



MÉCANIQUE CLASSIQUE

Du point matériel au système de points

JIMMY ROUSSEL

2020 – femto-physique.fr

Cours de mécanique classique – femto-physique.fr

JIMMY ROUSSEL, professeur agrégé à l'Ecole Nationale Supérieure de Chimie de Rennes

Copyright © 2020 Jimmy Roussel

© ⓘ ⓘ Ce document est sous licence *Creative Commons* « Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale 3.0 non transposé (CC BY-NC 3.0) ».

Pour plus d'informations : <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0/>

Ce document est réalisé avec l'aide de KOMA-Script et L^AT_EX en utilisant la classe [kaobook](#).

1^{re} édition – Oct. 2013

Version en ligne – femto-physique.fr/mecanique

Preface

Ce cours de mécanique classique s'adresse plus particulièrement à des étudiants de premier cycle universitaire ou élèves des CPGE. Toutefois, au travers des compléments de ce cours, le futur enseignant pourra également y trouver matière à réflexion et approfondissement.

Ce cours couvre les aspects fondamentaux de la mécanique newtonienne : notion de force, lois de Newton, point de vue énergétique, moment cinétique, forces d'inertie etc. Par ailleurs, des sujets importants comme la chute libre, l'oscillateur, les forces centrales, les solides sont également traités. On privilégie une présentation naturelle en essayant d'éviter un formalisme trop abstrait comme celui des torseurs ou celui de la mécanique analytique. Éventuellement, les aspects plus techniques sont abordés dans des compléments.

J'ai essayé le plus possible d'illustrer les différentes notions par des exemples ou de simples exercices. Mais pour un entraînement plus poussé, j'invite le lecteur à se procurer les eBooks

- *Mécanique classique – 1^{re} partie – 60 exercices et problèmes corrigés* ;
- et *Mécanique classique – 2^e partie – 60 exercices et problèmes corrigés*.

disponibles à l'adresse payhip.com/femto

Enfin, je tiens à remercier vivement Quentin Vuilleumard pour son rigoureux travail de relecture.

Jimmy Roussel

Table des matières

Preface	iii
Table des matières	v
1 CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL	1
1.1 Temps et espace	1
1.2 Repérage d'un point	4
1.3 Vitesse d'un point	5
1.4 Accélération d'un point	9
1.5 Mouvements simples	12
2 POSTULATS DE LA DYNAMIQUE	15
2.1 Lois de Newton	15
2.2 Interactions fondamentales	20
2.3 Lois phénoménologiques	25
3 PROBLÈMES DE CHUTE	31
3.1 Principe d'équivalence	31
3.2 Chute libre sans frottement	32
3.3 Chute libre avec frottement	34
4 APPROCHES ÉNERGÉTIQUES	39
4.1 Concept d'énergie	39
4.2 Énergie mécanique	42
4.3 Système de points	48
5 OSCILLATEURS MÉCANIQUES	55
5.1 Oscillateur harmonique	55
5.2 Résonances	59
5.3 Effets anharmoniques	65
6 THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE	69
6.1 Moment d'une force	69
6.2 Moment cinétique	71
6.3 TMC	73
6.4 Applications	75
7 MOUVEMENTS À FORCE CENTRALE	79
7.1 Lois de conservation	79
7.2 Le problème de Kepler	83
7.3 Interaction coulombienne	91
8 RÉFÉRENTIELS NON GALILÉENS	95
8.1 Référentiels en translation	95
8.2 Référentiels en rotation	98
8.3 Généralisation	102

9	PROBLÈME À DEUX CORPS	107
9.1	Réduction du problème à deux corps	107
9.2	Exemples d'application	110
10	PHYSIQUE DES COLLISIONS	117
10.1	Lois de conservation	117
10.2	Collisions élastiques	118
10.3	Collisions inélastiques	122
11	EFFETS DUS À LA ROTATION TERRESTRE	125
11.1	Effets de la rotation propre	126
11.2	Effets du mouvement orbital	134
	ANNEXES	141
A	RÉSOLVRE UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE	143
A.1	Équation différentielle ordinaire	143
A.2	Équations différentielles linéaires	145
A.3	Équation à variables séparables	147
B	MÉTHODE DES PERTURBATIONS	149
B.1	Principe général	149
B.2	Cas des oscillateurs	151
C	PÉRIODE DU PENDULE SIMPLE	155
C.1	Mise en équation	155
C.2	Formule de Borda	156
C.3	Utilisation de la moyenne arithmético-géométrique	157
D	LES CONIQUES	161
D.1	Introduction	161
D.2	L'ellipse	161
D.3	La parabole	163
D.4	L'hyperbole	164
	Références	167
	Notations	169
	Grandeurs et constantes physiques	170

Table des figures

1.1	Notion d'abscisse curviligne.	5
1.2	Définition du vecteur vitesse.	5
1.3	Système cartésien.	6
1.4	Système polaire.	7
1.5	Repère de Frenet.	8
1.6	Définition du vecteur accélération.	10
1.7	Mouvement rectiligne	12
1.8	Mouvement circulaire.	13
2.1	Illustration du théorème du centre d'inertie.	19
2.2	Chronologie des différentes théories.	22
2.3	Interaction gravitationnelle	22
2.4	Poids d'un corps.	23
2.5	Forces de Coulomb	24
2.6	Forces de contact solide-solide.	25
2.7	Traînée et portance.	26
2.8	Tension élastique.	27
2.9	Fil tendu sur un support.	28
3.1	Position du problème.	33
3.2	Influence de l'angle θ sur la trajectoire.	34
3.3	Vitesse de chute	35
3.4	Chute libre avec frottement quadratique	37
4.1	Calcul du travail de pesanteur.	40
4.2	Calcul du travail des forces de frottement.	40
4.3	Profil énergétique	47
4.4	Système \mathcal{S} de points matériels.	48
5.1	Pendule élastique.	55
5.2	Oscillations harmoniques.	56
5.3	Régime pseudo-périodique	58
5.4	Régime critique	59
5.5	Régime aperiodique	59
5.6	pendule élastique soumis à une excitation sinusoïdale.	60
5.7	Réponse d'un oscillateur en amplitude	62
5.8	Forces extérieures agissant sur le système masse-ressort.	62
5.9	Évolution fréquentielle de la puissance absorbée par l'oscillateur.	63
5.10	Bande passante.	64
5.11	Influence du coefficient d'amortissement sur la bande passante.	64
5.12	Puits de potentiel approché, au voisinage du minimum, par une parabole.	65
5.13	Approximation harmonique du pendule simple.	66
5.14	Influence de l'amplitude sur la période d'un pendule simple.	67
5.15	Potentiel de Morse.	67
6.1	Forces concourantes	69

6.2	Couple de forces.	70
6.3	Notion de bras de levier.	71
6.4	Loi des aires	76
6.5	Echelle contre un mur	77
6.6	Solide en rotation autour d'un axe fixe	77
6.7	Le pendule pesant.	78
7.1	Loi des aires	80
7.2	Exemple de profil énergétique	81
7.3	Exemples d'orbites avec $f(r) = \frac{k}{r^p}$	82
7.4	Potentiel effectif képlérien	84
7.5	Les différentes trajectoires képlériennes	85
7.6	Trajectoire hyperbolique dans le cas d'une force newtonienne répulsive.	92
8.1	Exemples de mouvement de translation.	96
8.3	Référentiel en rotation par rapport à un axe fixe	98
8.2	Le véhicule freine. Le passager se sent projeté vers l'avant.	98
8.4	Vitesse d'entraînement	100
8.5	Le véhicule tourne. Le passager se sent déporté vers l'extérieur du virage.	101
8.6	Mouvement du référentiel géocentrique par rapport au référentiel de Copernic	104
9.1	Système à deux corps	107
9.2	Trajectoires de deux corps en interaction newtonienne	111
9.3	Mouvement périodique de l'étoile induit par la présence d'une planète	112
9.4	Courbe de vitesse radiale de l'étoile 51Pegasi	113
9.5	Différents types de courbe de vitesse radiale	114
9.6	Potentiels de Morse.	114
10.1	Collision	117
10.2	Collision unidirectionnelle.	119
10.3	Pendule de Newton	120
10.4	Collision entre un projectile et une cible fixe.	121
10.5	Choc mou	123
11.1	Le référentiel terrestre est en rotation par rapport au référentiel géocentrique.	126
11.2	Déviations vers l'Est : forces en présence.	128
11.3	Déviations vers la droite pour un corps en mouvement horizontal sur Terre.	131
11.4	Formation d'un cyclone dans l'hémisphère nord.	131
11.5	Mouvement (très exagéré) horizontal du pendule dans l'hémisphère nord.	132
11.6	Paramétrisation du problème de Foucault	132
11.7	Représentation du champ de marée.	135
11.8	Influence de l'inclinaison de la Terre sur l'amplitude des marées	137
11.9	Influence de la Lune sur l'amplitude des marées	138
B.1	Solution de l'oscillateur de Duffing	154
C.1	Le pendule et son profil énergétique	155
C.2	Influence de l'amplitude sur la période d'un pendule	159
C.3	Erreur produite par les formules approximatives en fonction de l'amplitude	159
D.1	L'ellipse	161

D.2 La parabole	163
D.3 Hyperbole d'excentricité $e = 1,6$	164

Liste des tableaux

2.1 Les quatre interactions fondamentales.	21
2.2 Quelques valeurs de coefficient de frottement statique.	26
2.3 C_x à grande vitesse pour différents obstacles.	27
3.1 Paramètres pour une bille d'acier lâchée dans l'air et dans l'eau	37
4.1 Caractère conservatif ou non de quelques interactions classiques.	44
5.1 Facteur de qualité de quelques résonateurs	65
7.1 Quelques éléments d'orbites des principales planètes du système solaire	89
10.1 Quelques valeurs de coefficients de restitution.	123
C.1 Moyenne arithmético-géométrique pour $a = 1$ et $b = 0.5$	157

CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL

1

La cinématique étudie le mouvement du point indépendamment des causes qui lui donnent naissance. Elle repose sur une description euclidienne de l'espace et d'un temps absolu. Dans ce cours, on illustre les notions de vitesse et d'accélération en se limitant aux mouvements dans le plan.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/mecanique/cinematique.php>

1.1 Temps et espace

Le temps

Nous sommes tous familiers avec cette « machine » qui réactualise constamment le présent, qu'on appelle le temps et que l'on réduit souvent à ces quelques attributs : chronologie, durée, flèche du temps... Pourtant, les philosophes le savent bien, la question du temps est difficile[1] et toute tentative de définition mène au mieux à des métaphores.

Quelques métaphores du temps –

Le temps est l'image mobile de l'éternité immobile. – Platon

Le temps, c'est ce qui passe quand rien ne se passe. – Giono

Le temps est un fleuve fait d'événements. – Marc Aurèle

Cela explique sans doute pourquoi l'introduction du temps en physique n'allait pas de soi. En effet, il a fallu attendre le XVII^e siècle avant que le temps devienne un concept fondamental en physique. On s'accorde en général sur le fait que la physique moderne est née suite à l'introduction du temps mathématique par Galilée lors de ses travaux sur la chute libre¹. Newton formalisa plus rigoureusement l'idée d'un temps absolu et publia en 1687 l'ouvrage qui le rendit célèbre, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, dans lequel il fonde sa mécanique et où le temps devient une variable mathématique notée t . Le postulat que fait Newton est de réduire le temps à une variable scalaire (à une dimension donc) qui croît continûment, ceci indépendamment de tout observateur et de tout phénomène. Cette variable permet alors d'ordonner les événements observés pour produire une **chronologie**. La chronologie, dans ce contexte, devient alors absolue puisque le temps « s'écoule » de la même manière pour tout observateur. Pour les mêmes raisons, la notion de simultanéité est absolue². La course du temps est en général représentée par un axe orienté qui indique le futur. Cet

1.1 Temps et espace	1
Le temps	1
L'espace	2
1.2 Repérage d'un point	4
Vecteur position	4
Abscisse curviligne	5
1.3 Vitesse d'un point	5
Définition	5
coordonnées cartésiennes	6
coordonnées polaires	7
base de Frenet	8
1.4 Accélération d'un point	9
Vecteur accélération	9
coordonnées cartésiennes	10
coordonnées cartésiennes	10
base de Frenet	11
1.5 Mouvements simples	12
Le mouvement rectiligne	12
Le mouvement circulaire	13

[1]: KLEIN (2004), *Les tactiques de Chronos*

1: Galilée, lors de ses premières expériences, utilisa son poulx pour décrire le mouvement de corps en chute libre sur des plans inclinés.

2: C'est en réfléchissant sur le concept de simultanéité dans le cadre des phénomènes électrodynamiques, qu'Albert Einstein révolutionnera la physique par l'invention d'une nouvelle théorie en 1905 : la relativité restreinte dans laquelle la simultanéité et la chronologie deviennent relatives à l'observateur.

axe est linéaire et non circulaire pour respecter un principe fondamental de physique qui, jusqu'ici, n'a jamais été infirmé : le Principe de Causalité.

Principe de Causalité

La cause est, pour tout observateur, antérieure à l'effet qu'elle produit. De manière plus générale, la chronologie de deux événements reliés causalement est toujours la même, quel que soit l'observateur.

3: L'irréversibilité du temps traduit la *course du temps*, à ne pas confondre avec la *flèche du temps* qui traduit l'irréversibilité de certains phénomènes.

Autrement dit, **le temps est irréversible**³ : il n'est pas permis de remonter son passé. Enfin, cette course du temps produit de la durée, grandeur qui mesure l'éloignement dans le temps de deux événements. Si la date t_A repère l'événement A et t_B l'événement B, la durée

$$\Delta t = t_B - t_A$$

est indépendante de l'observateur et du choix arbitraire de l'origine des temps. La mesure des durées s'effectue grâce à une horloge et nécessite la définition d'une unité de temps : la seconde du Système international.

L'étalon seconde

La seconde est aujourd'hui réalisée avec une exactitude relative de 10^{-14} , à l'aide d'une horloge atomique, matérialisant la période de transition dans l'atome de césium :

La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'atome ^{133}Cs dans son état fondamental.

NB : Initialement la seconde était définie à partir du jour solaire moyen J par la relation $J = 86\,400$ s. Aujourd'hui, avec la définition de l'étalon seconde, on a $J = 86\,400,003$ s.

Cependant, il ne faut pas s'y tromper, même si la mécanique newtonienne avec son temps absolu a remporté un succès durant près de deux siècles, la question du temps refit surface avec la théorie de la relativité restreinte (Einstein 1905) dans laquelle la durée, la simultanéité et la chronologie deviennent des grandeurs relatives à chaque observateur : le temps absolu disparaît. Aujourd'hui, certains théoriciens pensent qu'il faut examiner à nouveau la question du temps physique et que le prix à payer pour aboutir à une théorie enfin unifiée de la Physique sera peut-être l'abandon du temps comme concept fondamental. Le temps pourrait n'être qu'une illusion, une propriété émergente. L'introduction du temps annonça la naissance de la physique moderne, sa disparition annoncera peut-être sa maturité...

L'espace

L'expérience montre que le mouvement possède un caractère relatif. En d'autres termes, on ne peut pas dire qu'un corps est "en mouve-

ment” (ou “au repos”) sans préciser par rapport à quoi. Pour décrire le mouvement il est donc nécessaire de préciser un système d’axes qui nous permette de repérer la position d’un point : c’est le repère d’espace constitué de trois axes orientés munis d’une origine arbitraire et d’une échelle spatiale permettant de faire des mesures de longueur.

Dans le cadre de la mécanique newtonienne, l’espace est supposé à trois dimensions, euclidien (obéissant à la géométrie d’Euclide), homogène et isotrope. Cet espace est absolu et ses propriétés sont indépendantes de la matière qui s’y trouve. Armés des lois de la géométrie euclidienne, nous pouvons alors mesurer la distance entre deux points ainsi que l’orientation de n’importe quel axe à condition de définir une unité de longueur : le mètre du Système international.

L’étalon mètre

Le mètre a connu en deux siècles quatre définitions successives : d’abord lié à un système supposé invariable, la longueur du méridien terrestre (1795), le mètre devient en 1889 associé à un bloc particulier en platine iridié ; les progrès de la spectroscopie et de la physique quantique conduisent à retenir en 1960 un multiple de la longueur d’onde d’une radiation émise lors d’une transition électronique dans l’atome de krypton. Enfin, depuis 1983 le mètre est défini à partir du phénomène de propagation de la lumière dans le vide.

La distance parcourue par la lumière dans le vide pendant 1 seconde vaut, par définition du mètre,

$$L = 299\,792\,458 \text{ m}$$

L’étalon mètre est donc relié à l’étalon seconde.

NB : Initialement, le mètre était défini à partir de la longueur du méridien terrestre : $L = 40\,000 \text{ km}$. Aujourd’hui, avec l’étalon mètre actuel (lié à l’étalon seconde) $L = 40\,008,08 \text{ km}$; la différence est donc imperceptible pour les utilisateurs courants.

Pour décrire le mouvement d’un corps matériel il est nécessaire de préciser par rapport à quel repère d’espace on fait les mesures de distance et par rapport à quelle horloge on mesure le temps. Le repère d’espace associé à un repère temporel forme un *référentiel*. En général, on précise uniquement le repère d’espace puisque le temps newtonien est absolu. Insistons sur le fait que parler d’un mouvement sans définir le référentiel n’a aucun sens!

Remarque : La théorie de la Relativité Générale inventée par A. Einstein en 1915 est une théorie relativiste de la gravitation. Cette théorie remet en cause l’idée d’un espace euclidien inerte et indépendant de son contenu matériel. Par exemple, au voisinage de la Terre, les lois d’Euclide ne sont pas rigoureusement vérifiées; on observe des écarts relatifs de l’ordre de 10^{-9} . [2]

1.2 Repérage d'un point

Considérons un point M décrivant une trajectoire au cours de son mouvement par rapport à un référentiel \mathcal{R} . L'équation horaire est l'équation qui permet de repérer le point M à chaque instant t dans le référentiel \mathcal{R} . Par souci de simplicité on se limitera aux mouvements dans le plan sachant que la généralisation à trois dimensions ne pose pas de difficulté particulière.

Vecteur position

Par définition, le vecteur position est le vecteur $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$.

Si l'on munit le plan d'un repère d'origine O (fixe dans le référentiel \mathcal{R}) et de deux directions indépendantes définies par la base (\vec{u}_1, \vec{u}_2) , on peut toujours exprimer le vecteur position en fonction de ces deux vecteurs de base :

$$\vec{r}(t) = c_1(t)\vec{u}_1 + c_2(t)\vec{u}_2$$

On obtient alors l'équation horaire exprimée dans la base (\vec{u}_1, \vec{u}_2) ; les coefficients c_1 et c_2 désignent les *coordonnées* de M dans cette base.

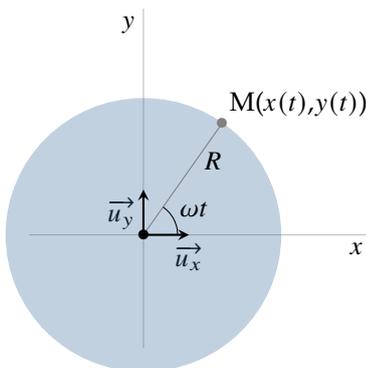
Il est pratique d'utiliser une base orthonormée c'est-à-dire un ensemble de vecteurs tel que

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

De sorte que la coordonnée c_i s'obtient simplement à l'aide d'un produit scalaire

$$c_i = \vec{r} \cdot \vec{u}_i$$

La base cartésienne (\vec{u}_x, \vec{u}_y) fait partie de cette classe avec pour particularité que les vecteurs unitaires sont **fixes** dans \mathcal{R} . Il est alors traditionnel de noter x et y les coordonnées de M .



Exemple : le mouvement circulaire – Considérons un point M décrivant un mouvement plan muni d'un repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ d'équation paramétrique cartésienne :

$$M \begin{cases} x(t) = R \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \omega t \end{cases} \quad \text{avec} \quad \omega = C^{te}$$

M décrit une courbe fermée de façon périodique puisque

$$x(0) = x(2k\pi/\omega) \quad \text{et} \quad y(0) = y(2k\pi/\omega) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Par ailleurs, $OM^2 = x^2 + y^2 = R^2$ pour tout t . M décrit donc un cercle de centre O , de rayon R , à la fréquence

$$v = \frac{\omega}{2\pi}$$

Abscisse curviligne

Supposons que l'on connaisse la courbe sur laquelle se déplace le point M. Dans ce cas, la connaissance de la distance à laquelle se trouve M d'un point particulier de la courbe suffit à repérer ce point. Pour cela, on commence par orienter la courbe, c'est-à-dire que l'on définit arbitrairement un sens positif. Ensuite, on choisit un point particulier sur la courbe que nous noterons M_0 . Enfin, on définit la *distance curviligne* $s(t)$ comme étant la mesure algébrique de la distance d'arc $\widehat{M_0M(t)}$ le long de la trajectoire. Munis de M_0 , de la courbe et de $s(t)$, nous sommes capables de repérer le point M à chaque instant t .

Exemple du mouvement circulaire – Reprenons le cas précédent d'un point M décrivant une trajectoire d'équation paramétrique cartésienne :

$$M \begin{cases} x(t) = R \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \omega t \end{cases} \quad \text{avec} \quad \omega = C^{te}$$

Nous avons vu que le point M décrit un cercle. Si l'on fixe une origine en $M_0 = (R, 0)$, alors l'abscisse curviligne est liée à l'angle $\theta(t) = \omega t$:

$$s(t) = R\theta(t) = R\omega t$$

La distance algébrique parcourue croît linéairement avec le temps. On dit que le mouvement est uniforme.

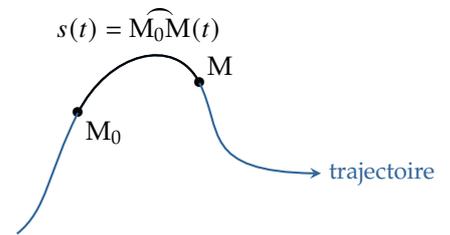
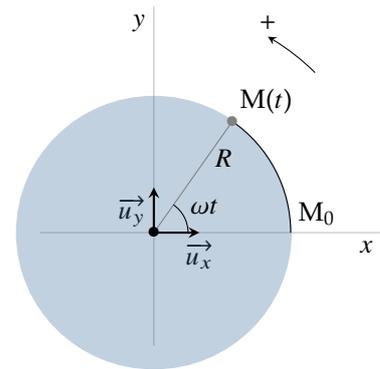


FIGURE 1.1 – Notion d'abscisse curviligne.



1.3 Vitesse d'un point

Définition

La vitesse est une grandeur qui mesure l'évolution de la position par rapport au temps. Par ailleurs, cette grandeur est vectorielle car le mouvement d'un point se caractérise par une direction et un sens, attributs des vecteurs d'espace. Si l'on note M, la position d'un point à l'instant t et M' sa position à l'instant $t + \Delta t$, alors on peut définir un vecteur vitesse correspondant au trajet MM' :

$$\vec{v}_{MM'} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

Cette grandeur désigne le *vecteur vitesse moyenne* entre deux instants. Cependant, cette quantité possède l'inconvénient de ne pas donner d'information sur le mouvement entre t et $t + \Delta t$. C'est pourquoi on fait tendre la durée Δt vers 0 pour définir le **vecteur vitesse instantanée** du point M.

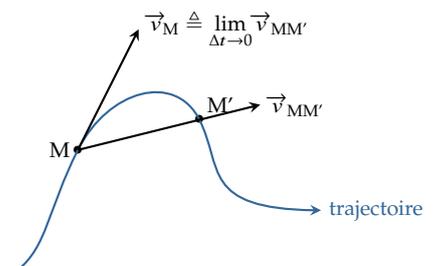


FIGURE 1.2 – Définition du vecteur vitesse.

Vecteur vitesse instantanée

On appelle vecteur vitesse instantanée du point M par rapport au référentiel \mathcal{R} le vecteur

$$\vec{v}_M \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_{MM'} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad (1.1)$$

Le vecteur vitesse est donc la dérivée du vecteur position. Il en résulte que le *vecteur vitesse est tangent à la trajectoire*. La norme du vecteur vitesse, que nous appellerons vitesse, se mesure en m.s^{-1} .

Insistons sur le fait que la vitesse est une notion relative à un référentiel d'observation. Une fois le référentiel choisi, la vitesse d'un point ne prend qu'une valeur à un instant t . Cependant il existe différentes façons d'exprimer le vecteur vitesse puisque l'on peut choisir différentes bases de projection. Dans tous les cas, la vitesse scalaire ne dépend pas de la base choisie. Le choix de la base est en général guidé par la symétrie du problème.

Remarques :

1. Il est des situations où il importe de préciser le point en mouvement et le référentiel d'étude. On adopte alors la notation $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ pour désigner le vecteur vitesse du point M par rapport au référentiel \mathcal{R} .
2. De façon générale, la vitesse $\|\vec{v}_M\| = \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\| \neq dOM/dt$. Par exemple, un point M en mouvement circulaire de centre O garde une distance OM constante alors que sa vitesse est non nulle.

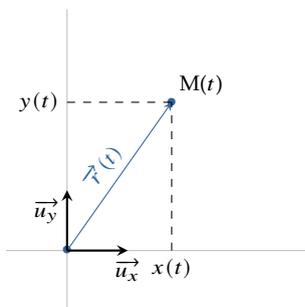


FIGURE 1.3 – Système cartésien.

Expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

Considérons un point M en mouvement dans un plan muni d'un repère cartésien d'origine O et de base orthonormée (\vec{u}_x, \vec{u}_y) . Les vecteurs unitaires de la base cartésienne sont fixes par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R} .

Le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$ où x et y sont les coordonnées du point M en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} . Le vecteur vitesse du point M s'obtient en dérivant son vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{v}_M = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + x \frac{d\vec{u}_x}{dt} + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + y \frac{d\vec{u}_y}{dt}$$

Les vecteurs unitaires étant fixes dans \mathcal{R} , on a $\frac{d\vec{u}_x}{dt} = \frac{d\vec{u}_y}{dt} = \vec{0}$. Finalement, les composantes de la vitesse sont simplement les dérivées temporelles des coordonnées de M. On trouve⁴

4: On adopte la notation de Newton :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

$$\vec{v}_M = \begin{pmatrix} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \end{pmatrix} \quad \heartsuit \quad (1.2)$$

Exemple du mouvement circulaire – Considérons le mouvement plan d'équation paramétrique cartésienne :

$$M \begin{cases} x(t) = R \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \omega t \end{cases} \quad \text{avec} \quad \omega = C^{\text{te}}$$

On a déjà vu que la trajectoire est un cercle de centre O et de rayon R. Le vecteur vitesse s'écrit

$$\vec{v}_M = \begin{pmatrix} \dot{x} = -R\omega \sin \omega t \\ \dot{y} = R\omega \cos \omega t \end{pmatrix}$$

On constate que le mouvement s'effectue à vitesse constante puisque

$$v_M = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R\omega$$

Il s'agit donc d'un mouvement circulaire uniforme.

Expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires

Dans le plan on peut aussi repérer un point à l'aide d'une distance et d'un angle orienté. Dans le système polaire on définit

$$r = OM \quad \text{et} \quad \theta = \widehat{\vec{u}_x, \vec{r}}$$

On associe à ces coordonnées deux vecteurs unitaires \vec{u}_r et \vec{u}_θ . Ces deux vecteurs forment une base orthonormée.

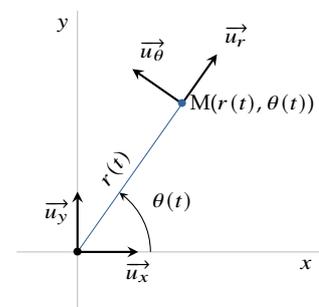


FIGURE 1.4 – Système polaire.

Ainsi le vecteur position s'écrit dans la base polaire

$$\vec{r} = r \vec{u}_r \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_M = \dot{r} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

La base cartésienne étant fixe dans \mathcal{R} , la base polaire ne l'est donc pas. Or la direction \vec{u}_r dépend du temps par l'intermédiaire de l'angle $\theta(t)$. Par conséquent, on a

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}$$

La dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à l'angle qui définit sa direction s'obtient en utilisant la règle suivante :

À savoir

La dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à l'angle qui définit sa direction, est le vecteur unitaire qui lui est **directement** orthogonal.

Lorsque l'on effectue une rotation dans le sens direct de $\pi/2$ du vecteur \vec{u}_r , on obtient \vec{u}_θ . Ainsi

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_M = \begin{vmatrix} \dot{r} = v_r \\ r\dot{\theta} = v_\theta \end{vmatrix} \quad \heartsuit \quad (1.3)$$

Exemple – Reprenons le mouvement circulaire d'équation paramétrique cartésienne

$$M \begin{cases} x(t) = R \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \omega t \end{cases} \quad \text{avec} \quad \omega = C^{\text{te}}$$

Si l'on décrit ce mouvement à l'aide des coordonnées polaires on obtient

$$M \begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \omega t \end{cases} \quad \text{avec} \quad \omega = C^{\text{te}}$$

L'application de la formule (1.3) donne

$$\vec{v}_M = \begin{cases} v_r = \dot{r} = 0 \\ v_\theta = r\dot{\theta} = R\omega \end{cases}$$

D'une part, le vecteur vitesse est bien tangent au cercle puisque selon \vec{u}_θ . On retrouve d'autre part le fait que la vitesse est constante et égale à $v = R\omega$.

5: Jean Frédéric Frenet (1816-1900) : Mathématicien français normalien dont les travaux ont essentiellement porté sur la géométrie différentielle des courbes gauches (*Sur les courbes à double courbure* 1847).

6: Le cercle osculateur est le cercle qui est tangent à la trajectoire en $M(t)$ et qui possède la même courbure en ce point.

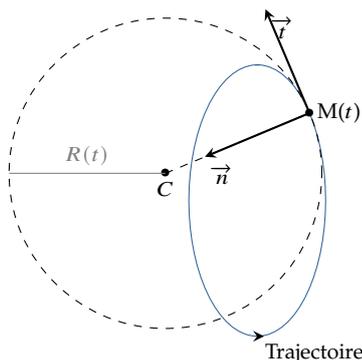


FIGURE 1.5 – Repère de Frenet.

Expression du vecteur vitesse dans la base de Frenet

Le repère de Frenet⁵ a pour origine le point $M(t)$ et pour base orthonormée (\vec{t}, \vec{n}) . Cette base mobile est construite de la façon suivante :

1. on définit arbitrairement, un sens positif le long de la trajectoire ;
2. le vecteur unitaire \vec{t} , dit *vecteur tangent* est, comme son nom l'indique, tangent à la trajectoire et orienté dans le sens positif ;
3. le vecteur unitaire \vec{n} , dit *vecteur normal*, est quant à lui orthogonal à \vec{t} et orienté vers le centre du cercle localement tangent à la trajectoire dit *cercle osculateur*⁶ représenté en tirets sur la figure.

M est la position du point matériel à l'instant t et M' celle pour l'instant $t + \Delta t$. Quand $\Delta t \rightarrow 0$ la corde qui relie les points M et M' tend vers la longueur d'arc $\widehat{MM'}$ de sorte que

$$\vec{v}_M = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} \vec{t} = \frac{ds}{dt} \vec{t}$$

On retiendra que la donnée de l'abscisse curviligne $s(t)$ ainsi que la trajectoire permettent de connaître la position du point M , la direction du vecteur tangent ainsi que le vecteur vitesse *via*

$$\vec{v}_M = \frac{ds}{dt} \vec{t} \quad \heartsuit \quad (1.4)$$

Exemple – Reprenons le mouvement circulaire qui nous sert de fil rouge pour ce chapitre. On peut le décrire à l'aide de l'équation horaire

$$s(t) = R\omega t \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_M = \frac{ds}{dt} \vec{t} = R\omega \vec{t}$$

Supposons que le mouvement soit toujours dans le même sens et que l'on oriente la trajectoire dans le sens du mouvement. Dans ce cas

$s(t)$ s'interprète comme la distance parcourue à partir de l'origine M_0 . Cette grandeur s'obtient par intégration de la vitesse :

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \Longrightarrow \quad s(t) - s(0) = \int_0^t v(t') dt'$$

Notez que si la vitesse est constante, on dit que le mouvement est uniforme et l'on a $s(t) = vt + s(0)$.

La distance parcourue d_{12} entre les instants t_1 et $t_2 > t_1$ s'écrit

$$d_{12} = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Relation qui reste valable si le mouvement change de sens.

À savoir

La distance parcourue d_{12} entre les instants t_1 et $t_2 > t_1$ s'interprète comme l'aire sous la courbe donnant la vitesse au cours du temps, entre les instants t_1 et t_2 :

$$d_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \|\vec{v}\| dt$$

1.4 Accélération d'un point

Vecteur accélération

Le vecteur accélération est une grandeur d'évolution qui mesure la variation du vecteur vitesse, en norme et en direction.

Définition

On appelle vecteur accélération instantanée du point M par rapport au référentiel \mathcal{R} le vecteur

$$\vec{a}_M \triangleq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_M(t + \Delta t) - \vec{v}_M(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (1.5)$$

La norme du vecteur accélération, que nous appellerons accélération et que nous noterons a , se mesure en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Notez qu'un mouvement rectiligne uniforme se caractérise par un vecteur accélération nul puisque le vecteur vitesse garde une norme et une direction constantes. Autrement dit, le vecteur accélération peut être vu comme une mesure d'un écart au mouvement rectiligne uniforme.

L'expression du vecteur accélération s'obtient donc en dérivant le vecteur vitesse. Donnons son expression dans différents systèmes de coordonnées.

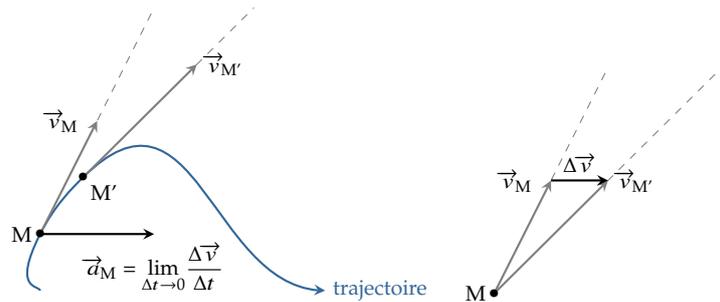


FIGURE 1.6 – Définition du vecteur accélération.

Expression du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

7: On note $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ etc.

Les vecteurs unitaires étant fixes par rapport au référentiel d'étude, il suffit de dériver les composantes de la vitesse⁷

$$\vec{v}_M = \begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_M = \begin{cases} \ddot{x} = a_x \\ \ddot{y} = a_y \end{cases} \quad \heartsuit \quad (1.6)$$

Exercice – Un point M décrit le mouvement plan d'équation paramétrique cartésienne :

$$M \begin{cases} x(t) = R \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \omega t \end{cases} \quad \text{avec} \quad \omega = C^{\text{te}}$$

Montrer que le vecteur accélération est toujours dirigé vers le même point que l'on identifiera.

Expression du vecteur accélération en coordonnées polaires

Nous avons montré que la vitesse d'un point M repéré par ses coordonnées polaires s'écrit

$$\vec{v}_M = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Pour obtenir l'accélération il faut dériver à nouveau par rapport au temps :

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta + r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r\dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

On a déjà vu que

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Si l'on applique à cette relation, la transformation $\theta \mapsto \theta + \pi/2$ on obtient

$$\vec{u}_r \mapsto \vec{u}_\theta \quad \vec{u}_\theta \mapsto -\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

Finalement l'accélération s'écrit

$$\vec{a}_M = \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = a_r \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = a_\theta \end{cases} \quad (1.7)$$

De la même manière que les composantes du vecteur vitesse ne sont pas obtenues en dérivant les composantes du vecteur position, les composantes du vecteur accélération ne sont pas non plus obtenues en dérivant simplement les composantes du vecteur vitesse.

Exercice – Un point M décrit un mouvement circulaire d'équation polaire $r(t) = R$ et $\theta = \omega t$ avec $\omega = C^{te}$. Montrer que l'accélération vaut v^2/R .

Expression du vecteur accélération dans la base de Frenet

Il est intéressant de montrer que l'accélération présente deux aspects : c'est non seulement une mesure du caractère non uniforme de la trajectoire mais aussi de son caractère non rectiligne. La formule de Frenet résume parfaitement cette idée.

Partons de l'expression (1.4) et dérivons-la par rapport au temps :

$$\vec{a}_M = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{t} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{t}}{dt}$$

Or, le vecteur unitaire \vec{t} change de direction au cours du temps puisqu'il est lié au mouvement de M. Par définition du rayon de courbure local R on a

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{v_t}{R} \vec{n} \quad \text{avec} \quad v_t = \frac{ds}{dt}$$

Complément sur le rayon de courbure – On a vu que lors d'un mouvement circulaire uniforme de rayon R , l'accélération est centripète et vaut v^2/R . Ainsi

$$\frac{d}{dt}(v\vec{t}) = v \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{v^2}{R} \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{v}{R} \vec{n}$$

Dans le cas d'une trajectoire quelconque, on peut toujours appliquer cette relation entre deux instants suffisamment proches pendant lesquels le mouvement peut être considéré uniforme. Dans ce cas, le rayon de courbure devient une notion locale évoluant au cours du trajet et qui s'interprète comme le rayon du cercle osculateur⁸ à la trajectoire, en M.

8: Le cercle osculateur est le cercle qui épouse le mieux possible la courbe en ceci qu'il présente la même tangente et a la même courbure que la courbe en M.

En substituant dans l'expression de l'accélération, on trouve la formule de Frenet :

$$\begin{aligned} \vec{v}_M &= v_t \vec{t} \\ \vec{a}_M &= a_t \vec{t} + a_n \vec{n} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \left\| \begin{aligned} v_t &= \frac{ds}{dt} \\ a_t &= \frac{dv_t}{dt} \\ a_n &= \frac{v_t^2}{R} \end{aligned} \right. \quad \heartsuit \quad (1.8)$$

Le vecteur accélération possède donc deux composantes :

1. une composante tangentielle liée au caractère non uniforme de la trajectoire;

- une composante normale liée à la courbure de la trajectoire. Notez que le rayon de courbure au point M varie, *a priori*, au cours du temps.

À partir de la formule de Frenet, nous constatons que le produit scalaire $\vec{v}_M \cdot \vec{a}_M$ s'écrit

$$\vec{v}_M \cdot \vec{a}_M = v_t \frac{dv_t}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv_t^2}{dt}$$

Ainsi, le signe de ce produit scalaire nous renseigne sur le caractère ralenti ($|v_t|$ diminue au cours du temps) ou accéléré ($|v_t|$ augmente) du mouvement. On retiendra la règle suivante :

À savoir

Soit P le produit scalaire $\vec{v}_M \cdot \vec{a}_M$.

- si $P > 0$, le mouvement est accéléré;
- si $P < 0$, le mouvement est freiné;
- si $P = 0$, le mouvement est uniforme.

1.5 Quelques mouvements simples

Le mouvement rectiligne

Considérons un point M en mouvement sur une droite orientée et appelons $s(t) = \widehat{OM}(t)$ l'abscisse curviligne algébrique par rapport à un point O de la droite. Le trajet étant rectiligne, la courbure $1/R$ est

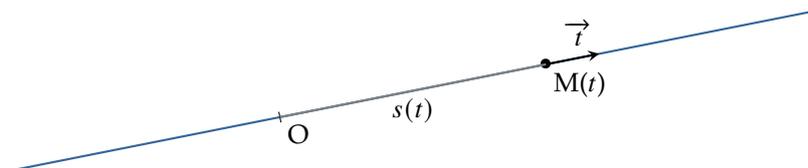


FIGURE 1.7 – Mouvement rectiligne

nulle. On a, d'après les formules de Frenet :

$$\vec{v}_M = \frac{ds}{dt} \vec{t} \quad \text{et} \quad \vec{a}_M = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{t}$$

Les vecteurs vitesse et accélération sont dirigés suivant la trajectoire.

Le mouvement rectiligne uniforme – On dit que le mouvement est rectiligne uniforme lorsque le vecteur vitesse est uniforme. Dans ce cas, l'accélération est nulle et l'équation horaire s'écrit

$$s(t) = v_t t + s_0 \quad \heartsuit \quad (1.9)$$

Entre deux instants, le trajet augmente proportionnellement à la durée : $\Delta s = v_t \Delta t$.

Le mouvement rectiligne uniformément accéléré – Il s'agit d'un mouvement rectiligne pour lequel l'accélération est constante. Dans

ce cas, en intégrant deux fois l'accélération, on obtient

$$s(t) = \frac{1}{2}a_t t^2 + v_0 t + s_0 \quad \heartsuit \quad (1.10)$$

où v_0 et s_0 sont respectivement la vitesse algébrique et l'abscisse curviligne à l'instant $t = 0$.

Le mouvement circulaire

Considérons un point M décrivant un cercle de rayon R et notons θ l'angle formé par l'axe (Ox) et le rayon vecteur \overrightarrow{OM} .

Mouvement circulaire uniforme – Le mouvement est uniforme quand θ augmente linéairement avec le temps :

$$\theta = \omega t$$

ω représente donc une *vitesse angulaire* et s'exprime en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Ici, le cercle est décrit à vitesse angulaire constante ce qui est caractéristique du mouvement circulaire uniforme. Ainsi le point M fait un tour au bout d'une durée constante T appelée *période*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \heartsuit \quad (1.11)$$

et le nombre de tours effectués en 1 seconde s'appelle la *fréquence* ν et se mesure en hertz en hommage à Heinrich Rudolf Hertz⁹ (Symbole Hz) :

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \heartsuit \quad (1.12)$$

Comme nous l'avons déjà montré, la vitesse est constante et l'accélération centripète. On retiendra

$$\vec{v}_M = R\omega \vec{t} \quad \text{et} \quad \vec{a}_M = R\omega^2 \vec{n} = \frac{v^2}{R} \vec{n} \quad \heartsuit \quad (1.13)$$

Mouvement circulaire non uniforme – Supposons maintenant que $\theta(t)$ varie de façon quelconque. Par définition de l'angle exprimé en radians, l'abscisse curviligne s'écrit $s(t) = \widehat{M_0M}(t) = R\theta(t)$ d'où la vitesse

$$\vec{v}_M = \frac{ds}{dt} \vec{t} = R\omega(t) \vec{t} \quad \text{avec} \quad \omega(t) \triangleq \dot{\theta}(t) \quad \heartsuit \quad (1.14)$$

ω désigne la *vitesse angulaire instantanée*.

Le vecteur accélération s'écrit grâce à la formule de Frenet

$$\vec{a}_M = R \frac{d\omega}{dt} \vec{t} + R\omega^2 \vec{n} \quad \heartsuit \quad (1.15)$$

Remarque – Entre deux instants t_1 et t_2 on a

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(s_2 - s_1)$$

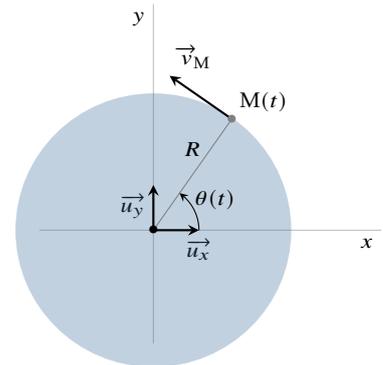


FIGURE 1.8 – Mouvement circulaire.

9: Heinrich Rudolf Hertz est né à Hambourg en Allemagne (1857-1894). Physicien célèbre pour avoir réussi la première émission et réception d'ondes radio en 1887, sur une distance de 20 mètres donnant du même coup une preuve de la validité de la théorie électromagnétique de Maxwell. Dans les milieux scientifiques, il est considéré comme le découvreur de la radio. C'est la raison pour laquelle on a donné le nom d' "ondes hertziennes" aux signaux radio et pourquoi l'unité de la fréquence qu'on appelait cycles au départ, a été remplacée par hertz.

POSTULATS DE LA DYNAMIQUE

2

Isaac Newton (1642-1727) – physicien et mathématicien anglais – fut le théoricien le plus respecté du XVII^e siècle. Il publie en 1687 son ouvrage phare *Naturalis Philosophiæ Principia Mathematica* dans lequel il jette les bases mathématiques de sa mécanique : il réussit le tour de force d’unifier les lois de la mécanique terrestre (chute des corps) avec les lois de la mécanique céleste. Son traitement du mouvement des planètes en accord avec les lois de Kepler, transformera cette théorie en un véritable pilier de la physique moderne pendant plus de deux siècles, jusqu’à l’arrivée d’un certain Albert Einstein... Newton fonde sa théorie sur trois principes que nous allons détailler. Insistons sur le fait que ces trois principes forment un tout indissociable et cohérent.

Ce chapitre est accessible en ligne à l’adresse :

<https://femto-physique.fr/mecanique/postulats-de-la-dynamique.php>

2.1 Lois de Newton	15
Notion de point matériel . .	15
Quantité de mouvement . .	16
Principe d’inertie	16
PFD	17
Théorème du centre d’inertie	18
2.2 Interactions fondamentales	20
Généralités	20
Gravitation	22
Électromagnétisme	23
Les interactions nucléaires .	25
2.3 Lois phénoménologiques .	25
Contact solide-solide	25
Contact fluide-solide	26
Tension	27

2.1 Lois de Newton

Notion de point matériel

La mécanique newtonienne repose sur un concept clé : le **point matériel**. En effet, on admet que tout système mécanique peut, à partir d’une certaine échelle, se décomposer en points matériels, sans structure interne (on peut penser aux atomes mais ce n’est pas nécessaire) qui interagissent les uns avec les autres *via* des forces qu’il s’agit de modéliser.

Le point matériel

Un système mécanique sera assimilé à un point matériel si son état (position, mouvement) est complètement décrit à l’aide de trois coordonnées spatiales au maximum.

De plus, un point matériel se caractérise par une propriété dynamique : la masse inerte notée m mesurant l’inertie du mouvement. Cette quantité est un scalaire positif et s’exprime en kilogrammes (symbole kg) dans le Système international d’Unités.

La connaissance des lois qui régissent le mouvement d’un point matériel permet de décrire l’évolution de tout système matériel. La mécanique céleste, la mécanique des solides et la mécanique des fluides reposent sur cette approche réductionniste.

Nous verrons plus tard qu'il est possible, dans certaines conditions, d'assimiler un système macroscopique à un point matériel. Pour l'instant il suffit d'admettre qu'il existe une échelle à partir de laquelle ce réductionnisme est possible.

Quantité de mouvement

Définition

Un point matériel M en mouvement dans un référentiel \mathcal{R} , acquiert une quantité de mouvement (ou impulsion)

$$\vec{p}_M \triangleq m \vec{v}_M \quad (2.1)$$

avec m désignant la *masse inerte* du point matériel

La quantité de mouvement d'un système de points se construit en sommant les contributions de chaque point matériel. Ainsi, la quantité de mouvement d'un système mécanique \mathcal{S} formé de N points matériels $M_i, i \in \{1, \dots, N\}$ de masse $m_i, i \in \{1, \dots, N\}$ s'écrit

$$\vec{p}_\mathcal{S} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{M_i} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{OM}_i}{dt}$$

Si maintenant nous définissons le *centre d'inertie* G comme étant le *barycentre des masses inertes*¹¹ :

$$m \vec{OG} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{OM}_i \quad \text{avec} \quad m = \sum_i m_i$$

il vient alors, par dérivation :

$$m \frac{d\vec{OG}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{OM}_i}{dt}$$

Ainsi, la quantité de mouvement d'un système de points matériels \mathcal{S} , de masse totale m , est la même que celle d'un point matériel de même masse et situé au centre d'inertie G .

$$\vec{p}_\mathcal{S} = m \frac{d\vec{OG}}{dt} = m \vec{v}_G \quad \heartsuit \quad (2.2)$$

Principe d'inertie

Le principe d'inertie est un des piliers de la mécanique newtonienne. C'est Galilée qui en eût l'intuition et Newton qui le formalisa dans ses *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. L'idée sous-jacente du principe d'inertie est l'homogénéité de l'espace : un corps isolé n'a aucune raison d'aller plus à droite qu'à gauche ni plus vers l'arrière que vers l'avant ; le mouvement naturel est le mouvement rectiligne uniforme.

11: La position de G ne dépend pas du choix de O . En effet, si nous considérons un autre point fixe O' , la définition de G peut s'écrire

$$m \vec{OO'} + m \vec{O'G} = \sum_i m_i (\vec{OO'} + \vec{O'M}_i)$$

c'est-à-dire

$$m \vec{O'G} = \sum_i m_i \vec{O'M}_i$$

Par ailleurs, si l'on place O en G on obtient une autre définition de G :

$$\sum_i m_i \vec{GM}_i = \vec{0}$$

Principe d'inertie

Dans un référentiel galiléen, un point matériel isolé (libre de toute influence extérieure) conserve sa quantité de mouvement. En conséquence, sa trajectoire est rectiligne uniforme.

Insistons sur le fait que ce principe *définit* la notion de référentiel galiléen. On montre dans le [Chapitre 8](#) sur les référentiels non galiléens, que tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen. C'est pourquoi, il suffit de trouver un référentiel galiléen pour en trouver une infinité. Cependant, le caractère galiléen étant lié à la validité du principe d'inertie, il est tributaire de la précision avec laquelle on procède à cette vérification. Ainsi, nous ne connaissons pas de référentiels *absolument* galiléens mais seulement des référentiels *approximativement* galiléens sur une certaine échelle de temps. Par exemple, le référentiel terrestre *n'est pas* galiléen mais les manifestations de son caractère non galiléen sont, en première approximation, négligeables. Par conséquent, sauf avis contraire, le référentiel terrestre sera considéré galiléen.

Principe fondamental de la dynamique

Nous venons de voir que dans certains référentiels, si les actions exercées sur un point matériel M se compensent, sa quantité de mouvement se conserve. Ainsi, toute variation de quantité de mouvement est la signature d'une action non compensée de l'environnement que l'on modélise à l'aide du concept de *vecteur force*. La deuxième loi de Newton – dite aussi *principe fondamental de la dynamique* – postule simplement que l'action d'une force est de faire varier la quantité de mouvement de façon proportionnelle :

Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , un point matériel M soumis à une force \vec{f} voit sa quantité de mouvement varier d'autant plus vite que la force est importante. L'équation du mouvement est donnée par

$$\frac{d\vec{p}_M}{dt} = m\vec{a}_M = \vec{f} \quad (2.3)$$

Détaillons certains aspects de ce postulat :

- Tout d'abord on voit ici que la masse m mesure *l'inertie du point matériel* dans le sens où plus sa masse est importante plus il sera difficile de modifier son vecteur vitesse. Par ailleurs, la mécanique newtonienne suppose l'invariance de la masse par changement de référentiel.
- La grandeur \vec{f} est un vecteur qui décrit l'action de l'environnement extérieur sur le point M. La force présente un point d'application (ici M), une direction, un sens et une intensité. Notez bien, que la seconde loi de Newton *n'est pas* une définition

de la force mais bien un principe d'évolution qui dit comment la nature se comporte. C'est en associant ce postulat aux lois d'interaction que l'on peut prévoir les mouvements. De même que pour la masse, la force est invariante par changement de référentiel en mécanique classique.

- L'équation du mouvement est une *équation vectorielle* qui peut s'écrire comme trois équations différentielles de la forme

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= f_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{y} &= f_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ m\ddot{z} &= f_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{cases}$$

On peut montrer que, moyennant quelques hypothèses mathématiques peu restrictives, la solution existe et est unique à condition de connaître la position et la vitesse du point M à l'instant initial.

Dans le Système international d'unités, une force se mesure en newtons (symbole N) en hommage à Isaac Newton. L'analyse dimensionnelle de l'équation du mouvement permet de relier le newton aux autres unités de base du SI :

$$[f] = \text{MLT}^{-2} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ N} = 1 \text{ kg.m.s}^{-2}$$

La seconde loi de Newton est valide tant que les vitesses envisagées sont petites devant $c \simeq 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Dans le cas contraire le problème relève de la Relativité Restreinte¹² (Einstein 1905).

12: Notez cependant que le principe d'inertie et le principe fondamental de la dynamique sont conservés en relativité restreinte à condition de redéfinir la quantité de mouvement.

[3]: HACYAN (2009), "What does it mean to modify or test Newton's second law?"

Remarque : Dans le cadre newtonien, c'est-à-dire pour des vitesses faibles devant c , certains auteurs remettent en cause le PFD pour les très faibles accélérations ($a \lesssim 10^{-10} \text{ m.s}^{-2}$) et proposent une théorie modifiée (théorie MOND pour MOdified Newtonian Dynamics[3]) ce qui leur permet de justifier l'anomalie du profil des vitesses dans les galaxies sans avoir recours au concept mystérieux de masse cachée.

Théorème du centre d'inertie

Newton ajoute enfin un troisième principe.

3^e loi de Newton ou principe des actions réciproques

Tout corps A exerçant une force sur un corps B, subit de la part de B une force d'intensité égale, de même droite d'action et de sens opposé¹³. Autrement dit, **les actions réciproques sont opposées et coaxiales**.

13: La troisième loi suppose implicitement que l'action se propage de façon instantanée. En fait, un des résultats importants de la théorie de la Relativité est qu'il est impossible de transmettre une information plus vite que c , c'est pourquoi le principe des actions réciproques n'est plus valide en relativité.

Ce principe permet d'établir le théorème du centre d'inertie. Considérons un système \mathcal{S} de N points matériels $M_i, i \in \{1, \dots, N\}$ (cf. Figure 2.1). Ce système est le siège d'actions extérieures \vec{f}_i^{ext} (pesanteur par exemple) et d'actions internes \vec{f}_{ji} du point M_j sur le point M_i .

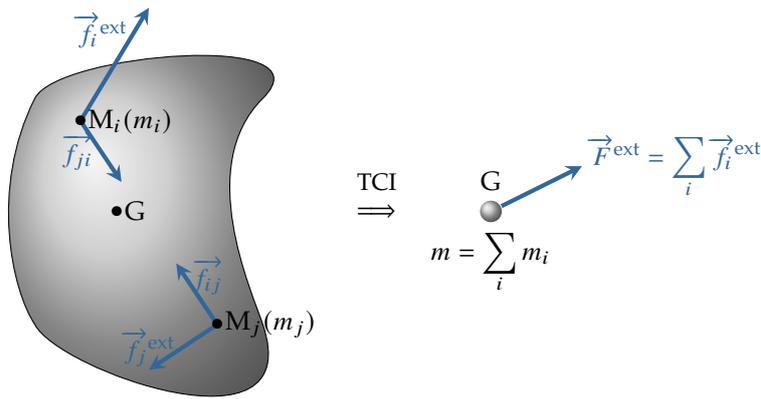
Système \mathcal{S} de points matériels

FIGURE 2.1 – Illustration du théorème du centre d’inertie.

Lorsque l’on applique le PFD à chaque particule M_i on obtient, dans le référentiel d’étude supposé galiléen,

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{f}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ji}$$

Par ailleurs, en vertu du principe des actions réciproques, les forces internes se compensent deux à deux. Aussi, sommons toutes les équations du mouvement de chaque particule de façon à annuler les actions internes :

$$\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{p}_S}{dt} = \sum_i \vec{f}_i^{\text{ext}}$$

Et compte tenu de la relation (2.2), on obtient le théorème de la résultante cinétique.

Théorème du centre d’inertie (TCI)

Dans un référentiel \mathcal{R} galiléen, le centre d’inertie d’un système matériel vérifie l’équation

$$\frac{d\vec{p}_S}{dt} = m\vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}}$$

où \vec{F}^{ext} désigne la résultante des forces extérieures.

Ainsi, le centre d’inertie a le même mouvement qu’un point matériel de masse m soumis à la force \vec{F}^{ext} .

Le théorème de la résultante cinétique signifie donc que le mouvement du centre d’inertie ne dépend que de la connaissance des actions extérieures au système. Cependant il *ne signifie pas* que l’on peut assimiler un système matériel à un point matériel (ici G affecté de la masse m) au sens où la résultante des forces extérieures peut ne pas dépendre exclusivement des coordonnées de G mais d’autres variables liées à la structure interne du système. Pour s’en convaincre il suffit de faire dévaler à un œuf une pente : suivant que l’œuf est cuit ou pas, on observera deux mouvements différents¹⁴.

En revanche, si le système n’est pas trop grand par rapport aux corps

14: Dans cet exemple on peut montrer que la force de frottement solide dépend de la structure interne de l’œuf.

avec lesquels il interagit et suffisamment éloigné d'eux, alors la résultante des forces ne dépend que de la position (et éventuellement de la vitesse) du centre d'inertie G . Par ailleurs, si le système est rigide et en translation (éventuellement associée à une rotation uniforme), alors la dynamique du corps ne dépend que des coordonnées du centre d'inertie. Dans ce cas, on peut assimiler le système à un point matériel de masse, la masse totale et de position celle du centre d'inertie. Par exemple, le mouvement orbital de la Terre peut être assimilé à celui d'une masse ponctuelle située en son centre liée par gravitation avec les autres astres (notamment le Soleil) de l'Univers. En effet, d'une part les distances qui séparent les astres sont très grandes devant le diamètre terrestre (environ 13 000 km) et d'autre part la Terre est une boule relativement rigide en rotation quasi uniforme. Il faut cependant avoir à l'esprit qu'il s'agit bien d'une idéalisation car si l'on y regarde d'un peu plus près, notre planète est constituée de parties déformables (un noyau liquide, des océans et une atmosphère) qui ont une influence sur la rotation propre de la Terre ainsi que sur son orbite. La Lune qui est l'astre le plus proche exerce une action légèrement différente sur les océans et sur le centre de la Terre de sorte que cela modifie le mouvement relatif des différentes parties¹⁵.

15: Dans un système planète-Lune, les mouvements de marée dissipent progressivement l'énergie ce qui engendre une circularisation des orbites ainsi qu'une synchronisation des rotations propres. Dans le cas de la Terre, la puissance dissipée est de l'ordre de 4 TW ce qui produit une augmentation de la durée du jour d'environ 2 ms par siècle et un éloignement de la Lune d'environ 4 cm par an. On voit donc, qu'à l'échelle de l'année ces phénomènes sont totalement négligeables [voir 4].

Remarque : Le théorème du centre d'inertie possède N fois moins d'information que le principe fondamental de la dynamique puisqu'il ne permet d'obtenir que le mouvement du centre d'inertie (3 équations scalaires) contrairement au PFD qui donne accès au mouvement de tous les points du système ($3N$ équations).

2.2 Interactions fondamentales

Généralités

Dans l'état actuel de nos connaissances, l'étude de la matière depuis l'échelle subatomique jusqu'à l'échelle cosmique permet de postuler l'existence de seulement **quatre interactions fondamentales** permettant d'expliquer tous les phénomènes de la Nature. Ces interactions se caractérisent par des intensités et des échelles d'action très différentes (cf. Table 2.1).

L'interaction gravitationnelle est l'interaction la plus faible dans la nature et paradoxalement la première décrite. Cette interaction est responsable de la pesanteur, des forces de marée et des phénomènes astrophysiques. Pendant plus de deux siècles, la description newtonienne a prédominé jusqu'au début du XX^e siècle où Albert Einstein interpréta la gravitation en termes géométriques, comme une déformation de l'espace-temps, nouveau concept issu de la théorie de la relativité restreinte inventée quelques années auparavant.

Du fait de l'électroneutralité de la matière macroscopique, l'interaction électromagnétique fut correctement modélisée plus tardivement puisqu'il a fallu attendre le début du XIX^e siècle et les travaux de Coulomb, Biot, Savart, Laplace, Ampère, etc. L'interaction électromagnétique est à l'origine de la plupart des phénomènes de notre quotidien : électricité,

magnétisme, forces de contact, réactions chimiques, propagation de la lumière, transport de l'information, cohésion des atomes... Les travaux de Faraday sur l'induction magnétique ont permis de faire un pas décisif vers l'unification du magnétisme et de l'électricité. C'est James Clerk Maxwell qui, en 1864, réalise cette unification en proposant une nouvelle théorie dite *théorie électromagnétique* dont l'une des conséquences est l'existence d'ondes électromagnétiques. Il faudra attendre 1887, huit ans après la mort de J. C. Maxwell, pour que Hertz confirme cette prédiction. Après le succès de la mécanique quantique au début du XX^e siècle, on a cherché à décrire l'interaction électromagnétique en termes de champs quantiques. Cette entreprise, qui débuta par les travaux de Dirac (1928), aboutit à la naissance de *l'électrodynamique quantique* (Quantum Electrodynamics - Feynman *et al*).

L'interaction forte, confinée à l'échelle subatomique, est à l'origine de la cohésion des noyaux atomiques, de la fusion et de la fission nucléaires. C'est Hideki Yukawa qui élabore la première théorie de l'interaction forte en 1935 mais il faudra attendre les années 1970 pour qu'une théorie plus fiable se fasse jour : la chromodynamique quantique, c'est son nom, décrit correctement l'interaction forte à condition de postuler l'existence de nouvelles particules appelées quarks, qui, entre 1967 et 1995, furent toutes découvertes.

L'interaction faible, malgré ses conséquences vitales pour l'espèce humaine¹⁶, opère sur des échelles sub-nucléaires (10^{-18} m) avec une intensité relativement faible. Elle est à l'origine de l'instabilité du neutron et explique notamment la radioactivité bêta.

16: Sans l'interaction faible, le Soleil ne pourrait pas briller...

TABLE 2.1 – Les quatre interactions fondamentales.

Interactions	Caractéristiques	Théories
Gravitationnelle	Attractive, de portée infinie. Notion de masse grave. $f \sim 10^{-37}$ N.	Mécanique classique (1687); Relativité générale (1915).
Électromagnétique	Attractive ou répulsive, de portée infinie. Notion de charge électrique. $f \sim 10$ N.	Électromagnétisme classique (1865); Électrodynamique quantique (1949).
forte	Interaction de très courte portée entre quarks. Notion de charge de couleur. $f \sim 10^3$ N.	Chromodynamique quantique (1970).
faible.	Interaction de très courte portée. $f \sim 10^{-2}$ N.	Théorie électrofaible (1961-1967).

f représente la force ressentie par deux protons distants de 5 fermis (1 fermi = 10^{-15} m)

C'est Isaac Newton qui le premier unifia la mécanique céleste avec la mécanique terrestre en postulant l'existence d'une interaction attractive entre tous les corps matériels. Cette volonté de simplifier se poursuivit avec les travaux de Maxwell qui procéda à la seconde unification de la physique en inventant l'interaction électromagnétique. Depuis, l'unification de toutes les interactions résiste aux tentatives des physiciens. En effet, à l'heure actuelle, les quatre interactions fondamentales sont décrites séparément mais trois d'entre elles (les interactions faible, électromagnétique et forte) le sont en termes de champs quantiques dans un même formalisme mathématique : le modèle standard dont le succès s'est traduit récemment par la découverte du boson de Higgs en 2013 au CERN de Genève. La gravitation quant à elle s'explique très bien dans le cadre de la théorie de la Relativité Générale qui *n'est*

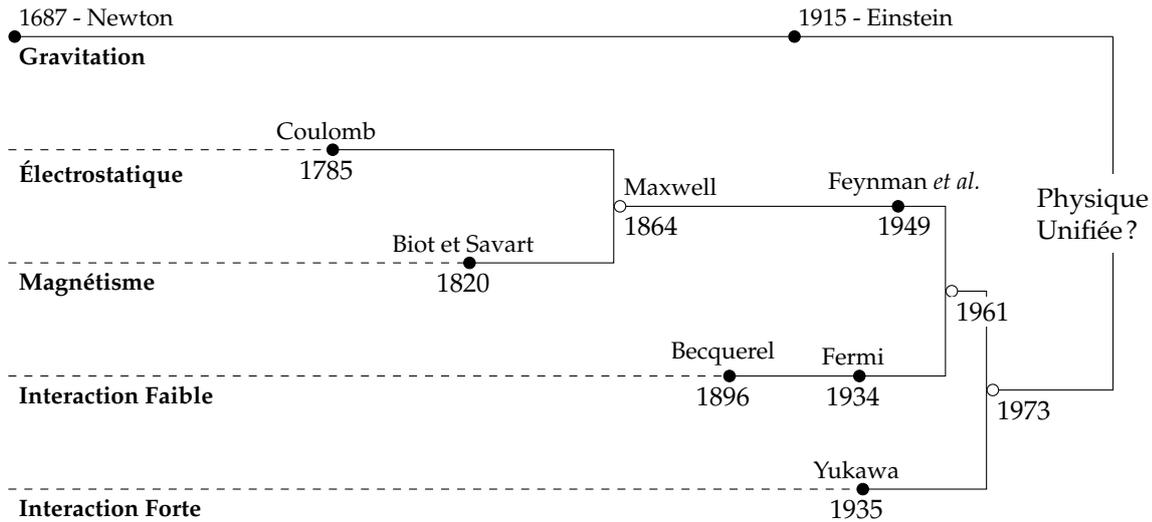


FIGURE 2.2 – Chronologie des différentes théories.

pas une théorie quantique. De nombreux physiciens pensent que la quantification de la gravitation est la clé qui ouvrira les portes à une Physique Unifiée. L'avenir nous le dira...

Gravitation

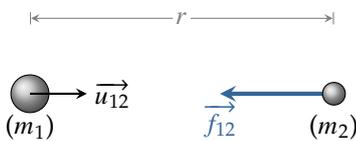


FIGURE 2.3 – Interaction gravitationnelle

La gravitation est une interaction attractive qui concerne toute la matière. Deux masses ponctuelles s'attirent proportionnellement au produit de leur masse et à l'inverse du carré de la distance qui les sépare. Formellement, la force \vec{f}_{12} qu'exerce une masse ponctuelle m_1 sur une masse ponctuelle m_2 s'écrit

$$\vec{f}_{12} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{12} \quad \heartsuit \quad (2.4)$$

La dépendance en $1/r^2$ a été vérifiée expérimentalement sur une échelle allant de $100 \mu\text{m}$ jusqu'aux dimensions du système solaire. Dans le Système international d'unités, les masses, dites *masses graves*, s'expriment en kilogrammes¹⁷ et la constante de gravitation universelle vaut

$$\mathcal{G} \simeq 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

17: Voir le principe d'équivalence au Chapitre 3.

[5]: LAUGINIE (2003), "La pesée de la Terre"

La constante de gravitation universelle – En 1798, Henry Cavendish réussit le tour de force de « peser la Terre » à l'aide d'une balance de torsion. Cavendish ne s'intéresse pas à la constante de gravitation mais son expérience revient à la déterminer [5]. De nos jours, la mesure de \mathcal{G} utilise toujours le principe de la balance de torsion associé à quelques raffinements techniques. Pourtant la constante de gravitation reste la constante fondamentale la moins bien connue. À l'heure actuelle on l'estime à

$$\mathcal{G} = (6,674\,30 \pm 0,000\,15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \quad [\text{Source : 2018 CODATA}]$$

Lorsqu'on approche un point matériel M de masse m près d'un système matériel S ce dernier exerce sur M une force de gravitation qui

dépend de la répartition de la matière au sein de \mathcal{S} . Si l'on décompose le système en un ensemble de N points matériels P_i de masse m_i , et en supposant que la force de gravitation obéit au principe de superposition¹⁸ on pourra écrire que le système \mathcal{S} exerce sur M une force

$$\vec{F} = m \sum_{i=1}^N -\frac{\mathcal{G}m_i}{r_i^2} \vec{u}_i = m \vec{g}(M)$$

où \vec{u}_i est un vecteur unitaire orienté de P_i vers M . Par définition, $\vec{g}(M)$ désigne le **champ de gravitation** au point M .

Une des propriétés étonnantes des interactions en $1/r^2$ est que lorsque la distribution de masse présente une symétrie sphérique¹⁹, le champ de gravitation en M ne dépend que de la distance OM et de la masse contenue dans la sphère de rayon OM .

À retenir

Le champ de gravitation produit par une répartition de masse à symétrie sphérique de centre O , vaut :

$$\vec{g}(r) = -\frac{\mathcal{G}m(r)}{r^2} \vec{u}_r$$

où r est la distance OM , \vec{u}_r le vecteur unitaire radial centrifuge et $m(r)$ la masse contenue dans la sphère de rayon r .

Une conséquence immédiate est qu'une boule à symétrie sphérique de masse m et de rayon R produit, à l'extérieur de la boule, un champ de gravitation identique à celui qu'exercerait une masse ponctuelle de masse m située au centre de la boule :

$$\vec{g}(r \geq R) = -\frac{\mathcal{G}m}{r^2} \vec{u}_r$$

Sur Terre, la force de pesanteur \vec{P} , ou poids, à l'origine de la chute des corps est essentiellement due à la force de gravitation terrestre (cf. Chapitre 11 pour une étude détaillée de la pesanteur terrestre) et l'on peut écrire $\vec{P} \approx m \vec{g}$. Au voisinage du sol, \vec{g} est uniforme et a pour intensité $g \approx 9,8 \text{ N.kg}^{-1}$. Tant que la dimension du corps reste faible devant le rayon terrestre, on montre que le poids s'applique au barycentre des masses et ne dépend que de la position du centre d'inertie. C'est pourquoi lorsque l'on étudie la chute des corps on assimile ces derniers à des points matériels.

Exercice – Calculer le poids d'une roche de masse $m = 1 \text{ kg}$ située à la surface de la Lune sachant que la masse de la Lune vaut $m_L = 7,35.10^{22} \text{ kg}$ et son rayon $R_L = 1737 \text{ km}$.

Rép. $P = 1,62 \text{ N}$

Interaction électromagnétique

L'interaction électromagnétique possède deux aspects : la force électrique et la force magnétique. La force électrique entre deux particules

18: Le principe de superposition est une conséquence de la linéarité des équations qui régissent le champ de force. Si un système \mathcal{S}_1 produit, seul, une force \vec{f}_1 sur un point matériel et qu'un système \mathcal{S}_2 produit sur ce même point une force \vec{f}_2 , alors le principe de superposition stipule que les deux systèmes, agissant simultanément, produiront une force $\vec{f}_1 + \vec{f}_2$. En toute rigueur, les équations de la relativité générale n'étant pas linéaires, la gravitation ne respecte pas le principe de superposition. Cependant, il s'agit d'une bonne approximation si les champs de gravitation sont faibles ce qui est le cas pour tous les corps de système solaire. La répartition de la matière est identique quelle que soit la direction dans laquelle on regarde.

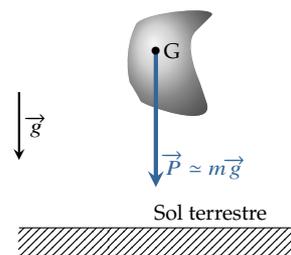


FIGURE 2.4 – Poids d'un corps.

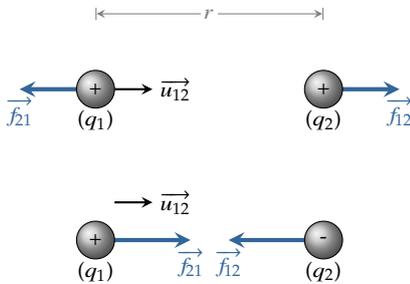


FIGURE 2.5 – Forces de Coulomb

électriquement chargées est soit attractive soit répulsive. L'état électrique des particules est caractérisé par leur charge électrique q , scalaire positif ou négatif. Deux charges ponctuelles de même signe subissent des forces répulsives opposées et coaxiales en accord avec le principe des actions réciproques. Lorsque les deux charges électriques sont de signes opposés, les forces sont attractives.

En 1785, Charles-Augustin Coulomb met en évidence, à l'aide d'une balance de torsion qu'il a réalisée lui-même, la loi qui porte désormais son nom. La force électrique – dite aussi *force coulombienne* – entre deux charges ponctuelles immobiles dans le vide varie comme l'inverse du carré de la distance qui les sépare et dépend de leur quantité de charge :

$$\vec{f}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{12} \quad \heartsuit \quad (2.5)$$

Dans le Système international d'unités, les charges s'expriment en coulombs (symbole : C) et la constante K vaut

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9,0 \cdot 10^9 \text{ m.F}^{-1}$$

où ϵ_0 désigne la *permittivité diélectrique du vide*.

Exercice – Dans l'atome d'hydrogène, comparer la force électrique que ressent l'électron de la part du proton avec la force gravitationnelle. On donne

- charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- masse de l'électron : $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- masse du proton : $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Rép. Le rapport de la force électrique sur la force gravitationnelle vaut $2,3 \cdot 10^{39}$.

Considérons une distribution de charges ponctuelles $q_{i, i \in \{1, \dots, N\}}$ placées en P_i et une *charge test* Q placée en M . Cherchons à exprimer la force électrique qu'exerce cet ensemble de charges sur la charge test. D'après le principe de superposition²⁰ les forces qu'exercent chacune des charges q_i sur la charge Q ont pour résultante :

$$\vec{F} = Q \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} = Q \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}_i M}{P_i M^3} = Q \vec{E}(M)$$

où $\vec{E}(M)$ désigne le **champ électrique** créé en M par la distribution de charges. Notez que la force électrique et la force de gravitation sont mathématiquement analogues : la masse et le champ de gravitation sont à la force de gravitation ce que sont la charge et le champ électrique à la force électrique.

Mises en mouvement, ces charges font apparaître une composante supplémentaire dite **force magnétique**. Par exemple si l'on considère deux charges électriques q_1 et q_2 animées de vitesses respectives \vec{v}_1 et \vec{v}_2 , la force électromagnétique que produit q_1 sur q_2 s'écrit sous la forme

$$\vec{f}_{12} = q_2 \vec{E}_1 + q_2 \vec{v}_2 \wedge \vec{B}_1 \quad \heartsuit \quad (2.6)$$

20: Les équations qui régissent les effets électromagnétiques étant linéaires, les forces électromagnétiques obéissent au principe de superposition.

où \vec{B}_1 désigne, par définition, le **champ magnétique** produit par la charge q_1 . Notez que la force magnétique $q_2 \vec{v}_2 \wedge \vec{B}_1$ est toujours orthogonale à \vec{v}_2 et de ce fait viole le principe des actions réciproques puisqu'elle n'est pas nécessairement portée par la droite qui joint les deux charges.

Les champs magnétiques sont produits à l'aide de courants électriques ou de matériaux aimantés et se mesurent en teslas (symbole : T) dans le Système international d'unités.

Les interactions nucléaires

Les interactions faible et forte ont la particularité d'être des interactions de très courte portée : elles agissent sur une distance caractéristique de l'ordre du fermi (1 fermi = 1 femtomètre = 10^{-15} m). À cette échelle, la physique newtonienne n'opère plus et une description quantique est nécessaire. C'est pourquoi nous n'envisagerons que les interactions électromagnétique et gravitationnelle par la suite.

2.3 Lois phénoménologiques²¹

Lorsque deux corps entrent en contact, dans un premier temps, ce sont les atomes en surface qui interagissent *via* des interactions de courte portée de nature électromagnétique, lesquelles seront responsables de l'apparition, à l'échelle macroscopique, de ce que l'on appelle les **forces de contact**. Dans un deuxième temps, si ces actions de contact sont suffisamment importantes, elles peuvent avoir un effet au sein même du solide et perturber la cohésion du corps ce qui provoque une déformation macroscopique. Nous donnons ici quelques lois phénoménologiques associées à ces actions, sans chercher à les justifier par des modèles atomiques.

Contact solide-solide

Le contact entre deux solides fait apparaître deux forces : une force \vec{N} normale au support et une force \vec{T} tangentielle au support, dite **force de frottement solide** qui s'oppose au glissement.

Amontons (1699) et Coulomb (1785) ont établi les lois du frottement solide que l'on peut résumer ainsi.

1. En l'absence de frottement, $T = 0$.
2. En présence de frottement on distingue deux cas de figure.
 - a) Il y a adhérence et donc absence de glissement tant que $T < \mu_s N$ où μ_s désigne le **coefficient de frottement statique**.

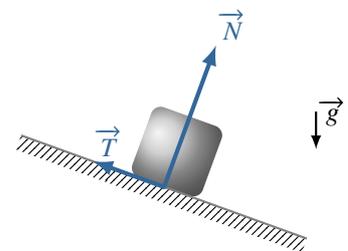


FIGURE 2.6 – Forces de contact solide-solide.

21: Loi de comportement qui permet de décrire, dans un certain domaine de validité, un phénomène. En général, cette loi fait appel à des paramètres déterminés par l'expérience. Une loi phénoménologique n'est pas fondamentale.

22: La vitesse de glissement est la vitesse d'un point M du solide situé au voisinage de la surface de contact, par rapport au support.

TABLE 2.2 – Quelques valeurs de coefficient de frottement statique.

Interfaces	acier/acier	acier/téflon	pneu/route	bois/bois
μ_s	0,18	0,04	~ 0,8	0,65

b) Lorsque la condition ci-dessus ne peut plus être respectée, il y a glissement avec frottement. La force de frottement est opposée à la vitesse de glissement²² et $T = \mu_d N$ où μ_d désigne le **coefficient de frottement dynamique**. Les coefficients μ_s et μ_d sont assez proches et en général on a $\mu_s > \mu_d$. La Table 2.2 donne quelques valeurs de μ_s .

Contact fluide-solide

Considérons un obstacle solide plongé dans un fluide de masse volumique ρ_f . Nous distinguerons deux cas suivant qu'il y a écoulement ou non autour du solide.

Le fluide est au repos

Lorsque le fluide est à l'équilibre dans le référentiel lié au solide, les seules forces à considérer sont des forces de pression. La **poussée d'Archimède** $\vec{\Pi}$ désigne la résultante de ces forces dans le cas courant où le fluide est à l'équilibre dans le champ de pesanteur. On retiendra l'énoncé suivant.

Théorème d'Archimède (250 av. J.-C.)

Tout corps immergé partiellement ou totalement dans un fluide subit de la part de celui-ci une poussée verticale, dirigée vers le haut, appelée **poussée d'Archimède**, dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé.

Le point d'application de cette force est le centre de poussée; il est différent, en général, du centre de gravité.

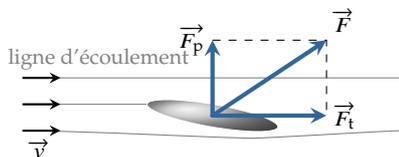


FIGURE 2.7 – Traînée et portance.

Le fluide est en mouvement

Supposons un solide plongé dans un fluide en écoulement permanent de vitesse \vec{v} loin de l'obstacle. L'écoulement autour de l'obstacle fait apparaître, en plus de la poussée d'Archimède, des forces de friction, dites **forces de viscosité** dont la résultante se décompose en deux actions.

- La traînée \vec{F}_t de même sens que \vec{v} et donc opposée à la vitesse relative du solide par rapport au fluide, est toujours présente dans un fluide visqueux; cette force est responsable de la résistance au déplacement dans un fluide.
- La portance \vec{F}_p , orthogonale à la vitesse, est responsable du maintien en vol des avions (quand elle est opposée au poids) ou du maintien au sol de certains véhicules de course (elle est dans ce cas dirigée vers le sol).

Pour des raisons de symétrie, la portance disparaît quand l'obstacle présente un axe de symétrie de même direction que \vec{v} . C'est pourquoi, un corps sphérique ne subit pas de portance, quelle que soit la direction dans laquelle il se déplace²³.

Une analyse dimensionnelle montre que ces forces peuvent s'exprimer ainsi :

$$F_t = \frac{1}{2} \rho_f S C_x v^2$$

$$F_p = \frac{1}{2} \rho_f S C_z v^2$$

où C_x et C_z désignent les **coefficients de traînée et de portance**, ρ_f la masse volumique du fluide, v la vitesse d'écoulement et S une section droite de l'obstacle. Les coefficients C_x et C_z sont sans dimension et dépendent de façon complexe du régime d'écoulement. Pour simplifier, on retiendra les deux cas limites suivants.

- À grande vitesse ces coefficients sont quasi constants et les forces varient alors de façon quadratique avec la vitesse.

Obstacle	Sphère	Plaque	Voiture moyenne	Obstacle profilé
C_x	0,41	1,2	0,35	$\lesssim 0,1$

- À faible vitesse²⁴, les coefficients C_x et C_z varient comme l'inverse de la vitesse de sorte que les forces de friction varient proportionnellement à la vitesse. Dans le cas particulier d'un corps en mouvement lent suivant son axe de symétrie, la force de frottement fluide qu'il subit s'écrit

$$F_t = \alpha v \quad \text{avec} \quad \alpha = C^{\text{te}}$$

Loi de Stokes

Stokes a montré que dans le cas d'un corps sphérique de rayon r , le coefficient α vaut $6\pi\eta r$ où η désigne la viscosité du fluide. Cette loi n'est valide qu'à condition que le nombre de Reynolds $Re = 2\rho_f v r / \eta$ soit petit devant 1. La physique des suspensions (particules solides mélangées à un liquide) et des émulsions (mélange non miscible de gouttelettes liquides dans un autre liquide) est régie par cette loi.

Tension

Lorsque l'on tire sur un fil extensible (élastique) ou un ressort celui-ci s'allonge, dans un premier temps, proportionnellement à la force appliquée. On dit que le comportement est *élastique*. Ce comportement est caractéristique de la matière solide et est réversible. En revanche, lorsque la force dépasse une valeur seuil, le comportement n'est plus réversible ; on obtient alors un *comportement plastique* qui prévient en général la rupture.

Considérons le cas du ressort à spires non jointives : lorsque l'on étire légèrement un ressort d'une longueur $\Delta\ell$, il produit sur l'agent qui le

23: Une portance apparaît cependant lorsque l'obstacle sphérique est en rotation sur lui-même : c'est l'effet Magnus.

TABLE 2.3 – C_x à grande vitesse pour différents obstacles.

24: En mécanique des fluides, le régime d'écoulement est caractérisé par le *nombre de Reynolds*. Ce nombre sans dimension vaut $Re = \rho_f v d / \eta$ où d désigne une dimension caractéristique de l'obstacle et η la viscosité du fluide. On entend par « grande vitesse », un régime d'écoulement à fort nombre de Reynolds (typiquement 10^5) et par « faible vitesse » un régime à faible nombre de Reynolds (≤ 1).

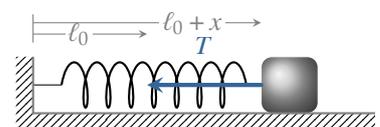


FIGURE 2.8 – Tension élastique.

déforme une force, dite **tension élastique**, proportionnelle à $\Delta\ell$ dans une direction opposée à l'étirement. De même si l'on comprime un peu le ressort d'une quantité $\Delta\ell$, ce dernier produit une force identique mais dans la direction opposée. Formellement, en définissant le vecteur unitaire \vec{u}_x orienté de l'extrémité fixe vers l'extrémité mobile du ressort, cela donne :

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x \quad \heartsuit \quad (2.7)$$

avec ℓ_0 la longueur au repos, ℓ sa longueur et k la **constante de raideur**. La constante de raideur est une donnée phénoménologique qui mesure la résistance à l'allongement et qui s'exprime en $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Notez que pour un élastique, la tension n'existe que si le fil est tendu, c'est-à-dire si $\ell \geq \ell_0$. Par contre, un ressort peut être comprimé ou étiré de telle sorte que la loi 2.7 est valable quel que soit le signe de l'allongement $x = \ell - \ell_0$.

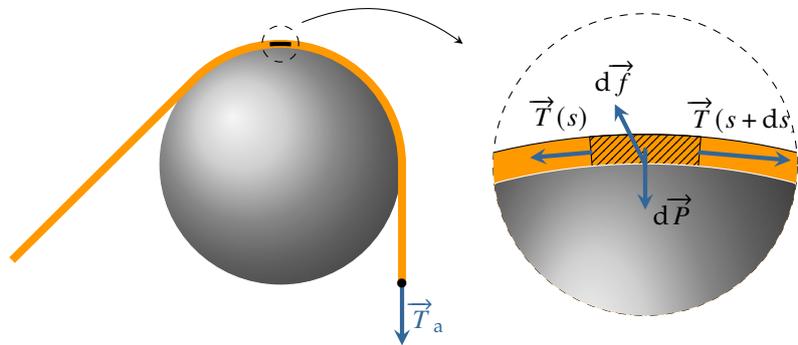


FIGURE 2.9 – Fil tendu sur un support.

Interrogeons-nous maintenant sur la façon dont la tension est transmise le long d'un fil tendu. Supposons que l'on tende un fil en appliquant à son extrémité une force de tension \vec{T}_a , le fil étant éventuellement en contact avec un surface (gorge d'une poulie par exemple). Isolons par la pensée une portion de fil située entre s et $s + ds$ où s désigne l'abscisse curviligne le long du fil. Cette portion de masse dm est soumise à quatre forces :

- une force de cohésion $\vec{T}(s + ds)$ due à la partie se trouvant à droite du système;
- une force de cohésion $\vec{T}(s)$ exercée de l'autre côté;
- une force de contact $d\vec{f}$;
- et la pesanteur $d\vec{P} = dm\vec{g}$.

Si l'on note $\vec{a}(s)$ l'accélération au point de coordonnée s , le principe fondamental de la dynamique impose

$$dm\vec{a}(s) = \vec{T}(s) + \vec{T}(s + ds) + d\vec{f} + dm\vec{g}$$

Ainsi cette relation associée aux lois sur le frottement et aux lois de l'élasticité permet d'étudier la dynamique du fil. On peut retenir un résultat particulièrement simple concernant les **fil sans masse glissant sans frottement**. En effet dans ce cas

$$T(s) = T(s + ds) \quad \implies \quad T(s) = C^{\text{te}}$$

La tension est donc uniforme le long du fil. Par continuité on déduit que $T = T_a$.

En conclusion, **Un fil sans masse se déplaçant sans frottement, transmet intégralement la tension.**

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/mecanique/problemes-de-chute.php>

3.1 Principe d'équivalence

Énoncé

Le principe d'équivalence est la pierre angulaire de la théorie de la Relativité Générale qu'Albert Einstein proposa en 1915 pour traiter la gravitation dans un cadre relativiste. En l'état actuel de nos connaissances, ce principe ne trouve pas d'explication, ce qui explique qu'on l'érige en principe. Il identifie deux propriétés de la matière conceptuellement différentes :

- La masse inerte m qui mesure l'effort à exercer pour changer l'état de mouvement d'un corps. Plus cette masse est grande, plus il est difficile de changer la vitesse d'un corps. Il s'agit d'une propriété qui se rapporte à l'inertie du mouvement.
- La masse grave m^* qui mesure le couplage entre un corps et le champ de gravitation. Plus cette masse est grande, plus la force d'attraction dans le champ de gravitation sera importante.

Principe d'équivalence

Pour tous les corps, la masse grave est proportionnelle à la masse inerte. Plus exactement, le rapport $k = m^*/m$ est indépendant de la composition chimique. On choisit $k = 1$ ce qui permet d'adopter une seule unité pour la masse grave et inerte : le *kilogramme*²⁶.

Tester le principe d'équivalence

Une conséquence de ce principe est l'universalité de la chute libre dans le vide. En effet si l'on considère un corps matériel de masse inerte m , de masse grave m^* tombant dans le vide dans un champ de pesanteur \vec{g} , alors l'équation fondamentale de la dynamique $m\vec{a} = m^*\vec{g}$ donne, si $m = m^*$,

$$\vec{a} = \vec{g} \quad \text{pour tous les corps}$$

Ainsi une plume et un marteau tombent à la même vitesse dans le vide. Pour l'anecdote, cette expérience fut réalisée sur la Lune en 1971 lors de la mission Apollo 15, par le commandant David Scott²⁷.

3.1 Principe d'équivalence . . .	31
Énoncé	31
Test du principe	31
3.2 Chute libre sans frottement	32
Cas unidimensionnel	33
Cas bidimensionnel	33
3.3 Chute libre avec frottement	34
Cas unidimensionnel	34
Cas bidimensionnel	36
Ordres de grandeur	37

26: Depuis mai 2019 le kilogramme est défini en fixant par décret la valeur de trois constantes de la nature : la constante de Planck, la célérité de la lumière dans le vide et la fréquence de transition dans le Césium 133.

27: une vidéo est disponible sur le site de la NASA à l'adresse http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/lunar/apollo_15_feather_drop.html

La violation du principe d'équivalence signerait l'émergence d'une nouvelle physique; c'est pourquoi il est important de savoir avec quelle précision est vérifiée ce principe ne serait ce pour fixer des contraintes sur les nouvelles théories alternatives.

Avant la fin du XIX^e siècle, l'étude précise de l'isochronisme des pendules permit de vérifier le principe d'équivalence avec une précision de 10^{-5} près (Bessel 1830). On doit au Baron Von Eötvös, un scientifique hongrois, un test du principe d'équivalence en 1890, avec un gain de précision de trois ordres de grandeur. Eötvös inventa une balance de torsion capable de mesurer très précisément les variations de pesanteur et réalisa que son appareil pouvait également servir à tester le principe d'équivalence : deux masses de composition différente sont suspendues aux extrémités d'un pendule de torsion ; la mesure consiste à vérifier que le bras du pendule tourne de 180° lorsque la tête du fil de suspension tourne de la même quantité. Les masses subissant l'attraction gravitationnelle de la Terre *et* la force centrifuge due à la rotation de celle-ci, une différence devait être enregistrée si le rapport $k = m^*/m$ dépendait de la composition chimique[6]. Eötvös vérifia ainsi le principe d'équivalence avec une précision de 5.10^{-8} . Plus récemment, Adelberger trouva avec la même technique, une précision de 2.10^{-13} .

[6]: NIETO (1989), "Actually, Eötvös did publish his results in 1910 it's just that no one knows about it..."

A partir de la fin du XX^e siècle, des expériences de chute libre dans des tours à vide furent également réalisées. Dans ces tours, la précision est limitée par la résistance de l'air résiduel et par le bruit sismique. Elle est de l'ordre de $10^{-10} - 10^{-12}$ tout de même. Le meilleur vide que l'on connaît étant celui qui règne dans l'espace, l'étude des astres du système solaire en chute libre dans le champ de gravitation du Soleil permet également de tester le principe d'équivalence. Par exemple, grâce aux réflecteurs installés sur la Lune lors des missions Apollo, les scientifiques peuvent, par télémétrie laser, mesurer précisément la position de la Lune. Les compositions internes de la Terre et de la Lune étant différentes, ces deux astres devraient être accélérés différemment vers le Soleil en cas de violation du principe d'équivalence. La télémétrie laser confirme le principe d'équivalence avec une précision de 2.10^{-13} !

3.2 Chute libre sans frottement

Commençons tout d'abord par traiter le problème simple de la chute libre dans le vide. Considérons un point matériel M de masse m en chute libre dans un champ de pesanteur uniforme. Le principe fondamental de la dynamique associé au principe d'équivalence nous dit que

$$\vec{a} = \vec{g} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0 \quad (3.1)$$

où \vec{v}_0 désigne la vitesse initiale. Le mouvement uniformément accéléré est alors soit rectiligne soit plan. Analysons ces deux cas de figure.

Cas unidimensionnel

Si le corps est lancé avec une vitesse initiale colinéaire à \vec{g} , la trajectoire est nécessairement rectiligne puisque l'accélération est à chaque instant colinéaire à la vitesse. Notons $z(t)$ l'altitude du point matériel à l'instant t et h l'altitude initiale. L'équation (3.1) aboutit à

$$\dot{z} = v_0 - gt \quad \Longrightarrow \quad z = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + h$$

Il est facile de montrer que le corps atteint le sol avec une vitesse $v_s = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$. Dans le cas particulier où le corps est lâché sans vitesse initiale on obtient la fameuse formule :

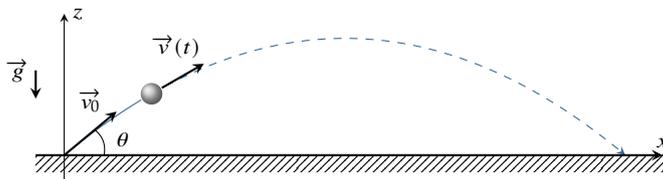
$$v_s = \sqrt{2gh} \quad \heartsuit \quad (3.2)$$

La vitesse de chute est indépendante de la masse et de la forme du corps. Notez que cette loi est la même que celle à laquelle obéissent les liquides peu visqueux lors de la vidange d'un récipient cylindrique. La vitesse d'écoulement varie comme la racine carré du niveau d'eau entre la surface libre et l'orifice de sortie²⁸.

28: cf. formule de Torricelli à l'adresse https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/fluides-parfaits.php

Cas bidimensionnel

Si initialement le corps est lancé avec un vecteur vitesse non colinéaire à \vec{g} , la trajectoire n'est plus rectiligne. En revanche elle est nécessairement plane²⁹.



29: On observe une trajectoire plane quand le vecteur accélération et le vecteur vitesse restent constamment dans le même plan; propriété violée par exemple lorsqu'on tient compte de la rotation terrestre dans l'étude de la chute libre.

FIGURE 3.1 – Position du problème.

Plaçons le corps matériel à l'origine d'un système d'axes (xOz) et lançons le avec une vitesse \vec{v}_0 formant un angle θ par rapport à l'axe (Ox) . L'équation (3.1) projetée sur l'axe Ox donne

$$\dot{x} = v_0 \cos \theta \quad \Longrightarrow \quad x = v_0 t \cos \theta$$

Le mouvement suivant Ox est uniforme. En projetant selon Oz on obtient

$$\dot{z} = v_0 \sin \theta - gt \quad \Longrightarrow \quad z = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2$$

Le mouvement suivant Oz est uniformément accéléré. L'élimination du temps permet de trouver l'équation de la trajectoire :

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + x \tan \theta$$

Le point M décrit une trajectoire parabolique.

La portée x_{\max} du lancé désigne la distance à laquelle retombe le projectile. Il est facile de montrer que

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

La valeur de l'angle θ qui permet de lancer le projectile le plus loin possible correspond donc à

$$\sin 2\theta = 1 \quad \text{soit} \quad \theta = 45^\circ$$

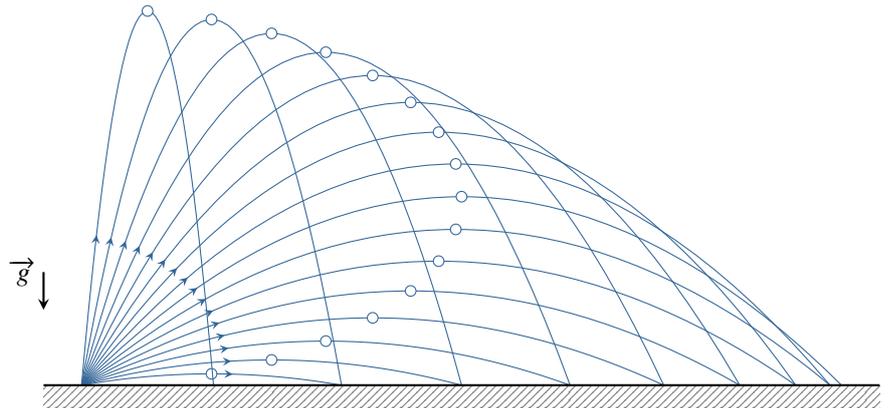


FIGURE 3.2 – Influence de l'angle θ sur la trajectoire.

3.3 Chute libre avec frottement

Envisageons maintenant la présence de frottements et cherchons l'influence qu'ils ont sur la trajectoire et la vitesse. Pour simplifier, on considère que le frottement se résume à une force de traînée F_t .

Cas unidimensionnel

Lâchons un corps matériel de masse m , de volume \mathcal{V} et de masse volumique ρ dans un fluide de masse volumique ρ_f . On observe une phase accélérée suivie d'un mouvement uniforme à la vitesse v_∞ dite **vitesse limite**. En effet, à suffisamment grande vitesse, la force de frottement F_t compense les effets de la pesanteur (poussée d'Archimède incluse) ce qui impose une accélération nulle et donc une vitesse constante. La poussée d'Archimède, étant l'opposée du poids du fluide déplacé, s'écrit

$$\vec{\Pi} = -\rho_f \mathcal{V} \vec{g} = -\frac{\rho_f}{\rho} m \vec{g}$$

de sorte que la somme du poids et de la poussée d'Archimède peut s'interpréter comme un *poids apparent* de champ de pesanteur \vec{g}'

$$\vec{P} + \vec{\Pi} = m \vec{g}' \quad \text{avec} \quad \vec{g}' = \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) \vec{g}$$

et la vitesse limite est donnée par l'équation $m|g'| = F_t$. La vitesse limite dépend donc de la masse et du fluide. Cherchons la durée

caractéristique de la phase accélérée ainsi que l'expression de la vitesse limite en étudiant deux modèles simplistes.

Dans le cas des petites vitesses, on peut modéliser la force de traînée, en première approximation, par une force linéaire en vitesse

$$\vec{F}_t = -\alpha \vec{v}$$

où α désigne un coefficient de frottement qui dépend de la taille du corps et de la viscosité du fluide. La vitesse limite s'écrit $v_\infty = mg'/\alpha$. A partir de la vitesse limite et de la pesanteur apparente, on peut construire une grandeur homogène à un temps que nous appellerons $\tau = v_\infty/g'$. La relation fondamentale de la dynamique se met alors sous une forme canonique

$$m\dot{v} = mg' - \alpha v \implies \dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau}$$

dont la solution est

$$v(t) = v_\infty \left[1 - e^{-t/\tau} \right]$$

Le temps caractéristique τ représente donc le temps de relaxation de la vitesse. Pour une durée de 5τ on fait une erreur inférieure à 1% en écrivant $v \approx v_\infty$. On pourra donc considérer que 5τ représente la durée du régime transitoire.

Lorsque la vitesse est assez grande, la force de frottement varie *grosso modo* comme le carré de la vitesse :

$$\vec{F}_t = -\beta v \vec{v} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{2} \rho_f S C_x$$

où le coefficient C_x est un coefficient aérodynamique qui dépend de la forme du corps et de l'écoulement autour de celui-ci. S est la section droite. Ici la vitesse limite vaut

$$v_\infty^2 = \frac{mg'}{\beta} \implies v_\infty = \sqrt{\frac{2mg'}{\rho_f S C_x}}$$

Elle varie donc comme \sqrt{m} . L'équation du mouvement donne

$$\dot{v} = g' - \frac{\beta}{m} v^2 = g' \left[1 - \left(\frac{v}{v_\infty} \right)^2 \right] \tag{3.3}$$

Si l'on pose, comme précédemment, $\tau = v_\infty/g'$ et $x = v/v_\infty$, l'équation devient après séparation des variables

$$\int_0^{v/v_\infty} \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{t}{\tau}$$

ce qui donne la solution

$$v(t) = v_\infty \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

La fonction $\tanh(x)$ est monotone croissante sur \mathbb{R} et tend asymptotiquement vers 1 quand $x \rightarrow \infty$. La vitesse croît donc de façon monotone

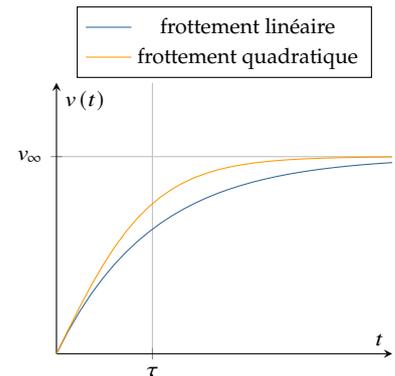


FIGURE 3.3 – Vitesse de chute - Comparaison entre le frottement linéaire et le frottement quadratique.

jusqu'à la vitesse limite et ce régime accéléré a une durée caractéristique de l'ordre de τ . La Figure 3.3 montre notamment que la vitesse limite est atteinte plus rapidement avec un frottement quadratique qu'avec un frottement linéaire.

Il est également possible d'exprimer la vitesse en fonction de la distance parcourue $s = h - z$. En effet, on peut transformer l'équation (3.3) en utilisant

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{ds}\right) \left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{dv}{ds} v = \frac{dv^2/2}{ds}$$

On obtient alors l'équation différentielle linéaire suivante

$$\frac{du}{ds} + \frac{2g'}{v_\infty^2} u = 2g' \quad \text{avec} \quad u = v^2$$

Cette équation différentielle linéaire à coefficients constants admet des solutions de la forme

$$u = v_\infty^2 + C^{\text{te}} \exp\left(-\frac{2s}{v_\infty \tau}\right)$$

La condition initiale $u(0) = 0$ permet de déterminer la constante d'intégration. Finalement la vitesse s'écrit

$$v(s) = v_\infty \sqrt{1 - e^{-s/\ell}} \quad \text{avec} \quad \ell = \frac{1}{2} v_\infty \tau = \frac{1}{2} g' \tau^2$$

La grandeur ℓ homogène à une longueur, représente la distance caractéristique sur laquelle la particule est accélérée. On retrouve d'ailleurs, par un développement limité, que $v \simeq \sqrt{2g's}$ lorsque $s \ll \ell$. Un calcul numérique montre que l'on fait une erreur inférieure à 1% en écrivant $v \simeq v_\infty$ lorsque $s > 4\ell$.

Cas bidimensionnel

Traisons maintenant le problème du mouvement d'un corps lancé avec une vitesse initiale \vec{v}_0 dans un fluide visqueux. Considérons le cas le plus courant pour lequel la force de frottement est quadratique en vitesse $\vec{F}_f = -\beta v \vec{v}$. L'équation du mouvement projetée sur les axes usuels (Ox) et (Oz) donne deux équations scalaires :

$$\begin{cases} \ddot{z} = -g' - \frac{\beta}{m} \dot{z} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \\ \ddot{x} = -\frac{\beta}{m} \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \end{cases}$$

Il s'agit d'un système d'équations *non linéaires couplées* qui peut se mettre sous la forme d'un système de quatre équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{z} = v_z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{v}_z = -g' - \frac{\beta}{m} v_z \sqrt{v_x^2 + v_z^2} \\ \dot{v}_x = -\frac{\beta}{m} v_x \sqrt{v_x^2 + v_z^2} \end{cases}$$

Il existe de nombreuses méthodes numériques pour résoudre ce type d'équation, comme par exemple la méthode de Runge-Kutta³⁰. La Figure 3.4 montre un exemple de trajectoire calculée numériquement. Les différences avec la chute libre tiennent essentiellement dans la diminution de la portée et de la flèche de la trajectoire ainsi que dans l'apparition d'une asymptote verticale. En effet, le mouvement suivant (Ox) n'étant que freiné, la vitesse v_x ne cesse de diminuer jusqu'à s'annuler. Pour ce qui est du mouvement verticale, il tend vers un mouvement uniforme de vitesse $v_\infty = \sqrt{\frac{mg'}{\beta}}$.

30: cf. <https://femto-physique.fr/omp/runge-kutta.php>

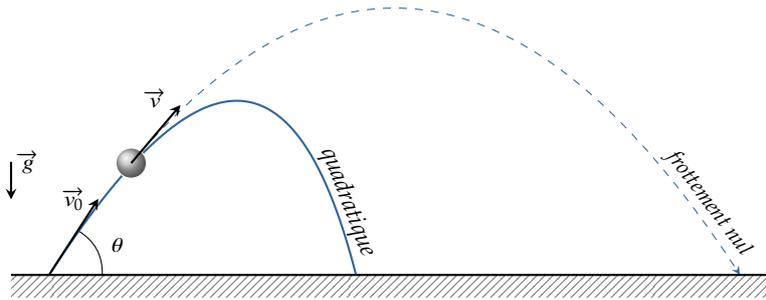


FIGURE 3.4 – Chute libre avec frottement quadratique - Comparaison avec la chute libre sans frottement.

Ordres de grandeur

Arrêtons nous un instant sur les ordres de grandeur et prenons deux cas :

1. une bille d'acier ($\rho = 7850 \text{ kg.m}^{-3}$) de diamètre 12,6 mm est lâchée dans l'air ($\rho_f = 1,2 \text{ kg/m}^3$).
2. la même bille d'acier est lâchée dans l'eau ($\rho_f \approx 1000 \text{ kg/m}^3$).

Les tables indiquent que le coefficient aérodynamique d'une sphère vaut environ $C_x = 0,44$ à suffisamment grande vitesse. On obtient les résultats suivants

fluide	g' (m.s ⁻²)	β (kg.m ⁻¹)	v_∞ (m.s ⁻¹)	ℓ (m)	τ (s)
air	$\approx g$	$33 \cdot 10^{-6}$	49,5	125	5
eau	$0,87 g$	$27 \cdot 10^{-3}$	1,6	0,15	0,2

TABLE 3.1 – Quelques ordres de grandeur pour une bille d'acier lâchée dans l'air et dans l'eau.

On constate que dans l'air, en première approximation, on peut négliger les frottements si l'on s'intéresse au mouvement de cette bille sur les premiers mètres. En revanche, dans l'eau, les frottements jouent un rôle assez vite, dès les premiers centimètres.

Hormis quelques systèmes simples, les équations du mouvements s'avèrent souvent difficile à résoudre et requièrent des méthodes numériques. Toutefois, on peut souvent déterminer des *lois de conservation* qui permettent, si ce n'est de résoudre le problème, au moins de caractériser partiellement l'évolution du système. Le concept d'énergie mène à ce type de loi comme nous allons le voir.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/mecanique/approches-energetiques.php>

- 4.1 Concept d'énergie 39
 - Travail d'une force 39
 - Puissance d'une force 40
 - TEC 41
- 4.2 Énergie mécanique 42
 - Forces conservatives 42
 - Th. de l'énergie mécanique 44
 - Systèmes non conservatifs 45
 - Systèmes unidimensionnels 46
- 4.3 Système de points 48
 - TEC 48
 - Théorème de Kœnig 49
 - Conservation de l'énergie 50
 - Lien avec la thermo 52

4.1 Concept d'énergie

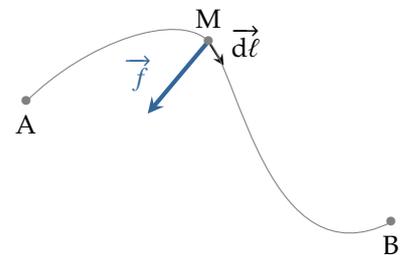
Travail d'une force

Lorsqu'une force s'exerce sur un point matériel M, c'est sa composante le long de la trajectoire qui modifie la norme de la vitesse.

Pour mesurer combien une force \vec{f} travaille à accélérer ou a ralentir un point matériel, on définit une grandeur, appelée **travail mécanique de \vec{f}** et notée $W_{A \rightarrow B}$:

$$W_{A \rightarrow B} \triangleq \int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{\ell} \quad \heartsuit \quad (4.1)$$

où $d\vec{\ell}$ désigne le vecteur **déplacement infinitésimal** du point M le long du trajet \mathcal{C}_{AB} . Le travail est donc une intégrale curviligne dont le résultat dépend, *a priori*, de la force *et* du trajet. On remarque que si la force fait un angle aigu avec le vecteur déplacement, alors $W_{A \rightarrow B} > 0$: On dit que le travail est **moteur**. Si, au contraire, la force fait constamment un angle obtus avec le vecteur déplacement, $W_{A \rightarrow B} < 0$: le travail est **résistant**. Enfin si la force est orthogonal au déplacement, alors $W_{A \rightarrow B} = 0$: la force ne fait qu'incurver la trajectoire sans modifier la norme de la vitesse comme nous le verrons plus loin.



Dans le Système international d'unités, le travail s'exprime en joule (symbole : J) en hommage à James Prescott Joule³². Une analyse dimensionnelle donne

$$[W] = ML^2T^{-2} \quad \implies \quad 1 \text{ J} = 1 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2}$$

32: James Prescott Joule (1818-1889) : Physicien anglais qui montra l'équivalence entre le transfert thermique et le travail mécanique. Il découvrit avec William Thomson (qui deviendra plus tard Lord Kelvin) l'effet Joule-Kelvin à l'origine des systèmes frigorifiques.

Notez que l'expression du travail se simplifie dans le cas d'une force uniforme : pour un trajet \mathcal{C}_{AB} on obtient

$$W_{A \rightarrow B} = \vec{f} \cdot \vec{AB} \quad \text{si} \quad \vec{f} = \vec{C}^{\text{te}}$$

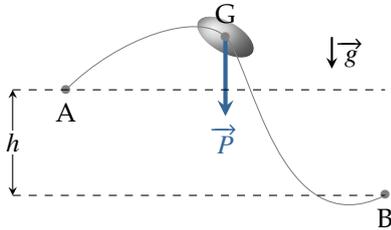


FIGURE 4.1 – Calcul du travail de pesanteur.

Exemple : travail de la pesanteur – Calculons le travail de la force de pesanteur lorsque le centre de gravité G d'un corps matériel se déplace du point A au point B . Le poids étant une force constante, on a

$$W_{A \rightarrow B} = \vec{P} \cdot \vec{AB} = \pm mgh \quad (4.2)$$

où h désigne la dénivellation ($h > 0$). On mettra le signe + quand G descend (travail moteur) et le signe - quand G monte (travail résistant).

On remarque ici que le travail du poids ne dépend pas de la forme du trajet mais seulement de la dénivellation. Par conséquent, si le centre d'inertie revient à sa position initiale, le poids n'aura produit aucun travail, globalement. On verra que le poids appartient à l'ensemble des **forces conservatives**. En revanche, les forces de frottement ont la particularité de travailler en résistance et ce d'autant plus que le trajet est long.

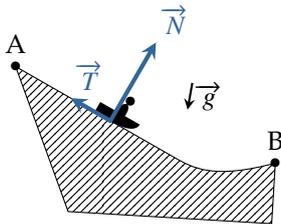


FIGURE 4.2 – Calcul du travail des forces de frottement.

Exemple : travail d'un frottement solide – Une lugeuse glisse sur une piste de forme quelconque et l'on suppose que la force de frottement qu'exerce la neige sur la luge est constante et vaut T . Calculons le travail produit par les forces de contact après avoir parcouru une distance L . Tout d'abord, l'action normale à la surface ne travaille pas puisqu'elle est orthogonale à la vitesse de glissement. Le travail des forces de contact s'identifie donc avec le travail de la force de frottement :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \vec{T} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\mathcal{C}_{AB}} T d\ell = -TL$$

Contrairement au poids, le travail des forces de frottement dépend de la longueur du trajet et donc de la forme du chemin parcouru.

Puissance d'une force

Pour mesurer à quel rythme une force travaille, on introduit la notion de *puissance mécanique*. La puissance d'une force, que nous noterons \mathcal{P} , est le quotient du travail fourni sur la durée lorsque cette durée tend vers 0 :

$$\mathcal{P} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta W}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{f} \cdot d\vec{\ell}}{\delta t} = \vec{f} \cdot \vec{v} \quad (4.3)$$

où \vec{v} est la vitesse du point d'application de la force. La puissance est donc une grandeur instantanée. Finalement, le travail d'une force sur un trajet \mathcal{C}_{AB} peut se calculer à partir de la puissance :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P} dt \quad \heartsuit \quad (4.4)$$

où t_A et t_B sont les instants où le point M se trouve en A et B. Dans le cas particulier où la puissance est constante, on a tout simplement

$$W_{A \rightarrow B} = \mathcal{P} \times \Delta t$$

avec $\Delta t = t_B - t_A$, la durée que met le point d'application à aller de A vers B.

Dans le Système international d'unités, la puissance s'exprime en watt (symbole : W), en hommage à James Watt³³. Une analyse dimensionnelle donne immédiatement

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$$

33: James Watt (1736-1819) : Ingénieur écossais qui apporta de nombreuses innovations à la machine à vapeur. On lui doit également l'unité de « cheval-vapeur » encore utilisée dans le domaine automobile : 1 ch = 736 W.

Théorème de l'énergie cinétique

Considérons un point matériel M de masse m animé d'une vitesse \vec{v} dans un référentiel galiléen \mathcal{R} et soumis à un ensemble de forces \vec{f}_k . La relation fondamentale de la dynamique nous donne

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_k \vec{f}_k$$

Multiplions par \vec{v} cette expression. En remarquant que

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

il vient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \sum_k \vec{f}_k \cdot \vec{v}$$

Le terme de droite correspond à la somme des puissances mécaniques. Le terme de gauche est la dérivée de la quantité

$$\mathcal{E}_c(M) \triangleq \frac{1}{2} m v^2 \quad \heartsuit \quad (4.5)$$

Une analyse dimensionnelle donne $[\mathcal{E}_c] = \text{ML}^2\text{T}^{-2}$ ce qui correspond à la dimension d'un travail. Cette quantité qui ne dépend que du point matériel et de son mouvement est appelée **énergie cinétique** et s'exprime en joule. Nous avons donc obtenu une équation d'évolution de l'énergie cinétique :

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E}_c) = \sum_k \mathcal{P}_k$$

Si nous intégrons cette équation sur le temps entre les instants t_A et t_B , on obtient :

$$\Delta \mathcal{E}_c \triangleq \mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) = \sum_k W_{A \rightarrow B}^k$$

Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(M) \triangleq \frac{1}{2} m \vec{v}_{M/\mathcal{R}}^2$ d'un point matériel M subissant les actions \vec{f}_k vérifie la loi d'évolution :

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E}_c) = \sum_k \mathcal{P}_k \quad [\text{Formulation différentielle}] \quad (4.6)$$

$$\Delta \mathcal{E}_c = \sum_k W_{A \rightarrow B}^k \quad [\text{Formulation intégrale}] \quad (4.7)$$

Arrêtons nous un instant sur le contenu physique de ce théorème. On peut considérer que le point matériel possède –de part son mouvement– une quantité que nous appelons *énergie cinétique*, laquelle évolue suite à un transfert d'énergie dirigé de l'environnement extérieur vers le point matériel. Ce transfert d'énergie s'identifie ici avec le travail des forces d'interaction de l'environnement extérieur sur le point M. Autrement dit, l'énergie cinétique ne varie que si le point matériel reçoit de la puissance mécanique. Une conséquence immédiate est qu'un point matériel conserve son énergie cinétique si les forces qu'il subit ne travaillent pas : seule la direction de la vitesse peut changer, pas sa norme.

Exercice – Un canon tire un obus à la vitesse $v = 100 \text{ m.s}^{-1}$ suivant la verticale ascendante. Le référentiel terrestre est considéré galiléen et le champ de pesanteur terrestre vaut $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$. Calculer l'altitude maximale h atteinte par l'obus, si l'on néglige la résistance de l'air.

Rép. $h = 510 \text{ m}$.

4.2 Énergie mécanique d'un point

Forces conservatives

L'opérateur $\vec{\nabla}$ est un opérateur *différentiel linéaire*. Il s'applique à une fonction scalaire de l'espace (champ scalaire) et retourne une fonction vectorielle de l'espace (champ vectoriel). Il se lit *gradient* ou *nabla* et se note :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} f(x, y, z)$$

L'expression de l'opérateur gradient dépend du système de coordonnées. En coordonnées cartésiennes on retiendra la formule suivante :

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Par définition, une force est dite **conservative** lorsqu'elle s'exprime comme le gradient d'une fonction scalaire de l'espace $\mathcal{E}_p(x, y, z)$ dite **énergie potentielle d'interaction** :

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} \mathcal{E}_p(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\partial \mathcal{E}_p / \partial x \\ -\partial \mathcal{E}_p / \partial y \\ -\partial \mathcal{E}_p / \partial z \end{pmatrix} \quad \heartsuit \quad (4.8)$$

On remarque immédiatement que la fonction \mathcal{E}_p a bien la même dimension qu'un travail puisque $[f] = [\mathcal{E}_p]/L$ ce qui explique son appellation. L'énergie potentielle \mathcal{E}_p s'exprime donc en joule.

Méthodologie

Il y a deux façons d'obtenir l'énergie potentielle associée à une force :

1. Soit on cherche la fonction scalaire $\mathcal{E}_p(x, y, z)$ qui vérifie

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}\mathcal{E}_p(x, y, z)$$

en résolvant trois équations aux dérivées partielles ;

2. Soit on cherche la fonction scalaire $\mathcal{E}_p(x, y, z)$ à partir de la relation

$$\delta W = \vec{f} \cdot \vec{d\ell} = -d\mathcal{E}_p$$

Par exemple cherchons l'énergie potentielle associée à la pesanteur $\vec{P} = m\vec{g}$. L'espace étant muni d'un repère cartésien d'axe Oz vertical ascendant, on obtient

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_z \implies \begin{cases} 0 & = -\partial\mathcal{E}_p/\partial x \\ 0 & = -\partial\mathcal{E}_p/\partial y \\ -mg & = -\partial\mathcal{E}_p/\partial z \end{cases}$$

Les deux premières relations traduisent le fait que l'énergie potentielle ne dépend que de z . L'intégration de la dernière relation donne $\mathcal{E}_p(z) = mgz + C^{\text{te}}$.

On peut aussi exprimer le « travail élémentaire » :

$$\delta W = \vec{P} \cdot \vec{d\ell} = -mg dz = -d\mathcal{E}_p$$

ce qui donne immédiatement $\mathcal{E}_p(z) = mgz + C^{\text{te}}$.

Calculons le travail d'une force conservative \vec{f} le long d'un trajet quelconque \mathcal{C}_{AB} . En coordonnées cartésiennes, le déplacement infinitésimal s'écrit $\vec{d\ell} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$ et donc le travail

$$W_{A \rightarrow B} = - \int_{\mathcal{C}_{AB}} \frac{\partial\mathcal{E}_p}{\partial x} dx + \frac{\partial\mathcal{E}_p}{\partial y} dy + \frac{\partial\mathcal{E}_p}{\partial z} dz = - \int_{\mathcal{C}_{AB}} d\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B)$$

Autrement dit, une force conservative produit un travail qui **ne dépend pas de la forme du trajet** mais uniquement de la position des points A et B. En conséquence, si le trajet se referme sur lui-même, le travail est nul. La réciproque est vraie, c'est-à-dire qu'une force dont le travail dépensé est nul quel que soit le circuit fermé parcouru par le point d'application est forcément conservative. Pour résumer,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{f} \cdot \vec{d\ell} = 0 \quad \forall \mathcal{C} \iff \vec{f} = -\vec{\nabla}\mathcal{E}_p$$

Les forces de frottement sont nécessairement non conservatives puisqu'elles s'opposent, par nature, au mouvement. En effet,

$$\vec{f} = -\alpha(v)\vec{v} \implies \oint \vec{f} \cdot \vec{d\ell} = - \int_{t_1}^{t_2} \alpha(v)v^2 dt < 0$$

Un autre propriété de la force conservative est qu'elle est toujours dirigée vers les valeurs décroissantes de l'énergie potentielle. **La force aura donc tendance à amener le point matériel dans la zone d'énergie potentielle minimale.** La [Table 4.1](#) résume quelques énergies

potentielles associées à quelques forces.

TABLE 4.1 – Caractère conservatif ou non de quelques interactions classiques.

Force	Expression	Statut	Énergie potentielle
Force de gravitation	$\vec{f} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}$	Conservative	$\mathcal{E}_p = -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{r} + C^{te}$
Force électrostatique	$\vec{f} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}$	Conservative	$\mathcal{E}_p = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 r} + C^{te}$
Force magnétique	$\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$	Ne travaille pas	
Pesanteur uniforme	$\vec{P} = m \vec{g}$	Conservative	$\mathcal{E}_p = mgz + C^{te}$
Frottements solide/solide	$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$	non conservative	
Frottements fluide/solide	$\vec{f} = -\alpha(v) \vec{v}$	non conservative	
Tension élastique	$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x$	Conservative	$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 + C^{te}$

Remarque : La détermination de l'énergie potentielle introduit toujours une constante scalaire. Cette constante n'a aucun sens physique puisqu'elle n'intervient pas dans les grandeurs que l'on peut mesurer (la force, le travail...). C'est pourquoi, on peut arbitrairement la poser à 0 (ce qui revient à poser une origine des énergies potentielles) ou la conserver dans les calculs sachant que les grandeurs physiques mesurables n'en dépendront pas.

Théorème de l'énergie mécanique

Lorsqu'un système dynamique est soumis à des forces conservatives et/ou des forces ne travaillant pas, on dit que le système est *conservatif*. Notons \mathcal{E}_p^k l'énergie potentielle associée aux différentes forces \vec{f}_k que subit un point matériel M et appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre deux positions quelconques A et B de M. On obtient

$$\mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) = \sum_k W_{A \rightarrow B}^k = - \sum_k \left(\mathcal{E}_p^k(B) - \mathcal{E}_p^k(A) \right)$$

d'où l'on tire $\mathcal{E}_c(A) + \sum_k \mathcal{E}_p^k(A) = \mathcal{E}_c(B) + \sum_k \mathcal{E}_p^k(B)$.

Théorème de l'énergie mécanique

Pour tout système conservatif, la quantité, appelée *énergie mécanique*, somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles, se conserve au cours du mouvement.

$$\mathcal{E}_m \triangleq \mathcal{E}_c + \sum_k \mathcal{E}_p^k = \text{constante} \quad (4.9)$$

Cette relation est appelée *intégrale première du mouvement* comme toute relation de conservation ne faisant intervenir que les dérivées premières des coordonnées par rapport au temps. Bien qu'en général, cette relation possède moins d'information que le PFD, elle présente l'intérêt non négligeable de relier entre elles des grandeurs scalaires ce qui évite le formalisme vectoriel. Par exemple, quand on cherche

une relation entre vitesse et position, il peut être judicieux d'écrire la relation de conservation de l'énergie mécanique. Enfin, dans les systèmes conservatifs à un degré de liberté (cf. Section 36), elle fournit directement l'équation du mouvement. En dehors de ce cas particulier, il faut chercher des relations supplémentaires pour pouvoir espérer résoudre le problème³⁴.

On notera que la relation (4.9) possède la propriété d'être invariante par renversement du temps. En effet, la transformation $t' = -t$ change le signe de la vitesse mais n'affecte ni l'énergie cinétique ni les énergies potentielles. On dit que **les systèmes conservatifs sont réversibles**. Concrètement, cela signifie que si un point matériel M évolue sur une trajectoire \mathcal{C} entre $t = 0$ et $t = t_1$ et que l'on inverse la vitesse précisément à l'instant t_1 (ce qui revient à inverser le sens du temps), le point M évoluera en empruntant la trajectoire à l'envers pour retrouver son état initial à l'instant $t = 2t_1$. Cette propriété est également valable pour un système conservatif de N points matériels et fut à la base d'une des critiques formulées à Ludwig Boltzmann contre sa tentative d'expliquer la flèche du temps³⁵ à l'aide d'une théorie corpusculaire : en effet comment concilier la réversibilité des lois de la mécanique à l'œuvre à l'échelle des molécules avec l'irréversibilité de certains phénomènes observés à l'échelle macroscopiques ? Cette question est connue sous le nom de paradoxe de Loschmidt.

Lorsque l'on met en place une résolution numérique d'un problème conservatif, on fait appel à des méthodes numériques dites *symplectiques*, particulièrement adaptées aux systèmes conservatifs et supérieures aux méthodes classiques dans le sens où elles conduisent à une dérive de l'énergie faible aux temps longs. Une des raisons de l'inefficacité des méthodes classiques (Euler, Runge-Kutta) est leur caractère non réversible en temps. L'algorithme de Verlet³⁶ fait partie de ces méthodes symplectiques.

Systèmes non conservatifs

Lorsqu'une des forces n'est pas conservative, comme c'est le cas pour les forces de frottement, on dit que le système n'est pas conservatif. Le théorème de l'énergie cinétique donne alors

$$\Delta \mathcal{E}_c = \sum_k W_{A \rightarrow B}^k + W_{A \rightarrow B}^{nc} = - \sum_k \Delta \mathcal{E}_p^k + W_{A \rightarrow B}^{nc}$$

où $W_{A \rightarrow B}^{nc}$ désigne le travail des forces non conservatives. Autrement dit, l'énergie mécanique ne se conserve pas :

$$\Delta \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m(B) - \mathcal{E}_m(A) = W_{A \rightarrow B}^{nc}$$

Dans le cas des forces de frottement, le travail est résistant puisque la force est opposée au sens du mouvement : $W_{A \rightarrow B}^{nc} \leq 0$ et l'énergie mécanique diminue au cours du temps.

34: Il existe cependant un formalisme dit *formalisme lagrangien* qui permet d'obtenir toutes les équations à partir d'une fonction qui a une interprétation énergétique.

35: Certains phénomènes spontanés, comme la diffusion de la chaleur, ont lieu dans un sens, jamais dans le sens contraire

36: cf. https://femto-physique.fr/analyse_numerique/numerique_C4.php

Systèmes conservatifs à un degré de liberté

Considérons un point matériel M soumis à un champ de force conservatif et dont l'état est décrit à l'aide d'un seul degré de liberté que nous noterons x . Supposons que la conservation de l'énergie mécanique se traduise par une relation de la forme

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_m \quad (4.10)$$

où m est un scalaire positif, $\mathcal{E}_p(x)$ une fonction de x et \mathcal{E}_m un scalaire. On constate que cette équation est la même que celle qui régit le mouvement d'une particule en mouvement sur un axe (Ox) et soumis à une force axiale $f_x = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$ et dont l'énergie mécanique vaut \mathcal{E}_m . Profitons de cette analogie pour extraire quelques résultats qualitatifs sur le mouvement.

Il existe des états particuliers x_{eq} pour lesquelles lorsque on y place M sans vitesse, il y reste indéfiniment. Ces **positions d'équilibres** s'obtiennent par

$$f_x(x_{\text{eq}}) = 0 = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}(x_{\text{eq}})$$

Autrement dit l'état $x = x_{\text{eq}}$ est un état d'équilibre si \mathcal{E}_p est extremum en ce point. Un équilibre mécanique peut être **stable** ou **instable**.

Stabilité

Plaçons un point M sur une position d'équilibre et écartons le légèrement de cette position :

- si les actions qui apparaissent tendent à ramener le point M vers la position d'équilibre, on dit que l'équilibre est stable ;
- si les actions qui apparaissent tendent à l'en éloigner, on dit que l'équilibre est instable.

Dans la réalité seuls les équilibres stables sont observés du fait de l'existence de perturbations (forces perturbatrices, agitation thermique, fluctuations quantiques etc.) qu'il est impossible de supprimer complètement³⁷. D'un point de vue plus formel, supposons qu'une perturbation déplace le point M de sa position d'équilibre d'une quantité arbitrairement petite δx . La force que ressent le point M peut s'approcher par le développement de Taylor

$$f_x(x_{\text{eq}} + \delta x) \approx f_x(x_{\text{eq}}) + \delta x \frac{df_x}{dx}(x_{\text{eq}}) = -\delta x \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_{\text{eq}})$$

L'équilibre est stable si

$$\delta x > 0 \implies f_x < 0 \quad \text{et} \quad \delta x < 0 \implies f_x > 0$$

Il en découle la **condition de stabilité** :

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_{\text{eq}}) > 0 \quad \heartsuit \quad (4.11)$$

37: Il arrive que le statut de certains états d'équilibre dépende de la température. En effet, une position d'équilibre peut être stable vis à vis de petites perturbations mais instable vis à vis de perturbations plus importantes : on parle alors d'états métastables.

Par conséquent, la fonction $\mathcal{E}_p(x)$ présente un minimum au point correspondant à un équilibre stable. À l'inverse, la présence d'un maximum traduit l'existence d'un équilibre instable.

Le profil $\mathcal{E}_p(x)$ permet d'extraire quelques informations qualitatives sur le mouvement. Tout d'abord la condition $\dot{x}^2 \geq 0$ implique que les états permis sont ceux pour lesquels

$$\mathcal{E}_p(x) \leq \mathcal{E}_m$$

Il est alors judicieux de porter sur un graphe $y_1 = \mathcal{E}_m$ et $y_2 = \mathcal{E}_p(x)$ pour déterminer les domaines permis. Plusieurs cas peuvent se produire. Considérons la situation décrite ci-contre. Supposons que M se trouve initialement en $x_0 > x_3$ avec une « vitesse » $\dot{x} < 0$. Au cours du temps, x diminue et le point M se rapproche de l'état x_3 . Il atteint ce point avec une « vitesse » nulle d'après l'équation (4.10) et subit une force $f_x = -d\mathcal{E}_p/dx > 0$ de sorte que le M repart dans l'autre sens. La position $x = x_3$ agit ainsi comme une barrière infranchissable; on parle de **barrière de potentiel**. Supposons maintenant la situation où x_0 se trouve entre x_1 et x_2 . Le point M va atteindre la barrière x_1 puis rebrousser chemin pour rencontrer une autre barrière en x_2 . Finalement le point va osciller entre ces deux états : on dit que le M est piégé dans un **puits de potentiel**. Sur l'exemple précédent on constate que selon l'état initial, les états accessibles par M sont soit bornés ($x \in [x_1, x_2]$), soit non bornés ($x \in [x_3, \infty[$). On parle d'états liés (bornés) ou non liés (non bornés).

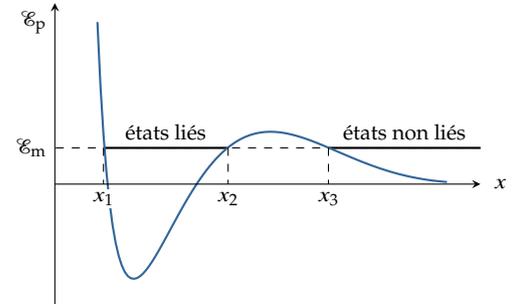


FIGURE 4.3 – Profil énergétique

La conservation de l'énergie mécanique permet de résoudre complètement les problèmes à un degré de liberté tout en évitant le formalisme vectoriel. En effet, si l'on dérive par rapport au temps l'équation (4.10), on trouve l'équation différentielle

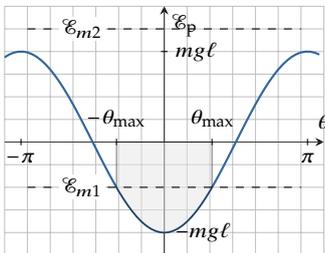
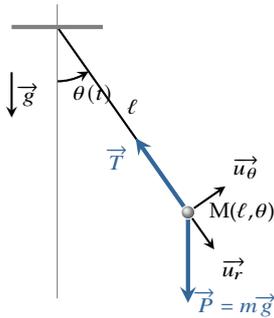
$$m\ddot{x} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$$

dont la solution est unique si les conditions initiales x_0 et \dot{x}_0 sont connues. Par ailleurs, on peut obtenir l'équation horaire $t = f(x)$ par simple intégration puisque d'après (4.10) on a

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(x))}{m}}$$

où le signe \pm dépend de l'histoire du mouvement : à chaque rencontre avec une barrière de potentiel, \dot{x} change de signe. Finalement, après séparation des variables on peut écrire

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x(t)} \sqrt{\frac{m}{2(\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(x'))}} dx'$$



Exemple : le pendule simple – Considérons un pendule simple plan rigide de longueur ℓ et de masse m , dont l'état est décrit à l'aide de l'écart angulaire θ . La tension ne travaille pas et la pesanteur est une force conservative : le pendule simple est donc un système conservatif à un degré de liberté. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit

$$\mathcal{E}_p = -mg\ell \cos \theta$$

Le profil de l'énergie potentielle montre une position d'équilibre stable ($\theta = 0$) et une position d'équilibre instable ($\theta = \pi$). Deux cas de figures sont à envisager.

1. L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m > mg\ell$: $\dot{\theta}$ conserve alors le même signe et le pendule tourne indéfiniment (mouvement révolitif).
2. L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m < mg\ell$: Le pendule oscille entre deux valeurs symétriques $\pm\theta_{\max}$, vérifiant $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p(\theta_{\max})$.

Dans tous les cas, la relation de conservation de l'énergie mécanique donne une équation différentielle non linéaire du premier ordre :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 - mg\ell \cos \theta = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta}_0)^2 - mg\ell \cos \theta_0$$

avec $\dot{\theta}_0$ et θ_0 les conditions initiales. En dérivant la relation obtenue par rapport au temps, on retrouve l'équation du mouvement auquel aboutit l'application directe de la relation fondamentale de la dynamique :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

4.3 Bilan d'énergie pour un système de points

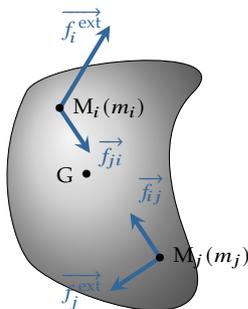


FIGURE 4.4 – Système \mathcal{S} de points matériels.

Considérons maintenant un système \mathcal{S} de N points matériels que nous noterons M_i avec $i = (1, \dots, N)$. Ce système est le siège d'actions extérieures \vec{f}_i^{ext} et d'actions internes \vec{f}_{ji} du point M_j sur le point M_i , dans le référentiel \mathcal{R} supposé galiléen.

Théorème de l'énergie cinétique

Écrivons le principe fondamental pour chaque point matériel :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ji}$$

Multiplions chaque équation par \vec{v}_i puis sommions les :

$$\sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \vec{f}_i^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_i + \sum_{i,j \neq i} \vec{f}_{ji} \cdot \vec{v}_i$$

Le terme de gauche s'identifie avec la variation temporelle de l'énergie cinétique du système

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) \triangleq \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

On reconnaît à droite, les puissances des forces extérieures *et* des forces internes. On retiendra le théorème suivant :

Théorème de l'énergie cinétique pour un système de points

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , l'énergie cinétique d'un système de points matériels M_i vaut, par définition

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) \triangleq \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$$

avec $\vec{v}_i = \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$. Elle suit la loi d'évolution :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \mathcal{P}^{\text{ext}} + \mathcal{P}^{\text{int}} \quad [\text{Formulation différentielle}] \quad (4.12)$$

$$\Delta \mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = W^{\text{ext}} + W^{\text{int}} \quad [\text{Formulation intégrale}] \quad (4.13)$$

avec

$$W^{\text{ext}} = \int \mathcal{P}^{\text{ext}} dt = \sum_i \int \vec{f}_i^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_i dt$$

$$W^{\text{int}} = \int \mathcal{P}^{\text{int}} dt = \sum_{i,j \neq i} \int \vec{f}_{ji} \cdot \vec{v}_i dt$$

Ainsi les forces internes jouent un rôle dans le bilan d'énergie bien qu'elles se compensent deux à deux et, de ce fait, n'aient pas d'effet sur le mouvement du centre d'inertie (*cf.* théorème du centre d'inertie). L'énergie cinétique d'un système de points varie d'une part suite à un transfert de travail d'origine externe et d'autre part suite à un transfert de travail interne.

Théorème de Kœnig

Dans le théorème de l'énergie cinétique nous avons distingué l'influence des actions externes et internes ce qui nous a amené à définir deux termes de transfert. On peut poursuivre cette démarche dans l'expression de l'énergie cinétique. Cherchant à découpler le mouvement d'ensemble du mouvement interne, nous définissons le référentiel lié au centre d'inertie G , dit **référentiel barycentrique** et noté \mathcal{R}^* . Appelons \vec{v}_G la vitesse du centre d'inertie et $\vec{v}_i^* = \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}^*}$ la vitesse de M_i dans le référentiel barycentrique. La loi de composition du mouvement donne

$$\vec{v}_i^* = \vec{v}_i - \vec{v}_G$$

L'énergie cinétique du système matériel \mathcal{S} peut s'écrire :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_G^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^{*2} + \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^* \right) \cdot \vec{v}_G$$

Or, on a montré que la quantité de mouvement du système correspondait à celle d'un point matériel de masse $m = \sum m_i$ situé en G :

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_G \implies \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^* = \vec{0}$$

Finalement, si l'on pose \mathcal{E}_c^* l'énergie cinétique barycentrique, on trouve :

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2} m v_G^2 + \mathcal{E}_c^* \quad \heartsuit \quad (4.14)$$

Cela constitue le **théorème de Kœnig** relatif à l'énergie cinétique. Ce théorème exprime simplement que l'énergie cinétique d'un système possède une contribution *collective* (mouvement d'ensemble) et une contribution interne. Le théorème de l'énergie cinétique se reformule donc de la façon suivante :

$$\Delta \mathcal{E}_c^* + \Delta \left(\frac{1}{2} m v_G^2 \right) = W^{\text{ext}} + W^{\text{int}} \quad \heartsuit \quad (4.15)$$

Exemple : le système isolé – En l'absence de forces extérieures, on dit que le système est isolé. Dans ce cas $W^{\text{ext}} = 0$ et, selon le théorème du centre d'inertie, le vecteur vitesse du centre d'inertie est nécessairement constant. Le théorème de l'énergie cinétique prend alors la forme :

$$\Delta \mathcal{E}_c^* = W^{\text{int}}$$

Relation qui exprime le fait qu'un système isolé peut voir son énergie cinétique varier du fait des actions internes. Par exemple, lorsque l'on fait tourner un œuf frais comme une toupie, sa rotation est très vite ralentie contrairement au cas de l'œuf dur ; cela constitue d'ailleurs un test expérimental pour distinguer un œuf frais d'un œuf dur. Dans le cas de l'œuf frais, le liquide intérieur est mis en mouvement par les forces de frottement visqueux qui de part leur travail résistant, dissipent l'énergie cinétique, alors que dans le cas de l'œuf dur, la rotation est *solide* : toutes les parties de l'œuf tournent à la même vitesse angulaire et les forces internes ne travaillent pas.³⁸

38: Il faut ajouter cependant que le contact entre l'œuf dur et le support n'étant pas absolument ponctuel, il existe un frottement de contact qui produit un travail extérieur résistant responsable du ralentissement qui finit tôt ou tard par arrêter l'œuf.

Conservation de l'énergie

Allons plus loin en faisant l'hypothèse que les **forces internes sont conservatives**. Exprimons le travail des forces internes W^{int} :

$$W^{\text{int}} = \sum_{i,j \neq i} \int_{t_A}^{t_B} \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \left(\int_{t_A}^{t_B} \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_i + \int_{t_A}^{t_B} \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_j \right)$$

Or, en vertu de la troisième loi de Newton, les actions réciproques sont opposées et coaxiales de telle sorte que

$$W^{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \int_{t_A}^{t_B} \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_{ji} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} f_{ji} dr_{ji}$$

où $\vec{r}_{ji} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ représente le rayon vecteur dirigé du point M_j vers M_i . On constate alors que les forces internes ne travaillent que si les

différentes parties voient leur distances mutuelles varier, c'est-à-dire si le système se déforme.

Exercice – Ecrire le théorème de l'énergie cinétique pour un solide parfait (système indéformable).

$$\text{Rép. } \Delta \left(\frac{1}{2} m v_G^2 + \mathcal{E}_c^* \right) = W^{\text{ext}}.$$

Dans le cas d'un système déformable, le calcul du travail des forces internes nécessite de connaître la loi de force. Traitons le cas particulier important où la force inter-particulaire ne dépend que de r_{ij} (on peut inclure les forces qui ne produisent aucun travail telles que les forces magnétiques). Dans ce cas, l'énergie potentielle d'interaction $E_{p,ij}$ est telle que

$$f_{ji} \, dr_{ji} = -d\mathcal{E}_{p,ij}$$

Ainsi, le travail des actions internes s'écrit

$$W^{\text{int}} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \int_{t_A}^{t_B} d\mathcal{E}_{p,ij} = -\Delta \mathcal{E}_p^{\text{int}}$$

avec $\mathcal{E}_p^{\text{int}}$ l'énergie potentielle d'interaction du système définie par

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}} \triangleq \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \mathcal{E}_{p,ij} \quad \heartsuit \quad (4.16)$$

Exemples – Un système constitué de N masses ponctuelles en interaction gravitationnelle possède une énergie potentielle d'interaction

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} -\mathcal{G} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

Un système constitué de N charges ponctuelles en interaction électrostatique possède une énergie potentielle d'interaction

$$\mathcal{E}_p^{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Finalement le théorème de l'énergie cinétique se met sous la forme générale suivante

$$\Delta \left(\frac{1}{2} m v_G^2 + \mathcal{E}_c^* + \mathcal{E}_p^{\text{int}} \right) = W^{\text{ext}} \quad \heartsuit \quad (4.17)$$

En conclusion, il existe une fonction \mathcal{E} dite énergie du système, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle interne, qui a la propriété de se conserver lorsque le système est isolé :

$$\Delta \mathcal{E} = 0 \quad \text{si} \quad W^{\text{ext}} = 0$$

Cette loi de conservation est valable pour tout système de particules soumises aux interactions fondamentales (électromagnétique, gravitationnelle, forte et faible) et par extension à tout système macroscopique.

Lorsque le système n'est pas isolé, son énergie augmente de W^{ext} qui peut donc s'interpréter comme un transfert d'énergie de l'extérieur vers le système.

Lien avec la thermodynamique

Le bilan d'énergie (4.17) est souvent inutilisable pour un système macroscopique quelconque, notamment parce qu'il n'est pas toujours possible d'explicitier la travail échangé en terme macroscopique. C'est pourquoi, la *thermodynamique* a cherché à rendre ce bilan d'énergie opératoire en postulant un principe qui ne trouvera une justification qu'après la naissance de la physique statistique. L'approche de la thermodynamique repose sur l'idée qu'il est possible de découpler l'échelle microscopique – échelle siège de fluctuations chaotiques – de l'échelle macroscopique. D'une part on définit l'énergie interne U comme étant la partie de l'énergie mécanique qui décrit les interactions et les mouvements internes :

$$U \triangleq \mathcal{E}_c^* + \mathcal{E}_p^{\text{int}} \quad \heartsuit \quad (4.18)$$

D'autre part, on considère que la travail W^{ext} réunit deux modes de transfert d'énergie opérant à des échelles d'espace et de temps différentes :

1. Le transfert de travail macroscopique que nous notons W : Il s'agit du transfert de travail associé à des modes *macroscopiques de mouvement*. Ce terme est donc associé à la variation d'une grandeur d'état macroscopique extensive X en fonction d'une grandeur de contrainte extérieure macroscopique intensive Y^{ext} . De façon générale, W s'écrit :

$$W = \int_{t_A}^{t_B} Y^{\text{ext}} dX$$

Par exemple lorsque l'on comprime un gaz, le transfert W s'exprime simplement en fonction de la pression moyenne extérieure \bar{p}^{ext} appliquée en chaque point du système qui voit alors son volume macroscopique V varier :

$$W = \int_{t_A}^{t_B} -\bar{p}^{\text{ext}} dV$$

2. Le transfert thermique Q : il s'agit d'un transfert de travail qui ne peut pas se décrire en termes macroscopique. Autrement dit, par définition

$$Q \triangleq W^{\text{ext}} - W$$

Le bilan d'énergie s'écrira

$$\Delta\left(U + \frac{1}{2}mv_G^2\right) = W + Q \quad (4.19)$$

Insistons sur le fait que cette relation n'est qu'une simple définition du transfert thermique Q . L'apport majeur de la thermodynamique est de postuler un principe qui n'a rien de trivial :

L'énergie interne d'un système macroscopique à l'équilibre thermodynamique ne dépend que des variables macroscopiques d'état. De plus l'énergie interne est une fonction extensive.

Ce principe trouve une justification en Physique Statistique moyennant quelques hypothèses³⁹. Associé au second principe, il forme une science phénoménologique – la Thermodynamique – de grande importance pour la chimie, l'énergétique etc.

39: Il faut notamment supposer d'une part l'ergodicité qui, pour simplifier, signifie l'existence d'un chaos moléculaire et d'autre part une portée des interactions intermoléculaires petite devant la taille du système. Par exemple, une étoile n'obéit pas au premier principe par le fait que les interactions internes sont gravitationnelles et donc de portée infinie : l'énergie interne gravitationnelle viole en effet le premier principe par son caractère non extensif.

OSCILLATEURS MÉCANIQUES

5

Si l'on consacre un chapitre à étudier un système aussi simple qu'une masse accrochée à un ressort c'est que ce système mécanique permet d'introduire un concept important aussi bien en mécanique que dans de nombreux autres domaines de la science (chimie, physique des matériaux, électricité, génie civil etc) : l'oscillateur. L'essentiel de ce chapitre est donc consacré à l'étude de l'oscillateur harmonique en régime libre et forcé; on terminera par une introduction aux effets non linéaires.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

femto-physique.fr/mecanique/oscillateurs-mecaniques.php

5.1 Oscillateur harmonique . . .	55
Pendule élastique non amorti	55
Pendule élastique amorti . . .	57
Régime libre	58
5.2 Résonances	59
Généralités	60
Solution en régime forcé . . .	60
Résonance d'élongation . . .	62
Aspects énergétiques	62
Facteur de qualité	64
5.3 Effets anharmoniques . . .	65
Approximation harmonique	65
Anharmonicités	66

5.1 Notion d'oscillateur harmonique

Pendule élastique non amorti

Le pendule élastique est un système constitué d'un ressort de masse négligeable dont une extrémité est fixée et auquel on a attaché une masse ponctuelle m libre de se mouvoir. Le ressort a pour constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0 . De plus, nous supposons que la masse est astreinte à se déplacer suivant un axe horizontal sans frottement. On a alors un système à un degré de liberté qui est amené à osciller comme nous allons le démontrer.

Dans le référentiel d'étude considéré galiléen, la force de pesanteur est compensée par la réaction du support puisqu'il n'y a pas d'accélération verticale. Pour le mouvement horizontal, la tension du ressort produit une force de rappel

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x$$

où ℓ désigne la longueur du ressort. La position d'équilibre correspond donc à une longueur $\ell_{eq} = \ell_0$. On désigne par $x = \ell - \ell_{eq}$ l'allongement du ressort par rapport à la situation au repos. Dans ce cas, on a

$$\vec{T} = -kx \vec{u}_x$$

La seconde loi de Newton donne $m d^2x/dt^2 = -kx$ d'où l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [\text{rad.s}^{-1}] \quad \heartsuit \quad (5.1)$$

Il s'agit de l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique.

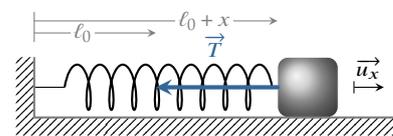


FIGURE 5.1 – Pendule élastique.

Avant de trouver les solutions de cette équation différentielle, il est intéressant d'en dégager quelques propriétés :

- L'équation (5.1) est invariante par la transformation $t \mapsto -t$ ce qui traduit la réversibilité du phénomène.
- On note également une invariance par la transformation $x \mapsto -x$ ce qui signifie que les oscillations sont symétriques autour de la position d'équilibre.
- Enfin, l'analyse dimensionnelle de l'équation différentielle montre que $[\omega_0] = T^{-1}$: il existe donc une durée de l'ordre de $1/\omega_0$ qui est caractéristique du phénomène d'oscillation.

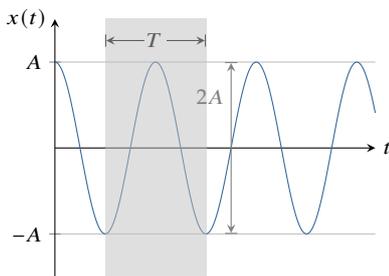


FIGURE 5.2 – Oscillations harmoniques.

La solution de l'équation différentielle (5.1) s'écrit

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Avec A et φ , deux constantes d'intégration que l'on obtient grâce à deux conditions initiales. Comme l'illustre la Figure 5.2, le système se met à osciller (si on l'écarte de sa position d'équilibre $x = 0$) avec une amplitude A et à une fréquence, dite **fréquence propre**

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \heartsuit \quad (5.2)$$

On notera que la fréquence propre dépend des caractéristiques du pendule élastique (k et m) mais non de l'amplitude des oscillations : on parle d'**isochronisme des oscillations**.

Exercice – Un conducteur de masse $m = 80$ kg monte dans sa voiture vide; les amortisseurs s'enfoncent alors de 4 cm. La masse de tout ce qui se trouve sur les ressorts est alors de 1000 kg. Dans l'approximation harmonique, le système (voiture-conducteur) se comporte comme un oscillateur. Donnez sa fréquence propre.

Rép. 0,7 Hz.

Du point de vue énergétique, cet oscillateur transforme l'énergie élastique en énergie cinétique et *vice versa*. L'énergie potentielle élastique vaut

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

alors que l'énergie cinétique s'écrit

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

On vérifie que l'énergie mécanique du pendule élastique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} kA^2$ reste constante puisque les forces qui travaillent sont conservatives.

À retenir

L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est proportionnelle au carré de l'amplitude.

Pendule élastique amorti

En réalité, la présence des frottements dissipe l'énergie initialement fournie à l'oscillateur. On assiste alors à un phénomène d'amortissement qui se caractérise,

1. soit par une diminution de l'amplitude des oscillations au cours du temps;
2. soit par un retour à l'équilibre sans oscillation.

La modélisation des forces de frottement est plus ou moins complexe :

- Pour des frottements de type visqueux, on choisit généralement, en première approximation, un modèle de frottement linéaire en vitesse : $f = -\alpha v$. Parfois une modélisation plus réaliste exige d'utiliser un modèle quadratique du type $f = -\alpha |v| v$ ce qui présente l'inconvénient de donner une équation différentielle non linéaire.
- Pour des frottements solides, on utilisera les lois d'Amontons-Coulomb sur le frottement⁴¹.

41: cf. Chapitre 2.

Nous nous contenterons ici de traiter le pendule élastique en présence de frottements visqueux modélisés par $f = -\alpha \dot{x}$ où α désigne le coefficient de frottement. L'équation du mouvement s'écrit

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

et, si l'on pose

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ [rad.s}^{-1}\text{]} \quad \text{et} \quad 2\lambda = \frac{\alpha}{m} \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

elle devient

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.3)$$

C'est l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique linéairement amorti. Par rapport à l'oscillateur harmonique on note la présence d'un terme supplémentaire ($2\lambda\dot{x}$) que l'on appelle **terme dissipatif** car à l'origine de la dissipation d'énergie. Le coefficient λ est appelé **coefficient d'amortissement**, et l'analyse dimensionnelle de l'équation montre que λ est homogène à l'inverse d'un temps. Nous verrons ultérieurement que ce temps représente l'ordre de grandeur du temps d'amortissement des oscillations (quand il y en a). *In fine*, le comportement d'un oscillateur harmonique linéairement amorti est complètement décrit par la donnée de ω_0 et λ puisque l'équation différentielle s'écrit

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \heartsuit \quad (5.4)$$

Quelques remarques sur l'équation.

- On retrouve l'oscillateur harmonique lorsque $\lambda \rightarrow 0$. Plus λ est petit donc, moins l'oscillateur est amorti.
- L'équation (5.4) n'est plus invariante par la transformation $t \mapsto -t$ ce qui traduit un phénomène irréversible.

- La physique de cet oscillateur est caractérisée par deux temps caractéristiques : $1/\lambda$ donne l'ordre de grandeur de l'amortissement alors que $1/\omega_0$ donne celui de la durée entre deux oscillations.

Régime libre

L'équation (5.4) admet des solutions de la forme $x(t) = A e^{rt}$. En substituant dans l'équation différentielle on trouve que r doit vérifier l'équation caractéristique du second degré

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant vaut $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$. Suivant le signe du discriminant, on distingue trois régimes différents.

Régime pseudo-périodique : $\lambda < \omega_0$ – Dans ce cas, le discriminant de l'équation caractéristique est négatif et les racines sont complexes :

$$r = -\lambda \pm i\omega \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

La solution réelle est donc de la forme

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$

L'oscillateur oscille avec une amplitude qui s'amortit exponentiellement au cours du temps (cf. Figure 5.3). Puisque l'amplitude diminue au cours du temps, on ne peut plus parler de phénomène périodique. Cependant, il est d'usage de définir la durée T entre deux maxima successifs, qui est aussi la période de $\cos(\omega t + \varphi)$. Cette durée T est appelée **pseudo-période** et vaut

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

Là encore, la pseudo-période est indépendante de l'amplitude initiale. Toutefois on notera l'influence des frottements qui se traduit par une augmentation de la pseudo-période à mesure que λ augmente.

La Figure 5.3 illustre également l'évolution de l'énergie mécanique de l'oscillateur au cours du temps. La décroissance observée s'explique par la dissipation des forces de frottement et vérifie l'équation d'évolution

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -\alpha \dot{x}^2 \leq 0$$

Régime critique : $\lambda = \omega_0$ – Le discriminant de l'équation caractéristique est nulle et la racine est double : $r = -\omega_0$. La solution s'écrit alors

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\omega_0 t}$$

L'oscillateur atteint l'équilibre sans osciller (on dit qu'il n'y a pas de dépassement). On peut montrer que le retour à l'équilibre est ici le plus rapide sans dépassement⁴².

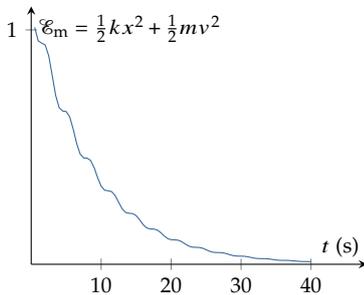
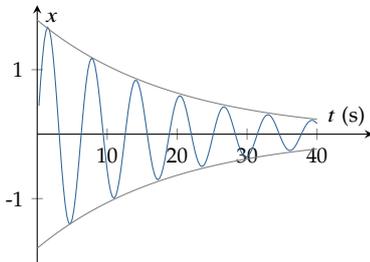


FIGURE 5.3 – Évolution de x et de l'énergie mécanique au cours du temps pour un pendule élastique en régime pseudo-périodique. Les paramètres sont :

- $m = 1 \text{ kg}$;
- $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$;
- $\lambda = \omega_0/20$.

Les conditions initiales sont $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 1,5$.

42: Si l'on souhaite que le système atteigne l'état d'équilibre le plus vite possible en limitant le dépassement à $\pm 5\%A$ par exemple, il faut se placer en régime pseudo-périodique avec un amortissement $\lambda \approx 0,7\omega_0$.

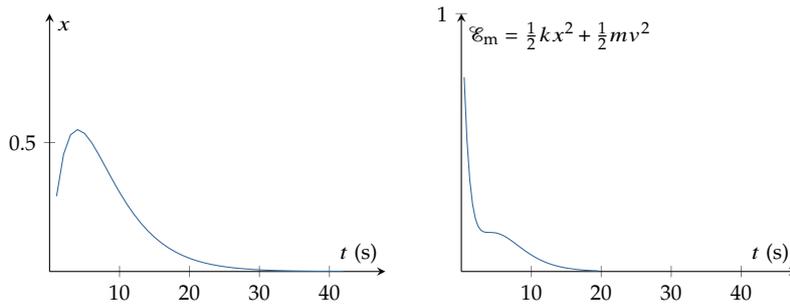


FIGURE 5.4 – Évolution de x et de l'énergie mécanique au cours du temps avec $\lambda = \omega_0$ (régime critique). Les conditions initiales restent inchangées.

Régime apériodique : $\lambda > \omega_0$ – Le discriminant de l'équation caractéristique est positif et les solutions sont réelles :

$$r_{\pm} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

La solution est donc

$$x(t) = A e^{r_+ t} + B e^{r_- t} \quad \text{avec} \quad r_{\pm} < 0$$

Les deux racines étant négatives, les deux exponentielles décroissent : l'oscillateur atteint l'équilibre sans osciller et d'autant plus lentement que l'amortissement est fort. Finalement, on retiendra les idées simples

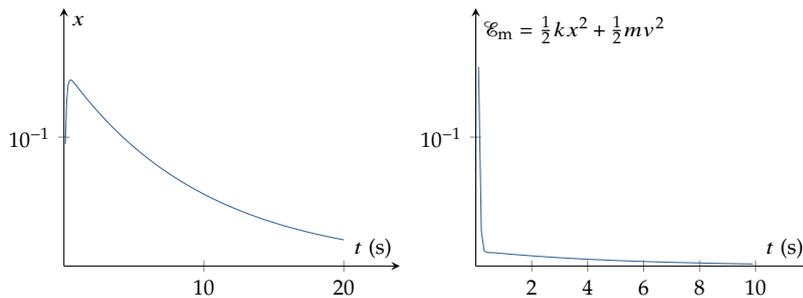


FIGURE 5.5 – Évolution de x et de l'énergie mécanique au cours du temps avec $\lambda = 5\omega_0$ (régime apériodique). Les conditions initiales sont identiques.

suivantes : plus l'amortissement est important et moins il y a d'oscillations. Un oscillateur perturbé, oscillera si le coefficient d'amortissement est inférieur à un certain seuil ($\lambda < \omega_0$).

Application : la suspension automobile

Dans le domaine de l'automobile, le contrôle de la suspension et de l'amortissement détermine le confort des passagers. Par exemple, les automobiles adoptent en général des suspensions isochrones, c'est-à-dire à fréquence propre constante de la pleine charge à la charge minimum. De plus on gagne en confort en imposant une fréquence propre de l'ordre de 1 Hz ce qui correspond à la fréquence de la marche humaine. Enfin, si l'on cherche un retour à l'équilibre rapide sans oscillation on aura intérêt à ce que l'amortisseur soit tel que $\lambda \approx 1 \text{ s}^{-1}$.

5.2 Résonances

Certains systèmes présentent, lorsqu'ils sont soumis à une excitation sinusoïdale, une réponse maximale pour une ou plusieurs fréquences caractéristiques (les *modes propres*). On parle de *résonance* et ces systèmes

sont appelés *résonateurs*. L'oscillateur harmonique est un exemple de résonateur à un mode propre, car il présente un seul degré de liberté.

Généralités

Reprenons comme exemple le pendule élastique. Soumettons l'autre extrémité du ressort à un déplacement sinusoïdal $a \cos(\omega t)$ de fréquence $\nu = \omega/2\pi$ connue. Supposons la présence de frottements visqueux que l'on modélisera par une force $f_x = -\alpha \dot{x}$.

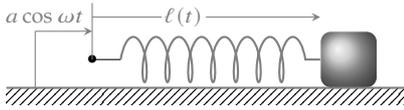


FIGURE 5.6 – pendule élastique soumis à une excitation sinusoïdale.

La relation fondamentale de la dynamique projetée suivant l'axe horizontal donne

$$m\ddot{x} = -k(\ell - \ell_0) - \alpha \dot{x}$$

Fixons l'origine des x à la position de repos du régime libre. On a donc $a \cos \omega t + \ell = \ell_0 + x$ d'où l'équation du mouvement

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{ka}{m} \cos(\omega t)$$

équation de la forme :

$$\underbrace{\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x}_{\text{oscillateur}} = \underbrace{\omega_0^2 a \cos(\omega t)}_{\text{excitation}} \quad \heartsuit \quad (5.5)$$

avec ω_0 la pulsation propre et λ le coefficient d'amortissement. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire avec un second membre sinusoïdal dont la solution se décompose en deux termes.

1. L'un étant la solution particulière, s'exprime comme un signal sinusoïdal de pulsation ω ; c'est le **régime forcé**.
2. L'autre terme, que nous désignons par **régime transitoire**, correspond à la solution de l'équation homogène. On a vu qu'il y a trois régimes distincts selon la valeur de λ . Dans tous les cas réalistes, la présence de termes dissipatifs – même faibles – entraîne la disparition du régime transitoire (d'où son nom). Passé ce délai, seul persiste le régime sinusoïdal forcé.

Dans toute la suite, nous supposons que le régime transitoire est complètement dissipé et que seul persiste le régime forcé :

$$x(t) = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad t \gg \tau_{\text{amortissement}}$$

Solution en régime forcé

Il s'agit ici de déterminer les expressions des amplitudes a_1 et a_2 en fonction de la pulsation ω . La méthode classique consiste à remplacer $x(t)$ par $a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t)$ dans l'équation différentielle pour en déduire les valeurs de a_1 et a_2 :

$$\cos(\omega t) \left[a_1 (\omega_0^2 - \omega^2) + 2\lambda \omega a_2 \right] + \sin(\omega t) \left[a_2 (\omega_0^2 - \omega^2) - 2\lambda \omega a_1 \right] = \omega_0^2 a \cos(\omega t)$$

d'où l'on tire deux équations

$$a_1 (\omega_0^2 - \omega^2) + 2\lambda\omega a_2 = \omega_0^2 a \quad \text{et} \quad a_2 (\omega_0^2 - \omega^2) - 2\lambda\omega a_1 = 0$$

Ce système d'équations a pour solution

$$a_1 = a \frac{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2} \quad \text{et} \quad a_2 = a \frac{2\lambda\omega\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}$$

En général, on préfère écrire les solutions harmoniques sous la forme $A \cos(\omega t + \varphi)$. En utilisant l'identité

$$a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ \tan \varphi &= -a_2/a_1 \end{cases}$$

l'élongation s'écrit finalement $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ avec

$$A = \frac{a\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Méthode des complexes

La représentation complexe est un outil très pratique lorsqu'il s'agit de rechercher le régime forcé d'un système linéaire soumis à une excitation sinusoïdale. Illustrons son emploi dans l'étude de l'oscillateur harmonique en régime forcé dont l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 a \cos \omega t$$

Associons à cette équation, l'équation similaire

$$\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 a \sin \omega t$$

La variable complexe $\underline{x} \triangleq x + iy$ vérifie donc l'équation différentielle :

$$\boxed{\ddot{\underline{x}} + 2\lambda\dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 a e^{i\omega t}} \quad (5.6)$$

Ainsi, pour obtenir $x(t)$, une méthode consiste à résoudre l'équation complexe 5.6 puis à prendre la partie réelle de \underline{x} . Cette méthode facilite grandement les calculs lorsqu'il s'agit de rechercher le régime forcé. En effet, la solution particulière est de la forme $\underline{x} = \underline{A}e^{i\omega t}$. Or,

$$\dot{\underline{x}} = i\omega \underline{A}e^{i\omega t} = i\omega \underline{x}$$

On voit ici tout l'intérêt de la notation complexe : la dérivation se ramène à une multiplication par $i\omega$. Par substitution dans l'équation différentielle on obtient

$$\underline{A} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\lambda\omega \right] = \omega_0^2 a \quad \text{d'où} \quad \underline{A} = \frac{\omega_0^2 a}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\lambda\omega}$$

Le nombre complexe $\underline{A} = Ae^{i\varphi}$ est appelé **amplitude complexe** et contient les deux informations que nous recherchons : l'amplitude A (son module)

Rappels mathématiques : Soit le nombre complexe $\underline{z} = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. \underline{z} peut s'écrire en notation polaire $\underline{z} = |\underline{z}|e^{i\varphi}$ où $|\underline{z}|$ désigne le module et $\varphi = \arg \underline{z}$ l'argument donnés par

$$\begin{cases} |\underline{z}| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan \varphi &= b/a \\ \cos \varphi &= a/|\underline{z}| \end{cases}$$

Soient \underline{z}_1 et \underline{z}_2 deux nombres complexes. On a alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} \right| &= \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|} \\ \arg(\underline{z}_1/\underline{z}_2) &= \arg \underline{z}_1 - \arg \underline{z}_2 \end{aligned}$$

et le déphasage φ (son argument) :

$$A = \frac{a\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{2\lambda\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad \text{avec} \quad \varphi \in [-\pi, 0]$$

Résonance d'élongation

Étudions maintenant l'évolution de l'amplitude des oscillations en fonction de la fréquence imposée par l'excitation. Rappelons le résultat précédent :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad A = \frac{a\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}}$$

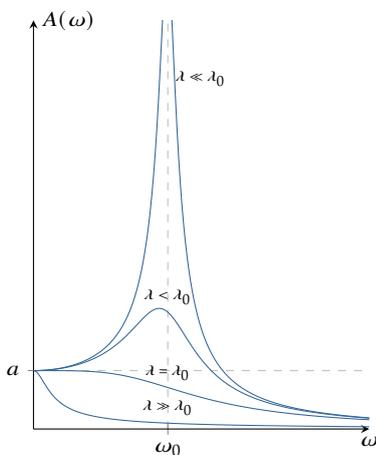


FIGURE 5.7 – Réponse fréquentielle de l'amplitude d'un oscillateur vis à vis d'une excitation sinusoïdale.

La Figure 5.7 représente l'évolution de A en fonction de la pulsation pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement. On constate que si l'amortissement est suffisamment faible, l'amplitude des oscillations passe par un maximum : c'est la **résonance en élongation**. On montre sans difficulté que :

- la pulsation de résonance vaut $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$;
- la résonance n'a donc lieu que si le coefficient d'amortissement est en dessous d'un certain seuil : $\lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0 = \lambda_0$;
- si $\lambda \ll \lambda_0$, la fréquence de résonance s'identifie avec la fréquence propre : $\omega_r \simeq \omega_0$;
- plus l'amortissement est faible plus la résonance est aigüe.
- lorsque $\lambda = \lambda_0$, l'amplitude des oscillations vaut a sur une grande plage de fréquence (à basse fréquence), ce qui confère au ressort un comportement identique à celui d'une tige rigide.
- Enfin, si $\lambda > \lambda_0$, le phénomène de résonance disparaît.

Application

L'amplification des oscillations d'élongation à la résonance peut être à l'origine d'effets néfastes comme la destruction d'habitations suite à un séisme. Elle peut aussi être recherchée pour construire des appareils sensibles à l'instar des sismographes.

Aspects énergétiques

Pour entretenir les oscillations d'un oscillateur harmonique il faut fournir de l'énergie comme nous allons le montrer et ceci, d'autant plus que les frottements sont importants.

Reprenons l'étude du pendule élastique mis en mouvement par une excitation harmonique, en considérant le système {ressort+masse}. Ce système est soumis à deux forces extérieures :

1. la force \vec{f}_{op} qu'exerce l'opérateur pour entretenir le forçage sinusoïdal ;

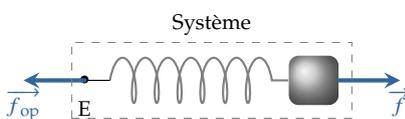


FIGURE 5.8 – Forces extérieures agissant sur le système masse-ressort.

2. la force de frottement $\vec{f} = -\alpha \dot{x} \vec{u}_x$ qui agit sur la masse.

Les forces de tension élastique sont conservatives et internes au système. En vertu du théorème de l'énergie mécanique, on a

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}^{nc} = \mathcal{P}_{op} + \mathcal{P}_{frottement}$$

où \mathcal{P}_{op} représente la puissance fournie par l'opérateur, et $\mathcal{P}_{frottement}$ celle de la force de frottement. Prenons la moyenne de cette relation sur une période

$$\overline{\mathcal{P}_{op}} + \overline{\mathcal{P}_{frottement}} = \overline{\frac{d\mathcal{E}_m}{dt}} = 0$$

On obtient donc la relation $\overline{\mathcal{P}_{op}} + \overline{\mathcal{P}_{frottement}} = 0$ qui traduit le fait, qu'en moyenne, l'opérateur doit fournir de l'énergie pour compenser la dissipation d'énergie par les frottements.

Poursuivons notre calcul. La force de frottement développe une puissance moyenne

$$\overline{\mathcal{P}_{frottement}} = \overline{\vec{f} \cdot \vec{v}} = -\alpha \overline{\dot{x}^2}$$

En régime sinusoïdal forcé, on a trouvé

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{soit} \quad \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

In fine, le dispositif exciteur fournit une puissance moyenne

$$\overline{\mathcal{P}_{op}} = \alpha A^2 \omega^2 \underbrace{\overline{\sin^2(\omega t + \varphi)}}_{1/2} = \frac{1}{2} \alpha A^2 \omega^2$$

Puissance fournie à un oscillateur entretenu

En régime sinusoïdal forcé, la puissance moyenne fournie par le dispositif exciteur est proportionnelle au carré de l'amplitude de vitesse ($V = A\omega$) et au coefficient de frottement.

La puissance fournie obéit également à un phénomène de résonance. En effet, en remplaçant A par son expression, on trouve

$$\overline{\mathcal{P}_{op}} = \frac{1}{2} \alpha \omega_0^4 a^2 \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2}$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par $(2\lambda\omega)^2$ et en remplaçant α par $2m\lambda$, on obtient

$$\overline{\mathcal{P}_{op}} = \frac{\mathcal{P}_{max}}{1 + \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\lambda\omega}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}_{max} = \frac{1}{4} \frac{m\omega_0^4 a^2}{\lambda} \quad (5.7)$$

Cette puissance évolue suivant une courbe en cloche (Figure 5.9). On observe un phénomène de résonance lorsque $\omega = \omega_0$ et le maximum est d'autant plus important que l'amortissement est faible.

Pour un signal périodique $f(t)$ de période T , la moyenne vaut

$$\overline{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Si $g = \frac{df}{dt}$ est la dérivée d'une grandeur périodique, alors

$$\overline{g} = \frac{1}{T} [f(t)]_0^T = 0$$

La puissance est négative, car les forces de frottement travaillent toujours en résistance ici.

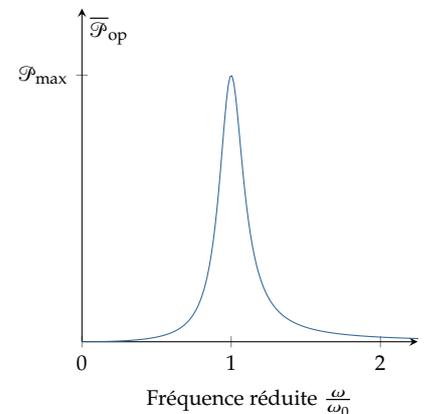


FIGURE 5.9 – Évolution fréquentielle de la puissance absorbée par l'oscillateur.

Résonance de puissance

La puissance absorbée par un oscillateur présente une résonance lorsque la fréquence excitatrice coïncide avec la fréquence propre de l'oscillateur. Le transfert de puissance est d'autant plus important que le coefficient d'amortissement est faible.

Facteur de qualité

43: La puissance étant proportionnelle au carré de l'amplitude de vitesse, la bande passante correspond à l'intervalle pour lequel la réponse en vitesse est comprise entre V_{\max} et $V_{\max}/\sqrt{2}$.

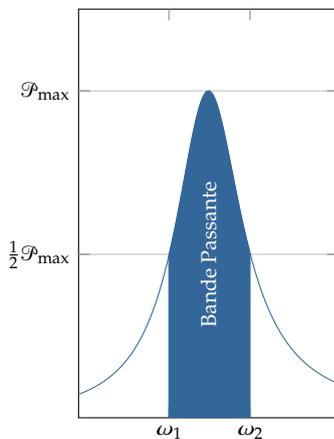


FIGURE 5.10 – Bande passante.

Le spectre en puissance de l'oscillateur présente une largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ que l'on appelle *bande passante*⁴³. Cet intervalle s'exprime, soit en rad/s, soit en hertz ($\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi$).

Les pulsations ω_1 et ω_2 qui délimitent la bande passante vérifient l'équation

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\lambda\omega} = \pm 1 \quad \text{soit} \quad \omega^2 \pm 2\lambda\omega - \omega_0^2 = 0$$

les solutions positives sont

$$\omega_1 = -\lambda + \sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \lambda + \sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2}$$

Ainsi, la bande passante (en pulsation) est donnée par $\Delta\omega = 2\lambda$.

On définit le *facteur de qualité* Q d'un résonateur comme le quotient de la fréquence de résonance et de la bande passante :

$$Q \triangleq \frac{\nu_0}{\Delta\nu} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \quad \heartsuit \quad (5.8)$$

44: Q est aussi appelé *facteur d'acuité de la résonance*.

Le facteur de qualité mesure la finesse de la résonance⁴⁴. On trouve ici

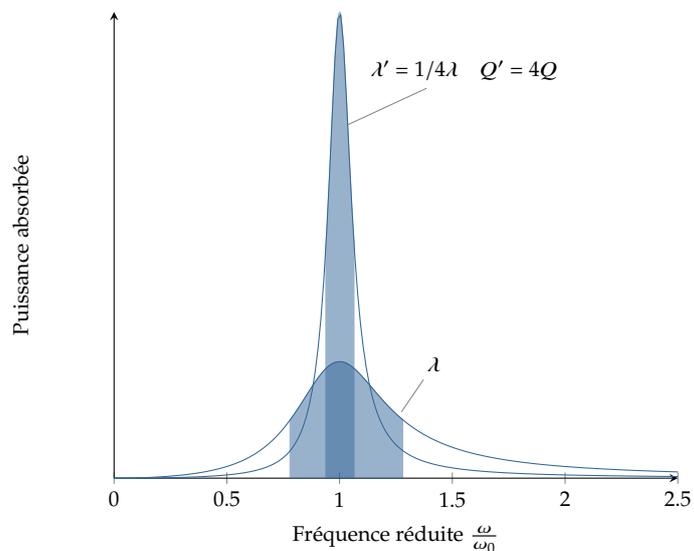


FIGURE 5.11 – Influence du coefficient d'amortissement sur la bande passante.

$Q = \omega_0/(2\lambda)$. La résonance est donc d'autant plus aigüe que l'amortissement est faible, comme on peut le voir sur la Figure 5.11. Autrement

dit, un oscillateur qui possède une réponse fréquentielle très sélective est aussi un oscillateur qui possède un grand temps de réponse : **sélectivité et inertie vont de paire.**

Un oscillateur de grand facteur de qualité est un résonateur qui agit comme un filtre très sélectif. La Table 5.1 indique quelques résonateurs courants.

Remarque : on a choisit dans ce cours de caractériser un oscillateur harmonique linéairement amorti par sa pulsation propre ω_0 et son coefficient d'amortissement λ . En régime forcé son comportement est régi par l'équation différentielle

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

On peut choisir d'autres jeux de paramètres comme par exemple $(\omega_0, \Delta\omega)$ ou (ω_0, Q) ce qui donne les équations différentielles équivalentes

$$\ddot{x} + \Delta\omega\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

TABLE 5.1 – Facteur de qualité de quelques résonateurs

Oscillateur	Q
Circuit RLC sélectif	~ 100
Diapason	$\sim 10^3$
Terre (tremblement de terre)	$\sim 10^3$
Corde de guitare	$\sim 10^3$
Oscillateur à quartz	$10^4 - 10^6$
Atome excité	$\sim 10^7$

5.3 Effets anharmoniques

Approximation harmonique

Considérons un système mécanique conservatif à un degré de liberté x dans une situation d'équilibre stable. L'énergie potentielle présente donc un puits de potentiel centré sur la position d'équilibre. Admettons que l'énergie mécanique se mette sous la forme

$$\frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 + \mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_m \tag{5.9}$$

L'approximation harmonique consiste à approcher le puits de potentiel par la parabole⁴⁵ osculatrice. En effet, au voisinage d'un équilibre, un développement de l'énergie potentielle à l'ordre deux, donne

$$\mathcal{E}_p \simeq \mathcal{E}_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}\kappa(x - x_{eq})^2 \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}(x_{eq}) > 0$$

En traduisant la conservation de l'énergie mécanique par $d\mathcal{E}_m/dt = 0$, on obtient $\mu\ddot{x} + \kappa(x - x_{eq}) = 0$. Si l'on désigne par $X = x - x_{eq}$ l'écart à l'équilibre, on obtient l'équation différentielle

$$\ddot{X} + \frac{\kappa}{\mu}X = 0 \tag{5.10}$$

caractéristique d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} \quad \heartsuit \tag{5.11}$$

45: à condition que le puits de potentiel soit de courbure non nulle.

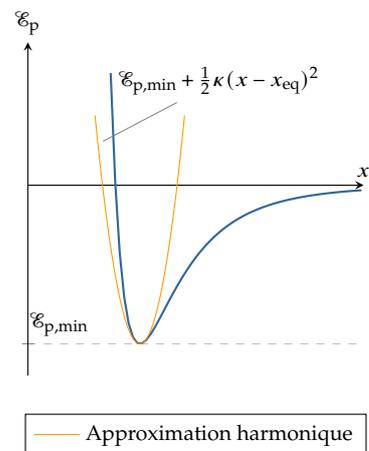


FIGURE 5.12 – Puits de potentiel approché, au voisinage du minimum, par une parabole.

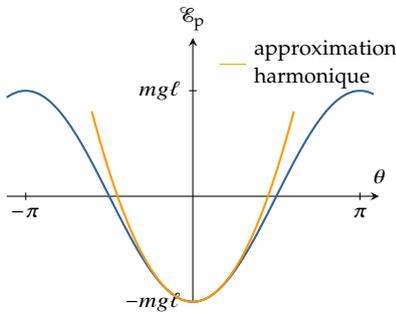


FIGURE 5.13 – Approximation harmonique du pendule simple.

46: Si $\kappa < 0$, les solutions de l'équation (5.10) sont divergentes (Ae^{rt} avec $r > 0$) ce qui correspond à une position d'équilibre instable. On retrouve donc l'idée qu'un état d'équilibre instable est associé à un profil d'énergie potentiel présentant un maximum local.

Exemple : le pendule rigide

Considérons un pendule simple rigide de masse m et de longueur ℓ astreint à évoluer dans un plan vertical. Il s'agit d'un système à un degré de liberté (θ désigne l'écart angulaire) d'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p = -mg\ell \cos \theta$ présentant un puits de potentiel symétrique et centré en $\theta = 0$. Si l'on communique au pendule une énergie faible, celui-ci développera un régime d'oscillations quasi harmoniques puisque l'on peut approcher le puits de potentiel par une parabole ($\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$) :

$$\mathcal{E}_p \approx \frac{1}{2}mg\ell\theta^2 + C^{\text{te}} \implies \kappa = mg\ell$$

Alors que l'énergie cinétique s'écrit

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \implies \mu = m\ell^2$$

Ainsi, au voisinage de $\theta = 0$, on a $\ddot{\theta} + \frac{\kappa}{\mu}\theta = 0$. L'angle oscille de façon harmonique à la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ valeur indépendante de la masse et de l'amplitude des oscillations. Cette dernière propriété n'est valable que dans l'approximation harmonique, c'est-à-dire pour les petits angles.

Ainsi, pour de petites elongations autour de l'équilibre, un puits de potentiel présentant un courbure κ positive⁴⁶, donnera lieu à un comportement d'oscillateur harmonique. Cette « approximation linéaire » est par exemple utilisée pour décrire les vibrations moléculaires.

Anharmonicités

Comme nous venons de le voir, l'approximation harmonique constitue souvent la première approche lorsque l'on étudie les petites oscillations autour d'un équilibre stable. En revanche, pour les grandes amplitudes on sort du domaine de validité de cette approximation ce qui se traduit par l'apparition dans l'équation différentielle de termes supplémentaires non linéaires dit *termes anharmoniques*.

De manière générale, de tels oscillateurs peuvent se décrire par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + f(x) = 0 \quad \text{avec} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad (5.12)$$

où x représente l'écart à la position d'équilibre et le terme $2\lambda\dot{x}$ modélise l'amortissement. Cette équation peut s'interpréter comme l'équation du mouvement d'un point matériel de masse unité et de coordonnée x , dans un puits de potentiel

$$\mathcal{E}_p(x) = \int_0^x f(x') dx'$$

La stabilité de l'oscillateur est garantie si $\mathcal{E}_p(x)$ présente un minimum en $x = 0$.

Cas du pendule simple – Le pendule simple, comme nous l’avons vu, est régi par une équation différentielle du type (5.12) avec

$$f(x) = \sin x$$

Le puits de potentiel a tendance à s’évaser par rapport au puits parabolique associé à l’approximation harmonique ce qui signifie que les oscillations ralentiront par rapport à des oscillations harmoniques. En d’autres termes, la période des oscillations, contrairement au cas de l’oscillateur harmonique, augmente avec l’amplitude θ_{\max} des oscillations. C’est ce qu’illustre la figure ci-contre en traçant l’évolution de la période T en unité de T_0 (période dans l’approximation harmonique) en fonction de l’amplitude des oscillations θ_{\max} .

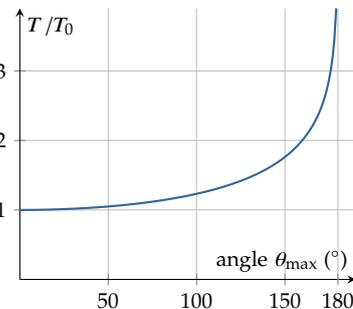


FIGURE 5.14 – Influence de l’amplitude sur la période d’un pendule simple.

Cas de la liaison moléculaire – Considérons une molécule diatomique comme H_2 , O_2 , CO , etc. Bien que la stabilité d’un tel édifice relève de la mécanique quantique, il est souvent plus simple, moyennant quelques approximations, de décrire la liaison de façon phénoménologique. Philip Morse a proposé une énergie potentielle qui décrit de façon satisfaisante la structure vibrationnelle d’une molécule diatomique. Dans ce modèle, les deux atomes interagissent *via* une énergie potentielle d’interaction, dit *potentiel de Morse*, de la forme

$$\mathcal{E}_p = E_0 \left(e^{-2ax} - 2e^{-ax} \right)$$

$$\mathcal{E}_p = E_0 \left(e^{-2ax} - 2e^{-ax} \right)$$

où x désigne l’écart à l’équilibre et E_0 l’énergie de dissociation de la molécule. Le profil de ce potentiel (Figure 5.15) montre clairement une dissymétrie.

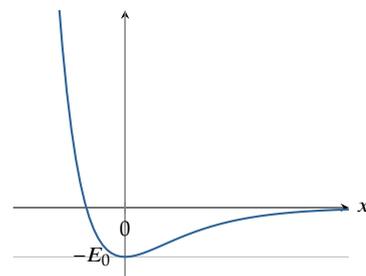


FIGURE 5.15 – Potentiel de Morse.

Lorsque l’on développe $\mathcal{E}_p(x)$ au voisinage de 0, on trouve

$$\mathcal{E}_p \approx -E_0 + \frac{1}{2}\kappa x^2 - \epsilon x^3 \quad \text{avec} \quad \kappa = 2E_0 a^2 \quad \text{et} \quad \epsilon = \kappa a / 2$$

ce qui donne une équation du mouvement du type ⁴⁷.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \beta x^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\kappa/\mu} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{3}{2} a \omega_0^2$$

En conséquence, les oscillations ne sont plus symétriques autour de $x = 0$ et la moyenne temporelle \bar{x} varie avec l’énergie de l’oscillateur. En effet, on peut montrer à l’aide d’une méthode perturbative (cf. Annexe page 149) que

$$\bar{x} = \frac{\beta x_{\max}^2}{2\omega_0^2} = \frac{3a}{4} x_{\max}^2$$

En d’autres termes, la longueur de la liaison moléculaire augmente avec l’énergie emmagasinée dans la liaison⁴⁸. C’est ce même phénomène qui explique le phénomène de dilatation des cristaux : quand la température augmente, l’énergie de vibration atomique augmente également ce qui accroît la distance intermoléculaire par effet anharmonique.

47: L’énergie cinétique s’écrit $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2$ avec μ la masse réduite du système diatomique (cf. Chapitre 9).

48: Dans l’approximation harmonique, l’énergie d’un oscillateur varie comme le carré de l’amplitude.

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE

6

Le moment cinétique est une grandeur fondamentale en mécanique. Il joue un rôle important notamment dans les systèmes en rotation. Le théorème du moment cinétique découle directement du principe fondamental de la dynamique et, par conséquent, ne possède pas plus d'information. En revanche il permet de dégager rapidement une intégrale première du mouvement dans le cas des systèmes à force centrale par exemple.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/mecanique/theoreme-du-moment-cinetique.php>

- 6.1 Moment d'une force 69
 - Définitions 69
 - Notion de bras de levier . . 70
- 6.2 Moment cinétique 71
 - Définitions 71
 - Système de points 72
 - Importance du moment cinétique en physique 73
- 6.3 TMC 73
 - Cas du point matériel 74
 - Cas des systèmes de points 74
- 6.4 Applications 75
 - Mouvement à forces centrales 75
 - Solide en équilibre 76
 - Rotation autour d'un axe . . 77

6.1 Moment d'une force

Définitions

Considérons une force \vec{f} qui s'applique en un point M. Par définition, le moment $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f})$ de la force \vec{f} en un point A est le vecteur

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) \triangleq \vec{AM} \wedge \vec{f} \quad \heartsuit \quad (6.1)$$

Le moment d'une force s'exprime en N.m.

Supposons un système soumis à N forces \vec{f}_i dont les droites d'action passent par le même point A. On dit que **les forces sont concourantes en A**. Dans ce cas, le moment des forces en A est nécessairement nul puisque

$$\vec{AM}_i \parallel \vec{f}_i \implies \sum_i \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_i) = \vec{0}$$

Plus intéressante est la propriété selon laquelle les actions mécaniques sont équivalentes, dans ce cas, à une seule force $\vec{F} = \sum \vec{f}_i$ appliquée en A. En effet, les forces étant concourantes en A, on peut écrire

$$\vec{f}_i = k_i \vec{AM}_i \quad \text{avec } k_i \text{ un réel}$$

Le moment des forces calculé en un point O quelconque vaut alors

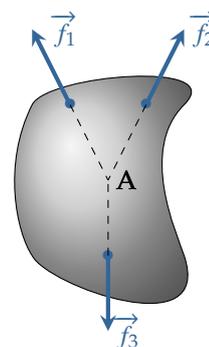


FIGURE 6.1 – Forces concourantes

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i) &= \sum_i^N \vec{OM}_i \wedge k_i \vec{AM}_i \\
 &= \sum_i^N \vec{OA} \wedge k_i \vec{AM}_i \\
 &= \vec{OA} \wedge \sum_i^N k_i \vec{AM}_i \\
 \sum_{i=1}^N \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}_i) &= \vec{OA} \wedge \sum_i^N \vec{f}_i
 \end{aligned}$$

Moment de deux forces concourantes

N forces concourantes en A se comportent comme une seule force $\vec{F} = \sum \vec{f}_i$ appliquée en A . Par conséquent, le moment de N forces concourantes de résultante nulle est nécessairement nul quel que soit le point où on le calcule.

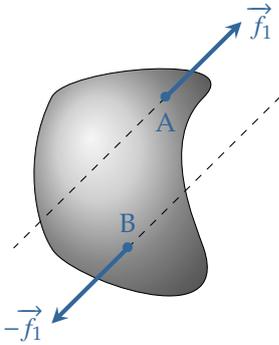


FIGURE 6.2 – Couple de forces.

Lorsqu'un système est soumis à un couple de forces opposées $\{\vec{f}_1, -\vec{f}_1\}$, appliquées en deux points distincts A et B , le moment résultant, appelé **couple** et noté $\vec{\Gamma}$ est indépendant du point où on le calcule :

$$\vec{\Gamma} = \vec{OA} \wedge \vec{f}_1 + \vec{OB} \wedge (-\vec{f}_1) = +\vec{BA} \wedge \vec{f}_1$$

Ce couple n'est nul que si le couple de forces est concourant, conformément à ce que l'on a vu précédemment. De façon générale, on parle de couple pour décrire tout ensemble d'actions mécaniques dont la résultante des forces est nulle mais dont le moment résultant est non nul. Nous réservons la notation $\vec{\Gamma}$ à ce type d'actions.

On obtient le moment en un point A à partir de celui calculé en un autre point B par la relation

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) = \vec{\mathcal{M}}_B(\vec{f}) + \vec{AB} \wedge \vec{f} \quad \heartsuit \quad (6.2)$$

valable aussi bien pour une force que pour une résultante des forces.

Notion de bras de levier

Il arrive souvent que toutes les forces soient dans un même plan. Dans ce cas, si l'on considère un point A de ce plan, tous les moments de force en A sont perpendiculaires à ce plan; il est alors naturel d'utiliser des projections.

Soit \vec{u} le vecteur unitaire orientant un axe (Δ) passant par un point A . Par définition, le moment d'une force par rapport à l'axe (Δ) est le scalaire

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) \triangleq \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) \cdot \vec{u} \quad \heartsuit \quad (6.3)$$

Ce nombre est indépendant de la position de A sur l'axe. En effet, pour un autre point A' sur l'axe, on a

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A'}(\vec{f}) \cdot \vec{u} + (\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{A'}(\vec{f}) \cdot \vec{u}$$

puisque $\overrightarrow{AA'}$ est colinéaire à \vec{u} .

Considérons maintenant une force \vec{f} dans un plan \mathcal{P} et un axe orienté (Δ) perpendiculaire à \mathcal{P} . Par définition, le **bras de levier** est la distance d entre la droite d'action de la force et l'axe (Δ) . Montrons que le

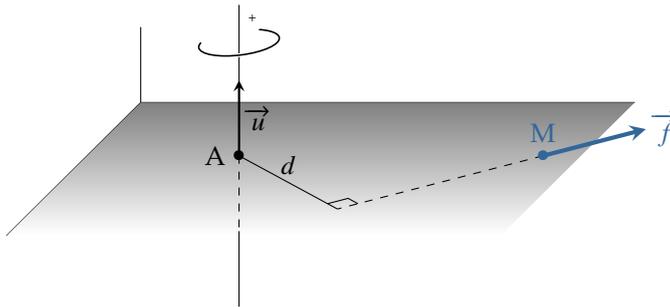


FIGURE 6.3 – Notion de bras de levier.

moment par rapport à l'axe (Δ) ne dépend que de la force et de son bras de levier :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{u} = AM f \sin(\widehat{AM, \vec{f}}) = \pm f \times d$$

On prendra le signe + lorsque la force tend à faire tourner le point M autour de l'axe dans le sens positif (associé au sens de \vec{u} par la règle du tire-bouchon) et - dans le cas contraire.

Moment d'une force par rapport à un axe Δ

Le moment d'une force \vec{f} par rapport à un axe orienté (Δ) perpendiculaire au plan contenant la force vaut

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \pm f \times d$$

où d est le bras de levier. Ce moment est positif quand la force tend à faire tourner le point M dans le sens positif ; il est négatif dans le cas contraire.

6.2 Moment cinétique

Définitions

Considérons un point matériel M de masse m , animé d'une vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ par rapport à un référentiel \mathcal{R} . Par définition, le **moment cinétique**⁵⁰ de M en un point A est le vecteur

$$\vec{L}_A(M) \triangleq \overrightarrow{AM} \wedge m \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p} \quad \heartsuit \quad (6.4)$$

50: Certains auteurs emploient le terme *moment angulaire*.

Ce vecteur, comme tous les moments, vérifie la relation analogue à (6.2) :

$$\vec{L}_A = \vec{L}_B + \vec{AB} \wedge \vec{p}$$

valable aussi bien pour un point que pour un système de points.

On définit également le moment cinétique par rapport à un axe. Si \vec{u} désigne le vecteur unitaire orientant un axe (Δ) , le moment cinétique d'un point matériel par rapport à cet axe est la projection \vec{L}_A sur l'axe :

$$L_\Delta(M) = \vec{L}_A(M) \cdot \vec{u} \quad \text{avec} \quad A \in (\Delta) \quad \heartsuit \quad (6.5)$$

Moment cinétique d'un système de points

Dans un référentiel \mathcal{R} , le moment cinétique d'un système \mathcal{S} de points matériels M_i est la somme vectorielle des moments cinétiques individuels :

$$\vec{L}_A(\mathcal{S}) = \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{v}_i \quad \text{avec} \quad \vec{v}_i = \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$$

Énonçons quelques propriétés

1. Le moment cinétique en A d'un système est relié à celui en B par une *relation torsorielle* :

$$\vec{L}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{L}_B(\mathcal{S}/\mathcal{R}) + \vec{AB} \wedge \vec{P}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \quad (6.6)$$

2. Dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , $\vec{P}^* = \vec{0}$ (cf. Chapitre 2). Par conséquent, $\vec{L}_A(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*) = \vec{L}_B(\mathcal{S}/\mathcal{R}^*)$ d'après l'équation (6.6). En d'autres termes, le moment cinétique barycentrique est indépendant du point où on le calcule. Nous le noterons désormais \vec{L}^* . Ce moment cinétique est aussi appelé **moment cinétique propre**.

Théorème de Kœnig relatif au moment cinétique

Le résultat que nous avons démontré au Chapitre 2 sur l'énergie cinétique (Théorème de Kœonig relatif à l'énergie cinétique) s'applique également au moment cinétique. En effet, considérons un système \mathcal{S} de masse m et de centre d'inertie G. Son moment cinétique s'écrit

$$\vec{L}_A(\mathcal{S}) = \sum_i \vec{AG} \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{GM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

La composition du mouvement indique que

$$\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} = \vec{v}_i^* + \vec{v}_G \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{v}_i^* = \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}^*} \\ \vec{v}_G = \vec{v}_{G/\mathcal{R}} \end{cases}$$

Il vient alors

$$\vec{L}_A(\mathcal{S}) = \vec{AG} \wedge \sum_i m_i \vec{v}_i + \sum_i m_i \vec{GM}_i \wedge \vec{v}_i^* + \left(\sum_i m_i \vec{GM}_i \right) \wedge \vec{v}_G$$

Or, d'une part $\sum m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0}$ par définition de G et d'autre part $\sum m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_G$. Par conséquent,

$$\vec{L}_A(\mathcal{S}) = \vec{L}^* + \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{v}_G \quad \heartsuit \quad (6.7)$$

Le moment cinétique d'un système de points, à l'instar de l'énergie cinétique, se décompose en deux termes : le terme barycentrique auquel s'ajoute le moment cinétique d'un point matériel de masse m situé en G. Cela constitue le **second théorème de Kœonig**.

Il vient en conséquence que le moment cinétique calculé en G s'identifie avec le moment barycentrique :

$$\vec{L}_G(\mathcal{S}) = \vec{L}^*$$

Importance du moment cinétique en physique

En mécanique classique le moment cinétique est une grandeur qui a la particularité de se conserver lorsqu'un système est soumis à un champ de forces centrales (*cf.* chapitre suivant). Cependant, c'est en mécanique quantique que le moment cinétique joue un rôle fondamental :

- Le premier modèle quantique de l'atome est du au physicien danois Niels Bohr (1913) qui eut l'idée de proposer un modèle d'atome où le moment cinétique de l'électron est quantifié : il ne peut prendre que des valeurs multiples de

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

- L'expérience de Stern et Gerlach montra que l'électron possède un moment cinétique propre quantifié, dit *moment de spin*. A l'heure actuelle, dans le modèle standard de la physique des particules, toutes les particules sont caractérisées par une charge, une masse et un moment de spin.
- Les propriétés magnétiques de la matière ne peuvent s'expliquer que dans le cadre quantique où le moment de spin joue un rôle clé. La Résonance magnétique nucléaire (RMN), l'Imagerie par Résonance Magnétique nucléaire (IRM), l'électronique de spin sont quelques exemples d'applications modernes où la notion de moment cinétique joue un rôle central.

6.3 Théorème du moment cinétique

Le théorème du moment cinétique découle directement du principe fondamental de la dynamique et ne possède donc pas plus d'information. Dans le cas des systèmes conservatifs à force centrale, il permet de dégager une seconde intégrale première qui s'interprète de façon géométrique.

Cas du point matériel

Considérons un point matériel M de masse m en mouvement dans un référentiel galiléen \mathcal{R} et soumis à une force \vec{f} . Dérivons le moment cinétique de M calculé en un point quelconque A :

$$\frac{d\vec{L}_A(M)}{dt} = \frac{d\vec{AM}}{dt} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{AM} \wedge m \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt}$$

Sachant que d'une part $d\vec{AM}/dt = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} - \vec{v}_{A/\mathcal{R}}$ et que d'autre part $m \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = \vec{f}$ (P.F.D), on obtient

$$\frac{d\vec{L}_A(M)}{dt} = \vec{AM} \wedge \vec{f} + m\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{A/\mathcal{R}} \quad (6.8)$$

Lorsque A est fixe dans \mathcal{R} , le deuxième terme se résume au moment de la force \vec{f} , ce qui constitue le théorème du moment cinétique.

Théorème du moment cinétique (TMC)

Dans un référentiel galiléen, un point matériel M soumis à une résultante de forces \vec{f} , voit son moment cinétique calculé en un point fixe A, évoluer suivant la relation cause/effet :

$$\frac{d\vec{L}_A(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}) \quad \text{avec A fixe dans } \mathcal{R}$$

En projetant cette relation suivant un axe fixe orienté (Δ), on obtient

$$\frac{dL_\Delta(M)}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{f})$$

Cas des systèmes de points

En appliquant, à chaque point matériel M_i d'un système \mathcal{S} , le théorème du moment cinétique en un point fixe A, il vient après sommation

$$\frac{d\vec{L}_A(\mathcal{S})}{dt} = \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_i^{\text{ext}} + \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{int}}$$

où $\vec{\mathcal{M}}_A^{\text{int}}$ désigne la somme des moments des forces intérieures calculée au point fixe A. Le principe des actions réciproques stipule cependant que les forces d'interactions sont opposées *et* coaxiales :

$$\begin{cases} \vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} \\ \vec{M}_i \vec{M}_j \wedge \vec{f}_{ij} = \vec{0} \end{cases}$$

En d'autres termes, les forces internes constituent des couples de force de moment nul. Ainsi la somme des moments de forces internes s'annule. Finalement, le théorème du moment cinétique pour un système de points prend la forme suivante :

Théorème du Moment Cinétique (TMC)

Dans un référentiel galiléen, nous avons montré que la variation de quantité de mouvement d'un système ne dépendait que de la résultante des forces extérieures; de la même façon, la variation du moment cinétique total ne dépend que de la somme des moments associés aux forces extérieures.

$$\frac{d\vec{L}_A(\mathcal{S})}{dt} = \sum_i \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_i^{\text{ext}} = \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} \quad \text{avec A point fixe}$$

Si l'on choisit le centre d'inertie G comme point A, la condition « A point fixe » n'est pas nécessaire. En effet, à partir de l'équation (6.8), on obtient

$$\frac{d\vec{L}_G(\mathcal{S})}{dt} = \sum_i \vec{GM}_i \wedge \vec{f}_i^{\text{ext}} + \left(\sum_i m_i \vec{v}_i \right) \wedge \vec{v}_{G/\mathcal{R}}$$

Sachant que $\sum_i m \vec{v}_i = m \vec{v}_{G/\mathcal{R}}$ il vient

$$\frac{d\vec{L}_G(\mathcal{S})}{dt} = \frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_G^{\text{ext}} \quad \heartsuit \quad (6.9)$$

Finalement, l'association du théorème du centre d'inertie et du théorème du moment cinétique permet de découpler le mouvement de \mathcal{S} en deux mouvements :

- le mouvement du centre d'inertie régi par l'équation

$$m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

- le mouvement barycentrique régi par la relation

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_G^{\text{ext}}$$

Ces deux équations vectorielles donnent six relations, insuffisantes en général pour décrire complètement le mouvement de \mathcal{S} . Cependant l'étude des solides parfaits –systèmes à six degrés de liberté– peut être réalisée complètement à l'aide de ces deux équations, auxquelles il faut éventuellement ajouter des relations de liaison liées aux contacts.

6.4 Applications

Mouvement à forces centrales

Une force est dite centrale de centre O quand, à chaque instant, la droite support de cette force passe par un *point fixe* O. Si l'on considère un système de coordonnées sphériques d'origine O, un champ de force centrale s'écrit

$$\vec{f}(M) = f(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

Par exemple, dans le référentiel géocentrique, la force de gravitation produite par la Terre sur un satellite artificiel est une force centrale à condition de supposer la Terre à symétrie sphérique.

Que dit le théorème du moment cinétique quant au mouvement d'un point matériel M soumis à une force centrale dans un référentiel galiléen ?

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = r\vec{u}_r \wedge f(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O(M) = \vec{C}^{\text{te}}$$

Ainsi, le moment cinétique se conserve en norme et en direction d'où l'on tire les trois conséquences suivantes.

1. Le mouvement est plan ! En effet, à chaque instant, le vecteur \vec{OM} est orthogonal au vecteur constant $\vec{L}_O(M)$.
2. Le mouvement étant plan, on utilise les coordonnées polaires pour repérer la position de M . Le moment cinétique s'écrit $r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$ et sa conservation se traduit par

$$r^2\dot{\theta} = C \quad \heartsuit \quad (6.10)$$

où C est une constante appelée *constante des aires*.

3. L'aire balayée par le vecteur \vec{OM} par unité de temps est constante et égale à $\frac{C}{2}$ (vitesse aréolaire). En effet, l'aire balayée par le vecteur \vec{OM} entre t et $t + dt$ vaut⁵¹

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \left\| \vec{OM}(t+dt) \wedge \vec{OM}(t) \right\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| (\vec{OM}(t) + \vec{v}_M dt) \wedge \vec{OM}(t) \right\| \\ &= \frac{1}{2} |C| dt \end{aligned}$$

Ainsi l'aire balayée par le vecteur \vec{OM} augmente à une vitesse, dite *vitesse aréolaire*,

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}$$

On retrouve ici la loi des aires énoncée par Kepler au sujet des astres du système solaire. On voit ici que cette propriété n'est pas limitée aux forces de gravitation mais propre à toutes les forces centrales.

51: Rappelons que l'aire d'un triangle (ABC) vaut $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

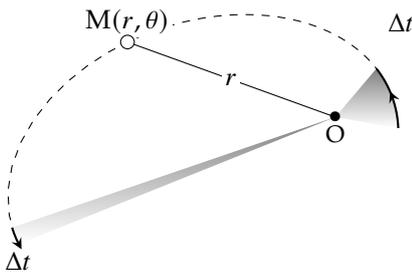


FIGURE 6.4 – Loi des aires : pour des durées égales, l'aire balayée par le rayon vecteur est la même.

Solide en équilibre

Considérons un solide \mathcal{S} en équilibre dans un référentiel \mathcal{R} galiléen. Étant au repos, le système ne possède ni quantité de mouvement, ni moment cinétique. Par conséquent,

$$\begin{cases} \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} = \vec{0} \quad \forall A \end{cases}$$

Dans le cas où seules deux forces s'appliquent en deux points A et B d'un solide, la condition d'équilibre traduit le fait que ces deux forces forment un couple de moment nul ce qui signifie que ces deux forces sont opposées et coaxiales.

Dans le cas d'un solide soumis à trois forces non parallèles ($\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$), deux d'entre elles (par exemple \vec{f}_1 et \vec{f}_2) ont nécessairement leur prolongement qui se coupent en un point A. Le système d'action est alors équivalent à deux forces \vec{f}_{12} et \vec{f}_3 avec $\vec{f}_{12} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$ s'appliquant en A. On se ramène au cas précédent où l'on a vu que l'équilibre impliquait que les deux forces sont coaxiales. Le prolongement de \vec{f}_3 passe donc aussi par A. En d'autres termes les trois forces sont concourantes en A.

Solide soumis à trois forces

Lorsqu'un solide soumis à trois forces non parallèles est au repos, ces trois forces sont de résultante nulle et concourantes en un même point.

Exercice – Une échelle de masse m et de longueur L est en équilibre contre un mur et forme un angle α avec la verticale. On suppose que le sol produit une force de frottement alors que le mur, supposé suffisamment lisse, n'en produit pas. Exprimer les forces de contact en fonction du poids $P = mg$ de l'échelle et de l'angle α .

Rép. $F_1 = mg$ et $F_2 = F_3 = \frac{1}{2}mg \tan \alpha$.

Solide en rotation autour d'un axe fixe

Supposons un solide \mathcal{S} en rotation autour d'un axe fixe orienté (Δ) à la vitesse angulaire ω ($\omega > 0$ si le solide tourne dans le sens positif). Chaque point M_i de masse m_i constituant le solide décrit un cercle de rayon $H_i M_i = r_i$ où H_i est la projection de M_i sur l'axe (Δ) . Leur moment cinétique par rapport à l'axe vaut donc

$$L_{\Delta}(M_i) = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega \quad \text{car} \quad v_i = r_i \omega$$

Par conséquent, le solide \mathcal{S} possède un moment cinétique

$$L_{\Delta}(\mathcal{S}) = I_{\Delta} \omega \quad \text{avec} \quad I_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2$$

où I_{Δ} désigne le *moment d'inertie du solide par rapport à l'axe*. Le moment cinétique est donc proportionnel à la vitesse angulaire et au moment d'inertie qui dépend non seulement de la masse totale mais aussi de sa répartition autour de l'axe de rotation. Ainsi, en vertu du théorème du moment cinétique, le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe est régi par l'équation

$$I_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}^{\text{ext}} \quad \text{avec} \quad I_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2 \quad \heartsuit \quad (6.11)$$

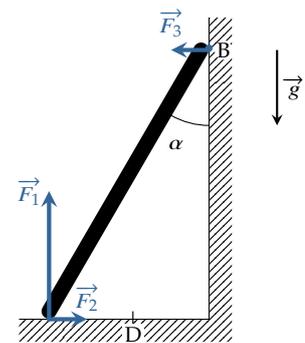


FIGURE 6.5 – Echelle contre un mur

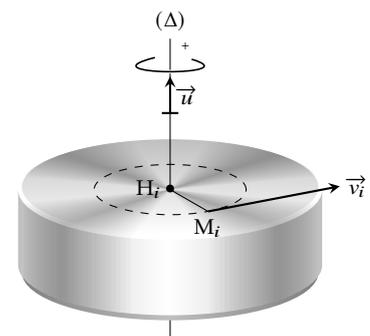


FIGURE 6.6 – Solide en rotation autour d'un axe fixe

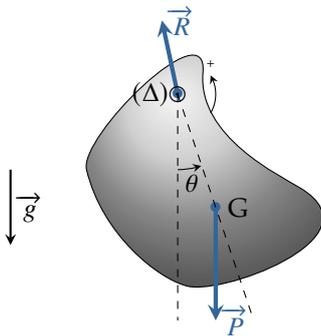


FIGURE 6.7 – Le pendule pesant.

Exemple : le pendule pesant – Considérons un pendule pesant de masse m en rotation autour d'un axe horizontal grâce à une liaison parfaite en O . Le centre de gravité est à la distance ℓ de O . Orientons l'axe de rotation de telle sorte que le sens positif des angles soit le sens trigonométrique. Le moment cinétique par rapport à l'axe vaut donc $L_{\Delta} = I_{\Delta} \dot{\theta}$. Le bilan des actions extérieures donne :

$$\text{Poids} \begin{cases} \text{appliquée en } G \\ \text{résultante } \vec{P} = m\vec{g} \\ \text{moment } \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = -mg\ell \sin \theta \end{cases} \quad \text{Contact} \begin{cases} \text{appliquée en } O \\ \text{résultante } \vec{R} \\ \text{moment } \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) = 0 \end{cases}$$

Le théorème du moment cinétique donne donc

$$\frac{d}{dt}(I_{\Delta} \dot{\theta}) = -mg\ell \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{I_{\Delta}} \sin \theta = 0$$

On reconnaît ici l'équation différentielle d'un pendule simple de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{I_{\Delta}}}$$

On retrouve bien sûr le cas particulier du pendule simple où toute la masse est concentrée en G :

$$I_{\Delta} = m\ell^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad [\text{pendule simple}]$$

Pour une barre rectiligne homogène de masse m , de longueur L , fixée en l'une de ses extrémités on obtient

$$I_{\Delta} = \frac{1}{3}mL^2 \quad \text{et} \quad \ell = \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{4\ell}} \quad [\text{barre rectiligne}]$$

MOUVEMENTS À FORCE CENTRALE

7

Ce chapitre présente une application importante des lois vues jusqu'ici : les mouvements à force centrale. Après quelques généralités, on aborde le problème de l'interaction newtonienne et notamment celui du mouvement des planètes qui fit le succès de la théorie de Newton.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/mecanique/forces-centrales.php>

7.1 Lois de conservation

On considère un point matériel M de masse m soumis à une force centrale *conservative* de centre O , point fixe d'un référentiel galiléen. Nous allons voir que le problème se résout grâce à deux relations de conservation.

Généralités

Rappelons qu'une force est dite centrale quand la droite support de cette force passe constamment par un point fixe O . Si l'on repère la position de M à l'aide d'un système de coordonnées sphériques d'origine O , on a

$$\vec{f} = f(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

La force est attractive quand $f < 0$, répulsive dans l'autre cas. Si la force centrale est conservative alors $f(r, \theta, \varphi)$ ne peut dépendre que de r . En effet, son travail élémentaire vaut

$$\delta W = \vec{f} \cdot \vec{d\ell} = f(r, \theta, \varphi) dr$$

forme différentielle qui doit être différentielle totale exacte. Ceci n'est possible que si $f(r, \theta, \varphi)$ ne dépend que de r . Dans ce cas, l'énergie potentielle associée ne dépend que de r et vérifie

$$d\mathcal{E}_p(r) = -f(r) dr \quad \heartsuit \quad (7.1)$$

Interaction gravitationnelle

La force de gravitation entre un astre fixe (massif) situé en O , à symétrie sphérique de masse m_1 et un astre mobile à symétrie sphérique de

7.1 Lois de conservation	79
Généralités	79
Moment cinétique	80
Énergie mécanique	81
Théorème de Bertrand	82
7.2 Le problème de Kepler	83
Lois de Kepler	83
Cas du mouvement circulaire	84
Ensemble des solutions	84
Troisième loi de Képler	86
Énergie	86
Vitesses cosmiques	88
Équation horaire	89
7.3 Interaction coulombienne	91
Cas attractif	91
Cas répulsif	92

masse m_2 vaut, d'après la loi de gravitation universelle

$$\vec{f}_{12} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r^2} \vec{u}_r \implies d\mathcal{E}_p = \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r^2} dr$$

d'où l'on tire l'énergie potentielle

$$\mathcal{E}_p = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r} + C^{\text{te}} \quad \heartsuit \quad (7.2)$$

Interaction coulombienne

La force électrostatique entre une charge ponctuelle fixe (charge électrique q_1) et une charge ponctuelle mobile (charge q_2) est une force centrale et s'écrit

$$\vec{f}_{12} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Lorsque q_1 et q_2 sont de même signe, la force est répulsive. C'est aussi une force conservative, d'énergie potentielle

$$\mathcal{E}_p = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + C^{\text{te}} \quad \heartsuit \quad (7.3)$$

Remarques : Ces deux forces centrales varient comme l'inverse du carré de la distance : elles sont dites *newtoniennes*.

Par ailleurs, on choisit souvent la convention $\mathcal{E}_p \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0$, ce qui permet de poser $C^{\text{te}} = 0$.

Conservation du moment cinétique

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, un point matériel soumis à une force centrale dans un référentiel galiléen voit son moment cinétique \vec{L}_O se conserver :

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = r \vec{u}_r \wedge f(r) \vec{u}_r = \vec{0} \implies \vec{L}_O(M) = \vec{C}^{\text{te}}$$

ce qui a trois conséquences :

1. le mouvement est plan ;
2. en coordonnées polaires, la conservation du moment cinétique se traduit par la relation

$$r^2 \dot{\theta} = C \quad \heartsuit \quad (7.4)$$

où C est la constante des aires déterminée par les conditions initiales ;

3. l'aire balayée par le vecteur \vec{OM} par unité de temps est constante et égale à $C/2$ (vitesse aréolaire) :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}$$

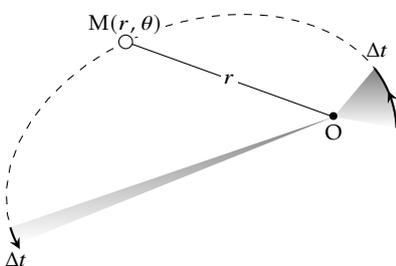


FIGURE 7.1 – Loi des aires : pour des durées égales, l'aire balayée par le rayon vecteur est la même.

Conservation de l'énergie mécanique

La force étant conservative, l'énergie mécanique se conserve :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_p(r) = \mathcal{E}_m = C^{\text{te}}$$

En coordonnées polaires, le carré de la vitesse s'écrit, en utilisant l'équation (7.4),

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$$

ce qui donne une intégrale première :

Conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + \mathcal{E}_p(r) = \mathcal{E}_m \quad (7.5)$$

Formellement, le problème est analogue à l'étude d'un point matériel à un degré de liberté (r) plongé dans un champ de force d'énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} + \mathcal{E}_p(r)$$

Finalement la résolution de l'équation différentielle (7.5) donne $r(t)$ puis $\theta(t)$ en utilisant l'équation (7.4). On peut donc - en principe - trouver la trajectoire de M, soit de façon analytique quand l'équation différentielle est soluble, soit de façon numérique. Cependant, sans résoudre complètement le problème, on peut faire une analyse qualitative à partir du profil de $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$. En effet, la forme de l'énergie potentielle effective permet de savoir si la particule restera confinée autour du centre O ou s'en éloignera au bout d'un certain temps. Par exemple, supposons que l'énergie potentielle effective ait l'allure représentée sur la Figure 7.2. Deux cas se présentent alors.

1. Si les conditions initiales sont représentées par un point P_1 d'énergie \mathcal{E}_m situé dans un puits, alors $r(t)$ oscille entre deux valeurs (cf. Chapitre 5). Et comme $r^2\dot{\theta} = C$, $\theta(t)$ augmente ou diminue suivant le signe de C . Ainsi, le point matériel décrit une orbite plus ou moins complexe autour du centre d'attraction. On dit que la particule est dans un **état lié**. Notons que si P_1 possède une énergie mécanique correspondant à la valeur du fond du puits de potentiel, r reste constant au cours du temps ainsi que $\dot{\theta}$. Le mouvement est alors circulaire uniforme.
2. Si les conditions initiales sont représentées par un point P_2 situé en dehors du puits de potentiel, alors, après un éventuel rapprochement du centre d'attraction jusqu'à une distance d'approche minimale r_{\min} , le corps va s'éloigner indéfiniment du centre de force; on dit que la particule est dans un **état de diffusion** ou **état non lié**.

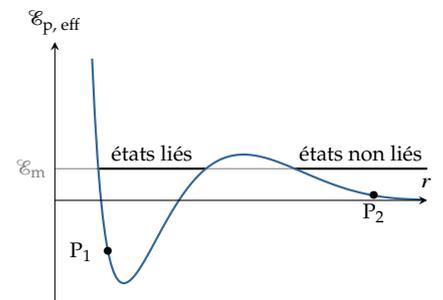


FIGURE 7.2 – Exemple de profil énergétique à un puits. Suivant la valeur de l'énergie mécanique, les valeurs de r sont bornées ou pas.

Théorème de Bertrand

Lorsque le profil de $\mathcal{E}_{p, \text{eff}}(r)$ présente un puits de potentiel, il existe une valeur r_0 de r pour laquelle la trajectoire est circulaire. Cette valeur est donnée par le minimum de $\mathcal{E}_{p, \text{eff}}(r)$ obtenue en annulant la fonction dérivée :

$$\mathcal{E}'_{p, \text{eff}}(r) = -\frac{mC^2}{r^3} + \mathcal{E}'_p(r) = 0 \implies mC^2 = r_0^3 \mathcal{E}'_p(r_0) \quad (7.6)$$

Le mouvement est uniforme puisque $r_0^2 \dot{\theta} = C$ et la période orbitale vaut

$$T_{\text{orb}} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi r_0^2}{C}$$

Imaginons maintenant que le corps en mouvement reçoive une petite quantité d'énergie de telle sorte que l'orbite circulaire est perturbée : la distance r va osciller autour de r_0 avec une période d'oscillation T_{osc} donnée par la formule (cf. Chapitre 5) :

$$T_{\text{osc}} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\kappa}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mu = m \\ \kappa = \mathcal{E}''_{p, \text{eff}}(r_0) \end{cases} \quad (7.7)$$

Or, en général, T_{orb} et T_{osc} sont dans des rapports quelconques de sorte que la trajectoire, bien que liée, ne se referme pas sur elle-même. La figure 7.3 montre quelques exemples d'orbites. Il existe cependant des

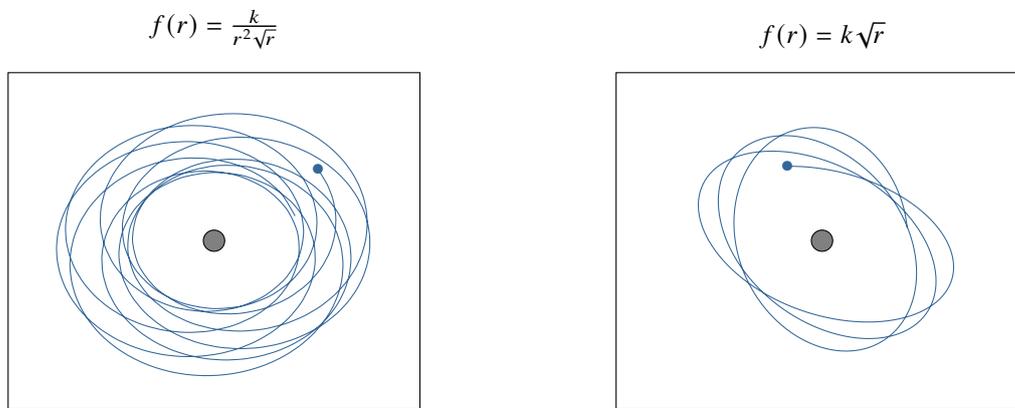


FIGURE 7.3 – Simulation numérique : exemples d'orbite d'un corps soumis à une force centrale $f(r) = \frac{k}{r^p}$ avec $p = 2,5$ et $p = -0,5$.

cas où, quelles que soient les conditions initiales (en restant dans le cas où la trajectoire est bornée), ce rapport est commensurable : $T_{\text{osc}}/T_{\text{orb}} = m/n$ avec $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. En d'autres termes, après n révolutions, $r(t)$ oscille exactement m fois ; la trajectoire se referme alors parfaitement. Analysons par exemple le cas de la force képlérienne $f = -k/r^2$ de potentiel $\mathcal{E}_p = -k/r$. L'équation (7.6) donne

$$r_0 = \frac{mC^2}{k} \quad \text{et} \quad T_{\text{orb}} = 2\pi \frac{m^2 C^3}{k^2}$$

De la même manière, l'équation (7.7) donne

$$T_{\text{osc}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\mathcal{E}''_{p, \text{eff}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{3mC^2/r_0^4 - 2k/r_0^3}} = 2\pi \frac{m^2 C^3}{k^2}$$

Ainsi, on trouve $T_{\text{osc}} = T_{\text{orb}}$. En d'autres termes, faiblement perturbée, l'orbite circulaire devient une orbite qui se referme après une révolution; nous verrons qu'il s'agit d'une ellipse.

Joseph Bertrand se posa la question de la fermeture des trajectoires dans un cadre beaucoup moins restrictif que le notre⁵³ et trouva un résultat remarquable qu'il envoya à l'académie des sciences. Ce court article[7] fut publié en 1873 et montre le théorème suivant :

Théorème de Bertrand

Il n'y a que deux types de forces centrales conservatives pour lesquelles les états liés sont fermés c'est-à-dire périodiques :

- la force centrale newtonienne $f = -k/r^2$. Dans ce cas, les orbites liées sont des ellipses dont l'un des foyers est O.
- la force élastique isotrope $f = -k r$. Les orbites liées sont également des ellipses mais cette fois-ci centrées en O.

53: Notre raisonnement n'est valable que pour de petites perturbations au voisinage de r_0 .

[7]: BERTRAND (1873), "Mécanique analytique"

7.2 Le problème de Kepler

Le problème de Kepler fait référence à l'étude du mouvement d'une planète sphérique de masse m soumise à l'attraction gravitationnelle de la part d'une étoile de masse m_\star considérée **fixe et à symétrie sphérique**⁵⁴. La seule force est centrale, newtonienne et attractive :

$$\vec{f} = -\frac{\mathcal{G}m m_\star}{r^2} \vec{u}_r$$

Bien entendu, tout corps de masse m lié gravitationnellement à un astre fixe de masse m' est soumis aux lois de Kepler; il suffit alors de remplacer $m m_\star$ par $m m'$.

Lois de Kepler

Les trois lois sur le mouvement des astres du système solaire, dites *lois de Kepler*, s'énoncent ainsi :

1. Les planètes parcourent des orbites planes, elliptiques. Le Soleil occupe l'un des foyers de l'ellipse.
2. En des durées égales, les planètes balayent des aires égales.
3. Le rapport du carré de la période de rotation au cube du demi-grand axe est identique pour toutes les planètes du système solaire.

Ces trois lois permettront à Newton de confirmer sa théorie du mouvement des corps (*Philosophia naturalis principia mathematica* 1687). Nous avons déjà vu comment la deuxième loi est une conséquence de la conservation du moment cinétique, voyons comment dériver les deux autres lois à partir des lois de Newton.

54: Tout écart à la sphéricité induit une force non centrale.

Histoire

C'est en 1609 que l'astronome allemand Johannes Kepler (1571–1630) publie son ouvrage *Astronomia Nova* (Astronomie Nouvelle) dans lequel il énonce les deux premières lois qui portent maintenant son nom. Il découvre ses lois grâce à Tycho Brahé, expérimentateur hors pair, qui fit des observations très précises, ceci sans l'aide d'aucun d'instrument d'optique. En étudiant le mouvement de la Terre autour du Soleil, Kepler découvre d'abord la loi des aires. C'est en étudiant le mouvement de la planète Mars autour du Soleil qu'il découvre la première loi. Comme souvent lors de grandes découvertes, la chance a joué un rôle non négligeable : d'une part, Kepler fit de nombreuses erreurs dans ses raisonnements qui heureusement se sont compensées; d'autre part, la mise en évidence du mouvement elliptique a été favorisée par la grande excentricité de l'orbite de Mars (l'orbite de Mars est 5 fois plus excentrique que celle de la Terre). La troisième loi ne fut découverte qu'en 1618.

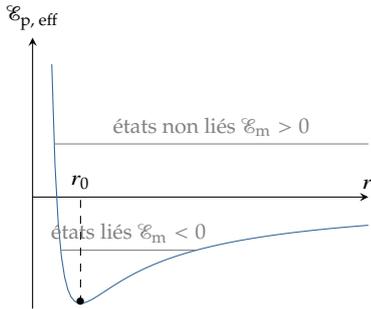


FIGURE 7.4 – Potentiel effectif képlérien

Cas du mouvement circulaire

Le profil de l'énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{p, \text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}mm_\star}{r}$$

montre que les états liés sont possibles. Si l'énergie mécanique correspond à la valeur minimale de $\mathcal{E}_{p, \text{eff}}$, alors r reste constant au cours du temps et l'orbite est circulaire. On voit de plus que cette orbite circulaire est stable.

Supposons donc que M décrit une orbite circulaire de rayon r_0 . En vertu de la conservation du moment cinétique, on a

$$r_0^2 \dot{\theta} = C$$

ce qui implique que le mouvement est circulaire uniforme (vitesse angulaire constante). La relation fondamentale de la dynamique appliquée à M donne

$$ma = m \frac{v^2}{r_0} = \frac{\mathcal{G}mm_\star}{r_0^2}$$

Il vient alors

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_\star}{r_0}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_c = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_p \quad (7.8)$$

la vitesse décroît quand r_0 croît. La période de révolution est reliée au rayon orbital par $2\pi r_0 = vT$ puisque le mouvement est uniforme. Il vient, en élevant au carré :

$$\frac{r_0^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}m_\star}{4\pi^2} \quad (7.9)$$

relation qui donne une version simplifiée de la troisième loi de Kepler.

Enfin l'énergie mécanique est constante et égale à

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{\mathcal{E}_p}{2} = -\frac{\mathcal{G}mm_\star}{2r_0}$$

Ensemble des trajectoires solutions

L'orbite circulaire est donc une solution stable particulière. L'ensemble des trajectoires possibles s'obtient à partir des deux relations de conservation :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}mm_\star}{r} = \mathcal{E}_m \\ r^2\dot{\theta} = C \end{cases}$$

Il est alors judicieux de procéder au changement de variable $u = 1/r$ afin d'obtenir l'équation polaire de la trajectoire, à savoir la relation $r(\theta)$. On a

$$\dot{r} = \frac{d(1/u)}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -C \frac{du}{d\theta}$$

Le système d'équations devient :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mC^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{mC^2u^2}{2} - \mathcal{E}mm_\star u = \mathcal{E}_m \\ \dot{\theta} = Cu^2 \end{cases}$$

Si l'on dérive la première relation par rapport à θ il vient

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{E}m_\star}{C^2}$$

équation différentielle linéaire avec un second membre constant dont la solution s'écrit

$$u(\theta) = \frac{\mathcal{E}m_\star}{C^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

c'est-à-dire

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = \frac{C^2}{\mathcal{E}m_\star} \\ e \geq 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

On reconnaît l'équation polaire $r(\theta)$ d'une conique de paramètres

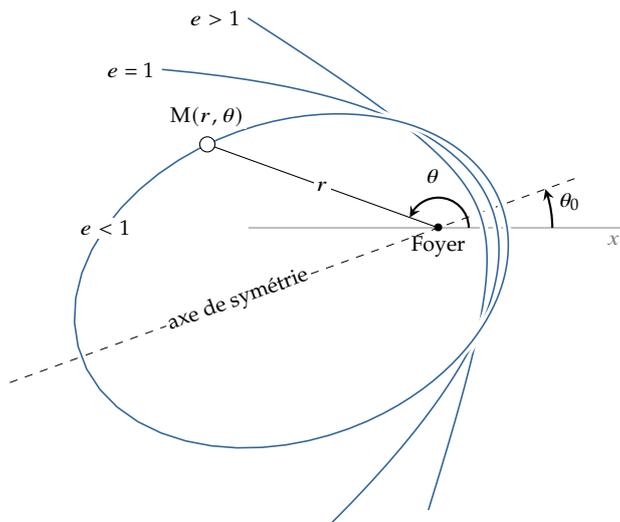


FIGURE 7.5 – Les différentes trajectoires képlériennes en fonction de l'excentricité e . On peut noter que les trajectoires se coupent lorsque $\theta - \theta_0 = \frac{\pi}{2}$; dans ce cas $r = p$.

p et e dont l'origine O est l'un des foyers et dont l'axe focal est la droite $\theta = \theta_0$ (cf. complément sur les coniques page 161). La trajectoire est donc une conique de foyer le centre d'attraction et dont la forme dépend des conditions initiales puisque p et e en dépendent. Suivant la valeur de e , on aura des états liés (l'ellipse pour $e < 1$) ou des états de diffusion (la parabole pour $e = 1$ ou l'hyperbole pour $e > 1$). Les planètes, confinées autour du Soleil, décrivent ainsi une ellipse de foyer le centre du Soleil.

On peut noter que l'équation (7.10) ne permet pas d'avoir l'équation horaire de l'astre. Il faudrait pour cela connaître l'évolution de l'angle θ au cours du temps. Cependant, la loi des aires $\dot{\theta} = C/r^2$ se met sous la forme $\dot{\theta} = f(\theta)$ – équation différentielle ordinaire du premier ordre – qu'il est toujours possible de résoudre par une approche numérique.

Troisième loi de Képler

La troisième loi est une conséquence des deux premières et ne s'applique que pour les mouvements elliptiques. Tout d'abord la loi des aires se traduit par

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2} \implies \frac{\mathcal{A}}{T} = \frac{C}{2}$$

où T est la période orbitale et \mathcal{A} l'aire de l'ellipse. Les mathématiques donnent $\mathcal{A} = \pi ab$ où a et b sont le grand et le petit-axe de l'ellipse. De plus, $b = \sqrt{ap}$ (cf. complément sur les coniques page 161) de sorte que si l'on élève au carré la loi des aires, on obtient

$$\frac{\pi^2 a^3 p}{T^2} = \frac{C^2}{4}$$

Or, selon la solution générale (7.10) $p = C^2/\mathcal{G}m_\star$ d'où l'on déduit la fameuse formule

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}m_\star}{4\pi^2} \quad \heartsuit \quad (7.11)$$

En d'autres termes, le rapport a^3/T^2 est identique pour toutes les planètes du système solaire comme l'avait constaté Kepler. La contribution de Newton est de relier cette loi à la constante de gravitation universelle et la masse du Soleil.

Détermination de la masse du Soleil – La troisième loi de Kepler relie une distance, un temps et une masse. Il est donc possible de « peser » un astre en mesurant une distance et un temps ! On peut ainsi « peser » le Soleil à partir de la période orbitale de la Terre

$$T = 1 \text{ an} = 365,26 \text{ jours solaires}$$

et du demi grand-axe de l'orbite terrestre (qu'il est possible de déterminer par une mesure de parallaxe) $a = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$. La troisième loi donne donc

$$m_\star = 4\pi^2 \frac{(149,6 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \times (365,26 \times 24 \times 3600)^2} = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Remarque : L'étude de la trajectoire des satellites artificiels a permis de mesurer *via* la troisième loi de Kepler, la constante $\mathcal{G}m_T = 398600,44 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ avec m_T masse de la Terre [8]. Cependant, on ne connaît ni \mathcal{G} , ni m_T avec une telle précision....

[8]: RIES et al. (1992), "Progress in the determination of the gravitational coefficient of the Earth"

Énergie

Allons au delà des lois de Kepler et montrons que l'énergie mécanique s'exprime simplement en fonction du grand-axe de la conique.

Reprenons les expressions de r et de \dot{r} (par souci de simplification on

choisit l'axe Ox de façon à ce que $\theta_0 = 0$).

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \\ \dot{r} = -C \frac{du}{d\theta} = \frac{Ce \sin \theta}{p} \end{cases}$$

pour les substituer dans l'énergie mécanique. Il vient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}mm_\star}{r} \\ &= \frac{1}{2} mC^2 \left[\frac{(1 + e \cos \theta)^2}{p^2} + \frac{e^2 \sin^2 \theta}{p^2} \right] - \frac{\mathcal{G}mm_\star(1 + e \cos \theta)}{p} \\ \mathcal{E}_m &= \frac{mC^2}{2p^2} (1 + e^2 + 2e \cos \theta) - \frac{\mathcal{G}mm_\star(1 + e \cos \theta)}{p} \end{aligned}$$

Or, $C^2 = \mathcal{G}m_\star p$ d'où

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}mm_\star}{2p} (1 - e^2) \quad (7.12)$$

On peut alors distinguer trois cas.

1. Pour une hyperbole, $e > 1$ et $\mathcal{E}_m > 0$. Les états ne sont pas liés et le corps s'éloigne indéfiniment du centre d'attraction avec une énergie cinétique non nulle lorsque $r \rightarrow \infty$. Le grand axe d'une hyperbole vaut $a = p/(e^2 - 1)$ d'où

$$\mathcal{E}_m = \frac{\mathcal{G}mm_\star}{2a} \quad [\text{hyperbole}]$$

2. Pour une parabole, $e = 1$ et $\mathcal{E}_m = 0$, ce qui signifie que le corps va s'éloigner du centre avec une vitesse qui tend vers 0 lorsque $r \rightarrow \infty$.

3. Pour une ellipse, $e < 1$ et $\mathcal{E}_m < 0$: le corps est lié à l'astre central conformément à la [Figure 7.4](#). Pour une ellipse, le grand axe vaut $a = p/(1 - e^2)$ ce qui donne

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}mm_\star}{2a} \quad [\text{ellipse}]$$

On pourra retenir que dans le cadre du problème de Kepler, l'énergie mécanique d'une planète en orbite autour d'une étoile de masse m_\star vaut

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}m m_\star}{2a} \quad \heartsuit \quad (7.13)$$

Exercice – En 1843, une comète est passée extrêmement près du Soleil puisque son périhélie (péricentre autour du Soleil) se situait à $d_p = 5,53 \cdot 10^{-3}$ u.a. En considérant que son orbite est parabolique, calculer la vitesse v_{\max} de la comète au périhélie. On donne la vitesse de la Terre : $u = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Rép. $v_{\max} = u \sqrt{\frac{2}{d_p/a}} = 570 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Vitesses cosmiques

Supposons que l'on veuille envoyer un satellite S de masse m en orbite autour de la Terre. Pour cela, on utilise un lanceur qui, dans une phase propulsive, donne l'énergie suffisante au satellite. Lorsque le satellite se détache du lanceur à la hauteur h , il entre dans la phase balistique avec une certaine vitesse v et une énergie \mathcal{E}_m . Si l'on assimile la Terre à un astre à symétrie sphérique de masse m_T et de rayon R_T , on a⁵⁵

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}m m_T}{R_T + h} \simeq \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}m m_T}{R_T}$$

Deux cas limites se présentent.

$\mathcal{E}_m \geq 0$: la trajectoire n'est pas liée et le satellite s'éloigne indéfiniment de la Terre⁵⁶. Dans ce cas, on a :

$$v \geq v_{\text{lib}} = \sqrt{2gR_T} \approx 11 \text{ km.s}^{-1}$$

Ce qui définit la vitesse de libération v_{lib} .

$\mathcal{E}_m < 0$: la trajectoire est une ellipse de foyer le centre de la Terre. Pour éviter une collision avec la terre, le périégée de l'orbite doit se situer à une distance $r_{\text{min}} = a(1 - e) > R_T$. Il faut donc communiquer une énergie

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}m m_T}{2a} > -\frac{\mathcal{G}m m_T}{2R_T}(1 - e)$$

Dans le cas d'une orbite circulaire - cas où l'énergie minimale est la plus faible - on a

$$\mathcal{E}_m > -\frac{\mathcal{G}m m_T}{2R_T}$$

Condition qui, traduit en termes de vitesse, donne

$$v \geq v_{\text{sat}} = \sqrt{gR_T} \approx 8 \text{ km.s}^{-1}$$

ce qui définit la vitesse de satellisation v_{sat} .

Notez que ces vitesses ne dépendent pas de la masse. Elles concernent aussi bien les astres que les molécules.

Exercice – On admet qu'un corps de masse M agit comme un trou noir si la vitesse de libération à sa surface dépasse la vitesse de la lumière dans le vide. Montrer que cela se produit lorsque le rayon de l'astre est inférieur à un certain rayon critique R_c appelé rayon de Schwarzschild que l'on calculera pour la Terre. On donne $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
 Rép. Pour la Terre, on trouve $R < \frac{2\mathcal{G}M_T}{c^2} = 9 \text{ mm}$.

55: L'altitude h est suffisamment basse pour avoir $h \ll R$ et suffisamment haute pour négliger les frottements dus à une atmosphère très raréfiée.

56: Plus exactement, elle quitte l'attraction de la Terre pour rejoindre la « sphère d'influence » d'un autre astre.

Application : l'échappement de Jeans – Ce phénomène est à l'origine de l'évaporation thermique des atmosphères planétaires. En effet, dans une atmosphère à la température T , les particules ont une vitesse moyenne de l'ordre de

$$v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

où M est la masse molaire de la molécule et R la constante de gaz parfaits. Cette vitesse est en général inférieure à la vitesse de libération v_{lib} de la planète. Cependant, la probabilité de trouver une molécule ayant une vitesse $v > v_{\text{lib}}$ augmente avec la température. Ces molécules rapides sont donc susceptibles de quitter l'atmosphère à condition de ne pas rencontrer d'obstacle sur leur chemin qui risquerait de les ramener vers la planète. C'est précisément ce qui se produit en haute atmosphère (exosphère) où la température est élevée et les collisions rares. Ainsi les molécules les plus légères ($v_{\text{th}} \propto 1/\sqrt{M}$) quittent l'atmosphère ceci à un rythme d'autant plus important que la gravité est faible et que la température est forte.

Ce phénomène est par exemple la cause de la pauvreté en hydrogène des planètes telluriques (Mars, Terre, Vénus). Le composé le plus abondant de l'univers, H_2 , bien que produit continuellement par le volcanisme, n'est qu'un composé mineur de ces planètes. Il est aussi à l'origine de la disparition complète de l'atmosphère sur Mercure et sur la Lune.

Équation horaire

Le problème de Kepler n'est pas complètement résolu au sens où nous n'avons trouvé que l'ensemble des trajectoires. Il nous reste à préciser le mouvement de M le long de cette trajectoire, c'est-à-dire à trouver la relation entre θ et le temps t . Il est commode de fixer l'origine des temps lorsque M se situe au péricentre ($\theta(0) = \theta_0$).

Dans le cas d'une orbite fermée de période T on définit la vitesse angulaire moyenne

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}$$

reliée à la loi de Kepler par $\bar{\omega}^2 a^3 = \mathcal{G}m_\star$.

Cas du cercle

Lorsque l'orbite est circulaire de rayon r_0 nous avons montré que M décrit l'orbite à une vitesse angulaire constante $\dot{\theta} = \bar{\omega}$. Ainsi, le mouvement de l'astre est régi par l'équation horaire

$$\begin{cases} r = r_0 \\ \theta = \bar{\omega}t + \theta_0 \end{cases}$$

Cas des faibles excentricités

Comme le montre la [Table 7.1](#), les planètes du système solaire ont une trajectoire elliptique de faible excentricité. On peut dans ce cas, approcher l'équation horaire par un développement d'ordre 1 en e . Pour trouver la relation $\theta(t)$, il faut résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$r^2 \dot{\theta} = C \quad \text{avec} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \text{et} \quad p = \frac{C^2}{\mathcal{G}m_\star}$$

TABLE 7.1 – Quelques éléments d'orbites des principales planètes du système solaire

Planète	grand-axe a [ua]	e
Mercure	0,387	0,2056
Vénus	0,723	0,0068
Terre	1,000	0,0167
Mars	1,524	0,0934
Jupiter	5,203	0,0485
Saturne	9,555	0,0555
Uranus	19,218	0,0463
Neptune	30,110	0,0090

où on a pris soin de choisir l'axe Ox de façon à avoir $\theta_0 = 0$. L'équation différentielle se résout par la méthode de séparation des variables :

$$\int_0^\theta \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta')^2} d\theta' = C t \quad (7.14)$$

Intégrale que l'on approche à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 de l'intégrand :

$$(1 + e \cos \theta')^{-2} \simeq 1 - 2e \cos \theta' \quad \text{d'où} \quad p^2(\theta - 2e \sin \theta) \simeq C t$$

De plus,

$$C^2 = p \mathcal{G} m_\star = p \bar{\omega}^2 a^3 = \frac{\bar{\omega}^2 p^4}{(1 - e^2)^3}$$

Finalement, en négligeant e^2 devant 1, on trouve $C/p^2 \simeq \bar{\omega}$ et l'équation horaire s'écrit

$$\theta - 2e \sin \theta = \bar{\omega} t \quad (7.15)$$

Ainsi, le mouvement des planètes du système solaire peut être décrit par le système d'équations

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \\ \theta - 2e \sin \theta = \bar{\omega} t \end{cases}$$

On peut poursuivre le développement à l'ordre 1 en e , en remarquant que $\theta = 2e \sin \theta + \bar{\omega} t$ et donc que

$$2e \sin \theta = 2e \sin(2e \sin \theta + \bar{\omega} t) = 2e \sin(2e \sin \theta) \cos(\bar{\omega} t) + 2e \sin(\bar{\omega} t) \cos(2e \sin \theta)$$

Si l'on ne garde que les termes d'ordre 1, on trouve

$$2e \sin \theta = 2e \sin(\bar{\omega} t)$$

En conclusion, si l'on néglige les termes d'ordre supérieur ou égal à deux, on trouve

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \\ \theta = \bar{\omega} t + 2e \sin(\bar{\omega} t) \end{cases}$$

Cas elliptique

Sans se restreindre aux petites excentricités, on peut obtenir l'équation horaire au prix de développements assez calculatoires. On obtient :

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \\ \tan \theta/2 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan E/2 \\ E - e \sin E = \bar{\omega} t \end{cases}$$

La variable E désigne ici l'*anomalie excentrique*. Elle se confond avec θ lorsque $e \rightarrow 0$. Pour obtenir la position du corps à chaque instant, il est nécessaire de résoudre l'équation transcendante $E - e \sin E = \bar{\omega} t$ ce qui peut être réalisé grâce à une méthode numérique.

Cas parabolique

Analysons le cas d'un astre sur une orbite parabolique arrivant au péricentre à la vitesse v_{\max} . Dans le cas, $e = 1$ et l'équation (7.14) donne

$$\int_0^\theta \frac{p^2}{(1 + \cos \theta')^2} d\theta' = \int_0^\theta \frac{p^2}{4 \cos^4 \theta'/2} d\theta' = Ct$$

Il est facile de vérifier que la primitive de $1/\cos^4 x$ est $\tan x + 1/3 \tan^3 x$ d'où :

$$\tan \theta/2 + \frac{1}{3} \tan^3 \theta/2 = \frac{2C}{p^2} t$$

Lorsque M atteint le péricentre, il se trouve à une distance minimum $r_{\min} = r(\theta = 0) = p/2$ avec une vitesse maximum \vec{v}_{\max} orthogonal au vecteur position d'où

$$C = r_{\min} v_{\max} = \frac{p v_{\max}}{2}$$

Finalement l'équation horaire d'une orbite parabolique de paramètre p s'écrit

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + \cos \theta} \\ \tan \theta/2 + \frac{1}{3} \tan^3 \theta/2 = \frac{v_{\max} t}{p} \end{cases}$$

7.3 Interaction coulombienne

On se place maintenant dans le cas où une charge ponctuelle fixe q_1 interagit avec une charge mobile q_2 via une force centrale attractive ou répulsive selon le signe du produit des charges.

$$\vec{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Cas attractif

Considérons dans un premier temps le cas où les deux charges sont opposées. Par exemple le problème de l'électron lié électriquement à un proton 1836 fois plus lourd et donc quasiment fixe, peut être un point de départ pour modéliser l'atome d'hydrogène, si l'on accepte de le décrire dans un cadre newtonien⁵⁷.

Il est clair que le problème mathématique est formellement identique au problème de Kepler, il suffit simplement d'opérer le changement suivant :

$$-Gm m_\star \leftrightarrow \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$$

La particule de charge q_2 décrit donc une conique dont un des foyers coïncide avec la charge q_1 et dont l'équation est donnée par

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = -\frac{4\pi\epsilon_0 m C^2}{q_1 q_2} \\ e \geq 0 \end{cases}$$

57: Rigoureusement, la physique de l'atome d'hydrogène et des autres éléments de la classification périodique relève de la mécanique quantique.

et l'énergie vaut

$$\mathcal{E}_m = \frac{q_1 q_2}{8\pi\epsilon_0 p} (1 - e^2)$$

Cas répulsif

Plaçons nous dans le cas où les deux charges sont de même signe : $q_1 q_2 > 0$. L'énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{p, \text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

étant une fonction monotone décroissante montre que les états liés sont impossibles : la particule chargée, après une éventuelle approche du centre répulsif, va nécessairement s'en éloigner définitivement. En reprenant la démarche utilisée pour le problème de Kepler, on trouve que la solution générale s'écrit

$$r = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_0) - 1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = \frac{4\pi\epsilon_0 m C^2}{q_1 q_2} \\ e > 1 \end{cases}$$

Ici $r > 0$ implique $e > 1$: la trajectoire est donc une branche d'hyperbole de paramètres p , d'excentricité e et de foyer, le centre répulsif. $\theta = \theta_0$ correspond à l'axe focal de la branche d'hyperbole. Si l'on fixe l'origine des angles de telle sorte que $\theta_0 = 0$, on a

$$r = \frac{p}{e \cos \theta - 1}$$

La différence essentielle par rapport au cas d'un potentiel newtonien attractif est que le point matériel décrit une branche d'hyperbole qui ne contourne pas le centre répulsif.

Ainsi, une particule chargée d'énergie cinétique initiale \mathcal{E}_c lancée en direction d'une charge fixe, va subir une déflexion⁵⁸ du fait de la répulsion. La trajectoire de la particule subit une déviation angulaire Θ_{dev} qu'il est possible d'exprimer en fonction de \mathcal{E}_c , des charges en interaction et du demi-petit axe b que l'on appelle ici le **paramètre d'impact**. Tout d'abord, l'angle Θ_{dev} est lié à l'angle $\pm\theta_1$ que font les asymptotes. On a

$$\Theta_{\text{dev}} = \pi - 2\theta_1 \quad \implies \quad \tan \theta_1 = \frac{1}{\tan(\Theta_{\text{dev}}/2)}$$

Or, on sait (cf. complément page 161) que $\tan \theta_1 = \sqrt{e^2 - 1}$. Par ailleurs, la constante des aires vaut

$$C = |\vec{r} \wedge \vec{v}|_{r \rightarrow \infty} = b v_\infty \quad \implies \quad p = \frac{4\pi\epsilon_0 m b^2 v_\infty^2}{q_1 q_2}$$

Enfin, $p = a(e^2 - 1)$ et $b = a\sqrt{e^2 - 1}$ de telle sorte que

$$\tan \theta_1 = \frac{p}{b} = \frac{4\pi\epsilon_0 m b v_\infty^2}{q_1 q_2}$$

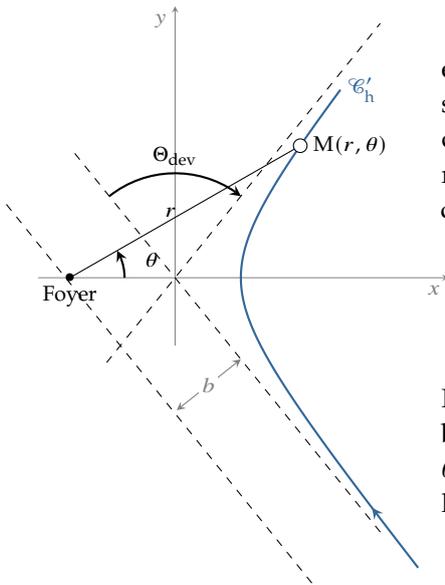


FIGURE 7.6 – Trajectoire hyperbolique dans le cas d'une force newtonienne répulsive.

58: On parle de **diffusion de Rutherford**

La loi de diffusion de Rutherford est donc donnée par

$$\tan \Theta_{\text{dev}}/2 = \frac{q_1 q_2}{8\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_c b} \quad (7.16)$$

Les particules sont d'autant plus diffusées que le paramètre d'impact est faible. Lorsque $b = 0$, la particule arrive de façon frontale et perd toute son énergie cinétique jusqu'à atteindre la distance minimale d'approche d_{min} puis rebrousse chemin, l'énergie potentielle étant convertie en énergie cinétique. On a alors ce que l'on appelle une *rétrodiffusion*. La distance minimale d'approche est donnée par l'égalité entre l'énergie cinétique initiale et l'énergie potentielle en ce point :

$$\mathcal{E}_c = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d_{\text{min}}} \implies d_{\text{min}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_c}$$

L'expérience de Geiger et Marsden – En 1911 Hans Geiger et Ernest Marsden, sous la direction de Ernst Rutherford, bombardent une mince couche d'or ($Z = 79$) avec un faisceau de particules alpha (noyaux ${}^4_2\text{He}^{2+}$) puis repèrent la direction des particules α diffusés à l'aide d'un écran de sulfure de zinc (ZnS). La feuille d'or doit être assez mince d'une part pour éviter les diffusions multiples et d'autre part pour que le ralentissement du faisceau soit négligeable. Le faisceau de noyaux α est produit grâce à une source radioactive (rappelons que la découverte de la radioactivité par H. Becquerel date de 1896) et possède une énergie cinétique $\mathcal{E}_c = 5 \text{ Mev}$ ce qui donne une distance minimale d'approche

$$d_{\text{min}} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_c} = 45 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Or, à l'époque, le modèle atomique qui prévaut dans la communauté scientifique est le modèle de Thomson : l'atome serait une boule de charge positive dans laquelle seraient confinés les électrons. Dans ce cas, les calculs montrent que l'énergie du faisceau α est trop grande pour observer une rétrodiffusion, c'est pourquoi l'équipe de Rutherford s'attend à observer une faible diffusion de l'ordre de celle que donne le calcul quand on remplace b par la taille de l'atome ($\Theta_{\text{dev}} \sim 1/100^\circ$). À la grande surprise, un nombre important de particules fortement diffusées est observé ce qui montre que le noyau est confiné au centre de l'atome. Les mesures permettent d'estimer la taille de ce noyau : de l'ordre de 10 fm. En d'autres termes, cette expérience montre la structure composite et lacunaire de l'atome : 99,999999999% de l'espace est vide!

RÉFÉRENTIELS NON GALILÉENS

8

Pour une certaine échelle d'observation et un certain niveau de précision il existe des référentiels dont le caractère galiléen est vérifié. En revanche, ces référentiels ne correspondent pas toujours aux référentiels dans lesquels on effectue les mesures d'où la question légitime : comment les lois de la mécanique s'expriment dans de tels référentiels ? Après avoir établi les relations qui permettent de changer de référentiel, nous verrons qu'il faut introduire de nouvelles forces lorsque l'on veut décrire des phénomènes mécaniques dans un référentiel non galiléen : la force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie de Coriolis.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/mecanique/referentiels-non-inertiels.php>

8.1 Référentiels en translation	95
Position du problème	95
Lois de composition	96
Notion de force d'inertie	97
8.2 Référentiels en rotation	98
Vecteur rotation	98
Formule de dérivation	99
Lois de composition	100
Force centrifuge	101
Force d'inertie de Coriolis	102
8.3 Généralisation	102
Composition des vitesses	103
Composition des accélérations	103
Relativité galiléenne	103
Dynamique non galiléenne	105

8.1 Référentiels en translation

Position du problème

Considérons deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' munis respectivement des systèmes d'axes $(O, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ et $(O', \vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3)$. Par définition, \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} si, du point de vue d'un observateur lié à \mathcal{R} , les axes de \mathcal{R}' conservent la même direction et le même sens au cours du temps. Mathématiquement cela signifie qu'à tout instant

$$\left. \frac{d\vec{u}'_k}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{0} \quad \text{avec } k \in \{1, 2, 3\}$$

où l'indice \mathcal{R} indique que la dérivée est calculée par un observateur lié à \mathcal{R} .

Ici, le mouvement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} est entièrement déterminé par celui du point O' . On définit la vitesse et l'accélération de \mathcal{R}' par :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{v}_{O'/\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}}$$

Si O' décrit une droite, on dit que le référentiel \mathcal{R}' est en *translation rectiligne* comme c'est le cas pour un référentiel lié à un ascenseur. Si O' décrit un cercle, on parle de *translation circulaire*. C'est ce mouvement que l'on observe lors des fêtes foraines où l'on rencontre fréquemment une grande roue constituée de nacelles en translation circulaire par rapport au référentiel terrestre. De manière générale, si O' décrit une courbe quelconque, on parle de *translation curviligne*. Posons nous deux questions :

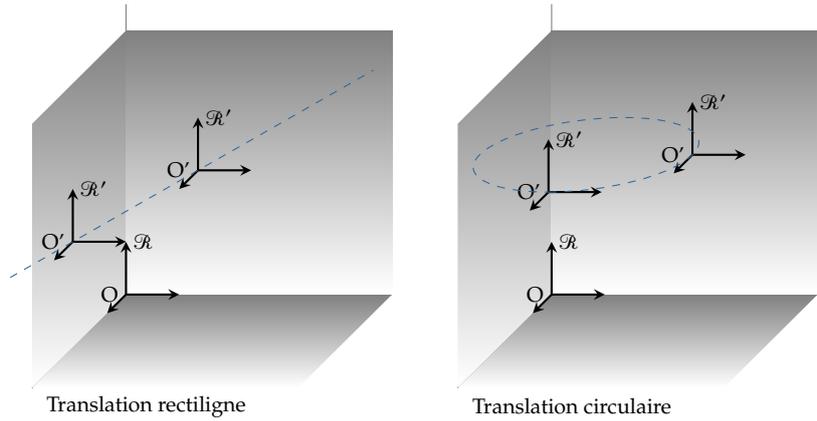


FIGURE 8.1 – Exemples de mouvement de translation.

1. Un corps en mouvement n'est pas décrit de la même manière par un observateur suivant qu'il est lié à \mathcal{R} ou à \mathcal{R}' . Dès lors, quelles sont les relations qui permettent de passer d'une observation à une autre ?
2. Si les lois de la mécanique sont valides dans \mathcal{R} , le sont-elles encore dans \mathcal{R}' ?

Composition des vitesses et des accélérations

Un point matériel M en mouvement dans \mathcal{R} est décrit par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ fonction du temps t . Dans \mathcal{R}' , on définit le vecteur position $\vec{r}' = \overrightarrow{O'M}$ fonction du temps t' . La relation de passage de $\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$ est donnée par

$$\begin{cases} t &= t' \\ \vec{r} &= \overrightarrow{OO'} + \vec{r}' \end{cases} \quad (8.1)$$

Un observateur lié à \mathcal{R} mesure une vitesse, appelée parfois *vitesse absolue*,

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

De la même façon, un observateur lié à \mathcal{R}' mesure une vitesse, appelée arbitrairement *vitesse relative*,

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \left. \frac{d\vec{r}'}{dt'} \right|_{\mathcal{R}'}$$

où t' est le temps dans \mathcal{R}' .

Dérivons \vec{r} par rapport au temps t dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

Or, si l'on note x' , y' et z' les composantes du vecteur \vec{r}' dans la base $(\vec{u}_1', \vec{u}_2', \vec{u}_3')$, on a

$$\left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{dx'}{dt} \vec{u}_1' + \frac{dy'}{dt} \vec{u}_2' + \frac{dz'}{dt} \vec{u}_3' + x' \left. \frac{d\vec{u}_1'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + y' \left. \frac{d\vec{u}_2'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + z' \left. \frac{d\vec{u}_3'}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

Mais puisque \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} , les trois derniers termes sont nuls. Par ailleurs, compte tenu que $dx'/dt = dx'/dt' \dots$, on peut écrire

$$\left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \frac{dx'}{dt'} \vec{u}_1' + \frac{dy'}{dt'} \vec{u}_2' + \frac{dz'}{dt'} \vec{u}_3' = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$

Le terme de droite s'identifie alors avec la vitesse mesurée dans le référentiel \mathcal{R}' . Finalement on trouve la loi de composition suivante :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \quad \heartsuit \quad (8.2)$$

La vitesse vue dans \mathcal{R} est la somme vectorielle de la vitesse vue dans \mathcal{R}' et de la vitesse de translation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .

Poursuivons notre raisonnement et cherchons la relation entre les accélérations mesurées dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' . Pour cela, dérivons par rapport à t l'équation (8.2) :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, le terme $d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}/dt|_{\mathcal{R}}$ s'identifie avec l'accélération relative $d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}/dt'|_{\mathcal{R}'}$, de sorte que

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \quad \heartsuit \quad (8.3)$$

À l'instar de la vitesse, l'accélération vue dans \mathcal{R} est la somme vectorielle de l'accélération vue dans \mathcal{R}' et de l'accélération de translation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .

Notion de force d'inertie

Supposons maintenant que le référentiel \mathcal{R} soit galiléen. Un point matériel M de masse m soumis à une résultante des forces \vec{F} est donc régi par l'équation du mouvement

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F}$$

Qu'en est-il dans \mathcal{R}' ? Tout d'abord, en mécanique newtonienne, la masse est une grandeur invariante par changement de référentiel : $m' = m$. De plus, les lois d'interaction ne dépendent que des positions et des vitesses relatives entre le point M et l'environnement matériel ; il est alors légitime de postuler l'invariance de la force par changement de référentiel : $\vec{F}' = \vec{F}$. Enfin, si le référentiel \mathcal{R}' est en translation par rapport à \mathcal{R} , en vertu de (8.3) on a

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}'}{m'}$$

de sorte que

$$m'\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{F}' - m'\vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \quad (m' = m \quad \text{et} \quad \vec{F}' = \vec{F})$$

Tout se passe comme si l'on pouvait appliquer la relation fondamentale de la dynamique dans \mathcal{R}' à condition d'ajouter un terme supplémentaire dans le bilan des forces :

$$\vec{f}_i = -m\vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \quad [\text{translation}] \quad \heartsuit \quad (8.4)$$

Cette grandeur homogène à une force est appelée **force d'inertie**. On peut noter qu'elle ne dépend que du mouvement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} et de la masse inerte du point M d'où son nom. Quand le référentiel \mathcal{R}' accélère tout se passe comme si le point matériel subissait une force supplémentaire opposée à l'accélération.

Exemple : freinage d'un véhicule – Imaginons la situation du conducteur d'un véhicule qui roule sur une route horizontale. Brusquement, le conducteur freine. Le référentiel lié à l'habitacle est donc en translation rectiligne accéléré, l'accélération étant opposée à la vitesse. Dans ce référentiel, le conducteur ressent une force d'inertie qui le propulse vers l'avant. Si ça ceinture de sécurité est attachée, elle le maintient fixe dans l'habitacle en exerçant une tension opposée à cette force d'inertie.

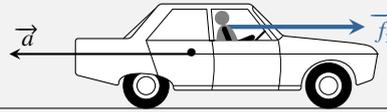


FIGURE 8.2 – Le véhicule freine. Le passager se sent projeté vers l'avant.

En revanche, si le référentiel \mathcal{R}' est en translation rectiligne uniforme, on a

$$\vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad m\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{F}'$$

La relation fondamentale de la dynamique est alors valide dans \mathcal{R}' ce qui confère à \mathcal{R}' le statut de référentiel galiléen. **D'ores et déjà on peut retenir que tout référentiel en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen, est lui aussi galiléen.**

8.2 Référentiels en rotation uniforme autour d'un axe fixe

Vecteur rotation

Supposons maintenant que le référentiel \mathcal{R}' ait son origine O' fixe par rapport à \mathcal{R} mais, qu'en revanche, ses axes tournent autour d'un axe fixe Δ à une vitesse angulaire ω constante. Dans ce cas, on caractérise la rotation du référentiel tournant à l'aide du **vecteur rotation** $\vec{\omega}$ dont la direction est donnée par celle de l'axe de rotation, la norme par la vitesse angulaire ω et le sens par la règle du tire-bouchon : faire tourner un tire-bouchon autour de l'axe de rotation le fait déplacer dans le sens recherché.

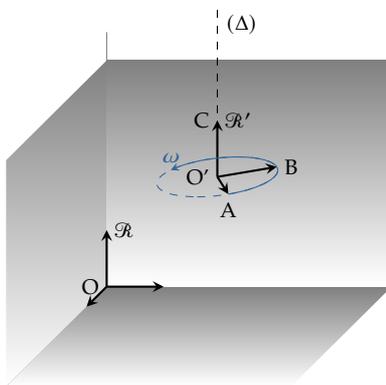


FIGURE 8.3 – Référentiel en rotation par rapport à un axe fixe

Illustrons cette notion sur l'exemple de la figure ci-contre. Ici, \mathcal{R}' est en rotation par rapport à \mathcal{R} autour d'un axe fixe Δ , orienté suivant \vec{u}_3 ,

à la vitesse angulaire ω . On posera donc

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_3$$

Plaçons les points A, B et C aux extrémités des vecteurs \vec{u}_1' , \vec{u}_2' et \vec{u}_3' . Un observateur lié à \mathcal{R} constate que les points A et B décrivent un cercle de rayon unité et de centre O' à la vitesse ω tandis que le point C reste immobile. Compte tenu des résultats sur le mouvement circulaire, on a

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{u}_1'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \vec{v}_{A/\mathcal{R}} = 1 \times \omega \vec{u}_2' = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_1' \\ \left. \frac{d\vec{u}_2'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \vec{v}_{B/\mathcal{R}} = -1 \times \omega \vec{u}_1' = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_2' \\ \left. \frac{d\vec{u}_3'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \vec{v}_{C/\mathcal{R}} = \vec{0} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_3' \end{aligned}$$

ce qui se met sous la forme

$$\left. \frac{d\vec{u}_k'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_k' \quad \text{avec } k \in \{1, 2, 3\} \quad \heartsuit \quad (8.5)$$

Cette relation est en fait une définition générale du vecteur rotation que l'on admettra. Notons qu'un observateur lié à \mathcal{R}' voit le référentiel \mathcal{R} tourner à la même vitesse angulaire mais dans le sens opposé, de sorte que l'on a

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

Formule de dérivation vectorielle

En conséquence, la variation temporelle d'une grandeur vectorielle dépend du référentiel. En effet, considérons un observateur lié au référentiel \mathcal{R}' observant les variations d'une grandeur $\vec{A}(t')$ et cherchons à calculer ce que verrait un observateur lié à \mathcal{R} . Appelons A_1 , A_2 et A_3 les composantes du vecteur \vec{A} dans la base $(\vec{u}_1', \vec{u}_2', \vec{u}_3')$:

$$\vec{A} = A_1 \vec{u}_1' + A_2 \vec{u}_2' + A_3 \vec{u}_3'$$

Les variations temporelles vues dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' s'écrivent

$$\left\{ \begin{aligned} \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} &= \frac{dA_1}{dt} \vec{u}_1' + \frac{dA_2}{dt} \vec{u}_2' + \frac{dA_3}{dt} \vec{u}_3' + A_1 \frac{d\vec{u}_1'}{dt} + A_2 \frac{d\vec{u}_2'}{dt} + A_3 \frac{d\vec{u}_3'}{dt} \\ \left. \frac{d\vec{A}}{dt'} \right|_{\mathcal{R}'} &= \frac{dA_1}{dt'} \vec{u}_1' + \frac{dA_2}{dt'} \vec{u}_2' + \frac{dA_3}{dt'} \vec{u}_3' \end{aligned} \right.$$

D'après la relation (8.5) et puisque $t' = t$ en mécanique newtonienne, on trouve

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt'} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{A} \quad \heartsuit \quad (8.6)$$

Cette formule de dérivation vectorielle traduit le fait que, par exemple, si un vecteur est fixe dans \mathcal{R} alors il ne l'est plus dans \mathcal{R}' dès lors que le référentiel tourne autour d'un axe non colinéaire à ce vecteur. Finalement, c'est précisément parce que la direction d'un vecteur dépend du référentiel que sa variation temporelle **est relative à un référentiel**.

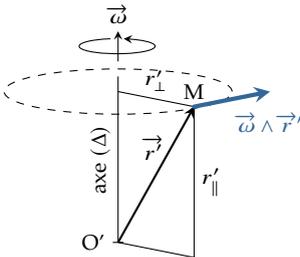


FIGURE 8.4 – Vitesse d'entraînement

La relation de passage (8.1) et la formule de dérivation vectorielle donnent

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{r}'}{dt'} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

Le premier terme est le vecteur vitesse relative $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$. Le dernier terme quant à lui ne dépend que de la distance entre le point M et l'axe de rotation. En effet, on peut décomposer \vec{r}' en composantes parallèle et perpendiculaire à l'axe : $\vec{r}' = \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel}$. Puisque $\vec{\omega} \wedge \vec{r}'_{\parallel} = \vec{0}$, on trouve

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'_{\perp} \quad \heartsuit \quad (8.7)$$

Le terme $\vec{\omega} \wedge \vec{r}'_{\perp}$ représente la vitesse du point M s'il était entraîné par la rotation de \mathcal{R}' . On parle alors de **vitesse d'entraînement**.

60: On rappelle que

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt}$$

Poursuivons en dérivant à nouveau par rapport au temps⁶⁰ :

$$\left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt'} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

ce qui donne

$$\left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{dt'} \right|_{\mathcal{R}'} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

La rotation étant uniforme autour d'un axe fixe, $d\vec{\omega}/dt = \vec{0}$. Par ailleurs, si l'on utilise la décomposition $\vec{r}' = \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel}$ et l'identité $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}'_{\perp}) \\ &= (\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_{\perp})\vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}'_{\perp} \\ \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') &= -\omega^2 \vec{r}'_{\perp} \end{aligned}$$

Finalement, l'accélération mesuré dans \mathcal{R} s'écrit en fonction de celle mesurée dans \mathcal{R}' via la relation

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} - \omega^2 \vec{r}'_{\perp} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} \quad \heartsuit \quad (8.8)$$

Force centrifuge

Admettons que le référentiel \mathcal{R} soit galiléen et étudions le mouvement d'un point matériel M dans le référentiel \mathcal{R}' . Soumis à une force \vec{F} , son équation du mouvement dans \mathcal{R} est donnée par

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F}$$

Compte tenu de la loi (8.8) et de l'invariance de la masse et de la force, on a

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = m \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F}' + m\omega^2 \vec{r}'_{\perp} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$

Tout se passe comme si, vu de \mathcal{R}' , le point M subissait, en plus de $\vec{F}' = \vec{F}$, une force d'inertie

$$\vec{f}_i = m\omega^2 \vec{r}'_{\perp} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} \tag{8.9}$$

Lorsque le point M est immobile dans \mathcal{R}' , cette force d'inertie se résume à

$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2 \vec{r}'_{\perp} \quad \heartsuit \tag{8.10}$$

Parce qu'elle tend à écarter la matière de l'axe de rotation, elle est dite **force centrifuge**⁶¹. Notez que son intensité varie comme le carré de la fréquence de rotation.

61: Le terme axi-fuge serait plus correct.

Exemple : véhicule dans un virage – Imaginons qu'un véhicule décrive un virage circulaire horizontal de rayon R à la vitesse v constante. Le passager, lié à son siège par sa ceinture de sécurité est fixe dans le référentiel tournant que représente la voiture. Ainsi, en plus des actions de contact (tension de la ceinture et réaction du siège) et de pesanteur, il faut ajouter la force centrifuge qui s'écrit

$$f_{ie} = m\omega^2 r'_{\perp} = m\omega^2 R = m \frac{v^2}{R}$$

Cette force est compensée par les forces de contact (frottement du siège et tension de la ceinture).

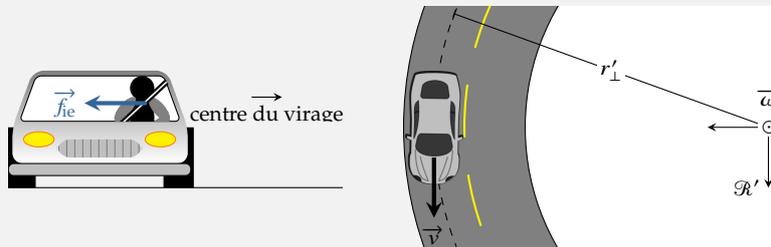


FIGURE 8.5 – Le véhicule tourne. Le passager se sent déporté vers l'extérieur du virage.

Enfin, cette force d'inertie a la particularité d'être conservative puisque le travail qu'elle produit le long d'un déplacement infinitésimal s'écrit comme une différentielle totale exacte :

$$\delta W = \vec{f}_{ie} \cdot d\vec{\ell} = m\omega^2 r'_{\perp} dr'_{\perp} = -d\mathcal{E}_p$$

ce qui donne une énergie potentielle centrifuge

$$\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2}m\omega^2 r_{\perp}'^2 \quad \heartsuit \quad (8.11)$$

Force d'inertie de Coriolis

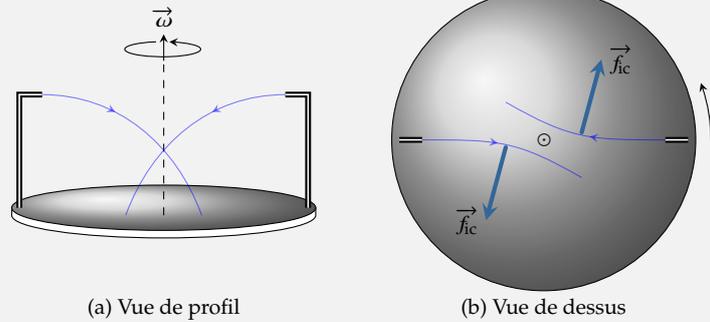
Le deuxième terme qui intervient dans l'expression (8.9) est la **force de Coriolis**⁶²

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} \quad \heartsuit \quad (8.12)$$

Cette force est liée au mouvement relatif du point M et à la rotation du référentiel tournant. Notez qu'elle est toujours orthogonale à la vitesse et ne travaille donc pas ! Elle peut courber la trajectoire mais ne peut pas faire varier l'énergie cinétique.

62: Gaspard-Gustave Coriolis (1792-1843) : Mathématicien et ingénieur français (Polytechnicien) qui a contribué à « dépeussier » l'enseignement de la mécanique générale. En 1835, il publie *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*, ouvrage dans lequel il introduit la force qui portera son nom.

Exemple : force de Coriolis sur un plateau tournant –



Imaginons un plateau sur lequel on a fixé en périphérie deux robinets diamétralement opposés. Lorsque l'on ouvre les robinets, chacun envoie un jet d'eau en direction de l'axe du plateau. Si le plateau est immobile (par rapport à la Terre considéré galiléen) les deux jets se croisent. Mettons maintenant en rotation le plateau puis ouvrons à nouveau les robinets. On observe alors que, non seulement les jets ne se croisent plus, mais ils s'écartent dans une direction qui défie l'intuition. Si l'on analyse le mouvement du jet dans le référentiel tournant, on s'aperçoit que c'est la force de Coriolis qui est responsable de la déviation vers la droite. En effet, un élément de fluide de masse m subit deux forces d'inertie :

- une force centrifuge qui, étant centrifuge, ne peut pas expliquer la déviation observée^a.
- une force de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$ qui est perpendiculaire au plan formé par $\vec{\omega}$ et $\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$. Cette force est orientée vers la droite ce qui explique la déviation observée.

^a. En revanche elle explique que la forme du jet n'est plus parabolique.

8.3 Généralisation

Les lois que l'on vient d'établir se généralisent. Nous donnons ici les résultats sans démonstration.

De manière générale, le mouvement d'un référentiel par rapport à un autre est la composition d'une translation et d'une rotation. Ce mouvement est alors complètement déterminé par la vitesse de l'origine que nous notons $\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ et par le vecteur rotation instantané $\vec{\omega}$ défini par

$$\left. \frac{d\vec{u}_k'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_k' \quad \text{avec } k \in \{1, 2, 3\} \quad \heartsuit \quad (8.13)$$

Remarque : le vecteur rotation peut varier en norme (rotation fixe avec une vitesse angulaire variable) mais aussi en direction (l'axe n'est alors plus fixe).

Loi de composition des vitesses

La loi de composition des vitesses fait apparaître deux termes : la vitesse relative et la vitesse d'entraînement. Le mouvement relatif, comme on l'a déjà expliqué, représente le mouvement de M vu par un observateur lié à \mathcal{R}' . La vitesse relative s'écrit donc

$$\vec{v}_r(\mathbf{M}) = \vec{v}_{\mathbf{M}/\mathcal{R}'}$$

Le mouvement d'entraînement quant à lui, correspond au mouvement dans \mathcal{R} d'un point fictif \mathbf{M}^* , fixe dans \mathcal{R}' et qui coïncide avec M à l'instant t où l'on fait l'observation. Ainsi, par définition, la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e(\mathbf{M})$ s'écrit

$$\vec{v}_e(\mathbf{M}) = \vec{v}_{\mathbf{M}^*/\mathcal{R}}$$

Dans tous les cas, la loi de composition des vitesses prend la forme simple suivante :

$$\vec{v}_{\mathbf{M}/\mathcal{R}} = \vec{v}_r(\mathbf{M}) + \vec{v}_e(\mathbf{M}) \quad \heartsuit \quad (8.14)$$

Loi de composition des accélérations

Contrairement à la vitesse, l'accélération vue dans \mathcal{R} présente trois termes : l'accélération relative $\vec{a}_r(\mathbf{M}) = \vec{a}_{\mathbf{M}/\mathcal{R}'}$, l'accélération d'entraînement⁶³ $\vec{a}_e(\mathbf{M}) = \vec{a}_{\mathbf{M}^*/\mathcal{R}}$ et l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c(\mathbf{M}) = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(\mathbf{M})$. On a la loi

$$\vec{a}_{\mathbf{M}/\mathcal{R}} = \vec{a}_r(\mathbf{M}) + \vec{a}_e(\mathbf{M}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(\mathbf{M}) \quad \heartsuit \quad (8.15)$$

63: **Attention**, en général $\vec{a}_e(\mathbf{M}) \neq \left. \frac{d\vec{v}_e(\mathbf{M})}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$.

Principe de relativité galiléenne

Supposons un point matériel M isolé dans un référentiel \mathcal{R} considéré galiléen, et cherchons à quelle(s) condition(s) le référentiel \mathcal{R}' présente un caractère galiléen, c'est-à-dire respecte le principe d'inertie.

En vertu de la loi de composition des accélérations on a

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e(M) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(M)$$

Or, le point M étant isolé, il vient $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{0}$. Si l'on veut que le référentiel \mathcal{R}' soit également galiléen, il faut $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{0}$ en vertu du principe d'inertie, soit

$$2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(M) + \vec{a}_e(M) = \vec{0} \quad \forall \vec{v}_r(M)$$

relation qui implique deux conditions.

1. D'une part, $\vec{\omega} = \vec{0}$: \mathcal{R}' est nécessairement en translation par rapport au référentiel galiléen.
2. D'autre part $\vec{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{C}^{\text{te}}$ car $\vec{a}_e(M) = \vec{a}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$. Le référentiel est en translation uniforme.

Principe de Relativité

Tout référentiel en translation uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen. Les lois de la mécanique dans ces référentiels sont les mêmes et il est impossible de les distinguer par une expérience de mécanique. Il n'existe donc pas de référentiel absolu qui permettrait de faire la différence entre un référentiel au repos et un référentiel en translation uniforme.

Notez que le caractère galiléen d'un référentiel est lié à la validité du principe d'inertie. Le critère de validité dépend donc de la précision que l'on exige. C'est pourquoi, les référentiels considérés galiléens le sont dans un cadre approximatif à préciser. Citons-en quelques uns couramment utilisés.

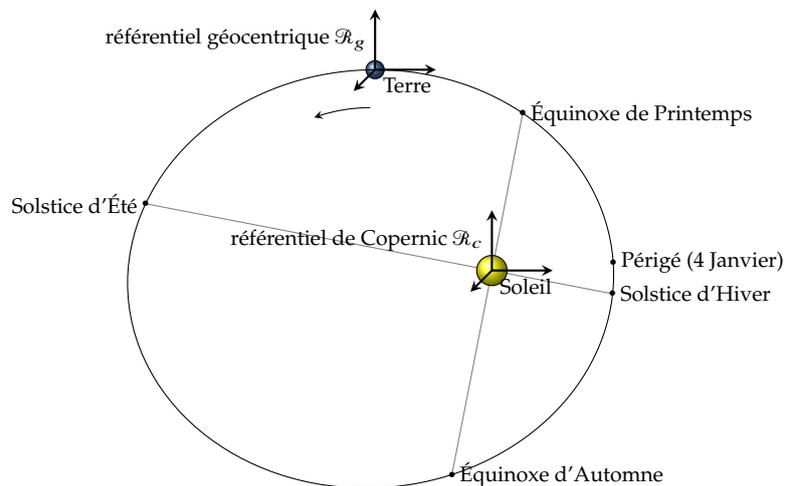


FIGURE 8.6 – Le référentiel géocentrique est en translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic. L'excentricité de l'orbite terrestre a été exagérée sur le schéma.

Référentiel de Copernic : il s'agit d'un référentiel lié au centre d'inertie du système solaire et dont les axes pointent vers trois étoiles dites « fixes ». Il est utilisé en tant que référentiel galiléen lorsque l'on considère des expériences terrestres « longues » où la rotation de la Terre autour du Soleil ne peut être négligée. Rigoureusement, ce référentiel n'est pas galiléen car le Soleil est en

mouvement dans notre galaxie, la Voie Lactée. Il décrit une orbite circulaire de rayon $D \approx 30000$ al autour du noyau galactique en une période $T_S = 250.10^6$ années. On peut donc se contenter du référentiel de Copernic comme référentiel galiléen tant que la durée de l'expérience est très faible devant T_S . Concrètement cette dernière condition est toujours vérifiée pour des expériences humaines.

Référentiel géocentrique : référentiel lié au centre de la Terre et dont les axes conservent la même orientation par rapport au référentiel de Copernic. Il est donc en translation quasi circulaire par rapport au référentiel de Copernic. On peut le considérer comme galiléen sur des expériences terrestres « peu longues » (une journée maximum), car, dans ce cas, le mouvement du centre de la Terre est alors assimilable à une trajectoire quasi rectiligne uniforme.

Référentiel terrestre : référentiel lié à la surface de la Terre et dont les axes pointent traditionnellement vers le Sud, l'Est et le Zénith. Par rapport au référentiel géocentrique, ce référentiel est en rotation ($\omega = 2\pi/T_0 = 7,3.10^{-5}$ rad.s⁻¹ avec $T_0 = 23\text{h } 56\text{min } 04\text{s}$) autour de l'axe des pôles. Bien que rigoureusement non galiléen, ce référentiel est souvent traité comme tel car les effets de la rotation terrestre sont souvent négligeables dans les expériences courantes.

Lois de la dynamique en référentiel non galiléen

Reprenons le raisonnement du [Section 8.1](#) dans le cas général : si le référentiel \mathcal{R} est galiléen, un point matériel M de masse m soumis à une résultante des forces \vec{F} est régi par l'équation du mouvement

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{F}$$

Dans un référentiel \mathcal{R}' accéléré compte tenu de l'invariance de la masse et de la force, on a

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e(\text{M}) + \vec{a}_c(\text{M}) = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}'}{m'}$$

de sorte que

$$m' \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{F}' + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e(\text{M}) \\ \vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c(\text{M}) = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(\text{M}) \end{cases} \quad \heartsuit$$

(8.16)

Finalement, dans un référentiel non galiléen, tout se passe comme si la relation fondamentale de la dynamique était valide à condition d'ajouter dans le bilan des forces, deux forces fictives : la force d'inertie d'entraînement \vec{f}_{ie} et la force d'inertie de Coriolis \vec{f}_{ic} . Ces deux forces d'inertie étant liées au mouvement de \mathcal{R}' par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R} , ils apportent des renseignements sur le caractère non galiléen de \mathcal{R}' .

En conclusion, une expérience de mécanique ne permet pas de faire la différence entre deux référentiels galiléens. En revanche, elle permet de différencier un référentiel galiléen d'un référentiel non galiléen.

PROBLÈME À DEUX CORPS

Le problème à deux corps désigne la situation où un système mécanique peut se ramener à deux corps ponctuels en interaction et isolé de l'extérieur. C'est par exemple la situation rencontrée dans les systèmes planète-étoile. On montrera que l'étude de ce problème se réduit à celle d'un corps soumis à une force centrale.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/mecanique/probleme-a-deux-corps.php>

- 9.1 Réduction du problème à deux corps 107
 - Mobile réduit 107
 - Point de vue énergétique 109
- 9.2 Exemples d'application 110
 - Problème de Képler 110
 - Détection des exoplanètes 112
 - Vibrations moléculaires 114

9.1 Réduction du problème à deux corps

Mobile réduit et masse réduite

Considérons un système mécanique \mathcal{S} formé de deux points matériels M_1 et M_2 de masse respective m_1 et m_2 . On étudie la dynamique de ce système dans un référentiel \mathcal{R} galiléen et l'on note $\vec{r}_1 = \vec{OM}_1$ et $\vec{r}_2 = \vec{OM}_2$ les vecteurs positions. Nous allons montrer que lorsque le système est isolé, le problème se découple en deux mouvements indépendants.

Supposons donc que les deux corps soient en interaction mutuelle mais isolés de l'extérieur. On conserve la notation habituelle : \vec{f}_{12} désigne la force qu'exerce le point M_1 sur M_2 et \vec{f}_{21} celle produite par M_2 sur M_1 . Le principe des actions réciproques postule que ces deux forces sont opposées et coaxiales. Par ailleurs, en vertu du théorème du centre d'inertie, on a

$$(m_1 + m_2) \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$$

Ainsi, le centre d'inertie G décrit une trajectoire rectiligne uniforme. Le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est donc en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} ce qui lui confère un caractère galiléen. Analysons donc le mouvement dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{GM}_1}{dt^2} = \vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12} \\ m_2 \frac{d^2 \vec{GM}_2}{dt^2} = \vec{f}_{12} \end{cases}$$

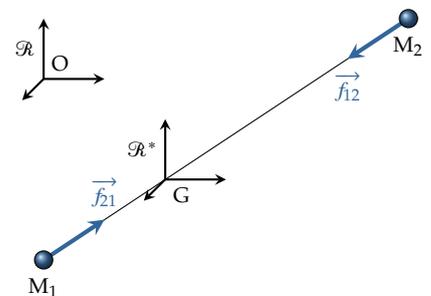


FIGURE 9.1 – Système à deux corps

Si l'on divise chaque équation par la masse et que l'on soustraie l'une à l'autre, on obtient

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} = \overrightarrow{f_{12}} \quad \heartsuit \quad (9.1)$$

ce qui s'interprète comme l'équation du mouvement d'un corps fictif M , appelé **mobile réduit**, de masse μ , de vecteur position $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GM}$ et soumis à une force \overrightarrow{f} tels que

$$\mu \frac{d^2 \overrightarrow{r}}{dt^2} = \overrightarrow{f} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\ \overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_1 M_2} \\ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f_{12}} \end{cases} \quad \heartsuit \quad (9.2)$$

La masse μ , appelée **masse réduite**, est toujours plus petite que la plus petite des masses m_1 et m_2 . En résumé, le problème à deux corps se décuple en deux mouvements indépendants.

1. Le mouvement du centre d'inertie qui est un simple mouvement rectiligne uniforme.
2. Le mouvement relatif qui correspond au mouvement du mobile réduit M de masse μ soumis à une force centrale \overrightarrow{f} . En conséquence, le mouvement relatif est plan et on a conservation du moment cinétique de M ($r^2 \dot{\theta} = C^{\text{te}}$).

Retour sur la chute libre – Selon le principe d'équivalence, la chute libre est, dans un référentiel galiléen, indépendante de la masse du corps en chute libre. Cependant, un observateur lié à un astre faisant l'expérience de la chute libre et disposant d'une précision infinie, constatera que la chute libre dépend de la masse du corps. En effet, la chute d'un corps de masse m sur un astre de masse m_A peut se voir comme un problème à deux corps et, comme on vient de le voir, l'astre est accéléré par le corps en chute libre, le rendant ainsi non galiléen. On sait que le mouvement relatif est décrit par le mobile réduit de masse

$$\mu = \frac{m m_A}{m + m_A}$$

dont l'équation du mouvement est

$$\mu \frac{d^2 \overrightarrow{r}}{dt^2} = m \overrightarrow{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \overrightarrow{r}}{dt^2} = \overrightarrow{g} \left(1 + \frac{m}{m_A} \right)$$

L'accélération du corps en chute libre dépend donc du rapport m/m_A . Bien entendu, c'est la précision limitée qui rend cet effet non mesurable. La meilleure précision obtenue dans les tours à vide étant de l'ordre de 10^{-12} il faudrait faire l'expérience avec une masse $m > 10^{-12} m_A$ pour rendre cet effet mesurable, soit, pour une expérience terrestre, $m > 10$ milliards de tonnes!

Résoudre l'équation différentielle (9.1) permet d'obtenir le mouvement de M_2 relativement à M_1 . Quant au mouvement d'ensemble (celui du centre d'inertie), il suffit de connaître la vitesse du centre d'inertie à un instant quelconque pour connaître le mouvement d'ensemble. Une fois le mouvement relatif connu, il est aisé d'accéder aux mouvements

de M_1 et M_2 dans le référentiel barycentrique. En effet, on a

$$\begin{cases} m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0} \\ \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{GM} \end{cases} \implies \begin{cases} \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM} \\ \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{GM} \end{cases}$$

On remarque ainsi que le mouvement de M_2 (resp. M_1) se déduit de celui du mobile réduit par une homothétie de centre G et de rapport $m_1/(m_1 + m_2)$ (resp. $-m_2/(m_1 + m_2)$).

Point de vue énergétique

On peut retrouver les résultats précédents à l'aide d'une approche énergétique. En vertu du théorème de Kœnig, l'énergie cinétique du système s'écrit

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2 + \mathcal{E}_c^*$$

où \mathcal{E}_c^* désigne l'énergie cinétique barycentrique. Ici, cette quantité vaut

$$\mathcal{E}_c^* = \frac{1}{2}m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_G)^2 + \frac{1}{2}m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_G)^2$$

Or, selon la définition du centre d'inertie G , on a $(m_1 + m_2)\vec{v}_G = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ de sorte que

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_G = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_M$$

puisque $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ vaut $d\overrightarrow{M_1M_2}/dt$, soit la vitesse du mobile réduit M . En procédant de la même façon, on trouve

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_M$$

L'énergie cinétique d'un système à deux corps s'écrit donc

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2 + \left[\frac{1}{2}m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \right] v_M^2$$

Finalement, on trouve

$$\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2 + \frac{1}{2}\mu v_M^2 \quad \heartsuit \quad (9.3)$$

Le travail des forces qui agissent sur le système se résume au travail des forces internes puisque le système est isolé. On a donc

$$W = W^{\text{int}} = \int_i^f \vec{f}_{12} \cdot d\overrightarrow{OM_2} + \int_i^f \vec{f}_{21} \cdot d\overrightarrow{OM_1}$$

où i et f désignent les états initial et final. Sachant que les forces internes sont opposées, on trouve

$$W = \int_i^f \vec{f}_{12} \cdot d\overrightarrow{M_1M_2} = \int_i^f \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Le travail des forces qui agissent sur un système à deux corps correspond au travail dépensé par la force qui agit sur le mobile réduit M .

Appliquons maintenant le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta \left(\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_G^2 + \frac{1}{2} \mu v_M^2 \right) = \int_i^f \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

et n'oublions pas que le centre d'inertie se déplace à une vitesse \vec{v}_G constante de sorte que le théorème précédent prend la forme

$$\Delta \left(\frac{1}{2} \mu v_M^2 \right) = \int_i^f \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad \heartsuit \quad (9.4)$$

Il s'agit de l'équation du mouvement du mobile réduit écrit sous forme énergétique. On retrouve donc le fait que le mouvement relatif ($\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$) se réduit à celui du mobile réduit.

Remarque : Si la force centrale \vec{f} dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p , le théorème de l'énergie cinétique aboutit à la conservation de l'énergie mécanique suivante :

$$\frac{1}{2} \mu v_M^2 + \mathcal{E}_p = C^{te}$$

9.2 Exemples d'application

Retour sur le problème de Képler

Dans le chapitre sur les forces centrales, nous avons introduit le problème de Kepler en considérant le mouvement d'un astre (appelons le M_2) autour d'un astre fixe (M_1). En réalité, les deux astres sont en mouvement autour de leur centre d'inertie et l'on ne peut négliger le mouvement de M_1 que si $m_1 \gg m_2$. Or, ce qui se justifie pour le système Terre-Soleil ($m_1/m_2 \approx 3.10^5$) ou le système Terre-Satellite ($m_1/m_2 \approx 10^{21}$) ne se justifie pas nécessairement pour un système d'étoiles doubles où les masses sont comparables. Le problème de Kepler est en fait un problème à deux corps. Voyons donc quelles modifications il faut apporter aux résultats du [Chapitre 7](#).

En premier lieu, le mobile réduit est régi par l'équation

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{\mathcal{G} m_1 m_2 \vec{r}}{r^3} \quad \implies \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{\mathcal{G} (m_1 + m_2) \vec{r}}{r^3} \quad (9.5)$$

On obtient la même équation que celle traitée dans le [Chapitre 7](#) à une nuance près : la masse m_1 est remplacée par $m_1 + m_2$. En d'autres termes, pour le mouvement relatif de M_2 par rapport à M_1 il suffit de reprendre les résultats du [Chapitre 7](#) et de procéder à la substitution suivante :

$$m_1 \longrightarrow m_1 + m_2$$

Nous savons donc que la solution est une conique de foyer G et d'équation

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = \frac{C^2}{\mathcal{G}(m_1 + m_2)} \\ e \geq 0 \end{cases} \quad \heartsuit \quad (9.6)$$

où l'excentricité e et la constante des aires C sont déterminées par les conditions initiales. Les mouvements de M_1 et M_2 se déduisent par l'homothétie décrite au [Section 9.1](#). Par exemple, si dans \mathcal{R}^* le mobile réduit décrit une ellipse d'excentricité e et de grand-axe a , alors M_1 et M_2 décrivent des ellipses homothétiques de même excentricité (cf. [Figure 9.2](#)).

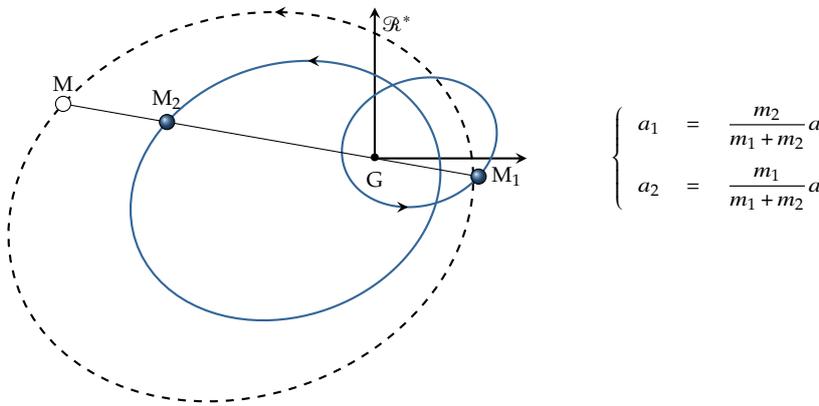


FIGURE 9.2 – Trajectoires de deux corps en interaction newtonienne dans le référentiel barycentrique. Ici $m_1 = 2m_2$. La trajectoire du mobile réduit est tracée en pointillée.

Quant à la troisième loi de Kepler $a^3/T^2 = \mathcal{G}m_1/4\pi^2$, elle devient

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \quad \heartsuit \quad (9.7)$$

Ainsi, le rapport du cube du demi-grand axe et du carré de la période de révolution nous renseigne sur la *masse totale du système*.

Terminons par les relations énergétiques. Dans le référentiel barycentrique, la conservation de l'énergie mécanique s'écrit

$$\frac{1}{2}\mu v_M^2 - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r} = \mathcal{E}_m^*$$

Or, le mouvement relatif étant plan, on décrit M dans le système de coordonnées polaires (r, θ) et l'on a $\vec{v}_M = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ ainsi que $r^2\dot{\theta} = C$ par conservation du moment cinétique. On obtient alors

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu\frac{C^2}{r^2} - \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r} = \mathcal{E}_m^*$$

Considérons le cas où les deux corps sont liés par gravitation de sorte que leur trajectoire est elliptique. Dans ce cas, le mobile réduit décrit également une ellipse de demi-grand axe a . Lorsque ce mobile atteint son apocentre ou son péricentre on a $\dot{r} = 0$ et la conservation de l'énergie s'écrit

$$r^2 + \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\mathcal{E}_m^*}r - \frac{\mu C^2}{2\mathcal{E}_m^*} = 0$$

équation du second degré qui admet deux solutions r_+ et r_- dont la somme $r_+ + r_-$ vaut $-\mathcal{G}m_1m_2/\mathcal{E}_m^*$. Sachant que $r_+ + r_- = 2a$, on obtient

$$\mathcal{E}_m^* = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2a}$$

Autrement dit, on retrouve le même formule que celle du [Chapitre 7](#) à ceci près qu'il ne s'agit pas de l'énergie mécanique du corps M_2 mais de l'énergie mécanique barycentrique du système des deux corps. On peut montrer qu'on retrouve les mêmes formules également dans le cas d'une trajectoire parabolique et hyperbolique. On retiendra donc le résultat suivant

$$\mathcal{E}_m^* = \begin{cases} -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2a} & \text{dans le cas d'une ellipse,} \\ +\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{2a} & \text{dans le cas d'une hyperbole,} \\ 0 & \text{dans le cas d'une parabole,} \end{cases} \quad \heartsuit \quad (9.8)$$

Détection des exoplanètes par mesure de vitesse radiale

65: c'est-à-dire des planètes gravitant autour d'une autre étoile que le Soleil. On emploie également le terme *exoplanètes*.

66: Par exemple, Jupiter brille 1 milliard de fois moins que le Soleil dans le visible et 100 000 fois moins dans l'infrarouge.

67: cf. <https://femto-physique.fr/optique/doppler.php>

68: On mesure des variations de l'ordre de 10 m.s^{-1} ce qui, comparé aux vitesses cosmiques, est extrêmement faible. On voit donc que cette méthode exige un très bon rapport signal/bruit.

En l'espace de 20 ans, plus de 3 000 planètes extrasolaires⁶⁵ ont été découvertes. Toutes l'ont été de façon indirecte. Il faut savoir que l'observation directe d'une planète extra-solaire présente deux difficultés majeures.

1. D'une part, la lumière émise par la planète est complètement masquée par la luminosité de son étoile⁶⁶.
2. D'autre part, le pouvoir de résolution des télescopes ne permet pas de résoudre le diamètre angulaire du couple planète-étoile.

Il y a essentiellement deux techniques utilisées : l'une utilisant la mesure photométrique, l'autre la mesure de la vitesse radiale stellaire. À l'heure actuelle (sept. 2015), 30% des exoplanètes ont été découvertes par cette dernière méthode. Décrivons en le principe.

En observant le spectre d'une étoile avec un spectromètre de très grande précision, on est capable d'observer par effet Doppler⁶⁷, les oscillations⁶⁸ de sa vitesse projetée sur la ligne de visée, dite *vitesse radiale*. En effet, l'étoile et sa planète tournent autour du centre d'inertie du système planète-étoile de sorte que la vitesse radiale oscille avec une période T correspondant à la période orbitale de la planète.

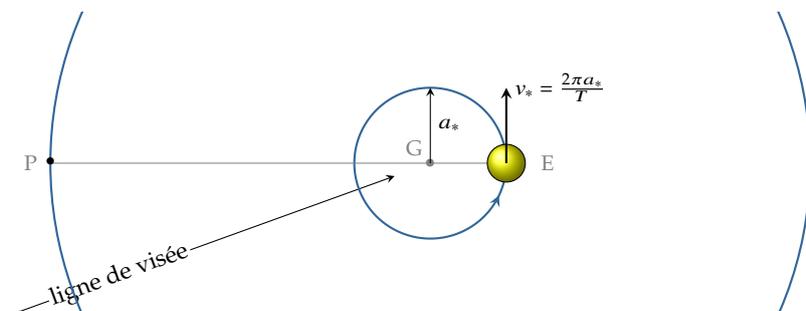


FIGURE 9.3 – Le mouvement orbital d'une planète induit une variation périodique de la vitesse de l'étoile selon la ligne de visée.

Prenons l'exemple de la première exoplanète découverte en 1995 et située à 51 al dans la constellation de Pégase. Admettons –ce qui est

le cas— que son orbite est quasi circulaire. De la courbe de vitesse (cf. Figure 9.4), il est alors possible de déduire différents paramètres.

- Les oscillations de la vitesse permettent de penser qu'il existe une planète de masse m qui tourne autour de l'étoile à la distance a . La période d'oscillation correspond à la période orbitale de la planète. On trouve ici $T = 4,233$ jours.
- Le demi-grand axe de l'orbite planétaire a est obtenu via la troisième loi de Kepler

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}(m_\star + m)}{4\pi^2} \simeq \frac{\mathcal{G}m_\star}{4\pi^2} \quad \text{car } m \ll m_\star$$

Connaissant la masse de l'étoile à partir de sa luminosité (modèle stellaire), il est alors aisé de déduire le demi-grand axe a de l'orbite planétaire. Ici l'étoile 51Pegasi présente une masse $m_\star = 1,06 M_\odot$ d'où $a = 0,052$ ua soit 7,8 millions de km.

- La masse de la planète est déduite de l'amplitude de variation de la vitesse. En effet, l'étoile décrit une orbite circulaire autour de G, de rayon

$$a_\star = \frac{m}{m_\star + m} a \simeq \frac{m}{m_\star} a$$

Ainsi, la vitesse projetée dans la ligne de visée, oscille entre v_{\max} et $-v_{\max}$ avec

$$v_{\max} = \frac{2\pi a_\star}{T} = \frac{m}{m_\star} \frac{2\pi a}{T} \tag{9.9}$$

ce qui permet de déduire la masse de la planète. Ici, l'amplitude de vitesse vaut $v_{\max} = 56,83 \text{ m.s}^{-1}$ d'où

$$\frac{m}{m_\star} = 4,2 \cdot 10^{-4} \implies m = 8,4 \cdot 10^{26} \text{ kg}$$

soit environ la moitié de la masse de Jupiter.

Plusieurs ingrédients viennent cependant compliquer l'analyse de la courbe de vitesse. Tout d'abord, la trajectoire n'est pas nécessairement circulaire; plus souvent elle présente une excentricité qu'il s'agit de déterminer. Dans ce cas, la courbe n'est plus sinusoïdale. On peut montrer que la vitesse radiale évolue au cours du temps suivant la loi

$$v_r(t) = A [\cos(\theta + \theta_0) + e \cos \theta_0] \quad \text{avec} \quad \theta - 2e \sin \theta = \frac{2\pi}{T}(t - t_p)$$

expression dans laquelle θ_0 représente la longitude du péricentre et t_p , le temps de passage au péricentre. L'ajustement des données à cette loi permet d'extraire 5 paramètres : l'amplitude de vitesse A , la période T , l'instant t_p , l'excentricité e et l'argument θ_0 . À partir de l'amplitude il est alors possible de déduire la masse de la planète. On peut montrer que pour de petites excentricité (e^2 négligeable devant 1) la relation (9.9) reste valide.

Une autre complication vient du fait que la ligne de visée n'est pas forcément contenue dans le plan de l'orbite. À priori, on ignore l'inclinaison i que forme le plan de l'orbite avec la route céleste (plan

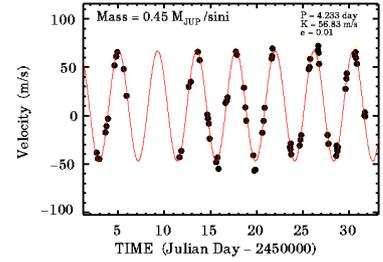


FIGURE 9.4 – Évolution de la vitesse radiale de l'étoile 51Pegasi mettant en évidence la première exoplanète découverte en 1995 par l'équipe de Michel Mayor et Didier Queloz (Prix Nobel 2019).

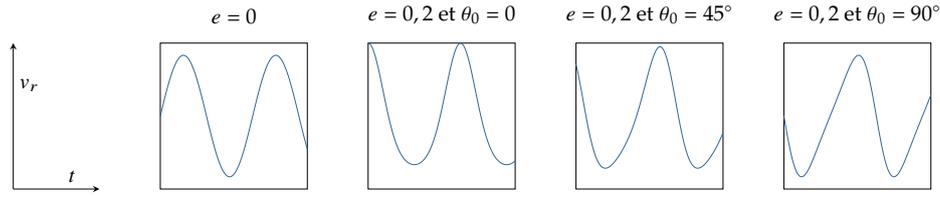


FIGURE 9.5 – Différents types de courbe de vitesse en fonction de l'excentricité et la direction d'observation.

perpendiculaire à la ligne de visée). Il faut alors remplacer dans les calculs m_2 par $m_2 \sin i$ de sorte que l'on ne peut déterminer que le produit $m_2 \sin i$. Ceci dit, cela permet d'avoir une borne inférieure de la masse de la planète puisque $m_2 \geq m_2 \sin i$.

Enfin, il se peut également que plusieurs planètes gravitent autour de l'étoile. Dans ce cas, la mise en évidence n'est pas toujours aisée et fait appel à des techniques plus ou moins sophistiquées.

Vibrations moléculaires diatomiques

Considérons une molécule diatomique A–B isolée, où A et B représentent deux atomes considérés ponctuels de masse m_A et m_B . Notons \vec{r} le vecteur \overrightarrow{AB} . Bien que la description des édifices moléculaires relève de la mécanique quantique, adoptons le point de vue du chapitre 5 en traitant l'interaction inter-atomique de façon phénoménologique *via* le potentiel de Morse

$$\mathcal{E}_p = E_0 \left(e^{-2ax} - 2e^{-ax} \right)$$

où E_0 désigne l'énergie de dissociation de la molécule et $x = r - r_{eq}$ l'écart à l'équilibre. Le profil de ce potentiel présente un minimum en $x = 0$ comme illustré sur la figure ci-contre.

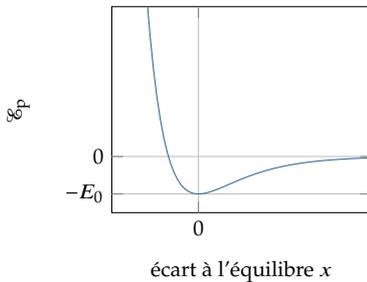


FIGURE 9.6 – Potentiels de Morse.

On sait que le mouvement relatif de B par rapport à A se réduit au mouvement du mobile réduit M de masse $\mu = m_A m_B / (m_A + m_B)$ soumis à la force central $\vec{f} = -\partial \mathcal{E}_p / \partial x \vec{u}_r$:

$$\mu \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \vec{f}$$

On distingue deux cas de figures.

La molécule ne tourne pas

Dans ce cas, la molécule ne présente pas de moment cinétique barycentrique et l'on peut projeter l'équation du mouvement suivant l'axe fixe de la molécule. On obtient

$$\mu \ddot{r} = \mu \ddot{x} = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x}$$

Par ailleurs, si l'on s'intéresse aux petits mouvements autour de la position d'équilibre, on peut faire l'approximation

$$\mathcal{E}_p \simeq -E_0 + \frac{1}{2}\kappa x^2 \quad \text{avec} \quad \kappa = 2E_0 d^2$$

ce qui donne une équation du mouvement correspondant à un oscillateur de masse μ et de constante de raideur κ :

$$\mu \ddot{x} + \kappa x = 0$$

On peut donc assimiler la liaison moléculaire à un oscillateur de fréquence propre

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$$

Cette fréquence se situe dans le domaine infrarouge ($\nu_0 \sim 10^{13} - 10^{14}$ Hz) et son étude relève de la spectroscopie infrarouge. On note l'existence d'effets isotopiques. En effet, lorsque que l'on substitue un atome par un autre isotope, la constante de force κ , dépendant des propriétés électroniques, ne change pas, alors que la masse réduite varie.

La molécule est en rotation

Dans ce cas, la molécule présente un moment cinétique barycentrique non nul et constant. On sait alors que le mobile réduit associé au mouvement relatif décrit un mouvement plan caractérisée par une constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$ et un moment cinétique $L^* = \mu C$. La force centrale étant conservative, on a conservation de l'énergie mécanique dans le référentiel barycentrique :

$$\frac{1}{2}\mu v_M^2 + \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_m^*$$

En coordonnées polaires, la vitesse du mobile réduit vaut $\vec{v}_M = \dot{r}\vec{u}_r + L^*/(\mu r)\vec{u}_\theta$ ce qui donne

$$\frac{1}{2}\mu \dot{x}^2 + \frac{L^{*2}}{2\mu(x+r_{\text{eq}})^2} + \mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_m^*$$

Ainsi, on peut ramener le problème à l'étude d'un point matériel à un degré de liberté (x) plongé dans un champ de force d'énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \frac{L^{*2}}{2\mu(x+r_{\text{eq}})^2} + \mathcal{E}_p(x)$$

Enfin, si l'on se restreint aux petits mouvements autour de la position d'équilibre, on peut d'une part approcher $\mathcal{E}_p(x)$ par un potentiel harmonique, d'autre part assimiler $x + r_{\text{eq}}$ à r_{eq} :

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}} \simeq \frac{L^{*2}}{2\mu r_{\text{eq}}^2} + \frac{1}{2}\kappa x^2 - E_0$$

On distingue trois termes :

- l'énergie de liaison $-E_0$;
- le terme élastique harmonique $\frac{1}{2}\kappa x^2$ associé aux vibrations moléculaires ;
- le terme d'énergie centrifuge $L^{*2}/(2\mu r_{\text{eq}}^2)$ associé à la rotation rigide⁶⁹ de la molécule.

69: On parle de l'approximation du rotateur rigide.

Remarque : Dans le cadre de la mécanique quantique, on peut montrer que le terme élastique donnera lieu à une quantification ($\mathcal{E}_{\text{vib}} = (n + 1/2)h\nu$) ainsi que le moment cinétique $L^{*2} = \ell(\ell + 1)\hbar^2$ de sorte que la molécule présente des niveaux d'énergie quantifiés :

$$\mathcal{E}_{n,\ell} = (n + 1/2)h\nu_0 + \ell(\ell + 1)\frac{\hbar^2}{2\mu r_{\text{eq}}^2} - E_0 \quad \text{avec } (n, \ell) \in \mathbb{N}^2$$

C'est ce modèle qui permet d'interpréter les spectres issus de la spectroscopie infrarouge.

Nous abordons dans ce chapitre les processus de collision qui font intervenir deux particules ou objets macroscopiques. Nous verrons comment, malgré l'absence d'information sur l'interaction durant la collision, il nous est possible de décrire complètement ou partiellement l'état du système après la collision si on le connaît avant le choc.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/mecanique/physique-des-collisions.php>

10.1 Lois de conservation

Position du problème

Il existe des situations dans lesquelles des corps matériels interagissent entre eux seulement lorsqu'ils sont très proches. Par ailleurs, il arrive souvent que cette interaction soit difficile à expliciter. Dans ce cas, le point de vue le plus simple consiste à dire que les particules subissent un choc : on suppose alors qu'ils n'interagissent pas avant ni après et que l'interaction se produit sur une durée très courte.

Définition

On dit qu'il y a collision ou choc entre deux ou plusieurs particules quand ces objets subissent une interaction mutuelle de courte durée et de courte portée. Le choc est localisé dans le temps et l'espace. En règle générale, les forces d'interaction sont négligeables quand les particules sont suffisamment éloignées. On peut donc distinguer un « avant » et un « après » la collision.

Ainsi, avant et après la collision, les particules se déplacent en ligne droite avec des vitesses uniformes. On notera \vec{v}_i la vitesse d'une particule avant le choc et \vec{v}_i' celle après. La problématique est la suivante : compte tenu de la mesure des vitesses \vec{v}_i , peut-on déduire quelques informations sur les vitesses \vec{v}_i' malgré l'absence de détails concernant l'interaction lors du choc ? Réciproquement, quelle information nous apporte la mesure des vitesses finales \vec{v}_i' ?

Remarque : contrairement à l'usage courant du terme, une collision ici n'implique pas forcément qu'il y ait un impact ! Ainsi, le problème d'une comète qui passerait au voisinage du Soleil peut être vu comme une collision.

10.1 Lois de conservation	117
Position du problème	117
Grandeurs conservées	118
10.2 Collisions élastiques	118
Définition	118
Collision unidimensionnelle	119
Collision à 3 dimensions	120
10.3 Collisions inélastiques	122
Définition	122
Choc mou	122
Coefficient de restitution	123
Désintégration	124

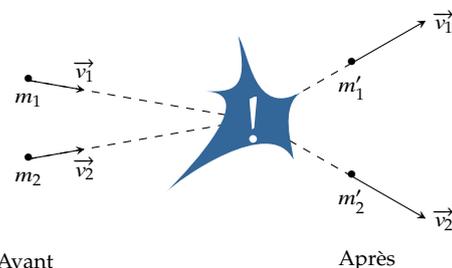


FIGURE 10.1 – Collision

Grandeurs conservées

Malgré notre connaissance partielle du problème, on peut obtenir certaines informations grâce aux lois de conservation et/ou de symétrie. Désignons par \mathcal{S} le système mécanique formé par l'ensemble des particules. On considère ce système isolé de l'extérieur ($\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$). Enfin, l'analyse est effectuée dans un référentiel galiléen.

Conservation de la quantité de mouvement du système

D'après le théorème du centre d'inertie on a

$$\frac{d\vec{p}_{\mathcal{S}}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0}$$

La quantité de mouvement du système se conserve donc.

$$\vec{p}_{\mathcal{S}}^{\text{avant}} = \vec{p}_{\mathcal{S}}^{\text{après}} \quad \heartsuit \quad (10.1)$$

Conservation de l'énergie

Si les forces d'interaction dérivent d'une énergie potentielle d'interaction $\mathcal{E}_p^{\text{int}}$, alors l'énergie totale du système s'écrit :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c(\mathcal{S}) + \mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S}) + \sum_{\text{particules}} U_i$$

où $\mathcal{E}_c(\mathcal{S})$ représente l'énergie cinétique macroscopique du système, $\mathcal{E}_p^{\text{int}}(\mathcal{S})$ l'énergie d'interaction entre les particules et U_i l'énergie interne de chaque particule.

Le système étant isolé de l'extérieur, l'énergie totale se conserve. De plus, avant et après le choc, on considère que les particules n'interagissent pas entre elles. On peut donc écrire, si l'on note N_1 le nombre de particules avant le choc et N_2 celui après le choc :

$$\left[\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) + \sum_{i=1}^{N_1} U_i \right]^{\text{avant}} = \left[\mathcal{E}_c(\mathcal{S}) + \sum_{i=1}^{N_2} U_i \right]^{\text{après}} \quad \heartsuit \quad (10.2)$$

Dans la suite on se limite aux collisions mobilisant seulement deux points matériels.

10.2 Collisions élastiques

Définition

On dit qu'il y a collision élastique lorsque le nombre de particules reste constant **et** que l'énergie interne de chaque particule reste inchangée avant et après le choc. En d'autres termes, les particules ne se

déforment pas ni ne changent de nature. Les lois de conservation sont donc

$$m_i = m'_i \quad \text{et} \quad \vec{p}_s^{\text{avant}} = \vec{p}_s^{\text{après}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_c(\mathcal{S})^{\text{avant}} = \mathcal{E}_c(\mathcal{S})^{\text{après}} \quad \heartsuit \quad (10.3)$$

Citons quelques exemples :

- collision entre boules de pétanque (boules dures indéformables) ;
- diffusion de Rutherford (diffusion d'un noyau ${}^4\text{He}^{2+}$ par un noyau positif).

Collision unidimensionnelle

Traisons l'exemple d'une collision frontale élastique entre deux corps assimilables à deux points matériels. Notons \vec{v}_1, \vec{v}_2 les vitesses avant le choc et \vec{v}'_1, \vec{v}'_2 les vitesses après le choc. On se place dans le cas où toutes les vitesses sont colinéaires. Le problème est donc à une dimension et présente deux inconnues (v'_1 et v'_2). Ainsi, les deux lois de conservation devraient suffire à décrire complètement le système après le choc.

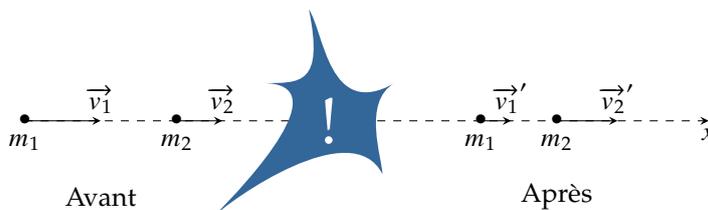


FIGURE 10.2 – Collision unidirectionnelle.

Écrivons les deux relations de conservation (conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique)

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 & = & m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 & = & m_1 (v'_1)^2 + m_2 (v'_2)^2 \end{cases}$$

où les vitesses v_i et v'_i sont des vitesses *algébriques*. Cela donne

$$\begin{cases} m_1 (v'_1 - v_1) & = & m_2 (v_2 - v'_2) \\ m_1 ((v'_1)^2 - v_1^2) & = & m_2 (v_2^2 - (v'_2)^2) \end{cases}$$

En divisant la deuxième relation par la première on obtient $v'_1 + v_1 = v'_2 + v_2$, et, par substitution, on trouve les vitesses finales en fonction des vitesses initiales :

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \\ v'_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Notez la symétrie de la solution ; il y a invariance par échange des indices $1 \leftrightarrow 2$.

La relation (10.4) est mise à profit en Spectroscopie de Rétrodiffusion de Rutherford (ou RBS pour *Rutherford Backscattering Spectrometry*). Cette technique d'analyse utilisée en science des matériaux consiste à envoyer des ions légers mais rapides (des particules alpha ${}^4_2\text{He}^{2+}$, ou des protons en général) sur la surface d'un matériau. Grâce à l'interaction coulombienne, les noyaux en surface font rebondir à 180° certains noyaux alpha. Ce processus s'accompagne d'une perte d'énergie cinétique qui dépend des masses comme le suggère la formule (10.4). La mesure de la perte d'énergie permet donc de déduire la composition chimique à la surface d'un matériau.



FIGURE 10.3 – Pendule de Newton

Intéressons-nous au cas où la cible est immobile. Dans ce cas, $v_2 = 0$ d'où

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned}$$

On note que si la cible est plus lourde que le projectile, ce dernier rebondit en changeant de sens ($v_1' < 0$). Dans tous les cas, la vitesse du projectile diminue en valeur absolue. On peut vérifier que l'énergie cinétique perdue par le projectile vaut

$$Q = \mathcal{E}'_{c1} - \mathcal{E}_{c1} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} \mathcal{E}_{c1} \quad (10.4)$$

Voyons maintenant quelques cas particuliers.

1. Si le projectile est beaucoup plus léger que la cible ($m_1 \ll m_2$) on a

$$v_1' \simeq -v_1 \quad \text{et} \quad v_2' \simeq 0$$

Il y a rebond avec inversion du sens de la vitesse. Ayant une grande inertie, la cible ne bouge pas. C'est ce que l'on obtient lorsqu'on laisse tomber une boule indéformable par terre sur un sol parfaitement rigide.

2. À l'inverse, si $m_1 \gg m_2$ on obtient

$$v_1' \simeq v_1 \quad \text{et} \quad v_2' \simeq 2v_1$$

c'est ce qui se passe quand on tape dans une balle avec une raquette par exemple.

3. Si projectile et cible ont même masse, on obtient

$$v_1' = 0 \quad \text{et} \quad v_2' = v_1$$

il y a échange des vitesses. C'est ce phénomène qui est à l'origine des oscillations du pendule de Newton par exemple (voir Figure 10.3.).

Collision à 3 dimensions

Considérons la collision élastique entre un point matériel de masse m_1 animé d'une vitesse \vec{v}_1 et un point matériel de masse m_2 initialement au repos.

Les lois de conservation donnent

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_1 &= m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \\ m_1 v_1^2 &= m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \end{cases}$$

Ce système présente quatre équations scalaires pour six inconnues (\vec{v}_1' et \vec{v}_2'). Il reste donc deux paramètres indéterminés si on se limite aux lois de conservation. Par exemple, la première relation nous dit que le mouvement se fait dans un plan contenant \vec{v}_1 . Il nous suffit d'un

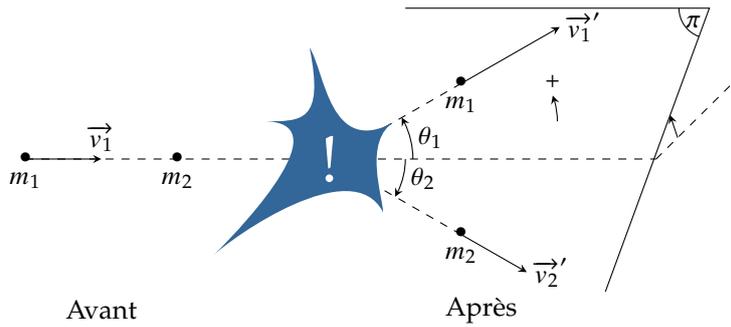


FIGURE 10.4 – Collision entre un projectile et une cible fixe.

paramètre (un angle par exemple) pour fixer ce plan. Ensuite si l'on connaît la déviation entre les particules, alors les autres paramètres sont accessibles. Notez que seule une étude complète faisant intervenir l'interaction permet d'accéder à toutes les informations.

Cas où $m_1 = m_2$

Cette situation se rencontre par exemple au billard si l'on n'oublie les effets produits par la rotation de la bille. Le système d'équations précédent donne

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2' \\ v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \end{cases}$$

Si on élève la première équation au carré, on trouve $v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2'$. En la soustrayant à la deuxième, on obtient

$$\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = 0$$

Les deux vecteurs vitesses forment un angle droit. Autrement dit, on a $\theta_1 - \theta_2 = \pi/2$.

Continuons en multipliant la première relation par \vec{v}_1' :

$$\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_1 = v_1'^2 + \vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = v_1'^2$$

soit

$$v_1 v_1' \cos \theta_1 = v_1'^2 \implies v_1' = v_1 \cos \theta_1$$

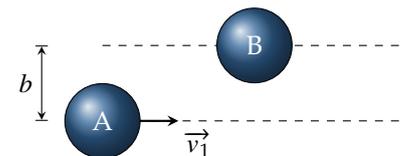
De la même façon, en multipliant la première relation par \vec{v}_2' on obtient $v_2' = v_1 \cos \theta_2$. En résumé on a

$$v_1' = v_1 \cos \theta_1 \quad \text{et} \quad v_2' = v_1 \cos \theta_2 \quad \text{et} \quad \theta_1 - \theta_2 = \pi/2$$

Par conséquent, si l'on connaît θ_1 et v_1 on peut calculer v_1' , puis θ_2 et v_2' . Dans le cas du billard, l'angle θ_1 ne dépend que d'une grandeur : le paramètre d'impact b . On montre que

$$\cos \theta_1 = \frac{b}{2R}$$

où R représente le rayon des billes. En « visée pleine bille », $b = 0$ et $\theta_2 = 0$. Dans ce cas, on obtient $v_1' = 0$ et $v_2' = v_1$: on retrouve la collision



directe de deux masses identiques. En « visée demi-bille », $b = R/2$ d'où $\theta_1 = 60^\circ$, $\theta_2 = -30^\circ$, $v'_1 = v_1/2$ et $v'_2 = v_1 \sqrt{3}/2$. Dans le cas où la bille frôle la cible (on parle de « visée finesse ») on a $b \rightarrow 2R$, $\theta_2 \rightarrow \pi/2$ et $v'_2 \simeq 0$: la cible est dévié de 90° par rapport à la ligne de visée avec une vitesse cependant faible.

10.3 Collisions inélastiques

Définition

On dit qu'une collision est inélastique lorsqu'une partie de l'énergie cinétique initiale du système s'est transformée en d'autres formes d'énergie. La collision s'accompagne alors d'une variation d'énergie interne et/ou d'une modification du nombre de particules, certaines pouvant être créées par fragmentation ou par équivalence masse-énergie. Les exemples sont nombreux :

- Lorsqu'on laisse tomber une boule en pâte à modeler, celle-ci ne rebondit pas : toute l'énergie cinétique acquise par la boule avant l'impact est convertie en énergie interne d'où une déformation et un échauffement du projectile.
- Les réactions chimiques sont en fait le résultat d'une ou plusieurs collisions inélastiques. Par exemple, le processus élémentaire bimoléculaire $A+B \rightarrow C+D$ est un choc inélastique puisque les particules après la collision sont différentes des particules avant.
- Les réactions nucléaires (désintégration, fusion et fission) sont également des processus inélastiques. En général, ces réactions dégagent une énergie considérable.

Le caractère inélastique de la collision est mesurée par la quantité d'énergie

$$Q = \mathcal{E}_c(S)^{\text{après}} - \mathcal{E}_c(S)^{\text{avant}} = \left[\sum_{i=1..N_2} U_i \right]^{\text{avant}} - \left[\sum_{i=1..N_1} U_i \right]^{\text{après}}$$

De l'énergie est libérée si $Q > 0$ et dissipée si $Q < 0$.

Choc mou

Supposons qu'une particule de masse m_1 se déplaçant à la vitesse \vec{v} , heurte une cible immobile de masse m_2 , puis qu'elle se lie à elle. On parle alors de **choc mou**. Après la collision, l'ensemble se déplace à la vitesse \vec{v}' . Quelle est alors la perte d'énergie ?

Les lois de conservation s'écrivent

$$m_1 \vec{v} = (m_1 + m_2) \vec{v}' \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} m_1 v^2 + Q = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2$$

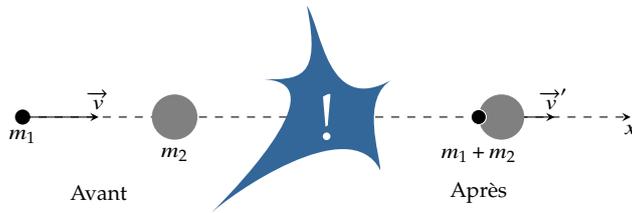


FIGURE 10.5 – Choc mou

Ainsi \vec{v}' est colinéaire à \vec{v} : le problème est unidimensionnel. On trouve

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \quad \text{et} \quad Q = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v^2$$

Exercice – Retrouver ce dernier résultat en raisonnant dans le référentiel barycentrique.

La proportion d'énergie dissipée vaut

$$\frac{|Q|}{\mathcal{E}_c(S)} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Autrement dit, si $m_2 \gg m_1$, quasiment toute l'énergie cinétique du projectile est dissipée.

Coefficient de restitution

Laissons tomber une balle B sur une surface S rigide : on constate qu'elle rebondit mais la hauteur des rebonds ne cesse de décroître au cours du temps, ce qui traduit une dissipation d'énergie cinétique au moment de l'impact. En effet, lors de l'impact une partie de l'énergie cinétique s'est convertie en énergie interne (échauffement et déformation). L'analyse d'un rebond étant très complexe, on adopte une approche phénoménologique en définissant un *coefficient de restitution* pour exprimer cette perte. Ce coefficient, noté e vaut, par définition,

$$e \triangleq \frac{v_{B/S}^{\text{après}}}{v_{B/S}^{\text{avant}}} \tag{10.5}$$

où « avant » et « après » désignent les moments juste avant le choc et juste après. Ce coefficient, généralement compris entre 0 et 1, dépend de la constitution des corps qui entrent en collision.

choc	élastique	acier-acier	balle superélastique	bois - bois	choc mou
$e =$	1	0,95	0,95	0,5	0

TABLE 10.1 – Quelques valeurs de coefficients de restitution.

Mesure d'un coefficient de restitution – Lâchons une balle d'une hauteur h_0 dans le champ de pesanteur g . La balle arrive au niveau du sol à la vitesse $v_0 = \sqrt{2gh_0}$. Juste après le premier choc, la balle acquiert une vitesse $v_1 = e v_0$. Après le n^{e} rebond, elle remonte avec une vitesse $v_n = e^n v_0$. Or, on sait que la durée t_n du n^{e} rebond est reliée à la vitesse d'ascension *via* la relation $v_n = \frac{1}{2} g t_n$ (notez qu'un rebond correspond à un aller-retour d'où le facteur 1/2). Finalement, la durée de chaque rebond s'écrit $t_n = e^n t_0$. Ainsi, si l'on porte $y = \ln t_n$ en fonction de $x = n$ on obtient une droite affine d'équation $y = ax + b$ avec un coefficient directeur $a = \ln e$ ce qui permet d'obtenir le facteur de restitution.

De manière générale, pour une collision inélastique directe, on définit le coefficient de restitution à partir du rapport des vitesses relatives :

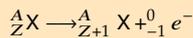
$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2} \quad (10.6)$$

Exercice – Un point matériel de masse m_1 animé d'une vitesse v_1 entre en collision avec un point matériel au repos de masse m_2 . Sachant que la collision est unidimensionnelle et inélastique de coefficient de restitution e , exprimer les vitesses après le choc.

Rép. $v_1' = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} v_1$ et $v_2' = \frac{m_1(1+e)}{m_1 + m_2} v_1$.

Histoire : l'invention du neutrino

Dans les années 1910, l'étude de la radioactivité β^- laisse perplexe. Ce type de radioactivité se manifeste par la production d'électrons suivant le schéma



Vu le rapport de masse entre l'électron et un nucléon (1/1836) et d'après la formule (10.7), on s'attend à ce que les électrons emportent toute l'énergie de la réaction. On doit donc observer des électrons monokinétiques. Or, en analysant le spectre en énergie de ces électrons, on trouve que cette prévision est incompatible avec les faits, comme si l'énergie n'était pas conservée. Certains physiciens ont bien pensé remettre en cause le principe de conservation de l'énergie (Niels Bohr par exemple) mais c'est Wolfgang Pauli qui, en 1930, eut la lumineuse intuition qu'une particule, invisible pour les détecteurs de l'époque, devait emporter une part de l'énergie. Cette particule devait être neutre et légère : initialement baptisée neutron par Pauli, on l'a finalement appelée *neutrino*. Il faudra attendre l'année 1956 pour détecter directement cette particule élémentaire.

Désintégration d'une particule au repos

Considérons un noyau X au repos qui se désintègre spontanément en deux noyaux X_1 et X_2 de masse m_1 et m_2 . Appelons Q l'énergie libérée par la réaction nucléaire. Rappelons que dans ces réactions il existe une infime différence entre la masse m du noyau X et celle $m_1 + m_2$ des produits. Cette différence $\Delta m = m - (m_1 + m_2)$ est responsable, par équivalence énergie-masse, de l'énergie libérée $Q = \Delta mc^2$.

Appliquons les lois de conservation :

$$Q = \mathcal{E}_{c1} + \mathcal{E}_{c2} \quad \text{et} \quad m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = \vec{0}$$

avec E_{ci} l'énergie cinétique des noyaux fils. Comme $(m_i \vec{v}_i')^2 = 2m_i E_{ci}$, il vient

$$Q = \mathcal{E}_{c1} + \mathcal{E}_{c2} \quad \text{et} \quad m_1 \mathcal{E}_{c1} = m_2 \mathcal{E}_{c2}$$

Finalement, on trouve

$$\mathcal{E}_{c1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} Q \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{c2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} Q \quad (10.7)$$

Ainsi, la particule la plus légère emporte la quasi-totalité de l'énergie de réaction.

Exercice – Un noyau d'uranium ${}^{238}\text{U}$ au repos se désintègre en émettant une particule alpha (${}^4_2\text{He}^{2+}$) et en laissant un noyau résiduel de thorium ${}^{234}\text{Th}$ ($m_2 \simeq 234 \text{ uma}$). L'énergie produite par cette désintégration vaut $Q = 4,18 \text{ MeV}$. Que vaut l'énergie cinétique et la vitesse de la particule alpha ?

Rép. $\mathcal{E}_c = 4,11 \text{ MeV}$ et $v = 1,41 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$.

EFFETS DUS À LA ROTATION TERRESTRE

11

Pourquoi faire tourner la torche autour de la mouche ?

Aristarque de Samos (250 av. J.-C.)

La Terre tourne. C'est un fait établi, aussi solidement établi que l'existence des atomes ou la structure en double hélice de l'ADN. Néanmoins, saviez-vous que la preuve ne nous a été apportée qu'au XVIII^e siècle ?

Bien sûr, il y eut la première étincelle initiée par Nicolas Copernic en 1543. Ce chanoine polonais trouvait le système de Ptolémée et ses différents rafistolages⁷² bien éloignés de la soi-disante harmonie du Cosmos prônée par la théorie aristotélicienne. C'est en cherchant un système plus simple que Copernic finit par proposer un système héliocentrique⁷³. Certes, son modèle était moins précis que celui de Ptolémée⁷⁴, mais ce décentrage de la Terre –et donc de l'Homme– séduit bien des intellectuels à l'ère de la Renaissance. Puis, Galilée amassa avec sa lunette une moisson d'observations qui ne feront que renforcer la théorie copernicienne.

Toutefois, aussi séduisant qu'il soit, l'héliocentrisme n'en reste pas moins une simple hypothèse. La diffusion des *Naturalis Philosophiæ Principia Mathematica*, l'œuvre magistrale d'Isaac Newton dans laquelle il fait table rase du dogme aristotélicien et explique tous les phénomènes célestes à l'aide de sa fameuse loi de gravitation universelle, finit de convaincre la communauté scientifique, sans qu'on ait trouvé de preuve définitive.

Il faut attendre l'année 1728, un an après la mort de Newton, pour qu'un certain James Bradley découvre le phénomène d'*aberration des étoiles*. Il s'agit d'un mouvement apparent annuel identique pour toutes les étoiles qui est directement lié à la vitesse orbitale de la Terre et à la vitesse de la lumière. Le doute n'est plus permis : la Terre tourne bel et bien autour du Soleil en un an, et par conséquent, également sur elle-même si l'on veut voir le Soleil se lever chaque matin !

Dans ce cours, nous nous intéressons à l'influence de cette rotation sur les phénomènes mécaniques vus par un observateur terrestre. Dans un premier temps, nous tiendrons compte uniquement de la rotation propre de la Terre autour de l'axe des pôles. On pourra ainsi mesurer le caractère non galiléen du référentiel terrestre. Ensuite, nous verrons comment le mouvement orbital de la Terre autour du Soleil permet d'expliquer le phénomène des marées.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/mecanique/dynamique-terrestre.php>

11.1 Effets de la rotation propre	126
Hypothèses	126
Pesanteur terrestre	126
Déviation vers l'Est	128
Déviation vers la droite	130
Le pendule de Foucault	132
11.2 Effets du mouvement orbital	134
Le référentiel de Copernic	134
Notion de forces de marée	134
Marées océaniques	137
Conclusion	139

72: Dans ce système du monde, la Terre est au centre du Cosmos et chaque planète ainsi que le Soleil tourne autour en décrivant un cercle appelé *déférent*. Les étoiles (autre que le Soleil) sont fixées sur une sphère qui tourne également autour de la Terre. Pour expliquer le phénomène de rétrogradation, on inventa l'*épicycle*, petit cercle le long duquel les planètes se meuvent et dont le centre décrit le déférent. Enfin, Ptolémée décentra légèrement le déférent en inventant l'*équiant* pour obtenir un système plus fidèle aux observations astronomiques.

73: Le Soleil est au centre et la Terre tourne sur elle-même et autour du Soleil comme toutes les planètes. La sphère des fixes est fixe. Le phénomène de rétrogradation comme le fait que Mercure et Vénus sont proches du Soleil sont des conséquences directes de l'hypothèse.

74: Copernic refuse le concept d'équiant et reste fidèle au dogme aristotélicien du mouvement circulaire uniforme. C'est Kepler qui verra plus tard que l'ellipse reproduit très bien le mouvement des planètes.

11.1 Effets de la rotation propre de la Terre

Hypothèses

On appelle référentiel géocentrique, le référentiel lié au centre d'inertie de la Terre et dont les axes pointent vers des étoiles suffisamment éloignées pour être considérées comme fixes. Nous admettons que ce référentiel est galiléen. Nous discuterons plus loin de la valeur de cette approximation.

La Terre est décrite de façon simple. On la suppose sphérique, de rayon $R_T = 6370$ km et en rotation uniforme par rapport à l'axe des pôles. La période de rotation propre de la Terre est appelée **jour sidéral** et vaut

$$T = 1 \text{ jour sidéral} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} = 86164 \text{ s}$$

Le référentiel terrestre \mathcal{R} est lié à la surface de la Terre. On le muni d'un repère d'origine O situé à la surface de la Terre et de trois axes cartésiens. On choisit l'axe Oz dirigé vers le zénith, l'axe Ox vers le Sud et l'axe Oy vers l'Est. La position du point O est définie à l'aide de deux angles : la latitude λ et la longitude φ .

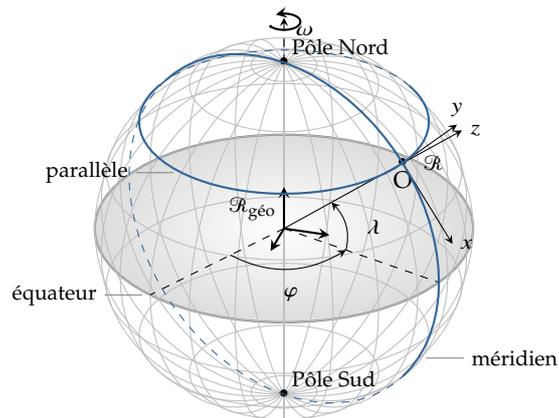


FIGURE 11.1 – Le référentiel terrestre est en rotation par rapport au référentiel géocentrique.

75: Rigoureusement, le vecteur rotation varie en direction et en norme. D'une part, l'axe de rotation décrit un cône de révolution en 2600 ans : c'est le phénomène de *précession des équinoxes*. D'autre part, du fait des effets de marée, la durée du jour augmente d'environ 2 ms par siècle. Considérer $\vec{\omega}$ comme un vecteur constant reste donc une excellente approximation à l'échelle de l'année[4].

Le référentiel terrestre est en rotation uniforme⁷⁵ par rapport au référentiel géocentrique. Il n'est donc pas galiléen. Son vecteur rotation est suivant l'axe Sud-Nord (\vec{u}_{sn}) :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_{sn} \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

Pesanteur terrestre

Définition de la pesanteur

Dans le vide, attachons un point matériel M à un fil, puis attendons l'équilibre mécanique. La pesanteur qui règne dans le référentiel considéré, provoque la tension du fil. La direction du fil indique celle de la pesanteur, et le poids \vec{P} de ce corps est l'opposé de la tension du fil.

Établissons la formule générale du poids \vec{P} d'un corps dans un référentiel quelconque (*a priori* non galiléen). Dans ce référentiel, l'équilibre d'un point matériel M se traduit par la relation

$$\vec{F} - m\vec{a}_e(M) = \vec{0} \quad (11.1)$$

où \vec{F} désigne les actions autres que les forces d'inertie. L'absence de la force de Coriolis est justifiée par le fait que M est supposé fixe dans le référentiel. Si l'on suppose M dans le vide, les forces se résument à la tension du fil \vec{T} et aux forces de gravitation produites par l'ensemble des astres, ce qui donne

$$\vec{T} + m\vec{g}_A(M) - m\vec{a}_e(M) = \vec{0}$$

où \vec{g}_A désigne le champ de gravitation exercé par tous les astres de l'Univers et \vec{a}_e l'accélération d'entraînement lié au mouvement du référentiel d'étude par rapport à un référentiel galiléen. Le poids vaut donc :

$$\vec{P} \triangleq -\vec{T} = m [\vec{g}_A(M) - \vec{a}_e(M)]$$

On remarque que le poids est proportionnel à la masse⁷⁶ et dépend du référentiel dans lequel M est au repos. Par exemple, dans un satellite en orbite autour de la Terre, le champ de gravitation \vec{g}_A est essentiellement dû à la Terre et l'accélération d'entraînement du satellite est égale à \vec{g}_A puisqu'il est en « chute libre » autour de la Terre. Par conséquent, le poids dans un satellite –et dans tout référentiel en chute libre– est nul : on parle d'apesanteur.

76: En réalité le terme de gravitation est proportionnel à la masse grave alors que le force d'inertie est proportionnelle à la masse inerte. En vertu du principe d'équivalence, ces deux masses sont égales.

Par définition, le **champ de pesanteur** \vec{g} est le poids d'une masse unité :

$$\vec{P} = m\vec{g}(M) \quad \text{avec} \quad \vec{g}(M) = \vec{g}_A(M) - \vec{a}_e(M) \quad \heartsuit \quad (11.2)$$

Ce champ de pesanteur étant homogène à une accélération, on l'exprimera indifféremment en N.kg^{-1} ou en m.s^{-2} .

Appliquons maintenant ces résultats au référentiel terrestre, le référentiel géocentrique étant considéré galiléen. À la surface de la Terre, le champ de gravitation est essentiellement dû à la Terre. De plus, si l'on suppose la Terre à symétrie sphérique, on a

$$\vec{g}_A(M) = -\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} \vec{u}_r = -\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^3} \overrightarrow{\text{CM}}$$

où C est le centre de la Terre et \vec{u}_r le vecteur unitaire radial de la base sphérique. Quant à l'accélération d'entraînement, il s'agit de l'accélération du point M (supposé fixe) par rapport au référentiel géocentrique (supposé galiléen). Du fait de la rotation uniforme du référentiel terrestre, M présente une accélération d'entraînement centripète :

$$\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \overrightarrow{\text{HM}}$$

avec H le projeté de M sur l'axe des pôles de la Terre. En résumé, on

peut écrire

$$\vec{g}(\text{M}) = -\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^3}\vec{\text{CM}} + \omega^2\vec{\text{HM}} \quad (11.3)$$

Le premier terme est dirigé vers le centre de la Terre et vaut environ $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Le second terme est axi-fuge (il « fuit » l'axe de rotation) et représente au maximum 0,3% du champ de gravitation. Ce dernier terme diminue quand la latitude augmente ce qui se traduit par une moindre pesanteur à l'équateur comparée à celle qui existe aux pôles. La formule (11.3) rend bien compte, en tout cas de manière qualitative, de l'influence de la rotation terrestre. Toutefois, on peut dire que sur Terre, la rotation propre influence peu la pesanteur.

Exercice – Comparer les champs de gravitation qu'exercent le Soleil, la Lune et la Terre sur un corps situé à la surface de la Terre.

Astre	Terre	Soleil	Lune
Masse (kg)	$6 \cdot 10^{24}$	$2 \cdot 10^{30}$	$7,3 \cdot 10^{22}$
Distance à la Terre (km)	–	$150 \cdot 10^6$	$384 \cdot 10^3$
Rayon (km)	6370		

Rép. On obtient pour, respectivement la Terre, le Soleil et la Lune :

$$g_T \approx 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \quad g_S \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \quad \text{et} \quad g_L \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Pour terminer, précisons que la formule (11.3) ne rend pas complètement compte des effets de la rotation terrestre. En effet, la Terre présente une forme d'équilibre qui n'est pas sphérique du fait précisément de cette permanente rotation propre. Cela induit un aplatissement des pôles qui fait que le champ de gravitation terrestre n'est pas uniforme : aux pôles, l'attraction terrestre est plus importante. Finalement, la pesanteur dépend de la latitude, pour deux raisons : la non sphéricité de la Terre et sa rotation propre. Pour trouver une valeur précise du champ de pesanteur moyen⁷⁷ en un lieu, les géophysiciens utilisent la formule⁷⁸ :

$$g(\lambda) = 9,7803(1 + 5,2789 \cdot 10^{-3} \sin^2 \lambda + 23,462 \cdot 10^{-6} \sin^4 \lambda)$$

Déviations vers l'Est

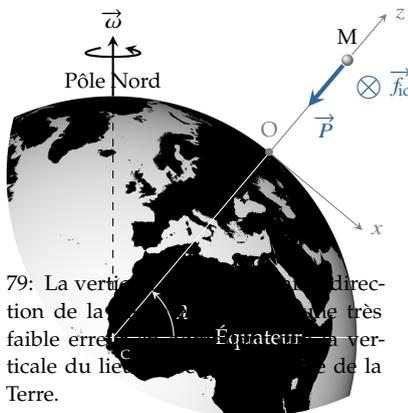
La déviation vers l'Est désigne la légère déflexion que subit un point matériel M en chute libre par rapport à la verticale. Nous allons démontrer que cette déviation est toujours orientée vers l'Est et de faible ampleur en analysant le phénomène dans le référentiel terrestre \mathcal{R} .

Qualitativement, lorsqu'on lâche un corps matériel (vitesse initiale nulle), le champ de pesanteur l'accélère dans une direction descendante⁷⁹. La force de Coriolis

$$\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

est donc dirigée vers l'Est, que l'on soit sur l'hémisphère nord ou sud. En revanche, la force de Coriolis est nulle aux pôles, car le vecteur rotation terrestre et le vecteur vitesse sont colinéaires.

77: moyen parce que le relief joue un rôle
78: formule acceptée depuis 1967 par l'Union International de Géologie et de Géophysique



79: La verticale de la direction de la pesanteur est très faiblement déviée de la verticale du lieu en raison de la rotation de la Terre.

FIGURE 11.2 – Déviation vers l'Est : forces en présence.

Avant d'écrire les équations, faisons quelques calculs d'ordre de grandeur en prenant une hauteur de chute $h \approx 100$ m et une masse $m \approx 1$ kg :

- la vitesse de chute est de l'ordre de $v \approx \sqrt{2gh} \approx 45 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$;
- d'où un temps de chute de l'ordre de $\tau \approx v/g \approx 5$ s;
- la pesanteur est de l'ordre de $P \approx 10$ N;
- la force de Coriolis $f_{ic} \approx 2m\omega v \approx 0,007$ N.

La force de Coriolis reste donc très faible par rapport au poids, ce qui justifie qu'on néglige, dans la plupart des cas, son effet. Ce faible impact sur la trajectoire va nous aider à traiter le problème de façon approximative puisque nous allons pouvoir considérer le terme de Coriolis comme une *perturbation* de la chute libre classique.

En premier lieu, écrivons la seconde loi de Newton dans le référentiel terrestre :

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = m \vec{g} - 2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \quad (11.4)$$

Contrairement aux apparences, la force d'inertie d'entraînement est bien présente dans l'équation du mouvement puisque c'est une composante de la pesanteur. La relation vectorielle (11.4) donne un système d'équations différentielles linéaires couplées. Les équations étant linéaires, on peut évidemment déterminer la solution analytiquement. Cependant, on peut aussi obtenir une excellente approximation du résultat sans trop d'effort. Il suffit de traiter l'équation du mouvement par la méthode des perturbations. L'idée consiste à remplacer dans le terme perturbateur (terme de Coriolis) la vitesse \vec{v} par $\vec{g}t$. La faible erreur que l'on commet sur la vitesse est complètement atténuée par le terme de Coriolis, 1000 fois plus petit que le poids. Ceci étant fait, la projection de (11.4) sur les axes cartésiens donne

$$\begin{cases} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= 2\omega \cos \lambda g t \\ \ddot{z} &= -g \end{cases}$$

où λ désigne la latitude du lieu. Aucune déviation suivant x n'est prévue (en première approximation) et l'on trouve une équation horaire suivant z analogue à la chute libre classique, à savoir $z(t) = h - 1/2gt^2$. En revanche, le mouvement suivant y est donné par

$$\ddot{y} = 2\omega \cos \lambda g t$$

où y désigne le déplacement vers l'Est. Après une double intégration on trouve

$$y(t) = \frac{\omega \cos \lambda}{3} g t^3 \quad (11.5)$$

Notons que la déviation y est positive quel que soit le signe de λ ; autrement dit la trajectoire est déviée vers l'Est quel que soit l'hémisphère où est réalisée l'expérience et l'effet est d'autant plus important que le temps de chute est important. Ce phénomène a été vérifié pour la première fois en 1833 par Ferdinand Reich à Freiberg en Allemagne (latitude = 51°), dans un puits de mine de profondeur $h = 158$ m. La déviation mesurée fut de 28 mm, en accord avec la valeur théorique

de 27,4 mm. En 1903, Camille Flammarion lâcha des billes d'acier du haut de la coupole du Panthéon ($h = 68$ m et $\lambda = 48^{\circ}51'$) et mesura une déviation vers l'est de 7,6 mm là encore en parfait accord avec la valeur théorique de 8 mm. En conclusion, le phénomène de déviation vers l'Est est un effet dû au caractère non galiléen de la Terre et reste difficile à mettre en évidence.

Point de vue géocentrique – Analysons le phénomène dans le référentiel géocentrique. Pour simplifier, étudions la chute libre d'un point matériel situé à l'équateur et lâché depuis une hauteur h . Le corps n'est soumis qu'à la gravitation de la Terre (en négligeant les autres forces de gravitation) et possède une vitesse initiale

$$\vec{v}_0 = (R + h)\omega \vec{u}_\theta \quad [\text{coordonnées polaires}]$$

dirigée vers l'Est, du fait de la rotation terrestre. L'observateur, lié au référentiel terrestre, possède une vitesse ortho-radiale

$$\vec{v}_{\text{obs}} = R\omega \vec{u}_\theta$$

Le corps décrit –comme nous l'avons vu dans le chapitre sur les forces centrales– une ellipse, de foyer le centre de la Terre, située dans le plan formé par \vec{CM} et \vec{v}_0 . Par conservation du moment cinétique on a

$$r^2 \dot{\theta} = (R + h)^2 \omega$$

Au début, le projectile tourne à une vitesse angulaire identique à celle de l'observateur terrestre (ω), mais au fur et à mesure que le projectile chute, r diminue et $\dot{\theta}$ augmente. Le projectile tournant plus vite que l'observateur, atterrira à côté de l'observateur en direction de l'Est. Pour un temps de chute τ , on trouve un décalage vers l'Est égal à

$$\delta = R \left(\int_0^\tau \dot{\theta} dt - \omega \tau \right)$$

Vous trouverez dans le [recueil d'exercices](#) le traitement complet qui aboutit au résultat (11.5).

Déviation vers la droite

La déviation vers la droite est un phénomène dû à la rotation de la Terre et s'explique facilement à l'aide de la force de Coriolis. Il est notamment à l'origine du sens d'enroulement des nuages autour des anticyclones et dépressions.

Considérons un point matériel M , à la surface de la Terre, en mouvement dans un plan horizontal (xOy). Sa vitesse $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ observée dans le référentiel terrestre obéit à l'équation

$$m \frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt} = m \vec{g} - 2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} + \vec{F}$$

où \vec{F} représente les actions autres que les forces de gravitation (incluses dans la pesanteur). Le vecteur rotation se décompose dans la base cartésienne comme suit :

$$\vec{\omega} = -\omega \cos \lambda \vec{u}_x + \omega \sin \lambda \vec{u}_z$$

de sorte que la force de Coriolis s'écrit

$$-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = 2m\omega \cos \lambda \vec{u}_x \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} - 2m\omega \sin \lambda \vec{u}_z \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Si le mouvement a lieu dans le plan horizontal, le premier terme donne naissance à une force verticale et apporte une très faible contribution à la pesanteur. En revanche, le deuxième terme est dirigé dans le plan horizontal et dévie le point matériel vers la droite lorsque le mouvement a lieu dans l'hémisphère nord et vers la gauche pour l'hémisphère sud. La force horizontale vaut

$$f_{ic,h} = 2m\omega \sin \lambda v_{M/\mathcal{R}} \quad (11.6)$$

Cet effet intervient par exemple en balistique pour des vitesses de projectile importantes et des distances de tir suffisamment longues pour que la faible force de Coriolis ait le temps de courber la trajectoire de façon significative. Par exemple, pendant la Première Guerre mondiale, les obus lancés par la « grosse Bertha » bombardant Paris à plus de 120 kilomètres de distance, subissaient des déviations de l'ordre du km à cause de la rotation terrestre.

Mais une des manifestations les plus évidentes est la formation des cyclones et anticyclones. En effet, dans l'hémisphère nord, les masses d'air anticycloniques s'enroulent dans le sens horaire alors que les masses d'air dépressionnaires (cycloniques) s'enroulent dans le sens anti-horaire. La situation inverse est observée dans l'hémisphère sud. Ce sens d'enroulement est dicté par la force de Coriolis. Voyons comment, en analysant le mouvement d'une masse d'air en direction d'un centre dépressionnaire située dans l'hémisphère nord. Supposons, pour simplifier, que la pression atmosphérique p ne dépend que de la distance comptée à partir d'un centre de basse pression, notée D. Toute particule de fluide est donc attirée vers le centre D *via* une force volumique⁸⁰

$$\vec{f}_p = -\vec{\nabla} p(r) = -\frac{dp}{dr} \vec{u}_r$$

Cette force est bien dirigée vers le centre D lorsque la pression augmente avec r . On s'attend donc à ce que le vent soit perpendiculaire aux isobares. Or, la rotation terrestre vient compliquer les choses, car dès que le mouvement s'amorce, la masse d'air est déviée vers la droite à cause de la force de Coriolis (force volumique pour 1 m^3 d'air)

$$f_{ic,h} = 2\rho \omega \sin \lambda v$$

Mais la force de pression maintient la masse d'air à proximité de D. À la fin, l'air tourne autour de D dans le sens anti-horaire (cf. Figure 11.4) de sorte que la force de Coriolis compense la force de pression et l'accélération centripète. Pour une dépression située dans l'hémisphère sud, la force de Coriolis produit une déviation vers la gauche ce qui mène à une circulation de masse d'air autour de D dans le sens horaire.

Une analyse similaire des mouvements anti-cycloniques aboutit aux

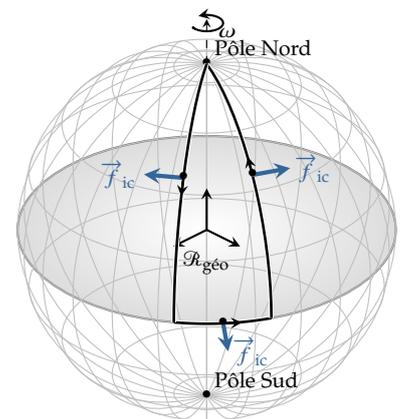


FIGURE 11.3 – Déviation vers la droite pour un corps en mouvement horizontal sur Terre.

80: Voir cours sur les fluides parfaits à l'adresse femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/fluides-parfaits.php.

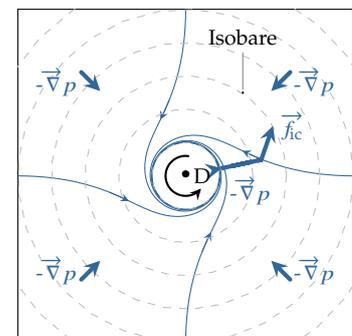


FIGURE 11.4 – Formation d'un cyclone dans l'hémisphère nord.

résultats opposés : un anticyclone s'enroule dans le sens horaire(anti-horaire) dans l'hémisphère nord(sud).

Remarque : Contrairement à une croyance encore très tenace, la force de Coriolis due à la rotation terrestre n'est en rien responsable du sens de rotation du vortex qui se forme lors de la vidange d'un lavabo. La force de Coriolis est, de loin, complètement négligeable pour ces échelles de temps et d'espace. Il faut invoquer les conditions initiales et la non régularité de la surface du lavabo pour expliquer le sens de rotation du tourbillon[13].

Le pendule de Foucault

Le 31 mars 1851, à Paris, Léon Foucault installe sous la coupole du Panthéon un long pendule qui oscille suffisamment longtemps pour que les parisiens venus assister à cette expérience publique puissent constater la lente rotation du plan d'oscillation : tout visiteur pouvait ainsi « voir la Terre tourner sur elle même ».

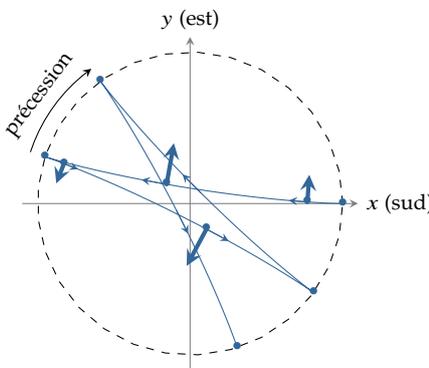


FIGURE 11.5 – Mouvement (très exagéré) horizontal du pendule dans l'hémisphère nord.

Qualitativement, le mouvement du pendule est quasi horizontal (l'amplitude des oscillations est faible), et comme on l'a vu précédemment la rotation terrestre produit une déviation vers la droite(gauche) dans l'hémisphère nord(gauche). La force de déviation (11.6), proportionnelle à la vitesse, est maximale lorsque la masse passe par sa position d'équilibre, et s'annule lorsqu'elle rebrousse chemin. La trajectoire de la masse projetée dans le plan horizontal présente donc des points de rebroussement qui s'inscrivent au fur et mesure des oscillations en tournant dans le sens horaire(anti-horaire) dans l'hémisphère nord(sud) comme l'indique la Figure 11.5.

Cherchons à quelle vitesse le plan d'oscillation tourne pour un observateur terrestre. Considérons un pendule simple de longueur ℓ , fixé en un point O_1 de l'axe Oz vertical. Adoptons le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) pour repérer le point matériel. L'objectif est de déterminer l'évolution de l'angle $\theta(t)$ qui décrit le mouvement du plan d'oscillation.

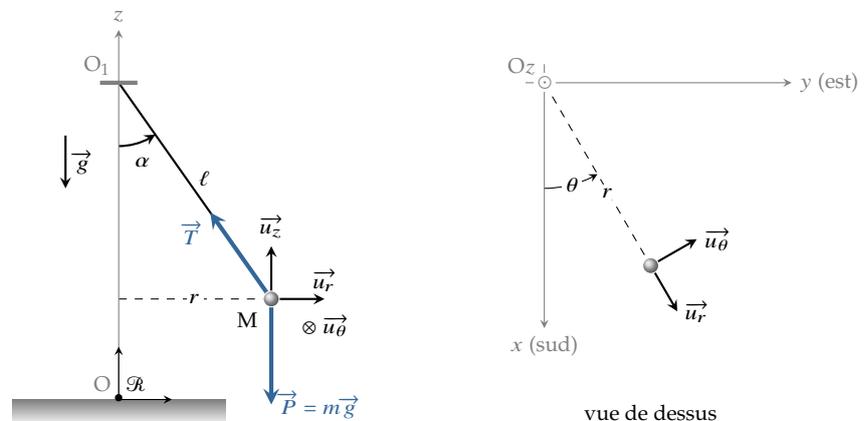


FIGURE 11.6 – Paramétrisation du problème de Foucault

Pour simplifier, plaçons nous dans l'approximation des petites oscillations :

$$z(t) = z_{O_1} - \ell \cos \alpha(t) \simeq z_{O_1} - \ell = C^{te}$$

Négliger les termes d'ordre deux revient à considérer que le mouvement est horizontal. La vitesse et l'accélération s'écrivent

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

Le point matériel M subit la pesanteur \vec{P} , la tension du fil \vec{T} et la force de Coriolis \vec{f}_{ic} . L'équation du mouvement s'écrit donc

$$m \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta = m \vec{g} + \vec{T} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

La tension du fil étant dans le plan d'oscillation, on peut le faire disparaître en projetant l'équation du mouvement suivant \vec{u}_θ . On obtient

$$(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -2(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}) \cdot \vec{u}_\theta$$

Calculons le terme de droite :

$$\begin{aligned} -2(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}) \cdot \vec{u}_\theta &= -2(\vec{v}_{M/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}_\theta) \cdot \vec{\omega} \\ &= -2\dot{r}(\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta) \cdot \vec{\omega} \\ &= -2\dot{r}\vec{u}_z \cdot \vec{\omega} \\ -2(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}}) \cdot \vec{u}_\theta &= -2\dot{r} \omega \sin \lambda \end{aligned}$$

Finalement, la direction du plan d'oscillation vérifie l'équation différentielle

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -2\dot{r} \omega \sin \lambda \quad (11.7)$$

Il s'agit d'une équation différentielle couplée puisque l'évolution de θ est liée au mouvement radial. Toutefois, une solution particulière simple existe si l'on suppose que $\dot{\theta} = C^{te}$ ce qui signifie que le plan d'oscillation tourne à vitesse constante. Dans ce contexte, on obtient

$$\dot{\theta} = -\omega \sin \lambda$$

On retrouve le fait que le plan d'oscillation tourne dans le sens horaire ($\dot{\theta} < 0$) dans l'hémisphère nord ($\lambda > 0$) et dans le sens anti-horaire ($\dot{\theta} < 0$) dans l'hémisphère sud ($\lambda < 0$). Le plan d'oscillation effectue un tour en une durée

$$T_{\text{Foucault}} = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda} = \frac{T}{\sin \lambda} \quad (11.8)$$

À Paris on obtient environ 32 h, et aux pôles le plan d'oscillation fait un tour en 24 h.

L'expérience de 1851 eut un immense succès populaire et un fort retentissement dans le monde entier. Le caractère spectaculaire de cette expérience doit beaucoup au fait que les effets de la force de Coriolis sont cumulatifs. Il suffit de laisser suffisamment longtemps⁸¹ le pendule osciller pour « voir la Terre tourner ».

En pratique, l'expérience de Foucault n'est pas si facile à mettre en place, car de nombreux phénomènes peuvent parasiter le phénomène de précession. Un soin tout particulier doit être apporté lors du lâché et au niveau du point de suspension[14].

81: Dans l'expérience publique organisée au Panthéon en 1851, les oscillations du pendule mettaient plus de cinq heures à s'amortir.

[14]: MARILLIER (1998), "L'expérience du pendule de Foucault au Palais de la découverte"

Remarque : La formule (11.8) a été obtenue en supposant $\dot{\theta}$ constant. En réalité, l'équation différentielle (11.7) s'intègre après multiplication par r et aboutit à

$$r^2(\dot{\theta} - \omega_p) = C^{\text{te}} \quad \text{avec} \quad \omega_p = -\omega \sin \lambda$$

ce qui signifie que dans le référentiel tournant à la vitesse de précession ω_p , le moment cinétique se conserve. En d'autres termes, le mouvement du pendule est un mouvement à force centrale dans ce référentiel tournant. On peut montrer qu'il s'agit d'une ellipse de centre la position d'équilibre. Finalement, dans le référentiel terrestre, le pendule décrit une ellipse dont le grand axe précessionne à la vitesse angulaire $\omega_p = -\omega \sin \lambda$.

11.2 Effets du mouvement orbitale de la Terre

Le référentiel de Copernic

Par définition, le référentiel de Copernic a son origine placée au centre d'inertie du système solaire et ses axes pointent en direction de trois étoiles fixes (comme le référentiel géocentrique). Le référentiel géocentrique est donc en translation quasi circulaire par rapport au référentiel de Copernic.

C'est en supposant le référentiel de Copernic galiléen que l'on peut expliquer le phénomène des marées. Les faits s'accordent parfaitement avec cette hypothèse.

Notion de forces de marée

Revenons sur le champ de pesanteur, mais cette fois-ci en tenant compte du mouvement orbital de la Terre. Nous avons déjà établi que le champ de pesanteur sur Terre s'écrit

$$\vec{g}(M) = \vec{g}_A(M) - \vec{a}_e(M) \quad (11.9)$$

Le premier terme représente le champ de gravitation produit par tous les astres. On sait que l'attraction terrestre prédomine, mais ne négligeons pas l'attraction des astres voisins (Lune, Soleil Jupiter, etc.). Écrivons

$$\vec{g}_A(M) = \vec{g}_T(M) + \vec{g}_\star(M)$$

où $\vec{g}_\star(M)$ désigne le champ d'attraction créé par tous les astres autres que la Terre. On verra plus tard que seul le Soleil et la Lune ont des effets prépondérants ; pour l'instant, contentons-nous d'être très général.

Le dernier terme de la relation (11.9) représente l'accélération d'entraînement de M par rapport au référentiel de Copernic. Le mouvement d'entraînement est la composition d'un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles associé à un mouvement de translation circulaire par rapport au référentiel de Copernic. Aussi, on écrira

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}(C) - \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

Où H désigne la projection de M sur l'axe des pôles, et $\vec{a}(C)$ l'accélération du centre d'inertie de la Terre par rapport au référentiel de Copernic. Or, d'après le théorème du centre d'inertie écrit dans le référentiel de Copernic, on a (M_T désigne la masse de la Terre)

$$M_T \vec{a}(C) = M_T \vec{g}_\star(C)$$

où le deuxième terme représente la résultante des forces de gravitation⁸² que la Terre subit. Finalement, l'expression du champ de pesanteur terrestre en tenant compte de la rotation propre de la Terre et du mouvement orbital, s'écrit

$$\vec{g}(M) = \vec{g}_T(M) + \omega^2 \overrightarrow{HM} + \vec{g}_\star(M) - \vec{g}_\star(C) \quad (11.10)$$

Par rapport à l'équation (11.3), on voit apparaître un nouveau terme :

$$\vec{\mathcal{C}} = \vec{g}_\star(M) - \vec{g}_\star(C) \quad \heartsuit \quad (11.11)$$

Il s'agit du **champ de marée**. On voit qu'il ne dépend que de la présence des autres astres et qu'il est lié à l'inhomogénéité du champ de gravitation sur l'étendue de la Terre, ce qui explique pourquoi on le désigne aussi par le « terme différentiel de gravitation ».

82: Rigoureusement, cette résultante s'applique au centre de gravité, point qui n'est pas à confondre avec le centre d'inertie. Ces deux notions se rejoignent si le champ de gravitation est uniforme sur l'échelle du corps qui subit ces forces. Compte tenu que le rayon de la Terre est très petit devant la distance qui la sépare des autres astres, cette approximation est excellente!

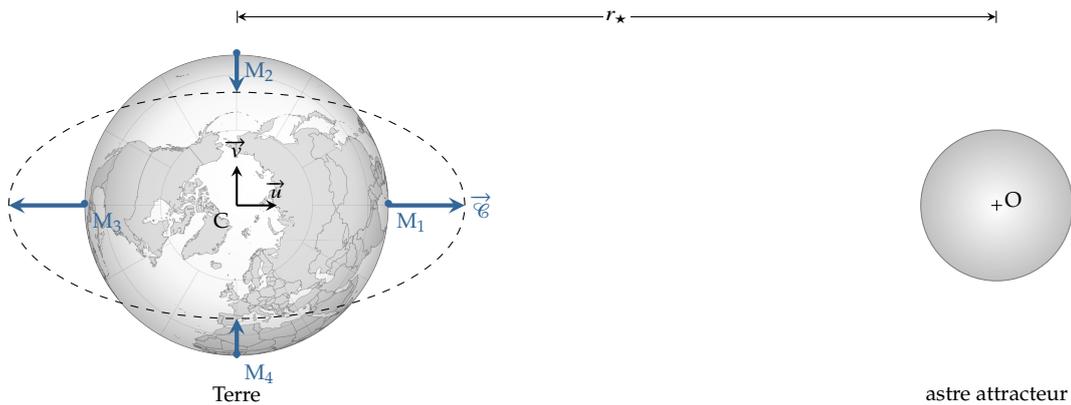


FIGURE 11.7 – Représentation du champ de marée.

Représentons ce champ de marée produit sur Terre par un astre de centre O , de masse M_\star et situé à la distance $r_\star \gg R_T$ du centre C de la Terre. Intéressons-nous au champ de marée qui règne aux points M_1, M_2, M_3 et M_4 situés à la surface terrestre comme indiqué sur la figure 11.7. Pour M_1 , le champ de marée vaut (\vec{u} est dirigé vers le centre O de l'astre)

$$\vec{\mathcal{C}}(M_1) = \left(\frac{\mathcal{G}M_\star}{(r_\star - R_T)^2} - \frac{\mathcal{G}M_\star}{r_\star^2} \right) \vec{u} \simeq \frac{2\mathcal{G}R_T M_\star}{r_\star^3} \vec{u}$$

M_1 est en effet plus attiré par l'astre que ne l'est le centre de la Terre, d'où un terme de marée dirigé vers le centre de l'astre attracteur. Le point diamétralement opposé M_3 subit une attraction moindre que le centre de la Terre et tend donc à s'en éloigner, d'où un terme de marée opposé au précédent.

Quant au point M_2 situé à la distance r_* du point O , on a

$$\vec{\mathcal{C}}(M_2) = -\frac{\mathcal{G}M_*}{r_*^3}\vec{OM}_2 + \frac{\mathcal{G}M_*}{r_*^3}\vec{OC} = -\frac{\mathcal{G}M_*}{r_*^3}\vec{CM}_2 \simeq -\frac{\mathcal{G}R_T M_*}{r_*^3}\vec{v}$$

On obtient un vecteur opposé pour le point M_4 .

Finalement, le champ de marée agit comme une **force d'étirement** : elle tend à allonger la Terre suivant la direction qui joint la Terre et l'astre attracteur, et à la rétrécir dans le sens perpendiculaire. Pour la Terre, le champ de marée est au maximum égal à

$$\mathcal{C}_{\max} = \frac{\mathcal{G}2R_T M_*}{r_*^3}$$

Exercice – Comparer les effets de marée produit sur Terre par les astres du système solaire. Le tableau ci-dessous fournit les masses des astres en unité de masse solaire ainsi que la distance minimale qui les sépare de la Terre en unité astronomique.

Astre	Soleil	Mercure	Venus	Lune	Mars	Jupiter
Masse	1	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-6}$	$37 \cdot 10^{-9}$	$3,2 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$
Distance	1	0,53	0,27	0,0024	0,38	4,0

Rép. Le terme de marée est proportionnel au rapport M_*/r_*^3 . Calculons ce rapport pour ces différents astres.

Astre	Soleil	Mercure	Venus	Lune	Mars	Jupiter
M_*/r_*^3	1	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	2,7	$5,8 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$

Le Soleil et la Lune sont les deux astres dont les effets de marée sont prépondérants sur Terre.

Sur Terre, comme le montre l'exercice précédent, les forces de marée sont essentiellement dus à la Lune et au Soleil. Quand ces effets se cumulent, le champ de marée est de l'ordre de $10^{-6} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$. Chaque m^3 de la croûte terrestre subit donc une force de marée de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$ ce qui reste, comme on le voit, très faible. Toutefois, du fait de la rotation propre de la Terre, chaque parcelle de la croûte terrestre est excitée périodiquement par ces forces de marée produisant ainsi de minuscules déformations périodiques. Il faut savoir que certaines expériences scientifiques de haute précision exigent d'en tenir compte; c'est le cas par exemple des expériences du CERN à Genève (LHC).

À peine mesurable sur Terre, ce phénomène peut devenir beaucoup plus intense dans d'autres systèmes. Par exemple, Io, un des satellites de Jupiter, subit des forces de marée colossales ce qui induit un échauffement permanent de son manteau solide d'où une activité volcanique très intense.

Ces forces d'étirement sont aussi responsables de la dislocation de petits astéroïdes tels que ceux qui composent les anneaux de Saturne. En 1994, on a même assisté, à l'éclatement d'une comète (Shoemaker-Levy 9) se dirigeant vers Jupiter. Les forces de marée induites par cette grosse planète furent suffisantes pour rompre la cohésion interne de la

comète et provoquer sa dislocation en 21 fragments qui sont entrés en collision avec la planète.

Ces forces de marée jouent un rôle important dans la dynamique des astres. Elles sont par exemple à l'origine de la synchronisation du mouvement de rotation propre de la Lune avec son mouvement orbital. La Lune n'étant pas absolument sphérique mais légèrement allongée subit de la part de la Terre des forces de marée dont le moment tend à orienter le grand-axe de la Lune suivant la direction Terre – Lune. C'est pourquoi la Lune présente toujours la même face à un observateur terrestre.

Marées océaniques

Sur Terre, l'effet le plus visible dû aux forces de marée est sans aucun doute le phénomène des **marées océaniques**; terme qui désigne la variation du niveau des océans.

On présente ici un modèle simple (dit modèle statique) qui permet d'interpréter les différents aspects des marées océaniques. Supposons la Terre entièrement recouverte par un unique océan qui adopte à chaque instant sa configuration d'équilibre. On montre en mécanique des fluides que la surface libre suit une équipotentielle du champ de pesanteur. Admettons, dans un premier temps, que seul le Soleil agit sur la Terre. Dans ce cas, l'océan adopte une forme ellipsoïdale dont le grand-axe est suivant l'axe Terre - Soleil. La Terre tournant sur elle-même, un observateur visite en une journée les deux extrémités du bourrelet océanique; il y a deux marées hautes par jour et deux marées basses par jour. Notez que si l'axe de rotation propre de la Terre est perpendiculaire à l'axe Terre-Soleil (à l'équinoxe donc), les deux marées hautes que l'on prévoit sont de même niveau. En revanche, dans le cas contraire, les deux marées hautes ne sont pas de même niveau.

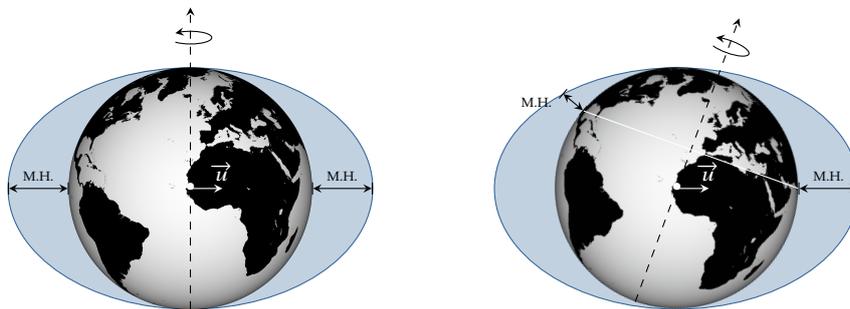


FIGURE 11.8 – Il y a deux marées hautes et deux marées basses par jour. Suivant l'orientation de l'axe des pôles, les deux marées hautes ne sont pas identiques.

Comme on l'a vu, les forces de marée varient comme M_{\star}/r_{\star}^3 . Or, la distance Terre-Soleil varie au cours de l'année, l'orbite terrestre étant elliptique : elle est minimale en janvier (périhélie) et maximale en juillet (aphélie) de sorte que le bourrelet océanique est maximum en janvier.

Cependant, la Lune vient compliquer la dynamique des marées océaniques. En effet, bien que le champ de gravitation lunaire soit 200 fois plus faible que le champ de gravitation solaire, le champ de marée dû à la Lune est environ deux fois plus important. Aussi, l'intensité des marées océaniques dépend de la position de la Lune par rapport à l'axe Terre - Soleil. Lorsque la Lune est alignée avec la Terre et le Soleil, les deux astres cumulent leurs effets et donnent lieu à des « marées de vives-eaux » (marées hautes importantes). A contrario, lorsque la Lune est en quadrature avec le Soleil, leurs effets se compensent (partiellement) et les marées océaniques présentent une faible amplitude : on parle de « marées de mortes-eaux ».

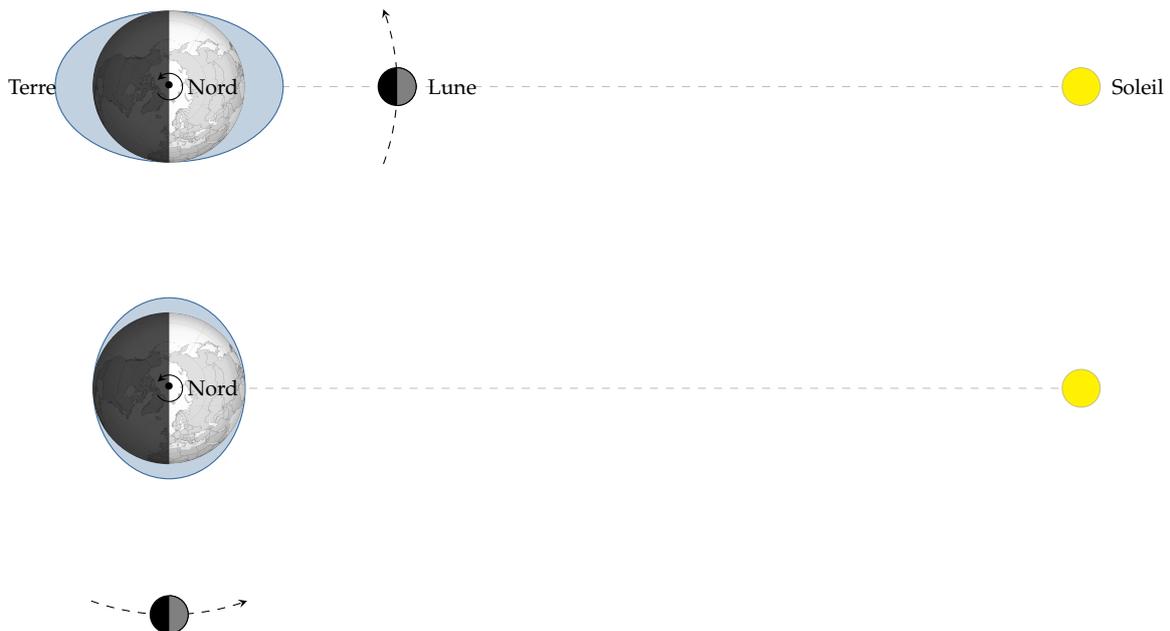


FIGURE 11.9 – Dans le modèle statique, les marées océaniques présentent une amplitude maximum durant la pleine ou nouvelle Lune. Elles sont minimales lors des quarts de Lune.

Par ailleurs, contrairement au Soleil, la Lune ne produit pas deux marées en 24 h. En effet, la Lune fait le tour de la Terre en 28 jours, de sorte que lorsque la Terre effectue un tour sur elle-même, la Lune a tourné de $1/28^e$ de tour. La Lune se retrouve donc au dessus du même point de la Terre après une durée

$$T_L = 24 + \frac{1}{28}24 = 24 \text{ h}50'$$

Ainsi, la composante lunaire (la plus importante) à l'origine des marées décale le cycle des marées de 50 minutes par jour.

Pour terminer, signalons que ce modèle n'explique pas tout car il repose sur l'étude de la forme d'équilibre d'un hypothétique unique océan. En fait le problème est dépendant du temps ce qui complique énormément les choses. Un traitement plus rigoureux fait intervenir la notion d'onde de marée ce qui explique qu'en certains points de la planète, des effets de géométrie et/ou de résonance puissent amplifier ou réduire les effets discutés ici.

Conclusion sur la dynamique en référentiel terrestre

Finalement, la dynamique en référentiel terrestre d'un point matériel de masse m est régie par l'équation

$$\begin{aligned}
 m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} &= \vec{F} + m\vec{g}(M) - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}} \\
 &\text{avec} \\
 \vec{g}(M) &= \vec{g}_T(M) + \omega^2\overline{HM} + \vec{\mathcal{C}}(M)
 \end{aligned}
 \tag{11.12}$$

où \vec{F} est l'action que subit M , autre que les forces de gravitation. Ici, $\vec{\omega}$ est le vecteur rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel de Copernic. Vu que le référentiel géocentrique est en translation, $\vec{\omega}$ se confond avec le vecteur rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique.

Lorsque l'on applique le principe fondamental dans le référentiel terrestre, différents degrés d'approximation sont possibles.

1. Un premier niveau d'approximation consiste à oublier l'action des autres astres. Le référentiel géocentrique est alors considéré galiléen. Cela revient à négliger l'existence du champ de marée.
2. Un deuxième niveau d'approximation plus radical consiste à admettre le caractère galiléen du référentiel terrestre. Ce genre d'approximation convient quand on peut négliger l'accélération centrifuge ($\omega^2\overline{HM}$), le champ de marée ainsi que l'accélération de Coriolis. Notez qu'on utilise souvent une *approximation mixte* qui consiste à tenir compte de la force d'inertie d'entraînement (incluse dans le poids) mais à négliger la force de Coriolis. Cela convient généralement pour les phénomènes mettant en jeu des mouvements peu rapides et qui durent peu de temps.

ANNEXES

A

RÉSOUUDRE UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

En physique, et particulièrement en mécanique, la modélisation d'un phénomène aboutit souvent à une ou des équations différentielles. Nous abordons ici différentes approches analytiques utilisées dans le cadre de leur résolution.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/mecanique/equations-differentielles.php>

A.1 Équation différentielle ordinaire

Généralités

Une équation différentielle est une relation entre une fonction et ses dérivées successives. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation de la fonction inconnue : Ainsi, une équation différentielle d'ordre 1 est une relation où interviennent une fonction et sa dérivée première. Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions qui vérifient la relation sur un intervalle donné.

D'un point de vue plus formel, appelons y une grandeur physique temporelle définie par

$$y : \begin{cases} [0, T] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto y(t) \end{cases}$$

et notons \dot{y} , \ddot{y} et $y^{(p)}$, les dérivées temporelles première, seconde et d'ordre p . Dans ce cas, toute relation de la forme

$$F(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(p)}(t)) = 0 \quad (\text{A.1})$$

est une **équation différentielle ordinaire** d'ordre p . En général la fonction recherchée y obéit à des contraintes sous la forme de p conditions initiales :

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad \ddot{y}(0) = y_2, \dots, y^{(p-1)}(0) = y_{p-1}$$

La donnée de l'équation différentielle du type (A.1) et des p conditions initiales s'appelle un *problème de Cauchy*.

84: cf. le tutoriel sur les méthodes numériques à l'adresse : https://femto-physique.fr/analyse_85. Plus précisément, la fonction f doit obéir aux conditions de Cauchy-Lipschitz : pour tout $t \in [0, T]$, x et y au voisinage de y_0 , s'il existe un réel K tel que $\|f(t, x) - f(t, y)\| < K \|x - y\|$ alors il existe une unique solution.

La plupart du temps, un système d'équations différentielles scalaires peut se ramener à une équation différentielle **vectorielle d'ordre 1** de la forme

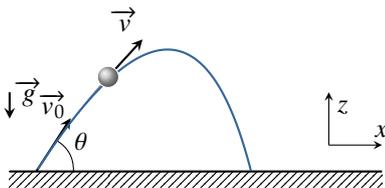
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} &= f(t, \mathbf{y}(t)), & 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où \mathbf{y} est un vecteur de dimension d et f une fonction régulière. Cette représentation se prête bien à la résolution numérique⁸⁴

On peut montrer que si la fonction f est suffisamment régulière⁸⁵, le problème de Cauchy admet une *unique solution*. On admettra par la suite ces conditions de régularité réunies. Il nous reste alors à déterminer la solution de façon analytique.

Exemple

Pour illustrer notre propos, supposons que l'on s'intéresse à la chute d'un corps dans un fluide.



On lance un point matériel M avec une vitesse initiale \vec{v}_0 dans un fluide visqueux exerçant une force de frottement quadratique en vitesse $\vec{F}_t = -\beta v \vec{v}$. Si l'on tient compte uniquement du poids et de la force de frottement, l'équation du mouvement issue de la seconde loi de Newton donne :

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = m \vec{g} - \beta v \vec{v}$$

qui, après projection dans le plan (x, z) se décompose en deux équations couplées :

$$\begin{cases} \ddot{z} &= -g - \frac{\beta}{m} \dot{z} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \\ \ddot{x} &= -\frac{\beta}{m} \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de deux équations différentielles d'ordre deux, non linéaires couplées.

Dans l'exemple précédent, on peut transformer le système d'équations en une équation du type (A.2) à condition de poser

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(t, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ -\frac{\beta}{m} \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \\ -g - \frac{\beta}{m} \dot{z} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \end{pmatrix}$$

Le nombre d'équations différentielles que l'on sait résoudre analytiquement est très réduit. Nous allons étudier les plus utiles en physique.

A.2 Équations différentielles linéaires

Définitions

Supposons qu'une grandeur physique y obéisse à une équation différentielle de la forme

$$\mathcal{L}(y) = f(t) \quad (\text{A.3})$$

où \mathcal{L} désigne un *opérateur différentiel*, c'est-à-dire un opérateur construit à partir des dérivées et de l'identité. Si l'opérateur vérifie la propriété

$$\mathcal{L}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathcal{L}(y_1) + \beta \mathcal{L}(y_2) \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

On dit que l'équation différentielle est linéaire.

L'équation différentielle (A.3) se compose de deux termes :

1. le terme de gauche est une combinaison de fonctions de y et de ses dérivées. Ce terme est en général étroitement lié aux propriétés intrinsèques du système physique étudié.
2. le second membre $f(t)$ de l'équation est en général lié à l'action de l'extérieur sur le système physique. On parle du terme d'excitation.

Propriétés générales

Intéressons nous d'abord à l'équation, dite *équation homogène*, $\mathcal{L}(y) = 0$. Il est facile de voir que si l'on connaît deux solutions y_1 et y_2 de cette équation, alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est aussi solution quelles que soient les réels α et β .

Appelons y_h une solution de l'équation homogène $\mathcal{L}(y) = 0$ et y_p une solution particulière de l'équation (A.3). Dans ce cas, la linéarité implique

$$\mathcal{L}(\alpha y_h + y_p) = \alpha \mathcal{L}(y_h) + \mathcal{L}(y_p) = 0 + f(t)$$

Autrement dit, $\alpha y_h + y_p$ est solution de l'équation $\mathcal{L}(y) = f(t)$. On en déduit la méthode de résolution suivante :

Méthodologie

Pour résoudre une équation différentielle, avec conditions initiales, de la forme $\mathcal{L}(y) = f(t)$ où \mathcal{L} est un *opérateur différentiel linéaire* d'ordre p , on procédera en trois étapes :

1. On déterminera toutes les solutions de l'**équation homogène** $\mathcal{L}(y) = 0$. Ces solutions, notées y_h , feront intervenir p constantes d'intégration.
2. On recherchera une **solution particulière**, notée y_p , de l'équation $\mathcal{L}(y) = f(t)$.
3. La solution s'écrivant $y = y_h + y_p$, on déterminera les constantes d'intégration à l'aide des conditions initiales sur y et ses $p - 1$ dérivées.

Enfin, tout système physique régi par une équation différentielle linéaire obéit au *principe de superposition*. En effet, supposons que l'on connaisse la solution y_1 de l'équation $\mathcal{L}(y) = f_1(t)$ ainsi que la solution y_2 de l'équation $\mathcal{L}(y) = f_2(t)$. Dans ce cas, $y_1 + y_2$ sera solution de l'équation $\mathcal{L}(y) = f_1(t) + f_2(t)$. Cela signifie que si l'on excite un système linéaire de manière compliquée, mais que l'on peut décomposer cette excitation en une somme de termes simples, alors il suffit de connaître la réponse du système vis à vis de ces termes pour déterminer la réponse complète par une simple sommation. Cela traduit finalement le fait que des causes produites simultanément, engendrent un effet qui est le résultat de la somme des effets produits par chacune des causes appliquées seules. C'est cette propriété importante qui permet par exemple de connaître la réponse d'un oscillateur linéaire soumis à une force quelconque, à partir de la réponse de cet oscillateur vis-à-vis d'une force sinusoïdale, car on sait décomposer une force quelconque en une somme de termes sinusoïdaux (analyse de Fourier).

Équation différentielle linéaire à coefficients constants

Dans de nombreux cas, les problèmes physiques simples mènent à une équation différentielle linéaire à coefficients constants qui s'écrit de la façon suivante :

$$a_p y^{(p)} + \dots + a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = f(t) \quad (\text{A.4})$$

où les constantes a_k ainsi que la fonction $f(t)$ sont connues. Il est facile de voir que l'opérateur différentiel est bien linéaire. Cette équation est dite linéaire à coefficients constants avec second membre. Pour résoudre cette équation il suffit donc de trouver les solutions de l'équation homogène ainsi qu'une solution particulière de l'équation (A.4). On admettra les résultats suivants :

Solution particulière

Il existe une méthode générale pour trouver la solution particulière mais dans la plupart des cas, il suffit de chercher une solution ayant la même forme que le second membre $f(t)$. On retiendra notamment que :

- si $f(t) = b$, avec b une constante, on cherchera une solution particulière de la forme $y_p = C^{\text{te}}$. En remplaçant y par cette constante dans l'équation différentielle, on trouve immédiatement $y_p = b/a_0$.
- si $f(t)$ est un polynôme de degré q , on cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré q : $y_p(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_q t^q$. On obtient les coefficients β_k par identification en remplaçant dans l'équation différentielle (A.4) $y(t)$ par $y_p(t)$.
- si $f(t)$ est sinusoïdal de pulsation ω , on cherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$. On obtiendra A et B également par identification.

Remarques : lors de la recherche de la solution particulière, il arrive que les méthodes citées plus haut échouent. Citons deux exemples.

1. Dans le cas où le second membre est un polynôme de degré q , il peut arriver qu'il n'y ait pas de solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré q . Dans ce cas, on envisagera un polynôme de degré supérieur.
2. Dans le cas où le second membre est sinusoïdal de pulsation ω , la méthode proposée plus haut échouera si l'équation caractéristique admet comme racine $i\omega$ ou $-i\omega$. Dans ce cas il faut chercher une solution particulière de la forme $t[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$.

Solutions de l'équation homogène

La solution de l'équation sans second membre est de la forme Ae^{rt} où r est un nombre réel ou complexe solution de l'équation caractéristique

$$a_p r^p + \dots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

Si les p racines sont distinctes, la solution est

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{k=p} A_k e^{r_k t}$$

où les constantes A_k désignent les *constantes d'intégration*.

La solution générale s'écrit donc

$$y(t) = \sum_{k=1}^{k=p} A_k e^{r_k t} + y_p(t)$$

Remarques : lors de la résolution de l'équation caractéristique, il peut arriver que l'on obtienne des racines multiples. Dans ce cas, on admettra qu'il faut remplacer la solution $A_k e^{r_k t}$ par $P(t)e^{r_k t}$ où $P(t)$ est un polynôme de degré 1 si r_k est racine double, 2 si elle est triple, etc. On vérifiera que le nombre de constantes d'intégration est égal à p .

L'équation caractéristique peut admettre des racines complexes $r_k = a_k + ib_k$, ce qui produit des solutions du type $Ce^{a_k t} e^{ib_k t}$ avec $C = \alpha + i\beta$ une constante d'intégration complexe. Cependant, cherchant des solutions réelles, la partie imaginaire sera nécessairement nulle et il ne faut alors conserver que la partie réelle, à savoir $e^{a_k t} [(\alpha \cos(b_k t) - \beta \sin(b_k t))]$.

A.3 Équation à variables séparables

Définition

Une équation différentielle à *variables séparables* est du type

$$\dot{y}g(y) = f(t) \tag{A.5}$$

Si G et F sont des primitives de \bar{g} et f , l'équation différentielle peut alors s'écrire

$$\frac{dG(y(t))}{dt} = \frac{dF(t)}{dt} \implies G(y) = F(t) + C^{\text{te}} \quad (\text{A.6})$$

où la constante est imposée par la condition initiale : $C^{\text{te}} = G(y_0) - F(0)$.

Exemple : Chute libre avec frottement quadratique

Lâchons un corps de masse m dans un fluide et supposons que le frottement fluide est bien modélisé par une loi quadratique $F_t = \beta v^2$. Le mouvement est rectiligne de vitesse $v(t)$ qu'il s'agit de déterminer. Si l'on note g le champ de pesanteur, la relation fondamentale, appliquée dans le référentiel terrestre considéré galiléen, donne

$$m\dot{v} + \beta v^2 = mg \quad \text{avec} \quad v(0) = 0$$

L'équation est non linéaire du fait de la présence du terme quadratique. En revanche, il est possible de séparer les variables :

$$\dot{v} \frac{1}{1 - \frac{\beta}{mg} v^2} = g$$

Or

$$\int \frac{dx}{1 - (x/a)^2} = \frac{a}{2} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right|$$

Ainsi, la solution (A.6) s'écrit

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \ln \frac{\sqrt{mg/\beta} + v}{\sqrt{mg/\beta} - v} = gt + C^{\text{te}}$$

La condition initiale impose la nullité de la constante ce qui donne finalement

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \frac{e^{t/\tau} - e^{-t/\tau}}{e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{g\beta}}$$

La vitesse croît (au début comme gt) puis atteint une limite asymptotique $v_\infty = \sqrt{mg/\beta}$.

B

MÉTHODE DES PERTURBATIONS

En mécanique, les problèmes que l'on peut résoudre exactement correspondent assez souvent à des phénomènes fortement idéalisés. Lorsque l'on cherche une description plus réaliste, on aboutit en général à un jeu d'équations non solubles analytiquement. Cependant, il n'est pas rare que parmi les effets physiques considérés, certains soient mineurs devant les autres. C'est le cas en *mécanique céleste* par exemple, où l'étude de la trajectoire d'une planète est essentiellement le résultat de l'attraction du Soleil, les autres astres jouant un rôle perturbateur. D'un point de vue mathématique, la formalisation du problème aboutit alors à une équation différentielle avec un ou plusieurs termes perturbateurs. Nous proposons ici d'introduire une méthode, dite *méthode des perturbations*, qui permet d'approcher analytiquement la solution dans ce contexte.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/mecanique/methode-des-perturbations.php>

B.1 Principe général

Illustration sur un exemple

Pour illustrer notre propos, considérons le problème de la chute avec frottement quadratique. Depuis une hauteur h , on lâche un corps de masse m dans le champ de pesanteur g , ceci dans l'air qui offre une résistance que l'on modélise par une force $f = \beta v^2$. Rappelons l'équation du mouvement :

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\beta}{m}v^2 \quad \text{avec} \quad v(0) = 0$$

où v est la vitesse du corps. Supposons de plus que la hauteur de chute h soit suffisamment petite pour que les forces de frottement soient faibles devant le poids. Le principe de la méthode consiste d'abord à négliger la perturbation et résoudre l'équation : on obtient une première solution $v_0(t)$. Ensuite, on remplace dans le terme perturbateur, v par l'approximation v_0 . On admet alors que l'erreur produite dans cette opération, d'une part est atténuée car intervenant seulement dans le terme "perturbateur" qui reste petit, et d'autre part a un effet petit

sur le résultat. On résout à nouveau l'équation différentielle pour obtenir v_1 , solution perturbée d'ordre 1. On pourrait continuer l'opération plusieurs fois mais en général on s'arrête à l'ordre 1 ou 2. Voyons ici ce que donne un développement perturbatif à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \frac{dv_0}{dt} = g & \implies v_0(t) = gt \\ \frac{dv_1}{dt} = g - \frac{\beta}{m}(v_0)^2 & \implies v_1(t) = gt - \frac{\beta g^2}{3m}t^3 \end{cases}$$

Ici on connaît la solution exacte, elle s'écrit

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\beta g}{m}}t\right)$$

Rappel mathématique

La fonction $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ est la fonction tangente hyperbolique notée $\tanh(x)$. Son développement limité à l'ordre 6 s'écrit

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \mathcal{O}(x^7)$$

On remarque que la solution approchée v_1 correspond au développement limité de la solution exacte à l'ordre 4 au voisinage de $t = 0$:

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\beta g}{m}}t\right) = gt - \frac{\beta g^2}{3m}t^3 + \mathcal{O}(t^5)$$

La solution approchée $v_1(t)$ est donc à retenir tant que le terme d'ordre 5 est négligeable devant le terme d'ordre 3, c'est-à-dire tant que $t^2 \ll \frac{5m}{2\beta g}$. En terme de hauteur ce la donne $h \simeq \frac{1}{2}gt^2 \ll \frac{5m}{4\beta}$.

Méthode des perturbations à l'ordre un

La démarche précédente se généralise à l'ordre n mais on retiendra le schéma général de la méthode des perturbations à l'ordre un :

Méthode des perturbations au premier ordre

Considérons une équation différentielle de la forme

$$\dot{y} = f(t, y(t)) + \epsilon g(t, y(t)), \quad \text{avec } y(0) = y_0$$

où ϵ est un paramètre suffisamment petit pour que l'on puisse considérer le terme $\epsilon g(t, y(t))$ comme une perturbation. La méthode consiste à rechercher une solution de la forme $y = y_0 + \epsilon y_1$ et à remplacer y par y_0 dans le terme perturbateur. On obtient alors :

$$\frac{dy_0}{dt} + \epsilon \frac{dy_1}{dt} = f(t, y_0 + \epsilon y_1) + \epsilon g(t, y_0), \quad \text{avec } y_0(0) + \epsilon y_1(0) = y_0$$

Procédant à un développement de f à l'ordre 1 au voisinage de y_0 , on obtient

$$\frac{dy_0}{dt} + \epsilon \frac{dy_1}{dt} = f(t, y_0) + \epsilon y_1 f'_y(t, y_0) + \epsilon g(t, y_0), \quad \text{avec } y_0(0) + \epsilon y_1(0) = y_0$$

équation qui doit être valable pour tout ϵ proche de zéro. On obtient

alors deux équations différentielles :

$$\begin{aligned} \frac{dy_0}{dt} &= f(t, y_0(t)), & \text{avec } y_0(0) &= y_0 \\ \frac{dy_1}{dt} &= y_1 f'_y(t, y_0) + g(t, y_0), & \text{avec } y_1(0) &= 0 \end{aligned}$$

Si l'on sait résoudre la première équation (solution non perturbée), alors la deuxième équation est une équation différentielle linéaire avec second membre.

La méthode des perturbations est à utiliser avec précaution :

- À l'ordre 1, elle repose tout d'abord sur l'hypothèse $\epsilon y_1(t) \ll y_0(t)$ qui n'est en général pas vérifiée pour tout t . La solution a donc un domaine de validité restreint que l'on peut estimer à l'aide d'arguments physiques ou mathématiques.
- Le développement perturbatif à l'ordre n ($y = y_0 + \epsilon y_1 + \dots + \epsilon^n y_n$) ne converge pas toujours lorsque $n \rightarrow \infty$. Cependant, même dans ce cas, il peut donner d'excellents résultats si l'on se limite à un ordre petit; c'est ce qui fait toute la puissance de cette méthode. Par exemple, en théorie quantique des champs, le moment magnétique de l'électron a été déterminé avec une précision de 10^{-11} , par une méthode perturbative à l'ordre 3, en excellent accord avec l'expérience, alors même que la série perturbative diverge.

B.2 Cas des oscillateurs

Dans le cas des systèmes oscillants non linéaires, il arrive souvent que la méthode précédente fasse apparaître des phénomènes de résonance qui n'ont aucun sens physique. On utilise alors la méthode de Lindstedt.

Méthode de Lindstedt

Supposons que nous voulions résoudre analytiquement l'équation différentielle d'un oscillateur non linéaire contenant un terme anharmonique suffisamment petit pour le traiter comme une perturbation. La méthode des perturbations classique a cependant le défaut de produire des solutions divergentes lorsqu'il n'y a pas de terme dissipatif, à cause du phénomène de résonance.

Pour éviter ces divergences sans aucun sens physique, Lindstedt a proposé la méthode perturbative suivante.

Méthode de Lindstedt

1. Cherchant des solutions oscillantes, on définit une pulsation $\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 \dots$ où les ω_i sont des paramètres à trouver.
2. On remplace le temps t par la nouvelle variable $\varphi = \omega t$.
3. On cherche la solution sous la forme $x(\varphi) = x_0(\varphi) + \epsilon x_1(\varphi) + \epsilon^2 x_2(\varphi) + \dots$, où les $x_i(\varphi)$ sont des fonctions inconnues.
4. Par substitution dans l'équation différentielle, on obtient $n + 1$ équations différentielles linéaires si l'on décide de faire un développement perturbatif à l'ordre n .
5. On résout chaque équation de manière itérative en commençant par la recherche de $x_0(\varphi)$. Lors de cette résolution, **les ω_i sont choisis de façon à annuler les phénomènes de résonance.**

Illustration avec l'oscillateur de Duffing

Prenons l'exemple de l'oscillateur de Duffing pour illustrer la méthode de Lindstedt. Cet oscillateur vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = A \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

où le terme non linéaire ϵx^3 est suffisamment petit pour justifier l'emploi d'une méthode perturbative. Contentons nous d'un développement perturbatif à l'ordre un. On pose donc

$$\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 \quad \text{puis} \quad \varphi = \omega t$$

Sachant que $\ddot{x} = \omega^2 x''(\varphi)$, l'équation différentielle devient, en omettant les termes d'ordre supérieur à un :

$$\left(\omega_0^2 + 2\epsilon\omega_0\omega_1\right)x''(\varphi) + \omega_0^2 x(\varphi) + \epsilon x^3(\varphi) = 0$$

Cherchant la solution sous la forme du développement perturbatif $x(\varphi) = x_0(\varphi) + \epsilon x_1(\varphi)$, on obtient, après substitution, deux équations différentielles :

$$x_0''(\varphi) + x_0(\varphi) = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_0(0) = A \\ x_0'(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$\omega_0^2 x_1''(\varphi) + \omega_0^2 x_1(\varphi) + 2\omega_0\omega_1 x_0''(\varphi) + x_0^3(\varphi) = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_1'(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

L'équation différentielle (B.1) est celle d'un oscillateur harmonique :

$$x_0(\varphi) = A \cos \varphi$$

En utilisant ce résultat et l'identité $\cos^3 x = 1/4 \cos 3x + 3/4 \cos x$, l'équation (B.2) se réécrit

$$x_1''(\varphi) + x_1(\varphi) = \cos \varphi \left(\frac{2\omega_1 A}{\omega_0} - \frac{3A^3}{4\omega_0^2} \right) - \frac{A^3}{4\omega_0^2} \cos 3\varphi$$

Il s'agit ici de l'équation d'un oscillateur harmonique soumis à une excitation périodique. Or, le terme $\cos \varphi \left(2\omega_1 A / \omega_0 - 3A^3 / 4\omega_0^2 \right)$ est responsable d'une résonance qu'il faut éliminer si l'on veut éviter une solution divergente. On doit donc imposer

$$\frac{2\omega_1}{\omega_0} A - \frac{3A^3}{4\omega_0^2} = 0 \quad \implies \quad \omega_1 = \frac{3A^2}{8\omega_0}$$

Ainsi, une fois les problèmes de divergence éliminés, l'équation B.2 s'écrit

$$x_1''(\varphi) + x_1(\varphi) = -\frac{A^3}{4\omega_0^2} \cos 3\varphi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_1'(0) = 0 \end{cases}$$

Équation différentielle linéaire qui se résout sans difficulté (cf. Annexe page 143) :

$$x_1(\varphi) = \frac{A^3}{32\omega_0^2} (\cos 3\varphi - \cos \varphi)$$

Finalement, la méthode des perturbation à l'ordre un donne comme résultat analytique :

$$x(t) \simeq \left(A - \frac{\epsilon A^3}{32\omega_0^2} \right) \cos(\omega_0 + \epsilon\omega_1)t + \frac{\epsilon A^3}{32\omega_0^2} \cos 3(\omega_0 + \epsilon\omega_1)t \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{3A^2}{8\omega_0} \quad (\text{B.3})$$

Cette approximation est d'autant plus proche de la solution que le terme non linéaire est petit devant le terme harmonique, c'est-à-dire lorsque $|\epsilon|A^3 \ll \omega_0^2 A$. La Figure B.1 compare cette solution avec la solution numérique obtenue par la méthode d'Euler : on constate un désaccord de plus en plus prononcé au cours du temps, dû à l'erreur de troncature produite par l'approximation $\omega \simeq \omega_0 + \epsilon\omega_1$. Ce désaccord se prononce d'autant plus vite que ϵ augmente.

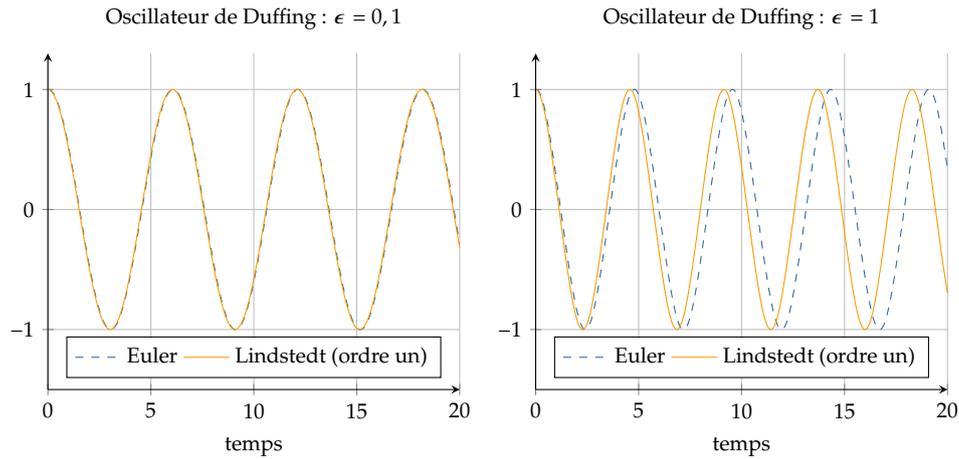


FIGURE B.1 – Solution $x(t)$ de l'oscillateur de Duffing avec $A = 1$ et $\omega_0 = 1$. Comparaison entre la solution approximative (B.3) et la solution numérique obtenue par la méthode d'Euler.

Application : le pendule simple – Une application du calcul précédent est la détermination de la période du pendule simple en fonction de l'amplitude θ_{\max} des oscillations. En effet, pour les angles suffisamment petits, $\sin(\theta) \simeq \theta - \theta^3/6$ de sorte que l'équation du pendule simple se ramène à l'équation de l'oscillateur de Duffing avec $\epsilon = -\omega_0^2/6$:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \frac{\omega_0^2}{6} \theta^3 = 0$$

Le résultat de la méthode de Lindstedt à l'ordre un prévoit que $\theta(t)$ oscille à la pulsation

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 = \omega_0 \left(1 - \frac{\theta_{\max}^2}{16} \right)$$

ce qui donne une période des oscillations

$$T \simeq T_0 \left(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16} \right) \quad \text{quand } \theta_{\max} \rightarrow 0 \quad (\text{B.4})$$

On trouve ici la célèbre **formule de Borda** en l'honneur de Jean-Charles de Borda (1733–1799) qui l'obtint de manière empirique. On peut montrer qu'elle produit une erreur relative inférieure à 10^{-3} si l'on impose $\theta_{\max} < 40^\circ$.

C

PÉRIODE DU PENDULE SIMPLE

Comme nous l'avons vu au [Chapitre 5](#), un pendule simple de masse m et de longueur ℓ , à qui l'on donne une énergie modérée ($\Delta\mathcal{E}_m \ll mg\ell$), oscille autour de sa position d'équilibre $\theta_{\text{eq}} = 0$. La période des oscillations

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

est indépendante de l'amplitude des oscillations dans le cadre de l'approximation harmonique, c'est-à-dire pour les petits angles.

L'objet de ce complément est d'étudier un des effets anharmoniques du pendule simple, à savoir la dépendance de la période T des oscillations avec leur amplitude θ_{max} . Nous présentons notamment une formule basée sur la moyenne arithmético-géométrique très efficace, et pourtant assez peu connue.

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

[https:](https://femto-physique.fr/mecanique/periode-pendule-simple.php)

[//femto-physique.fr/mecanique/periode-pendule-simple.php](https://femto-physique.fr/mecanique/periode-pendule-simple.php)

C.1 Mise en équation

Considérons un pendule formé par une masse ponctuelle m attaché à une tige rigide de longueur ℓ et de masse négligeable. La conservation de l'énergie mécanique se traduit par

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta = -mg\ell \cos \theta_{\text{max}}$$

d'où l'on tire l'équation différentielle d'ordre un :

$$\dot{\theta} = \pm\omega_0\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{\text{max}})} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Séparons les variables puis intégrons entre $\theta = 0$ et θ_{max} ($\dot{\theta} > 0$) :

$$\int_0^{\theta_{\text{max}}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{\text{max}})}} = \int_0^{T/4} \omega_0 dt$$

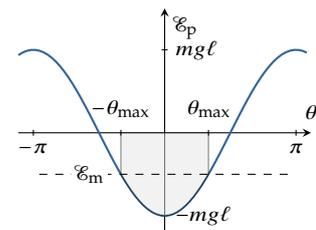
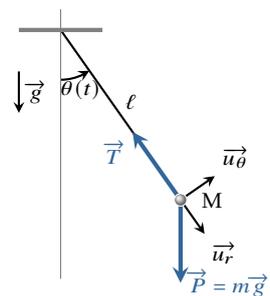


FIGURE C.1 – Le pendule et son profil énergétique

Faisons intervenir la période aux petits angles T_0 . Sachant que $\omega_0 T_0 = 2\pi$, on trouve

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_{\max})}} \quad (\text{C.1})$$

Enfin, il est judicieux de procéder au changement de variable suivant : $\sin\phi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_{\max}/2)}$. On obtient alors

$$T = T_0 \mathcal{E}\left(\sin\frac{\theta_{\max}}{2}\right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\phi}} \quad (\text{C.2})$$

où $\mathcal{E}(x)$ désigne l'intégrale elliptique de première espèce. Cette intégrale présente l'inconvénient de ne pas s'exprimer en termes de fonctions simples.

C.2 Formule de Borda

On remarque que $\mathcal{E}(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$ de sorte que l'on retrouve la limite harmonique, à savoir $T \rightarrow T_0$ quand $\theta_{\max} \rightarrow 0$. On peut aller au delà de l'approximation harmonique en faisant un développement de $\mathcal{E}(x)$ au voisinage de $x = 0$. Écrivons

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2\sin^2\phi}} = 1 + \frac{\sin^2\phi}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4\sin^4\phi)$$

Ainsi, on peut approcher l'intégrale elliptique pour les petits x par

$$\mathcal{E}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{\sin^2\phi}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4\sin^4\phi)\right) d\phi = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

ce qui donne pour la période d'oscillation du pendule

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} + \mathcal{O}\left(\sin^4 \frac{\theta_{\max}}{2}\right)\right)$$

Finalement, si l'on néglige les termes d'ordre 4, on a $\sin^2(\theta_{\max}/2) \simeq \theta_{\max}^2/2$ et l'on obtient l'**approximation de Borda** :

$$T \simeq T_0 \left(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16}\right) \quad \text{quand} \quad \theta_{\max} \rightarrow 0 \quad (\text{C.3})$$

La dépendance de la période avec l'amplitude des oscillations est donc quadratique. On met ainsi en évidence un effet anharmonique dû au profil non parabolique du puits de potentiel dans lequel est piégé le pendule. Toutefois, la formule de Borda produit une erreur supérieure à 1% dès que l'on dépasse 74°.

Il existe – et c'est moins connue – une formule approximative reposant sur la moyenne arithmético-géométrique, qui surpasse, et de loin, les

performances de la plupart des autres formules que l'on trouve dans la littérature [15].

[15]: CARVALHAES et al. (2008), "Approximations for the period of the simple pendulum based on the arithmetic-geometric mean"

C.3 Utilisation de la moyenne arithmético-géométrique

Il existe plusieurs méthodes numériques pour approcher la fonction elliptique. Par exemple, dans l'esprit de la démarche précédente il est possible de développer $\mathcal{E}(x)$ en série et d'en obtenir une approximation en procédant à une troncature de la série à partir d'un certain rang. On peut aussi utiliser une méthode numérique de calcul d'intégrale qui se ramène à un calcul d'aire. Nous proposons ici une méthode numérique très simple et d'une grande précision qui repose sur le fait que la fonction elliptique est liée à la limite commune de deux suites qui convergent extrêmement rapidement.

Moyenne arithmético-géométrique

Considérons les suites réelles (a_n) et (b_n) définies par les relations

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) \\ b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} a_0 = a > 0 \\ b_0 = b < a \end{cases}$$

Ces suites, comme on le constate sur la Table C.1, convergent très vite⁸⁸ vers une limite $\ell_{a,b}$ dite *moyenne arithmético-géométrique*.

Itération	Moyenne		$ a_n - b_n $
	Arithmétique (a_n)	Géométrique (b_n)	
$n = 1$	0,75	0,70710678	$\approx 5 \cdot 10^{-2}$
$n = 2$	0,72855339	0,72823765	$\approx 3 \cdot 10^{-4}$
$n = 3$	0,72839555	0,72839550	$\approx 5 \cdot 10^{-8}$

88: On peut montrer que

$$a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{1}{8b}(a_n - b_n)^2$$

d'où une convergence quadratique vers $\ell_{a,b}$

TABLE C.1 – Moyenne arithmético-géométrique pour $a = 1$ et $b = 0.5$

Considérons maintenant l'intégrale suivante :

$$\mathcal{F}(a, b) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}$$

Il est possible de montrer – après quelques changements de variables⁸⁹ – que $\mathcal{F}(a, b)$ est invariante par la transformation $a \mapsto (a + b)/2$ et $b \mapsto \sqrt{ab}$. Par conséquent,

$$\mathcal{F}(a, b) = \mathcal{F}(a_1, b_1) = \dots = \mathcal{F}(a_n, b_n) = \dots = \mathcal{F}(\ell_{a,b}, \ell_{a,b})$$

cette dernière intégrale se calculant sans difficulté :

$$\mathcal{F}(a, b) = \mathcal{F}(\ell_{a,b}, \ell_{a,b}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\ell_{a,b}} = \frac{1}{\ell_{a,b}}$$

89: cf. <http://math.unicaen.fr/~boxall/AGM.pdf>

De plus, si l'on pose $a = 1$ et $b = \sqrt{1-x^2}$, on obtient

$$\mathcal{J}(1, \sqrt{1-x^2}) = \mathcal{E}(x) \quad \text{car} \quad \cos^2 \phi + (1-x^2) \sin^2 \phi = 1 - x^2 \sin^2 \phi$$

Finalement, la fonction elliptique vaut

$$\mathcal{E}(x) = \frac{1}{\ell_{1, \sqrt{1-x^2}}} \quad (\text{C.4})$$

où $\ell_{1, \sqrt{1-x^2}}$ est la limite de la suite arithmético-géométrique avec $a = 1$ et $b = \sqrt{1-x^2}$.

Algorithme de calcul de T

En utilisant les relations (C.4) et (C.2), la période du pendule simple s'exprime simplement en fonction de la moyenne arithmético-géométrique

$$T = \frac{T_0}{\ell_{1, \cos(\theta_{\max}/2)}} \quad (\text{C.5})$$

Dès lors, il est extrêmement aisée de calculer numériquement T de manière très précise à l'aide d'une méthode numérique qui tient en quelques lignes. Nous proposons l'algorithme suivant

Algorithme de calcul de $T(\theta_{\max})$

1. Initialisation de g , ℓ , θ_{\max} et de la précision requise ϵ ;
2. $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ et $T = T_0$;
3. $a = 1$ et $b = \cos(\theta_{\max}/2)$;
4. Valeur booléenne : précision_insuffisante=VRAIE ;
5. TANT QUE (précision_insuffisante) FAIRE :
 - $c = (a+b)/2$;
 - $b = \sqrt{ab}$;
 - $a = c$;
 - $T_{\text{prec}} = T$;
 - $T = T_0/a$;
 - SI $|T - T_{\text{prec}}| < \epsilon$ {précision_insuffisante=FAUX}
6. RETOURNER T .

Approximations basées sur la moyenne arithmético-géométrique

En prime, cette convergence extrêmement rapide nous donne la possibilité d'obtenir une expression analytique approchée de T ceci pour une grande gamme de valeurs de θ_{\max} et avec précision tout a fait suffisante pour des mesures effectuées dans le cadre de l'enseignement.

Si on approche $\ell(a, b)$ par a_n , on obtient l'approximation

$$T \simeq \frac{T_0}{a_n} \quad [\text{formule MAG-n}]$$

En pratique, la formule MAG-2 correspondant à $n = 2$ itérations sera tout a fait suffisante comme on peut le constater sur le tableau C.1. C'est pourquoi, nous adoptons l'approximation suivante :

$$T \simeq \frac{T_0}{a_2} = \frac{4T_0}{\left(1 + \sqrt{\cos \theta_{\max}/2}\right)^2} \quad (\text{C.6})$$

On retrouve, comme attendu, $T \rightarrow T_0$ quand $\theta_{\max} \rightarrow 0$ et le développement au voisinage de $\theta_{\max} = 0$ à l'ordre deux redonne la formule de Borda. Par contre, quand $\theta_{\max} \rightarrow \pi$, elle donne $T \rightarrow 4T_0$ au lieu de $T \rightarrow \infty$.

La Figure C.2 démontre, de façon visuelle, la supériorité de la formule (C.6) devant celle de Borda. La Figure C.3 montre que l'erreur commise par la formule (C.6) est inférieure à 10^{-5} entre 0 et 90° .

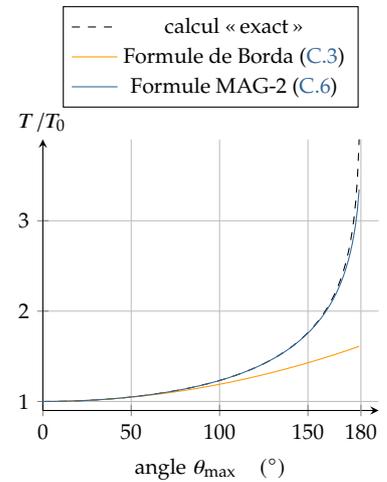


FIGURE C.2 – Evolution de la période T du pendule simple en fonction de l'amplitude d'oscillation θ_{\max} . On compare le calcul « exact » avec les approximations de Borda et de la moyenne arithmético-géométrique au rang 2.

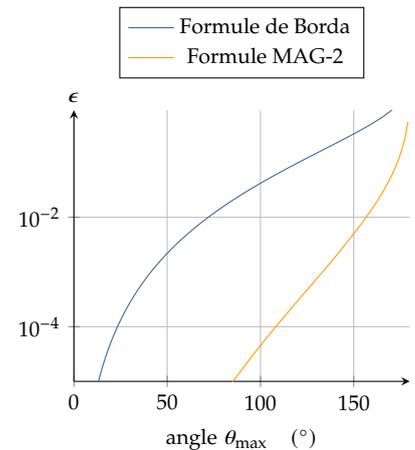


FIGURE C.3 – Evolution de l'erreur relative $\epsilon = \Delta T/T_0$ commise par les formules approximatives en fonction de l'amplitude d'oscillation θ_{\max} .

D

LES CONIQUES

Ce chapitre est accessible en ligne à l'adresse :

<https://femto-physique.fr/mecanique/coniques.php>

D.1 Introduction

Par définition, les coniques sont les sections d'un cône de révolution par un plan ne passant pas par son sommet. Il existe trois formes différentes : l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Une conique possède au moins un foyer F et un axe de symétrie passant par F . L'équation polaire d'une conique avec origine au foyer s'écrit :

$$r(\theta) = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_0) \pm 1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p > 0 \\ e \geq 0 \end{cases}$$

p est appelé **paramètre** et e **excentricité** de la conique. Étant donné que la transformation $\theta - \theta_0 \mapsto \theta_0 - \theta$ laisse invariante la conique, celle-ci présente donc toujours un axe de symétrie, ici l'axe $\theta = \theta_0$. Par commodité, nous prendrons l'axe Fx comme axe de symétrie de sorte que $\theta_0 = 0$.

D.2 L'ellipse

Propriétés de l'ellipse

Par définition, l'ellipse est une conique d'excentricité $e < 1$. Son équation polaire s'écrit donc :

$$r(\theta) = \frac{p}{e \cos(\theta) + 1} \quad \text{avec} \quad p > 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq e < 1 \quad (\text{D.1})$$

On remarque immédiatement que lorsque $e = 0$, l'ellipse se confond avec le cercle de centre F et de rayon p . Dans le cas où $e \neq 0$, l'ellipse présente les propriétés suivantes.

1. La courbe est bornée puisque r est fini pour toute valeur de θ .
2. La fonction $r(\theta)$ étant 2π -périodique, il s'agit donc d'une courbe qui se ferme après une révolution.

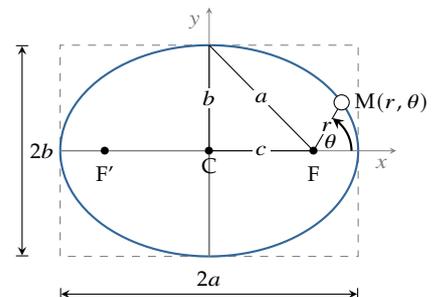


FIGURE D.1 – L'ellipse

3. Le point le plus rapproché de l'origine F est appelé **péricentre** et correspond à $\theta = 0$. Il se situe à $r_p = p/(1 + e)$ du foyer.
4. Le point le plus éloigné de l'origine est appelé **apocentre** et correspond à $\theta = \pi$. Il se situe à la distance $r_a = p/(1 - e)$ du foyer.
5. Par définition, la distance $2a$ qui sépare le péricentre de l'apocentre est le **grand-axe** de l'ellipse. on a

$$2a = r_a + r_p = \frac{2p}{1 - e^2}$$

6. Posons le point C sur l'axe de symétrie à gauche de F de sorte que $CF = c = ae$ et définissons F' l'image de F par la symétrie centrale de centre C. Calculons la distance $FM + F'M$.

D'après la relation d'Al-Kashi on a

$$FM = r \quad \text{et} \quad F'M = \sqrt{r^2 + 4c^2 + 4rc \cos \theta}$$

Or, on a $c = ea$ et $r = a(1 - e^2)/(e \cos \theta + 1)$ d'où

$$\begin{aligned} 4c^2 + 4rc \cos \theta &= 4e^2a^2 + 4r ea \cos \theta \\ &= 4a^2 + 4a^2(e^2 - 1) + \frac{4a^2(1 - e^2)e \cos \theta}{e \cos \theta + 1} \\ &= 4a^2 - \frac{4a^2(1 - e^2)}{e \cos \theta + 1} \\ 4c^2 + 4rc \cos \theta &= 4a^2 - 4ar \end{aligned}$$

Finalement $F'M = \sqrt{r^2 + 4a^2 - 4ar} = 2a - r$ de sorte que l'on trouve

$$\boxed{FM + F'M = 2a} \quad (\text{D.2})$$

Il s'agit de la définition bifocale de l'ellipse.

7. Cette dernière propriété implique une symétrie par rapport aux axes (Cy) et (Cx) et donc une symétrie centrale de centre C. Il existe donc deux positions de M sur l'axe Cy, séparées de la distance $2b$ appelé **petit-axe**. Dans ce cas, compte tenu de la relation (D.2), on a

$$FM = F'M = a \quad \text{et} \quad FM = \sqrt{c^2 + b^2}$$

Ainsi, petit et grand-axe sont liés à la distance focale c par la relation

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \quad (\text{D.3})$$

Équation cartésienne

L'équation cartésienne est relativement simple si l'origine du repère est placée au centre de l'ellipse. En effet, écrivons l'équation (D.1) sous la forme $r = p - re \cos \theta$ et substituons les coordonnées cartésiennes $x = r \cos \theta + c$ et $y = r \sin \theta$:

$$r = p - e(x - c) \quad \implies \quad r^2 = (x - c)^2 + y^2 = p^2 + e^2(x - c)^2 - 2ep(x - c)$$

Développons en plaçant les termes quadratiques à gauche :

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = p^2 + e^2c^2 + 2epc - c^2 + x(2c - 2ce^2 - 2pe)$$

Sachant que $p = a(1 - e^2)$ et $c = ea$, la relation devient

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)^2 + e^4a^2 + 2a^2e^2(1 - e^2) - e^2a^2 + x(2ea - 2ae^3 - 2ae(1 - e^2))$$

soit, après simplification :

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2) \tag{D.4}$$

Le terme de droite représente $a^2 - c^2 = b^2$ de sorte que l'équation cartésienne d'une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b s'écrit

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{D.5}$$

D.3 La parabole

Propriétés

Par définition, la parabole est une conique d'excentricité $e = 1$. Son équation polaire avec origine au foyer est donc

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + \cos \theta} \tag{D.6}$$

On est toujours en présence de la symétrie d'axe Ox . Le péricentre est obtenu lorsque $\theta = 0$ et se situe à la distance $p/2$ du foyer, appelée distance focale. Par ailleurs, lorsque $\theta \rightarrow \pm\pi$, la distance FM tend vers l'infini.

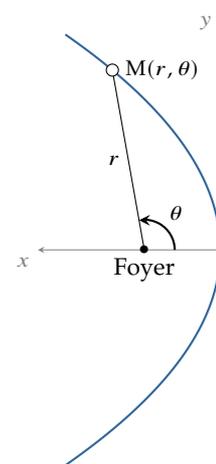


FIGURE D.2 – La parabole

91: appelé aussi *sommet de la parabole*

Équation cartésienne

Plaçons l'origine d'un repère cartésien au péricentre⁹¹ en orientant l'axe Ox vers la gauche. Écrivons l'équation polaire (D.6) sous la forme $r = p - r \cos \theta$ et substituons les coordonnées cartésiennes $x = p/2 - r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$:

$$\sqrt{y^2 + (x - \frac{p}{2})^2} = p + (x - \frac{p}{2})$$

Élevons au carré :

$$y^2 + (x - \frac{p}{2})^2 = p^2 + (x - \frac{p}{2})^2 + 2p(x - \frac{p}{2})$$

Après simplification, on trouve que l'équation cartésienne d'une parabole de paramètre p s'écrit

$$\boxed{y^2 = 2px} \tag{D.7}$$

Remarque : Si l'on transforme $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow -x$, cela revient à tourner la parabole de $-\pi/2$. On obtient dans ce cas l'équation usuelle d'une parabole : $y = \frac{1}{2p}x^2$.

D.4 L'hyperbole

Propriétés

Par définition, l'hyperbole est une conique d'excentricité $e > 1$ et d'équation polaire

$$r(\theta) = \frac{p}{e \cos \theta \pm 1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p > 0 \\ e > 1 \end{cases}$$

ce qui décrit deux branches d'hyperbole dont les asymptotes se coupent en un point O.

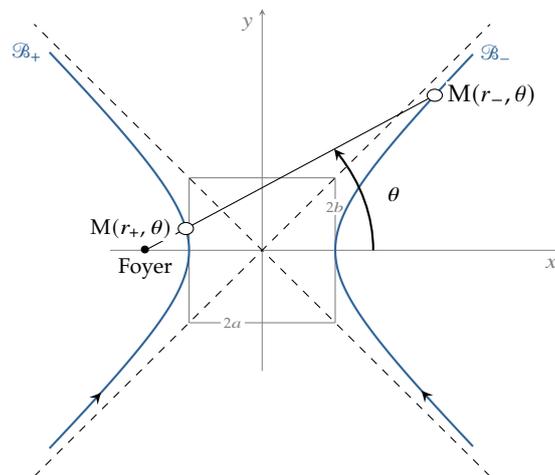


FIGURE D.3 – Hyperbole d'excentricité $e = 1,6$.

L'équation $r_-(\theta) = p/(e \cos \theta - 1)$ décrit une branche \mathcal{B}_- dont les asymptotes font un angle $\pm\theta_1$ avec l'axe des abscisses. En effet, r diverge quand $\cos \theta_1 = 1/e$ ce qui donne la pente des asymptotes :

$$\tan \theta_1 = \pm \sqrt{e^2 - 1}$$

De la même façon, l'équation $r_+(\theta) = p/(e \cos \theta + 1)$ décrit une deuxième branche \mathcal{B}_+ d'hyperbole dont les asymptotes font un angle $\pm\theta_2$ donné par $\cos \theta_2 = -1/e$. Ainsi,

$$\theta_2 = \pi - \theta_1$$

et les asymptotes présentent une symétrie d'axe Oy. Finalement les asymptotes admettent une symétrie centrale de centre O, propriété partagée par les branches d'hyperbole.

Soit le rectangle tangent à l'hyperbole en $\theta = 0$ et dont les sommets sont sur les asymptotes. Par définition, les dimensions de ce rectangle sont appelées **grand-axe** et **petit-axe** de l'hyperbole et notées respectivement $2a$ et $2b$. La distance focale c est ici la distance qui sépare

O du foyer (comme pour l'ellipse). Une simple lecture des distances donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{e-1} - \frac{p}{e+1} = 2a \\ \frac{p}{e-1} = c+a \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} p = a(e^2 - 1) \\ e = \frac{c}{a} \end{array} \right.$$

Par ailleurs, la pente des asymptotes vaut aussi $\pm b/a$ de sorte que $b/a = \sqrt{e^2 - 1}$ c'est-à-dire

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2} \quad (\text{D.8})$$

Équation cartésienne

Reprenons la démarche employée dans le cas de l'ellipse sans oublier de procéder aux modifications suivantes :

1. l'origine étant à droite du foyer, il faut poser $x = r \cos \theta - c$;
2. le paramètre p est relié à l'excentricité et au demi grand-axe par $p = a(e^2 - 1)$.

On retrouve alors l'équation (D.4) valable donc aussi bien pour une ellipse que pour une hyperbole :

$$x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

Ici, le terme $a^2(1 - e^2)$ vaut $a^2 - c^2 = -b^2$ de sorte que l'équation cartésienne d'une hyperbole demi-grand axe a et de demi-petit axe b s'écrit

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (\text{D.9})$$

Références

Références classées par ordre d'apparition.

- [1] É. KLEIN. *Les tactiques de Chronos*. Paris : Flammarion, 2004 (cf. p. 1).
- [2] T. DAMOUR et S. DESER. "Relativité". In : *Encyclopædia Universalis* (1995) (cf. p. 3).
- [3] S. HACYAN. "What does it mean to modify or test Newton's second law?" In : *Am. J. Phys.* 77.7 (Juill. 2009) (cf. p. 18).
- [4] M. LEBARS, P. Le GAL et S Le DISES. "Les marées en géo- et astrophysique". In : *Images de la physique - CNRS* (2008) (cf. p. 20, 126).
- [5] Pierre LAUGINIE. "La pesée de la Terre". In : *Pour la Science, Dossier hors-série "La gravitation"* 38 (2003) (cf. p. 22).
- [6] M. M. NIETO. "Actually, Eötvös did publish his results en 1910 it's just that no one knows about it..." In : *Am. J. Phys.* 57.5 (Mai 1989) (cf. p. 32).
- [7] J. BERTRAND. "Mécanique analytique". In : *C.R. Acad. Sci. Paris* 77 (1873), p. 849-853 (cf. p. 83).
- [8] JC RIES et al. "Progress in the determination of the gravitational coefficient of the Earth". In : *Geophysical research letters* 19.6 (1992), p. 529-531 (cf. p. 86).
- [9] H. KRIVINE. *La Terre, des mythes au savoir*. Cassini, 2011.
- [10] A QUEDRAOGO et G CHANUSSOT. "Généralisation de la méthode de calcul de l'énergie d'un satellite : cas hyperbolique et parabolique". In : *BUP* 764 (Mai 1994).
- [11] Y. DUPONT. "Déviation d'un photon dans un champ de gravitation". In : *BUP* 899 (déc. 2007).
- [12] Luc VALENTIN. *L'univers mécanique: introduction à la physique et à ses méthodes*. Hermann, 1983.
- [13] Ascher H SHAPIRO. "Bath-tub vortex". In : *Nature* 196 (1962), p. 1080-1081 (cf. p. 132).
- [14] A MARILLIER. "L'expérience du pendule de Foucault au Palais de la découverte". In : *Revue du palais de la découverte* 26.258 (Mai 1998) (cf. p. 133).
- [15] Claudio G CARVALHAES et Patrick SUPPES. "Approximations for the period of the simple pendulum based on the arithmetic-geometric mean". In : *American Journal of Physics* 76.12 (2008), p. 1150-1154 (cf. p. 157).

Notations

Notations mathématiques utilisées dans ce cours.

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ base sphérique

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ base cylindrique

$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ base cartésienne

(r, θ, φ) coordonnées sphériques

(r, θ, z) coordonnées cylindriques

(x, y, z) coordonnées cartésiennes

\ddot{y} ou $\frac{d^2y}{dt^2}$ dérivée seconde par rapport au temps

\dot{y} ou $\frac{dy}{dt}$ dérivée première par rapport au temps

$\frac{\partial f}{\partial x}$ ou f'_x dérivée partielle

$\mathcal{R}, \mathcal{R}^*$ référentiel, référentiel barycentrique

$\overline{A(t)}$ moyenne temporelle de $A(t)$

$\vec{d\ell}$ vecteur déplacement infinitésimal

\vec{A} vecteur

\vec{u} vecteur unitaire

\triangleq relation de définition

A_z composante suivant l'axe $(Oz) = A_z = \vec{A} \cdot \vec{u}_z$

Grandeurs et constantes physiques

Quelques constantes physiques

les constantes sont fournies avec tous les chiffres significatifs connus

Nom	Symbole	Valeur
Constante gravitationnelle	\mathcal{G}	$6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Permittivité diélectrique du vide	ϵ_0	$8,854\ 187\ 81 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité magnétique du vide	μ_0	$1,256\ 637\ 062 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Masse de l'électron au repos	m_e	$9,109\ 383\ 70 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du proton au repos	m_p	$1,672\ 621\ 923 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du neutron au repos	m_n	$1,674\ 927\ 498 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Constantes définies par le SI (valeurs exactes)

Constante de Planck	h	$6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Vitesse de la lumière	c	$299\ 792\ 458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Fréquence hyperfine du ^{133}Cs	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	$9\ 192\ 631\ 770 \text{ Hz}$
Charge élémentaire	e	$1,602\ 176\ 634 \times 10^{-19} \text{ C}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1,380\ 649 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	$R = k_B N_A$	$8,314\ 462\ 618 \dots \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Nombre d'Avogadro	N_A	$6,022\ 140\ 76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Efficacité lumineuse	K_{cd}	$683 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$

(source : 2018 CODATA)

Grandeurs physiques

Nom	Symbole	Unité
Masse	m	kg
Masse molaire	M	$\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse volumique	ρ	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Charge électrique	q	C
Aire	\mathcal{A}	m^2
Volume	V	m^3
Temps	t	s
Fréquence	ν	Hz
Période	T	s
Vitesse	v	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Vitesse angulaire, pulsation	ω	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
Accélération	a	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
Quantité de mouvement	p	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Moment d'une force	\mathcal{M}	N.m
Moment cinétique	L	J.s
Couple	Γ	N.m
Moment d'inertie/ Δ	I_Δ	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Puissance mécanique	\mathcal{P}	W
Raideur	k	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$
Facteur de qualité	Q	sans dimension
Travail	W	J
Énergie	\mathcal{E}	J