

Jimmy ROUSSEL

OPTIQUE ONDULATOIRE

Cours

Accessible en ligne : <https://femto-physique.fr/optique/>

Dernière mise à jour : 22 août 2019

Table des matières

1	MODÈLE SCALAIRE DE LA LUMIÈRE	3
2	INTERFÉRENCE À DEUX ONDES	14
3	INTERFÉRENCE À N ONDES	31
4	THÉORIE DE LA DIFFRACTION	46
5	DIFFRACTION DE FRAUNHOFER	56
A	NOTION DE COHÉRENCE	73

1 MODÈLE SCALAIRE DE LA LUMIÈRE

Dans une première partie, nous avons vu comment une théorie géométrique de la lumière, essentiellement basée sur le concept de rayon lumineux, permet d'interpréter simplement la formation des images à l'aide de lentilles et/ou miroirs. Cette théorie approximative ne rend pas compte de l'aspect ondulatoire de la lumière. Or, on sait depuis la théorie électromagnétique de Maxwell et de sa confirmation par Hertz, que la lumière est une onde électromagnétique. Dès lors, certains phénomènes optiques ne peuvent pas s'interpréter sans tenir compte de ces aspects ondulatoires. Nous proposons dans ce chapitre une théorie ondulatoire de la lumière moins complète que la théorie de Maxwell mais suffisante dans de nombreux cas. Ceci étant dit, nous rappelons quelques résultats de la théorie électromagnétique afin que le lecteur garde à l'esprit la nature **vectorielle** et **transversale** de la lumière, laquelle permet d'expliquer certains phénomènes qui échappent à la théorie scalaire.

Sommaire

1.1	Nature électromagnétique de la lumière	4
1.1.1	Propagation dans le vide	4
1.1.2	Transport de l'énergie	6
1.1.3	Propagation dans un milieu transparent	7
1.2	Approximation scalaire	8
1.2.1	Théorie scalaire de la lumière	8
1.2.2	Chemin optique	10
1.3	Représentations d'une onde scalaire monochromatique	11
1.3.1	Vecteurs de Fresnel	11
1.3.2	Notation complexe	12

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/optique/modele-scalaire.php>

1.1 Nature électromagnétique de la lumière

En 1865, le physicien écossais James Clerk Maxwell publie son troisième et dernier article autour des phénomènes électriques et magnétiques et perce le secret de la lumière. D'une part, il réussit le tour de force d'unifier les phénomènes électriques et magnétiques en inventant le concept de champ électromagnétique pour lequel il donne les lois (20 équations qu'Oliver Heaviside réduira à 4 et qui forment ce que l'on appelle de nos jours, les *équations de Maxwell*). D'autre part, sur la base de ces équations, Maxwell prédit l'existence d'ondes électromagnétiques et calcule leur vitesse dans le vide. La valeur qu'il trouve est si proche de celle de la lumière (mesurée par Fizeau et Foucault avec une assez bonne précision) que la coïncidence lui semble peu probable. Il écrira :

The agreement of the results seems to show that light and magnetism are affections of the same substance, and that light is an electromagnetic disturbance propagated through the field according to electromagnetic laws – J.C Maxwell

Neuf ans après la mort de Maxwell, en 1888, Heinrich Hertz confirme l'existence de telles ondes en découvrant les ondes radio. Il devient alors très clair que la lumière visible en est un cas particulier, avec des fréquences trop grandes pour être directement accessible.

Dans la suite, nous rappelons quelques résultats concernant les ondes électromagnétiques. Pour plus de précision, on renvoie le lecteur à un cours d'électromagnétisme[1].

1.1.1 Propagation dans le vide

Dans le vide, d'après les équations de Maxwell, le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) obéit à l'équation d'onde

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

où Δ désigne l'opérateur laplacien vectoriel. La constante c , homogène à une vitesse, représente la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques. Numériquement, on trouve

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

C'est Kohlrausch et Weber qui déterminèrent les premiers cette vitesse à partir des constantes électrique et magnétique. Le bon accord avec la vitesse de la lumière permit à Maxwell de conjecturer la nature électromagnétique de la lumière.

Intéressons-nous à une solution particulière qui joue un rôle important en optique : **l'onde plane progressive harmonique**. Il est facile de vérifier qu'un champ électrique de la forme

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{u} \quad \heartsuit \quad (1.1)$$

est solution de l'équation d'onde. Cette solution est caractérisée par les paramètres suivants.

1. Son **amplitude** E_0 . On verra que l'énergie transportée par l'onde en dépend.
2. Sa **pulsation** ω (rad.s^{-1}) qui est liée au nombre ν de cycles d'oscillations par seconde, qu'on appelle la **fréquence** (Hz). On a la relation

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \heartsuit \quad (1.2)$$

3. Son **vecteur d'onde** \vec{k} qui indique sa direction de propagation. Sa norme k est liée à la pulsation. En effet, l'onde plane harmonique vérifie

$$\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

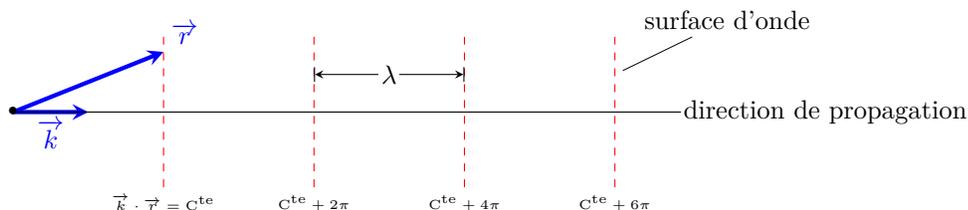
de sorte qu'il s'agit bien d'une solution de l'équation d'onde à condition de poser

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \heartsuit \quad (1.3)$$

Par ailleurs, l'ensemble des points qui sont dans le même état vibratoire à l'instant t vérifie

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = C^{te} + 2p\pi \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Il s'agit d'un ensemble de plans perpendiculaires à \vec{k} et périodiquement espacés. Ces plans sont les surfaces d'onde (d'où le terme d'onde plane).



Ces surfaces d'onde se déplacent au cours du temps à la vitesse c . Par définition, la distance qui sépare deux plans d'onde consécutifs est la **longueur d'onde**. On a donc $k\lambda = 2\pi$, d'où

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{c}{\nu} = cT \quad \heartsuit \quad (1.4)$$

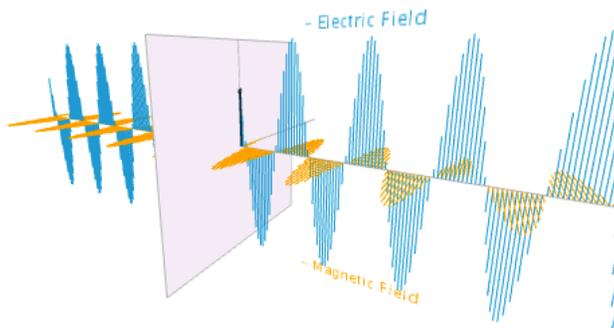
Comme on le voit, la longueur d'onde est aussi la distance que parcourt l'onde durant une période $T = 1/\nu$.

4. Son **état de polarisation** décrit par le vecteur unitaire \vec{u} qui se trouve dans le plan d'onde¹.

Enfin, on peut montrer que le champ magnétique \vec{B} forme avec \vec{E} et \vec{k} une trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ orthogonal direct et que son amplitude vaut $B_0 = E_0/c$, ce qui se résume par

$$\vec{B} = (\vec{k}/\omega) \wedge \vec{E}$$

Pour une illustration, voir la figure ci-dessous ou la [simulation](#).



1. L'état de polarisation peut également tourner à la vitesse angulaire ω en décrivant une ellipse. Dans ce cas, l'expression (1.1) est à modifier. Pour une telle onde se propageant suivant l'axe Oz , on écrira

$$\vec{E} = E_{x0} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E_{y0} \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{u}_y$$

Le spectre électromagnétique est quasi-totalement invisible par un œil humain, sauf une petite portion dite **spectre visible** qui s'étend du rouge (longueur d'onde de 750 nm) au violet (longueur d'onde de 400 nm) en passant par toutes les couleurs de l'arc-en-ciel (communément divisé en rouge, orange, jaune, vert, bleu, indigo et violet). La lumière peut être **polychromatique**, elle est alors constituée de plusieurs longueurs d'onde, ou **monochromatique**, elle est alors constituée d'une seule longueur d'onde. Les sources monochromatiques au sens strict du terme n'existent pas, mais certains lasers produisent une lumière dont le spectre est très étroit. On les considère donc généralement comme des sources monochromatiques.

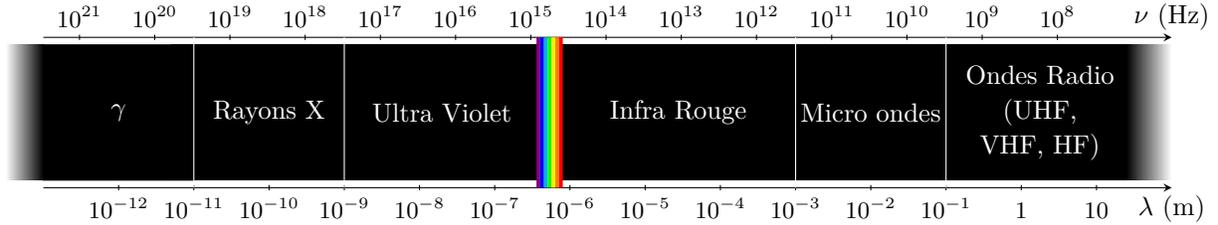


Fig. 1.1 – Spectre électromagnétique

1.1.2 Transport de l'énergie

Dans le vide, une onde électromagnétique transporte de l'énergie sous forme électrique et magnétique à la vitesse c . Ce mode de propagation de l'énergie est appelé **transport radiatif** et permet notamment au Soleil de chauffer notre belle planète. Le flux radiatif correspondant est décrit par le **vecteur de Poynting**

$$\vec{\Pi} \triangleq \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad [\text{W.m}^{-2}]$$

Le flux d'énergie électromagnétique ϕ_{em} (en watt) rayonnée à travers une surface (S) s'écrit

$$\phi_{\text{em}} = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

Intéressons-nous au cas d'une onde plane harmonique se propageant dans le vide. Sachant que $\vec{B} = (\vec{k}/\omega) \wedge \vec{E}$, il vient

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \\ &= \frac{1}{\omega\mu_0} \vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) \\ \vec{\Pi} &= \frac{1}{\omega\mu_0} E^2 \vec{k} \end{aligned}$$

On peut retenir que, dans le vide, le transport de l'énergie suit la direction de propagation. Le flux d'énergie reçue sur un capteur d'aire S situé perpendiculairement à la direction de propagation s'écrit donc

$$\phi_{\text{em}} = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \frac{S}{\mu_0 c} E^2(\vec{r}, t)$$

Or, pour de la lumière, le champ électrique varie au cours du temps à une fréquence supérieure à 10^{14} Hz. Ces variations sont inaccessibles, compte tenu du temps de réponse limité des capteurs photométriques. C'est pourquoi la réponse des détecteurs est fonction du flux moyen :

$$\langle \phi_{\text{em}} \rangle = \frac{S}{\mu_0 c} \langle E^2(\vec{r}, t) \rangle$$

où le symbole $\langle \rangle$ désigne la moyenne temporelle. Ainsi, un détecteur (capteur CCD, œil,...) est sensible au carré moyen du champ électrique. Dans toute la suite, on appelle **intensité du rayonnement**, la quantité

$$I \triangleq \langle E^2(\vec{r}, t) \rangle \quad \heartsuit \quad (1.5)$$

Cette grandeur mesure, en unité arbitraire, la répartition du rayonnement déposé en différents points de l'espace.

Remarque : La notion d'intensité ne doit pas être confondue avec l'intensité lumineuse d'une source (flux lumineux émis par unité d'angle solide).

1.1.3 Propagation dans un milieu transparent

La propagation des ondes électromagnétiques est plus complexe dans les milieux matériels, car la matière interagit avec les champ électrique et magnétique transportés par l'onde. Pour décrire le comportement du rayonnement il faut compléter les équations de Maxwell par des équations qui décrivent la réponse du milieu au champ électromagnétique. Nous allons considérer exclusivement le cas des milieux diélectriques non magnétiques (comme le verre) qui jouent un rôle important en optique. Dans de tels milieux, la réponse de la matière à une onde électromagnétique se traduit essentiellement par l'apparition d'une **polarisation**. Si le champ électrique n'est pas trop important², la polarisation s'écrit

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \heartsuit \quad (1.6)$$

où χ_e est la **susceptibilité électrique** du milieu (sans dimension). Cette relation traduit la linéarité et l'isotropie (χ_e est un scalaire) de la réponse. On montre que dans de tels milieux, le champ électromagnétique vérifie l'équation d'onde

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad v = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi_e}}$$

Ainsi, dans un milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope, les ondes électromagnétiques se propagent à une vitesse inférieure à c , donnée par $v = c/\sqrt{1 + \chi_e}$. On définit l'**indice optique** par

$$n \triangleq \frac{c}{v} = \sqrt{1 + \chi_e} \quad \heartsuit \quad (1.7)$$

grandeur qui intervient dans la loi de la réfraction. Pour les milieux transparents usuels, l'indice est de l'ordre de l'unité comme l'indique le tableau ci-dessous.

milieu	air	eau	verre	diamant
indice	1,0003	1,33	1,5-1,8	2,4

Tab. 1.1 – Quelques indices optiques dans le domaine du visible

Dans ces milieux, la longueur d'onde λ' – distance que parcourt l'onde durant une période – dépend de l'indice de réfraction puisque

$$\lambda' = vT = \frac{cT}{n} = \frac{\lambda}{n}$$

Pour éviter toute confusion, lorsque l'on indiquera la longueur d'onde d'une source lumineuse, on choisira de préciser sa longueur d'onde λ dans le vide qui ne dépend que de la fréquence de la radiation.

2. Dans le cas contraire, la réponse fait apparaître des termes non linéaires. L'étude de tels milieux constitue une branche de l'optique que l'on appelle *optique non linéaire*.

Remarque : rigoureusement, la susceptibilité électrique dépend de la fréquence d'oscillation du champ électrique de sorte que l'indice varie avec la longueur d'onde (dispersion). De surcroît, \vec{P} n'oscille pas en phase avec \vec{E} contrairement à ce que laisse penser la formule (1.6). En fait, on peut conserver la forme de cette relation à condition d'utiliser la notation complexe (*cf.* plus loin) et de définir une susceptibilité complexe. Dans ce cas, la partie imaginaire correspond à la composante de la polarisation qui oscille en quadrature de phase avec le champ électrique, laquelle est responsable d'une dissipation de l'énergie électromagnétique. Autrement dit, la notion de susceptibilité complexe permet d'expliquer non seulement le phénomène de propagation mais aussi la diminution de l'énergie transportée par l'onde au cours du trajet (phénomène d'absorption).

1.2 Approximation scalaire

Si on oublie les aspects quantiques de la lumière, on peut dire que l'ensemble des phénomènes optiques est très bien décrit par la théorie de Maxwell. Il serait alors tentant d'adopter un point de vue purement électromagnétique pour appréhender toute l'optique. En fait, ce n'est pas forcément une bonne idée, pour deux raisons :

- Même pour des situations simples, les équations de Maxwell ont le mauvais goût de déboucher sur des calculs ardues voire inextricables. Certes, il existe quelques solutions exactes³, mais une simplification est souvent nécessaire.
- Historiquement, un modèle fécond et simple à appréhender fut inventé avant l'avènement de la théorie de Maxwell. Bien qu'approximative, cette approche, dite théorie scalaire de la lumière, rend compte de la plupart des situations que l'on rencontre en optique.

Aussi, c'est cette théorie qui nous guidera pour ce cours.

1.2.1 Théorie scalaire de la lumière

Nous cherchons à décrire la propagation de la lumière dans les milieux transparents dont l'indice de réfraction peut varier dans l'espace. L'approche que nous adoptons est appelée *approximation scalaire* car elle repose sur deux approximations :

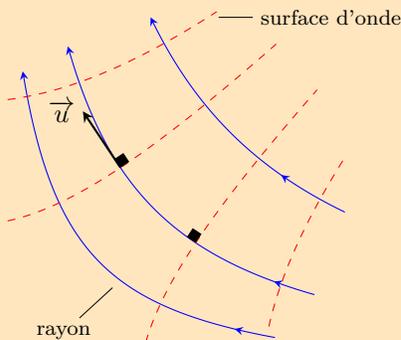
1. la notion de rayon lumineux déjà utilisée en optique géométrique ;
2. la notion d'onde scalaire qui permet de définir l'état vibratoire de chaque point d'un rayon.

3. JACKSON, J. D. *et al. Electrodynamique classique : cours et exercices d'électromagnétisme* (Dunod, 2001).

Approximation scalaire de la lumière

La lumière (l'énergie lumineuse) est décrite par un ensemble de *rayons lumineux indépendants*. Ces rayons lumineux sont caractérisés par une direction de propagation \vec{u} et une vitesse de propagation $v = c/n$, où n désigne l'indice optique local du milieu. Un rayon lumineux est une courbe tangente à \vec{u} en chacun de ses points.

De plus, on définit l'état vibratoire de l'onde lumineuse par une grandeur scalaire, notée $\psi(\vec{r}, t)$, qui représente la composante du champ électrique de l'onde électromagnétique le long de sa direction de polarisation. Localement, l'onde lumineuse présente une structure d'onde plane de sorte que le rayon lumineux est perpendiculaire à la surface d'onde (Théorème de Malus).



Enfin, l'intensité du rayonnement est, en valeur arbitraire, $I = \langle \psi(\vec{r}, t)^2 \rangle$.

Il faut savoir que cette approximation se justifie à partir des équations de Maxwell à condition de supposer que l'indice de réfraction varie sur des échelles bien supérieures à la longueur d'onde. Dans ce cas, les rayons suivent une trajectoire donnée par le principe de Fermat (cf. complément sur l'équation iconale). Par ailleurs, cette approximation ne rend pas compte des phénomènes de polarisation : l'onde en réalité n'est pas scalaire mais vectorielle transversale.

Remarque : Lorsque le milieu est constitué de lentilles et/ou diaphragmes, l'indice de réfraction $n(M)$ subit des discontinuités aux bords de ces instruments. Aussi, l'approximation scalaire perd de sa pertinence au voisinage des bords et le principe de Fermat est violé pour les rayons passant près des bords. Ceci conduit au phénomène de diffraction que nous verrons plus tard.

Finalement, dans le cadre de l'approximation scalaire, on peut représenter une onde lumineuse monochromatique par le champ scalaire

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r}) \cos(\omega t - \varphi(\vec{r}))$$

Une surface d'onde correspond à l'ensemble des points tel que $\phi = \omega t - \varphi(\vec{r}) = C^{\text{te}} + 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Les rayons lumineux, perpendiculaires aux surfaces d'onde, sont les lignes de champ du vecteur $-\vec{\nabla}\phi$. Citons quelques exemples d'ondes scalaires monochromatiques que nous aborderons dans ce cours.

Onde sphérique divergente. Une source qui rayonne de façon identique dans toutes les directions depuis un point O, s'écrit en coordonnées sphérique

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{\psi_0}{r} \cos(\omega t - kr) \quad \text{avec } r = \text{OM}$$

Les surfaces d'onde ont pour équation

$$\phi = \omega t - kr = C^{\text{te}} + 2p\pi \quad p \in \mathbb{Z} \quad \text{soit} \quad r = C^{\text{te}} + \frac{\omega}{k}t + p \frac{2\pi}{k}$$

ce qui correspond à des sphères de centre O se dilatant à la vitesse de propagation $v = \omega/k$. Les rayons lumineux, perpendiculaires aux surfaces d'onde, divergent de façon radiale à partir du point source⁴ O. Concernant l'amplitude, celle-ci décroît comme $1/r$ par conservation de l'énergie : au fur et à mesure que les surfaces d'onde se dilatent, l'aire de celles-ci augmentent comme r^2 ce qui impose à l'intensité de décroître comme $1/r^2$.

Onde sphérique convergente. On obtient une onde sphérique convergente en changeant k en $-k$, ce qui donne

$$\psi(\vec{r}', t) = \frac{\psi_0}{r} \cos(\omega t + kr)$$

Les rayons sont alors radiaux et convergents.

Onde plane. Éloignons une source lumineuse isotrope à très grande distance. Dans ce cas, les rayons qui nous arriveront seront quasi-parallèles et les surfaces d'onde quasi-planes. Dans ce cas, la structure locale de l'onde peut être modélisée par

$$\psi(\vec{r}', t) = \psi_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}')$$

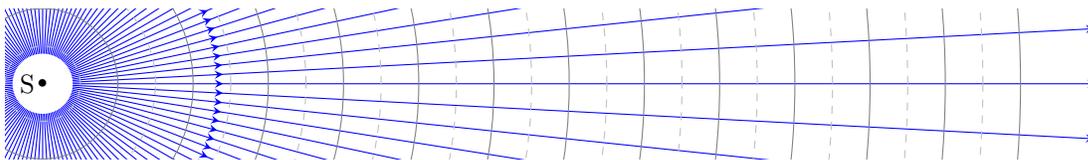


Fig. 1.2 – « Aplatissement » des ondes sphériques.

1.2.2 Chemin optique

Le chemin optique parcouru par un rayon entre deux points A et B, est la quantité

$$L_{AB} \triangleq \int_A^B n ds$$

où s désigne l'abscisse curviligne le long du rayon considéré. Cette quantité, homogène à une longueur, est liée à la durée de propagation du rayon. En effet, entre deux points A et B, cette durée τ s'écrit

$$\tau = \int_A^B \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int_A^B n ds = \frac{L_{AB}}{c}$$

Supposons maintenant un rayon monochromatique de pulsation ω . Au point A, son état vibratoire est donné par

$$\psi(A, t) = \psi_0(A) \cos(\omega t - \varphi)$$

où φ est la phase à l'origine. Au point B, du fait de la propagation, on a

$$\psi(B, t) = \psi_0(B) \cos(\omega(t - \tau) - \varphi) = \psi_0(B) \cos\left(\omega t - \frac{\omega L_{AB}}{c} - \varphi\right)$$

En utilisant $\omega/c = 2\pi/\lambda$, on trouve que le long d'un rayon, le déphasage entre deux points A et B est donné par la relation

$$\Delta\phi_{AB} = \frac{2\pi}{\lambda} L_{AB}$$

4. Le lecteur attentif aura noté que l'amplitude de l'onde diverge (au sens mathématique) lorsque $r = 0$. En réalité le modèle de l'onde sphérique n'est plus valide à proximité de la source.

Pour une onde monochromatique, le déphasage entre deux points d'un rayon ne dépend que du chemin optique entre ces points.

En fait, les choses sont un peu plus compliquées, car l'onde monochromatique est une idéalisation. En réalité, le caractère monochromatique est toujours approché et l'état vibratoire d'une source quasi-monochromatique se met plutôt sous la forme

$$\psi(A, t) = \psi_0(A) \cos(\omega t - \varphi(t))$$

où $\varphi(t)$, dépend du processus d'émission et varie au cours du temps de façon imprévisible sur une échelle plus ou moins longue, suivant la cohérence de la source (*cf.* chapitre sur la cohérence). Dans ce cas, le calcul précédent est à modifier légèrement. On trouve que le long d'un rayon, le déphasage entre deux points A et B est donné par la relation

$$\Delta\phi_{AB} = \frac{2\pi}{\lambda} L_{AB} + \Delta\varphi \quad \text{avec} \quad \Delta\varphi = \varphi(t - \tau) - \varphi(t) \quad \heartsuit \quad (1.8)$$

Autrement dit, le déphasage entre deux points d'un même rayon présente deux contributions : l'une qui augmente au cours du trajet à cause de la propagation à vitesse finie, l'autre qui varie à cause du processus d'émission.

1.3 Représentations d'une onde scalaire monochromatique

1.3.1 Vecteurs de Fresnel

Considérons un signal sinusoïdal $\psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$. On peut penser à l'état vibratoire d'une onde lumineuse en un point de l'espace, mais cela peut tout aussi bien être un signal électrique dans un circuit. On peut interpréter ce signal comme la projection sur l'axe Ox d'un vecteur $\vec{\psi}$ du plan de longueur A faisant un angle $\omega t + \varphi$ par rapport à l'axe Ox . Un tel vecteur tournant est appelé *phaseur* ou *vecteur de Fresnel*.

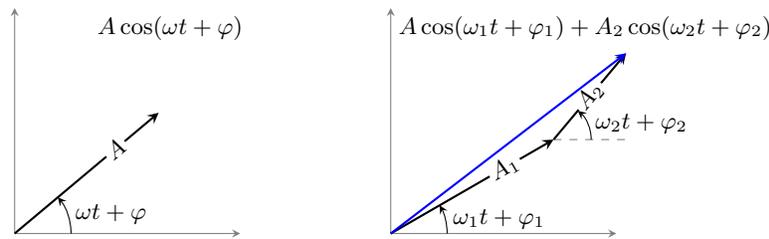


Fig. 1.3 – Vecteurs de Fresnel.

L'intérêt de cet outil est qu'il permet de ramener le problème d'une somme de signaux harmoniques à un problème d'addition vectoriel. Par exemple, imaginons deux ondes harmoniques de phase $\omega_1 t + \varphi_1$ et $\omega_2 t + \varphi_2$ et d'amplitude A_1 et A_2 arrivant en un point. L'onde résultante

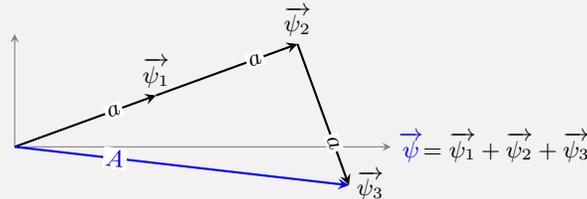
$$\psi(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = A(t) \cos \phi(t)$$

a pour représentant vectoriel, le vecteur obtenu en mettant bout à bout les deux phaseurs : $A(t)$ est la longueur du vecteur résultant et $\phi(t)$ l'angle que fait ce même vecteur par rapport à l'axe Ox . Cette méthode a surtout un intérêt lorsque les signaux que l'on ajoute sont tous synchrones : dans ce cas, tous les phaseurs tournent à la même vitesse angulaire, et on peut fixer arbitrairement $t = 0$ pour simplifier l'étude. Une fois l'amplitude résultante obtenue, on en tire l'intensité lumineuse

$$I = \langle \psi^2 \rangle = \frac{1}{2} A^2$$

Exemple –

Considérons trois ondes synchrones de même amplitude a arrivant sur un capteur. Cherchons quel est l'intensité résultant lorsque deux d'entre elles vibrent en phase et en quadrature de phase (déphasage de $\pi/2$) avec la troisième. Commençons par déterminer l'amplitude A de l'onde résultante. Appelons $\vec{\psi}_i$ avec $i \in (1, 2, 3)$ les trois phaseurs associés aux trois ondes. Celles-ci vibrent avec la même amplitude, leurs phaseurs ont tous la même longueur. Supposons ψ_1 et ψ_2 en phase, et ψ_3 en retard de $\pi/2$ par rapport à ψ_1 et ψ_2 . Dans ce cas, $\vec{\psi}_1$ est colinéaire à $\vec{\psi}_2$, et $\vec{\psi}_3$ fait un angle de $-\pi/2$ par rapport aux deux autres phaseurs. En mettant ces trois vecteurs bout à bout, on construit un triangle rectangle dont l'hypoténuse donne la longueur A .



En vertu du théorème de Pythagore, on a $A^2 = (2a)^2 + a^2 = 5a^2$ soit $A = \sqrt{5}a$. Si I_0 désigne l'intensité des trois ondes, on obtient finalement $I = 5I_0$. Cet exemple illustre que lors d'une superposition d'ondes, ni les amplitudes ni les intensités s'ajoutent, a priori.

1.3.2 Notation complexe

On sait qu'un vecteur du plan de composantes (x, y) peut être associé à un nombre complexe $z = x + iy$. Prolongeant la méthode des phaseurs, il est donc tout naturel d'associer à un signal harmonique $\psi(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, le nombre complexe

$$\underline{\psi}(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)} = \underline{A} e^{i(\omega t)} \quad \text{avec} \quad \underline{A} = A e^{i\varphi}$$

Le signal réel s'obtient simplement en prenant la partie réelle du complexe associé :

$$A \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re} \left(\underline{A} e^{i(\omega t)} \right)$$

L'intérêt de la notation complexe est qu'il permet de faire toute opération linéaire telle que l'addition, la dérivation ou l'intégration, puis de prendre la partie réelle à la fin sans perdre d'information. En effet,

$$\begin{aligned} \text{Re}(z_1 + z_2) &= \text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2) \\ \text{Re}\left(\frac{dz}{dx}\right) &= \frac{d\text{Re}(z)}{dx} \\ \text{Re}\left(\int z dx\right) &= \int \text{Re}(z) dx \end{aligned}$$

Il se trouve que toutes ces opérations sont en générale beaucoup plus simples à mener avec les grandeurs complexes qu'avec les grandeurs réelles.

Le nombre complexe \underline{A} est appelé **amplitude complexe**. Sa détermination permet de déduire l'amplitude du signal réel ainsi que la phase :

$$A = |\underline{A}| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(\underline{A})$$

En optique ondulatoire, c'est l'intensité de l'onde qui nous intéresse :

$$I = \frac{1}{2} |\underline{A}|^2 = \frac{1}{2} \underline{A} \underline{A}^* \quad \heartsuit \quad (1.9)$$

Exemple –

Reprenons l'exemple du paragraphe précédent où trois ondes interfèrent, deux vibrant en phase, la troisième étant en quadrature de phase par rapport aux autres. Les amplitudes complexes de ces trois ondes s'écrivent donc

$$\underline{A}_1 = \underline{A}_2 = a \quad \text{et} \quad \underline{A}_3 = a e^{-i\pi/2} = -i a$$

Ainsi, l'amplitude complexe de l'onde résultante s'écrit $\underline{A} = 2a - i a$ et l'intensité vaut

$$I = \frac{1}{2}(2a - i a)(2a + i a) = \frac{5}{2}a^2 = 5I_0$$

L'intensité est multipliée par cinq conformément au résultat de l'exemple précédent.

Conclusion

Malgré la nature électromagnétique de la lumière, il est possible, en première approximation, de réduire celle-ci à une onde scalaire dont le transport de l'énergie peut être décrit par le concept de rayon lumineux. Pour une onde monochromatique, on distingue deux caractéristiques : l'amplitude de l'onde qui est à relier à l'intensité du rayonnement, et la fréquence de l'onde qui détermine son domaine spectral (et sa couleur si la lumière est visible). Enfin, au cours du trajet, l'onde se déphase via la relation

$$\Delta\phi_{AB} = \frac{2\pi}{\lambda} L_{AB} + \Delta\varphi \quad \text{avec} \quad \Delta\varphi = \varphi(t - \tau) - \varphi(t)$$

2 INTERFÉRENCE À DEUX ONDES

Lorsque l'on superpose deux faisceaux monochromatiques, l'intensité qui en résulte varie spatialement entre un maximum qui dépasse la somme des intensités et un minimum qui peut être nul. Ce phénomène est appelé *interférence* et concerne tout phénomène ondulatoire. En optique, son observation est rendue difficile car les sources réelles ne sont jamais absolument monochromatiques : elles sont le siège de fluctuations aléatoires de phase et d'amplitude qui brouillent les interférences. Un dispositif de division du front d'onde ou d'amplitude est souvent nécessaire pour fabriquer, à partir d'une source, deux sources secondaires dites *cohérentes*.

Après une introduction au phénomène d'interférence à deux ondes, c'est à de tels dispositifs interférométriques qu'est consacré ce chapitre.

Sommaire

2.1	Interférence de deux ondes monochromatiques	15
2.1.1	Cas de deux ondes non synchrones	15
2.1.2	Cas de deux ondes synchrones	15
2.1.3	Rôle de la polarisation	16
2.1.4	Contraste des franges d'interférences	17
2.1.5	Système interférentiel	18
2.2	Division du front d'onde	18
2.2.1	Expérience d'Young	18
2.2.2	Répartition de l'intensité	20
2.2.3	Dispositifs équivalents	21
2.3	Division d'amplitude	22
2.3.1	Division d'amplitude par une lame	22
2.3.2	Franges d'égale inclinaison	23
2.3.3	Franges d'égale épaisseur	24
2.3.4	Interféromètre de Michelson	26
2.3.5	Autres interféromètres à division d'amplitude	29

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/optique/interference-a-deux-ondes.php>

2.1 Interférence de deux ondes monochromatiques

2.1.1 Cas de deux ondes non synchrones

Envisageons tout d'abord deux sources S_1 et S_2 produisant deux ondes monochromatiques non synchrones, c'est-à-dire de fréquences différentes. Examinons ce qu'il se passe dans la région où les deux ondes se superposent. En un point M de ce champ d'interférence, l'état ondulatoire de chaque onde peut s'écrire

$$\psi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \quad \text{et} \quad \psi_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

où ω_1 et ω_2 sont deux pulsations différentes. Lorsque S_1 (resp. S_2) est seule active, elle produit un rayonnement d'intensité $I_1 = A_1^2/2$ (resp. $I_2 = A_2^2/2$). En revanche, quand les sources sont simultanément actives, l'onde résultante vaut $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Élevons ψ au carré :

$$\psi^2 = A_1^2 \cos^2(\omega_1 t - \phi_1) + A_2^2 \cos^2(\omega_2 t - \phi_2) + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

Prenons maintenant la moyenne temporelle pour obtenir l'intensité de l'onde résultante. Rappelons au passage que

$$\langle \cos(at) \cos(bt) \rangle = \langle \sin(at) \sin(bt) \rangle = \begin{cases} 1/2 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

Aussi, on obtient

$$I = \langle \psi^2 \rangle = \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 = I_1 + I_2$$

Superposition de deux ondes non synchrones

Lorsque deux ondes non synchrones se superposent, l'intensité qui en résulte est simplement la somme des intensités de chacune des ondes.

2.1.2 Cas de deux ondes synchrones

Supposons maintenant les deux ondes lumineuses synchrones de pulsation commune ω . L'état ondulatoire de l'onde résultante en M s'écrit

$$\psi(M, t) = A_1 \cos(\omega t - \phi_1) + A_2 \cos(\omega t - \phi_2)$$

d'où l'on déduit l'intensité du rayonnement en M :

$$I(M) = \langle \psi(M, t)^2 \rangle = \langle A_1^2 \cos^2(\omega t - \phi_1) + A_2^2 \cos^2(\omega t - \phi_2) + 2A_1 A_2 \cos(\omega t - \phi_1) \cos(\omega t - \phi_2) \rangle$$

Sachant que

$$\langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle = 1/2 \quad \text{et} \quad \cos(\omega t - \phi_1) \cos(\omega t - \phi_2) = \frac{1}{2} [\cos(2\omega t - \phi_1 - \phi_2) + \cos(\phi_2 - \phi_1)]$$

on obtient

$$I(M) = \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 + A_1 A_2 \langle \cos \Delta\phi \rangle$$

Avec $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$, le déphasage entre les deux ondes. Finalement, si une source S_1 produit en M une intensité I_1 et qu'une deuxième source produit une intensité I_2 , alors les deux sources, simultanément actives, produisent en M une onde d'intensité

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Delta\phi \rangle \quad \text{avec} \quad \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad \heartsuit \quad (2.1)$$

Comme on le voit, l'intensité résultant de la superposition de deux ondes *n'est pas* égal à la somme des intensités. On dit qu'il y a un **phénomène d'interférence** ou que les ondes interfèrent. Le terme $2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Delta\phi \rangle$ représente le **terme d'interférence**.

Ce phénomène, assez couramment observé en acoustique, ne s'observe pas si facilement dans le domaine optique. Afin de comprendre pourquoi, explicitons le terme $\langle \cos \Delta\phi \rangle$. Si l'onde ψ_1 est issue d'une source S_1 , on a vu que son retard de phase est donné en M par la quantité

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} L_1 + \varphi_1$$

avec L_1 le chemin optique le long du trajet $\widehat{S_1 M}$ et φ_1 la phase à l'origine qui dépend du processus d'émission. De la même manière,

$$\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} L_2 + \varphi_2$$

de sorte que

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta + \Delta\varphi \quad \text{avec} \quad \delta = L_2 - L_1 \quad \text{et} \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

La différence de chemin optique δ est souvent appelée *différence de marche*. On distingue essentiellement deux cas :

1. $\Delta\varphi$ varie de façon aléatoire. C'est par exemple le cas lorsque les deux sources quasi-monochromatiques sont indépendantes. Le processus d'émission fait que φ_2 et φ_1 varient de façon imprévisible avec un temps caractéristique τ_c assez court. Le détecteur va donc moyenniser un grand nombre de figures d'interférences de sorte que $\langle \cos \Delta\phi \rangle = 0$. Il n'y'a pas d'interférence. On dit que les sources sont *incohérentes*.
2. φ_2 et φ_1 varient de façon imprévisible, mais pas $\Delta\varphi$. On dit que les sources sont *corrélées* ou *cohérentes* (voir le chapitre sur la cohérence). Le cas le plus simple correspond à deux sources qui émettent constamment en phase :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \implies \quad \Delta\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

En résumé

- Pour 2 sources indépendantes, l'intensité du rayonnement produit en M est la somme des intensités que chaque source produit en ce même point : $I = I_1 + I_2$.
- Pour 2 sources cohérentes, l'intensité produit en M s'écrit

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi \quad \text{avec} \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$$

2.1.3 Rôle de la polarisation

L'analyse faite jusqu'ici s'inscrit dans le cadre du modèle scalaire ; il oublie donc l'aspect vectoriel des ondes électromagnétiques. Regardons le rôle de la polarisation dans le phénomène d'interférence. Pour cela, considérons deux ondes planes monochromatiques de vecteurs de propagation \vec{k}_1 et \vec{k}_2 et polarisées suivant \vec{u}_1 et \vec{u}_2 . Écrivons le champ électrique résultant de la superposition des ondes en un point M de vecteur position \vec{r} :

$$\vec{E}_1(\mathbf{M}, t) = E_1 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varphi_1)} \vec{u}_1 \quad \text{et} \quad \vec{E}_2(\mathbf{M}, t) = E_2 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varphi_2)} \vec{u}_2$$

où l'on a adopté la notation complexe. Le champ résultant vaut donc

$$\vec{E}(\mathbf{M}, t) = e^{i\omega t} [E_1 e^{i\phi_1} \vec{u}_1 + E_2 e^{i\phi_2} \vec{u}_2] \quad \text{avec} \quad \phi_i = -\vec{k}_i \cdot \vec{r} + \varphi_i$$

L'intensité est proportionnelle au carré moyen du champ électrique. Sachant que $I_1 = E_1^2/2$ et $I_2 = E_2^2/2$, on trouve :

$$I = \frac{1}{2} \langle \vec{E} \cdot \vec{E}^* \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle (\cos \Delta\phi) \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \rangle$$

où $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ représente le déphasage entre les ondes. On voit ici que le terme d'interférence $2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos \Delta\phi (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) \rangle$ dépend de la polarisation. On notera que :

- d'une part, il ne peut pas y avoir d'interférence entre deux ondes polarisées à 90° , fait que ne peut expliquer la théorie scalaire et qui fut mis en évidence par François Arago ;
- d'autre part, si la polarisation est complètement aléatoire et non corrélée au déphasage $\Delta\phi$, alors $\langle \cos \Delta\phi (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) \rangle = \langle \cos \Delta\phi \rangle \langle \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \rangle = 0$ car $\langle \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \rangle = 0$. Aucune interférence n'est observée.

Finalement, générer des interférences lumineuses nécessite de produire une certaine corrélation de phase *et* de polarisation.

2.1.4 Contraste des franges d'interférences

Quand deux sources synchrones et cohérentes interfèrent, le déphasage $\Delta\phi$ n'est plus aléatoire mais dépend du point M. On observe alors une modulation spatiale de l'intensité résumée par la relation

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi(M)$$

Le terme **franges d'interférences** est une autre façon de désigner cette modulation d'intensité.

Attardons-nous sur le cas où $I_1 = I_2 = I_0$. L'intensité suit la loi simple

$$I = 2I_0 [1 + \cos \Delta\phi] \quad \heartsuit \quad (2.2)$$

Exercice – Retrouver la loi (2.2) à partir de la notation complexe des ondes.

Considérons une onde de phase nulle $\underline{\psi}_1 = a e^{i\omega t}$ et une onde déphasée de $\Delta\phi$, mais de même amplitude : $\underline{\psi}_2 = a e^{i\Delta\phi} e^{i\omega t}$. L'onde résultante s'écrit

$$\underline{\psi} = a (1 + e^{i\Delta\phi}) e^{i\omega t}$$

et l'intensité s'obtient en calculant le carré du module :

$$I = \frac{1}{2} \psi \psi^* = \frac{1}{2} a^2 (1 + e^{i\Delta\phi}) (1 + e^{-i\Delta\phi}) = a^2 (1 + \cos \Delta\phi)$$

On retrouve bien le même résultat, car $a^2 = 2I_0$.

Il existe des endroits où l'intensité est maximale et égale à $4I_0$ (et non à $2I_0$ en l'absence d'interférence). Ces endroits forment alors des franges brillantes et correspondent à la superposition d'ondes en phase ($\cos \Delta\phi = 1$) ce qui double l'amplitude et donc quadruple l'intensité du rayonnement. On parle d'*interférence constructive*.

Interférence constructive

Deux ondes interfèrent de façon constructive quand leur déphasage est un multiple de 2π , c'est-à-dire quand la différence de chemin optique est un multiple de longueur d'onde :

$$\Delta\phi = 2p\pi \quad \text{ou} \quad \delta = p\lambda \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z}$$

De même, il existe des endroits où l'intensité est nulle qu'on appelle des franges sombres et qui correspondent à $\cos \Delta\phi = -1$. Dans ce cas, les ondes qui se superposent vibrent en opposition de phase de sorte que l'onde résultante s'annule : on dit qu'il y a *interférence destructive*.

Interférence destructive

Deux ondes interfèrent de façon destructive quand leur déphasage est un multiple impair de π , c'est-à-dire quand la différence de chemin optique est un multiple impair de demi-longueur d'onde :

$$\Delta\phi = (2p + 1)\pi \quad \text{et} \quad \delta = (2p + 1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Quand les ondes qui interfèrent ne présentent pas la même intensité, il n'est plus possible d'obtenir $I = 0$. En effet, l'intensité vaut au minimum $I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$, terme non nul quand $I_1 \neq I_2$. Par conséquent, la modulation d'intensité est moins contrastée. Pour mesurer le contraste, on définit le terme sans dimension γ , donné par

$$\gamma \triangleq \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad \heartsuit \quad (2.3)$$

γ est appelé *contraste* ou *facteur de visibilité*. Dans le cas de l'interférence à deux ondes, on a $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ et $I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$ de sorte que le contraste vaut

$$\gamma = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \leq 1 \quad \text{d'où} \quad I = (I_1 + I_2)(1 + \gamma \cos \Delta\phi)$$

La figure ci-dessous montre comment la visibilité des franges diminue avec γ .

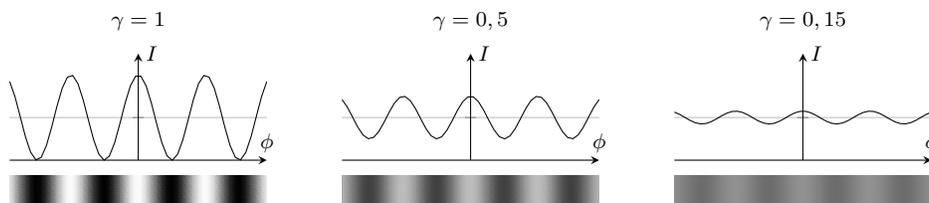


Fig. 2.1 – Influence du facteur γ sur la visibilité des franges.

2.1.5 Système interférentiel

Concrètement, pour réaliser au moins deux sources cohérentes, le plus simple consiste à utiliser l'un des deux dispositifs suivants :

- interféromètre à division d'amplitude : une surface partiellement réfléchissante opère une division du flux lumineux incident. Les deux faisceaux émergents sont cohérents et interfèrent après avoir parcouru des chemins différents.
- interféromètre à division du front d'onde : on prélève sur un faisceau incident deux faisceaux provenant de deux endroits différents du front d'onde.

2.2 Division du front d'onde**2.2.1 Expérience d'Young**

Thomas Young¹ réalisa en 1801 une expérience maintenant célèbre puisqu'elle permet de mettre en évidence le caractère ondulatoire de la lumière. Le dispositif consiste à éclairer à l'aide d'une source ponctuelle

1. **Thomas Young** (1773 Milverton, Somerset - 1829 Londres) : médecin et physicien anglais. Partisan du modèle ondulatoire de la lumière, il fit une expérience décisive en faveur de cette théorie. Passionné d'égyptologie il aida également au déchiffrement de la Pierre de Rosette.

monochromatique S , un écran percé de deux trous identiques S_1 et S_2 relativement proches et équidistants de S . Ces deux trous diffractent la lumière et se comportent comme deux sources ponctuelles secondaires vibrant en phase et produisant sur un écran placé à la distance D des franges d'interférences. Dans le champ d'interférence, on observe que :

- la lumière se répartit dans un système de franges alternativement sombres et claires quasi-rectilignes.
- ce phénomène d'interférence disparaît lorsque l'on masque l'un des trous.

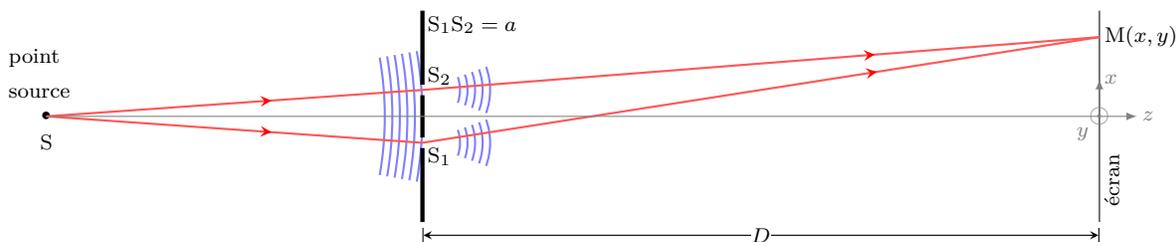


Fig. 2.2 – Expérience des trous d'Young.

Analyse qualitative

Il faut noter que S_1 et S_2 sont dans le même état vibratoire puisqu'ils proviennent du même front d'onde ; en ce sens il y a **division du front d'onde**. Par conséquent, le déphasage en M entre les ondes issues de S_1 et S_2 s'écrit

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(S_1M - S_2M)$$

Les franges brillantes sont telles que $\Delta\phi = 2p\pi$ c'est-à-dire $S_1M - S_2M = p\lambda$. Dans cette relation, p est un entier relatif qui désigne **l'ordre d'interférence**.

- $p = 0$ correspond au plan médiateur de $[S_1S_2]$ ce qui donne sur l'écran d'observation, une frange rectiligne horizontale. Cette frange a la particularité d'être achromatique : en effet, sa position étant indépendante de λ , elle sera blanche si la source est blanche.
- Pour $p \neq 0$, l'ensemble des points M tel que $S_1M - S_2M = p\lambda$ correspond à une hyperboloïde d'axe de révolution S_1S_2 . Dans le plan (xOz) on observe des branches d'hyperboles et sur l'écran des franges d'hyperboles quasi-rectilignes parallèles et horizontales (cf. Figure 2.3). On peut noter que ces franges n'existent pas toujours puisque la condition $S_1M - S_2M = p\lambda$ avec $p \neq 0$ n'a pas de solution lorsque $p\lambda > a$. C'est pourquoi, si $a < \lambda$, on ne voit que la frange centrale. En pratique, λ étant de l'ordre du μm et a de l'ordre du mm , on observe un grand nombre de franges².

Rappel mathématique

Soient deux points fixes F_1 et F_2 distants de a . L'ensemble des points M solution de

$$F_1M - F_2M = K \quad \text{avec} \quad -a < K < a$$

est une surface hyperboloïde de foyers F_1 et F_2 et d'axe de révolution F_1F_2 .

2. Le nombre $1 + 2a/\lambda$ donne le nombre de franges brillantes. En pratique le nombre de franges visibles est limité par le champ d'interférence et les phénomènes d'incohérence.

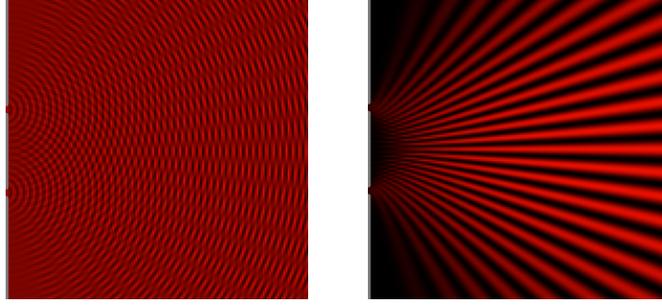


Fig. 2.3 – À gauche : état ondulatoire à un instant donné. On distingue nettement les zones d'amplitude nulle qui donnent lieu à des franges sombres. À droite : répartition de l'intensité. Les lieux d'égale intensité sont des branches d'hyperbole de foyer S_1 et S_2 . Pour clarifier, la décroissance de l'onde en $1/r$ a été volontairement oubliée.

2.2.2 Répartition de l'intensité

Cherchons à établir la répartition de l'intensité du rayonnement sur un écran placé parallèlement à l'écran source et à la distance $D \gg a$. Tout d'abord, si les trous sont de même taille, on peut considérer que l'onde produite par S_1 en un point de l'écran est de même amplitude que celle créée par S_2 . On peut donc se ramener à l'étude de l'interférence de deux ondes identiques issues de deux points différents. On a vu précédemment que l'intensité vaut dans ce cas

$$I = 2I_0(1 + \cos \Delta\phi) \quad \text{avec} \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(S_1M - S_2M)$$

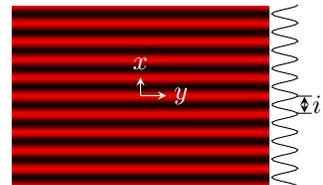
où I_0 est l'intensité obtenue lorsque l'on masque un trou. En pratique, le champ d'interférence est assez restreint (limité par le champ de diffraction et l'incohérence de la source), c'est pourquoi on se place dans le cadre des petits angles : $|x| \ll D$ et $|y| \ll D$. Le déphasage vaut :

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda}(S_1M - S_2M) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left(\sqrt{(x+a/2)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{(x-a/2)^2 + y^2 + D^2} \right) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} D \left(\sqrt{1 + \frac{(x+a/2)^2 + y^2}{D^2}} - \sqrt{1 + \frac{(x-a/2)^2 + y^2}{D^2}} \right) \\ &\simeq \frac{2\pi}{\lambda} D \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(x+a/2)^2 + y^2}{D^2} - 1 - \frac{1}{2} \frac{(x-a/2)^2 + y^2}{D^2} \right) \\ \Delta\phi &\simeq \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{D} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1 + \epsilon/2$ quand $\epsilon \ll 1$. L'intensité s'écrit donc :

$$I(x, y) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{x}{i} \right) \right] \quad \text{avec} \quad i = \frac{\lambda D}{a} \quad [\text{m}] \quad \heartsuit \quad (2.4)$$

Comme on le voit sur la figure ci-contre, l'intensité est modulée spatialement suivant x , ce qui fait apparaître des franges rectilignes horizontales. Les franges brillantes sont telles que $x_p = pi$ avec p l'ordre d'interférence. Autrement dit, i correspond à la distance qui sépare deux franges brillantes : i est l'**interfrange**.

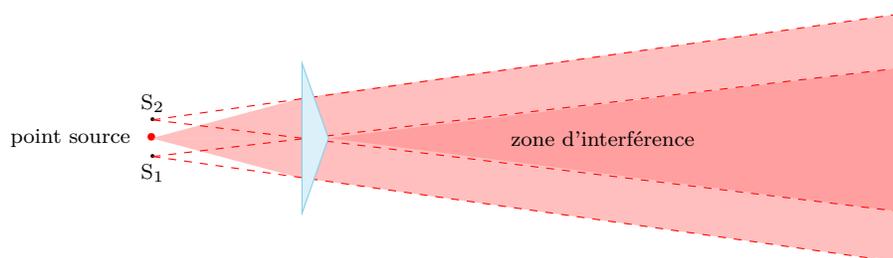


Si l'on veut que le phénomène soit visible à l'œil nu, l'interfrange i doit être de l'ordre du millimètre au moins. Comme la longueur d'onde est de l'ordre du micromètre, il faut $\frac{D}{a} > 10^3$. Si l'on choisit $D = 1$ m, cela impose $a < 1$ mm.

2.2.3 Dispositifs équivalents

De nombreux dispositifs se ramènent à l'expérience des trous d'Young. Il s'agit, dans tous les cas, de produire à partir d'une source ponctuelle, deux sources secondaires par division du front d'onde.

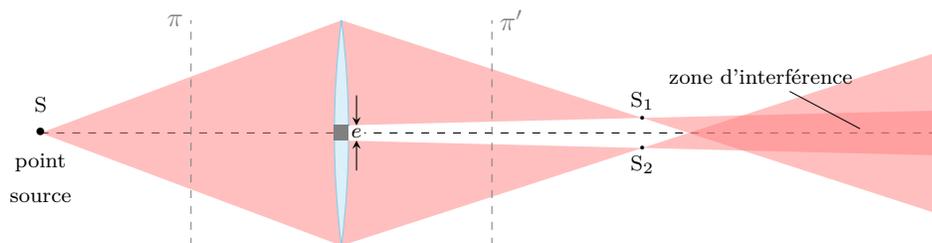
Biprisme de Fresnel : prenons deux prismes en verre d'indice n dont la base est un triangle rectangle de faible angle au sommet A . Accolons ces deux prismes de façon à former un biprisme comme l'indique la figure ci-dessous. Éclairons maintenant le biprisme à l'aide d'une source ponctuelle S . Chaque prisme dévie la lumière d'un angle $(n - 1)A$ vers le haut ou vers le bas suivant leur disposition. Finalement, le biprisme transforme S en deux images virtuelles S_1 et S_2 qui vibrent en phase. On observe alors des franges d'Young dans le champ d'interférence.



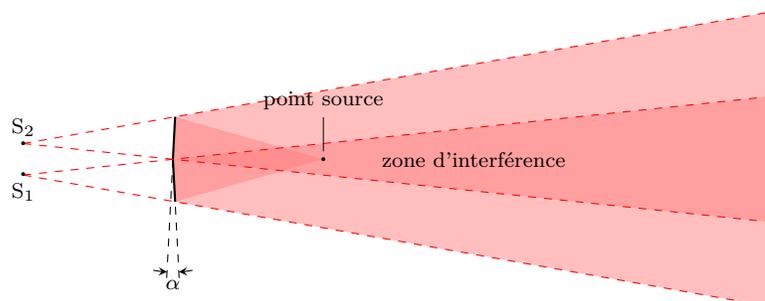
Bilentes de Billet : découpons une lentille mince convergente en son diamètre de façon à former de demi-lentilles. Plaçons entre ces deux parties un cache opaque d'épaisseur e . Cette bilente forme à partir d'une source ponctuelle S deux images cohérentes ponctuelles S_1 et S_2 séparées de la distance

$$a = e(1 + |\gamma|)$$

où γ est le grandissement transversale. Par exemple pour un montage $2f' - 2f'$, on a $|\gamma| = 1$ et $a = 2e$. Dans le champ d'interférence, on observe des franges d'Young.



Miroirs de Fresnel : accolons deux miroirs plans par leur côté de façon à former un angle faible. Si l'on éclaire le dispositif par une source ponctuelle S , la lumière émergente provient de deux sources virtuelles S_1 et S_2 cohérentes. On observe donc des franges d'Young dans le champ d'interférence.



Fentes d'Young : les trous d'Young sont simplement remplacés par des fentes horizontales ce qui permet d'augmenter la luminosité du phénomène sans altérer le contraste.

Tous ces dispositifs ont néanmoins le même défaut : les interférences se brouillent très vite dès que la source n'est plus ponctuelle (voir le chapitre sur la cohérence).

2.3 Division d'amplitude

2.3.1 Division d'amplitude par une lame

Lorsqu'un rayon lumineux rencontre un dioptre, la lumière se divise en deux rayons, l'un réfléchi l'autre réfracté (quand l'angle de réfraction donné par la loi de Snell-Descartes est défini). Cette division d'amplitude ne se réalise pas de façon équitable. Les taux de réflexion et de transmission sont donnés par les *coefficients de Fresnel*, lesquels dépendent des conditions d'incidence et de polarisation. Cependant, si l'on se limite au cas où l'incidence est faible, les coefficients de Fresnel prennent la forme simple suivante :

$$r_{1 \rightarrow 2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad t_{1 \rightarrow 2} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

où $r_{1 \rightarrow 2}$ désigne le rapport entre l'amplitude du rayon réfléchi et celui du rayon incident pour un rayon allant d'un milieu d'indice n_1 vers un milieu d'indice n_2 . $t_{1 \rightarrow 2}$ concerne quant à lui le rayon transmis et le rayon incident. Une des conséquences de ces formules est que **la réflexion partielle de la lumière s'accompagne d'un déphasage de π lorsque l'indice augmente** ($r_{1 \rightarrow 2} < 0$ si $n_1 < n_2$). Pour comparer les intensités, on introduit les *pouvoirs de réflexion et de transmission*

$$R = \frac{I_{\text{réfléchi}}}{I_{\text{incident}}} = |r_{1 \rightarrow 2}|^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{I_{\text{transmis}}}{I_{\text{incident}}} = 1 - R$$

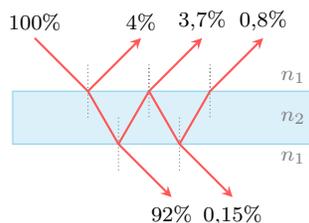


Fig. 2.4 – Chemin des différents rayons et répartition de l'énergie lumineuse (aux petits angles, en prenant $n_1 = 1$ et $n_2 = 1,5$).

Prenons un faisceau de lumière issu d'une source ponctuelle, tombant sur une lame transparente puis faisons un calcul estimatif de l'intensité des différents rayons transmis et réfléchis. Pour une interface air/verre on obtient, en prenant $n_1 = 1$ et $n_2 = 1,5$, $R = 4\%$ et $T = 96\%$, ce qui donne la répartition représentée sur la Figure 2.4. En transmission, on constate que le premier rayon sortant est beaucoup plus intense que les suivants ce qui rend les interférences quasi-invisibles. En réflexion, on note que les deux premiers rayons ont des intensités comparables ce qui produit des interférences contrastées ; les autres rayons ayant des intensités trop faibles, peuvent être négligés.

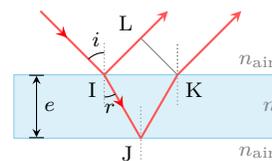
En résumé

Une lame transparente éclairée par une source, donnera lieu en réflexion à un phénomène d'interférence que l'on peut décrire par une interférence à deux ondes cohérentes issues d'une division d'amplitude.

2.3.2 Franges d'égale inclinaison

Supposons maintenant que la lame soit à faces parallèles. Exprimons la différence de phase introduite par la lame en fonction de son indice n , de son épaisseur e et des conditions d'incidence. Tout d'abord, la première réflexion s'accompagne d'un déphasage de π , contrairement à la seconde réflexion. Par ailleurs, les rayons émergents étant parallèles, ils interfèrent à l'infini (ou dans le plan focal d'une lentille) ce qui oblige à comparer l'état ondulatoire de ces deux rayons dans un plan perpendiculaire. On a donc

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} + \pi \quad \text{avec} \quad \delta = n(IJ+JK) - n_{\text{air}}IL$$



ce qui donne,

$$\begin{aligned} \delta &= n(2IJ) - n_{\text{air}}(IK \sin i) \\ &= n \frac{2e}{\cos r} - n_{\text{air}}(2e \tan r \sin i) \\ &= 2ne \left(\frac{1}{\cos r} - \tan r \sin r \right) \\ &= 2ne \frac{1 - \sin^2 r}{\cos r} \\ \delta &= 2ne \cos r \end{aligned}$$

Pour résumer, les deux premiers rayons réfléchis sont déphasés de la quantité

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} + \pi \quad \text{avec} \quad \delta = 2ne \cos r \quad \heartsuit \quad (2.5)$$

En conséquence, on observe des interférences constructives quand $\Delta\phi = 2p\pi$ avec p entier. Cette condition n'est remplie que pour certaines incidences, c'est pourquoi on parle de franges d'égale inclinaison. Ces rayons de même inclinaison ne se rencontrent qu'à l'infini : **les interférences sont donc localisées à l'infini**. En pratique, on utilise une lentille convergente (focale f') qui projette les rayons d'égale inclinaison dans son plan focale image (cf. Figure 2.5). Les rayons de même inclinaison i convergent alors sur un cercle de centre F' : on observe donc des franges annulaires concentriques.

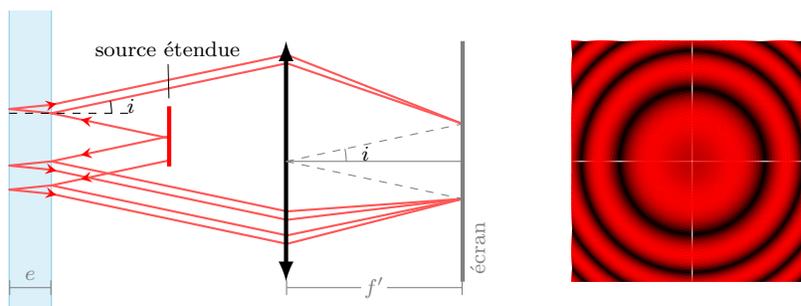


Fig. 2.5 – À gauche : dispositif interférentiel. À droite : anneaux d'interférence obtenues à l'écran.

Cherchons à exprimer le rayon d'une frange d'ordre p . La condition d'interférence constructive donne

$$\Delta\phi = 2p\pi \quad \implies \quad \cos r_p = \frac{\lambda}{4ne}(2p-1)$$

Dans l'approximation paraxiale (i et r sont petits), on a $\cos r \simeq 1 - r^2/2$. Par ailleurs, toujours dans le même cadre approximatif, le rayon R d'un anneau est lié à l'inclinaison *via* $R \simeq f' i$. En vertu de la loi de réfraction

$\sin = n \sin r$ qui devient $i \simeq nr$, on aboutit finalement à

$$R_p^2 = C^{te} - k \frac{\lambda n f'^2}{e}$$

où R_p est le rayon de la frange d'ordre p . Son carré suit donc une loi arithmétique. Ainsi, au fur et à mesure que p diminue, les anneaux s'éloignent du centre en se resserrant.

Remarque : Une lame de verre produit également des interférences délocalisées (franges de Pohl), mais celles-ci présentent le défaut d'être peu visibles si la source n'est pas ponctuelle. En revanche, les interférences localisées à l'infini étudiées ici sont insensibles à l'extension de la source; au contraire leur luminosité en est renforcée.

Application – Le traitement anti-reflet

Dans un appareil photo Reflex l'objectif est constitué d'une dizaine de lentilles et donc d'une vingtaine d'interfaces air-verre. Ainsi, à chaque réfraction, c'est 4% de l'énergie qui est perdue par réflexion. Cette série de réflexions partielles produit une diminution d'éclairement sur la pellicule de plus de 50%! Un traitement anti-reflet peut donc grandement améliorer les performances de l'appareil. Pour cela, on dépose sur chaque dioptre une couche mince de matériau transparent d'indice N (compris entre 1 et n) et d'épaisseur constante e . Cherchons l'indice et l'épaisseur qui permettent d'annuler la réflectivité par interférence destructive. On a deux conditions.

1. D'une part, il faut que les deux ondes réfléchies (en incidence quasi-normale dans l'approximation paraxiale) soient déphasées de $(2p + 1)\pi$:

$$\Delta\phi \simeq \frac{4\pi Ne}{\lambda} = (2p + 1)\pi \quad \text{d'où} \quad e = \frac{(2p + 1)\lambda}{4N}$$

La valeur minimale vaut $e = \lambda/(4N)$.

2. D'autre part, il faut choisir N de sorte que les deux rayons réfléchis aient des intensités semblables (pour que $I_{\min} = 0$). On cherche donc à avoir

$$r_{1 \rightarrow N} = t_{1 \rightarrow N} r_{N \rightarrow n} t_{N \rightarrow 1} \simeq r_{N \rightarrow n}$$

ce qui donne

$$\frac{1 - N}{1 + N} \simeq \frac{N - n}{N + n} \quad \text{c'est-à-dire} \quad N \simeq \sqrt{n}$$

Par exemple, pour un verre d'indice $n = 1,5$, il faut un matériaux d'indice $N \simeq 1,23$. Comme il n'existe pas de solide transparent d'indice aussi faible on s'en rapproche en utilisant le MgF_2 d'indice $N = 1,35$. On en dépose une couche d'épaisseur $e = \lambda/(4N) \simeq 0,12 \mu\text{m}$.

2.3.3 Franges d'égale épaisseur

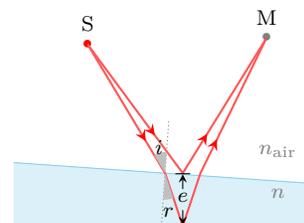
Considérons maintenant une **lame mince** d'indice uniforme mais d'**épaisseur variable**. On suppose cependant que l'épaisseur varie sur une grande échelle comparée à l'épaisseur de la lame. Dans ce cas, si l'on envoie un faisceau de lumière en incidence faible, l'épaisseur de la lame au point incident n'est pas significativement différent de celui au point émergeant. Dans ce contexte, la formule (2.5)

$$\delta = 2ne \cos r$$

reste valide à condition d'admettre que e désigne l'épaisseur locale de la lame mince.

Éclairons la lame avec un faisceau de rayons parallèles. L'angle i , comme l'angle r , est fixé de sorte que la différence de chemin optique n'est fonction que de l'épaisseur locale de la lame mince. Le lieu des points qui produit une frange d'ordre p est donné par l'équation

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} + \pi = 2p\pi \quad \text{soit} \quad 2ne \cos r = \left(p - \frac{1}{2}\right) \lambda$$



Le passage d'une frange brillante d'ordre p entier à une frange voisine d'ordre $p + 1$ traduit un changement d'épaisseur de $\lambda/(2n \cos r)$. La figure d'interférence renseigne donc sur le relief de la lame. On parle alors de **frange d'égale épaisseur** ou franges de Fizeau. On montre que ces interférences sont **localisées au voisinage de la lame** (cf. figure 2.6). En général, pour les visualiser il suffit de faire l'image de la lame sur un écran.

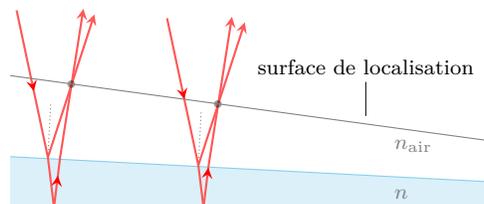


Fig. 2.6 – Localisation des interférences.

Ce type d'observation est utilisé dans le contrôle des surfaces par interférométrie (mesure de faibles épaisseurs, vibrations de surface etc.). Par exemple, le polissage et le contrôle des miroirs pour les astronomes amateurs repose sur l'interférométrie. On atteint une précision dans le contrôle de l'état de surface de l'ordre du dixième de micron! De la même manière, l'étude du contact de micro-gouttes sur un substrat repose sur l'étude des franges d'égale épaisseur observées par microscopie interférentielle (cf. Figure 2.7).

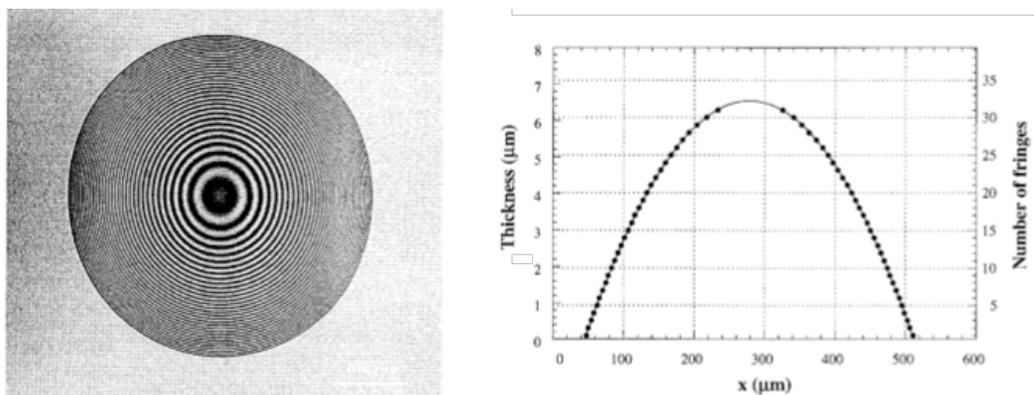


Fig. 2.7 – À gauche : micro-goutte de PDMS (Polydiméthylsiloxane) sur un substrat de silicium observé par microscopie interférentielle. À droite : profil reconstitué à partir de la figure d'interférence[4].

Choisir une source étendue permet d'amplifier la luminosité du phénomène qui ne reste cependant visible qu'au voisinage de la lame mince. Une observation à l'œil nu (l'œil fait la mise au point sur la lame) permet de sélectionner un pinceau de lumière formant un angle incident sur la lame quasi-constant ce qui permet de voir des franges d'égale épaisseur avec une certaine valeur de $\cos r$. En lumière blanche, chaque composante monochromatique produit son propre système de franges ce qui donne aux lames minces un aspect irisé. Dans le quotidien on observe facilement ces irisations :

- une mince couche d'huile sur l'asphalte humide les fait apparaître ;
- on les rencontre à la surface des bulles et lames de savon ;
- si l'on presse deux lames de verre l'une contre l'autre et que l'on emprisonne quelques poussières, on forme une lame d'air d'épaisseur variable. On voit alors apparaître des franges d'égale épaisseur qui se déforment lorsque l'on serre plus ou moins les lames l'une contre l'autre.

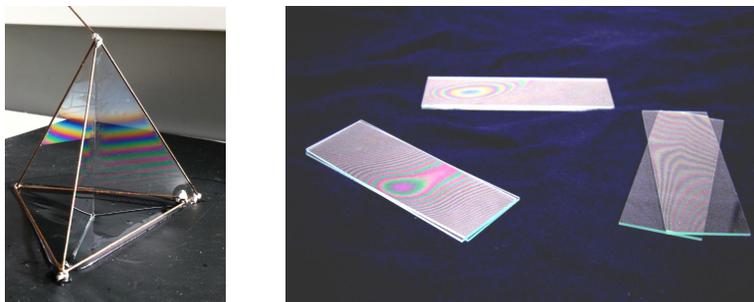


Fig. 2.8 – Interférences d'égal épaisseur à la surface d'une lame de savon (à gauche) et entre deux lames de verre (à droite).

2.3.4 Interféromètre de Michelson

L'interféromètre de Michelson³ est un dispositif qui fait interférer deux ondes issues d'une division d'amplitude. À partir d'un faisceau d'intensité I_0 , une lame semi-réfléchissante, appelée *séparatrice* produit deux faisceaux perpendiculaires d'intensité égal à $I_0/2$. Chacun de ces faisceaux est ensuite réfléchi par un miroir (noté M_1 ou M_2) et retransverse la séparatrice. À la sortie de l'interféromètre, les deux faisceaux ont entre eux une différence de marche fonction de la distance et de l'angle entre les miroirs, interfèrent. Le miroir M_2 est monté sur un chariot, ce qui permet de faire varier la différence de marche en tournant une vis micrométrique. On dispose d'autre part de tout un lot de vis destinées à régler l'orientation des lames et des miroirs.

Seul un côté de la séparatrice est réfléchissant. Par conséquent, un des faisceaux traverse la séparatrice une seule fois alors que l'autre faisceau la traverse trois. Pour compenser la différence de marche parasite qui en résulte, une lame identique mais non réfléchissante appelée *compensatrice* est accolée à la séparatrice de façon à ce que chacun des faisceaux traverse 4 fois l'épaisseur d'une lame. La figure 2.9 retrace le parcours d'un rayon lumineux (la compensatrice est volontairement omise, par soucis de simplification).

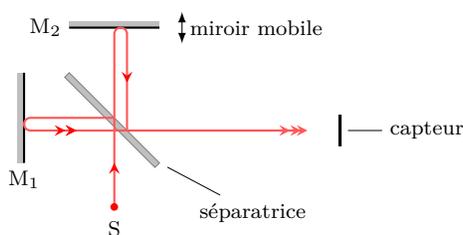


Fig. 2.9 – Principe de l'interféromètre de Michelson.

Lorsque les miroirs sont perpendiculaires et à égale distance de la séparatrice, on se trouve au *contact optique*. Les deux faisceaux parcourent alors le même chemin optique ceci quelque soit leur inclinaison : on n'observe pas de franges d'interférence. En agissant sur le miroir M_2 , on fait apparaître des franges d'interférences. On distingue deux types de configuration.

3. **Albert Abraham Michelson** (1852 Pologne - 1931 États-unis) est lauréat du prix Nobel 1907 pour la *précision de ses mesures optiques et les recherches en spectroscopie et en métrologie menées grâce à elles*. En 1878, avec un montage à 10 dollars, il réussit sa première mesure de la vitesse de la lumière ! En 1881 il invente un interféromètre qui porte maintenant son nom et qui devait permettre la mise en évidence du mouvement relatif de la Terre par rapport à un hypothétique éther, support de propagation de la lumière. L'absence de mise en évidence d'un tel mouvement a constitué l'un des points de départ de la théorie de la relativité restreinte, dans laquelle l'hypothèse de l'éther est abandonnée au profit du postulat selon lequel la lumière se propage dans le vide à une vitesse indépendante du référentiel.

Configuration dite en « lame d'air »

Ce type d'interférence est obtenu lorsque l'image M'_2 du miroir M_2 par rapport à la séparatrice est parallèle à M_1 . Dans ce cas, l'interféromètre est optiquement équivalent à une lame d'air à faces parallèles d'épaisseur e (cf. Figure 2.10). Comme on l'a vu pour la lame à faces parallèles, les interférences sont localisées à l'infini, d'où l'utilisation d'une lentille convergente et d'un capteur placé dans son plan focal.

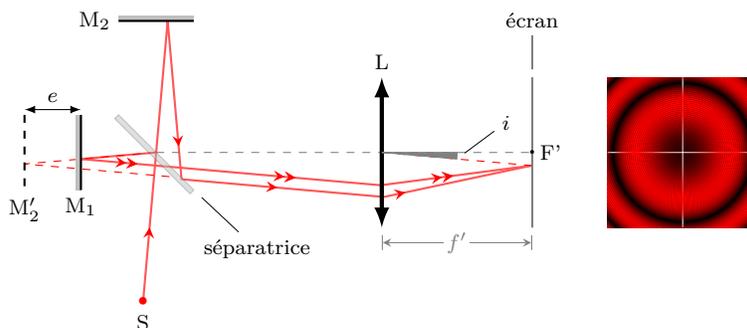


Fig. 2.10 – Interféromètre réglé en lame d'air. M'_2 est l'image du miroir M_2 par rapport à la séparatrice. L'étude se ramène au problème d'une lame d'air formée par deux interfaces semi-réfléchissantes.

Si l'on reprend l'expression du déphasage produit par une lame d'épaisseur constante et que l'on fait $n = 1$, on obtient

$$i = r \quad \text{et} \quad \Delta\phi = \frac{4\pi e \cos i}{\lambda}$$

Il faut préciser que le terme de déphasage lié à la première réflexion disparaît ici car les rayons subissent le même nombre de réflexions. La frange brillante d'ordre p entier vérifie la condition

$$\Delta\phi = 2p\pi \quad \text{soit} \quad \cos i_p = p \frac{\lambda}{2e} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbf{Z}$$

Chaque incidence i_p donne à l'écran un anneau brillant, de centre F' et de rayon $R_p \simeq f' i_p$. Déplacer le miroir M_2 permet de modifier l'épaisseur de la lame d'air ce qui conduit à un défilement des franges. Notamment, quand l'épaisseur diminue (on se rapproche donc du contact optique), l'angle i_p diminue ainsi que le rayon de la frange d'ordre p : les anneaux d'interférence « rentrent » dans le centre commun des anneaux au fur et à mesure que l'on se rapproche du contact optique. D'ailleurs, les dénombrer permet d'en déduire la longueur d'onde. En effet, une variation de l'épaisseur e de Δe conduit à une variation de la différence de chemin optique de $2\Delta e$. Comme, le défilement d'une frange correspond à une variation de λ sur la différence de chemin optique on en conclut que le défilement de N franges correspond à une variation d'épaisseur donnée par

$$2\Delta e = N\lambda \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{2\Delta e}{N}$$

Configuration dite en « coin d'air »

À partir du contact optique, inclinons maintenant le miroir mobile. Dans ce cas, l'image M'_2 du miroir M_2 et M_1 forment entre eux un angle α . L'interféromètre est optiquement équivalent à un coin d'air. Les franges d'interférence (franges d'égale épaisseur) sont alors localisées près de la surface des miroirs et observables à l'œil nu ou grâce à une lentille convergente qui en forme l'image sur un écran (cf. Figure 2.11).

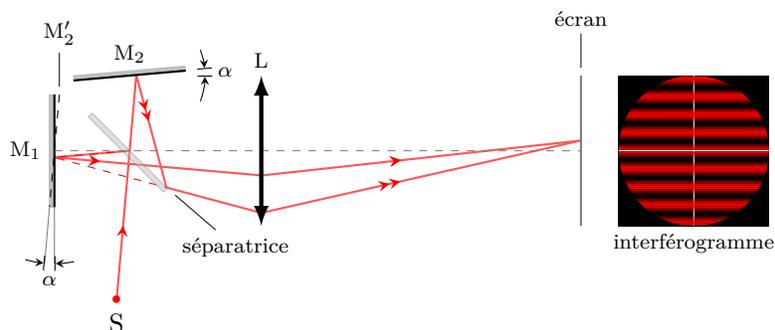


Fig. 2.11 – Interféromètre réglé en coin d'air. M_2' est l'image du miroir M_2 par rapport à la séparatrice. L'étude se ramène au problème d'un coin d'air formée par deux interfaces semi-réfléchissantes.

Le faisceau source est en général collimaté (à l'aide d'une lentille par exemple) de façon à garantir une incidence quasi-normale ($i \simeq 0$). La différence de marche est donnée par :

$$\delta = 2ne(I) \cos r = 2e(I) \cos i \simeq 2e(I)$$

avec $e(I)$, l'épaisseur du coin d'air au point incident I. Repérons le point I par la coordonnée y comptée à partir du sommet du coin d'air. Dans ce cas, on a $e(I) = y \tan \alpha$. La frange brillante d'ordre p vérifie l'équation (comme l'angle est petit on a $\tan \alpha \simeq \alpha$)

$$\delta = p\lambda \quad \text{d'où} \quad y_p = p \frac{\lambda}{2\alpha}$$

On observe donc, comme l'indique la figure 2.11, des franges rectilignes parallèles à l'axe d'inclinaison des miroirs. L'inter-frange vaut

$$i = y_{p+1} - y_p = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

Ainsi, plus α est grand, plus l'inter-frange est petit⁴. Les franges sont visibles à l'œil nu à la condition que l'interfrange i ne soit pas trop petit. Si nous fixons $i > 0,1$ mm alors on trouve $\alpha < 10'$ d'arc ! Le coin d'air fait effectivement un angle très petit.

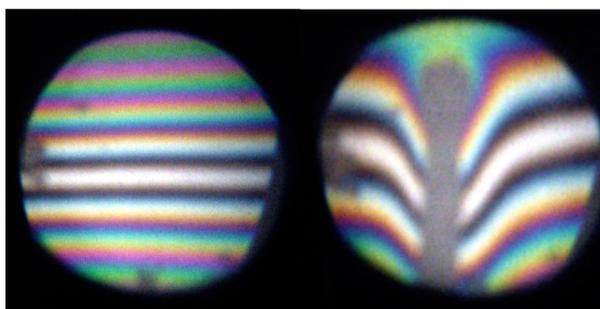


Fig. 2.12 – Franges irisées en lumière blanche. À gauche : franges du coin d'air. À droite : franges du coin d'air perturbées par les faibles variations d'indice de l'air induites par la présence, dans l'un des bras de l'interféromètre, d'une allumette tout juste éteinte.

Éclairé en lumière blanche, l'interféromètre fera apparaître des franges irisées puisque l'interfrange dépend de la longueur d'onde. Toutefois, la frange d'ordre $p = 0$, présente la particularité d'avoir une position indépendante de la longueur d'onde. Autrement dit, en lumière blanche, cette frange est blanche puisque

4. Évidemment, sur l'écran, l'interfrange est amplifié par le grandissement du système de projection.

toutes les composantes chromatiques donneront lieu à une frange identique. Cette frange, dite achromatique, est bien visible sur l'interférogramme de la Figure 2.12.

2.3.5 Autres interféromètres à division d'amplitude

Il existe de nombreux dispositifs qui reposent sur la division d'amplitude. Comme l'interféromètre de Michelson, ils sont d'une grande précision et rendent de précieux services dans les domaines suivants.

- En spectroscopie, pour la mesure précise des longueurs d'onde et des largeurs de raie spectrale. L'étude du signal capté dans un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air permet de remonter au spectre de la source. On parle d'interférométrie par transformée de Fourier. L'interféromètre de Fabry-Pérot est également utilisé comme spectromètre à haute résolution (*cf. Les interférences à N ondes*).
- En analyse des surfaces. On peut contrôler l'état d'une surface avec une précision de l'ordre de 100 nm grâce à l'interféromètre Twyman-Green qui est une variante de l'interféromètre de Michelson.

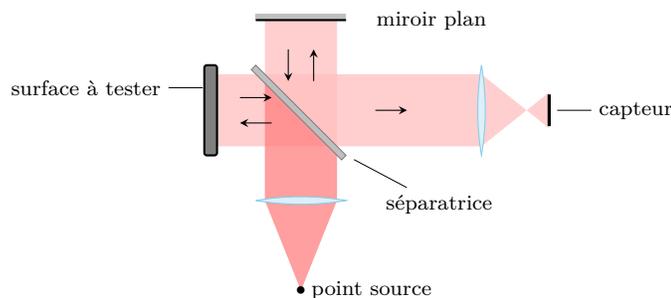


Fig. 2.13 – Interféromètre de Twyman-Green.

- En aéronautique pour le contrôle de la navigation grâce à l'interféromètre de Sagnac⁵ utilisé comme gyrolaser ou gyroscope.

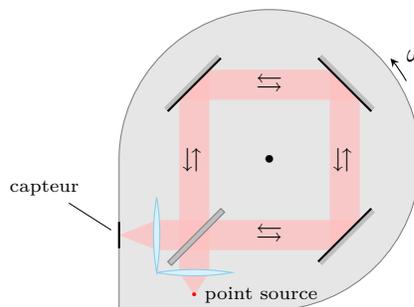


Fig. 2.14 – Interféromètre de Sagnac

- En mécanique des fluides pour la visualisation des écoulements avec l'interféromètre de Mach-Zehnder par exemple. Un écoulement induit des variations de densités et donc des variations d'indice que l'on peut mettre en évidence dans l'interféromètre de Mach-Zehnder formé de deux bras de même longueur. Le signal ne dépend que des variations de phases induites par l'écoulement.

5. Inventé par Georges Sagnac en 1913, cet interféromètre repose sur l'effet Sagnac : deux ondes lumineuses parcourant le même chemin en sens opposé se trouvent déphasés si le référentiel lié à l'émetteur et au récepteur est en rotation. Plus précisément, le déphasage est proportionnel à la vitesse angulaire de rotation.

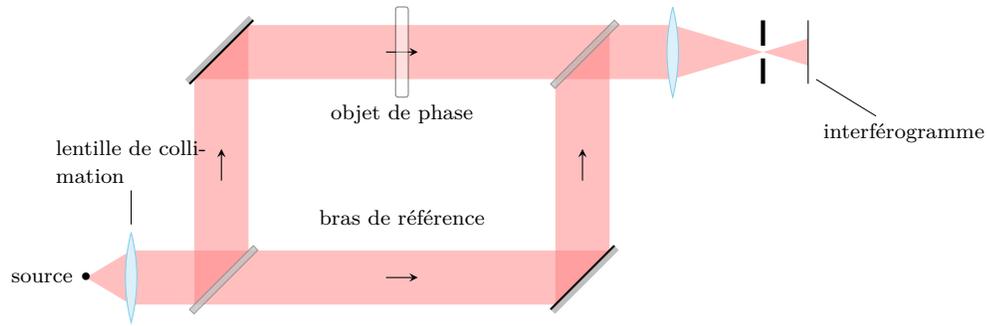
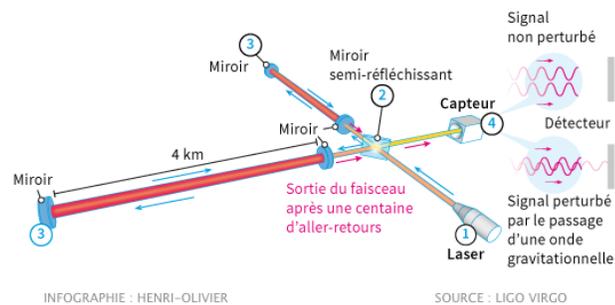


Fig. 2.15 – Interféromètre de Mach-Zehnder.

- En astrophysique pour la détection d'ondes gravitationnelles. L'interféromètre de Michelson est particulièrement sensible aux variations relatives de longueur entre ses deux bras et constitue l'instrument idéal pour la mesure des ondes gravitationnelles. En effet, théoriquement le passage d'une telle onde produit une déformation anisotrope de l'espace ce qui induit une variation différente des longueurs des deux bras d'un interféromètre. Cependant, en raison de l'extrême sensibilité nécessaire, la longueur des bras doit être de plusieurs centaines de kilomètres. Ceci étant difficilement réalisable sur Terre, on replie le trajet optique en utilisant des réflexions multiples entre deux miroirs. En pratique, on utilise des cavités résonantes du type Fabry-Pérot. Les projets LIGO et VIRGO utilisent ce type de détection et ont permis la première détection des ondes gravitationnelles, le 14 septembre 2015, soit 100 ans après la prévision d'Einstein. Celles-ci, issues de la fusion de deux trous noirs, ont voyagé durant 1,3 milliard d'années avant d'atteindre la Terre et d'être capté sous la forme d'un signal caractéristique extrêmement ténu. Depuis, d'autres événements de ce type ont été détecté et promettent une nouvelle façon d'observer le cosmos.



Rainer Weiss, Barry C. Barish et Kip S. Thorne ont reçu le Prix Nobel 2017 pour leurs contributions au projet LIGO et la détection des ondes gravitationnelles.

3 INTERFÉRENCE À N ONDES

L'expérience des trous d'Young nous a permis d'illustrer le phénomène d'interférence à deux ondes. Il existe également des dispositifs interférentiels reposants sur des interférences multiples. Ce cours illustre ce phénomène à travers l'étude du réseau de diffraction et de la cavité Fabry-Pérot.

Sommaire

3.1	Généralités	32
3.1.1	Superposition de N ondes en phase	32
3.1.2	Superposition de N ondes incohérentes	32
3.2	Le réseau de diffraction	33
3.2.1	Description	33
3.2.2	Formule des réseaux en incidence normale	34
3.2.3	Formule des réseaux en incidence oblique	35
3.2.4	Figure d'interférence	36
3.2.5	Pouvoir de résolution	38
3.2.6	Autres réseaux	39
3.3	La cavité Fabry-Perot	41
3.3.1	Description	41
3.3.2	Transmission de la cavité	41
3.3.3	Interféromètre de Fabry-Pérot	43
3.3.4	Cavité optique résonante	44

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/optique/interference-a-N-ondes.php>

3.1 Généralités

3.1.1 Superposition de N ondes en phase

Supposons qu'en un point M de l'espace, se superposent N ondes harmoniques de pulsation ω , de phase φ_i et d'amplitude A_i avec $i = \{1 \dots N\}$. L'état ondulatoire en M s'écrit

$$\psi(M, t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Admettons de plus que toutes les ondes oscillent en phase, c'est-à-dire que $\varphi_i = \varphi$ pour tout i . Dans ce cas, on trouve simplement

$$\psi(M, t) = \cos(\omega t + \varphi) \sum_{i=1}^N A_i$$

L'intensité du rayonnement correspondante vaut

$$I(M) = \langle \psi^2(M, t) \rangle = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N A_i \right)^2 > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N A_i^2$$

Comme on le voit, l'intensité dépasse la somme des intensités. En terme de phaseurs, on peut représenter cette superposition par la mise, bout à bout, de N vecteurs de Fresnel alignés (Fig. 3.1). L'intensité étant proportionnelle à la longueur quadratique du vecteur résultant \overrightarrow{OP} , il est facile de se convaincre que l'intensité est maximale dans le cas où toutes les ondes oscillent en phase : on est face à un phénomène d'interférence constructive.

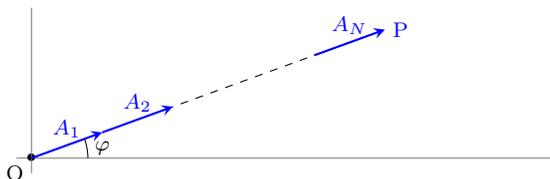


Fig. 3.1 – Construction de Fresnel correspondant à la superposition de N ondes en phase.

Le calcul se simplifie grandement lorsque toutes les ondes présentent la même amplitude $A_i = A$, puisqu'on obtient

$$\psi(M, t) = N A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad I = N^2 I_0 \quad \text{N ondes en phase} \quad \heartsuit \quad (3.1)$$

3.1.2 Superposition de N ondes incohérentes

Considérons maintenant le cas où les ondes sont issues de N sources indépendantes quasi-monochromatiques. Pour simplifier, admettons que toutes les ondes oscillent avec la même amplitude ($I_0 = A^2/2$). La phase φ_i de chaque onde varie de façon aléatoire avec un temps caractéristique très court devant le temps de réponse du détecteur. Par ailleurs, les sources étant indépendantes, il n'y a aucune corrélation entre les phases. Si l'on décrit l'onde résultante par la construction géométrique de Fresnel, on obtient une *marche aléatoire*. En effet, le vecteur résultant peut être vu comme le déplacement d'un point ayant fait N pas d'amplitude A dans des directions aléatoires. L'intensité est alors reliée à la *distance quadratique moyenne* d'une marche aléatoire de N pas :

Un des résultats de la mécanique statistique (cf. cours sur la [diffusion moléculaire](#)) stipule que la distance quadratique moyenne bout-à-bout vaut $\langle OP^2 \rangle = N A^2$ où A est la longueur de chaque phaseur. Il en découle le résultat

$$I = \frac{1}{2} \langle OP^2 \rangle = N I_0$$

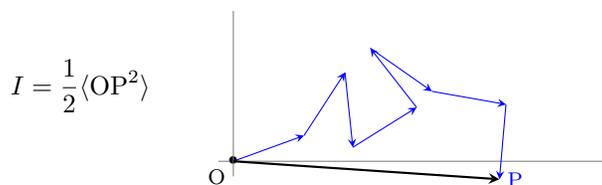


Fig. 3.2 – Construction de Fresnel

L'intensité est indépendante de la position du point d'observation et amplifiée d'un facteur N : il n'y a donc pas d'interférence. On avait déjà établi ce résultat pour la superposition de deux ondes incohérentes ; on voit ici que le résultat se généralise pour N ondes.

Exercice – Retrouver ce résultat par la méthode des complexes.

Rép - en notation complexe, l'onde résultante s'écrit $\underline{\psi} = \sum_{k=\{0\dots N\}} Ae^{i(\omega t + \varphi_k)} = Ae^{i\omega t} \sum_{k=\{0\dots N\}} e^{i\varphi_k}$. L'intensité du rayonnement est donnée par $I = \frac{1}{2} \langle \underline{\psi} \underline{\psi}^* \rangle$. On a

$$\begin{aligned} \underline{\psi} \underline{\psi}^* &= A^2 \sum_k e^{i\varphi_k} \times \sum_{k'} e^{-i\varphi_{k'}} \\ &= A^2 \sum_{k,k'} e^{i(\varphi_k - \varphi_{k'})} \\ \underline{\psi} \underline{\psi}^* &= A^2 \left(N + \sum_{k,k' \neq k} e^{i(\varphi_k - \varphi_{k'})} \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\underline{\psi} \underline{\psi}^*$ étant un réel, en prendre la partie réelle ne change pas le résultat. On a donc

$$\underline{\psi} \underline{\psi}^* = A^2 N + A^2 \sum_{k,k' \neq k} \cos(\varphi_k - \varphi_{k'})$$

$\varphi_k - \varphi_{k'}$ est une variable aléatoire répartie uniformément dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$, c'est pourquoi

$$I = \frac{1}{2} \langle \underline{\psi} \underline{\psi}^* \rangle = \frac{1}{2} NA^2 = NI_0$$

Finalement, N sources incohérentes de même amplitude produisent un phénomène dont l'intensité est proportionnel à N alors que dans le cas où ces N ondes vibrent en phase, le phénomène est proportionnel à N^2 . On peut donc amplifier significativement la lumière par interférences multiples. En prime, cette amplification s'accompagne en général, comme nous allons le voir, d'une grande résolution spatiale.

3.2 Le réseau de diffraction

3.2.1 Description

De manière générale, un réseau de diffraction est un arrangement régulier de motifs diffractants identiques. Chaque motif diffracte la lumière incidente dans toutes les directions, et chaque faisceau diffracté dans une direction interfère avec les autres rayons diffractés dans la même direction.

Bien qu'il existe une grande diversité de formes (plane, concave), de types (rectiligne, circulaire) et de fonctionnement (en transmission, en réflexion), l'étude du réseau plan rectiligne par transmission permet de dégager les propriétés essentielles des réseaux.

Le **réseau rectiligne par transmission** est caractérisé par une fonction de transparence périodique. Le réseau de fentes transparentes utilisé dans l'enseignement en est un exemple. Il est réalisé en gravant sur du verre une série de traits à l'aide d'une pointe de diamant. L'espace intact entre ces traits est transparent

et constitue une fente. En général, on réalise des répliques (diapositives photographiques) du réseau initial pour obtenir des réseaux à faible coût.

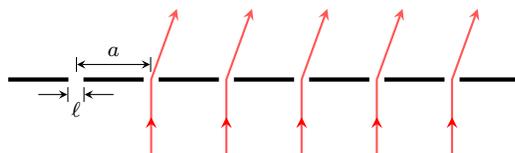


Fig. 3.3 – Réseau de fentes.

La caractéristique essentielle d'un réseau de diffraction est son *pas* a qui représente la distance séparant deux motifs diffractants consécutifs. En général, le fournisseur indique la *densité de traits*

$$n \triangleq \frac{1}{a} \quad [\text{nombre de traits par mètre}] \quad \heartsuit \quad (3.2)$$

souvent exprimée en *lines per inch* (LPI). Les réseaux performants ont des densités de l'ordre de 10^6 traits par mètre.

3.2.2 Formule des réseaux en incidence normale

Éclairons, par une onde plane monochromatique, un réseau de N fentes placé en incidence normale, puis observons la lumière dispersée dans la direction θ à l'aide d'une lunette (Fig. 3.4). Il existe, comme nous allons le montrer, des directions angulaires privilégiées dans lesquelles la lumière est confinée et pour lesquelles chaque onde diffractée par les motifs du réseau interfère avec les autres de manière constructive.

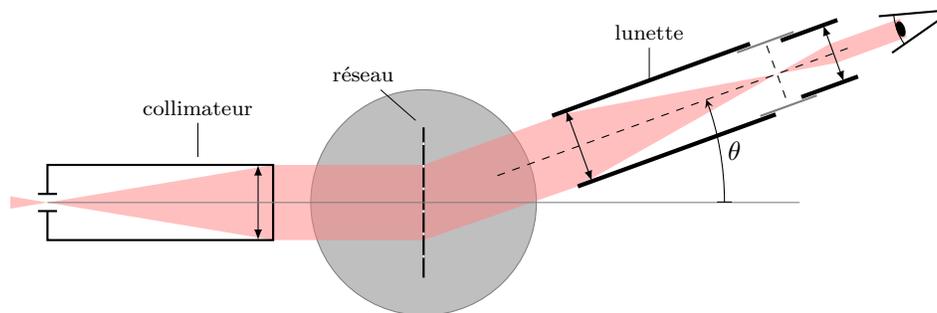


Fig. 3.4 – Montage sur un goniomètre - vue de dessus.

Envisageons l'émission de lumière dans la direction indiquée par θ (Fig. 3.5). Le rayon diffracté par une fente F est en retard (ou en avance, ça dépend du signe de θ) par rapport au rayon diffracté par la fente suivante F' . Le déphasage s'écrit

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad \text{avec} \quad \delta = FH = a \sin \theta$$

Si ces deux rayons interfèrent de façon constructive entre eux, alors ils interfèrent également de manière constructive avec tous les autres. Ce phénomène donne lieu à une énorme amplification de lumière (comme N^2) dans la direction θ . La condition d'interférence constructive $\Delta\phi = 2p\pi$ permet d'obtenir ces directions privilégiées :

$$a \sin \theta_p = p\lambda \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z} \quad \heartsuit \quad (3.3)$$

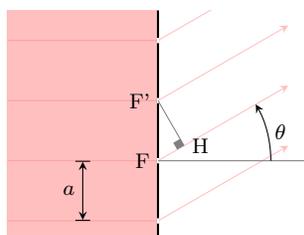


Fig. 3.5 – Incidence normale.

Cette relation, dite *formule des réseaux en incidence normale*, peut aussi faire intervenir la densité de traits du réseau $n = 1/a$:

$$\sin \theta_p = p n \lambda \quad (3.4)$$

Comme on le voit, la direction θ_p dépend de la lumière incidente (*via* la longueur d'onde), du réseau (*via* la densité de traits) ainsi que de l'ordre d'interférence p . Analysons en détail la formule (3.4).

- Pour l'ordre $p = 0$, on a $\theta = 0$ quelle que soit la longueur d'onde : une partie de la lumière traverse le réseau sans être déviée. Cette direction est toujours observée.
- Les ordres $p \neq 0$ ne sont pas toujours observés. En effet, si $a < \lambda$, seul l'ordre zéro existe. Plus généralement, il est facile de montrer que les valeurs possibles de p sont au nombre de $(1 + 2 \lfloor a/\lambda \rfloor)$.
- Pour les ordres $p \neq 0$ la déviation θ est fonction de la longueur d'onde : le système est alors *dispersif*, et en lumière blanche on observe une décomposition spectrale de la lumière suivant différentes directions. On peut noter que l'angle de dispersion augmente avec la longueur d'onde (le rouge est plus dispersé que le bleu) contrairement à ce qui se produit avec un prisme. Notez aussi, que seul l'ordre zéro est achromatique puisque sa direction est indépendante de la longueur d'onde.

3.2.3 Formule des réseaux en incidence oblique

La formule (3.4) n'est valable qu'en incidence normale. Sous une incidence i elle prend une forme plus générale que l'on obtient à l'aide d'un calcul similaire à celui du paragraphe précédent. Sous une incidence i , le rayon arrive en F en avance par rapport à celui arrivant en F'. Cependant, il prend ensuite du retard de sorte que le déphasage s'écrit (Fig. 3.6)

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \quad \text{avec} \quad \delta = FH - F'H' = a(\sin \theta - \sin i)$$

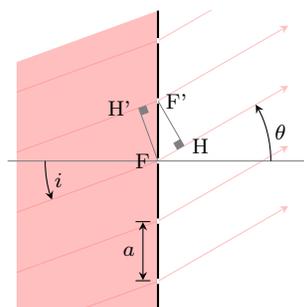


Fig. 3.6 – Incidence oblique.

Finalement, la *formule des réseaux en incidence oblique* qui donne la direction des interférences constructives, s'écrit

$$a(\sin \theta_p - \sin i) = p\lambda \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z} \quad \heartsuit \quad (3.5)$$

Dans ce cas, la direction θ_p dépend non seulement de la lumière incidente, du réseau et de l'ordre d'interférence p , mais également des conditions d'incidence (*via* l'angle i). La direction correspondant à l'ordre $p = 0$ est donnée par $\theta_0 = i$. En d'autres termes, ces rayons traversent le réseau sans être déviés. Comme pour la situation en incidence normale, cette direction est toujours observée. En revanche, contrairement à ce qui est observé en incidence normale, $\theta_p \neq -\theta_{-p}$. D'ailleurs il arrive que l'ordre p soit observé alors que l'ordre $-p$ est inobservable.

Enfin, la déviation angulaire des rayons $D = \theta_p - i$ dépend de l'angle i . Il est facile de montrer que cette déviation présente un minimum. En dérivant la loi des réseaux (3.5) par rapport à l'angle i , on obtient

$$\left(1 + \frac{dD}{di}\right) \cos(D + i) - \cos i = 0$$

La déviation $D(i)$ passe par un extremum quand

$$\frac{dD}{di} = 0 \quad \text{soit} \quad \cos(D + i) = \cos i$$

c'est-à-dire (en excluant $D = 0$ qui correspond à l'ordre 0) $D_m = -2i$. On en déduit, en reprenant la loi des réseaux,

$$2 \sin \frac{D_m}{2} = p \frac{\lambda}{a} \quad (3.6)$$

La mesure de cette déviation angulaire minimale¹ permet ainsi de retrouver soit une longueur d'onde, soit la densité de traits d'un réseau. Cette mesure s'affranchit du placement en incidence nulle du réseau, source d'imprécision.

3.2.4 Figure d'interférence

L'équation (3.5) indique les directions d'interférence constructive, mais ne donne aucune information sur la répartition de l'intensité en fonction de θ . Procédons à ce calcul en faisant deux hypothèses.

1. Nous considérons que le réseau est éclairé par une onde plane arrivant en incidence normale. Le cas de l'incidence oblique se traite en effectuant la transformation

$$\sin \theta \mapsto \sin \theta - \sin i$$

2. Nous admettons que les N ondes diffractées dans la direction θ ont la même amplitude a , indépendante de θ . Nous discuterons de cette hypothèse dans le chapitre 5 consacré à la diffraction.

Utilisons la méthode complexe pour calculer l'intensité. Posons, $\phi = (2\pi a \sin \theta)/\lambda$, le déphasage entre deux ondes consécutives. L'amplitude complexe de l'onde qui résulte de la superposition des N ondes diffractées dans la direction θ s'écrit

$$\underline{\psi}(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} A e^{ik\phi} = A \frac{e^{iN\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1} = A \frac{e^{iN\phi/2} \sin(N\phi/2)}{e^{i\phi/2} \sin(\phi/2)}$$

1. En dérivant à nouveau la formule des réseaux, on trouve $D''(i) = -2 \tan i$ lorsque $D = -2i$. D est donc minimum quand $i < 0$ et maximum quand $i > 0$. Dans tous les cas, $|D_m|$ est minimum.

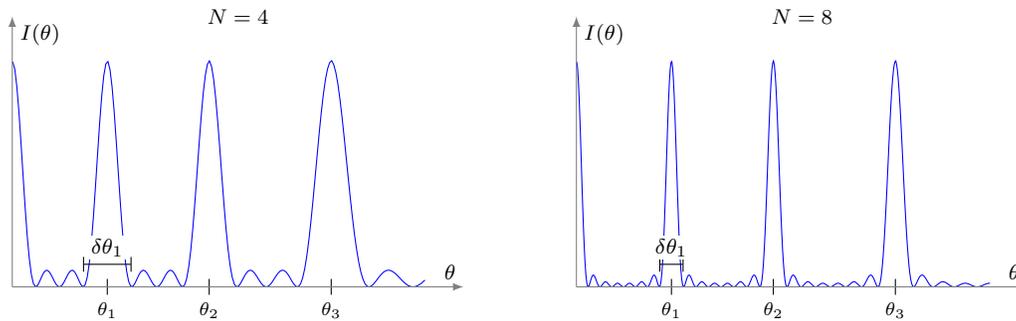


Fig. 3.7 – Influence de N sur le terme d'interférence.

Rappelons que la somme des termes d'une suite géométrique de raison r s'écrit

$$S = 1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1} = \frac{r^N - 1}{r - 1}$$

Ainsi, en incidence normale, l'intensité varie avec l'angle de déviation horizontale θ comme suit :

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \psi \psi^* = K \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda} \sin \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta\right)} \right]^2 \quad \text{avec} \quad K = A^2/2 \quad \heartsuit \quad (3.7)$$

En réalité, à cause de la diffraction, la constante K varie lentement avec θ et la formule précédente doit s'écrire

$$I(\theta) = K(\theta) \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda} \sin \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta\right)} \right]^2$$

L'intensité diffractée est donc le produit de deux termes.

- Le premier, $K(\theta)$, est le *terme de diffraction* qui fera l'objet d'une étude soignée dans le chapitre 5 sur la diffraction à l'infini.
- Le deuxième, appelé *terme d'interférence*, est représenté sur la figure 3.7. On voit apparaître des franges brillantes à chaque fois que $\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta = p\pi$. Ainsi, on observe une intense lumière dans des directions confinées vérifiant

$$\sin \theta_p = p \frac{\lambda}{a} = p n \lambda$$

On retrouve la formule des réseaux (3.3).

Rappelons que la fonction $f(x) = \sin Nx / \sin x$ admet pour limite N lorsque $x \rightarrow 0$. Par conséquent, puisque $[f(x)]^2$ est π -périodique, on a aussi

$$\left[\frac{\sin Nx}{\sin x} \right]^2 \xrightarrow{x \rightarrow p\pi} N^2 \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Il s'agit des maxima principaux de la fonction.

Cherchons à calculer la largeur angulaire d'une frange brillante. Pour cela, déterminons la première valeur de θ qui annule l'intensité autour d'un maximum principal. Rappelons que sur un pic d'interférence les ondes qui interfèrent sont tous en phase (modulo 2π). En termes de vecteurs de Fresnel, cela donne N vecteurs colinéaires comme on l'a déjà vu. Imaginons maintenant que chaque vecteur de Fresnel tourne de $2\pi/N$ par rapport au vecteur précédente. Ces vecteurs mis bout à bout forment alors un polygone à N côtés et le

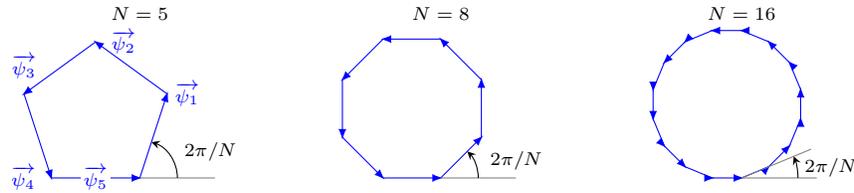


Fig. 3.8 – Construction de Fresnel correspondant à une interférence destructive pour $N = 5, 8$ et 16 .

vecteur résultant est tout simplement le vecteur nul (Fig. 3.8). C'est pourquoi, au voisinage d'un maximum principal, on trouve $I = 0$ dès lors que

$$\Delta\phi = 2p\pi \pm \frac{2\pi}{N}$$

Appelons $\delta\theta_p$ la largeur de la frange d'ordre p (Fig. 3.7). On a

$$\frac{2\pi a \sin(\theta_p \pm \frac{1}{2}\delta\theta_p)}{\lambda} = 2p\pi \pm \frac{2\pi}{N}$$

Compte tenu que $\delta\theta_p$ est petit (pour N grand), un développement à l'ordre un autour de θ_p donne

$$\delta\theta_p = \frac{2\lambda}{Na \cos\theta_p} \quad [\text{en radian}] \quad (3.8)$$

Plus le nombre de fentes éclairées est grand et plus les tâches sont fines : on parle alors de *pics d'interférence*².

Exemple –

Un réseau de diffraction de pas $a = 5 \mu\text{m}$ éclairé en incidence normale par un faisceau de largeur $L = 1 \text{ cm}$ et de longueur d'onde $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, présente un pic d'ordre un dans la direction

$$\theta_1 = \text{Arcsin } p\lambda/a = 5^\circ 44' 21''$$

Sachant 2 000 fentes sont éclairées, ce pic présente une largeur angulaire

$$\delta\theta_1 \simeq \frac{2 \times 0,5}{2000 \times 5} = 10^{-4} \text{ rad} = 21'' (\text{arc-seconde})$$

3.2.5 Pouvoir de résolution

Éclairé en lumière polychromatique, le réseau disperse chaque composante monochromatique *via* la loi (3.5). Le pouvoir de résolution spectrale mesure la capacité à séparer deux longueurs d'onde différentes. Il est mesuré par la quantité

$$\mathcal{R} \triangleq \frac{\lambda}{\delta\lambda_{\min}} \quad \heartsuit \quad (3.9)$$

où $\delta\lambda_{\min}$ est la différence minimale entre deux longueurs d'onde que le système arrive à séparer. Le pouvoir de résolution théorique du réseau s'obtient à l'aide d'un critère de résolution. On prendra le critère de Rayleigh.

Critère de Rayleigh

Deux pics d'interférence A et B associés aux longueur d'onde λ et $\lambda + \delta\lambda$ seront résolus (ou séparés) si leur séparation angulaire vérifie

$$\theta_B - \theta_A > \frac{\delta\theta}{2}$$

avec $\delta\theta$ la largeur angulaire du pic d'interférence.

2. On dit aussi pic de diffraction, mais il faut bien comprendre que même si la diffraction est nécessaire à leur observation, ces pics résultent de la cohérence entre les N fentes, c'est-à-dire du phénomène d'interférence.

Calculons, le pouvoir de résolution théorique d'un réseau éclairé en incidence normale. Une raie spectrale de longueur d'onde λ est déviée d'un angle θ_p telle que

$$\sin \theta_p = p \frac{\lambda}{a}$$

Aussi, pour une variation $\delta\lambda$ de λ , l'angle de dispersion varie de

$$\theta_p^{\lambda+\delta\lambda} - \theta_p^\lambda = p \frac{\delta\lambda}{a \cos \theta_p}$$

Adoptons le critère de Rayleigh : les deux raies sont résolus si

$$\theta_p^{\lambda+\delta\lambda} - \theta_p^\lambda > \frac{\delta\theta}{2} = \frac{\lambda}{Na \cos \theta_p}$$

ce qui donne

$$\delta\lambda > \frac{\lambda}{pN} = \delta\lambda_{\min}$$

d'où un pouvoir de résolution théorique

$$\mathcal{R} = pN \quad \heartsuit \quad (3.10)$$

Le pouvoir de résolution théorique augmente avec le nombre de traits éclairés et avec l'ordre d'interférence (cf. [simulation](#)). Par exemple, avec un réseau blazé de 10 cm de largeur constitué de 1000 traits/cm et travaillant à l'ordre 10, le pouvoir de résolution théorique atteint 100 000.

Tab. 3.1 – Résolution typique de quelques systèmes dispersifs.

Instrument	Pouvoir de résolution typique	résolution $\delta\lambda_{\min}$ (à 500 nm)
Prisme	500	1 nm
Réseau	5 000	0,1 nm
Réseau blazé	50 000	0,01 nm

La formule (3.10) a été obtenue en considérant le réseau en incidence normale, mais le résultat est valable pour toute incidence. On peut donc aussi exprimer le pouvoir de résolution en fonction de θ_p et i :

$$\mathcal{R} = \frac{Na (\sin \theta_p - \sin i)}{\lambda}$$

où $Na = L$ désigne la largeur du faisceau éclairant le réseau. On voit qu'il existe un pouvoir de résolution maximum :

$$\mathcal{R}_{\max} = \frac{2L}{\lambda}$$

Ainsi, la taille du réseau est déterminante dans la quête aux hautes résolutions spectrales.

3.2.6 Autres réseaux

Le réseau de fentes à transmission est assez peu utilisé en pratique. La plupart des applications demandant l'emploi d'un système dispersif utilisent des réseaux en réflexion. Par exemple, la plupart des spectrophotomètres d'absorption possèdent un monochromateur qui permet de sélectionner la longueur d'onde d'une source en faisant tourner un réseau de diffraction en réflexion.

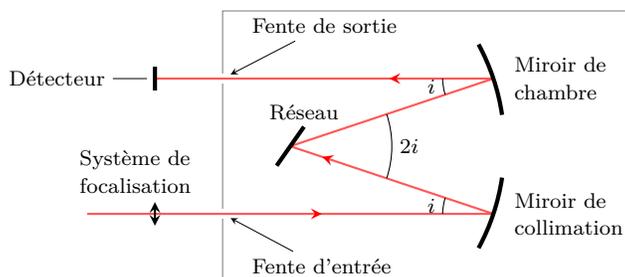


Fig. 3.9 – Principe d'un monochromateur.

Un des principaux défauts des réseaux ordinaires réside dans la dispersion de l'énergie lumineuse dans les différents pics d'interférence. Cette éparpillement de l'intensité peut être gênant quand la source est elle-même peu lumineuse (il suffit de penser à l'observation d'étoile lointaine). Les **réseaux blazés** sont des réseaux fonctionnant en réflexion et dont la conception permet de concentrer la lumière réfléchie essentiellement sur un ordre particulier. On obtient cette propriété en juxtaposant une série de gradins réfléchissants inclinés caractérisés par un certain *angle de blaze*.

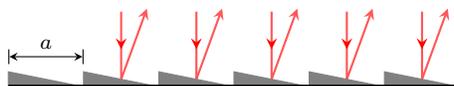


Fig. 3.10 – Réseau blazé.

Si l'on veut éviter l'emploi d'un système optique de collimation (en entrée et en sortie), on utilisera des **réseaux concaves**. Il s'agit de réseaux de motifs réflecteurs imprimés sur une calotte sphérique de rayon R . On montre que si l'on place une fente source sur un cercle tangent au réseau et de diamètre R (*cercle de Rowland*), alors tous les pics d'interférences se focalisent en différents points du cercle de Rowland. Il suffit alors de déplacer la fente le long du cercle de Rowland pour sélectionner la longueur d'onde désirée.

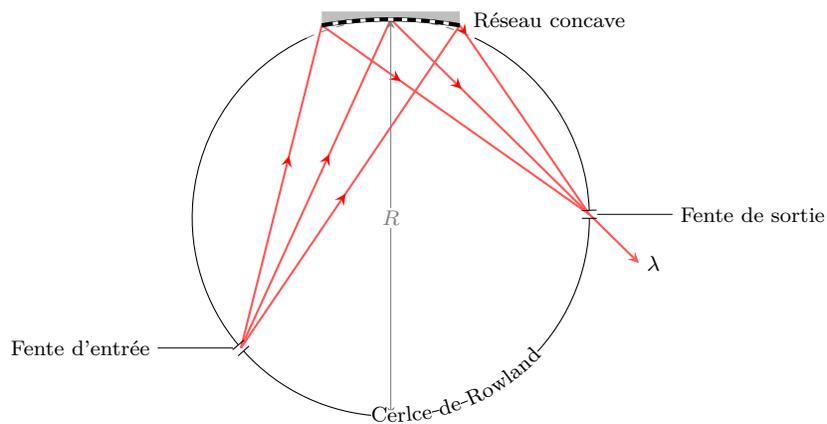


Fig. 3.11 – Monochromateur à réseau concave (montage de Paschen-Runge).

3.3 La cavité Fabry-Perot

3.3.1 Description

Une cavité Fabry-Pérot est une lame d'air d'épaisseur e formée par deux lames de verre à faces parallèles aux surfaces internes traitées. Le traitement consiste à augmenter le coefficient de réflexion des faces internes de la lame d'air, soit par métallisation, soit par le dépôt de plusieurs couches diélectriques. Typiquement, le coefficient de réflexion énergétique est supérieur à 90%.

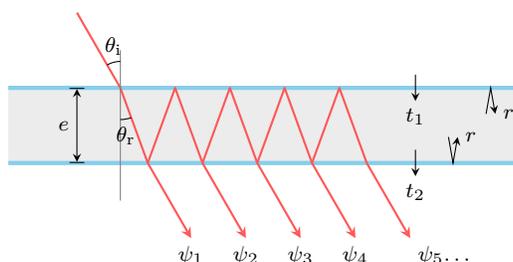


Fig. 3.12 – Cavité Fabry-Pérot

On s'intéresse à la transmission de la lumière par cette cavité. On note t_1 le coefficient de transmission en amplitude à travers la première lame, t_2 le coefficient de transmission à travers la seconde lame et r le coefficient de réflexion sur les parois réfléchissantes. Les amplitudes des premiers rayons sortants valent respectivement :

nombre de réflexions	0	2	4	6	... $2k$
amplitude	$A t_1 t_2$	$A t_1 t_2 r^2$	$A t_1 t_2 r^4$	$A t_1 t_2 r^6$	$A t_1 t_2 r^{2k}$

On voit que si r est petit, la première onde à sortir de la cavité est beaucoup plus intense que les autres, ce qui rend les interférences peu visibles tant le contraste est faible. En revanche, lorsque r se rapproche de 1, les rayons sortants ont des amplitudes comparables : il faut donc tenir compte de tous les rayons pour calculer l'intensité résultante ; à nouveau on est en présence d'un phénomène d'**interférence à ondes multiples**.

Précisons que les coefficients de réflexion et transmission sont liés entre eux. Si l'on néglige le phénomène d'absorption, la conservation de l'énergie se traduit par

$$r^2 + n t_1^2 = 1 \quad \text{et} \quad r^2 + \frac{t_2^2}{n} = 1$$

où n est l'indice du milieu enfermé par la cavité Fabry-Pérot. Posons $R = r^2$ et $T = t_1 t_2$. Les deux relations précédentes aboutissent à

$$R + T = 1$$

3.3.2 Transmission de la cavité

Cherchons à déterminer l'intensité du flux lumineux transmis par la cavité dans la direction θ_i . Comme on l'a vu, la division d'amplitude produite par une lame introduit un déphasage

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \quad \text{avec} \quad \delta = 2ne \cos \theta_r$$

Pour une lame d'air, on a $n \simeq 1$ et $\theta_r \simeq \theta_i$ d'où $\Delta\phi \simeq 4\pi e \cos \theta_i / \lambda$.

Remarque : si φ_r est le déphasage qui accompagne chaque réflexion, il faut écrire $\Delta\phi \simeq 4\pi e \cos \theta_i / \lambda + 2\varphi_r$. Pour simplifier, on suppose ici $\varphi_r = 0[\pi]$.

Utilisons la méthode complexe pour calculer l'onde résultante issue de la superposition des ondes :

$$\underline{\psi} = A t_1 t_2 e^{i(\omega t)} + A t_1 t_2 r^2 e^{i(\omega t - \Delta\phi)} + A t_1 t_2 r^4 e^{i(\omega t - 2\Delta\phi)} + \dots + A t_1 t_2 r^{2k} e^{i(\omega t - k\Delta\phi)} + \dots$$

somme dans laquelle l'origine des temps est fixée de façon à ce que la phase de la première onde soit nulle. En factorisant par le premier terme et en posant $R = r^2$, on obtient

$$\underline{\psi} = A t_1 t_2 e^{i(\omega t)} (1 + R e^{-i\Delta\phi} + R^2 e^{-2i\Delta\phi} + \dots + R^k e^{-ik\Delta\phi} + \dots)$$

On reconnaît une série géométrique de raison $R e^{-i\Delta\phi}$. Or, comme cette raison est de module inférieure à l'unité, la série converge³ :

$$\underline{\psi} = A t_1 t_2 e^{i(\omega t)} \frac{1}{1 - R e^{-i\Delta\phi}}$$

Posons $T = t_1 t_2$ et $I_0 = A^2/2$ l'intensité du flux incident. L'intensité du flux transmis vaut

$$I = \frac{1}{2} \underline{\psi} \underline{\psi}^* = \frac{I_0 T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Delta\phi} = I_0 \left(\frac{T}{1 - R} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\Delta\phi/2)}$$

En négligeant l'absorption⁴ on a $T = 1 - R$, d'où le résultat :

$$I = \frac{I_0}{1 + m \sin^2(\Delta\phi/2)} \quad \text{avec} \quad m = \frac{4R}{(1-R)^2} \quad \heartsuit \quad (3.11)$$

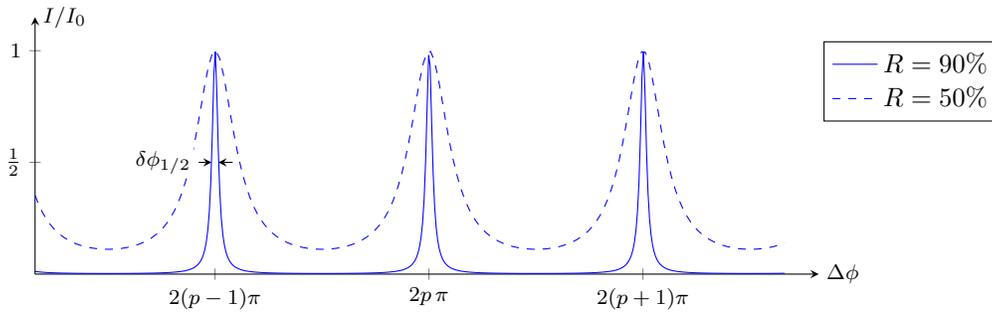


Fig. 3.13 – Transmission de la cavité Fabry-Pérot en fonction du déphasage.

L'intensité est maximale à chaque fois que $\Delta\phi$ est un multiple de 2π . Les minima sont obtenus pour les multiples impairs de π . Contrairement au réseau, les minima d'intensité ne sont pas nuls puisque $I_{\min} = I_0/(1 + m)$. Toutefois, si les surfaces présentent une haute réflectivité, on a $m \gg 1$ et le contraste est quasiment de 100% :

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{m}{2 + m} \simeq 1$$

On voit clairement sur la Fig. 3.13 que les pics sont d'autant plus fins que le pouvoir de réflexion R se rapproche de l'unité. On définit la *finesse* \mathcal{F} d'une cavité Fabry-Pérot par le rapport

$$\mathcal{F} \triangleq \frac{2\pi}{\delta\phi_{1/2}} \quad \heartsuit \quad (3.12)$$

3. Rigoureusement, la somme est tronquée à cause de la taille finie de la cavité qui impose un nombre fini $2N$ de réflexions. Même en incidence normale où cet effet de taille ne joue pas, c'est la longueur de cohérence finie de la source qui limite le nombre de rayons cohérents. On suppose ici que $R^N \ll 1$

4. En pratique, la métallisation des surfaces de la cavité permet d'obtenir un fort pouvoir réflecteur sensiblement indépendant de la longueur d'onde et de l'incidence. En revanche, l'absorption reste élevé (de l'ordre de 40 à 50 %). Inversement, le traitement par multicouche diélectrique produit peu d'absorption mais le pouvoir réflecteur dépend fortement de la longueur d'onde et de l'inclinaison des rayons.

avec $\delta\phi_{1/2}$ la largeur à mi-hauteur d'un pic d'interférence donnée par

$$1 + m \sin^2 \left(\frac{\delta\phi_{1/2}}{4} \right) = 2 \quad \text{soit} \quad \delta\phi_{1/2} \simeq \frac{4}{\sqrt{m}}$$

où l'on a utilisé le fait que $\delta\phi_{1/2} \ll 1$ (ce qui suppose une grande réflectivité). Finalement, en reprenant l'expression de m , on trouve l'expression de la finesse :

$$\mathcal{F} = \pi \frac{\sqrt{R}}{1 - R} \quad (3.13)$$

Exemple –

Une cavité Fabry-Pérot de réflectivité $R = 97\%$, présente une finesse

$$\mathcal{F} = \pi \frac{\sqrt{0,97}}{0,03} \simeq 100$$

Les pics sont alors 100 fois plus fins que l'intervalle entre deux pics (dit *intervalle spectral libre*).

3.3.3 Interféromètre de Fabry-Pérot

L'intensité transmise par la cavité Fabry-Pérot dépend du déphasage $\Delta\phi$ via la relation (3.11). Il y a différentes manières de faire varier $\Delta\phi$.

- On fixe l'épaisseur e et l'indice n de la cavité que l'on éclaire avec une source étendue. Les rayons incidents balayent tout un spectre d'incidence ce qui permet de faire varier $\Delta\phi$. Les rayons émergents sont focalisés dans le plan focal d'une lentille convergente. C'est le principe original de l'interféromètre de Fabry-Pérot. On obtient le même type de franges que celles de l'interféromètre de Michelson en configuration « lame d'air » ; la différence tient essentiellement dans la finesse des anneaux d'interférence.
- On peut aussi éclairer la cavité en incidence normale puis faire varier l'épaisseur e (en montant un des miroirs sur un transducteur piézoélectrique) ou l'indice n (par exemple en jouant sur la pression du milieu). C'est souvent cette configuration qui est choisie de nos jours (Fig. 3.14).

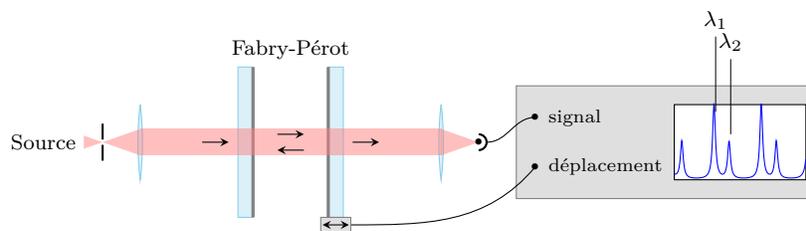


Fig. 3.14 – Interféromètre de Fabry-Pérot.

L'interféromètre de Fabry-Pérot présente une résolution spectrale exceptionnelle ce qui en fait un instrument de choix en spectroscopie haute résolution. Pour mettre en évidence ces qualités, calculons le pouvoir de résolution d'un interféromètre de Fabry-Pérot éclairé en incidence normale. Lorsque l'on fait varier ne , le signal capturé au foyer d'une lentille présente des pics à chaque fois que

$$\Delta\phi = 2p\pi \quad \text{soit} \quad 2ne = p\lambda$$

On observe alors une succession de pics. Si la source est polychromatique, chaque composante produit sa propre série de pics (Fig. 3.14). En vertu du principe de Rayleigh, deux pics sont résolus à condition que leur écart soit supérieur à la demi-largeur d'un pic, lequel est estimé par la largeur à mi-hauteur :

$$\Delta\phi_{\lambda_1} - \Delta\phi_{\lambda_2} > \delta\phi_{1/2}$$

En incidence normale, $\Delta\phi = (4\pi ne)/\lambda$ ce qui donne

$$\Delta\phi_{\lambda_1} - \Delta\phi_{\lambda_2} = \frac{4\pi ne}{\lambda_1\lambda_2}(\lambda_2 - \lambda_1)$$

Le système permet donc de séparer deux radiations dont les longueurs d'onde diffèrent de

$$(\lambda_2 - \lambda_1) > \frac{\bar{\lambda}^2}{4\pi ne} \delta\phi_{1/2} = \delta\lambda_{\min}$$

où l'on a posé $\bar{\lambda} = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}$ quantité qui diffère peu de λ_1 et λ_2 à la limite de résolution. Sachant que $2ne \simeq p\bar{\lambda}$ et $\delta\phi_{1/2} = 2\pi/\mathcal{F}$, on trouve un pouvoir de résolution

$$\mathcal{R} = \frac{\bar{\lambda}}{\delta\lambda_{\min}} = p\mathcal{F} \quad \heartsuit \quad (3.14)$$

Remarque : Le pouvoir de résolution est aussi appelé facteur de qualité Q par analogie avec la physique des résonateurs (une cavité Fabry-Pérot est un résonateur optique). Notez que la formule (3.14) donne un pouvoir de résolution théorique. En pratique, la résolution est limitée par d'autres facteurs : défaut de parallélisme, rugosité des surfaces réfléchissantes, absorption du gaz, etc.

Tab. 3.2 – Résolution d'un Fabry-Pérot avec $ne = 1$ cm et $\bar{\lambda} = 0,5 \mu\text{m}$ ($p = 40\,000$).

Réflexivité	0,9	0,95	0,99
Finesse	30	61	313
Pouvoir de résolution ($\times 10^6$)	1,2	2,4	12,5
$\delta\lambda_{\min}$	400 fm	200 fm	40 fm

Comme on peut le voir (Tab. 3.2), le pouvoir de résolution est phénoménal. Cette qualité a cependant un revers. En effet, par définition, le nombre de raies que l'on peut résoudre entre deux pics d'ordre p et $p+1$ est égal à la finesse \mathcal{F} , ce qui correspond à une étroite fenêtre spectrale ($\mathcal{F}\delta\lambda_{\min}$) qu'on appelle *intervalle spectral libre*. Par conséquent, le Fabry-Pérot est un spectromètre aux performances exceptionnelles tant que le spectre à étudier est peu étendu sans quoi les différents ordres se mélangent (comme dans un réseau de diffraction).

3.3.4 Cavité optique résonante

On a vu précédemment que la transmission est maximale à chaque fois que $\Delta\phi = 2p\pi$ ce qui, en incidence normale, donne la condition :

$$L = ne = p\frac{\lambda}{2}$$

Condition qui rappelle la condition de résonance d'une onde stationnaire dans une cavité. La coïncidence n'est pas fortuite ici puisqu'il s'agit bien d'une cavité dans laquelle deux ondes lumineuses interfèrent à contre courant pour donner une onde stationnaire. Lorsque la « largeur optique » de la cavité est un multiple entier de la demi-longueur d'onde, on dit que la cavité est accordée ou qu'elle est résonante : les ventres de champ électromagnétique deviennent extrêmement intenses à l'instar du champ de pression dans un tube de Kundt résonant.

Les lasers utilisent des cavités optiques de Fabry-Pérot dont les surfaces sont légèrement courbées pour des questions de stabilité optique. Ces cavités transmettent essentiellement les ondes de longueur d'onde

$$\lambda_p = \frac{2ne}{p}$$

Si la cavité contient un milieu actif amplifiant certaines radiations comprises dans une certaine fenêtre spectrale et si certains modes de la cavité (les radiations résonantes de longueur d'onde λ_p) font parti de cette fenêtre, alors l'ensemble « cavité-milieu actif » va se comporter comme un amplificateur optique produisant un ensemble de raies très fines. C'est cette propriété qui donne aux lasers une très grande cohérence spectrale (*cf. Introduction à la physique des lasers*).

4 THÉORIE DE LA DIFFRACTION

Ce phénomène d'éparpillement des ondes par les bords que l'on appelle *diffraction*, concerne aussi bien les ondes électromagnétiques que les ondes mécaniques (ondes sonores, ondes à la surface de l'eau ...). Bien que découvert au XVII^e siècle pour la lumière, il faudra attendre les travaux minutieux de Fresnel au début du XIX^e siècle pour obtenir une première théorie quantitative, la *théorie d'Huygens-Fresnel*.

Au XVIII^e siècle, l'idée défendue par Newton selon laquelle la lumière serait constituée de corpuscules plus ou moins déviés par des forces agissant aux voisinages des obstacles, est assez répandue dans la communauté scientifique. Il faut dire que le phénomène d'aberration des étoiles (découvert par Bradley en 1729) se prête assez bien à une explication balistique. Et quand au début du XIX^e siècle, Thomas Young apportent des éléments en faveur d'une description ondulatoire de la lumière, nombreux encore sont les tenants de la théorie corpusculaire qui restent sur leur position. C'est véritablement Fresnel qui, à travers sa théorie de la diffraction, apportera une pièce majeure à cette nouvelle théorie de la lumière en train de naître. Ce chapitre en expose les concepts.

Sommaire

4.1	Principe d'Huygens-Fresnel	47
4.1.1	Phénomène de diffraction	47
4.1.2	Principe d'Huygens	47
4.1.3	Le principe d'Huygens-Fresnel	49
4.1.4	Justification du principe d'Huygens-Fresnel	49
4.2	Diffraction de Fresnel	51
4.2.1	Diffraction par un trou le long de l'axe	51
4.2.2	Diffraction par un trou hors de l'axe	53
4.2.3	Tache de Poisson-Arago	54

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/optique/diffraction-de-fresnel.php>

4.1 Principe d'Huygens-Fresnel

4.1.1 Phénomène de diffraction

Le terme *diffraction* apparaît la première fois dans l'ouvrage du père jésuite Grimaldi ¹, intitulée *Physico-Mathesis de Lumine, Coloribus et Iride* et publiée à titre posthume en 1665. Grimaldi constate qu'au contour des obstacles ou au bord d'un trou la lumière subit un éparpillement, qui ne peut pas s'expliquer par les lois de l'optique géométrique, et appelle ce phénomène, **diffraction**. Ses expériences consistent à réaliser un petit trou dans un de ses volets laissant passer ainsi un faisceau conique de lumière blanche, puis à présenter dans le trajet un obstacle opaque. En observant l'ombre projeté sur un écran placé plus loin, il remarque :

- la présence de franges colorées qui bordent le coté extérieur de l'ombre géométrique ;
- l'existence de franges colorées situées *dans* l'ombre géométrique ;
- qu'en choisissant comme obstacle un écran percé d'un petit trou, la tache lumineuse captée sur l'écran est plus large que ne le prévoit les lois de l'optique géométrique, ceci d'autant plus que le trou est petit.

Phénomène de diffraction

Tout écart à la propagation rectiligne de la lumière, qui ne peut s'expliquer ni par une réflexion, ni par une réfraction, consiste en de la diffraction.

L'étude de ces phénomènes demande beaucoup de soin. De nos jours, leur observation est grandement facilitée grâce à la démocratisation des lasers, sources d'une grande cohérence temporelle et spatiale (Fig. 4.1).

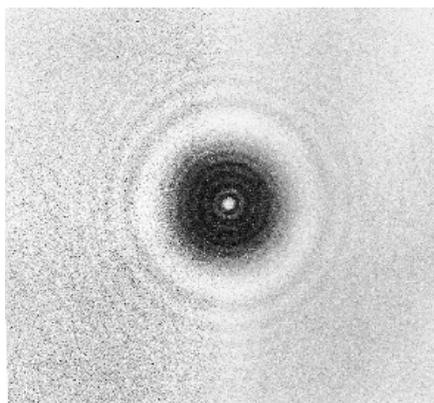


Fig. 4.1 – Diffraction par une bille. Notez l'existence de franges équidistantes dans la zone d'ombre, de franges non équidistantes en dehors, ainsi que d'une tache centrale, la *tache de Poisson*. ©Doc. Institut d'Optique.

4.1.2 Principe d'Huygens

En 1690, Christian Huygens présente dans son *Traité de la lumière*, une description ondulatoire de la lumière. Il propose le principe suivant :

Énoncé du principe d'Huygens

Chaque point d'une surface d'onde (S_0) atteinte par la lumière à l'instant t_0 peut être considéré comme une source secondaire produisant des ondelettes sphériques. À l'instant t postérieur à t_0 , la surface d'onde (S) est l'enveloppe des surfaces d'ondes émises par les sources secondaires convenablement réparties sur (S_0). Ainsi, de proche en proche, l'onde se propage.

1. **Francesco Maria Grimaldi** (1618-1663), est un astronome et physicien italien. Il établit notamment la première carte de la Lune avec une précision telle qu'elle est encore utilisée de nos jours.

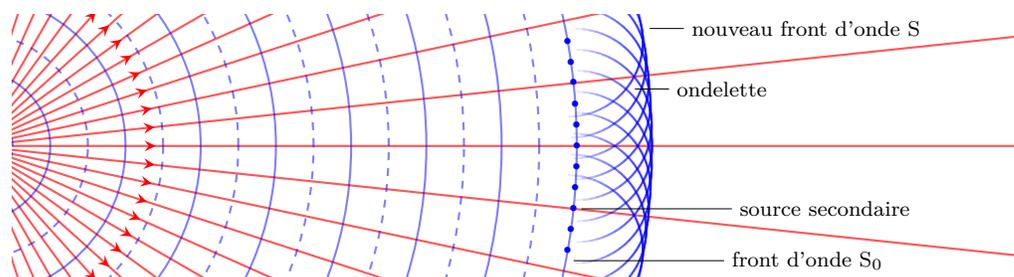


Fig. 4.2 – Principe d'Huygens

À partir de ce principe, Huygens justifie les lois de l'optique géométrique. Il retrouve la loi des sinus relative à la réfraction

$$\frac{\sin i_2}{\sin i_1} = \frac{v_2}{v_1}$$

et interprète l'indice de réfraction comme l'inverse de la vitesse de propagation. À l'instar de Fermat avec son principe de moindre temps², Huygens conclut que la lumière se propage moins vite dans les milieux réfringents. Il faudra attendre 1849 pour confirmer ce résultat.

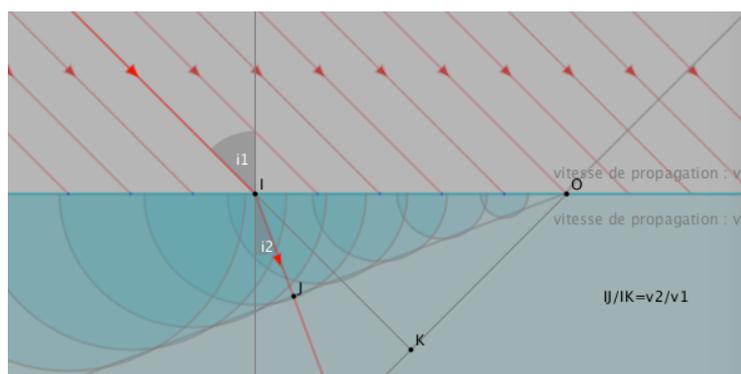


Fig. 4.3 – Construction d'Huygens relative à la réfraction.

Huygens n'aborde pas la diffraction dans son ouvrage bien qu'il ait eu connaissance des travaux de Grimaldi. Peut-être a-t-il pris conscience que sa théorie ne permettait pas d'expliquer complètement le phénomène. En effet, la construction d'Huygens permet de comprendre comment la lumière peut s'accumuler derrière un obstacle, mais sa théorie souffre de deux inconvénients majeurs.

1. Elle ne permet pas d'accéder à l'intensité lumineuse, mais juste au front d'onde vue comme enveloppe des ondelettes.
2. De surcroît elle ne fait pas intervenir la longueur d'onde. D'ailleurs Huygens voit la lumière plus comme des ondes de choc que comme une vibration. Aussi, la forme de la surface d'onde obtenue par la construction d'Huygens derrière un obstacle est-elle identique quelle que soit la taille de l'obstacle, ce que contredisent clairement les faits.

L'époque d'Huygens est largement dominée par une vision mécaniste du monde. Newton, à la fin de son ouvrage *Optiks* (1704), évoque l'hypothèse que la lumière soit une pluie de particules subissant des forces lors de la rencontre avec un milieu matériel. Cette *théorie balistique* aura une grande influence sur les physiciens du XVIII^e siècle. Ainsi, les idées d'Huygens restèrent inexploitées pendant plus d'un siècle. Il faudra attendre les travaux de Fresnel pour donner au principe d'Huygens un caractère prédictif en très bon accord avec la réalité.

2. cf. <https://femto-physique.fr/optique/principe-de-fermat.php>

4.1.3 Le principe d'Huygens-Fresnel

En 1817, Afin de trancher la question de la nature de la lumière, l'Académie des Sciences de Paris lance un concours sur le thème de la diffraction de la lumière. Augustin Fresnel, un jeune polytechnicien, dépose *in extremis* un mémoire issu d'expériences et de réflexions qu'il mène depuis 1815. Dans ce travail, Fresnel démonte les différents arguments des tenants de la théorie balistique. Fresnel montre notamment :

- que les franges de diffraction ne dessinent pas des lignes droites ;
- que les franges de diffractions formées dans l'ombre de l'obstacle disparaissent quand on masque un des bords ;
- qu'il est possible de produire des franges d'interférence en croisant des rayons réfléchis (miroirs de Fresnel).

Ces observations, dont certaines avaient déjà été relevées par Young quelques années plus tôt, contredisent clairement la théorie balistique. Adoptant un point de vue ondulatoire, il reprend le principe d'Huygens et introduit le concept d'interférence d'Young ce qui lui permet de calculer le champ diffracté de manière remarquablement juste. Plus précisément, Fresnel découpe le front d'onde en éléments de surface dS agissant comme des sources secondaires et émettant des ondes sphériques harmoniques, de la forme

$$\frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Fresnel suppose que ces ondelettes vibrent de façon synchrone et en phase avec l'onde directe, leur amplitude A étant proportionnelle à dS . Ces ondelettes, en nombre infini, se superposent –c'est-à-dire interfèrent– au point M où l'on calcule l'onde résultante. Là où Huygens considérait seulement l'enveloppe des ondelettes, Fresnel obtient l'onde diffractée par un calcul d'une somme intégrale d'ondelettes.

Principe d'Huygens-Fresnel

Tout point P atteint par la lumière issue d'une source primaire, peut être considéré comme une *source secondaire* émettant une onde sphérique. L'état vibratoire de cette source secondaire est proportionnel à celui de l'onde incidente en P et à l'élément de surface dS entourant le point P . Les vibrations issues des différentes sources secondaires interfèrent entre elles. Si $\underline{\psi}(M)$ désigne l'amplitude complexe de l'onde produite en M et $\underline{\psi}(P)$ l'état vibratoire de la source secondaire située en P , on a

$$\underline{\psi}(M) = \iint_{(S)} d\underline{\psi} \quad \text{avec} \quad d\underline{\psi} = K \underline{\psi}(P) \frac{e^{-ikr}}{r} dS$$

où $r = PM$ et K est une constante homogène à l'inverse d'une distance.

La constante de proportionnalité K est en réalité fonction de la direction θ dans laquelle l'onde est émise : Fresnel ne précise pas l'expression de $K(\theta)$ mais admet que l'ondelette ne perturbe pas le front d'onde d'où elle est émise ($K = 0$ pour $\theta = \pi/2$). Par ailleurs, Fresnel se place dans les conditions paraxiales de sorte que les angles de diffraction restent suffisamment proches de zéro pour pouvoir considérer K comme une constante.

À partir de ce principe, Fresnel est capable de prédire avec précision la position et la taille des franges de diffraction produites par différents obstacles. Son mémoire est un véritable traité d'optique ondulatoire d'une qualité remarquable ce qui lui vaut de remporter le prix de l'Académie en 1819.

4.1.4 Justification du principe d'Huygens-Fresnel

(Cette partie peut être omise lors d'une première lecture.)

La lumière étant une onde électromagnétique, le phénomène de diffraction relève de la théorie électromagnétique de Maxwell. C'est Arnold Sommerfeld qui, le premier, effectua un calcul exact de diffraction³ dans le cadre de la théorie de Maxwell. Hélas, en général, les calculs sont vite insurmontables, et seul un petit nombre de cas est parfaitement résolu.

A côté, la formulation d'Huygens-Fresnel est beaucoup plus simple et relativement efficace. Toutefois, pour donner du crédit à cette formulation il est légitime d'essayer de la justifier à partir de la théorie de Maxwell. C'est Kirchhoff qui proposa en 1882 une telle explication.

La méthode de Kirchhoff consiste à partir de l'équation d'onde vérifiée par une composante du champ électromagnétique que nous noterons $\psi(M, t)$:

$$\Delta\psi(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{d^2\psi(M, t)}{dt^2} = 0$$

ce qui mène, si l'on se restreint à l'étude des ondes monochromatiques de la forme (en notation complexe) $\underline{\psi}(M, t) = \underline{\psi}(M) e^{i\omega t}$, à l'équation de Helmholtz :

$$\Delta\underline{\psi}(M) + k^2\underline{\psi}(M) = 0 \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

À partir de cette relation et des théorèmes mathématiques relatifs à l'intégration, il est possible de calculer le champ électrique en un point M, si l'on connaît sa valeur en tout point d'une surface l'entourant. Plus précisément, si l'on considère un écran opaque infini dans lequel est percé une ouverture (S), alors le champ en un point M s'écrit

$$\underline{\psi}(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} \left[\frac{e^{-ikr}}{r} \vec{\nabla} \underline{\psi}(P) - \underline{\psi}(P) \vec{\nabla} (e^{-ikr}/r) \right] dS \vec{n} \quad \text{avec} \quad r = MP \quad (4.1)$$

Dans l'intégrale, P parcourt la surface de l'ouverture et \vec{n} désigne le vecteur unitaire normal à (S) et orienté vers la gauche. La relation (4.1) constitue le *théorème de Helmholtz-Kirchhoff*. D'après ce théorème, on peut

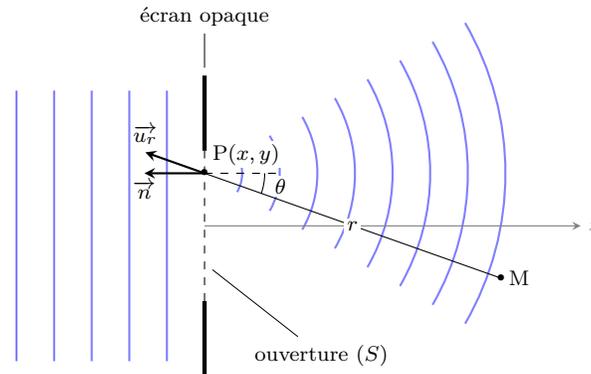


Fig. 4.4 – Paramétrisation du problème de diffraction. Les surfaces d'onde sont représentées en bleu.

calculer le champ électrique en M si l'on connaît sa valeur et son gradient en tout point de l'ouverture diffractante. Plaçons-nous dans le cas où l'écran opaque est plan et définissons l'axe Oz perpendiculaire au plan, de sorte que $\vec{n} = -\vec{u}_z$ (Fig. 4.4). Dans la relation (4.1), le premier terme de l'intégrale s'écrit

$$\frac{e^{-ikr}}{r} \vec{\nabla} \underline{\psi}(P) \cdot \vec{n} = -\frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial z}(P)$$

et le second terme vaut

$$\underline{\psi}(P) \vec{\nabla} (e^{-ikr}/r) \cdot \vec{n} = -\underline{\psi}(P) \frac{\partial e^{-ikr}/r}{\partial r} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = \underline{\psi}(P) \left(\frac{-ikr - 1}{r^2} \right) e^{-ikr} \cos \theta$$

3. Sommerfeld a résolu le problème de la diffraction d'une onde plane par un plan semi-infini opaque et conducteur.

Pour simplifier, supposons une onde incidente plane arrivant en incidence normale. À partir de là, procédons à deux approximations.

1. L'onde incidente est peu modifiée au niveau de l'ouverture diffractante.

$$\underline{\psi}_{\text{incident}} = f(x, y)e^{-ikz} \implies \frac{\partial \underline{\psi}}{\partial z}(\text{P}) = -ik \underline{\psi}(\text{P})$$

2. le point M est placé à une distance r grande devant la longueur d'onde de sorte que $kr \gg 1$.

Dans ce contexte, on aboutit à l'approximation suivante :

$$\underline{\psi}(\text{M}) \simeq \frac{i}{\lambda} \iint_{(S)} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \underline{\psi}(\text{P}) \frac{e^{-ikr}}{r} dS \quad (4.2)$$

On retrouve la formulation d'Huygens-Fresnel avec, en prime, l'expression du facteur K qui se révèle non constant. On trouve

$$K = \frac{i}{\lambda} \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

L'émission des ondelettes n'est donc pas isotrope : elle est maximum quand $\theta = 0$ et décroît quand $|\theta|$ croît comme l'avait suggéré Fresnel. En revanche, contrairement à ce que pensait Fresnel, les ondelettes secondaires vibrent en quadrature de phase avec l'onde incidente puisque K est imaginaire pure. Cependant, cet aspect n'a aucune importance si l'on ne s'intéresse qu'à la répartition de l'intensité lumineuse.

Finalement on retiendra que la formule d'Huygens-Fresnel est une bonne approximation à condition de supposer que l'onde incidente est peu perturbée par les bords de l'ouverture (ce qui suppose que l'ouverture soit grande devant λ) et que l'on se place à des distances d'observation grandes devant λ . Si en plus on s'impose des conditions paraxiales, on a θ petit d'où $K \simeq i/\lambda = C^{\text{te}}$. Ces conditions sont en général réunies en optique.

4.2 Diffraction de Fresnel

4.2.1 Diffraction par un trou le long de l'axe

Cherchons l'intensité de l'onde diffractée par une pupille circulaire éclairée par une onde plane, et intéressons-nous plus particulièrement au champ diffracté le long de l'axe de la pupille. Considérons un écran opaque percé d'un trou circulaire de diamètre $2a$ éclairé par une onde plane monochromatique en incidence normale.

L'obstacle est placé dans le plan $z = 0$ de sorte que l'état ondulatoire de l'onde dans le plan $z = 0^+$ est donné par

$$\underline{\psi}(\text{P}) = \begin{cases} \underline{\psi}_0 & \text{si } \rho < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En l'absence d'obstacle, l'onde incidente présente une intensité uniforme $I_0 = \frac{1}{2} |\underline{\psi}_0|^2$. En vertu du principe d'Huygens-Fresnel, l'onde diffractée en M s'écrit

$$\underline{\psi}(\text{M}) = \iint_{(S)} K \underline{\psi}(\text{P}) \frac{e^{-ikr}}{r} dS = K \underline{\psi}_0 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \frac{e^{-ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \rho d\rho d\theta$$

où l'on a choisi le système polaire (ρ, θ) pour repérer le point P. Le calcul de l'intégrale double se découple en un produit de deux intégrales simples (théorème de Fubini) :

$$\underline{\psi}(\text{M}) = K \underline{\psi}_0 2\pi \int_{\rho=0}^a \frac{e^{-ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \rho d\rho = K \underline{\psi}_0 2\pi \left[\frac{i}{k} e^{-ik\sqrt{\rho^2+z^2}} \right]_0^a$$

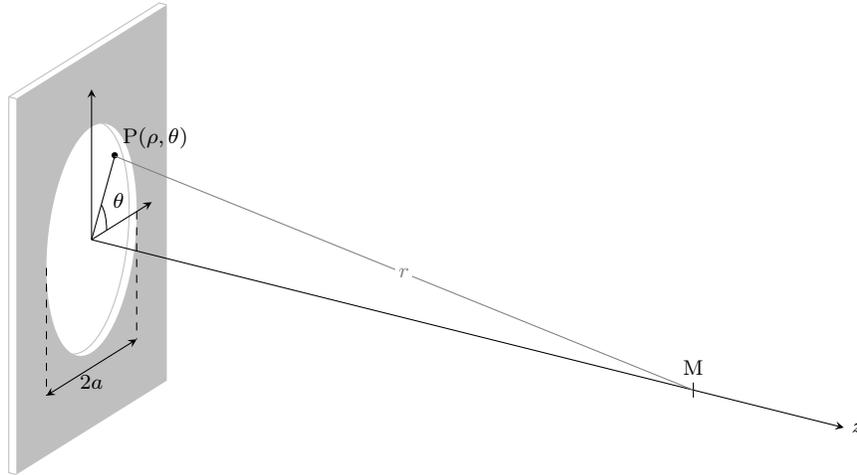


Fig. 4.5 – Position du problème

Finalement, l'amplitude complexe du champ diffracté en M vaut

$$\underline{\psi}(M) = \frac{i 2\pi K}{k} \left[\underline{\psi}_0 e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}} - \underline{\psi}_0 e^{-ikz} \right]$$

Si l'on utilise la valeur du facteur d'inclinaison K donnée par la théorie de Fresnel-Kirchhoff, soit $K = \frac{i}{\lambda}$ ici, on trouve

$$\underline{\psi}(M) = \underline{\psi}_0 e^{-ikz} - \underline{\psi}_0 e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}} \quad (4.3)$$

Résultat qui s'interprète simplement : le premier terme correspond à l'onde incidente (en $e^{i(\omega t - kz)}$), et le deuxième à une onde issue du bord du trou, émis avec un retard de π (du fait de la présence du signe $-$) et parcourant un chemin optique égal à $\sqrt{a^2+z^2}$. Un résultat inattendu est que l'onde déviée par le bord présente en M la même amplitude que l'onde incidente. En conséquence, cette superposition peut produire des interférences complètement destructives. En effet, le calcul de l'intensité lumineuse en M, donne

$$I = \frac{1}{2} \underline{\psi} \underline{\psi}^* = 2I_0 \left[1 - \cos \left(k\sqrt{z^2+a^2} - kz \right) \right] \quad (4.4)$$

Le graphe de l'intensité en fonction de z (Fig. 4.6) montre clairement l'existence de minima nuls résultant de l'interférence destructive entre l'onde incidente et l'onde diffractée par les bords. Les minima vérifient la condition

$$\sqrt{z^2+a^2} - z = p\lambda \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}^*$$

Comme on le voit, ces modulations d'intensité apparaissent lorsque l'on est proche de l'obstacle diffractant et leur nombre est de l'ordre de a/λ . Ces modulations rapides d'intensité sont caractéristiques de la diffraction en champ proche. En revanche, lorsque

$$\sqrt{z^2+a^2} - z < \frac{\lambda}{2} \quad \text{soit } z > \frac{a^2 - (\lambda/2)^2}{\lambda}$$

L'intensité lumineuse décroît de façon monotone jusqu'à s'annuler à l'infini. Plus précisément, l'intensité décroît comme $1/z^2$ lorsque $z \gg \frac{a^2 - (\lambda/2)^2}{\lambda}$. Cette diminution d'intensité le long de l'axe est directement liée à une dispersion angulaire de l'énergie lumineuse ; c'est une des caractéristiques de la diffraction en champ lointain, et qui fait l'objet du chapitre suivant.

Le calcul précédent suppose un facteur d'inclinaison K constant. En réalité comme on l'a déjà vu, l'émission des ondelettes sphériques n'est pas isotrope. Lorsque l'on tient compte de cet effet, on trouve la

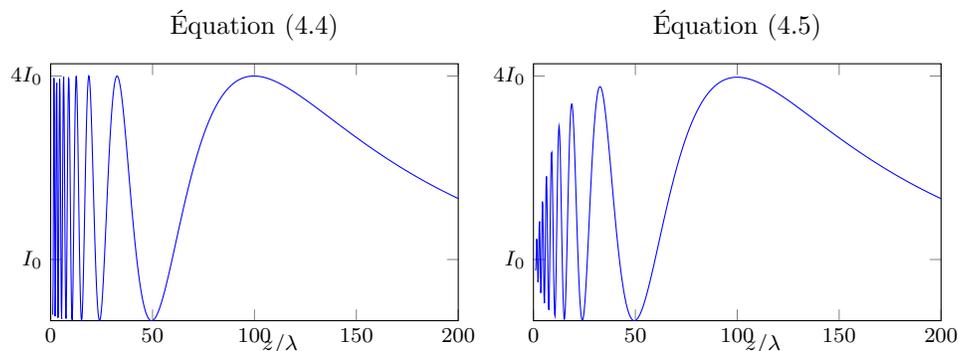


Fig. 4.6 – Intensité de la lumière diffractée le long de l’axe d’une pupille circulaire de rayon $a = 10\lambda$.

relation ⁴

$$I = I_0 \left[1 + \frac{z^2}{z^2 + a^2} - \frac{2z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \cos \left(k\sqrt{z^2 + a^2} - kz \right) \right] \quad (4.5)$$

On retrouve les modulations d’intensité, mais leur amplitude décroît lorsque $z \rightarrow 0$. Ainsi $I \rightarrow I_0$ quand on se rapproche du plan de la pupille circulaire, conformément à l’hypothèse selon laquelle l’onde incidente n’est pas perturbée dans le plan $z = 0$.

4.2.2 Diffraction par un trou hors de l’axe

Le calcul du champ diffracté par une ouverture circulaire en un point M situé hors de l’axe présente plus de difficultés que le calcul précédent. Tout d’abord, la symétrie cylindrique du problème invite à repérer le point M par ses coordonnées cylindriques (ρ', θ', z) . Comme précédemment, on repère le point P par ses coordonnées polaires (ρ, θ) .

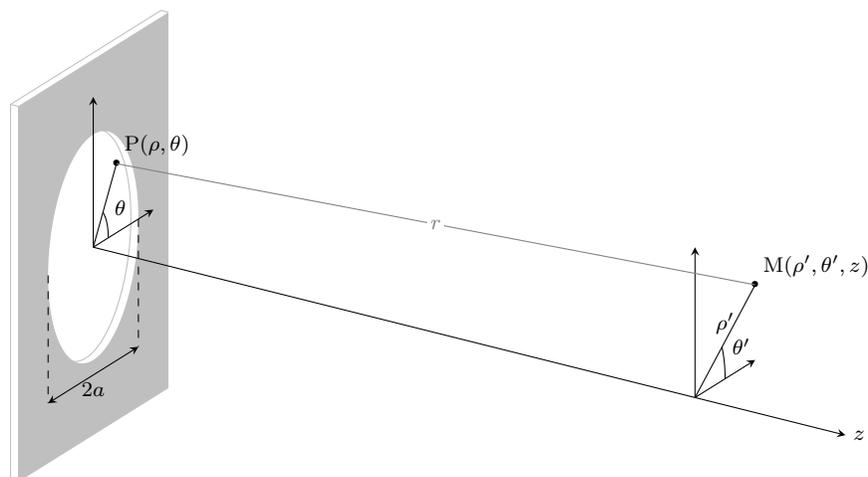


Fig. 4.7 – Paramétrisation du problème.

D’après la formule de Fresnel, le champ diffracté s’écrit

$$\underline{\psi}(M) = \iint_{(S)} K \underline{\psi}(P) \frac{e^{-ikr}}{r} dS \quad \text{avec} \quad r = PM = (\rho^2 + z^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta' - \theta))^{1/2}$$

4. DUBRA, A. & FERRARI, J. A. Diffracted field by an arbitrary aperture. *American Journal of Physics* **67**, 87–92 (1999).

L'invariance par rotation d'axe Oz entraîne une indépendance de l'onde avec θ' . Par conséquent, on peut choisir $\theta' = 0$. On obtient

$$\underline{\psi}(M) = K \underline{\psi}_0 \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \frac{e^{-ik\sqrt{\rho^2+z^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\theta}}}{\sqrt{\rho^2+z^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\theta}} \rho d\rho d\theta$$

Nous n'entrerons pas dans le détail de ce calcul trop technique par rapport à notre propos, et l'on renvoie le lecteur aux références [6] et [5] pour plus d'informations. Intéressons nous plutôt aux propriétés du champ

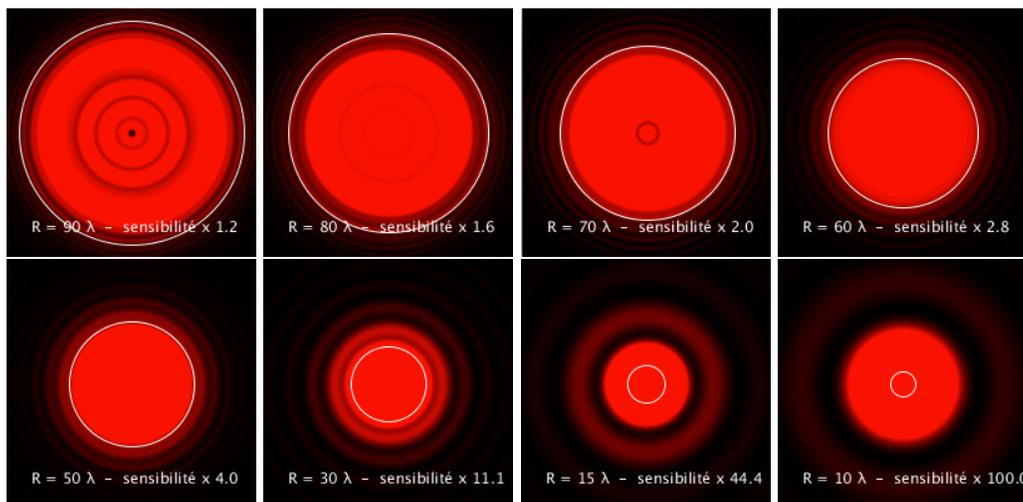


Fig. 4.8 – Intensité reçue sur un capteur situé à $z = 1000\lambda$ d'une pupille diffractante de rayon R (simulation). La sensibilité est fixée de sorte le nombre de photons captés reste constant. Le cercle blanc indique les bords de l'image géométrique.

diffracté obtenu en résolvant numériquement l'intégrale précédente. La figure 4.8 montre l'évolution de l'intensité reçue par un capteur situé à $z = 1000\lambda$ de la pupille dont le rayon varie entre 10 et 90λ . On peut faire les observations suivantes.

- Pour les grands diamètres, la tache est assez proche de ce que prévoient les lois de l'optique géométrique, à ceci près que des anneaux sombres apparaissent.
- Lorsque le diamètre diminue, le nombre d'anneaux sombres dans l'image géométrique diminue. On peut noter que la dimension latérale de la tache lumineuse est minimale lorsque $z \approx a^2/\lambda$ (ici pour un rayon de 30λ). La diffraction en champ proche produit un léger effet focalisant ; effet en cohérence avec le fait que l'intensité lumineuse est maximale au centre lorsque $z \simeq a^2/\lambda$ (Fig. 4.6).
- Enfin, une diminution supplémentaire du diamètre de la pupille entraîne une augmentation de la dimension de la tache lumineuse, laquelle dépasse la taille prévue par les lois de l'optique géométrique. Nous verrons dans le chapitre suivant que pour les petits objets diffractants ($a \ll \sqrt{\lambda z}$) ou, ce qui est équivalent, pour les grandes distances d'observations ($z \gg a^2/\lambda$), la tache de diffraction s'élargit proportionnellement à z entraînant du même coup une décroissance de l'intensité en $1/z^2$.

4.2.3 Tache de Poisson-Arago

Lorsqu'en 1818 Augustin Fresnel présente ses travaux à l'Académie des Sciences de Paris, il laisse certains scientifiques sceptiques⁵. L'un d'entre eux, Siméon Poisson, remarque que sa formule prévoit l'existence d'une

5. Précisons que le jury chargé de remettre le prix de l'Académie des Sciences est constitué de trois newtoniens convaincus : Pierre-Simon Laplace (dit le « Newton français »), Jean-Baptiste Biot (l'inventeur de la polarimétrie) et Siméon Poisson.

concentration de lumière *derrière* un obstacle circulaire, au centre de l'ombre géométrique. En effet, toutes les ondelettes arrivent nécessairement en phase au centre de l'ombre, entraînant une accumulation de lumière.

Détaillons le calcul de Poisson. Considérons un disque opaque de diamètre $2a$ éclairée par une onde plane en incidence normale. La relation d'Huygens-Fresnel permet assez facilement de calculer la distribution de l'intensité lumineuse derrière le disque (dans l'ombre géométrique) en tout point de l'axe du disque. On a

$$\psi(M) = K \iint_{(S)} \underline{\psi}(P) \frac{e^{-ikr}}{r} dS \quad \text{avec} \quad \underline{\psi}(P) = \begin{cases} \underline{\psi}_0 & \text{si } \rho > a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme on le voit, l'état ondulatoire $\underline{\psi}(P)$ est complémentaire de celui pour un trou :

$$\underline{\psi}^{\text{disque}}(P) + \underline{\psi}^{\text{trou}}(P) = \underline{\psi}_0 \quad \forall P$$

Notons $\underline{\psi}^{\text{disque}}(M)$ et $\underline{\psi}^{\text{trou}}(M)$ les ondes diffractées respectivement par un disque et un trou. On a

$$\underline{\psi}^{\text{disque}}(M) + \underline{\psi}^{\text{trou}}(M) = \underline{\psi}_0 e^{-ikz}$$

En effet, lorsque l'on superpose les deux obstacles complémentaires tout se passe comme s'il n'y avait pas d'écran diffractant. Par conséquent, l'amplitude diffractée par un disque de diamètre d le long de son axe, s'obtient à partir de la relation (4.3).

$$\underline{\psi}^{\text{disque}}(M) = \underline{\psi}_0 e^{-ik\sqrt{a^2+z^2}}$$

d'où il découle une intensité

$$I(M) = \frac{1}{2} \left| \underline{\psi}^{\text{disque}} \right|^2 = I_0$$

Quel que soit l'endroit où l'on place l'écran, on doit observer une tache centrale d'intensité constante⁶ égale à l'intensité du faisceau incident. Ce résultat semblait tellement absurde pour Poisson que ça invalidait – selon lui – la théorie de Fresnel. Arago, un membre de l'Académie enthousiaste par les idées de Fresnel, fit l'expérience et confirma la prévision de Fresnel : il y a effectivement une tache lumineuse au centre de l'ombre géométrique, appelé depuis tâche de Poisson-Arago (Fig. 4.1).

Cette confirmation sera décisive dans le succès de la théorie de Fresnel et plus généralement dans la reconnaissance de la nature ondulatoire de la lumière. La théorie corpusculaire vit alors ces dernières heures. Le coup de grâce sera rendu en 1849 quand Léon Foucault et Hippolyte Fizeau mesurèrent indépendamment la vitesse de la lumière dans l'eau. En montrant que la lumière s'y propage moins vite que dans l'air, ils confirmèrent une fois de plus la théorie ondulatoire.

6. En réalité, en tenant compte du facteur d'obliquité, on trouve $I = I_0/(1 + a^2/z^2)$.

5 DIFFRACTION DE FRAUNHOFER

Ce chapitre s'intéresse à la diffraction en champ lointain, dit *diffraction de Fraunhofer*. Après quelques précisions sur ses conditions d'observation, nous montrons comment elle joue un rôle dans la formation des images par un système stigmatique. Enfin, nous voyons comment la prise en compte de la diffraction modifie les résultats du chapitre 3 sur les réseaux de diffraction.

Sommaire

5.1	Diffraction en champ lointain	57
5.1.1	Approximation de Fraunhofer	57
5.1.2	Conditions expérimentales	58
5.1.3	Diffraction par une pupille rectangulaire	60
5.1.4	Diffraction par une fente	62
5.2	Formation des images	63
5.2.1	Image d'un point source	63
5.2.2	Cas d'un diaphragme circulaire	63
5.2.3	Résolution angulaire limite	66
5.2.4	Résolution spatiale d'un microscope	66
5.3	Retour sur les interférences	68
5.3.1	Fonction de transparence	68
5.3.2	Théorème des réseaux	68
5.3.3	Retour sur l'expérience d'Young	69
5.3.4	Réseau de Fentes	70

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/optique/diffraction-de-fraunhofer.php>

5.1 Diffraction en champ lointain

5.1.1 Approximation de Fraunhofer

Éclairons une pupille diffractante par une onde plane en incidence normale, puis observons la lumière diffractée sur un écran. À partir d'une certaine distance, la figure de diffraction présente un motif unique qui se contente de se dilater au fur et à mesure qu'on éloigne l'écran d'observation. C'est ce type de diffraction que l'on appelle *diffraction de Fraunhofer*.

Plaçons-nous dans le contexte du chapitre précédent : une onde plane en incidence normale arrive sur une pupille plane diffractante (S) placée en $z = 0$. On observe la répartition de l'intensité lumineuse sur un écran plan placé à la distance z de l'obstacle. Les notations sont les mêmes : $P(x, y, 0)$ repère un point de la pupille diffractante, et $M(x', y', z)$ un point de l'écran d'observation.

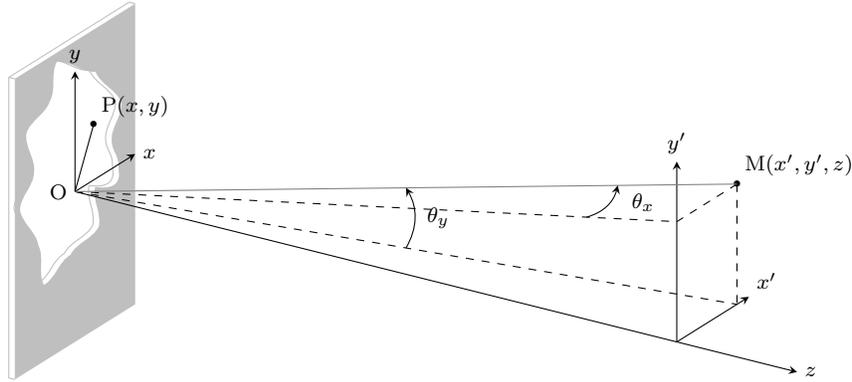


Fig. 5.1 – Paramétrage du problème de diffraction en champ lointain.

L'*approximation de Fraunhofer* consiste à se placer dans l'approximation paraxiale ($x', y' \ll z$) et en champ lointain ($z \gg x, y$). Reprenons l'expression de l'onde diffractée prévue par la théorie d'Huygens-Fresnel :

$$\underline{\psi}(M) = \frac{i}{\lambda} \iint_{(S)} \underline{\psi}(P) \frac{e^{-ikr}}{r} dx dy \quad \text{avec} \quad r = PM$$

expression dans laquelle le facteur d'obliquité est pris égal à 1 car les rayons issus de P et arrivant en M sont peu inclinés par rapport à l'axe (Oz). Repérons le point M à l'aide des deux angles θ_x et θ_y que forme (OM) avec l'axe (Oz) (Fig. 5.1) :

$$\sin \theta_x = \frac{x'}{OM} \quad \text{et} \quad \sin \theta_y = \frac{y'}{OM}$$

Comme l'observation se fait à grande distance, r varie peu quand P parcourt le domaine d'intégration, de sorte que l'on peut approcher $1/r$ par $1/OM$. En revanche, pour le terme de phase kr il faut être plus précis, car lorsque P parcourt la surface diffractante, il suffit que la distance r varie de $\lambda/2$ pour que le terme e^{-ikr} change de signe. On a

$$\vec{r} = \vec{PM} = \vec{OM} - \vec{OP} \quad \text{d'où} \quad r^2 \simeq OM^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{OP} + OP^2$$

Utilisons l'approximation $\sqrt{1-\epsilon} \simeq 1 - \epsilon/2$, puis gardons seulement les termes d'ordre un en x et y . On aboutit à

$$r \simeq OM - \frac{\vec{OM} \cdot \vec{OP}}{OM} = OM - x \sin \theta_x - y \sin \theta_y$$

L'onde diffractée en champ lointain s'écrit donc

$$\underline{\psi}(M) \simeq \frac{i}{\lambda} \frac{e^{-ikOM}}{OM} \iint_{(S)} \underline{\psi}(P) e^{ik(x \sin \theta_x + y \sin \theta_y)} dx dy \quad \heartsuit \quad (5.1)$$

Une fois ce calcul effectué, on obtient l'intensité lumineuse en prenant le carré du module de $\underline{\psi}(\mathbf{M})$. En pratique, on s'intéresse aux variations d'intensité dans le plan d'observation. C'est pourquoi, on se contente souvent de calculer l'intégrale de l'équation (5.1) puisque le terme multiplicateur est constant en module ($1/OM \simeq 1/z$) :

$$I(\mathbf{M}) \propto \left| \iint_{(S)} \underline{\psi}(\mathbf{P}) e^{ik(x \sin \theta_x + y \sin \theta_y)} dx dy \right|^2 \quad (5.2)$$

Cette dernière relation montre que la répartition de l'intensité dépend de la position de \mathbf{M} *via* uniquement les variables $\sin \theta_x$ et $\sin \theta_y$. En d'autres termes, on a

$$I(x', y', z) \propto f(x'/z, y'/z)$$

ce qui signifie que lorsque z augmente d'un certain facteur (on recule le capteur), le motif de diffraction subit une dilatation de ce même facteur. Finalement, si on oublie un instant le fait que l'intensité diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la pupille diffractante, la tache de diffraction conserve sa forme au facteur de dilatation près.

5.1.2 Conditions expérimentales

Le montage le plus simple consiste à placer une source ponctuelle au foyer d'une lentille mince de façon à former une onde plane. On interpose ensuite la pupille diffractante à étudier, puis on recueille la lumière diffractée sur un écran placé suffisamment loin. On cherche ici à préciser ce dernier point.

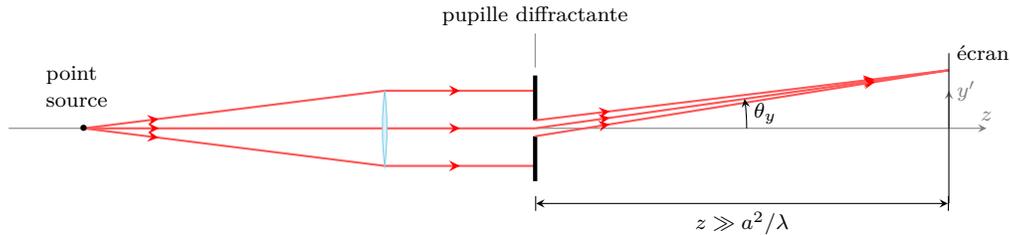


Fig. 5.2 – Observation de la diffraction dans le cadre de l'approximation de Fraunhofer.

Reprenons le raisonnement de la section précédente :

$$\vec{r} = \vec{PM} = \vec{OM} - \vec{OP} \quad \text{soit} \quad r = OM \sqrt{1 + \frac{OP^2 - 2\vec{OM} \cdot \vec{OP}}{OM^2}}$$

L'approximation de Fraunhofer consiste à négliger l'influence du terme quadratique dans e^{ikr} , ce qui suppose

$$\frac{OP^2}{OM} \ll \lambda \quad \forall P \in (S)$$

Dans les conditions paraxiales on a $OM \simeq z$, et si l'on note a la taille caractéristique de la pupille diffractante, l'approximation de Fraunhofer est valide à condition que

$$z \gg \frac{a^2}{\lambda} \quad \heartsuit \quad (5.3)$$

Finalement, on peut séparer le champ de diffraction en trois zones, chaque zone correspondant à un niveau d'approximation différent (Tab. 5.1).

Tab. 5.1 – Les différents niveaux d'approximation

Distance pupille-écran	$z \sim \lambda$	$z \gg \lambda$	$z \gg \lambda$ et $z \gg \frac{a^2}{\lambda}$
Théorie valide	Maxwell	Huygens-Fresnel	Fraunhofer

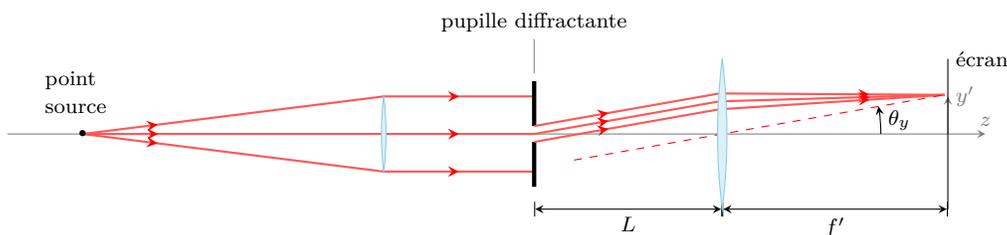
En pratique, il faut placer l'écran de diffraction assez loin pour que l'approximation de Fraunhofer soit valide. En lumière rouge ($\lambda \sim 1 \mu\text{m}$), on trouve

$$\begin{aligned} \text{pour } a = 1 \text{ cm} &\quad \rightarrow z \gg 100 \text{ m} \\ \text{pour } a = 1 \text{ mm} &\quad \rightarrow z \gg 1 \text{ m} \\ \text{pour } a = 100 \mu\text{m} &\quad \rightarrow z \gg 1 \text{ cm} \end{aligned}$$

Cette contrainte s'accompagne d'une baisse de luminosité du phénomène. En effet, d'après la relation (5.1), l'intensité au centre de l'écran est donnée par

$$I(0, 0, z) = \frac{\mathcal{A}^2}{\lambda^2 z^2} I_0 \ll I_0$$

où I_0 est l'intensité de la lumière incidente et \mathcal{A} l'aire de la pupille diffractante. Par exemple, pour un trou de rayon $a \sim 1 \text{ mm}$, on choisira $z \sim 10 \text{ m}$, et l'intensité au centre de l'écran sera de l'ordre de $I \sim I_0/100$. La faible luminosité du phénomène impose souvent l'utilisation d'un laser.

**Fig. 5.3** – Dispositif d'observation de la diffraction de Fraunhofer.

Une autre méthode d'observation consiste à interposer entre la pupille diffractante et l'écran, une lentille convergente, puis à placer l'écran dans le plan focal image de la lentille. Ce montage présente l'avantage d'être plus intense et moins encombrant que la première méthode. Les rayons qui se croisent dans le plan focal sont issus de rayons diffractés parallèles entre eux, c'est-à-dire des rayons qui se couperaient à l'infini en l'absence de lentille. Par conséquent, les conditions de Fraunhofer sont *de facto* remplies. Les relations de passage entre (x', y') et (θ_x, θ_y) sont, dans l'approximation paraxiale (petits angles) :

$$\sin \theta_x \simeq \frac{x'}{f'} \quad \text{et} \quad \sin \theta_y \simeq \frac{y'}{f'}$$

avec f' la distance focale image de la lentille convergente. Ainsi, avec ce montage, la répartition de l'intensité lumineuse est donnée par

$$I(x', y', L + f') = \frac{1}{\lambda^2 f'^2} \left| \iint_{(S)} \underline{\psi}(\text{P}) e^{ik(xx'+yy')/f'} dx dy \right|^2 \quad (5.4)$$

Cette relation a le mérite d'être exacte¹. Notez que la distance L entre la pupille diffractante et la lentille ne joue aucun rôle sur la tache de diffraction observée dans le plan focal.

1. On peut démontrer ce résultat à l'aide de la formule d'Huygens-Fresnel

En résumé

L'approximation de Fraunhofer consiste à se placer dans l'approximation paraxiale ($\theta_x, \theta_y \ll 1$) et en champ lointain ($z \gg a^2/\lambda$). Dans ce cadre, l'intensité de la lumière diffractée vaut

$$I(M) \simeq \frac{1}{z^2 \lambda^2} \left| \iint_{(S)} \underline{\psi}(P) e^{ik(x \sin \theta_x + y \sin \theta_y)} dx dy \right|^2 \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Cette dernière relation devient exacte si l'on observe la lumière dans le plan focal d'une lentille. Il suffit de remplacer z par la distance focale image f' .

5.1.3 Diffraction par une pupille rectangulaire

Considérons une pupille rectangulaire de largeur $2a$ suivant (Ox) et de longueur $2b$ suivant (Oy) . Envoyons

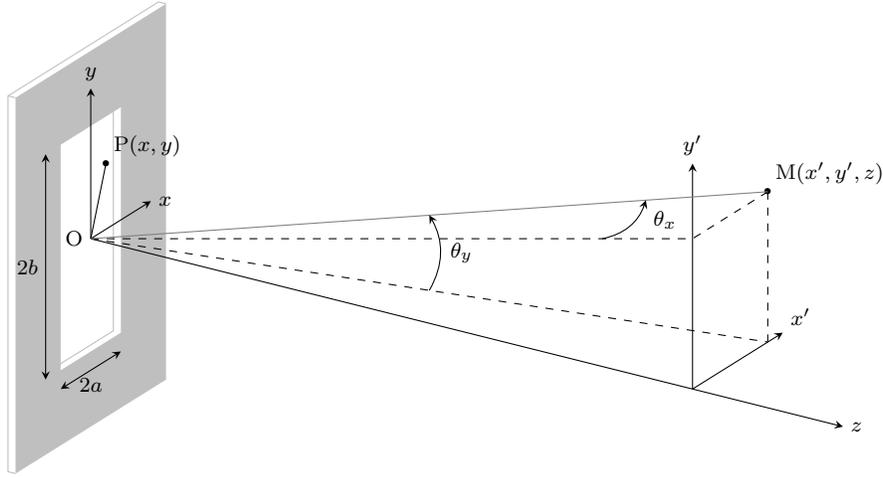


Fig. 5.4 – Pupille rectangulaire.

une onde plane en incidence normale sur la pupille diffractante. L'état vibratoire dans le plan de la pupille rectangulaire s'écrit

$$\underline{\psi}(P) = \begin{cases} \psi_0 & \text{si } |x| < a \text{ et } |y| < b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où ψ_0 est une amplitude constante. L'onde diffractée à l'infini dans la direction donnée par θ_x et θ_y s'écrit donc

$$\underline{\psi}(\theta_x, \theta_y) = \frac{i\psi_0}{\lambda} \frac{e^{-ikOM}}{OM} \int_{-b}^b e^{ik(y \sin \theta_y)} dy \int_{-a}^a e^{ik(x \sin \theta_x)} dx$$

relation qui fait intervenir l'intégrale

$$\int_{-x_0}^{x_0} e^{i\alpha x} dx = \left[\frac{1}{i\alpha} e^{i\alpha x} \right]_{-x_0}^{x_0} = 2x_0 \operatorname{sinc}(\alpha x_0)$$

où l'on a défini la fonction *sinus cardinal* : $\operatorname{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin(x)}{x}$ (Fig. 5.5).

Ainsi, on obtient

$$\underline{\psi}(\theta_x, \theta_y) = i\psi_0 \frac{4ab}{\lambda OM} e^{-ikOM} \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi a \sin \theta_x}{\lambda}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi b \sin \theta_y}{\lambda}\right)$$

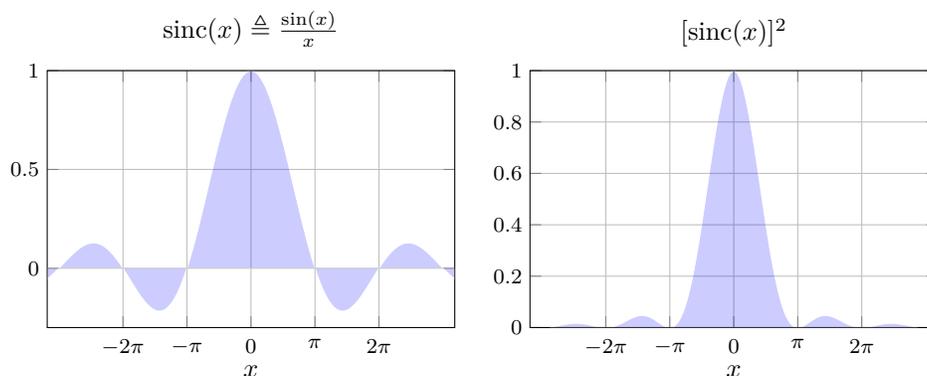


Fig. 5.5 – Graphes de la fonction sinus cardinal et de son carré.

et l'intensité lumineuse vaut

$$I(\theta_x, \theta_y) = I_{\max} \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{2\pi a \sin \theta_x}{\lambda} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{2\pi b \sin \theta_y}{\lambda} \right) \right]^2 \quad (5.5)$$

avec I_{\max} l'intensité lumineuse le long de l'axe optique ($\theta_x = \theta_y = 0$). La figure 5.6 montre le motif recueilli sur un écran situé dans la zone de Fraunhofer ($z \gg \max(a^2, b^2)/\lambda$). On peut voir qu'il existe des lignes d'intensité nulle correspondant à l'annulation de l'un des deux sinus cardinaux. Notez que la figure de diffraction présente une symétrie quadratique comme la pupille. Les éléments de symétrie de la pupille se retrouvent dans la figure de diffraction comme le veut le principe de Curie.

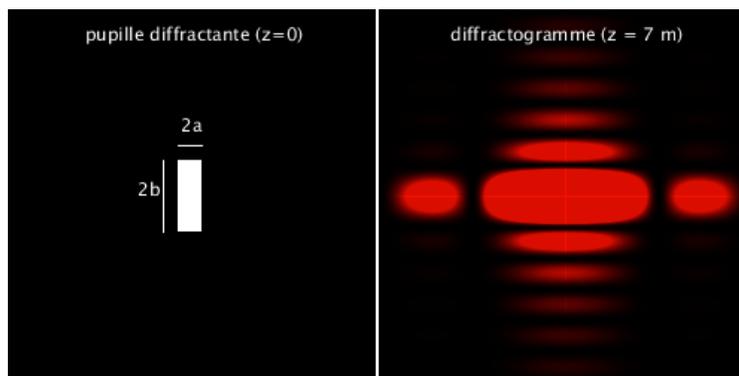


Fig. 5.6 – Pupille diffractante (à gauche) et tache de diffraction (à droite). Simulation réalisée pour $\lambda = 700 \text{ nm}$, $a = 0,56 \text{ mm}$, $b = 3a$ et $z = 7 \text{ m}$.

Alors que l'optique géométrique prévoit une tache rectangulaire en vertu de la propagation rectiligne de la lumière, la prise en compte de la diffraction fait apparaître une tache centrale de diffraction **beaucoup plus large que l'image géométrique**. En effet, la tache centrale est localisée dans un espace angulaire caractérisé par

$$|\sin \theta_x| < \frac{\lambda}{2a} \quad \text{et} \quad |\sin \theta_y| < \frac{\lambda}{2b}$$

Dans l'approximation paraxiale, on peut approcher $\sin \theta_x$ et $\sin \theta_y$ par respectivement x'/z et y'/z . Aussi la tache principale de diffraction est localisée dans la zone d'espace définie par

$$|x'| < a' = \frac{z\lambda}{2a} \quad \text{et} \quad |y'| < b' = \frac{z\lambda}{2b}$$

Dans la zone de Fraunhofer ($z \gg \max(a^2, b^2)/\lambda$), on a nécessairement $a' \gg a$ et $b' \gg b$.

Si a diminue, le motif de diffraction s'élargit suivant (Ox') , et si b diminue il s'élargit suivant (Oy') . On peut montrer que la tache centrale concentre la majeure partie de l'éclairement lumineux (environ 80%). On observe également des « tâches satellites » beaucoup moins intenses ($I < 5\% I_{\max}$) dont l'intensité décroît rapidement au fur et à mesure qu'on s'éloigne du centre.

En conclusion, le phénomène de diffraction de la lumière par une ouverture rectangulaire est, dans l'approximation de Fraunhofer, d'autant plus prononcé que l'ouverture est étroite. Le motif de diffraction fait apparaître une tache centrale qui concentre l'essentiel de l'énergie lumineuse, et qui se situe dans un espace angulaire donné par

$$|\sin \theta_x| < \frac{\lambda}{2a} \quad \text{et} \quad |\sin \theta_y| < \frac{\lambda}{2b} \quad \heartsuit \quad (5.6)$$

5.1.4 Diffraction par une fente

Le cas de la fente fine s'obtient en faisant tendre b vers l'infini². En vertu de ce que l'on a vu sur la pupille rectangulaire, on prévoit un éparpillement de la lumière selon (Ox') , et quasiment pas verticalement. Intéressons-nous donc à la répartition de l'intensité lumineuse en $y' = 0$. En reprenant la formule (5.5), il vient

$$I(\theta_x, \theta_y = 0) = I_{\max} \left[\text{sinc} \left(\frac{2\pi a \sin \theta_x}{\lambda} \right) \right]^2 \quad (5.7)$$

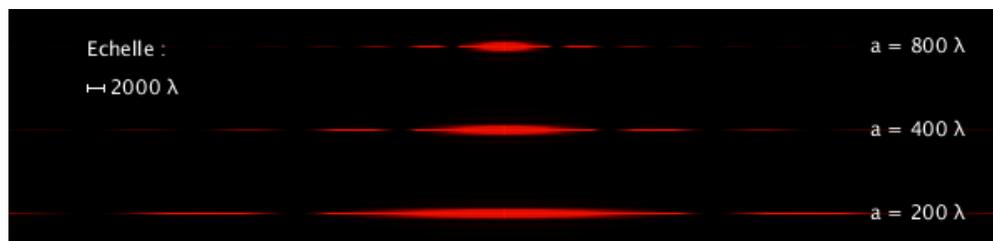


Fig. 5.7 – Diffraction par une fente dans le plan $z = 10^7 \lambda$. La simulation montre l'influence de la largeur sur le diffractogramme.

On représente souvent cette distribution d'intensité en coordonnées polaires. On obtient alors l'*indicatrice de diffraction* d'une fente. Cette indicatrice fait apparaître un lobe principal de diffraction (la tache centrale) et des lobes secondaires d'intensités décroissantes (Fig. 5.8).

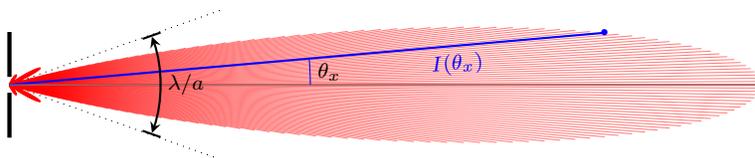


Fig. 5.8 – Indicatrice de diffraction dans le plan (xOz) pour $2a = 3\lambda$.

2. Rigoureusement, l'approximation de Fraunhofer n'est plus valide car $\max(a^2, b^2)/\lambda \rightarrow \infty$. Cependant, on peut montrer qu'en $y' = 0$ on retrouve la formule de Fraunhofer si $z \gg a^2/\lambda$.

5.2 Formation des images

5.2.1 Image d'un point source

Considérons le montage classique de la projection d'un point source sur un écran à l'aide d'une lentille mince convergente L . Plaçons un diaphragme juste devant la lentille. En vertu des lois de l'optique géométrique, et en supposant la lentille exempte de tous défauts (chromatiques et géométriques), on s'attend à observer une image réelle ponctuelle A' sur l'écran. Toutefois, on sait que la lumière qui arrive sur le diaphragme est diffractée de sorte que tous les rayons *ne convergent pas* en A' . On peut légitimement se demander quelle est la répartition de l'intensité lumineuse lorsque l'on tient compte du phénomène de diffraction.

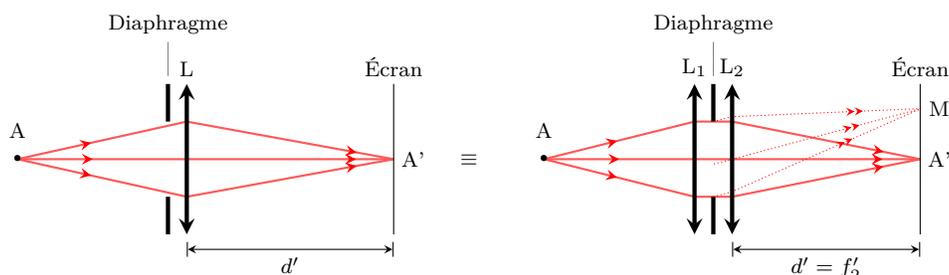


Fig. 5.9 – Équivalence des deux montages.

Pour cela, on peut toujours remplacer la lentille L par deux lentilles L_1 et L_2 , accolées, telles que A' se situe dans le plan focal image de L_2 et A dans le plan focal objet de L_1 (Fig. 5.9). Dans ce cas, L_1 permet d'envoyer une onde plane en incidence normale sur le diaphragme et L_2 fait interférer tous les rayons émergents du diaphragme à l'infini en les projetant dans son plan focal. On retrouve donc un montage équivalent à celui de la figure 5.3. Ainsi, la répartition de la lumière sur l'écran est donnée par la diffraction de Fraunhofer. On retiendra donc que lorsqu'une lentille conjugue un plan objet avec un plan image, tout point objet donne naissance à la figure de diffraction de Fraunhofer du diaphragme placé juste avant (ou juste après) la lentille.

C'est ce qui explique que la diffraction de Fraunhofer joue un rôle capital dans la formation des images. Du point de vue mathématique, l'intensité lumineuse enregistrée sur l'écran est donnée par la formule (5.4) où f' est à remplacer par la distance $d' = OA'$:

$$I(x', y', d') = \frac{1}{\lambda^2 d'^2} \left| \iint_{(S)} \psi(P) e^{ik(xx' + yy')/d'} dx dy \right|^2 \quad (5.8)$$

Notez que cette formule est exacte et aucune condition sur d' n'est requise. Nul besoin de choisir de grandes focales, ce qui permet d'avoir un phénomène lumineux. En revanche, la taille de la tache de diffraction est d'autant plus petite que d' est petit.

À retenir

L'image d'un point A par une lentille est une tache de diffraction centrée sur l'image A' prévue par l'optique géométrique. Cette tache de diffraction est donnée par la diffraction de Fraunhofer du diaphragme placé devant la lentille.

5.2.2 Cas d'un diaphragme circulaire

Le montage typique de la formation des images en éclairage incohérent est constitué d'un système convergent limité par une pupille circulaire. Chaque point objet a pour image une tache de diffraction

centrée sur l'image géométrique. Pour simplifier, nous allons considérer un point A sur l'axe optique et déterminer la répartition de l'intensité sur le plan conjugué par une lentille mince. On note a le rayon de la pupille et d' la distance entre la lentille et l'écran d'observation.

■ **Remarque** : le calcul est un peu technique. Pour une première lecture on peut aller directement au résultat (5.9).

On sait que la répartition de l'intensité est donnée par la diffraction de Fraunhofer :

$$I(\theta_x, \theta_y) = \frac{1}{\lambda^2 d'^2} \left| \iint_{(S)} \psi(P) e^{ik(x \sin \theta_x + y \sin \theta_y)} dx dy \right|^2$$

Le calcul est simplifié quand on exploite la symétrie de révolution du problème. Repérons donc P et M par leurs coordonnées polaires (ρ, φ) et (ρ', φ') . L'élément de surface en coordonnées polaires s'écrit $dx dy = \rho d\rho d\varphi$. Par ailleurs, vu la symétrie, il est intéressant de définir l'angle de diffraction θ que forme (OM) avec l'axe (Oz). Cet angle est relié aux « angles cartésiens » par

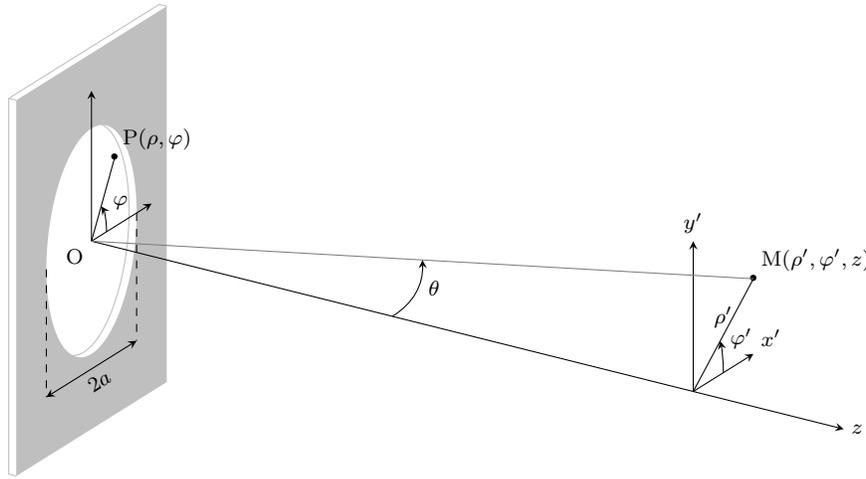


Fig. 5.10 – Pupille circulaire.

$$\sin \theta = \frac{\rho'}{OM} \quad ; \quad \sin \theta_x = \sin \theta \cos \varphi' \quad ; \quad \sin \theta_y = \sin \theta \sin \varphi'$$

de sorte que

$$x \sin \theta_x + y \sin \theta_y = \rho \sin \theta (\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi') = \rho \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')$$

On ré-exprime ainsi l'intensité lumineuse :

$$I(\theta) = \frac{1}{\lambda^2 d'^2} \left| \int_{\rho=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \psi_0 e^{ik\rho \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')} \rho d\rho d\varphi \right|^2$$

Comme on l'a dit, la symétrie de révolution implique l'invariance de l'intensité par rapport à φ' . C'est pourquoi on peut imposer $\varphi' = 0$ pour simplifier le calcul :

$$I(\theta) = \frac{I_0}{\lambda^2 d'^2} \left| \int_0^a \rho d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{ik\rho \sin \theta \cos \varphi} d\varphi}_{2\pi J_0(k\rho \sin \theta)} \right|^2$$

La dernière intégrale fait intervenir la *fonction de Bessel d'ordre 0*, notée J_0 , définie par

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \varphi} d\varphi$$

Posons $x = k\rho \sin \theta$ puis choisissons x comme variable d'intégration :

$$I(\theta) = \frac{I_0}{\lambda^2 d'^2} \left| \int_0^{ka \sin \theta} x J_0(x) dx \times \frac{2\pi}{k^2 \sin^2 \theta} \right|^2$$

Par définition, la *fonction de Bessel d'ordre 1*, notée J_1 , est reliée à J_0 via

$$x J_0(x) = \frac{d(x J_1(x))}{dx}$$

Finalement, on trouve

$$I(\theta) = I_{\max} \left(\frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2 \quad \text{avec} \quad I_{\max} = I_0 \left(\frac{\pi a^2}{\lambda d'} \right)^2 \quad (5.9)$$

L'évolution de l'intensité avec $\sin \theta$ est représentée sur la figure 5.11 dans l'espace $(\sin \theta_x, \sin \theta_y)$ équivalent

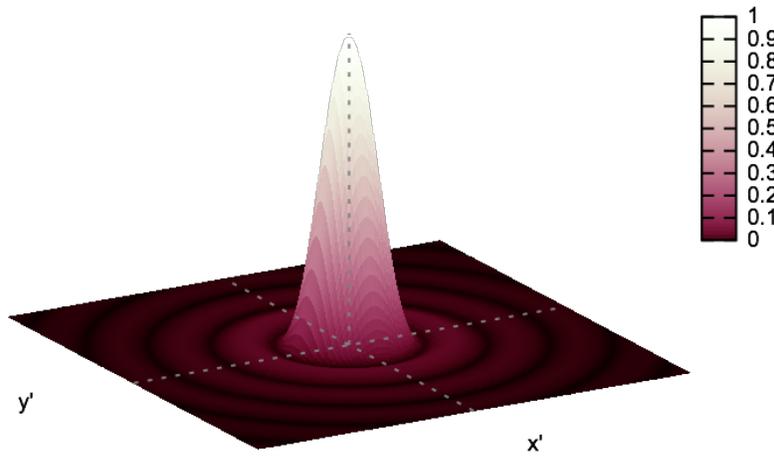


Fig. 5.11 – Profil d'intensité de la tache de diffraction par une pupille circulaire.

–à un facteur d'échelle près et dans l'approximation paraxiale– au plan d'observation. On peut remarquer que l'essentiel de l'énergie lumineuse se concentre dans une tache centrale circulaire que l'on appelle *tache d'Airy*. Cette dernière est entourée d'anneaux de diffraction moins intenses ($I < 2\%$). Le premier anneau sombre est donné par l'annulation de $J_1(ka \sin \theta)$ et correspond à $ka \sin \theta = 1,22\pi$. Il vient donc que la lumière diffractée se concentre dans un cône tel que

$$|\sin \theta| \simeq |\theta| < 1,22 \frac{\lambda}{2a} \quad \heartsuit \quad (5.10)$$

Ce cône produit une tache centrale de diamètre

$$\phi \simeq 1,22 \frac{\lambda d'}{a}$$

Ainsi, contrairement aux lois de l'optique géométrique, même dans le cadre des rayons paraxiaux, l'image d'un point n'est pas un point mais une tache de diffraction dont la dimension et l'intensité sont de l'ordre de

$$\phi \sim \frac{\lambda d'}{a} \quad \text{et} \quad I \sim I_0 \left(\frac{\pi a^2}{\lambda d'} \right)^2$$

Par exemple, prenons un montage $2f' - 2f'$ avec $f' = 50$ cm, limité par un diaphragme circulaire de rayon $a = 5$ cm. L'écran d'observation est placé à la distance $d' = 2f' = 1$ m. D'après nos calculs, l'image d'un

point lumineux ($\lambda \sim 500 \text{ nm}$) est une tache dont l'essentiel de l'énergie se trouve dans un disque de diamètre et d'intensité de l'ordre de

$$\phi \sim 10 \mu\text{m} \quad \text{et} \quad I \sim I_0 \left(\frac{\pi a^2}{\lambda d'} \right)^2 \sim 10^8 I_0$$

alors que l'optique géométrique prévoit $\phi = 0$ et $I = \infty$. La tache est quasi ponctuelle mais reste de taille non nulle. Cette limite contraint le résolution des appareils optiques comme nous allons le voir.

5.2.3 Résolution angulaire limite

Le pouvoir de résolution d'un instrument d'optique est sa capacité à différencier deux objets ponctuels. On définit la résolution angulaire $\delta\theta$ comme la **séparation angulaire minimale** entre deux sources ponctuelles que l'instrument peut différencier.

De nombreux facteurs limitent le pouvoir de résolution d'un instrument d'optique : aberrations chromatiques et géométriques, granularité du capteur, turbulence atmosphérique, etc. Cependant, il existe une **limite théorique à la résolution** d'un appareil due au phénomène de diffraction. En effet, comme on vient de le voir, un système optique ne peut pas donner d'un objet ponctuel une image ponctuelle à cause de la diffraction par le diaphragme limitant l'extension du faisceau.

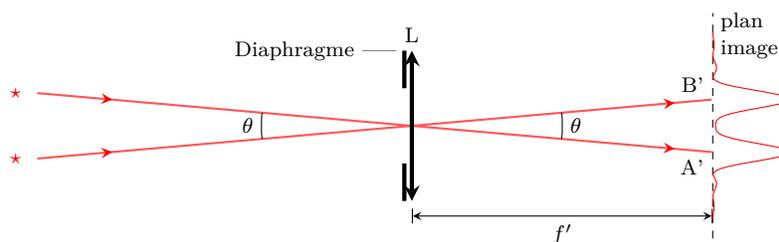


Fig. 5.12 – Deux étoiles résolues par l'objectif d'une lunette.

Pour illustrer notre propos, traitons le cas de la lunette astronomique. Imaginons que l'objectif d'une lunette –assimilée à une lentille mince limitée par un diaphragme circulaire de rayon a – vise deux points A et B. Compte tenu du phénomène de diffraction, A et B sont transformés par l'objectif en deux taches d'Airy centrées sur leur image géométrique A' et B'. On dit que le système optique *résout* les deux points, c'est-à-dire *sépare* les deux points, lorsque les taches d'Airy sont suffisamment séparées. Un critère largement utilisé, dit *critère de Rayleigh*, stipule que deux points images sont résolus quand leur séparation est plus grande que la demi-largeur de la tache d'Airy, ce qui se traduit par la condition

$$\theta > 1,22 \frac{\lambda}{2a} = \delta\theta \quad (5.11)$$

Deux étoiles séparées d'un angle inférieur à $\delta\theta$ ne pourront pas être séparées par l'instrument. Ce résultat est également valable dans le cas des télescopes. Pour atteindre de très bonnes résolutions angulaires, on a donc intérêt à augmenter la taille de la pupille d'entrée de l'instrument. En réalité, l'augmentation du diamètre des télescopes permet surtout de gagner en luminosité, car le phénomène de turbulence atmosphérique introduit une limite de résolution souvent plus contraignante. Il faut alors, soit se défaire de la turbulence atmosphérique en envoyant les télescopes dans l'espace, soit utiliser des techniques de correction telle que l'*optique adaptative*, pour tenter d'approcher la limite donnée par (5.11).

5.2.4 Résolution spatiale d'un microscope

La résolution spatiale $\delta\ell$ désigne la **séparation spatiale minimale** entre deux points objets que l'instrument arrive à différencier. Cette notion est d'importance en microscopie où le but premier est d'observer les plus petits détails possibles. Considérons donc l'objectif d'un microscope constitué d'une lentille convergente

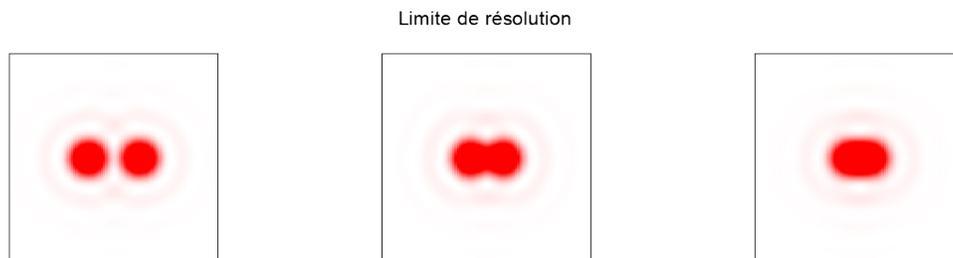


Fig. 5.13 – Critère de séparation de Rayleigh : deux tâches d’Airy séparées par une distance inférieure au rayon d’une tâche ne sont pas résolues.

limitée par un diaphragme de rayon a . Notons n l’indice de l’espace objet et n' celui de l’espace image. Deux points sources ont chacune pour image une tâche d’Airy centrée sur leur image géométrique. Appelons d' la distance qui sépare le plan image du centre de la lentille.

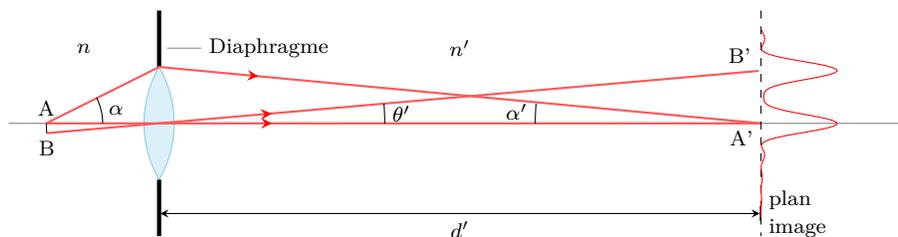


Fig. 5.14 – Images données par un objectif de microscope.

En terme spatial, le critère de Rayleigh donne

$$A'B' > \frac{1}{2}\phi = 1,22 \frac{\lambda' d'}{2a}$$

où λ' est la longueur d’onde dans le milieu image. Si on note λ la longueur d’onde dans le vide de la radiation lumineuse, on a $\lambda' = \lambda/n'$. Par ailleurs, définissons les angles α et α' que forment les rayons extrêmes par rapport à l’axe optique. Si l’on suppose la propriété d’aplanétisme vérifiée, la condition du sinus d’Abbe doit être remplie :

$$nAB \sin \alpha = n'A'B' \sin \alpha'$$

La contrainte dans le plan image se ramène donc à une contrainte dans le plan objet donnée par

$$AB > \frac{n' \sin \alpha'}{n \sin \alpha} \times 1,22 \frac{\lambda d'}{2a n'}$$

L’angle α' est en général petit de sorte que $\sin \alpha' \simeq a/d'$. Finalement, on trouve

$$AB > \frac{1,22\lambda}{2n \sin \alpha} = \delta \ell$$

On obtient donc un bon pouvoir de résolution en choisissant une grande *ouverture numérique* $n \sin \alpha$ et une petite longueur d’onde. Toutefois, dans le visible, on ne peut pas descendre en dessous de $\lambda = 400$ nm. En général, l’ouverture numérique étant de l’ordre de l’unité, on peut retenir que la résolution limite imposée par la diffraction est de l’ordre de $\lambda/2$. Autrement dit, un microscope optique ne permet pas d’observer des détails plus petits que 200 nm.

Remarque : Il est possible de contourner la limite due à la diffraction en sondant l'onde diffractée évanescente au voisinage immédiat de l'échantillon à observer. On parle de microscopie en champ proche ou a sonde locale.

5.3 Retour sur les interférences

Revenons sur différents phénomènes d'interférence par division du front d'onde pour voir l'influence de la diffraction.

5.3.1 Fonction de transparence

Comme on l'a vu, le motif de diffraction de Fraunhofer est régi par l'équation

$$I(M) \simeq \frac{1}{z^2 \lambda^2} \left| \iint_{(S)} \underline{\psi}(P) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \theta_x + y \sin \theta_y)} dx dy \right|^2$$

où l'intégration s'effectue sur la surface de l'ouverture diffractante. Si l'on envoie une onde plane d'amplitude ψ_0 en incidence normale, on a $\underline{\psi}(P) = \psi_0$ pour tout point P de l'orifice, et $\underline{\psi}(P) = 0$ ailleurs. On peut aussi introduire la *fonction de transparence* $t(x, y)$ définie par

$$\underline{\psi}(P) = t(x, y) \psi_0$$

avec $t(x, y) = 0$ pour les parties opaques, et $t(x, y) = 1$ pour les parties transparentes.

Il arrive aussi que certaines parties transparentes introduisent des retards de phase variables d'un point à un autre. Dans ce cas, on définit une fonction de transparence complexe

$$\underline{t}(x, y) = t(x, y) e^{-i\phi(x, y)}$$

où $\phi(x, y)$ est le retard de phase. Par exemple, on peut voir une lentille mince comme une pupille circulaire introduisant un retard de phase proportionnel à l'épaisseur de la lentille et à l'indice de réfraction.

Cette transparence étant définie en tout point du plan $z = 0$, la diffraction à l'infini se réduit à

$$I(M) = \frac{I_0}{z^2 \lambda^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{t}(x, y) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \theta_x + y \sin \theta_y)} dx dy \right|^2$$

5.3.2 Théorème des réseaux

Traitons le cas général de N pupilles diffractantes identiques réparties sur un plan. La pupille $P_{k \in \{1, \dots, N\}}$ est placée en (x_k, y_k) . Si l'on définit la transparence d'une pupille placée en $(0, 0)$ par $\underline{t}(x, y)$, alors le réseau présente une transparence

$$\underline{t}_N(x, y) = \sum_k \underline{t}(x - x_k, y - y_k)$$

Éclairée par une onde plane en incidence normale, l'intensité de l'onde diffractée à l'infini dans la direction (θ_x, θ_y) vaut

$$I_N(\theta_x, \theta_y) = \frac{I_0}{z^2 \lambda^2} \left| \iint_{\text{réseau}} \underline{t}_N(x, y) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (x \sin \theta_x + y \sin \theta_y)} dx dy \right|^2$$

ce qui donne après le changement de variable $u = x - x_k$ et $v = y - y_k$:

$$I_N(\theta_x, \theta_y) = \frac{I_0}{z^2 \lambda^2} \left| \sum_k \iint e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (x_k \sin \theta_x + y_k \sin \theta_y)} \underline{t}(u, v) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (u \sin \theta_x + v \sin \theta_y)} du dv \right|^2$$

Le premier terme exponentiel ne dépend pas de u et v ce qui permet de le sortir de l'intégrale, laquelle ne dépend pas de k . L'intégrale se factorise en deux termes :

$$I_N(\theta_x, \theta_y) = \frac{I_0}{z^2 \lambda^2} \left| \iint \underline{t}(u, v) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (u \sin \theta_x + v \sin \theta_y)} du dv \right|^2 \times \left| \sum_k e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (x_k \sin \theta_x + y_k \sin \theta_y)} \right|^2$$

Le premier terme est tout simplement l'intensité I_1 issue de la diffraction par une pupille centrée en O. Quant au second, il s'agit d'un terme d'interférence relié à la position relative des différentes pupilles. Finalement, l'intensité de l'onde diffractée à l'infini par un ensemble de N pupilles identiques est égale à

$$I_N(\theta_x, \theta_y) = I_1(\theta_x, \theta_y) \times |\mathcal{F}_I|^2 \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}_I = \sum_k e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (x_k \sin \theta_x + y_k \sin \theta_y)} \quad \heartsuit \quad (5.12)$$

De manière générale, la diffraction à l'infini par un ensemble de N motifs diffractants se décrit comme le produit d'un terme de diffraction qui module un terme d'interférence. La position des pics d'interférence donne un renseignement sur la disposition des motifs diffractants alors que la modulation des pics donne un renseignement sur le motif diffractant. Cette propriété est générale. Par exemple, en radiocristallographie où l'on étudie la structure des cristaux par diffraction des rayons X, la position des pics de diffraction permet de remonter à la symétrie cristalline alors que la modulation des pics donne un renseignement sur le motif moléculaire (notamment son numéro atomique).

5.3.3 Retour sur l'expérience d'Young

Reprenons l'expérience des trous d'Young étudiée dans le chapitre 2 sur les interférences à deux ondes. Une source éclaire un écran percé de deux petits trous distants de a . Si la source et l'écran d'observation sont suffisamment loin, on peut interpréter ce que l'on observe comme le résultat de la diffraction à l'infini d'une pupille diffractante constituée de deux trous circulaires. Notons a_0 le rayon des deux trous.

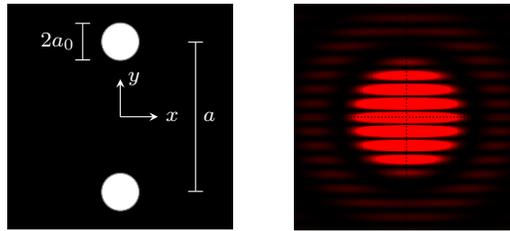


Fig. 5.15 – À gauche : pupille diffractante. À droite : répartition de l'intensité dans l'approximation de Fraunhofer.

Comme on vient de le voir, la répartition de l'intensité lumineuse correspond à la tache de diffraction par un trou (une tache circulaire entourée d'anneaux) modulée par le carré du facteur d'interférence

$$\mathcal{F}_I = \sum_k e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (x_k \sin \theta_x + y_k \sin \theta_y)}$$

Ici, on a une pupille P_1 située en $(0, a/2)$ et une autre P_2 en $(0, -a/2)$. Par conséquent, le terme d'interférence vaut

$$\mathcal{F}_I = e^{i \frac{\pi}{\lambda} (a \sin \theta_y)} + e^{-i \frac{\pi}{\lambda} (a \sin \theta_y)} = 2 \cos \left(\frac{\pi a \sin \theta_y}{\lambda} \right)$$

Les conditions expérimentales correspondent à l'approximation paraxiale de sorte que $\sin \theta_y \simeq y'/D$. En utilisant l'identité $\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$, on trouve

$$I_2(M) = 2I_1(M) \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi a y'}{\lambda D} \right) \right] \quad \text{avec} \quad I_1(M) = C^{\text{te}} \left(\frac{2J_1(ka_0 \sin \theta)}{ka_0 \sin \theta} \right)^2$$

On retrouve donc une modulation périodique verticale de la lumière avec un interfrange donné par $\lambda D/a$. Toutefois, contrairement à ce que nous avons obtenu dans le chapitre 2, les franges ne sont visibles que dans le champ de diffraction d'une pupille (Fig. 5.15).

5.3.4 Réseau de Fentes

Dans le chapitre 3 sur les interférences à N ondes, on a montré que l'intensité diffractée dans la direction θ_x , par un réseau de fentes rectilignes périodiquement espacées, s'écrivait

$$I_N(\theta_x) = K \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda} \sin\theta_x\right)}{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta_x\right)} \right]^2$$

où a est le pas du réseau. Ce résultat a été obtenu en admettant que les fentes diffractaient l'onde incidente de façon isotrope (K indépendant de θ_x). En réalité il faut tenir compte du fait que l'amplitude diffractée varie avec θ_x .

En effet, pour une fente fine de largeur $2a_0$ placée en $(0,0)$, l'intensité diffractée vaut (cf. (5.7))

$$I_1(\theta_x) = I_0 \left[\text{sinc} \left(\frac{2\pi a \sin\theta_x}{\lambda} \right) \right]^2$$

Quant au terme d'interférence, il s'écrit en prenant $x_k = ka$ et $y_k = 0$:

$$\mathcal{F}_I = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x_k \sin\theta_x)} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{\lambda}a \sin\theta_x} + \left(e^{i\frac{2\pi}{\lambda}a \sin\theta_x}\right)^2 + \dots + \left(e^{i\frac{2\pi}{\lambda}a \sin\theta_x}\right)^{N-1}$$

où l'on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $r = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}a \sin\theta_x}$. Le terme d'interférence se simplifie :

$$\mathcal{F}_I = \frac{1 - e^{i\frac{2\pi}{\lambda}Na \sin\theta_x}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{\lambda}a \sin\theta_x}} = \frac{e^{i\frac{\pi Na \sin\theta_x}{\lambda}} \sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda} \sin\theta_x\right)}{e^{i\frac{\pi a \sin\theta_x}{\lambda}} \sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta_x\right)}$$

Rappelons que la somme des termes d'une suite géométrique de raison r s'écrit

$$S = 1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1} = \frac{1 - r^N}{1 - r}$$

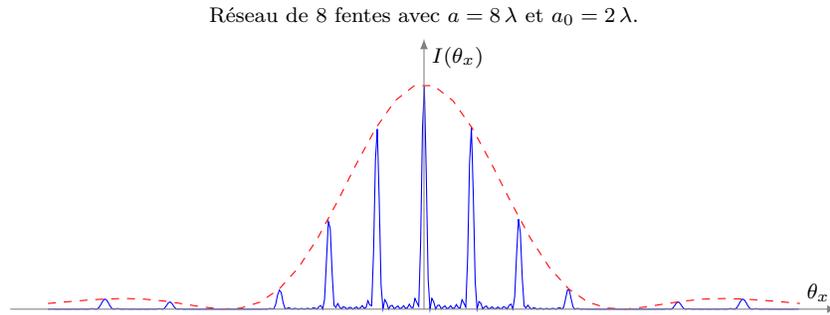


Fig. 5.16 – Distribution angulaire de l'intensité diffractée par un réseau de fentes rectilignes.

Finalement, l'intensité diffractée par le réseau de fentes se met sous la forme

$$I_N(\theta_x) = N^2 I_0 \left[\text{sinc} \left(\frac{\pi a_0 \sin\theta_x}{\lambda} \right) \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi a}{\lambda} \sin\theta_x\right)}{N \sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta_x\right)} \right]^2$$

où l'on retrouve le terme d'interférence décrit dans le chapitre sur les réseaux, modulé par le terme de diffraction lié à la largeur non nulle des fentes. La prise en compte de la diffraction ne modifie pas la position des pics, mais leur intensité. En effet, un pic d'ordre p vérifiant $\sin \theta_x = p \frac{\lambda}{a}$ présente une intensité

$$I_{\text{pic}} = N^2 I_0 \left[\text{sinc} \left(\frac{p\pi a_0}{a} \right) \right]^2$$

Comme on le voit sur la figure 5.16, la transmission optique d'un réseau de fentes est maximale pour le pic d'ordre 0.

Remarque : Un des principaux défauts des réseaux ordinaires réside dans la dispersion de l'énergie lumineuse dans les différents pics d'interférences. En général, on préfère utiliser des réseaux, dit *réseaux blazés*, conçus pour que le maximum d'énergie lumineuse se concentre sur un pic dispersif particulier (*cf.* chap.3, § 3.2.6).

Compléments

A NOTION DE COHÉRENCE

Tous les expérimentateurs le savent : il n'est pas si aisé d'observer des franges d'interférence en optique. En effet, les ondes lumineuses sont souvent le siège de fluctuations aléatoires qui produisent une dégradation du contraste, voire un brouillage complet. On parle alors de cohérence partielle et d'incohérence.

Ce cours détaille les notions de cohérence temporelle et spatiale, en les illustrant par des applications en spectroscopie et en astronomie.

Sommaire

A.1	Cohérence temporelle	74
A.1.1	Interférence et corrélation	74
A.1.2	Degré de cohérence d'une source monochromatique	75
A.1.3	Degré de cohérence d'un doublet spectral	75
A.1.4	Théorème de Wiener-Khintchine	77
A.1.5	Modèle du train d'ondes aléatoires	79
A.1.6	Temps et longueur de cohérence	81
A.2	Cohérence spatiale	83
A.2.1	Description du phénomène	83
A.2.2	Condition de brouillage	84
A.2.3	Application à l'interférométrie stellaire	85
A.2.4	Théorème de localisation	86

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/optique/coherence.php>

A.1 Cohérence temporelle

A.1.1 Interférence et corrélation

Considérons le phénomène d'interférence dans un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air. Une source ponctuelle S émet une onde qui, après une division d'amplitude réalisée par la séparatrice, se recombine au niveau d'un détecteur placé au centre de l'interférogramme (système d'anneaux, cf. chapitre 2).

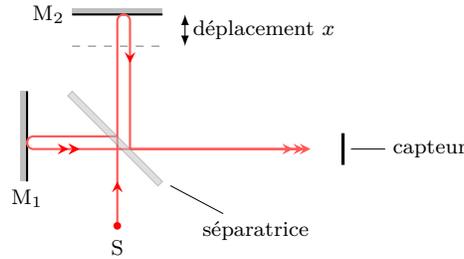


Fig. A.1 – Principe de l'interféromètre de Michelson.

Appelons x le déplacement du miroir mobile depuis le contact optique. $\underline{\psi}(t)$ désigne l'onde (en notation complexe) qui parcourt le chemin le plus court et qui arrive à l'instant t au niveau du détecteur. Pour l'instant, la seule hypothèse que nous faisons consiste à supposer le signal $\underline{\psi}(t)$ stationnaire, c'est-à-dire d'intensité indépendante du temps. L'autre onde présente, au même instant t , une amplitude $\underline{\psi}(t - \tau)$ avec

$$\tau = \frac{2x}{c} = \frac{\delta}{c}$$

La durée τ est le retard introduit par le déplacement x et δ la différence de chemin optique correspondante. Le détecteur mesure ainsi une intensité lumineuse¹

$$I = \langle |\underline{\psi}(t) + \underline{\psi}(t - \tau)|^2 \rangle = \langle |\underline{\psi}(t)|^2 \rangle + \langle |\underline{\psi}(t - \tau)|^2 \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle \underline{\psi}(t) \underline{\psi}^*(t - \tau) \rangle$$

où $\underline{\psi}^*$ désigne le complexe conjugué de $\underline{\psi}$, et $\langle \rangle$ la moyenne temporelle réalisée par le capteur. Pour une source stationnaire, on a $\langle |\underline{\psi}(t)|^2 \rangle = \langle |\underline{\psi}(t - \tau)|^2 \rangle = I_0$, et on obtient

$$I = 2I_0 [1 + \operatorname{Re}(g(\tau))] \quad \text{avec} \quad g(\tau) = \frac{\langle \underline{\psi}(t) \underline{\psi}^*(t - \tau) \rangle}{\langle |\underline{\psi}|^2 \rangle} \quad \heartsuit \quad (\text{A.1})$$

La grandeur $g(\tau)$ est dite *fonction d'autocorrélation normalisée* ou *degré de cohérence*. Elle mesure combien l'onde est corrélée avec elle-même lorsqu'elle est décalée dans le temps.

- Si $\underline{\psi}(t)$ et $\underline{\psi}(t - \tau)$ sont deux grandeurs indépendantes (non corrélées), alors les statistiques nous enseignent que $\langle \underline{\psi}(t) \underline{\psi}^*(t - \tau) \rangle = \langle \underline{\psi}(t) \rangle \langle \underline{\psi}^*(t - \tau) \rangle$. Vu que $\langle \underline{\psi}(t) \rangle = 0$, on trouve $g = 0$ et $I = 2I_0$ dès que $\tau \neq 0$. En d'autres termes, les intensités s'ajoutent et il n'y a pas d'interférence : on dit que les sources sont **incohérentes**.
- Dans le cas où $\underline{\psi}(t)$ et $\underline{\psi}(t - \tau)$ présentent une certaine corrélation il y a interférence, et le terme d'interférence $\operatorname{Re}(g(\tau))$ est une mesure de cette corrélation dans le temps : on parle de **cohérence temporelle**.

1. Par soucis de simplicité, le facteur 1/2 qui intervient dans la définition de l'intensité a été omis.

A.1.2 Degré de cohérence d'une source monochromatique

Revenons un instant sur le cas traité dans le chapitre 2, à savoir l'interférence à deux ondes monochromatiques synchrones de pulsation ω_0 .

En notations complexe on a

$$\underline{\psi}(t) = \underline{\psi}_0 e^{i\omega_0 t} \quad \text{et} \quad \underline{\psi}(t - \tau) = \underline{\psi}_0 e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega_0 \tau}$$

Le degré de cohérence d'une telle onde vaut

$$g(\tau) = \frac{\langle \underline{\psi}(t) \underline{\psi}^*(t - \tau) \rangle}{\langle |\underline{\psi}(t)|^2 \rangle} = \langle e^{i\omega_0 \tau} \rangle = e^{i\omega_0 \tau}$$

et le signal détecté s'écrit

$$I = 2I_0 [1 + \cos(\omega_0 \tau)] = 2I_0 [1 + \cos(2\pi\delta/\lambda)]$$

où l'on a utilisé la relation $\tau = \delta/c$ ainsi que la définition de la longueur d'onde $\lambda = c \times 2\pi/\omega_0$. On retrouve donc la formule classique : l'interférogramme présente des modulations périodiques, et à chaque fois que δ augmente de λ , on passe d'une frange brillante (resp. sombre) à une autre frange brillante (resp. sombre). C'est d'ailleurs en comptant le nombre de franges qui défilent lorsque l'on déplace le miroir mobile M_2 que l'on obtient une mesure de λ .

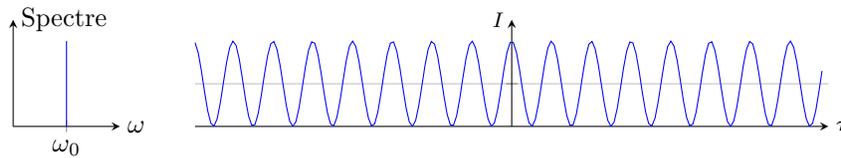


Fig. A.2 – Interférogramme.

Exercice – Montrer que si g est de la forme $g(\tau) = A e^{i\varphi(\tau)}$, alors $|A|$ représente le contraste de l'interférogramme.

Rép. – L'interférogramme vérifie la loi $I = 2I_0[1 + A \cos \varphi(\tau)]$. Les franges brillantes correspondent à $I_{\max} = 2I_0(1 + |A|)$ et les franges sombres à $I_{\min} = 2I_0(1 - |A|)$. On en déduit le contraste

$$\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |A|$$

Autrement dit le module du degré de cohérence donne accès au contraste. Cette propriété reste vraie si le module varie avec τ , à la condition que $|g(\tau)|$ varie lentement par rapport à $\cos \varphi(\tau)$.

On peut vérifier sur notre exemple que le contraste vaut 1 comme le module de g .

A.1.3 Degré de cohérence d'un doublet spectral

Considérons maintenant le cas où la source est constituée de deux composantes monochromatiques de même amplitude avec des longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 (pulsations ω_1 et ω_2). C'est, avec une bonne approximation, la situation que l'on rencontre lorsque l'on utilise une lampe spectrale à sodium qui émet principalement une lumière issue d'un doublet jaune ($\lambda_1 \simeq \lambda_2 = 589 \text{ nm}$).

Calculons le signal délivré par notre interféromètre de Michelson avec une telle source. Posons

$$\underline{\psi}(t) = \underline{\psi}_1 e^{i\omega_1 t} + \underline{\psi}_2 e^{i\omega_2 t} \quad \text{avec} \quad |\underline{\psi}_1|^2 = |\underline{\psi}_2|^2$$

Le coefficient d'auto-corrélation vaut

$$\langle \underline{\psi}(t) \underline{\psi}^*(t - \tau) \rangle = \langle |\underline{\psi}_1|^2 e^{i\omega_1 \tau} + |\underline{\psi}_2|^2 e^{i\omega_2 \tau} + \underline{\psi}_1 \underline{\psi}_2^* e^{i\omega_2 \tau} e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} + \underline{\psi}_2 \underline{\psi}_1^* e^{i\omega_1 \tau} e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} \rangle$$

La moyenne est réalisée par le détecteur dont le temps de réponse est en général grand devant $|\omega_1 - \omega_2|^{-1}$, de sorte que $\langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t] \rangle = \langle \sin[(\omega_1 - \omega_2)t] \rangle = 0$. Finalement, le degré de cohérence du doublet spectral s'écrit

$$g(\tau) = \frac{\langle \underline{\psi}(t)\underline{\psi}^*(t-\tau) \rangle}{\langle |\underline{\psi}(t)|^2 \rangle} = \frac{1}{2} (e^{i\omega_1\tau} + e^{i\omega_2\tau})$$

et l'intensité qui résulte de l'interférence

$$I = 2I_0 \left[1 + \frac{1}{2} \cos(\omega_1\tau) + \frac{1}{2} \cos(\omega_2\tau) \right]$$

Autrement dit, on obtient le même résultat que si l'on avait additionné l'intensité produite par chacune des raies. On retrouve l'idée que deux raies non synchrones sont incohérentes entre elles, et se combinent de façon additive aussi bien en terme d'amplitude qu'en terme d'intensité.

On peut transformer l'expression précédente à l'aide de l'identité $\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$:

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \tau \right) \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \tau \right) \right]$$

Faisons intervenir la pulsation moyenne $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ ainsi que la largeur du doublet $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$:

$$I = 2I_0 [1 + \mathcal{V} \cos(\omega_0\tau)] \quad \text{avec} \quad \mathcal{V} = \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2} \tau \right)$$

La grandeur \mathcal{V} désigne la **visibilité** des franges ; elle est liée au contraste local *via* $\gamma = |\mathcal{V}|$.

Exercice – Retrouver le contraste à partir du résultat de l'exercice précédent.

Rép. – Écrivons le degré de cohérence en fonction de ω_0 et $\Delta\omega$:

$$g = \frac{1}{2} (e^{i(\omega_0 - \Delta\omega/2)\tau} + e^{i(\omega_0 + \Delta\omega/2)\tau}) = e^{i\omega_0\tau} \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2} \tau \right)$$

Le terme de phase ($e^{i\omega_0\tau}$) varie beaucoup plus vite que le module de sorte que l'on peut utiliser le résultat de l'exercice précédent : le contraste est donné par le module du degré de cohérence. On a donc

$$\gamma = |g| = \left| \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2} \tau \right) \right|$$

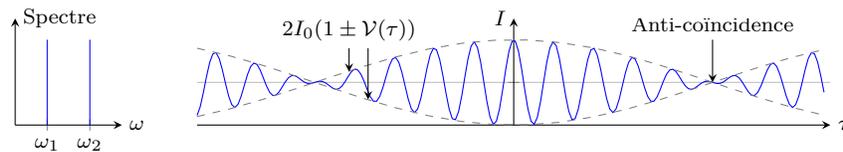


Fig. A.3 – Interférogramme caractéristique d'un doublet spectral.

On observe (Fig. A.3) qu'un phénomène de brouillage apparaît périodiquement, à chaque fois que $\mathcal{V} = 0$: on dit qu'il y a **anti-coïncidence**, car dans ce cas, les franges sombres produites par l'une des raies se superposent aux franges brillantes produites par l'autre. Ce phénomène est local et sa mise en évidence permet de mesurer précisément la largeur du doublet. La simulation située à l'adresse <https://femto-physique.fr/simulations/interference-egale-inclinaison.php> illustre ce phénomène avec une lampe à sodium.

Exemple – Doublet jaune du sodium

Avec une lampe à sodium, on rencontre le premier brouillage après avoir déplacé le miroir mobile d'une distance $x = 145 \mu\text{m}$. Lors du premier brouillage on a

$$\mathcal{V} = 0 \quad \text{soit} \quad \Delta\omega \tau = \pi$$

Supposons $\Delta\omega \ll \omega_0$. En terme de longueur d'onde, on a $\Delta\omega/\omega_0 = \Delta\lambda/\lambda_0$. À un déplacement x du miroir mobile correspond un retard $\tau = 2x/c$ de sorte que la condition de brouillage devient

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \omega_0 \times \frac{2x}{c} = \pi \quad \implies \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{4x}$$

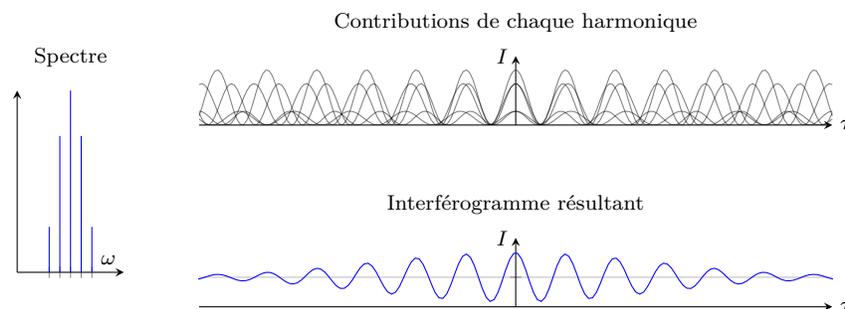
Par spectroscopie on a trouvé $\lambda_0 \simeq 589 \text{ nm}$. On en déduit

$$\Delta\lambda = \frac{(589 \cdot 10^{-9})^2}{4 \times 145 \cdot 10^{-6}} = 0,60 \text{ nm}$$

■ **Remarque** : on vérifie *a posteriori* que $\Delta\lambda \ll \lambda_0$.

A.1.4 Théorème de Wiener-Khintchine

Comme on l'a vu précédemment, un système de deux raies monochromatiques non synchrones produit un phénomène de brouillage à chaque fois que le décalage temporel τ augmente de $2\pi/\Delta\omega$. On comprend aisément que si la source est constituée d'une multitude de raies monochromatiques, un brouillage complet apparaît à partir d'un certain retard τ , ceci d'autant plus rapidement que la source est spectralement riche en harmoniques comme le montre la simulation ci-dessous. Il y a donc un lien entre le degré de cohérence et la



composition spectrale d'une source. C'est précisément ce qu'exprime le **théorème de Wiener-Khintchine**.

Modélisons une source réelle comme une somme continue de raies monochromatiques. Notons $S(\omega)$ la **densité spectrale d'intensité**, c'est-à-dire la répartition de l'intensité en fonction de la pulsation ω . Le graphe de $S(\omega)$ désigne le **spectre de la source**² et s'obtient facilement par spectroscopie.

Chaque composante spectrale, d'intensité $S(\omega)d\omega$, étant incohérente vis-à-vis des autres composantes, on obtient l'intensité qui résulte de l'interférence en sommant l'interférogramme produite par chacune des composantes :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} 2S(\omega)[1 + \cos(\omega\tau)] d\omega \quad \text{avec} \quad \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = I_0$$

2. Mathématiquement, $S(\omega)$ représente le carré du module de la transformée de Fourier de l'onde. Par conséquent, $S(\omega)$ est positive et définie entre $-\infty$ et $+\infty$. Cependant, comme $S(\omega)$ est paire, on la représente souvent entre 0 et $+\infty$, d'autant plus que c'est cette quantité que l'on mesure en spectroscopie. Ceci étant dit, peu importe le choix du domaine \mathcal{D} de définition (\mathbb{R} ou \mathbb{R}^+), il faut juste veiller à ce que l'aire sous la courbe donne l'intensité totale de la source. Ici nous faisons le choix de définir la densité spectrale entre $-\infty$ et $+\infty$.

Définissons $s(\omega) = S(\omega)/I_0$, la **densité spectrale normalisée** ($\int_{\mathcal{D}} s(\omega) d\omega = 1$). L'interférogramme s'écrit

$$I = 2I_0 \left[1 + \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega \right]$$

La quantité $s(\omega)$ étant réelle et positive, elle vérifie la propriété

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \right)$$

Aussi, par identification avec la relation (A.1), il découle

$$g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

Le degré de cohérence est lié au spectre normalisé *via* une transformée de Fourier. Cela constitue le théorème de Wiener-Khintchine qui concerne tous les signaux stationnaires.

Théorème de Wiener-Khintchine

La fonction d'auto-corrélation (resp. normalisée) d'un signal temporel aléatoire stationnaire s'identifie à la transformée de Fourier de son spectre (resp. normalisée).

$$\langle \underline{\psi}(t) \underline{\psi}^*(t - \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

Exemple – Degré de cohérence d'une raie gaussienne

Considérons une raie dont le profil spectral est une gaussienne centrée en ω_0 . La densité spectrale normalisée s'écrit alors

$$s(\omega) = \frac{1}{\Delta\omega\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\sigma} \right)^2}$$

Dans cette expression, σ représente l'écart-type de la gaussienne et mesure sa largeur^a. Calculons le degré de cohérence en prenant la transformée de Fourier du spectre :

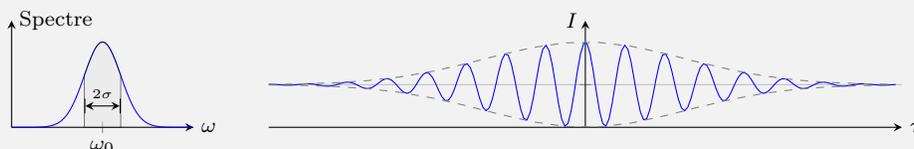
$$g(\tau) = \frac{1}{\Delta\omega\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\sigma} \right)^2} e^{i\omega\tau} d\omega$$

La transformée de Fourier d'une gaussienne est également une gaussienne ($e^{-t^2/2} \Leftrightarrow e^{-\omega^2/2}$). En appliquant les propriétés de la transformée de Fourier, on aboutit au résultat

$$g(\tau) = e^{i\omega_0\tau} e^{-\frac{1}{2}(\sigma\tau)^2}$$

On en déduit l'interférogramme

$$I = 2I_0 [1 + \operatorname{Re}(g(\tau))] = 2I_0 \left[1 + e^{-\frac{1}{2}(\sigma\tau)^2} \cos(\omega_0\tau) \right]$$



Autrement dit, on observe une alternance de franges brillantes et sombres (terme $\cos(\omega_0\tau)$) dont la visibilité décroît exponentiellement avec le décalage optique.

^a. Par exemple, la largeur à mi-hauteur de la raie vaut $2,35\sigma$.

Inversement, le spectre normalisé s'obtient par une transformée de Fourier du degré de cohérence³ :

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt$$

La **spectroscopie par transformée de Fourier** repose sur ce résultat. Dans un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air, on déplace le miroir mobile tout en enregistrant l'interférogramme $I(\tau)$. Un calcul numérique de transformée de Fourier permet alors de remonter au spectre de la source.

A.1.5 Modèle du train d'ondes aléatoires

Le modèle de source monochromatique est –faut-il le rappeler– une idéalisation peu réaliste (durée infinie, énergie transportée infinie). Une source lumineuse est constituée en réalité d'un grand nombre d'atomes se désexcitant de façon imprévisible (émission spontanée), et sur des durées finies. Le modèle du train d'ondes aléatoires, bien que simpliste, est une tentative de description stochastique qui a le mérite de dégager quelques idées essentielles. Dans ce cadre, on admet que la source produit une onde qui s'écrit

$$\underline{\psi}(t) = \underline{\psi}_0 e^{i(\omega_0 t - \varphi(t))}$$

où $\underline{\psi}_0$ et ω_0 sont des constantes, contrairement à $\varphi(t)$ qui varie de façon imprévisible. Notez que l'onde ainsi décrite *n'est pas* monochromatique, car $\varphi \neq C^{te}$. Il s'agit en réalité d'une succession de paquets d'ondes décorrélés entre eux à cause des **sauts de phase** qui se produisent de façon aléatoire. En conséquence, chaque paquet a une « durée de vie » t_i aléatoire. Adoptons une loi de probabilité pour la variable $\varphi(t)$. Le

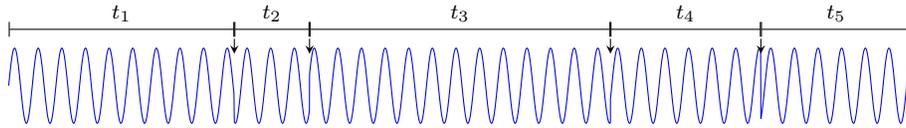


Fig. A.4 – Exemple d'évolution du champ $\psi(t)$ d'un train d'ondes quasi-harmoniques. Les flèches indiquent les sauts de phase aléatoires.

plus simple consiste à supposer la variable $\varphi(t)$ uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$ et que chaque changement de phase se produise avec une probabilité indépendante du temps. Plus précisément, entre l'instant t et $t+dt$, la probabilité qu'il y ait un saut de phase vaut

$$dP = \frac{dt}{\tau_0}$$

avec τ_0 une constante homogène à un temps.

Cherchons tout d'abord à donner un sens physique à ce paramètre τ_0 . Pour cela, calculons $P_0(t)$ la « probabilité de survie » d'un paquet d'ondes, c'est-à-dire la probabilité pour qu'aucun saut de phase n'ait lieu entre $t = 0$ et t . Puisque survivre jusqu'à l'instant $t+dt$ c'est survivre jusqu'à t et ne pas mourir pendant la durée dt , on a

$$P_0(t+dt) = P_0(t) \times \left(1 - \frac{dt}{\tau_0}\right)$$

Développons l'équation précédente sachant que dt est un infiniment petit :

$$P_0(t) + \frac{dP_0}{dt} dt = P_0(t) - \frac{P_0(t)dt}{\tau_0} \quad \text{soit} \quad \frac{dP_0}{dt} + \frac{P_0}{\tau_0} = 0$$

3. Le facteur $1/(2\pi)$ est imposé par le choix des variables conjugués $t \leftrightarrow \omega$. Si l'on choisit les variables $t \leftrightarrow \nu$ (temps-fréquence) on a la relation

$$s(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi\nu t} dt$$

La solution de cette équation différentielle s'écrit, sachant que $P_0(0) = 1$,

$$P_0(t) = e^{-t/\tau_0} \quad \heartsuit \quad (\text{A.2})$$

La probabilité de survie d'un paquet d'ondes décroît exponentiellement au cours du temps, à l'instar d'un noyau atomique radioactif qui obéit au même type de processus aléatoire⁴.

Calculons maintenant la durée de vie moyenne d'un paquet d'ondes que l'on note $\langle t \rangle$. Il suffit de sommer tous les instants t compris entre 0 et l'infini, en pondérant chaque instant de la probabilité de mourir entre t et $t + dt$. On obtient

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty t P_0(t) \times \frac{dt}{\tau_0} = \int_0^\infty \frac{t}{\tau_0} e^{-t/\tau_0} dt$$

L'intégrale se calcule facilement en intégrant par parties :

$$\langle t \rangle = \left[-t e^{-t/\tau_0} \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t/\tau_0} dt = \tau_0$$

Le paramètre τ_0 représente donc la durée de vie moyenne des paquets d'ondes. Déterminons maintenant le degré de cohérence d'une telle source :

$$g(\tau) = \frac{\langle \underline{\psi}(t) \underline{\psi}^*(t - \tau) \rangle}{\langle |\underline{\psi}|^2 \rangle} = \langle e^{i[\varphi(t-\tau) - \varphi(t)]} \rangle e^{i\omega_0 \tau}$$

Pour calculer $\langle e^{i[\varphi(t-\tau) - \varphi(t)]} \rangle$ il faut distinguer deux cas :

- soit aucun saut de phase n'a eu lieu entre $t - \tau$ et t , et dans ce cas $e^{i[\varphi(t-\tau) - \varphi(t)]} = 1$, ce qui se produit avec une probabilité $e^{-\tau/\tau_0}$;
- soit un saut de phase a eu lieu entre $t - \tau$ et t , et alors $e^{i[\varphi(t-\tau) - \varphi(t)]}$ est nul en moyenne puisque les sauts de phases sont indépendants. Ce cas est à considérer avec une probabilité $1 - e^{-\tau/\tau_0}$.

Par conséquent,

$$\langle e^{i[\varphi(t-\tau) - \varphi(t)]} \rangle = 1 \times e^{-\tau/\tau_0} + 0 \times (1 - e^{-\tau/\tau_0}) = e^{-\tau/\tau_0}$$

Ajoutons que nous avons supposé $\tau > 0$ dans notre raisonnement. Pour ne pas se restreindre à ce cas, On doit remplacer τ par $|\tau|$ dans l'expression précédente. Finalement, le degré de cohérence d'un train d'ondes aléatoires vaut

$$g(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_0} e^{i\omega_0 \tau}$$

et l'interférogramme correspondant est régi par la loi

$$I = 2I_0 \left[1 + e^{-|\tau|/\tau_0} \cos(\omega_0 \tau) \right]$$

où l'on constate une décroissance exponentielle de la visibilité des franges. Le temps caractéristique de cette perte de cohérence est précisément τ_0 , la durée moyenne des émissions aléatoires.

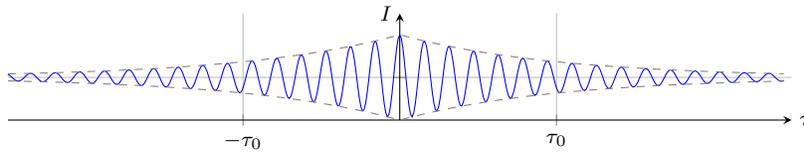


Fig. A.5 – Interférogramme correspondant à un train d'ondes aléatoires de durée moyenne τ_0 .

4. Il s'agit d'un processus sans mémoire dit *processus de Poisson*.

A.1.6 Temps et longueur de cohérence

Comme on le voit sur les exemples précédents, le caractère aléatoire et non monochromatique d'une source est à l'origine d'une perte de cohérence. On caractérise cette dégradation du contraste en définissant un temps caractéristique τ_c de la décroissance de $|g(\tau)|$. τ_c est appelé **temps de cohérence**. Différentes conventions existent pour définir τ_c ; nous adopterons celle de Mandel⁵ :

$$\tau_c \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2 d\tau \quad \heartsuit \quad (\text{A.3})$$

Exemple – Temps de cohérence d'un train d'ondes aléatoires

Nous avons montré que le degré de cohérence d'un train d'ondes aléatoires de durée de vie moyenne τ_0 , s'écrit

$$g(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_0} e^{i\omega_0\tau}$$

Le temps de cohérence vaut donc

$$\tau_c \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)|^2 d\tau = 2 \int_0^{\infty} e^{-2\tau/\tau_0} d\tau = \tau_0$$

La durée moyenne des paquets d'ondes donne directement le temps de cohérence. C'est ce qui explique que la cohérence d'une lampe spectrale basse pression est meilleure que celle à haute pression. En effet, dans la lampe spectrale haute pression, la fréquence des collisions atomiques est plus importante ce qui induit plus de désexcitations. On a alors des paquets d'ondes de durée moyenne plus courte.

À ce temps de cohérence correspond une **longueur de cohérence** ℓ_c liée à τ_c *via* la relation

$$\ell_c \triangleq c\tau_c \quad \heartsuit \quad (\text{A.4})$$

La longueur de cohérence représente la différence de chemin optique à partir de laquelle les ondes vont « mal interférer ». Ce paramètre permet de préciser dans quel régime on se trouve :

$$\begin{array}{c|c|c} \delta \ll \ell_c & \delta \simeq \ell_c & \delta \gg \ell_c \\ \text{cohérence} & \text{cohérence partielle} & \text{incohérence} \end{array}$$

Le tableau A.1 indique quelques ordres de grandeurs pour différentes sources lumineuses. Ces notions de

Tab. A.1 – Cohérence de différentes sources.

Source	λ_0	$\Delta\lambda$	τ_c	ℓ_c
Lumière du Soleil	600 nm	400 nm	2 fs	0,6 μm
Lampe à mercure (HP)	546,1 nm	1 nm	1 ps	0,3 mm
Lampe à hydrogène	656,2 nm	0,1 nm	10 ps	4 mm
Lampe à mercure (BP)	546,1 nm	1 pm	1 ns	30 cm
Laser He-Ne	632,8 nm	1 pm	1 ns	30 cm
Laser He-Ne stabilisé	632,8 nm	0,01 fm	100 μs	30 km

longueur de cohérence et de temps de cohérence sont liées à l'étendue spectrale de la source comme nous allons le voir. Avant cela, adoptons une convention pour caractériser la largeur spectrale $\Delta\omega$ du spectre autour d'une valeur centrale ω_0 . Nous choisissons une définition intégrale :

$$\Delta\omega \triangleq \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} |s(\omega)|^2 d\omega} \quad \heartsuit \quad (\text{A.5})$$

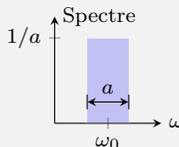
5. MANDEL, L. & WOLF, E. *Optical coherence and quantum optics* (Cambridge university press, 1995).

On préfère parfois exprimer une étendue spectrale en terme de fréquence ($\Delta\nu$) ou de longueur d'onde ($\Delta\lambda$); dans ce cas on peut utiliser les relations

$$\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu \quad \text{et} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \simeq \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} \quad \text{si} \quad \Delta\omega \ll \omega_0$$

Exercice – Vérifier sur un spectre uniforme, que la définition (A.5) donne bien la largeur spectrale.

Rép. – Considérons une source dont le spectre est centré autour de ω_0 avec une largeur a . Autrement dit :

$$s(\omega) = \begin{cases} 1/a & \text{si } |\omega - \omega_0| < a/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$


The graph shows a rectangular pulse on a coordinate system where the horizontal axis is labeled ω and the vertical axis is labeled 'Spectre'. The pulse is centered at ω_0 on the horizontal axis. The width of the pulse is indicated by a double-headed arrow labeled a . The height of the pulse is labeled $1/a$.

On vérifie immédiatement que le spectre $s(\omega)$ est bien normalisé ($\int s(\omega) d\omega = 1$). D'après la définition (A.5), la largeur spectrale vaut

$$\Delta\omega = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} |s(\omega)|^2 d\omega} = \frac{1}{(1/a)^2 \times a} = a$$

Le théorème de Wiener-Khintchine nous apprend que le degré de cohérence est la transformée de Fourier du spectre normalisé :

$$g(\tau) = \int_{\mathbb{R}} s(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad \text{avec} \quad \int_{\mathbb{R}} s(\omega) d\omega = 1$$

Or, le théorème de Parseval relatif aux transformées de Fourier indique que

$$\int_{\mathbb{R}} |g(\tau)|^2 d\tau = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |s(\omega)|^2 d\omega$$

En utilisant les définitions (A.3) et (A.5), l'identité de Parseval donne

$$\tau_c \Delta\omega = 2\pi \quad \text{ou} \quad \tau_c \Delta\nu = 1 \quad \heartsuit \tag{A.6}$$

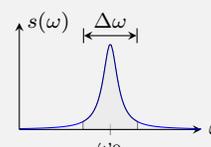
Finalement la largeur du spectre détermine le temps de cohérence et *vice-versa*.

Exemple – Spectre d'un train d'ondes aléatoires

Nous avons vu qu'un train d'ondes aléatoires de pulsation ω_0 et durée de vie moyenne τ_0 présente un temps de cohérence $\tau_c = \tau_0$. Nous savons maintenant que son spectre s'étend autour de ω_0 sur une largeur typique $\Delta\omega = 2\pi/\tau_0$. Allons plus loin en cherchant la forme du spectre $s(\omega)$. Le théorème de Wiener-Khintchine nous dit que

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\omega - \omega_0)t} e^{-|t|/\tau_0} dt$$

Le calcul de l'intégrale aboutit au résultat suivant :

$$s(\omega) = \frac{\pi\tau_0}{1 + [\tau_0(\omega - \omega_0)]^2}$$


The graph shows a Lorentzian curve on a coordinate system where the horizontal axis is labeled ω and the vertical axis is labeled $s(\omega)$. The curve is centered at ω_0 on the horizontal axis. A double-headed arrow above the curve indicates its width, labeled $\Delta\omega$.

Il s'agit d'une *lorentzienne* centrée en ω_0 et de largeur à mi-hauteur $\Delta_{1/2} = \frac{2}{\tau_0} = \frac{\Delta\omega}{\pi}$. L'étendue spectrale d'une raie lorentzienne définie par (A.5) correspond à environ 3 fois la largeur à mi-hauteur.

A.2 Cohérence spatiale

A.2.1 Description du phénomène

Dans la partie précédente, nous avons vu comment le degré de cohérence d'une source ponctuelle était lié à la façon dont l'onde qu'elle produit était corrélée avec elle-même après un décalage dans le temps. Toutefois, le modèle de la source ponctuelle est une idéalisation ; en réalité le signal délivré par un interféromètre résulte de la superposition d'ondes provenant de différents points d'une **source étendue**. Le degré de cohérence va de fait dépendre de la corrélation entre des ondes spatialement distincts. On parle alors de **cohérence spatiale**.

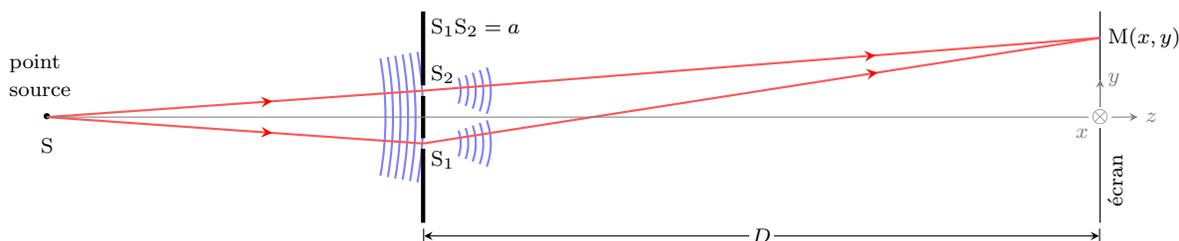


Fig. A.6 – Expérience des trous d'Young.

Pour illustrer le phénomène, reprenons l'expérience d'Young étudiée au chapitre 2 où la source est monochromatique et provisoirement ponctuelle. Rappelons que si S est équidistant des deux trous d'Young S_1 et S_2 , la différence de chemin optique vaut $\delta = S_1M - S_2M = ay/D$, et les franges brillantes sont des lignes horizontales d'équation

$$y_p = p \frac{\lambda D}{a} \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}$$

ce qui donne un interfrange $i = \lambda D/a$.

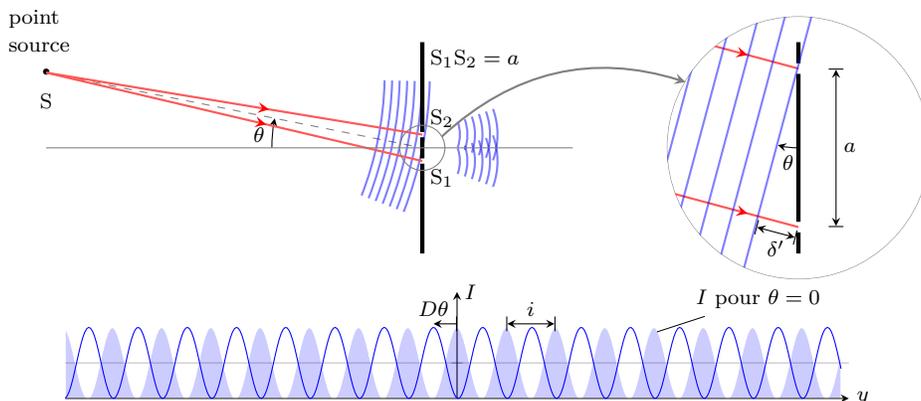


Fig. A.7 – Influence d'un décalage spatial de la source sur le front d'onde et sur l'interférogramme.

Imaginons maintenant que l'on déplace S vers le haut, d'une hauteur angulaire θ (Fig. A.7). S_1 et S_2 ne vibrent plus en phase car le front d'onde arrive en S_1 avec un retard par rapport à S_2 . On calcule ce retard aisément en considérant que les rayons SS_1 et SS_2 sont quasi parallèles puisque que les deux trous sont très proches. En terme de chemin optique, on trouve un décalage $\delta' = a \sin \theta \simeq a\theta$ de sorte que les deux ondes

qui interfèrent en M présentent une différence de chemin optique

$$\begin{aligned}\delta &= [SS_1M] - [SS_2M] \\ &= [SS_1] - [SS_2] + [S_1M] - [S_2M] \\ \delta &\simeq a\theta + \frac{ay}{D}\end{aligned}$$

On en tire l'équation des franges brillantes d'ordre p :

$$\delta = p\lambda \quad \text{donne} \quad y_p = p \frac{\lambda D}{a} - D\theta$$

L'interfrange reste le même, mais l'ensemble des franges subit une translation vers le bas de $D\theta$ (Fig. A.7). Si $D\theta$ est petit devant l'interfrange, le système de franges est quasi superposable au système obtenu avant de la déplacement de S. Dans le cas contraire, le décalage est tel que la superposition du système de franges avec le précédent entraîne une dégradation du contraste. Dès lors, on comprend qu'une source étendue puisse produire un interférogramme peu contrasté, voire complètement brouillée. On peut d'ores et déjà donner une condition pour conserver une bonne cohérence spatiale : il faut

$$D\theta \ll \frac{\lambda D}{a} \quad \text{soit} \quad \theta \ll \frac{\lambda}{a}$$

A.2.2 Condition de brouillage

Toujours dans le cadre de l'expérience des trous d'Young, calculons la répartition de l'intensité sur l'écran en supposant la source étendue. Pour simplifier, considérons un segment lumineux de longueur b , contenu dans le plan (yOz) et perpendiculaire à l'axe (Oz) . Désignons α l'angle sous lequel on voit la source étendue depuis

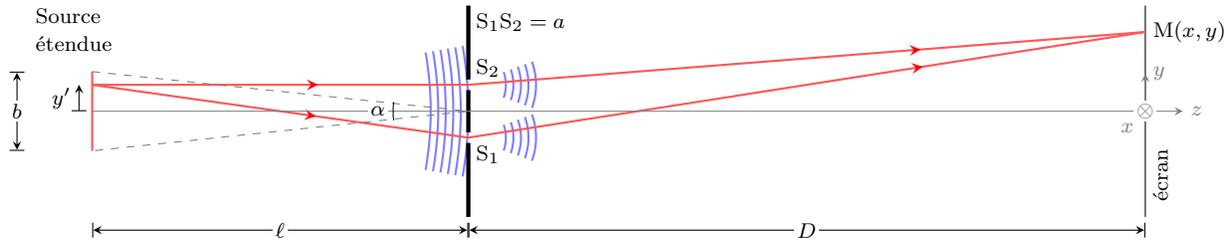


Fig. A.8 – Dispositif d'Young éclairée par une source étendue.

le milieu des trous d'Young, puis décomposons la source en une infinité de sources ponctuelles indépendantes placées en $y' \in [-b/2, b/2]$ (Fig. A.8). Chaque émetteur produit une onde qui, une fois arrivée en M après être passée par l'un des trous, présente une intensité

$$dI_0 = \frac{I_0}{b} dy'$$

où I_0/b représente une intensité par unité de longueur, et I_0 l'intensité produite en M par la source étendue lorsqu'un des trous est masqué.

Ouvrons maintenant le deuxième trou. Un élément de la source situé en y' donne lieu à une interférence à deux ondes dont l'interférogramme s'écrit

$$dI = 2dI_0 \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda} \right) \right]$$

où δ est la différence de chemin optique entre les deux ondes qui interfèrent en M et dont l'expression a été établie précédemment :

$$\delta \simeq a\theta + \frac{ay}{D} \simeq \frac{ay'}{\ell} + \frac{ay}{D} \quad (\text{approximation paraxiale})$$

L'interférogramme produit par la source étendue s'obtient en sommant celui produit par chacun des émetteurs de la source qui –rappelons-le– sont incohérents entre eux :

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2I_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi a y'}{\lambda \ell} + \frac{2\pi a y}{\lambda D} \right) \right] dy' \\
 &= \frac{2I_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi a y'}{\lambda \ell} \right) \cos \left(\frac{2\pi a y}{\lambda D} \right) - \sin \left(\frac{2\pi a y'}{\lambda \ell} \right) \sin \left(\frac{2\pi a y}{\lambda D} \right) \right] dy' \\
 I &= \frac{2I_0}{b} \left[b + \frac{\lambda \ell}{\pi a} \sin \left(\frac{\pi a b}{\lambda \ell} \right) \cos \left(\frac{2\pi a y}{\lambda D} \right) \right]
 \end{aligned}$$

En faisant intervenir l'angle $\alpha \simeq b/\ell$, on aboutit au résultat

$$I = 2I_0 \left[1 + \mathcal{V} \cos \left(\frac{2\pi a y}{D} \right) \right] \quad \text{avec} \quad \mathcal{V} = \text{sinc} \left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda} \right) \quad (\text{A.7})$$

La figure d'interférence présente une visibilité \mathcal{V} qui ne dépend que de l'angle sous lequel la source étendue est vue depuis les trous d'Young. Lorsque $\alpha \rightarrow 0$, le contraste est maximum ($|\mathcal{V}| = 1$) : une source ponctuelle monochromatique est parfaitement cohérente comme on pouvait s'y attendre. En revanche, quand α augmente (en rapprochant la source par exemple) le contraste diminue jusqu'à s'annuler une première fois. La figure d'interférence disparaît alors complètement : il y a **brouillage par incohérence spatiale**. La condition de brouillage s'écrit

$$\mathcal{V} = \text{sinc} \left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda} \right) = 0 \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{\lambda}{a} \quad \heartsuit \quad (\text{A.8})$$

A.2.3 Application à l'interférométrie stellaire

Ce phénomène de brouillage par incohérence spatiale fut mise à profit en interférométrie stellaire afin de déterminer le diamètre apparent de certaines étoiles. Par exemple, en 1920, Michelson et Pease utilisèrent

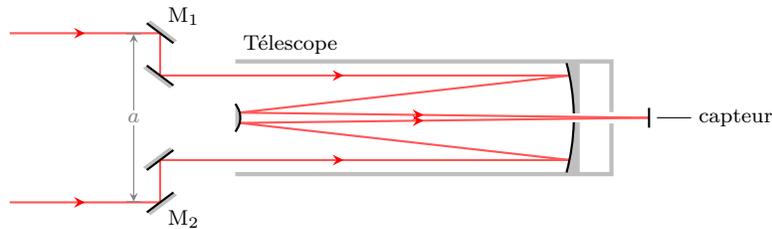


Fig. A.9 – Dispositif utilisé par Michelson et Pease pour mesurer le diamètre apparent de Bételgeuse. L'écartement a est réglable, et définit la *base de l'interféromètre*.

un télescope couplé à un dispositif équivalent à des trous d'Young (Fig. A.9) dans le but de déterminer le diamètre apparent de l'étoile Bételgeuse⁶. Le télescope seul avec son diamètre de 2,5 m rendait impossible cette détermination à cause de la limite imposée par la diffraction (*cf.* chapitre 5). Le dispositif additionnel provoquait une division du front d'onde puis une interférence au foyer du télescope. Comme dans l'expérience des trous d'Young, le contraste est limité par le diamètre apparent de l'étoile. En ajustant la distance a entre les miroirs de façon à provoquer un brouillage des franges, on en déduit le diamètre apparent de l'étoile α *via* la relation (A.8).

6. Bételgeuse, ou α Orionis, est une étoile supergéante rouge située dans notre système solaire, dans la constellation d'Orion. C'est probablement l'une des étoiles les plus brillantes de notre système solaire.

En réalité, la formule (A.8) est à modifier pour tenir compte du fait que la source est plus proche d'un disque que d'un segment. La condition de brouillage devient

$$\alpha = 1,22 \frac{\lambda}{a}$$

Exercice – En observant l'étoile Bételgeuse, Michelson et Pease obtinrent un premier brouillage pour $a = 3,06$ m avec $\lambda = 575$ nm. Déterminer le diamètre apparent de Bételgeuse en millisecondes d'arc.
Rép. – la relation précédente donne le diamètre apparent de l'étoile en radian :

$$\alpha = 1,22 \frac{575 \cdot 10^{-9}}{3,06} = 229 \cdot 10^{-9} \text{ rad}$$

ce qui correspond à 0,047" d'arc, soit 47 millisecondes d'arc.

Notez que plus la base a de l'interféromètre est grande et meilleure est la résolution angulaire. C'est sur ce résultat que s'appuie l'**interférométrie à très longue base**⁷ qui consiste à coupler plusieurs télescopes entre eux et à faire interférer les signaux recueillis par chacun. Le *Very Large Telescope Interferometer* situé au Chili dans le désert d'Atacama en est l'illustration la plus célèbre.

A.2.4 Théorème de localisation

Comme on l'a vu précédemment, l'extension de la source produit une dégradation, voire un brouillage de la figure d'interférence. De cette perte de contraste on peut en déduire des propriétés de la source elle-même, comme on le pratique couramment en astronomie. Toutefois, il ne faudrait pas conclure hâtivement que l'élargissement d'une source nuit systématiquement à la qualité de l'interférogramme. Nous allons voir que dans certains cela améliore sa luminosité sans perte significative de contraste. Considérons une source S

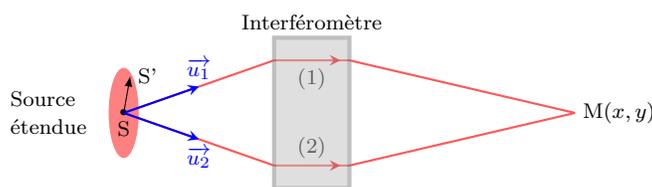


Fig. A.10

ponctuelle monochromatique envoyant deux rayons dans un interféromètre quelconque qui en réalise l'interférence en un point M. Le signal en M dépend de la différence de chemin optique $\delta = L_1 - L_2$ entre les deux trajets. Cette différence est fonction de la position M et de la position de la source. Déplaçons légèrement la source de façon à l'amener en S'. Cette opération s'accompagne d'une variation de δ qui, si le déplacement est suffisamment faible, vaut

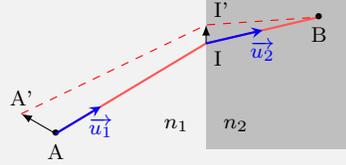
$$d\delta = dL_1 - dL_2 \simeq \overrightarrow{SS'} \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$$

7. HAJIAN, A. & ARMSTRONG, T. La détection des étoiles par interférométrie. *Pour la Science* (mai 2001).

Démonstration

Considérons un rayon lumineux AB traversant un dioptre plan séparant deux milieux d'indice n_1 et n_2 . Appelons \vec{u}_1 et \vec{u}_2 les vecteurs unitaires dirigés respectivement de A vers I et de I vers B, où I est le point d'incidence du rayon sur le dioptre. Le chemin optique parcouru par la lumière entre A et B vaut

$$L = n_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{AI}) + n_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{IB})$$



Si nous déplaçons A en A' alors le point I se déplace en I', ce qui conduit à une variation du chemin optique donné, au premier ordre, par

$$\begin{aligned} dL &= n_1 d(\vec{u}_1 \cdot \vec{AI}) + n_2 d(\vec{u}_2 \cdot \vec{IB}) \\ &= n_1 \vec{u}_1 \cdot d\vec{AI} + n_1 d\vec{u}_1 \cdot \vec{AI} + n_2 \vec{u}_2 \cdot d\vec{IB} + n_2 d\vec{u}_2 \cdot \vec{IB} \\ &= n_1 \vec{u}_1 \cdot d\vec{AI} + n_1 AI d\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + n_2 \vec{u}_2 \cdot d\vec{IB} + n_2 IB d\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 \\ dL &= n_1 \vec{u}_1 \cdot d\vec{AI} + n_2 \vec{u}_2 \cdot d\vec{IB} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\vec{u}_1 \cdot d\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \cdot d\vec{u}_2 = 0$, conséquence de $\vec{u}_1^2 = \vec{u}_2^2 = 1$ (il suffit de différentier). Sachant que $d\vec{AI} = \vec{II}' - \vec{AA}'$ et $d\vec{IB} = -\vec{II}'$, il vient

$$dL = -n_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{AA}' + (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot \vec{II}'$$

Enfin, la loi de la réfraction $n_1 \sin i_1 - n_2 \sin i_2 = 0$ traduit le fait que le vecteur $n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2$ est perpendiculaire au vecteur \vec{II}' . On obtient alors le résultat

$$dL = -n_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{AA}'$$

relation qui reste vraie si le chemin optique est curviligne ; il suffit de le décomposer en une série de petits segments infinitésimaux.

Cette variation est à l'origine de la dégradation du contraste de la figure d'interférence, car les ondes issues des différents points d'une source élargie n'arrivent plus en phase au point M. Cependant, il existe une configuration pour laquelle tous les points d'une source étendue donneront le même déphasage en M ce qui aura l'avantage d'amplifier la luminosité du phénomène sans trop détériorer le contraste. Cette condition de non brouillage s'écrit

$$\vec{SS}' \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) = 0 \quad \heartsuit \quad (\text{A.9})$$

Ce résultat suppose simplement que l'élargissement de la source reste limité pour que le développement au premier ordre dont il est issu soit justifié.

Analysons ce résultat. Deux configurations remplissent ce critère de non brouillage :

- soit l'élargissement de la source se fait dans une direction qui garantit que $(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \perp \vec{SS}'$;
- soit les rayons qui interfèrent sont issus du même rayon incident ($\vec{u}_1 = \vec{u}_2$).

La première configuration impose une géométrie particulière à la source. Par exemple, dans l'expérience des trous d'Young, remplacer la source ponctuelle par une fente source horizontale quand les trous sont verticaux (et vice versa) est bénéfique puisque (A.9) est vérifiée : la luminosité du motif d'interférence est renforcée sans perte de contraste.

La deuxième configuration ne porte pas sur la source mais sur l'interféromètre. En effet, la condition $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ n'est remplie que dans les interféromètres à division d'amplitude où un rayon incident unique est divisé en deux. Toutefois, cette condition à un coût : le lieu des points M où interfèrent ces rayons est en général une surface précise ; on dit que **les interférences sont localisées**. Bien entendu, on observe des

interférences au voisinage de cette surface de localisation, mais plus on s'en éloigne et plus le contraste est mauvais, voire nul.

Théorème de localisation

Les interféromètres à division d'amplitude donnent lieu à un phénomène d'interférences contrastées en présence d'une source étendue. Toutefois, l'extension de la source produit un phénomène de localisation des interférences. La surface de localisation est le lieu des intersections des rayons émergents issus du même rayon incident partant de S.

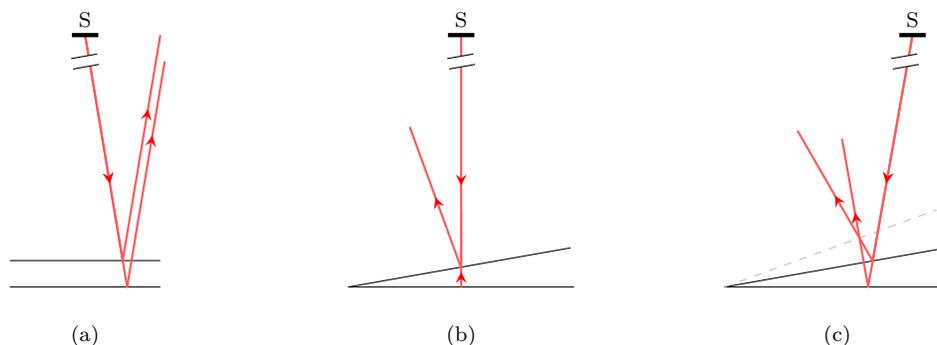


Fig. A.11 – (a) lame d'air à faces parallèles. Localisation à l'infini. (b) Coin d'air en incidence normale. Localisation sur le coin d'air. (c) Coin d'air en incidence oblique. Localisation au voisinage du coin d'air.

La figure A.11 illustre sur quelques dispositifs classiques de division d'amplitude, la façon dont on détermine la surface de localisation. Notez que sur la figure A.11, la source étendue est suffisamment loin du dispositif pour considérer que les rayons qui subissent une division d'amplitude arrivent avec la même inclinaison.

Ouvrages

1. JACKSON, J. D., JEANMOUGIN, C. & VIGNERON, J.-P. *Electrodynamique classique : cours et exercices d'électromagnétisme* (Dunod, 2001).
3. BORN, M. & WOLF, E. *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* 7^e éd. ISBN : 0521784492 (Cambridge University Press, 2000).
7. LEQUEUX, J. *François Arago, un savant généreux* (EDP sciences, 2012).
9. HECHT, E., la FAVEUR, S. M. & MEYZONNETTE, J.-L. *Optique* (Pearson Education, 2005).
10. LAUTERBORN, W. *et al. Optique Cohérente. Fondements et applications* (Dunod, 1997).
11. MANDEL, L. & WOLF, E. *Optical coherence and quantum optics* (Cambridge university press, 1995).

Autres sources

2. NANDOR, M. J. & HELLIWELL, T. M. Fermat's principle and multiple imaging by gravitational lenses. *American Journal of Physics* **64**, 45–49 (1996).
4. FONDECAVE, R. & WYART, F. B. Polymers as Dewetting Agents. *Macromolecules* **31**, 9305–9315 (1998).
5. DUBRA, A. & FERRARI, J. A. Diffracted field by an arbitrary aperture. *American Journal of Physics* **67**, 87–92 (1999).
6. HEALD, M.-A. Computation of Fresnel diffraction. *Am. J. Phys.* **54** (nov. 1986).
8. BOUDENOT, J. Augustin Fresnel ((1788-1827). *Reflète de la physique* (déc. 2007).
12. HAJIAN, A. & ARMSTRONG, T. La détection des étoiles par interférométrie. *Pour la Science* (mai 2001).
13. LEQUEUX, J. La mesure du diamètre des étoiles. *Bibnum. Textes fondateurs de la science* (2014).
14. SIMON, J. & COMASTRI, S. A. Localization of interference fringes. *American Journal of Physics* **48**, 665–668 (1980).