un circuit électrique produisant un champ magnétique. Que vaut la circulation du champ magnétique le long du cercle C orienté ?

Rép.  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -4\mu_0 I$

Dans le cas d'une distribution non filiforme, il faut compter le flux électrique qui traverse le circuit C dans le sens indiqué par la règle du tire-bouchon. Autrement dit  $I_e = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS$  où S est une surface qui s'appuie sur C. Insistons sur le fait que toute surface convient, tant qu'elle s'appuie sur C. En effet le flux de  $\vec{j}$  à travers S ne dépend que

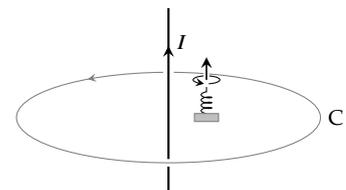


FIGURE 11.7 – Le courant enlacé est compté positivement ici.

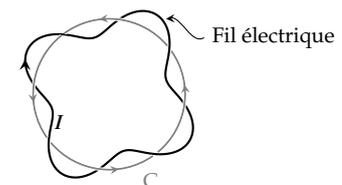


FIGURE 11.8 – Circulation à calculer

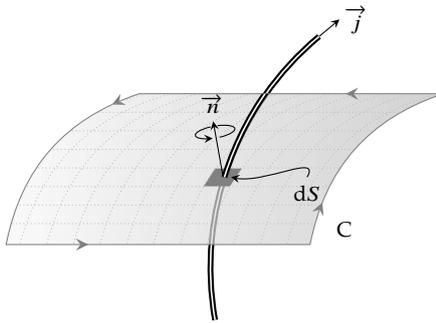


FIGURE 11.9 – Calcul du courant enlacé en termes de densité de courant.

du contour qui délimite  $S$ ; c'est la conséquence du fait que  $\vec{j}$  est à flux conservatif ( $\text{div } \vec{j} = 0$ ).

### Théorème d'Ampère pour une distribution volumique

Une distribution de courants permanents de densité volumique  $\vec{j}$  crée un champ magnétostatique dont la circulation le long d'un circuit  $C$  fermé quelconque vaut

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS \quad (11.7)$$

où  $S$  est une surface qui s'appuie sur  $C$  et  $\vec{n}$  un vecteur unitaire normal à  $dS$  et orienté *via* la règle du tire-bouchon.

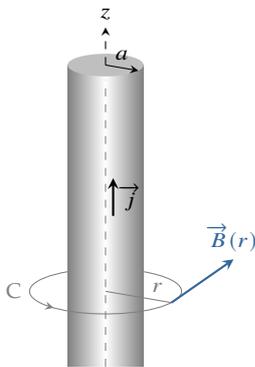


FIGURE 11.10 – Conducteur cylindrique de rayon  $a$  parcouru par un courant axial uniforme et permanent.

### Application – Fil rectiligne de section non négligeable

Considérons un conducteur cylindrique de rayon  $a$  parcouru par un courant électrique uniforme et axial (suivant  $Oz$ ) d'intensité  $I$ . Ce problème présente une grande symétrie puisque tout plan contenant l'axe du cylindre est un plan de symétrie de la distribution de courant. Par conséquent le champ magnétique  $\vec{B}$  est orthoradial. Par ailleurs, la symétrie cylindrique rend le champ magnétique invariant vis à vis de  $z$  et  $\theta$  :

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$$

Dans des situations comme celle-ci où la structure du champ est assez simple, on peut utiliser le théorème d'Ampère pour calculer  $B$ . Ici, par exemple, il suffit d'appliquer le théorème d'Ampère en choisissant un contour  $C$  circulaire d'axe ( $Oz$ ) et de rayon  $r$  (Figure 11.10). Calculons la circulation de  $\vec{B}$  le long de  $C$  :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B(r) \, d\ell = B(r) \oint d\ell = B(r) \times 2\pi r$$

Quant au courant enlacé, il dépend de la taille de  $C$  :

- si  $r \geq a$  alors  $I_e = I$ ;
- si  $r < a$  alors  $I_e = \iint \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS = j\pi r^2$  avec  $j = I/(\pi a^2)$ .

Le théorème d'Ampère donne immédiatement  $B(r)$  :

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{si } r \geq a \\ \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} & \text{si } r < a \end{cases}$$

On note que le champ magnétique créé à l'extérieur du cylindre conducteur est identique à celui d'un courant rectiligne filiforme de même intensité.

## Équation de Maxwell-Ampère statique

Le théorème d'Ampère peut prendre une forme locale si l'on se souvient de la formule de Stokes :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

avec S s'appuyant sur C.

Prenons comme champ vectoriel le champ magnétostatique  $\vec{B}$  et utilisons le théorème d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS$$

Pour que la dernière égalité soit réalisée pour toute surface il faut nécessairement

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \heartsuit \quad (11.8)$$

Cette relation est appelée *équation de Maxwell-Ampère statique*, car elle n'est valable qu'en régime stationnaire. Nous verrons ultérieurement qu'elle viole le principe de conservation de la charge en régime variable ; il faudra alors procéder à une modification de cette équation pour l'étendre à tous les régimes.

## 11.2 Flux du champ magnétostatique

### Équation de Maxwell-Thomson

Montrons, à l'aide de la relation de Biot et Savart, que  $\text{div} \vec{B} = 0$ . Plaçons nous dans le contexte d'une distribution filiforme<sup>62</sup> :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

On cherche à calculer la divergence de  $\vec{B}$ , c'est-à-dire

$$\text{div} \vec{B}(M) = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Où l'on dérive par rapport aux *coordonnées de M*. Dans la formule de Biot et Savart, l'intégrale ne concerne pas le point M<sup>63</sup> ; on peut donc intervertir l'ordre des opérations :

$$\text{div} \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{div} \left( \oint_C \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \text{div} \left( \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} \right)$$

Utilisons maintenant l'identité  $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}$  en prenant  $\vec{A} = d\vec{\ell}$  et  $\vec{B} = \vec{u}/r^2$  :

$$\text{div} \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \oint_C \frac{\vec{u}}{r^2} \cdot \text{rot} d\vec{\ell} - \oint_C \text{rot} \left( \frac{\vec{u}}{r^2} \right) \cdot d\vec{\ell} \right]$$

La première intégrale est nulle, car  $d\vec{\ell}$  ne dépend pas de M<sup>64</sup> on a  $\text{rot} d\vec{\ell} = \vec{0}$ . La seconde intégrale est également nulle car  $\text{rot} \left( \frac{\vec{u}}{r^2} \right) = \vec{0}$ .

En effet,  $\vec{u}/r^2$  est un gradient<sup>65</sup>, et le rotationnel d'un gradient est

62. Le résultat est identique pour une distribution volumique. On laisse au lecteur le soin de le montrer en exercice.

63. On intègre selon les coordonnées  $(x', y', z')$  d'un point P qui parcourt le circuit.

64.  $d\vec{\ell} = dx' \vec{u}_x + dy' \vec{u}_y + dz' \vec{u}_z$ .

65. Souvenez-vous du fait que le champ électrique d'une charge ponctuelle est en  $\vec{u}/r^2$  et dérive d'un gradient en  $1/r$ . Précisément il est facile de montrer que  $\vec{u}/r^2 = -\text{grad}(1/r)$ .

66. Plus précisément, si deux champs  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  sont solutions des équations (11.8) et (11.9) alors leur différence est un champ de rotationnel nul et de divergence nulle, c'est-à-dire un champ uniforme. Aussi les deux équations de Maxwell déterminent le champ magnétique à un champ uniforme près.

67. Un tel point source de champ magnétique est appelé *monopôle magnétique* et est exclu de la théorie de Maxwell. Certaines théories postulent l'existence de monopôles magnétiques, mais à l'heure actuelle rien ne permet de penser qu'ils existent.

68. On a la même conséquence pour le vecteur densité de courant en régime permanent puisque  $\text{div } \vec{j} = 0$ .

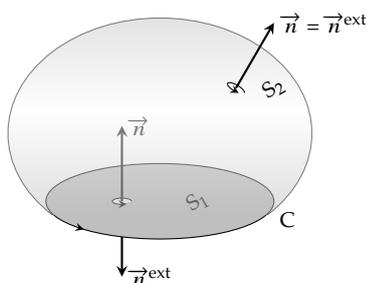


FIGURE 11.11 – Le flux magnétique ne dépend que du contour C et du champ magnétique.

nul ! Finalement, on établit la relation

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \heartsuit \quad (11.9)$$

Il s'agit de l'équation de Maxwell-Thomson qui restera valide en régime variable.

Les équations (11.8) et (11.9) déterminent le champ magnétique de façon univoque pour une distribution de courant donnée<sup>66</sup>.

## Champ à flux conservatif

Rappelons que le flux magnétique à travers une surface S est la quantité

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface S. Le flux magnétique s'exprime en weber (Wb) et joue un rôle important dans les phénomènes d'induction.

Choisissons une surface fermée S et orientons  $\vec{n}$  vers l'extérieur de S :  $\phi_B$  désigne alors le flux magnétique sortant. En vertu du théorème de la divergence et de l'équation de Maxwell-Thomson (11.9), on a

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \, dS = \iiint_V \text{div } \vec{B} \, d\tau = 0$$

On dit que  $\vec{B}$  est un *champ vectoriel à flux conservatif*. Ainsi contrairement à la situation que l'on peut observer en électrostatique, les lignes du champ  $\vec{B}$  ne peuvent pas toutes sortir d'une surface fermée ; certaines doivent y entrer pour produire un flux net rigoureusement nul. En conséquence, un point<sup>67</sup> d'où émergerait des lignes de champ, à l'instar de la charge électrique pour le champ électrique, ne peut être observé.

Une autre conséquence est que le flux magnétique à travers une surface non fermée S ne dépend que du circuit C sur lequel s'appuie S<sup>68</sup>. En effet, choisissons un contour orienté C et deux surfaces S<sub>1</sub> et S<sub>2</sub> s'appuyant sur C (Figure 11.11). Par construction, la réunion S des deux surfaces est une surface fermée ; on a donc

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \, dS = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \, dS + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} \, dS = 0$$

Orientons par exemple C de sorte que  $\vec{n} = \vec{n}^{\text{ext}}$  pour S<sub>2</sub>. Dans ce cas,  $\vec{n} = -\vec{n}^{\text{ext}}$  pour S<sub>1</sub> et il vient :

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$$

ceci, quelles que soient les surfaces S<sub>1</sub> et S<sub>2</sub>, pourvu qu'elles s'appuient sur le même contour. Autrement dit le flux magnétique ne dépend que du champ magnétique et de la forme du contour.

## 11.3 Potentiel vecteur

### Définition

Nous avons vu en électrostatique que  $\vec{E}$  est un gradient, car  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ . En magnétostatique,  $\vec{B}$  est de divergence nulle ce qui est le propre de tout champ rotationnel :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad \heartsuit \quad (11.10)$$

Le champ vectoriel  $\vec{A}$  s'appelle le **potentiel vecteur**.

### Exemple

Prenons  $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x, y, z) \end{pmatrix}$  où  $f$  est une fonction de classe  $C^2$ . Calculons son rotationnel puis vérifions qu'on obtient bien un champ de divergence nulle. On a

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et la divergence de ce champ rotationnel vaut

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$$

Or, en vertu du théorème de Schwarz, une dérivation partielle à l'ordre 2 ne dépend pas de l'ordre dans lequel se fait la dérivation. On en déduit ici que  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$ .

Le potentiel vecteur s'exprime en T.m ou en Wb/m. Il y a en effet un lien entre le flux magnétique et la circulation du potentiel vecteur :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \phi_B \quad \heartsuit \quad (11.11)$$

où l'on voit manifestement, comme on l'a déjà signalé, que le flux magnétique ne dépend que de la forme du contour et du champ magnétique<sup>69</sup>.

À l'instar du potentiel électrostatique,  $\vec{A}$  est un *champ indéterminé*. Plus précisément,  $\vec{A}$  est défini à un gradient près. En effet, si  $\vec{A}$  est un potentiel vecteur associé au champ  $\vec{B}$  ( $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ), alors le champ  $\vec{A} + \vec{\nabla} f$  convient aussi puisque

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{A} + \vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{B}$$

Cette indétermination nous procure donc une certaine liberté dans le choix de  $\vec{A}$ . Un choix souvent réalisé en magnétostatique consiste à imposer  $\text{div } \vec{A} = 0$ . On dit qu'on se place dans la *jauge de Coulomb*.

69. le potentiel vecteur plus exactement.

## Équation de Poisson

Nous avons déjà rencontré une équation reliant potentiel et sources en électrostatique ; il s'agit de l'équation de Poisson de l'électrostatique :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

On rencontre une équation du même type en magnétostatique en introduisant  $\vec{A}$  dans l'équation de Maxwell-Ampère statique (11.8) :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$$

Utilisons l'identité  $\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$ . Par ailleurs, fixons-nous la jauge de Coulomb  $\text{div} \vec{A} = 0$ . L'équation de Maxwell-Ampère prend la forme d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, appelée *équation de Poisson de la magnétostatique* :

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \text{div} \vec{A} = 0 \quad \heartsuit \quad (11.12)$$

## Expression du potentiel vecteur

Profitons de l'analogie avec l'équation de Poisson de l'électrostatique pour déterminer une expression du potentiel vecteur. Si l'on projette (11.12) suivant l'axe (Oz) on trouve une équation scalaire

$$\Delta A_z + \mu_0 j_z = 0 \quad \text{formellement analogue à} \quad \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

Or, on sait que  $V = \iiint \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r} d\tau$  est solution de l'équation de Poisson électrostatique. Par analogie, on en déduit que

$$A_z = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\mu_0 j_z}{4\pi r} d\tau$$

est *une* solution de l'équation de Poisson magnétostatique. Le même raisonnement peut se faire pour les trois composantes cartésiennes. En les regroupant on obtient une expression intégrale pour  $\vec{A}$ .

### Expression du potentiel vecteur

Dans la jauge de Coulomb ( $\text{div} \vec{A} = 0$ ), le potentiel vecteur est relié aux sources de courant *via*

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\vec{j}}{r} d\tau \quad (11.13)$$

Pour une distribution filiforme, l'intégrale est curviligne et  $\vec{j} d\tau$  devient  $I d\vec{\ell}$ .

Rigoureusement, il faudrait vérifier que l'intégrale (11.13) présente bien une divergence nulle. On montre que c'est bien le cas pour une distribution d'extension finie ([7]p.106).

On montre que pour une *distribution finie*, volumique ou surfacique, le potentiel vecteur est défini et continu en tout point. C'est le cas aussi

pour les distributions linéiques, sauf sur la distribution où l'intégrale n'est pas calculable. C'est avec les distributions infinies qu'il faut manipuler l'intégrale avec précaution, car il arrive souvent qu'elle diverge.

**Propriétés de symétrie** – Comme on peut le voir dans l'expression (11.13),  $\vec{A}$  se comporte, du point de vue des symétries, comme un vecteur polaire puisque c'est la somme de vecteurs polaires ( $\vec{j}$ ). Il vérifiera donc les mêmes propriétés que le champ électrique.

**Symétries du potentiel vecteur**

- En tout point d'un plan de symétrie, le potentiel vecteur est contenu dans ce plan.
- En tout point d'un plan d'anti-symétrie, le potentiel vecteur est perpendiculaire à ce plan.

**Méthodes de calcul**

Jusqu'ici, pour déterminer le champ magnétique on pouvait procéder :

- soit à un calcul direct à l'aide de la loi de Biot et Savart ;
- soit à l'application du théorème d'Ampère sur un contour judicieusement choisi, ce qui suppose la présence d'un grand nombre de symétries dans la distribution.

Dorénavant, l'existence du potentiel vecteur  $\vec{A}$  nous procure un autre moyen d'accéder au champ magnétique :

- soit on procède à un calcul directe de  $\vec{A}$  via (11.13) pour déduire ensuite  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  ;
- soit on résout l'équation de Poisson (11.12) puis on accède à  $\vec{B}$ .

Pour illustrer notre propos, reprenons l'étude du conducteur cylindrique de rayon  $a$  transportant un courant uniforme et axial de densité  $j$ . Nous avons déjà expliqué comment le théorème d'Ampère permet de déterminer le champ magnétique ici. Tentons d'obtenir le même résultat en passant par le calcul du potentiel vecteur. On a le choix entre un calcul intégral et une équation aux dérivées partielles. Ici l'équation de Poisson est le choix le plus sage, car l'intégrale (11.13) diverge (la distribution est indéfinie).

Avant de commencer, réduisons le problème à l'aide des symétries. On constate que tout plan perpendiculaire à l'axe ( $Oz$ ) est un plan antisymétrique. Il en résulte que  $\vec{A}$  est perpendiculaire à ce plan, c'est-à-dire dirigé suivant l'axe ( $Oz$ ) :

$$\vec{A} = A_z(r, \theta, z) \vec{u}_z$$

La jauge de Coulomb impose  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$ ; autrement dit le potentiel vecteur ne dépend pas de  $z$ . Il ne dépend pas non plus de  $\theta$

**Remarque** : si l'on cherche à déterminer la valeur de  $\vec{B}$  en un point particulier  $M_0$ , la méthode qui consiste à passer par  $\vec{A}$  est inadaptée, car elle demande de connaître  $\vec{A}$  dans la région autour du point  $M_0$  avant d'effectuer les dérivations qui mèneront à la valeur de  $\vec{B}$ . Le calcul direct de  $\vec{B}$  est dans ce cas beaucoup plus adapté.

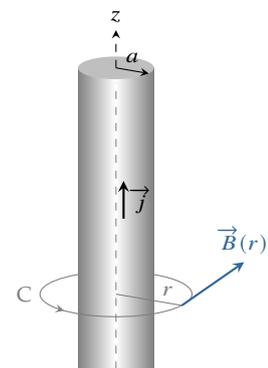


FIGURE 11.12 – Fil conducteur rectiligne de section non négligeable.

On peut aussi simplement constater que d'après (11.13),  $\vec{A}$  est une somme de vecteurs colinéaires à  $\vec{u}_z$ ; le résultat est forcément suivant  $\vec{u}_z$

Rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Expression du laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

comme on peut le voir à partir de l'expression du champ magnétique.

En effet,

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \vec{u}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_\theta$$

et pour des raisons de symétrie, le champ magnétique est orthoradial.

Il en découle  $\frac{\partial A_z}{\partial \theta} = 0$  : le potentiel vecteur ne dépend finalement que de  $r$ . Écrivons maintenant l'équation de Poisson :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > a \\ -\mu_0 j & \text{si } r \leq a \end{cases}$$

Intégrons deux fois de suite la première équation ( $r > a$ ). On trouve

$$A_z(r) = C_1 \ln(r) + C_2 \quad \text{pour } r > a$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont deux constantes d'intégration. On ne perd pas en généralité en posant  $C_2 = 0$  puisque le champ magnétique n'en dépend pas. Passons à la deuxième relation et multiplions là par  $r$ .

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -\mu_0 j r \quad \text{si } r \in ]0, a[$$

En intégrant une fois, on obtient

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{1}{2} \mu_0 j r + \frac{C_3}{r}$$

où le dernier terme en  $C_3/r$  est forcément nul si l'on veut éviter que le champ magnétique diverge à l'approche de l'axe. En intégrant à nouveau, on aboutit à

$$A_z(r) = -\frac{1}{4} \mu_0 j r^2 + C_4 \quad \text{si } r \leq a$$

Il nous reste à déterminer les deux constantes  $C_1$  et  $C_4$  en utilisant la continuité des champs en  $r = a$  :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \mu_0 j a^2 + C_4 &= C_1 \ln a && \text{continuité de } \vec{A} \\ \frac{1}{2} \mu_0 j a &= -\frac{C_1}{a} && \text{continuité de } \vec{B} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

On en déduit  $C_1 = -\frac{1}{2} \mu_0 j a^2$  et  $C_4 = \mu_0 j a^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln a \right)$ . Le potentiel vecteur est donc donné par

$$A_z^{\text{int}} = -\frac{1}{4} \mu_0 j (r^2 - a^2) - \frac{1}{2} \mu_0 j a^2 \ln a \quad \text{et} \quad A_z^{\text{ext}} = -\frac{1}{2} \mu_0 j a^2 \ln r$$

Le champ magnétique s'obtient sans difficulté :

$$\vec{B} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u}_\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \mu_0 j r \vec{u}_\theta & \text{si } r \leq a \\ \frac{1}{2} \mu_0 j \frac{a^2}{r} \vec{u}_\theta & \text{si } r > a \end{cases}$$

On laisse le lecteur vérifier l'adéquation de ce résultat avec celui de la Section 11.1.

## 11.4 Relations de passage du champ magnétique

Si les courants sont distribués en surface, le champ magnétique n'est plus défini sur la distribution. Des relations de passage permettent de relier le champ magnétostatique d'un point situé juste en dessous avec celui situé juste au dessus.

### Courants surfaciques

Dans certaines situations, les courants qui interviennent sont répartis à l'intérieur d'une mince couche dont il est tentant de négliger l'épaisseur. On décrit alors cette *nappe de courant* par la notion de *densité de courant surfacique*.

Soit  $dI$ , l'intensité du courant qui traverse une section rectangulaire ( $d\ell \times a$ ) de la nappe de courant. On a

$$dI = d\ell \int_0^a j(z) dz$$

où la densité volumique de courant  $j$  dépend éventuellement de  $z$ . Dans une schématisation surfacique, tout se passe comme si l'on faisait tendre  $a \rightarrow 0$  et  $j \rightarrow \infty$  de façon à ce que l'intégrale reste finie. On écrira alors

$$dI = j_s \times d\ell \quad \heartsuit \quad (11.14)$$

où  $j_s$  est par définition la densité de courant surfacique. Cette grandeur s'exprime en  $A.m^{-1}$ .

Le **vecteur densité de courant surfacique**  $\vec{j}_s$  est simplement un vecteur orienté dans le sens du courant et de norme  $j_s = dI/d\ell$ .

**Exercice** – Un cylindre creux de diamètre 10 mm et d'épaisseur négligeable transporte un courant axial et uniforme d'intensité  $I = 10$  A. Que vaut  $j_s$  ?

Rép.  $j_s = 318$  A.m<sup>-1</sup>

Les formules intégrales qui donnent l'expression de  $\vec{B}$  et  $\vec{A}$  sont fournies pour des distributions volumiques. Si une modélisation surfacique se justifie, il suffira alors de remplacer les intégrales triples par des intégrales doubles et le terme  $\vec{j} d\tau$  par  $\vec{j}_s dS$ . Toutefois, le champ magnétique ne sera plus défini en un point de la surface et pourra présenter une discontinuité.

### Continuité de la composante normale

On a vu au chapitre précédent que la composante normale du champ électrostatique subit une discontinuité au passage d'une surface chargée. On a obtenu ce résultat en appliquant le théorème de Gauss sur

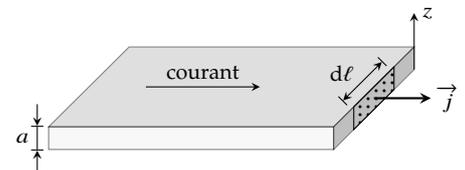


FIGURE 11.13 – Nappe de courant.

un petit cylindre coupant perpendiculairement la surface chargée. Le résultat était le suivant

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \iff (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Ici, le champ magnétostatique est à flux conservatif. Il en découle qu'un raisonnement similaire aboutit au résultat suivant :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \iff (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$$

### Relation de passage

La composante normale du champ magnétostatique est continue lors de la traversée d'une nappe de courant.

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0 \quad (11.15)$$

### Discontinuité de la composante tangentielle

Le résultat de l'électrostatique concernant la composante tangentielle peut se résumer ainsi :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \iff E_{t2} = E_{t1}$$

Le champ magnétostatique n'étant pas de rotationnel nul, la composante tangentielle doit subir une discontinuité à la traversée d'une nappe de courant.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \iff B_{t2} \neq B_{t1}$$

Procédons de la même manière qu'en électrostatique, en considérant un contour rectangulaire coupant perpendiculairement une surface  $S$  transportant un courant de densité  $\vec{j}_s$ .

Le théorème d'Ampère se traduit par

$$\oint_{(ABCD)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{[AB]} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[BC]} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[CD]} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{[DA]} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int \vec{j}_s \cdot \vec{n} d\ell$$

Appelons  $h$  la largeur du rectangle et  $\ell$  sa longueur. Si l'on fait tendre  $h \rightarrow 0$ , le deuxième et le quatrième terme disparaissent. Par ailleurs, choisissons  $\ell$  assez petit pour pouvoir considérer le champ magnétique uniforme le long des tronçons rectilignes. On obtient alors l'équation

$$\vec{B}_1 \cdot (\ell \vec{t}) - \vec{B}_2 \cdot (\ell \vec{t}) = \mu_0 \int \vec{j}_s \cdot \vec{n} d\ell$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la section rectangulaire défini par  $\vec{n} = \vec{t} \wedge \vec{n}_{12}$ . Pour les mêmes raisons que précédemment, la densité de

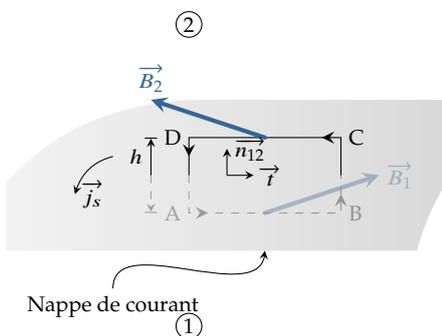


FIGURE 11.14 – Contour rectangulaire coupant une nappe de courant.

courant est uniforme sur la section. On a donc

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{t} - \vec{B}_2 \cdot \vec{t} = \mu_0 \vec{j}_s \cdot \vec{n}$$

La composante tangentielle subit donc une discontinuité. Plaçons le contour de façon à ce que le courant le traverse perpendiculairement. Dans ce cas,  $\vec{j}_s$  est colinéaire à  $\vec{n}$  et  $B_{1t} - B_{2t} = \mu_0 j_s$ .

**Relation de passage du champ magnétostatique**

À la traversée d’une nappe de courant stationnaire, le champ magnétique présente une *continuité* de sa composante normale et une *discontinuité* de sa composante tangentielle que l’on peut résumer par :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}) \tag{11.16}$$

**Le solénoïde infini**

Réalisons un solénoïde à partir d’une feuille conductrice disposée autour d’un cylindre de rayon  $a$ , et parcourue par un courant orthoradial  $\vec{j}_s = j_s \vec{u}_\theta$  uniforme et stationnaire. Cherchons l’expression du champ magnétique créé par cette distribution lorsque le cylindre est infini. Pour cela, nous utiliserons les équations locales associées aux relations de passage.

Tout d’abord, notons (Oz) l’axe de symétrie du cylindre et adoptons le système de coordonnées cylindriques (Figure 11.15). Tout plan perpendiculaire au cylindre est un plan de symétrie de la distribution de sorte que le champ magnétique est nécessairement axial. De plus, l’invariance de la distribution par rotation autour de l’axe (Oz) et par translation suivant  $z$  implique que l’intensité du champ magnétique varie seulement avec la coordonnée radiale  $r$ . Pour résumer,

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$$

Appliquons la relation de Maxwell-Ampère là où le champ magnétique est défini :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \vec{0} \quad \text{pour } r > a \quad \text{ou } r < a$$

ce qui donne

$$\text{rot } \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$$

Le champ magnétique garde donc une valeur constante dans les deux régions définies par  $r > a$  et  $r < a$ . On conçoit que si l’on se place à

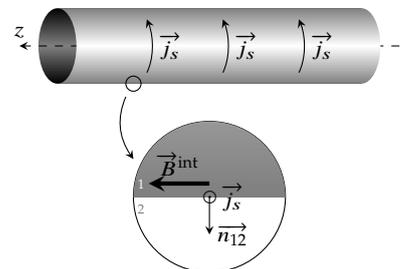


FIGURE 11.15 – Solénoïde infini.

70. Si cet argument ne vous convainc pas (après tout une nappe de courant infini ne produit pas un champ nul à l'infini), vous pouvez imaginer une bobine torique. Il est alors facile de montrer à l'aide du théorème d'Ampère que le champ magnétique est nul à l'extérieur ceci quel que soit le rayon du tore. Le solénoïde infini pouvant être vu comme une bobine torique de très grand rayon.

71. On peut remarquer que ce résultat reste encore valide pour un solénoïde de section non circulaire

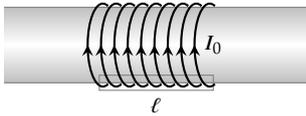


FIGURE 11.16 – Enroulement solénoïdal.

72. Pour une démonstration basée sur l'intégration du champ créé par les spires, voir le recueil d'exercices [Électromagnétisme-1ere Partie](#)

l'infini et à l'extérieur du solénoïde, le champ est nul<sup>70</sup>. On a donc

$$\vec{B}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}^{\text{int}} = C^{\text{te}}$$

Les relations de passage permettent de déterminer la valeur du champ intérieur. En effet, au voisinage de la nappe de courant, d'après (11.16), on a

$$\vec{B}^{\text{ext}} - \vec{B}^{\text{int}} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} = -\mu_0 j_s \vec{u}_z$$

Finalement, un solénoïde infini produit un champ uniforme à l'intérieur et nul à l'extérieur<sup>71</sup> :

$$\vec{B}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}^{\text{int}} = \mu_0 j_s \vec{u}_z \quad \heartsuit \quad (11.17)$$

On peut approcher un solénoïde infini en enroulant du fil électrique autour d'un long cylindre. On enroulera de façon jointive les spires pour avoir un courant uniforme, et l'on prendra du fil très fin pour pouvoir négliger l'hélicité de l'enroulement : le courant transporté est alors quasi-orthoradial. On peut relier le courant surfacique avec la densité d'enroulement  $n$  (en spires par mètre) et l'intensité  $I_0$  du courant transporté par le fil. En effet, à travers une section de longueur  $\ell$ , passe un courant d'intensité

$$I = I_0 \times n \times \ell = j_s \ell$$

Cette bobine est donc équivalente à une nappe de courant solénoïdale de densité de courant surfacique  $j_s = nI_0$  (A/m). On en déduit le champ créé par une bobine infinie :

$$\vec{B}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B}^{\text{int}} = \mu_0 n I_0 \quad \heartsuit \quad (11.18)$$

On retrouve l'expression vu au [Chapitre 6](#)<sup>72</sup>

## 11.5 Résumé

Récapitulons les connaissances acquises à travers la [Table 11.1](#) montrant les similitudes et différences entre les champs électrostatique et magnétostatique.

TABLE 11.1 – Résumé des propriétés des champs électrostatique et magnétostatique.

<b>Propriétés intrinsèques</b>	
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$	$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = 0$
ou	ou
$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ (Eq. Maxwell-Faraday)	$\text{div } \vec{B} = 0$ (Eq. Maxwell-Thomson)
<b>Lien entre les sources</b>	
$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n}^{\text{ext}} dS = \frac{Q^{\text{int}}}{\epsilon_0}$ (Th. de Gauss)	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_e$ (Th. d'Ampère)
ou	ou
$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Eq. Maxwell-Gauss)	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ (Eq. Maxwell-Ampère)
$\vec{E}(\text{M}) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho(P) \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 PM^2} d\tau$	$\vec{B}(\text{M}) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\mu_0 \vec{j}(P) \wedge \vec{u}}{4\pi PM^2} d\tau$
<b>Potentiels</b>	
$\vec{E}(\text{M}) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(\text{M})$	$\vec{B}(\text{M}) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(\text{M})$
$V(\text{M}) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 PM} d\tau$	$\vec{A}(\text{M}) = \iiint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\mu_0 \vec{j}(P)}{4\pi PM} d\tau$ (Jauge de Coulomb)
<b>Équations de Poisson</b>	
$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$	$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$ (Jauge de Coulomb)
<b>Relations de Passage</b>	
$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$	$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12})$



# PHÉNOMÈNE D'INDUCTION MAGNÉTIQUE

# 12

À venir...



À venir...



# Références

Références classées par ordre d'apparition.

- [1] Christine BLONDEL et Bertrand WOLFF. *De l'électricité "en + ou en -" de Franklin aux lois de l'électricité*. 2008 (cf. p. 6).
- [2] John David JACKSON, Christian JEANMOUGIN et Jean-Pol VIGNERON. *Electrodynamique classique: cours et exercices d'électromagnétisme*. Dunod, 2001 (cf. p. 24, 129).
- [3] Lucas BEGUIN et al. "Direct measurement of the van der Waals interaction between two Rydberg atoms". In : *Physical review letters* 110.26 (2013), p. 263201 (cf. p. 30).
- [4] R. de BRUYN OUBOTER. "Kamerlingh Onnes découvre la supraconduction". In : *Pour la science* 235 (mai 1997) (cf. p. 35).
- [5] Steven DIGIANNURIO, Peter PEREZ DE CORCHO et Christopher PRUITT. *A History of the Divergence, Green's, and Stokes' Theorems*. <https://christopherpruitt.files.wordpress.com/2015/01/a-history-of-the-divergence-greens-and-stokes-theorems.pdf>. 2005 (visité le 2 juin 2020) (cf. p. 108).
- [6] Liang-Cheng TU et Jun LUO. "Experimental tests of Coulomb's Law and the photon rest mass". In : *Metrologia* 41.5 (2004), S136 (cf. p. 120).
- [7] H. GIÉ et J-P. SARMANT. *Électromagnétisme*. T. 1. Tec et Doc (Lavoisier), 1985 (cf. p. 134).
- [8] Jean PÉRICART. *Cours d'électricité théorique, Tome 1 : Electrostatique - Electrocinétiq*ue. 1962.

# Notations

Notations mathématiques utilisées dans ce cours.

Notation	Signification
$\triangleq$	relation de définition
$\sim$	égal en ordre de grandeur
$A \gg B$	$A$ très grand devant $B$
$A \ll B$	$A$ très petit devant $B$
$\bar{f}$	moyenne temporelle de $f(t)$
$\langle f \rangle$	moyenne d'ensemble de $f$
$f_{pp}$	amplitude crête-à-crête du signal $f(t)$
$f_{rms}$	valeur efficace du signal $f(t)$
$\frac{df}{dt}$	dérivée première par rapport au temps
$\frac{d^n f}{dt^n}$	dérivée n-ième par rapport au temps
$\underline{z}$	grandeur complexe
$\underline{z}^*$	complexe conjuguée
$\text{Re}(\underline{z})$	partie réelle d'un nombre complexe
$\text{Im}(\underline{z})$	partie imaginaire d'un nombre complexe
$\vec{u}$	vecteur unitaire
$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$	base cartésienne
$(r, \theta, z)$	coordonnées cylindriques
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$	base cylindrique
$(r, \theta, \varphi)$	coordonnées sphériques
$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$	base sphérique
$\ \vec{A}\ $ ou $A$	norme du vecteur $\vec{A}$
$A_z$	composante suivant l'axe $(Oz) = A_z = \vec{A} \cdot \vec{u}_z$
$\int_{\mathcal{D}}$	intégration sur un domaine $\mathcal{D}$
$\int_C \vec{A}(M) \cdot d\vec{\ell}$	circulation de $\vec{A}$ le long du circuit $C$
$\iint_S \vec{A}(M) \cdot \vec{n} dS$	Flux d'un champ vectoriel $\vec{A}$
$\iiint_V f(M) d\tau$	Intégrale de volume
$\vec{\text{grad}} f$ ou $\vec{\nabla} f$	gradient d'un champ scalaire
$\text{div} \vec{A}$ ou $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$	divergence d'un champ vectoriel
$\text{rot} \vec{A}$ ou $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$	rotationnel d'un champ vectoriel
$\Delta f = \nabla^2 f$	laplacien scalaire
$\sum_{\text{couples } (i,j)} = \sum_i \sum_{j < i}$	somme sur les couples $(i, j)$

# Grandeurs et constantes physiques

Grandeurs physiques		
Nom	Symbole	Unité SI
Admittance électrique	$Y$	S
Auto-inductance	$L$	H
Capacité électrique	$C$	F
Champ électrique	$E$	V.m <sup>-1</sup>
Champ magnétique	$B$	T
Charge électrique	$q, Q$	C
Conductivité électrique	$\gamma$	S.m <sup>-1</sup>
Conductance électrique	$G, g$	S
Constante de Hall	$R_H$	m <sup>3</sup> .C <sup>-1</sup>
Densité de courant électrique	$j$	A.m <sup>-2</sup>
Densité de particules	$n$	m <sup>-3</sup>
Densité d'énergie	$w$	J.m <sup>-3</sup>
Densité linéique de charge	$\lambda$	C.m <sup>-1</sup>
Densité surfacique de charge	$\sigma$	C.m <sup>-2</sup>
Densité volumique de charge	$\rho$	C.m <sup>-3</sup>
Déphasage	$\phi$	rad.
Energie	$\mathcal{E}$	J
Facteur gyromagnétique	$\gamma_0$	C.kg <sup>-1</sup>
Flux magnétique	$\phi_B$	Wb
force, résultante des forces	$f, F$	N
Force électromotrice	$e$	V
Fréquence	$\nu$	Hz
Impédance électrique	$Z$	$\Omega$
Intensité électrique	$i, I$	A
Masse	$m$	kg
Mobilité électrique	$\mu$	kg <sup>-1</sup> .s.C
Moment dipolaire électrique	$p$	C.m
Moment d'un couple	$\Gamma$	N.m
Moment quadripolaire électrique	$\mathcal{Q}$	C.m <sup>2</sup>
Moment dipolaire magnétique	$m$	A.m <sup>2</sup>
Période	$T$	s
Permittivité diélectrique relative	$\epsilon_r$	sans unité
Polarisabilité	$\alpha$	m <sup>3</sup>
Potentiel électrique	$V$	V
Puissance	$\mathcal{P}$	W
Quantité de mouvement	$p$	kg.m.s <sup>-1</sup>
Rayon de courbure	$R$	m
Résistance électrique	$R, r$	$\Omega$
Surface (sa mesure)	$S$	m <sup>2</sup>
Travail	$W$	J
Température	$T$	K
Temps	$t$	s
Tension électrique	$u$ ou $U$	V
Vitesse	$v$	m.s <sup>-1</sup>
Volume (sa mesure)	$V$	m <sup>3</sup>
Vitesse angulaire, pulsation	$\omega$	rad.s <sup>-1</sup>

---

### Quelques constantes physiques

*les constantes sont fournies avec tous les chiffres significatifs connus*

---

Nom	Symbole	Valeur
Constante gravitationnelle	$\mathcal{G}$	$6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Permittivité diélectrique du vide	$\epsilon_0$	$8,854\,187\,81 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0$	$1,256\,637\,062 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Masse de l'électron au repos	$m_e$	$9,109\,383\,70 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton au repos	$m_p$	$1,672\,621\,923 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du neutron au repos	$m_n$	$1,674\,927\,498 \times 10^{-27} \text{ kg}$

---

#### Constantes définies par le SI (valeurs exactes)

---

Constante de Planck	$h$	$6,626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Vitesse de la lumière	$c$	$299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Fréquence hyperfine du $^{133}\text{Cs}$	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	$9\,192\,631\,770 \text{ Hz}$
Charge élémentaire	$e$	$1,602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante de Boltzmann	$k_B$	$1,380\,649 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = k_B N_A$	$8,314\,462\,618 \dots \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Nombre d'Avogadro	$N_A$	$6,022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Efficacité lumineuse	$K_{\text{cd}}$	$683 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$

---

(source : 2018 CODATA)