

---

Leçons de Physique

Agrégation de Physique-Chimie

Option Physique

Concours Spécial Docteur

---

Benjamin Marchetti<sup>1</sup>  
(2018/2019)

---

1. <https://marchettibenjamin.wordpress.com>

# Table des matières

<b>L.P. 02 - Gravitation</b>	<b>8</b>
1. Force centrale conservative . . . . .	9
a) Définition . . . . .	9
b) Interaction gravitationnelle . . . . .	9
2. Mouvement à force centrale . . . . .	11
a) Description du mouvement . . . . .	11
b) Lois de conservation . . . . .	12
c) Cas de quelques mouvements . . . . .	13
3. Mouvement dans un champ newtonien . . . . .	15
a) Le problème de Kepler . . . . .	15
b) Cas des satellites . . . . .	15
c) Représentation du mouvement . . . . .	16
<b>L.P. 05 - Lois de conservation en dynamique</b>	<b>20</b>
1. Les lois de conservations . . . . .	21
a) Quantité de mouvement . . . . .	22
b) Moment cinétique . . . . .	23
c) Énergie mécanique . . . . .	25
2. Application dans un champ à force centrale . . . . .	25
a) Éléments cinétiques du système . . . . .	26
b) Loi de conservations et conséquences . . . . .	27
c) Analyse qualitative du problème à deux corps . . . . .	28
3. Application aux chocs . . . . .	28
a) Lois générales . . . . .	29
b) Collision élastique . . . . .	30
c) Collision inélastique . . . . .	31
<b>L.P. 08 - Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.</b>	<b>32</b>
1. Notion de viscosité . . . . .	32
a) Définition . . . . .	33
b) Interprétation microscopique . . . . .	34
c) Facteurs influençant la viscosité . . . . .	36
2. Dynamique des écoulements . . . . .	37
a) Force volumique et équation de Naviers et Stokes . . . . .	37
b) Nombre de Reynolds . . . . .	38
c) Écoulement à bas nombre de Reynolds . . . . .	39
3. Application à la sédimentation à bas nombre de Reynolds . . . . .	40

<b>L.P. 09 - Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide.</b>	<b>44</b>
1. Écoulement parfait . . . . .	44
a) Définition . . . . .	44
b) Limites . . . . .	45
c) Équation d'Euler . . . . .	46
d) Exemple d'application : l'effet Coanda . . . . .	48
2. Relation de Bernoulli . . . . .	49
a) Énoncé . . . . .	49
b) Aspect énergétique . . . . .	50
c) Applications . . . . .	51
<b>L.P. 10 - Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides.</b>	<b>56</b>
1. Tension superficielle . . . . .	56
a) Origine microscopique . . . . .	57
b) Énergie superficielle et force capillaire . . . . .	58
c) Méthode de mesure . . . . .	59
2. Interface à deux fluides . . . . .	61
a) Loi de Laplace . . . . .	61
b) Application : adhésion capillaire . . . . .	63
c) Instabilité de Rayleigh-Plateau . . . . .	63
3. Contact à trois phases : le mouillage . . . . .	64
a) Angle de mouillage . . . . .	64
b) Influence de la gravité . . . . .	66
c) Ascension capillaire . . . . .	67
<b>L.P. 12 - Premier principe de la thermodynamique</b>	<b>71</b>
1. Concept de travail et de chaleur . . . . .	72
a) Travail . . . . .	72
b) Chaleur . . . . .	74
c) Énergie . . . . .	76
2. Premier principe de la thermodynamique . . . . .	76
3. Applications . . . . .	78
a) Cycle d'Otto . . . . .	78
b) Calorimétrie . . . . .	81
<b>L.P. 15 - Transitions de phase</b>	<b>84</b>
1. Généralités . . . . .	84
a) Mise en évidence . . . . .	84
b) Condition d'évolution et d'équilibre . . . . .	86
2. Étude thermodynamique d'un corps pur sous deux phases . . . . .	87
a) Potentiel thermodynamique . . . . .	88
b) Condition d'équilibre . . . . .	89
c) Formule de Clapeyron . . . . .	91
d) Conséquences sur le diagramme d'état (P,T) . . . . .	93
3. Classification des transitions de phases . . . . .	94
a) Explications . . . . .	94
b) Relations d'Ehrenfest . . . . .	94

<b>L.P. 18 - Phénomène de transport</b>	<b>99</b>
1. Diffusion thermique . . . . .	99
a) Mode de transport . . . . .	99
b) Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local . . . . .	101
c) Flux thermique et vecteur densité . . . . .	102
d) Loi de Fourier . . . . .	104
e) Équation de diffusion . . . . .	104
f) Application . . . . .	106
2. Diffusion de particules . . . . .	109
a) Courant et bilan de particules . . . . .	109
b) Loi de Fick . . . . .	111
c) Équation de diffusion . . . . .	111
d) Application . . . . .	112
<b>L.P. 20 - Conversion de puissance électromécanique</b>	<b>118</b>
1. Intro à la conversion électro-magnéto-mécanique . . . . .	118
a) Description d'un contacteur électromagnétique . . . . .	119
b) Force électromagnétique . . . . .	119
c) Application au contacteur . . . . .	119
d) Détermination de la perméabilité . . . . .	121
2. Machine synchrone . . . . .	123
a) Principe . . . . .	123
b) Illustration . . . . .	124
c) Champ magnétique . . . . .	125
d) Couple électromagnétique . . . . .	128
3. Machine à courant continu . . . . .	130
a) Principe . . . . .	130
b) Couple électromagnétique . . . . .	131
c) F.é.m d'induction . . . . .	131
<b>L.P. 21 - Induction électromagnétique</b>	<b>134</b>
1. Induction de Neumann . . . . .	135
a) Loi de l'induction de Neumann . . . . .	135
b) Inductance et auto-inductance . . . . .	136
c) Énergie magnétique . . . . .	139
d) Cas des circuits non filiformes . . . . .	140
2. Induction de Lorentz . . . . .	140
a) Changement de référentiel . . . . .	141
b) Champ électromoteur de Lorentz . . . . .	141
c) Généralité . . . . .	142
3. Applications . . . . .	143
a) Exemple des rails de Laplace . . . . .	143
b) Freinage par courant de Foucault . . . . .	145
<b>L.P. 22 - Rétroaction et oscillation</b>	<b>150</b>
1. Rétroaction et systèmes bouclés . . . . .	151
a) Les systèmes bouclés . . . . .	151
b) Amplificateur non inverseur . . . . .	155
2. Oscillateurs quasi sinusoïdaux . . . . .	157
a) Éléments structurels d'un oscillateur quasi sinusoïdal . . . . .	158
b) Oscillateur de Wien . . . . .	160

3.	Oscillateurs à relaxation . . . . .	164
a)	Le vase de Tantale . . . . .	164
b)	Multivibrateur avec amplificateur opérationnel . . . . .	165
<b>L.P. 23 - Traitement d'un signal. Étude spectrale</b>		<b>167</b>
1.	Rappels sur l'analyse de Fourier . . . . .	168
a)	Principe général de la décomposition en série de Fourier . . . . .	168
b)	Caractéristique d'un signal périodique . . . . .	168
c)	Spectre . . . . .	169
d)	Exemple du signal créneau . . . . .	170
2.	Filtrage linéaire . . . . .	171
a)	Principe général . . . . .	172
b)	Représentation des fonctions de transfert harmonique . . . . .	172
c)	Filtre du premier ordre . . . . .	174
d)	Filtre du second ordre . . . . .	175
3.	Modulation-démodulation . . . . .	178
a)	Principes . . . . .	179
b)	Application à la modulation et démodulation d'amplitude . . . . .	180
<b>L.P. 24 - Ondes progressives. Ondes stationnaires</b>		<b>184</b>
1.	La corde vibrante : équation de d'Alembert et ses solutions . . . . .	185
2.	Solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle . . . . .	187
a)	Ondes planes progressives . . . . .	187
b)	Ondes progressives harmoniques . . . . .	188
3.	Solution en ondes stationnaires de l'équation de d'Alembert . . . . .	189
4.	Aspect énergétique d'une corde vibrante . . . . .	191
a)	Notion d'impédance . . . . .	192
b)	Densité d'énergie linéique de la corde . . . . .	192
c)	Autre méthode . . . . .	193
d)	Densité d'énergie mécanique . . . . .	194
e)	Cas de l'onde stationnaire . . . . .	194
<b>L.P. 25 - Ondes acoustiques</b>		<b>196</b>
1.	Équation de propagation des ondes sonores . . . . .	197
a)	Équation de couplage . . . . .	197
b)	Équation de propagation . . . . .	199
2.	Solutions de l'équation . . . . .	200
a)	Ondes planes progressives monochromatique . . . . .	200
b)	Notion d'impédance . . . . .	201
c)	Aspect énergétique . . . . .	201
d)	Intensité sonore . . . . .	203
3.	Réflexion et transmission des ondes sonores . . . . .	204
a)	Conditions aux limites . . . . .	204
b)	Coefficients de réflexion et de transmission des ondes sonores . . . . .	205
<b>L.P. 27 - Propagation guidée des ondes</b>		<b>208</b>
1.	Guidage d'onde rectangulaire . . . . .	208
a)	Position du problème . . . . .	208
b)	Relation de dispersion . . . . .	211
c)	Vitesse de phase et vitesse de groupe . . . . .	211
d)	Aspect énergétique . . . . .	212

2.	La fibre optique à saut d'indice : approche géométrique . . . . .	213
a)	Réflexions successives - condition de réflexion totale . . . . .	214
b)	Superposition des ondes réfléchies - modes . . . . .	214
c)	Dispersion de mode . . . . .	216
d)	Modes et bande passante . . . . .	216
e)	Nombre de modes . . . . .	217
f)	Quelques mots sur fibre à gradient d'indice . . . . .	218
3.	Un exemple naturel : le canal SOFAR . . . . .	219
<b>L.P. 32 - Microscopies optiques</b>		<b>224</b>
1.	Le système (œil-loupe) . . . . .	224
a)	Intérêt de la loupe . . . . .	225
b)	Profondeur de champ et performances . . . . .	225
2.	Le microscope . . . . .	227
a)	Historique . . . . .	227
b)	Description du microscope . . . . .	229
c)	Microscope simplifié . . . . .	230
d)	Cercle oculaire . . . . .	231
e)	Performance . . . . .	231
3.	Autres types de microscopes . . . . .	233
a)	Microscope optique de fluorescence . . . . .	233
b)	Microscope en champ proche . . . . .	234
<b>L.P. 33 - Interférences à deux ondes en optique</b>		<b>239</b>
1.	Interférence de deux ondes lumineuses . . . . .	240
a)	Définitions . . . . .	240
b)	Condition d'interférences . . . . .	241
c)	Phénomène d'interférences . . . . .	242
2.	Figures d'interférences et dispositif interférentiel : les fentes d'Young . . . . .	243
a)	Figure d'interférences . . . . .	243
b)	Les fentes d'Young . . . . .	244
c)	Autres dispositifs . . . . .	247
3.	Notion de cohérence . . . . .	248
a)	Cohérence temporelle . . . . .	248
b)	Cohérence spatiale . . . . .	250
<b>L.P. 34 - Interférométrie à division d'amplitude</b>		<b>254</b>
1.	Intérêt de la division d'amplitude . . . . .	255
a)	Rappels . . . . .	255
b)	Théorème de localisation . . . . .	256
2.	L'interféromètre de Michelson . . . . .	257
a)	Principe . . . . .	258
b)	Lame d'air . . . . .	260
c)	Coin d'air . . . . .	262
3.	L'interféromètre de Fabry-Pérot . . . . .	264
<b>L.P. 35 - Diffraction de Fraunhofer</b>		<b>274</b>
1.	La diffraction . . . . .	274
a)	Le phénomène de diffraction . . . . .	275
b)	Le principe de Huygens-Fresnel . . . . .	275
2.	Diffraction de Fraunhofer . . . . .	277

a)	Expressions générales . . . . .	277
b)	Propriétés . . . . .	279
c)	Cas d'une fente rectangulaire . . . . .	281
3.	Conséquences . . . . .	282
a)	Optique de Fourier . . . . .	282
b)	Application au pouvoir de résolution . . . . .	283
<b>L.P. 36 - Diffraction par des structures périodiques</b>		<b>289</b>
1.	Réseaux . . . . .	289
a)	Définitions . . . . .	289
b)	Formules fondamentales . . . . .	290
2.	Propriétés et applications . . . . .	294
a)	Propriétés . . . . .	294
b)	Spectromètres à réseau . . . . .	295
c)	Différents types de réseaux plans . . . . .	296
3.	Extension aux réseaux tridimensionnels . . . . .	298
a)	Diffraction des rayons X par les cristaux . . . . .	298
b)	Diffraction des électrons par les cristaux . . . . .	299
<b>L.P. 37 - Absorption et émission de la lumière</b>		<b>303</b>
1.	Phénomène d'émission . . . . .	303
a)	Source thermique . . . . .	303
b)	Source spectrale . . . . .	306
c)	Émission induite et spontanée . . . . .	309
2.	Absorption . . . . .	312
a)	Définition . . . . .	312
b)	Application à la chimie . . . . .	313
3.	Le Laser . . . . .	314
a)	Dynamique des populations et du flux de photons . . . . .	314
b)	Équations du laser . . . . .	316
c)	Seuil d'oscillation et régimes stationnaires . . . . .	316
d)	Gain du laser . . . . .	318
<b>L.P. 46 - Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques</b>		<b>322</b>
1.	Caractérisation du ferromagnétisme . . . . .	323
a)	Loi de l'électromagnétisme dans les milieux aimantés . . . . .	323
b)	Types de comportements magnétiques . . . . .	325
2.	Aimantation d'un corps ferromagnétique . . . . .	328
a)	Courbe de première aimantation . . . . .	328
b)	Hystérésis . . . . .	329
c)	Ferromagnétiques "doux" et "durs" . . . . .	330
3.	Application : le disque dur . . . . .	331
a)	Principe d'écriture . . . . .	331
b)	Principe de lecture . . . . .	332
<b>L.P. 47 - Mécanismes de la conduction électrique dans les solides</b>		<b>340</b>
1.	Le modèle de Drude . . . . .	341
a)	Hypothèses . . . . .	341
b)	Établissement du modèle . . . . .	342
c)	Loi d'Ohm intégrale . . . . .	344
d)	Semi-conducteurs et isolants . . . . .	344

2.	Application à la mesure de champ : Effet Hall . . . . .	345
a)	Effet Hall . . . . .	345
b)	Tension de Hall . . . . .	347
c)	Expérimentation . . . . .	347
3.	Limites du modèle de Drude . . . . .	349
a)	Limites . . . . .	349
b)	Théorie des bandes . . . . .	350

**L.P. 48 - Phénomène de résonance dans différents domaines de la physique 355**

1.	Le pendule élastique . . . . .	356
a)	Présentation . . . . .	356
b)	Oscillations forcées . . . . .	357
c)	Élongation de l'oscillateur . . . . .	357
d)	Vitesse l'oscillateur . . . . .	358
e)	Admittance généralisée - Résonance . . . . .	358
f)	Excitation maximale indépendante de la pulsation . . . . .	359
g)	Étude énergétique . . . . .	361
2.	Généralisation au circuit R, L, C . . . . .	362
3.	Résonance avec propagation . . . . .	365
a)	La corde de Melde . . . . .	365
b)	La cavité de Fabry-Pérot . . . . .	366

**L.P. 49 - Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarité 371**

1.	Oscillateurs non amortis . . . . .	372
a)	L'oscillateur harmonique . . . . .	372
b)	Le pendule pesant . . . . .	372
2.	Oscillateurs amortis . . . . .	376
a)	Oscillateur harmonique amorti (par frottement fluide) . . . . .	376
b)	Le pendule pesant . . . . .	378
3.	Oscillateurs forcés . . . . .	379
4.	Oscillateurs auto-entretenus . . . . .	380
a)	Le modèle de Van der Pol . . . . .	380
b)	L'oscillateur à résistance négative . . . . .	381

# L.P. 02 - Gravitation

Niveau : 1er année CPGE

## Pré-requis

- Mécanique du point
- Moment cinétique
- Énergie

## Bibliographie

- Expériences de Phys. (Mécanique), Bellier, *Dunod*
- H-prépa Mécanique MPSI, Brébec, *Hachette*
- Tout en un MPSI, Sanz, *Dunod*

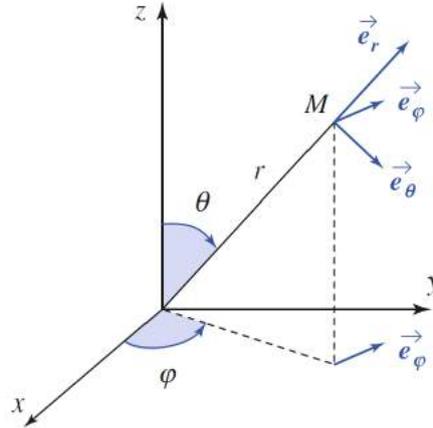
## Introduction

Dans cette leçon nous allons aborder la gravitation. De nos jours on semble avoir compris cette notion qui fut jadis très compliqué à faire comprendre. Cette notion fait apparaître la force gravitationnelle, force variant en  $1/r^2$ . Cette force centrale conservative sera décrite dans cette leçon au cours de laquelle on s'attardera sur la trajectoire que peut avoir un objet soumis à la gravitation.

Kepler énonça, entre 1604 et 1618, trois lois expérimentales sur le mouvement des planètes. Ces lois sont le résultat d'une étude systématique des observations accumulées par l'astronome danois Tycho Brahé et de celles qu'il réalisa lui-même sur le mouvement de la planète Mars. C'est à partir de ces lois expérimentales que Newton édifia sa mécanique et sa théorie de la gravitation en 1687. La notion de force de gravitation, qui agit instantanément à distance sans nécessiter de support matériel pour sa transmission, a provoqué beaucoup de réticences de la part de certains de ses contemporains. Newton qui était parfaitement conscient de cette difficulté conceptuelle, a pu écrire, qu'à priori, " voilà qui me paraît d'une si grand absurdité que nulle personne ayant quelque capacité de raisonnement philosophique ne pourra jamais ce me semble y ajouter crédit ". L'expérience a donné à la théorie le crédit que lui contestait ses contradicteurs, mais le problème conceptuel soulevé par ces derniers n'était, certes, pas sans objet.

# 1. Force centrale conservative

## a) Définition



Un champ de forces centrales de centre  $O$  vérifie :  $\vec{F} = F\vec{e}_r$  ; le support de la force  $\vec{F}$  passe par le point fixe  $O$ .

Il est conservatif s'il est possible de lui associer une énergie potentielle  $E(\vec{r})$ , de sorte que lors d'un déplacement élémentaire le travail élémentaire de la force  $\vec{F}$  s'écrive :  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$ .

Sachant que le déplacement élémentaire est de la forme :

$$d(\overrightarrow{OM}) = d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\vec{e}_r$$

Le vecteur  $\vec{e}_r$  a une norme constante (unité), de sorte que :  $\vec{e}_r \cdot d\vec{e}_r = 0$ . Le travail élémentaire de la force centrale est donc nul pour tout déplacement perpendiculaire à  $\vec{e}_r$ , qui garde constante la distance  $r$  au point fixe  $O$  constante en faisant varier la direction repérée par les angles  $\theta$  et  $\phi$  des coordonnées sphériques. Nous en déduisons que l'énergie potentielle ne dépend que de la distance  $r$  au centre de force, pas de la direction :

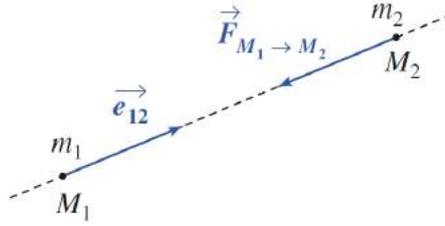
$$E_p(\vec{r}) = E_p(r, \theta, \phi) = E_p(r)$$

Utilisant alors  $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr$ , nous pouvons affirmer qu'un champ de force centrale conservative est de la forme  $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$  avec  $F(r) = -\frac{E_p(r)}{dr}$  désignant l'énergie potentielle (définie à une constante près) associée à ce champ de force.

La force est attractive lorsqu'elle est dirigée vers  $O$ , soit :  $F(r) < 0$ . L'énergie potentielle est alors une fonction croissante de la distance  $r$  au centre de la force  $O$ . Elle est au contraire répulsive si  $F(r) > 0$ , donc lorsque l'énergie potentielle est une fonction décroissante de la distance.

## b) Interaction gravitationnelle

**MANIP : Faire une manip qualitative si possible avec Bellier page 254.**

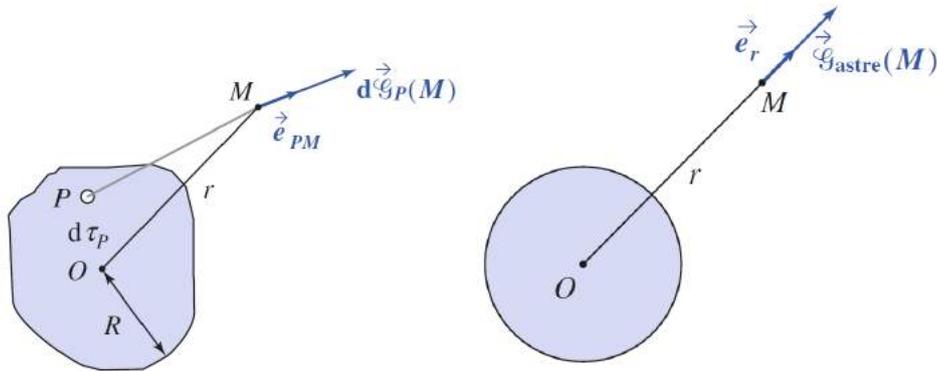


Deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$ , de masse  $m_1$  et  $m_2$  et distants de  $r$ , exercent l'un sur l'autre une force attractive, appelée force de gravitation, telle que :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{12} \quad (1)$$

avec  $G = 6,672 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$  est une constante universelle.  $\vec{e}_{12}$  est le vecteur unitaire de l'axe  $M_1 M_2$  orienté de  $M_1$  vers  $M_2$ . Cette loi, dite de gravitation universelle, a été formulée par Newton pour expliquer les orbites planétaires. La masse pesante qui intervient dans l'expression de la force de gravitation est identique à la masse inerte de la relation fondamentale de la dynamique. IL s'agit là d'un postulat supplémentaire, dont la validité est confirmée par toutes les expériences.

### Champ de gravitation d'un astre



Le champ de gravitation créé par un ensemble de points matériels,  $P_i (i = 1, \dots, N)$  de masse  $m_i$  est, au point  $M$ , la superposition des champs de gravitation créés par chacun des points  $P_i$  :

$$\vec{G}(M) = \sum_{i=1}^N -G m_i \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3}$$

Le champ de gravitation engendré par un corps est la superposition des champs de gravitation engendrés par les éléments qui le composent. En notant  $P$  le point courant décrivant l'astre, et en découpant le corps en volumes élémentaires  $d\tau_p$ , de masse  $dm = \rho(P) d\tau_p$ , où  $\rho$  est la masse volumique de l'élément considéré, nous avons :

$$\vec{G}(M) = \int \int \int_{\text{astre}} -G \rho(P) \frac{\overrightarrow{P M}}{P M^3} d\tau_p$$

Son expression est en générale délicate à établir, mais nous pourrons en pratique nous contenter d'en utiliser une expression dans les cas suivants :

- L'astre possède une symétrie de révolution :  $\rho(P) = \rho(r_p)$  et  $R$  son rayon ,alors la masse totale de l'astre s'écrit :

$$M_{\text{astre}} = \int \int \int \rho(P) d\tau_p = \int_{r_p=0}^R \rho(r_p) 4\pi r_p^2 dr_p$$

En dehors de l'astre ( $r > R$ ), le champ de gravitation prend la forme :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = -GM_{\text{astre}} \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} = -GM_{\text{astre}} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

- L'astre est à grande distance :  $r \gg R$  et on a :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = -GM_{\text{astre}} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Cette expression est exacte dans le cas d'un astre à symétrie sphérique, et constitue une bonne approximation du champ de gravitation si l'astre est quasi sphérique ou bien à distance  $r$  suffisamment grande par rapport à la dimension caractéristique  $R$  d'un astre peu régulier.

### Pesanteur terrestre

**MANIP : Faire la manip de la mesure de  $g$  : Bellier page 258. Faire les mesures avant présenter le graphe et montrer la manip. Discuter des incertitudes !**

Au voisinage de la surface terrestre, un objet de masse  $m$  est soumis à son poids :

$$\vec{P} = m \vec{g}$$

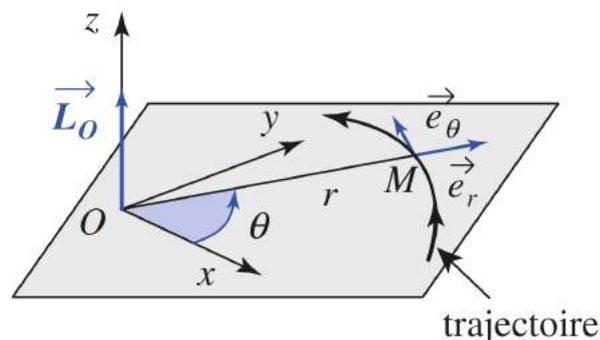
En première approximation, le poids est égal à la force de gravitation exercée par la Terre. Cette force est quasiment uniforme dans un domaine dont les dimensions sont petites par rapport au rayon terrestre  $R_T$ . D'où :

$$\vec{g} \approx -G \frac{m_T}{R_T^2} \vec{e}_r$$

Il est bien entendu impossible d'assimiler la norme du champ de gravitation à une constante pour étudier le mouvement des satellites : l'altitude d'un satellite terrestre géostationnaire est de l'ordre de 36000 km, non négligeable par rapport au rayon terrestre  $R_T = 6400km$ .

## 2. Mouvement à force centrale

### a) Description du mouvement



Nous savons que lors d'un mouvement où il est soumis à un champ de force centrale, de centre  $O$  fixe, dans un référentiel galiléen, la trajectoire d'un point matériel est en général dans un plan (passant par  $O$  et perpendiculaire au moment cinétique constant  $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v}$ ).

Pour repérer le mouvement du point matériel dans ce plan, il nous suffit de deux coordonnées. La force étant constamment radiale, nous ferons le choix des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de centre  $O$  :

$$\vec{OM}(t) = r \vec{e}_r \text{ et } \vec{F} = F(r) \vec{e}_r$$

Les vitesses et accélérations s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

En écrivant la relation fondamentale de la dynamique, projetant sur les deux vecteurs de la base locale, nous obtenons donc :

$$\begin{cases} \text{equation radiale} & \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = \frac{F(r)}{m} = -\frac{1}{m} \frac{dE_p(r)}{dr} \\ \text{equation orthoradiale} & 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On a un système d'équation différentielles couplées d'ordre 2 en  $r(t)$  et  $\theta(t)$ .

## b) Lois de conservation

### Conservation du moment cinétique

D'après les équations précédentes on remarque que  $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$ , nous voyons que la projection orthoradiale de la relation fondamentale de la dynamique nous permet de retrouver la loi des aires :

$$r^2\dot{\theta} = cste = C$$

où  $C$  est la constante des aires. Nous savons que celle-ci traduit la conservation du moment cinétique du point matériel au point  $O$  fixe.

Connaissant  $C$  on peut ramener le système d'équation à :

$$\begin{cases} \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{F(r)}{m} = -\frac{1}{m} \frac{dE_p(r)}{dr} \\ \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \end{cases}$$

Le problème se réduit à une équation différentielle d'ordre 2 en  $r(t)$ , mais elle n'est toujours pas linéaire.

On appelle vitesse aréolaire  $\mathcal{V}$  la vitesse à laquelle le rayon vecteur balaie l'aire définie par la trajectoire dans le plan du mouvement :

$$\mathcal{V} = \frac{dA}{dt} = \frac{r(rd\theta)}{2dt} = \frac{r^2\dot{\theta}}{2} = \frac{C}{2}$$

qui est donc une constante.

## Conservation de l'énergie

Analysons le second membre de l'équation du mouvement. Nous pouvons l'intégrer par rapport à la variable  $r$  pour faire apparaître l'énergie potentielle :

$$\ddot{r} - C^2 \frac{\dot{r}}{r^3} = -\frac{1}{m} \frac{dr}{dt} \frac{dE_p(r)}{dr}$$

où encore :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{C^2}{r^2} \right) &= \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{m} E_p(r) \right) \\ \implies \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) + E_p &= cste \end{aligned}$$

On a la traduction de la conservation de l'énergie mécanique  $E_m$  du mobile, la force radiale étant conservative :

$$Cste = E_m = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) + E_p$$

La vitesse radiale peut être extraite de cette expression :

$$\dot{r} = \pm \sqrt{E_m - \frac{mC^2}{2r^2} - E_p(r)}$$

Ainsi on a réussi à faire apparaître une équation différentielle d'ordre un, qui peut se résoudre en utilisant la méthode de résolution d'Euler. Le choix du signe dépend des conditions antérieures du mouvement.

Dans cette expression on peut faire apparaître l'énergie potentielle effective du mouvement :

$$E_{p_{eff}}(r) = E_p(r) + \frac{mC^2}{2r^2}$$

**Rq** : Le terme  $(1/2)m\dot{r}^2$  est par nature positif ou nul. Le domaine des valeurs de  $r$  accessibles au mouvement est donc restreint aux valeurs telles que :

$$E_{p_{eff}}(r) \leq E_m$$

Lorsque l'égalité survient,  $\dot{r}$  s'annule : la distance au centre de force  $O$  atteint une valeur extrême, qui peut être minimum ou maximum.

### c) Cas de quelques mouvements

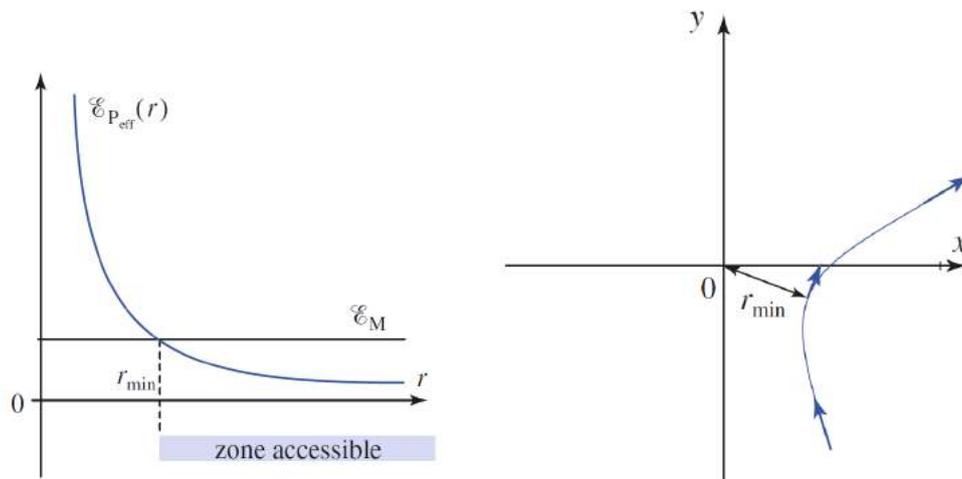
Considérons une énergie potentielle d'expression simple :

$$E_p(r) = -\frac{K}{r^n}, \text{ soit } F(r) = -\frac{nK}{r^{n+1}}$$

Le champ de forces est attracteur si  $nK$  est positif, répulsif le cas échéant. On a  $E_{p_{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{K}{r^n}$ .

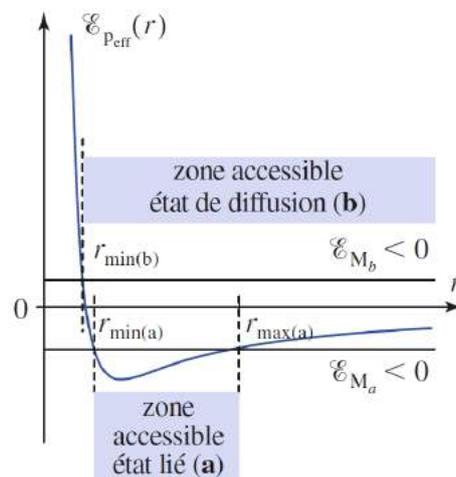
**Rq** : Oscillateur harmonique isotrope  $n = -2$  et  $K < 0$ ,  $E_p = |K|r^2$ . Champs newtonien  $n = 1$ , attractif pour  $K > 0$ , répulsif sinon.

## Champ répulsif



La fonction d'énergie potentielle est décroissante suivant  $r$ .  $E_{p_{eff}}$  est donc strictement décroissante de la distance au centre de force, qui diverge en  $r = 0$ . On voit apparaître un minimum  $r_{min}$  qui peut être atteint si le point matériel se dirige initialement vers les  $r$  décroissants. On est dans un état de diffusion : le point matériel finissant toujours par s'éloigner indéfiniment du centre  $O$ .

## Champ attractif



On va se restreindre uniquement au cas où  $0 < n < 2$  et  $K > 0$ . Dans ce cas  $E_{p_{eff}}$  diverge vers  $+\infty$  en  $r \rightarrow 0$  où le terme cinétique l'emporte. En revanche, elle vers 0 par valeurs négatives pour  $r \rightarrow \infty$  faisant apparaître une courbe en cuvette. Nous pouvons alors observer un état lié si  $E_m < 0$  ou un état de diffusion si  $E_m > 0$ . On a un minimum en  $r = -mC^2/K$ .

## Champ répulsif

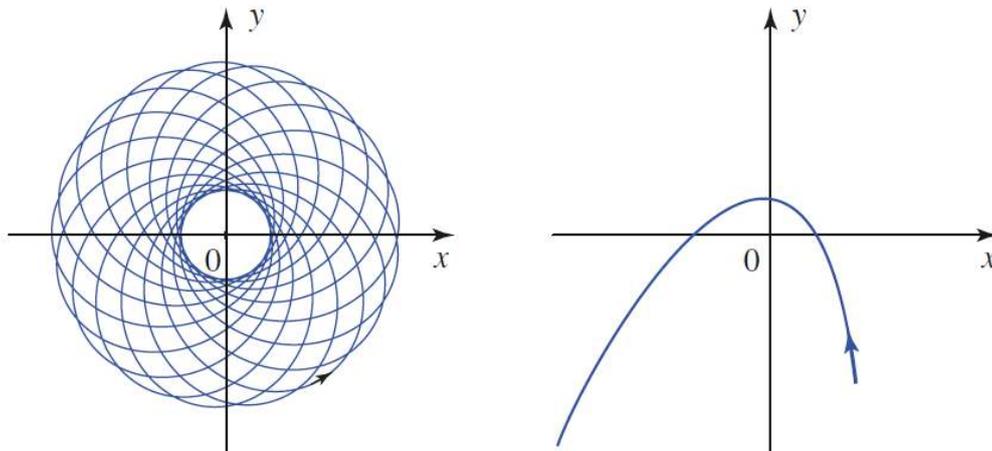


FIGURE 1 – *État lié et état de diffusion.*

### 3. Mouvement dans un champ newtonien

#### a) Le problème de Kepler

Un mouvement est dit keplerien lorsqu'il s'effectue sous l'action d'une force centrale en  $1/r^2$ , de centre de force fixe dans le référentiel galiléen d'étude, c'est à dire dans un champ de force newtonien. Le cas des champs newtoniens est évidemment important : il correspond à l'interaction gravitationnelle (entre corps à géométrie sphérique, en tout rigueur). Leur étude nous permettra donc de comprendre, par exemple, le mouvement des planètes gravitant autour du Soleil.

Le problème de Kepler concerne plus généralement toute une série de problème physiques, tant à l'échelle microscopique (interaction entre particules chargées), qu'à l'échelle macroscopique (interaction entre planète et satellite).

Kepler énonça 3 lois expérimentales sur le mouvement des planètes. Ces lois sont le résultat d'une étude systématique des observation accumulées par l'astronome danois Tycho Brahé, et celles effectuées par Kepler en observant le mouvement de la planète Mars :

- 1er loi (1605) : chaque planète décrit, dans le sens direct, une trajectoire elliptique dont le Soleil est un foyer ;
- 2eme loi (1604) : l'aire balayée par le rayon Soleil-planète est une proportionnelle au temps mis pour la décrire. C'est la loi des aires ;
- 3eme loi (1618) : le carré du temps de révolution sidérale d'une planète est proportionnel au cube du grand axe de l'ellipse qu'elle décrit. Notant  $T$  la période de révolution et  $a$  le demi-grand axe, le rapport  $T^2/a^3$  est le même pour toutes les planètes gravitant autour du Soleil.

#### b) Cas des satellites

On va supposer un satellite de masse  $m$  évoluant dans le champs de gravitation d'un astre de masse  $M$ . Soit  $\alpha = GmM > 0$ , car la force est attractive. On supposera l'action d'autres astres négligeables (effet des marées) et on supposeras  $m \ll M$ .

Les satellites restent par définition au voisinage de l'astre auprès duquel ils gravitent. Considérons l'énergie du point matériel, qui est ici une constante du mouvement (car  $F(r) = dE_p/dr$ ) :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r} = cste$$

Si on pose  $r = \infty$  on a  $E_m = (1/2)m\dot{r}^2$ . Ce cas n'a de sens que si l'énergie est positive. Les satellites correspondent à des mobiles en état lié évoluant dans le champ de gravitation attractif, de l'astre autour duquel ils gravitent : leur énergie est négative.

Calculons la vitesse  $v_c$  qu'il faut communiquer à un satellite pour que sa trajectoire soit un cercle de rayon  $r_c$ . L'accélération s'écrit pour ce cercle s'écrit :

$$\vec{a} = -\frac{v_c^2}{r_c} \vec{e}_r$$

qui s'identifie à  $\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{\alpha}{m r_c^2} \vec{e}_r$

où  $M$  est la masse de l'astre. On en déduit alors la vitesse :

$$v_c = \sqrt{\frac{\alpha}{m r_c}} = \sqrt{\frac{GM}{r_c}} \quad (2)$$

On peut calculer la première vitesse cosmique, qui est la vitesse en orbite circulaire basse : pour  $r_c = R_T = 6370km$  et  $g = 9,81m.s^{-2}$  on a  $v_1 = \sqrt{gR_T} = 7,92km.s^{-1}$ .

On en déduit alors l'énergie associé à une trajectoire circulaire de rayon  $r_c$  :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_c^2 - \frac{GMm}{r_c} = -\frac{\alpha}{2r_c} < 0$$

Le satellite pourrait totalement échapper à l'attraction terrestre si son énergie devenait juste nulle : la distance  $r$  peut devenir infinie. La vitesse nécessaire  $v_2$  est donnée par  $E_m = 0 \implies v_2 = \sqrt{2}v_1 = 11,2km.s^{-1}$ .

Ainsi la période de révolution du satellite en orbite circulaire est :

$$T = \frac{2\pi r_c}{v_c} = 2\pi \sqrt{\frac{r_c^3}{GM}} \quad (3)$$

On retrouve la 3eme loi de Kepler !

### c) Représentation du mouvement

Nous savons que le moment cinétique est une constante du mouvement qui a lieu dans un plan. Nous repérons encore la position du mobile à l'aide des coordonnées polaire. La loi des aires est une conséquence de cette loi de conservation.

#### Énergie

La force dérive d'une énergie potentielle, dont nous prenons l'origine à l'infini :

$$\vec{F}_{M \rightarrow m} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2} \text{ et } E_p(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

La conservation de l'énergie est traduite par :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p_{eff}} = cste$$

avec  $E_{p_{eff}} = mC^2/(2r^2) - \alpha/r$ .

## Vecteur de Runge-Lenz

Soit l'équation du mouvement :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

Le moment cinétique, constant, est :

$$\vec{L}_O = m \vec{r} \wedge \vec{v} = mr \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

En multipliant vectoriellement l'équation du mouvement par  $\vec{L}_O$ , nous avons :

$$\vec{L}_O \wedge m \frac{d\vec{v}}{dt} = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \left( -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) = -\alpha m \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Le rayon  $r$  a disparu dans le second membre : du fait que le champ soit newtonien. D'autre part, comme le moment cinétique est constant :

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_O \wedge \vec{v}) = \vec{L}_O \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

soit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\alpha} - \vec{e}_r \right) = \vec{0}$$

ce qui nous montre que le vecteur de Runge-Lenz, défini par :

$$\vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\alpha} - \vec{e}_r \quad (4)$$

est une constante du mouvement.

Ce vecteur est par construction dans le plan de la trajectoire. On peut l'explicitier :

$$\vec{A} = \frac{(r \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) \wedge mC \vec{e}_z}{\alpha} - \vec{e}_r = \left( \frac{mC^2}{\alpha r} - 1 \right) \vec{e}_r - \frac{mC}{\alpha} \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

On a de plus  $\vec{A} \cdot \vec{r} = mC^2/\alpha - r$ .

Convenons de prendre sa direction comme origine des angles : l'axe polaire ( $O, \vec{e}_x$ ) est colinéaire et dirigé dans le même sens que  $\vec{A}$ , dont la norme est  $e = \|\vec{A}\|$ . On a alors :

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \|\vec{A}\| r \cos(\theta) = er \cos(\theta)$$

en comparant ces deux expressions, nous identifions l'équation polaire de la trajectoire :

$$r(\theta) = \frac{\frac{mC^2}{\alpha}}{1 + e \cos(\theta)} = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \quad (5)$$

C'est l'équation d'une courbe conique, d'excentricité  $e$  et de paramètre  $p = mC^2/\alpha$ . On obtiendra différent cas :

- une trajectoire elliptique, si l'excentricité est inférieure à 1 (un cercle, si  $e = 0$ );
- une trajectoire parabolique, si l'excentricité vaut 1;
- une trajectoire hyperbolique, si l'excentricité est plus grande que 1.

On peut aussi en déduire l'énergie :

$$E_m = \frac{\alpha}{2mC^2} (e^2 - 1)$$

De la même façon on aura :

- une trajectoire elliptique, si l'énergie est négative;
- une trajectoire parabolique, si l'énergie est nulle;
- une trajectoire hyperbolique, si l'énergie est positive.

## Représentation du mouvement

Le champ de force newtonien appartient à la catégorie des forces centrales conservatives. Les valeurs de  $r$  accessibles à la trajectoire sont liées à l'énergie potentielle effective :

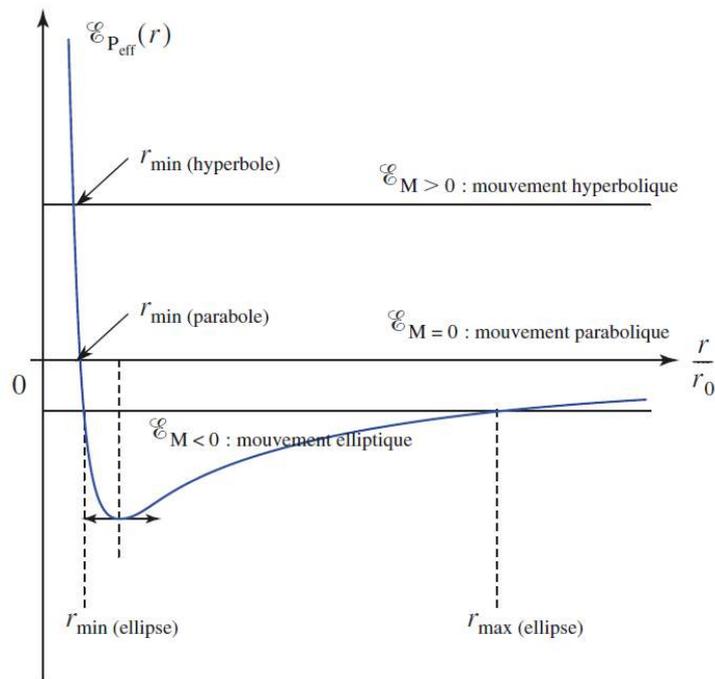
$$E_{p_{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r} \leq E_m$$

Le terme en  $1/r^2$  l'emporte en  $r \rightarrow 0$  où cette fonction tend vers  $+\infty$ .

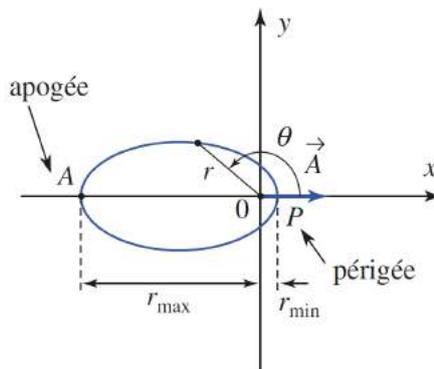
Dans le cas d'une force répulsive,  $\alpha < 0$ , et la fonction  $E_{p_{eff}} > 0$  et strictement décroissante. L'énergie est une constante positive, et la condition  $E_{p_{eff}} \leq E_m$  montre que la distance au centre de force  $O$  possède une valeur minimal  $r_{min}$ .

Si la force est attractive,  $\alpha > 0$ , et  $E_{p_{eff}}$  présente un minimum négatif. La distance correspondante est :

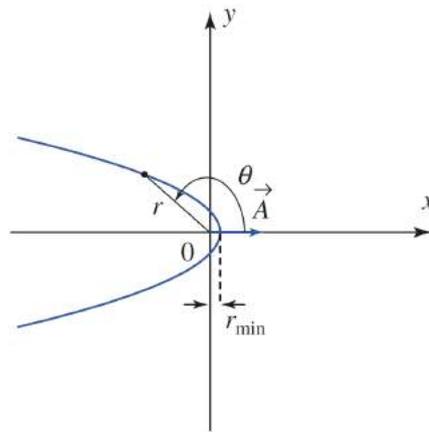
$$r_0 = \frac{mC^2}{\alpha} = p \text{ avec } E_{p_{eff}}(r_0) = -\frac{\alpha}{2p}$$



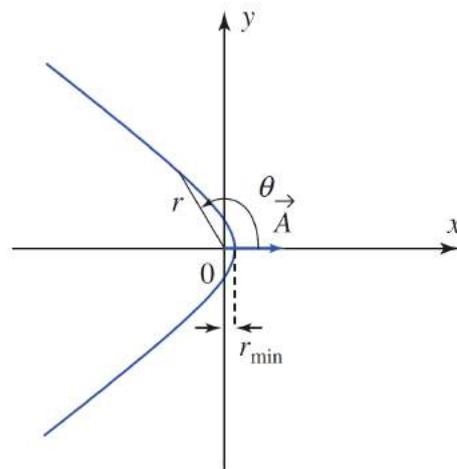
- Si l'énergie est négative ( $e < 1$ , trajectoire elliptique). La distance  $r$  évolue entre une valeur maximal  $r_{max}$  et minimale  $r_{min}$  : nous avons un état lié. Ces distances sont respectivement l'apogée et le périhélie ;



- Si l'énergie est nulle ( $e = 1$ , trajectoire parabolique). L'apogée de la trajectoire est renvoyé à l'infini ;



- Si l'énergie est positive ( $e > 1$ , trajectoire hyperbolique). On a un état de diffusion, car la branche hyperbole décrite par le point matériel diffère dans les deux cas : pour une force répulsive, nous avons observé une trajectoire où le point matériel fuyait le centre de force. Ici, il est attiré vers  $O$ , mais finit quand même par s'échapper.



## Conclusion

Nous avons vu dans cette leçon comment décrire la théorie de la gravitation et plus particulièrement comment décrire le mouvement d'un objet proche d'un astre. Néanmoins, la théorie de la gravitation a connu quelques ajustements récents par Einstein en 1915, afin de la rendre compatible avec la théorie de la relativité. En effet, la théorie de Newton a pour faiblesse de considérer que l'attraction gravitationnelle prend effet immédiatement, alors que ceci viole le principe qui stipule qu'on ne peut transmettre d'information plus vite que la lumière.

# L.P. 05 - Lois de conservation en dynamique

Niveau : 1er année CPGE

## Pré-requis

- Mécanique du point
- Mécanique du solide

## Bibliographie

- Mécanique, Landau, *Ed. de Moscou*
- Mécanique, Perez, *Dunod*
- Tout en un MPSI, Sanz, *Dunod*
- Tout en un PC, Sanz, *Dunod*
- BUP n.914 (2009), Serra
- Mécanique 1, Feynman, *Dunod*
- Les 1001 question 1er année PCSI, Garing, *Ellipse*
- Exp. de physique (Mécanique), Bellier, *Dunod*

**Leçon assez calculatoire donc il faut essayer d'aller à l'essentiel et sauter des étapes de calculs pour gagner du temps sans oublier de faire la manip.**

## Introduction

Les grandeurs mécaniques sont les indicateurs de l'état du système étudié. La dynamique vise à décrire les mouvements et évolutions au cours du temps en fonction des actions mécaniques appliquées sur le système.

Dans cette leçon nous allons voir à travers les théorèmes de Noether comment certaines lois de la physique se conserve dans certains cas. Cette particularité va nous permettre de résoudre quelques problèmes auxquels le physicien est confronté.

## Théorèmes de Noether

Les lois de la physique, pour rester invariantes, doivent s'exprimer dans des référentiels galiléens qui sont caractérisés par les propriétés suivantes :

- Le temps  $y$  est uniforme : un processus se déroule de même façon si on l'observe, toutes choses égales par ailleurs, à une autre époque. Une translation dans le temps montre qu'il n'y a pas d'origine absolue pour le temps.
- L'espace est homogène : un processus se déroule de la même façon si on l'observe, toutes choses égales par ailleurs, en un autre lieu. Une translation dans le temps montre qu'il n'y a pas d'origine absolue pour le temps.

- L'espace est isotrope : un processus se déroule de la même façon si on l'observe, toutes choses égales par ailleurs, en l'orientant dans une autre direction. Une rotation dans l'espace montre qu'il n'y pas de direction privilégiée dans l'espace.

Les conséquences de ces trois propriétés sont respectivement :

- Conservation de la quantité de mouvement : les différentes parties d'un système isolé peuvent modifier leurs quantité de mouvement respectives, mais la quantité de mouvement de tout ce système est constante.
- Conservation du moment cinétique : les différentes parties d'un système isolé peuvent modifier leurs moments cinétiques respectifs, mais le moment cinétique de tout ce système est constante ;
- Conservation de l'énergie : les différentes parties d'un système isolé peuvent échanger entre elles de l'énergie, mais l'énergie de tout ce système est constante.

## 1. Les lois de conservations

Considérons un système  $S$  de  $N$  points matériels. Chaque point est repéré dans l'espace par trois coordonnées, dépendantes du temps. Le nombre de degrés de liberté  $S$  est égal au nombre minimal de paramètres nécessaires pour décrire complètement la position des  $N$  points de  $S$ . Il est égal à  $3N$  et est inférieur à  $3N$ , lorsque ces points sont liés entre eux par des contraintes géométriques :

- Un point contraint à se déplacer le long d'une ligne, possède un seul degré de liberté. Sa position peut être repérée par son abscisse curviligne.
- Un système isolé (c.a.d. rigide) de  $N$  points matériels ( $N \geq 3$ ), possède au plus six degrés de liberté. Sa position peut être repérée par 3 coordonnées de l'un des points et trois angles décrivant la rotation du solide autour de ce point.

Soit  $p$  le nombre de degré de liberté du système  $S$ , nous appelons coordonnées généralisées, les  $p$  grandeurs permettant de décrire la position de  $S$  :

$$q_1, q_2, \dots, q_p$$

L'état à l'instant  $t$  de  $S$  est complètement déterminé par la donnée des  $p$  coordonnées généralisées et de leurs  $p$  dérivées par rapport au temps, appelées vitesses généralisés :

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p$$

Ainsi la connaissance précise de l'état du système doit nous permettre de déterminer son état à tout instant. Pour simplifier le raisonnement, nous supposons que le nombre de degrés de liberté est égale à  $3N$  (ce qui exclut les liaisons parfaitement rigides entre deux de ces points).

Soit l'évolution du système  $S$  est déterminée par sa fonction de Lagrange  $L$ , dépendante des coordonnées généralisées, des vitesses généralisées et du temps. Pour  $p$  degrés de liberté :

$$L(q_1, q_2, \dots, q_p, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p, t) \quad (1)$$

Cette fonction de Lagrange doit donc contenir toutes les informations, concernant les actions subies par les éléments de  $S$ . On a aussi les  $p$  équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, p$ .

Pour un système isolé de  $N$  particules microscopiques, dont les positions dans un référentiel galiléen sont repérées par les coordonnées généralisées, le lagrangien est de la

forme :

$$L(q_1, q_2, \dots, q_p, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=N} m_i v_i^2 - U(q_1, q_2, \dots, q_p) \quad (3)$$

La fonction  $U$  qui ne dépend que des positions relatives des particules de  $S$ , est appelée énergie potentielle. Elle contient tous les informations concernant les interactions entre particules. Le terme qui la précède, en notant  $v_i$  la vitesse au sens usuel :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=N} m_i v_i^2 \quad (4)$$

est appelé énergie cinétique. Pour un système de coordonnées généralisées, il se met nécessairement sous la forme :

$$T(q_1, \dots, q_p, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_p) = \sum_{i,j} a_{ij}(q_1, \dots, q_p) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (5)$$

$T$  est donc une fonction homogène à 2 degré de liberté des vitesses généralisées, ce qui d'après la relation d'Euler implique :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \quad (6)$$

car  $U$  ne dépend pas des vitesses généralisées. Cette forme du lagrangien est bien conforme aux principes de bases de la mécanique classique (uniformité du temps, homogénéité et isotropie de l'espace et principe de relativité de Galilée (le lagrangien doit garder la même forme dans un changement de référentiel galiléen)).

## a) Quantité de mouvement

L'homogénéité de l'espace donne lieu à une loi de conservation. Du fait de cette homogénéité, et en supposant que notre système est isolé, les propriétés mécaniques d'un système fermé ne changent pas lors d'un déplacement parallèle du système entier dans l'espace. Considérons donc un déplacement infiniment petit  $\epsilon$ , en imposant la condition que la fonction de Lagrange reste inchangée. On désigne sous le nom de déplacement parallèle une transformation dans laquelle tous les points du système se déplacent d'un même segment ; autrement dit, leurs rayons vecteurs  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \delta \vec{r}$ . Dans un référentiel galiléen, repérons les positions des  $N$  particules de  $S$  par leur  $p = 3N$  coordonnées cartésiennes. La translation :

$$\delta \vec{r} = (\delta x, \delta y, \delta z)$$

entraîne la variation de la fonction  $L$  pour une variation infiniment petite des coordonnées (les vitesses des particules étant constantes) qui est donnée par :

$$\delta L = \sum_{i=1}^{i=N} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \delta x + \sum_{i=1}^{i=N} \left( \frac{\partial L}{\partial y_i} \right) \delta y + \sum_{i=1}^{i=N} \left( \frac{\partial L}{\partial z_i} \right) \delta z = 0 \quad (7)$$

Or on a  $\delta \dot{q} = (d/dt)\delta q$  d'où :

$$\delta L = \left( \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x + \left( \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta y + \left( \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) \delta z \quad (8)$$

Cette variation doit être nulle pour tout  $\delta r$  ce qui implique trois relations :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0; \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = 0 \text{ et } \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = 0$$

Or, comme sachant que la vitesse est constante :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=N} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U(q_1, q_2, \dots, q_p)$$

Ces relations peuvent s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} m_i \dot{x}_i = 0; \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} m_i \dot{y}_i = 0 \text{ et } \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{i=N} m_i \dot{z}_i = 0$$

Ou encore en introduisant le vecteur impulsion ou quantité de mouvement du système  $S$  :

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{i=N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \vec{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \vec{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \vec{e}_z = \overrightarrow{Cste} \quad (9)$$

Le vecteur quantité de mouvement d'un système isolé dans un référentiel galiléen est constant. Cette propriété est la conséquence de l'homogénéité de l'espace dans un référentiel galiléen. C'est le deuxième théorème de Noether.

**Rq :**

- le vecteur  $\vec{P}$  est aussi appelé impulsion du système. L'impulsion est additive  $P = \sum p$ .
- L'égalité  $\sum \delta L = \partial L / \partial r_a = 0$  a un sens physique simple. La dérivée  $\partial L / \partial r_a = -\partial U / \partial r_a$  représente la force  $F_a$  agissant sur la  $a^{i\text{eme}}$  particule. Et donc on a que la somme des forces agissant sur toutes les particules d'un système fermé est égale à 0 :  $\sum_a \vec{F}_a^{ext} = \vec{0}$ .
- Si le mouvement est décrit à l'aide des coordonnées généralisées  $q_i$ , les dérivées de la fonction de Lagrange par rapport aux vitesses généralisées sont  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$  sont appelées impulsions généralisées et les dérivées par rapport aux coordonnées généralisées  $F_i = \partial L_i / \partial q_i$  forces généralisées. On a alors  $\dot{p}_i = F_i$

**Rq : Exemple** - Regarder page 428 Tout en un PC\* sur force exercée par un fluide sur les parois d'une conduite.

## b) Moment cinétique

L'isotropie de l'espace dans un référentiel galiléen implique que la fonction de Lagrange soit invariante pour toute rotation d'ensemble d'un système isolé. Considérons donc une rotation infinitésimale d'axe  $(O, u)$  et d'angle  $\delta\phi$ . Les vecteurs positions  $r_i$  des  $N$  particules, définis à partir de l'origine  $O$ , subissent une variation  $\delta r_i$  donnée par :

$$\delta \vec{r}_i = \delta\phi \vec{u} \wedge \vec{r}_i$$

Les vitesses sont également transformées par le même produit vectoriel :

$$\delta \vec{v}_i = \delta\phi \vec{u} \wedge \vec{v}_i$$

La variation de la fonction de Lagrange qui en résulte est alors :

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{i=1}^{i=N} \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \delta x_i + \sum_{i=1}^{i=N} \left( \frac{\partial L}{\partial y_i} \right) \delta y_i + \sum_{i=1}^{i=N} \left( \frac{\partial L}{\partial z_i} \right) \delta z_i \\ &+ \sum_{i=1}^{i=N} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{i=N} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) \delta \dot{y}_i + \sum_{i=1}^{i=N} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} \right) \delta \dot{z}_i \end{aligned} \quad (10)$$

Or, d'après les équations de Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} m_i \dot{x}_i \implies \frac{\partial L}{\partial x_i} = m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left( \frac{d\dot{x}_i}{dt} \delta x_i + \frac{dx_i}{dt} \delta \dot{x}_i \right) + \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left( \frac{d\dot{y}_i}{dt} \delta y_i + \frac{dy_i}{dt} \delta \dot{y}_i \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left( \frac{d\dot{z}_i}{dt} \delta z_i + \frac{dz_i}{dt} \delta \dot{z}_i \right) \\ \Leftrightarrow \delta L &= \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left( \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \delta \vec{r}_i + \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \delta \vec{v}_i \right) \\ &= \delta\phi \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left( \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{r}_i) + \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}_i) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

En permutant les produits mixtes il vient :

$$\delta L = \delta\phi \vec{u} \cdot \sum_{i=1}^{i=N} m_i \left( \vec{r}_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} + \vec{v}_i \wedge \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \delta\phi \vec{u} \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{i=N} m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i \right) \quad (12)$$

Le lagrangien étant invariant pour cette rotation uniforme de  $S$  alors  $\delta L = 0$ . Cette relation étant vérifiée pour tout  $\delta\phi$  et pour tout vecteur  $u$ , on en déduit :

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{i=N} m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i \right) = 0 \quad (13)$$

Le vecteur

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{i=N} \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i$$

appelé vecteur moment cinétique du système est donc constante. Cette propriété est la conséquence de l'isotropie de l'espace dans un référentiel galiléen. C'est le troisième théorème de Noether.

**Rq : Exemple** - Manip du tabouret page 325 du Perez.

### c) Énergie mécanique

Enfin il nous reste la loi de conservation qui découle de l'uniformité du temps. Du fait de cette uniformité, la fonction de Lagrange d'un système fermé ne dépend pas explicitement du temps. Par suite, la dérivée totale par rapport au temps de la fonction de Lagrange peut s'écrire :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) \quad (14)$$

D'après les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Et donc :

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left( \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}_i \right)$$

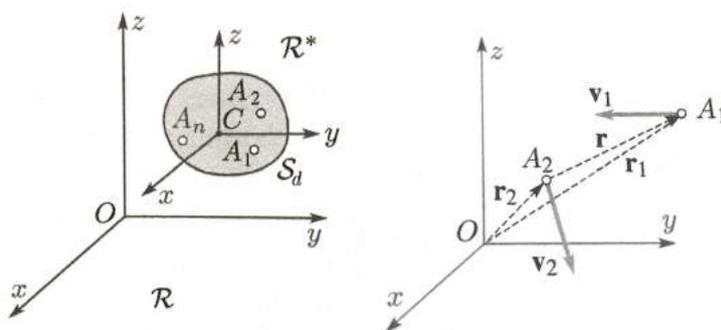
En regroupant les deux dérivées par rapport au temps il apparaît :

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = \frac{d(2T - L)}{dt} = \frac{d(T + U)}{dt} = 0 \quad (15)$$

On en déduit donc que la quantité  $E = 2T - L = T + U$ , appelée énergie du système est constante. L'énergie d'un système fermé est constante. Cette propriété est la conséquence de l'uniformité du temps dans un référentiel galiléen. C'est le premier théorème de Noether.

**Rq : Exemple** - Regarder le saut à la perche Garing page 377 (Chapitre 7 exo 40).

## 2. Application dans un champ à force centrale



Soient deux corps ponctuels  $A_1$  et  $A_2$  de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$ , en mouvement dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , sous l'action de leur seule force d'interaction. Le système est donc isolé. Soit  $\mathcal{R}^*$  le référentiel du centre de masse avec le centre de masse  $C$ , fixe dans  $\mathcal{R}^*$ .

## a) Éléments cinétiques du système

### Quantité de mouvement

Par rapport à  $\mathcal{R}$ , la quantité de mouvement de ce système s'écrit :

$$P = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_C = M v_C$$

avec  $v_C$  la vitesse du système global et  $M$  la masse du système.

Dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$ , on a :

$$P^* = p_1^* + p_2^* = (m_1 + m_2) v_C^*$$

Il en résulte que, dans  $\mathcal{R}^*$ , les quantités de mouvement de  $A_1$  et  $A_2$  sont opposées. Évaluons  $p_1^*$  et  $p_2^*$ . D'après la composition des vitesses on a :

$$p_1^* = m_1 v_1^* = m_1 (v_1 - v_C) = m_1 \left( v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right)$$
$$\text{d'où, } p_1^* = -p_2^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 + v_2)$$

Cette dernière relation s'écrit aussi :

$$p^* = p_1^* + p_2^* = \mu v \text{ avec } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ et } v = v_1 - v_2$$

Ainsi, dans  $\mathcal{R}^*$ , la norme de la quantité de mouvement de chacune des particules est égal à celle d'une particule fictive  $A$ , de masse  $\mu$  et de vitesse  $v$ . La masse  $\mu$  est appelée masse réduite du système des deux corps. Cette masse est inférieure ou égale à la plus petite des deux masses.

### Moment cinétique

D'après le théorème de Koenig, on a pour le système des deux corps ponctuels :

$$\mathcal{L}_O = OC \wedge (p_1 + p_2) + \mathcal{L}^*$$

avec  $\mathcal{L}^* = CA_1 \wedge p_1^* + CA_2 \wedge p_2^* = A_2 A_1 \wedge p_1^* = r \wedge \mu v$

Ainsi, par rapport au référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$ , le moment cinétique du système des deux corps ponctuels est égal au moment cinétique de la particule fictive  $A$  dont la position dans  $\mathcal{R}^*$  est définie par  $CA = r$  :

$$\mathcal{L}^* = CA \wedge \mu v = r \wedge p^*$$

### Énergie cinétique

D'après le théorème de Koenig, relatif à l'énergie cinétique on a :

$$E_{k/\mathcal{R}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_C^2 + E_k^* \text{ avec } E_k^* = \frac{p_1^{*2}}{2m_1} + \frac{p_2^{*2}}{2m_2} = \frac{p^{*2}}{2\mu}$$

Ainsi, l'énergie cinétique  $E_k^*$  est celle d'une particule fictive  $A$ , de masse  $\mu$  et de vitesse  $v = v_1 - v_2$  :

$$E_k^* = \frac{p^{*2}}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu v^2$$

## b) Loi de conservations et conséquences

Pour un système isolé, les seules forces qui apparaissent sont les forces d'interaction mutuelle lesquelles sont opposées selon la troisième loi de Newton. La quantité de mouvement du système est alors constante puisque :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = F_{2 \rightarrow 1} + F_{1 \rightarrow 2} = 0$$

Il en résulte :

$$P = Mv_C = Cste \quad (16)$$

On en déduit aussi que la vitesse est constante.

Le mouvement du centre de masse est donc rectiligne uniforme. Si, en outre, ces forces d'interaction dérivent d'une énergie potentielle, ce qui est généralement le cas, il vient :

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = F_{2 \rightarrow 1} \cdot dr_1 + F_{1 \rightarrow 2} \cdot dr_2 = -dE_p$$

L'application du théorème de l'énergie cinétique au système donne :

$$\begin{aligned} dE_{k,1} &= F_{2 \rightarrow 1} \cdot dOA_1 \text{ et } dE_{k,2} = F_{1 \rightarrow 2} \cdot dOA_2 \\ \text{d'où } dE_k &= dE_{k,1} + dE_{k,2} = F_{2 \rightarrow 1} \cdot dOA_1 + F_{1 \rightarrow 2} \cdot dOA_2 = -dE_p \end{aligned}$$

Il en résulte pour l'énergie mécanique  $E_m = E_k + E_p$  :

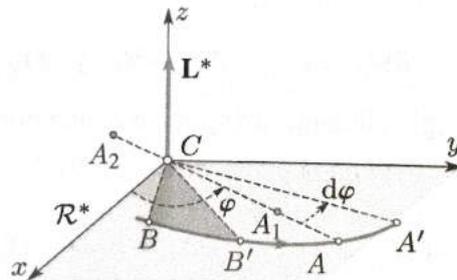
$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d(E_k + E_p)}{dt} = 0 \implies E_m = E_k + E_p = Cste \quad (17)$$

La force d'interaction qui s'exerce sur la particule fictive  $A$  étant centrale, car passant par le centre de masse  $C$ , le mouvement est plan. Si on explicite la conservation du moment cinétique dans  $\mathcal{R}^*$  en coordonnées polaire  $(r, \phi)$  dans le plan  $Cxy$ , on obtient :

$$\mathcal{L}^* = r \wedge \mu v_A = r \vec{e}_r \wedge \mu(\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\phi} \vec{e}_\phi) = \mu r^2 \dot{\phi} \vec{e}_z = \mu \vec{C} = Cste$$

On en déduit que la grandeur  $C = r^2 \dot{\phi}$  est une constante du mouvement.  $C$  est appelé constante des aires et vaut deux fois la vitesse aréolaire ou aire balayée par le rayon vecteur  $\vec{CA}$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\phi}}{2} = \frac{C}{2} \quad (18)$$



Si on revient sur l'expression de l'énergie mécanique dans  $\mathcal{R}^*$  on a en remplaçant la vitesse par  $v_A$  :

$$E_m^* = E_k^* + E_p = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + E_p = Cste$$

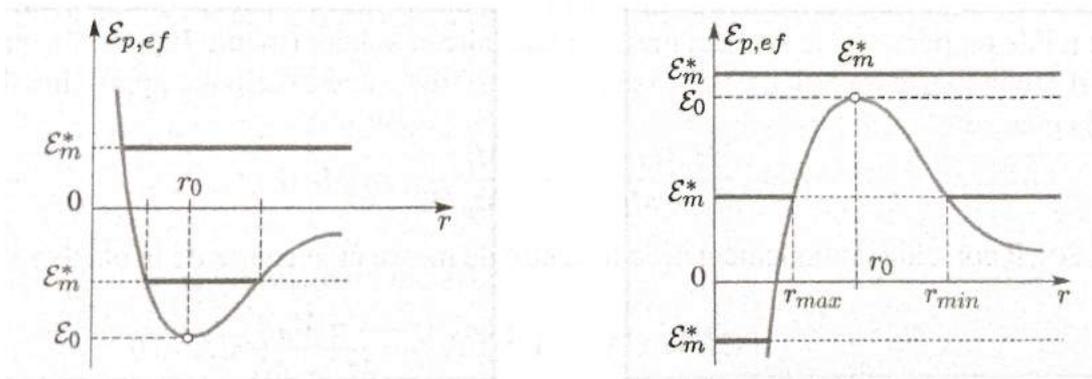
Ainsi en combinant avec l'équation précédent, on obtient l'équation du mouvement radial. En effet, en introduisant le carré du moment cinétique  $\mathcal{L}^2 = \mu^2 r^4 \dot{\phi}^2$ , il vient :

$$E_m^* = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{2\mu r^2} + E_p(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + E_{p_{eff}} \quad (19)$$

avec  $E_{p_{eff}} = E_p(r) + \mathcal{L}^2/(2\mu r^2)$ . Tout se passe comme si la particule  $A$  était soumise à une énergie potentielle effective dans le mouvement unidimensionnel radial.

### c) Analyse qualitative du problème à deux corps

On considère généralement deux types particuliers d'énergie potentielle effective : le puits et la barrière d'énergie potentielle.



**Puits d'énergie** : la courbe donne l'énergie potentielle effective en fonction de  $r$  passe par un minimum. Sa valeur limite quand  $r \rightarrow \infty$  est zéro ; en effet les interactions sont nulles quand deux points sont infiniment éloignées. Si  $E_m^* \geq 0$ , l'état est libre car  $r \geq r_{min}$  peut prendre une valeur finie. Si  $E_m^* < 0$  l'état est lié car  $r$  oscille entre deux valeurs extrêmes appelées distances apsidales. Si  $E_m^* = E_0$  la trajectoire est circulaire si  $\dot{\phi} \neq 0$  où au point d'équilibre si  $\dot{\phi} = 0$ . (voir plus page 712 du Sanz).

**Barrière d'énergie** : l'énergie potentielle effective en fonction de  $r$  passe par un maximum. Sa valeur limite quand  $r \rightarrow \infty$  est égale à 0. Si  $E_m^* \leq 0$   $r$  oscille entre 0 et  $r_{max}$ , on a un état lié. Si  $0 > E_m^* < E_0$  deux solutions peuvent convenir  $0 \leq r \leq r_{max}$  (état lié) et  $0 < r_{min} \leq r \leq \infty$  (état libre). Si  $E_m^* \geq E_0$  la coordonnée radiale  $r$  peut prendre toutes les valeurs comprises en 0 et  $\infty$  : l'état est libre. Si  $E_m^* = E_0$  on a une position d'équilibre instable car un DL de Taylor de l'énergie potentielle autour de  $E_0$  montrerait que tout écart à la position d'équilibre augmente. (voir plus page 714 du Sanz).

**Rq** : Problème à  $N$  corps dans le Perez p.237.

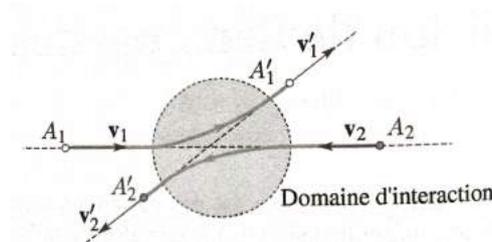
## 3. Application aux chocs

Dans le langage habituel, on dit que deux systèmes matériels entrent en collision ou subissent un choc à un instant, lorsque les surfaces qui les délimitent sont en contact à cet instant sans l'être dans les instants voisins, antérieur ou postérieur parfois. L'expérience courante permet d'établir aisément que le choc dure très peu de temps, est localisé dans l'espace et implique une variation brutale de la vitesse des points qui constituent les deux systèmes matériels. Cette variation brutale de la vitesse est attribuée à une interaction de

courte portée, dite de contact.

Nous étudions ici que la collision entre deux particules. Dans ce cas, la définition du choc macroscopique par le contact de surfaces doit être abandonnée. On doit la remplacer par la notion plus générale d'interaction.

### a) Lois générales



Considérons deux particules  $A_1$  et  $A_2$ , de masse respectives  $m_1$  et  $m_2$ . Leur interaction de courte portée est définie par l'énergie potentielle  $E_p(r)$ , fonction de la distance  $r$  qui les sépare. Si ces points sont à une distance suffisante l'un de l'autre,  $E - p(r)$  est pratiquement nul.

Supposons ces particules initialement à une distance telle que  $E_p(r) = 0$  et se dirigeant l'une vers l'autre avec des vitesses  $v_1$  et  $v_2$  dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ . Lorsqu'elles parviennent au voisinage l'une de l'autre  $E_p(r) \neq 0$  et les vitesses varient jusqu'à ce que la distance atteigne à nouveau une valeur suffisante pour que  $E_p(r)$  soit à nouveau nul. Les vitesses acquises  $v'_1$  et  $v'_2$  sont alors appelées vitesses finales de la collision. On définit un domaine en dehors duquel l'interaction est négligée.

### Quantité de mouvement

Le système des deux particules étant isolé, la quantité de mouvement de l'ensemble, par rapport au référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$  est une constante vectorielle du mouvement :

$$\sum_i p_i = \sum_f p_f \quad (20)$$

### Énergie totale

Au cours d'une collision, les particules  $A_1$  et  $A_2$  peuvent se scinder en deux : leur état peut donc fondamentalement être modifié. Afin de tenir compte d'une telle modification, nous devons étendre la conservation de l'énergie mécanique à celle de l'énergie totale  $E$ , somme des énergies cinétique, potentielle extérieure  $E_{p,ext}$  et d'une énergie interne  $U$  du système, laquelle est constituée de l'énergie potentielle d'interaction et des énergies internes  $U_i$  de chacune des particules. On a donc :

$$E_i = E_f \text{ avec } E = E_k + E_{p,ext} + U \text{ et } U = E_{p,int} + \sum_p U_p$$

Comme la variation de position du système est négligeable au cours de la collision,  $E_{p,ext}$  et  $E_{p,int}$  ne varient pas et il vient :

$$\sum_i E_{k,i} + U_i = \sum_f E_{k,f} + U_f \quad (21)$$

On distingue ainsi deux de collisions :

- La collision élastique : dans ce cas le nombre ou la nature des particules en interaction sont inchangés. L'énergie cinétique totale se conserve :  $\sum_i U_i = \sum_f U_f$  d'où  $\sum_i E_{k,i} = \sum_f E_{k,f}$ . Au cours d'une collision élastique on a :

$$A_1 + A_2 \longrightarrow A'_1 + A'_2$$

ce qui se traduit par

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \implies m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

et

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

Si le projectile et la cible immobile ont même masse, l'angle que font entre eux les vecteurs quantités de mouvement après la collision élastique est droit.

- Si la collision est inélastique, comme c'est le cas lors de l'interaction chimique de deux molécules, la fusion de deux particules on aura :

$$A_1 + A_2 \longrightarrow A_3 + A_4 + A_5 + \dots$$

**Rq :** Plus de détail p247-248 du Perez.

## b) Collision élastique

Les lois de conservation de la quantité de mouvement totale et de l'énergie cinétique totale fournissent deux équations scalaires contenant les deux inconnues  $v'_1$  et  $v'_2$  sur l'axe du mouvement il vient :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \text{ et } \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

Soit :

$$m_1(v'_1 - v_1) = m_2(v_2 - v'_2) \text{ et } m_1(v_1'^2 - v_1^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

Si on divise cette dernière équation par la précédente on trouve  $v'_1 + v_1 = v_2 + v'_2$ . Il en résulte que :

$$v'_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \text{ et } v'_2 = \frac{2m_1 v_1 - (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2}$$

Si  $m_2 > m_1$  le choc fait rebrousser chemin à  $A_1$ , alors que si  $m_2 < m_1$ ,  $A_1$  garde le même sens de déplacement. Pour  $m_1 = m_2$ ,  $A_1$  et  $A_2$  échangent leurs vitesses.

La perte d'énergie cinétique de la particule  $A_1$  au cours d'une collision élastique directe est :

$$Q = -\Delta E_{k,1} = \Delta E_{k,2} = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_{k,1} \quad (22)$$

### c) Collision inélastique

**MANIP : faire la chute d'une balle sur une table et calcul du facteur de restitution page 298 Bellier.**

On caractérise une collision inélastique entre deux particules, l'une le projectile, l'autre la cible, par la variation d'énergie cinétique du système :

$$\Delta E_k = \sum_f E_{k,f} - \sum_i E_{k,i} = \sum_i U_i - \sum_f U_f$$

Si  $\Delta E_k < 0$ , la collision inélastique est endoénergétique ; si  $\Delta E_k > 0$ , elle est exoénergétique. Il est naturel d'introduire le facteur de restitution en énergie  $\epsilon$  :

$$\epsilon = \frac{\sum_f E_{k,f}}{\sum_i E_{k,i}} \quad (23)$$

Pour  $\epsilon = 0$  la perte d'énergie cinétique est maximale : la collision est parfaitement inélastique. On retrouve évidemment la limite élastique en faisant  $\epsilon = 1$ .

Considérons une collision inélastique entre un atome projectile, d'énergie cinétique  $E_{k,1}$  et une molécule cible au repos. Après collision, la cible est dans un nouvel état caractérisé par une nouvelle valeur de l'énergie interne. L'équation de conservation de l'énergie donne, dans  $\mathcal{R}^*$  :

$$\sum_i E_{k,i}^* + U_i = \sum_f E_{k,f}^* + U_f$$

Dans  $\mathcal{R}^*$ , les produits de la réaction peuvent être chacun au repos puisque l'on peut réaliser  $P^* = 0$  en fait séparément  $p_f^* = 0$ , soit  $E_{k,f}^* = 0$ . On en déduit :

$$\sum_i E_{k,i}^* + U_i \geq \sum_f U_f \text{ soit } \sum_i E_{k,i}^* \geq \Delta U \text{ avec } \Delta U = \sum_f U_f - \sum_i U_i$$

Comme l'énergie cinétique des deux particules dans  $\mathcal{R}^*$  est  $\mu v^2/2$ ,  $v$  étant la vitesse relative, et que la cible est immobile dans  $\mathcal{R}$ , on a :

$$E_k^* = \frac{\mu v^2}{2} = \left( \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \frac{v_1^2}{2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} e_{k,1} \geq \Delta U \text{ d'où } E_{k,1} \geq \frac{m_1 + m_2}{m_2} \Delta U$$

Ainsi l'énergie cinétique seuil de la collision inélastique a pour expression :

$$E_{k,1}^s = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \Delta U \quad (24)$$

**Rq** : Quantité de mouvement relativiste voir Feynman page 151.

## Conclusion

Nous avons mis en évidence des cas où la conservation de grandeurs mécanique rend l'étude plus simple qu'une étude au travers du principe fondamental de la dynamique. Ce résultat est très utile pour démontrer des lois ou décrire efficacement des systèmes physiques.

# L.P. 08 - Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Cinématique des fluides
- Diffusion
- Opérateurs mathématiques
- Cinétique des gaz
- Mécanique

## Bibliographie

- Cap prépa PC, Renvoizé, *Pearson*
- Hydrodynamique physique, Guyon, *EDP*
- H prépa Mécanique des fluides, Brébec, *Hachette*
- Mécanique, Perez, *Dunod*
- Tout en un PC, Sanz, *Dunod*

## Introduction

Jusqu'à présent, nous nous sommes limités au cas des fluides parfaits, soumis aux seules forces de pression. Ce modèle ne peut décrire de façon satisfaisante que certains types d'écoulements bien particuliers. En effet, il ne fait pas de différence entre l'huile et l'eau alors que ces deux fluides ne s'écoulent pas de la même manière dans un tuyau de petite section par exemple.

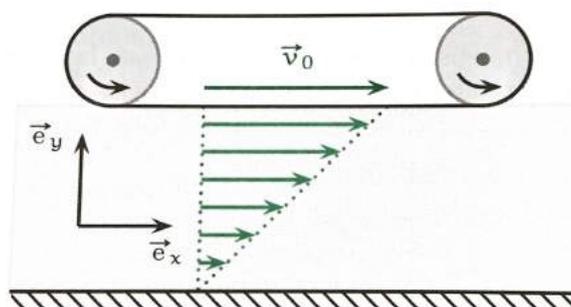
On sait que dans un fluide au repos, les actions de contact exercées par une particule mésoscopique de fluide sur une autre sont toujours orthogonales à la paroi (fictive) qui sépare les deux particules : ce sont les actions de pressions.

Dans un écoulement, on constate expérimentalement qu'il existe, en plus des actions de pression, des actions tangentielles. Chaque particule de fluide a tendance à entraîner ses voisines dans son mouvement. Ces frottements internes au fluide sont les phénomènes de viscosité. C'est cette notion que nous allons aborder dans cette leçon en se limitant à des écoulements incompressibles.

## 1. Notion de viscosité

**Manip** : Vidange de burettes : une d'eau et une de glycerol, constater la différence et dire que la formule de Toricelli ne prévoit pas une différence selon la masse volumique.

## a) Définition



Pour mesurer qualitativement les effets de la viscosité, on réalise le dispositif présenté sur la figure. Le liquide à étudier remplit l'espace entre deux parois horizontales parallèles. La paroi du bas est fixe dans le référentiel du laboratoire. La paroi du haut, initialement immobile est entraînée à partir de l'instant initial à la vitesse  $\vec{v}$  constante par un dispositif approprié.

La mise en mouvement de la paroi supérieure est suivie d'un régime transitoire durant lequel le profil de vitesse dans le fluide s'établit. Au bout d'un certain temps, le champ de vitesse devient indépendant du temps : le régime permanent est atteint. Des mesures expérimentales montrent alors les faits suivants :

- Le liquide adhère localement à chaque paroi : il a une vitesse nulle par rapport à la paroi avec laquelle il est en contact ;
- Le champ de vitesse entre les deux plaques, exprimée dans le référentiel du laboratoire, est de la forme  $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$ , où  $v_x$  est une fonction linéaire de  $y$  ;
- La plaque du bas subit, de la part du liquide, une force horizontale  $\vec{F}$  proportionnelle à  $\partial v_x / \partial y$  et à l'aire  $S$  de la plaque :

$$\vec{F} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} S \vec{e}_x$$

Le coefficient de proportionnalité  $\eta$  dépend uniquement du liquide utilisé et s'appelle viscosité dynamique du liquide. Un fluide qui obéit à ce comportement est appelé fluide newtonien.

La force mesurée dans l'expérience est exercée par le fluide sur un solide (la plaque du bas). En postulant par extrapolation qu'une couche de fluide exerce le même type de force sur la couche de fluide voisine, on construit la loi de Newton.

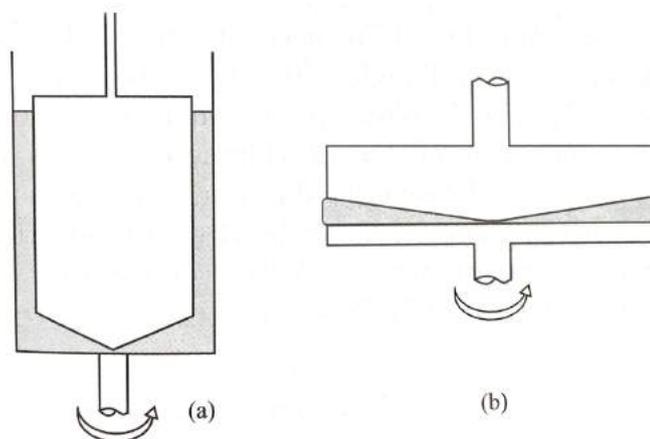
Ainsi soit un écoulement de cisaillement parallèle, de la forme  $\vec{v} = v_x(y, t)\vec{e}_x$ . Soit une surface élémentaire  $d$  fixe, orthogonale à l'axe  $y$ , placée par la pensée au sein de cet écoulement. En plus des actions normales de pression, la couche de fluide, située au-dessus de  $dS$  exerce sur celle qui est en dessous de  $dS$  une force tangentielle de cisaillement, appelé force de viscosité :

$$d\vec{F}_t = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS_M \vec{e}_x \quad (1)$$

Le coefficient  $\eta$  s'appelle la viscosité dynamique du fluide. Son unité est le pascal seconde *Pa.s* (anciennement poiseuille *PI*).

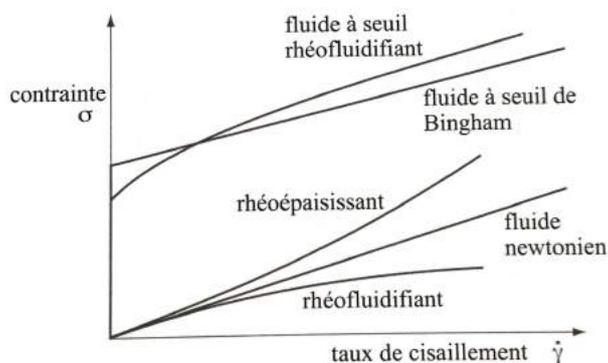
La quantité  $\eta \partial v_x / \partial y$  s'appelle la contrainte de cisaillement pour les deux raisons suivantes : par définition une contrainte est une force par unité de surface ; cette contrainte ne prend naissance que si  $\partial v_x / \partial y$  est non nul. Cela arrive si la couche de fluide située en  $y + dy$  a une vitesse non nulle par rapport à la couche située en  $y$  (vitesse relative), c'est

à dire s'il y a localement cisaillement dans l'écoulement.



Pour mesurer la viscosité d'un fluide on utilise un viscosimètre ou rhéomètre. Le but est de mesurer le couple sur l'une des parois/cylindres en imposant une vitesse de rotation sur l'autre paroi/cylindre (cisaillement imposé) ou bien l'inverse (contrainte imposée). Il y a par exemple le rhéomètre de Couette cylindrique (a) ou le rhéomètre cône-plan (b) :

- Pour le Couette on a  $\sigma = M/(2\pi R^2 h)$  et  $\dot{\gamma} = (R/\Delta R)\omega_0$  avec  $M$  le moment du couple appliqué aux cylindres,  $\omega_0$  la vitesse angulaire de rotation et  $R$  la moyenne des rayons (**Calcul du moment page 350 de Sanz**) ;
- Pour le cône-plan on a  $\sigma = 3M/(2\pi R^3)$  et  $\dot{\gamma} = \omega_0/\alpha$  avec  $\alpha$  angle entre les cônes ( $\leq 4^\circ$ ).



Corps	Air	Eau	Huile d'olive	Glycérine	Miel
Viscosité (Pa.s)	$10^{-7}$	$10^{-4}$	0,1	0,1	100

**Rq** : Plus de détails sur les types de fluides voir dans le Guyon page 141-143.

## b) Interprétation microscopique

Raisonnons sur un fluide constitué d'un seul type de molécules. Ce que l'on appelle "vitesse  $\vec{v}(M, t)$  en un point " d'un écoulement est la vitesse du centre de masse de la particule mésoscopique centrée en  $M$ . Dans le référentielle barycentrique de cette particule mésoscopique, chaque molécule  $i$  possède une vitesse d'agitation thermique, notée  $\vec{v}_{i,th}$ . Ainsi dans le référentiel où l'écoulement est décrit, la molécule  $i$  a la vitesse :

$$\vec{v}_i = \vec{v}(M, t) + \vec{v}_{i,th}$$

Statistiquement, les  $\vec{v}_{i,th}$  sont tous de même norme mais de directions différentes : la moyenne des vecteurs  $\vec{v}_{i,th}$  sur toutes les molécules est donc nulle de telle sorte que :

$$\langle \vec{v}_i \rangle = \vec{v}(M, t)$$

La vitesse locale de l'écoulement n'est autre que la vitesse moyenne des molécules situées autour du point  $M$ .

Considérons un écoulement unidimensionnel de la forme  $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$ . Soit  $dS$  un élément de surface parallèle au plan  $Oxy$  situé à l'ordonnée  $y$ . On note  $\ell$  le libre parcours moyen des molécules et  $\tau$  le temps de libre parcours moyen :  $\ell = v_{th}$ , où  $v_{th}$  est la norme de la vitesse d'agitation thermique. A cause de cette agitation, des molécules situées entre les ordonnées  $(y - \ell)$  et  $(y + \ell)$  de part et d'autre de  $dS$  sont susceptibles de traverser  $dS$  durant  $\tau$ . Ces molécules se trouvent dans des cylindres de base  $dS$  et de hauteur  $\ell$ . En notant  $n$  le nombre de particules par unité de volume, le nombre de molécules contenues dans un tel cylindre est  $\delta N = n \cdot dS \cdot \ell$ . Le nombre de molécules traversant  $dS$  de haut en bas est :

$$\delta N_{y>0} = \frac{1}{6}n \cdot dS \cdot \ell = \frac{1}{6}n \cdot dS \cdot v_{th}\tau$$

Le facteur  $1/6$  vient du fait que chaque molécule du cylindre peut aller dans trois directions et qu'il y a deux sens pour chaque direction : statistiquement, seul un sixième des molécules traverse  $dS$ . Ces molécules possèdent statistiquement la quantité de mouvement  $m\vec{v}(y + \ell)$ . La quantité de mouvement qui a traversé  $dS$  du haut vers le bas durant  $\tau$  est donc :

$$\delta \vec{p}_{y>0} = \frac{1}{6}ndSv_{th}\tau mv(y + \ell)\vec{e}_x$$

De même, la quantité de mouvement qui a traversé  $dS$  du bas vers le haut est :

$$\delta \vec{p}_{y<0} = \frac{1}{6}ndSv_{th}\tau mv(y - \ell)\vec{e}_x$$

La couche de fluide située sous  $dS$  a ainsi gagné  $\delta \vec{p}_{y>0}$  et perdu  $\delta \vec{p}_{y<0}$ . Sa variation de quantité de mouvement durant le temps  $\tau$  est donc :

$$d\vec{p} = \delta \vec{p}_{y>0} - \delta \vec{p}_{y<0} = \frac{1}{6}ndSv_{th}\tau m[v(y + \ell) - v(y - \ell)]\vec{e}_x$$

Le libre parcours moyen  $\ell$  étant très petit par rapport à l'échelle mésoscopique, on peut faire un DL des vitesses :

$$d\vec{p} = \frac{1}{6}ndSv_{th}\tau m \cdot 2\ell \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_x$$

En divisant par  $\tau$ , on obtient la quantité de mouvement traversant  $dS$ , dans le sens des  $y$  décroissants, par unité de temps :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{3}ndSv_{th}\ell m \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \vec{e}_x$$

Cette grandeur s'identifie à la variation de quantité de mouvement par unité de temps de la couche située sous  $dS$ , sous l'effet des échanges à travers  $dS$ . Cela s'interprète comme une force d'après le théorème de la quantité de mouvement :  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ . Ce théorème est valable seulement pour un système fermé. Or, notre étude a fait intervenir des transferts de particules à travers  $dS$ . Cependant, le nombre de particules montant durant  $dt$  est égal au

nombre de particules descendant. Du point de vue des échanges de matière, tout se passe comme si la paroi  $dS$  avait été fermée durant  $dt$ . Nous pouvons donc faire comme si seule la quantité de mouvement avait traversé  $dS$  et appliquer le théorème de la quantité de mouvement. L'expression représente donc la force  $d\vec{F}_x$  tangentielle exercée par la couche au-dessus de  $dS$  sur la couche sous  $dS$  :

$$d\vec{F}_x = \frac{1}{3}ndSv_{th}m\ell\frac{\partial v}{\partial y}\vec{e}_x$$

Dans cette expression,  $m$  est la masse d'une molécule et  $n$  le nombre de molécules par unité de volume. Le produit des deux est la masse volumique  $\rho$  :

$$\frac{d\vec{F}_x}{dS} = \frac{1}{3}\rho\ell v_{th}\frac{\partial v}{\partial y}\vec{e}_x$$

Cette expression s'identifie à la loi de viscosité de Newton. Ce modèle simple prévoit que la viscosité dynamique du fluide est :

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\ell v_{th} \quad (2)$$

Elle ne dépend que des propriétés du fluide. Ce modèle confirme le fait que la viscosité est un phénomène diffusif. Il est dû à des mouvements de la matière au niveau microscopique.

En supposant que la théorie cinétique des gaz nous donne la vitesse thermique moyenne et le libre parcours moyen par :

$$u = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \text{ et } \ell \simeq \frac{1}{n\sigma}$$

avec  $\sigma$  la section efficace de collision des molécules et  $k_B$  la constante de Boltzmann. Alors on en déduit que :

$$\eta \propto \frac{\sqrt{mT}}{\sigma} \quad (3)$$

Pour les liquides on donne :

$$\eta \propto h \exp\left(\frac{\Delta g_0}{k_B T}\right) \quad (4)$$

avec  $\Delta g_0$  l'énergie d'activation pour traverser la barrière de potentiel séparant deux sites,  $h$  la constante de Planck et  $\alpha$  un coefficient. Cette formulation est similaire à la loi d'Arrhenius qui décrit le processus d'activation de saut à travers la barrière.

**Rq :** Plus de détails dans le Guyon page 24-25 et 68-72 (interprétation pour les liquides aussi).

### c) Facteurs influençant la viscosité

On a pu voir à travers la façon de mesurer la viscosité et la formulation de la viscosité pour les fluides que cette dernière peut être influencé par différents facteurs :

- La nature de fluide considéré : on a vu que la contrainte en fonction du taux de cisaillement ne donnait pas la même forme selon la nature du fluide : **page 143 Guyon**.
- La température : on a pu voir que pour un gaz plus la température est importante plus la viscosité est grande. Pour les liquides on a un comportement opposé : plus la température augmente plus la viscosité diminue.

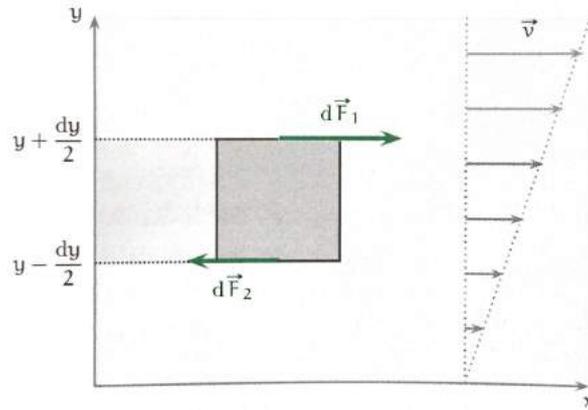
Il y a également la pression pour les liquides. En effet, la pression d'un liquide augmente, sa viscosité augmente également. La viscosité dynamique des liquides est pratiquement indépendante de la pression tant que celle-ci reste inférieure à 200 bars environ ; en raison de leur très faible compressibilité.

## 2. Dynamique des écoulements

### a) Force volumique et équation de Naviers et Stokes

#### Force volumique

On cherche la résultante des actions de viscosité d'exerçant sur une particule dans un écoulement de cisaillement. Reprenons l'écoulement de cisaillement.



Au vu de la géométrie de l'écoulement, la particule est soumise à deux forces de cisaillement de la part du reste du fluide.

1 A l'altitude  $y + dy/2$ , la couche supérieure exerce  $d\vec{F}_1 = \eta \frac{\partial v}{\partial y} dS \vec{e}_x$  :

2 A l'altitude  $y - dy/2$ , la couche inférieure exerce  $d\vec{F}_2 = -\eta \frac{\partial v}{\partial y} dS \vec{e}_x$ . Le signe moins provient de l'algébrisation de la loi de Newton.

La résultante de ces deux actions est :

$$d\vec{F}_{visc} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = \eta \underbrace{\left[ \frac{\partial v}{\partial y} \left( y + \frac{dy}{2} \right) - \frac{\partial v}{\partial y} \left( y - \frac{dy}{2} \right) \right]}_{= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy \text{ au 1}^{\text{er}} \text{ ordre}} dS \vec{e}_x$$

En coordonnées cartésiennes, l'aire  $dS$  s'écrit  $dx dz$ . Par conséquence, le volume élémentaire de la particule fluide  $d\tau = dx dy dz$  se met en facteur, ce qui donne :

$$\vec{F}_{visc} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} d\tau \vec{e}_x \quad (5)$$

Cette expression de la résultante de viscosité concerne le cas particulier d'un champ de vitesse de la forme  $\vec{v} = v_x(y) \vec{e}_x$ . Pour un écoulement dépendant des trois variables  $(x, y, z)$  et ayant trois composantes  $(v_x, v_y, v_z)$  alors pour un écoulement incompressible, la résultante des actions de viscosité sur une particule mésoscopique de volume  $d\tau$  s'écrit :

$$d\vec{F} = \eta \Delta \vec{v} d\tau \quad (6)$$

Pour un écoulement compressible il faudrait ajouter un terme proportionnel à  $\text{div} \vec{v}$ .

## Équation de Navier-Stokes

Dans le référentiel d'un laboratoire, supposé galiléen, une particule mésoscopique de fluide de volume  $d\tau$  et de masse volumique  $\rho$ , isolée par la pensée au sein d'un écoulement, est soumise à :

- son poids  $\rho d\tau \vec{g}$  ;
- la résultantes des actions du fluide ambiant, qui se décompose en actions de pression et de viscosité ( $-\text{grad}P d\tau + \eta \Delta \vec{v} d\tau$ )

On néglige toute autre force (force d'Archimède par exemple). On rappelle que l'accélération d'une particule de fluide est la dérivée particulaire de la vitesse. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la particule dans le référentiel du laboratoire :

$$\rho d\tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}P d\tau + \rho d\tau \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} d\tau$$

Les volumes élémentaires se simplifient, ce qui laisse l'équation de Naviers-Stokes pour un écoulement incompressible :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} \quad (7)$$

Tous les termes de cette équation sont homogènes à des forces volumiques. Le terme en  $\eta \Delta \vec{v}$  est l'équivalent des actions de viscosité. Si l'écoulement est compressible il faut ajouter une force volumique supplémentaire dite de seconde viscosité proportionnelle à  $\text{div} \vec{v}$ . Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut faire intervenir en plus des forces volumiques d'inertie.

### b) Nombre de Reynolds

Si on analyse la dernière équation on voit apparaître deux termes importants :

- Un terme advectif :  $\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ . Si  $\rho D\vec{v}/Dt = \vec{0}$ , alors il y a conservation de la quantité de mouvement lors de l'écoulement, c'est à dire il y a transport de la quantité de mouvement. L'advection est le transport d'une quantité (souvent l'énergie) dû à son entraînement par le mouvement d'un milieu, quelque soit l'origine de ce mouvement (gravitaire ou entraînement forcé). Exemple : goutte d'encre dans un fluide en écoulement (il y a advection + diffusion).
- Un terme diffusif dû à la viscosité :  $\eta \Delta \vec{v}$ . Si  $\rho \partial \vec{v} / \partial t = \eta \Delta \vec{v}$  alors on a une équation de diffusion, avec le coefficient de diffusion  $\nu = \eta / \rho$ , la viscosité cinématique en  $m^2 \cdot s^{-1}$ .

A partir de ces paramètres qui ont la même dimension on peut construire un nombre : le nombre de Reynolds. Ce nombre compare les normes du terme de transport advectif et du terme de transport diffusif de quantité de mouvement :

$$\text{Re} = \frac{\text{terme advectif}}{\text{terme diffusif}} = \frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} \quad (8)$$

On a bien un paramètre sans dimension. Soit  $L$  la longueur caractéristique de l'écoulement (par exemple la taille d'un vortex, ou la taille d'un objet en écoulement). Soit  $U$  la vitesse moyenne du fluide. Alors on peut estimer l'ordre de grandeur de chacun des termes :

$$\text{Re} = \frac{\|\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\|\eta \Delta \vec{v}\|} \approx \frac{\rho U^2 / L}{\eta U / L^2} = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{U L}{\nu}$$

avec  $\nu = \eta/\rho$  la viscosité cinématique en  $m^2.s^{-1}$ . Si on analyse ce paramètre on peut en déduire que :

- Si  $Re \ll 1$  alors la viscosité joue un rôle prépondérant à l'échelle  $L$  de l'écoulement : l'écoulement est dit laminaire ;
- Si  $Re \gg 1$  alors la viscosité joue un rôle négligeable à l'échelle  $L$  de l'écoulement : l'écoulement est dit turbulent.

**Rq** : C'est aussi le rapport entre deux temps caractéristiques, page 164 Brébec.

### c) Écoulement à bas nombre de Reynolds

**Montrer la vidéo de Taylor sur la goutte dans le cylindre en régime visqueux<sup>2</sup> pour montrer la réversibilité des équations à ce régime.**

Les écoulements à petit nombre de Reynolds, parfois appelés écoulements rampants, sont des écoulements dominés par la viscosité où les effets inertiels sont négligeables. Ces écoulements peuvent avoir des origines physiques très variées, puisque ce nombre est obtenu par combinaison de trois facteurs différents :

- La faible taille d'objets en mouvement ou de canaux d'écoulement : mouvements de bactéries ( $Re \approx 10^{-5}$ ), écoulements dans les milieux poreux ou fissurés ou dans le domaine de la microfluidique ;
- Fluides très visqueux et/ou de vitesse faible : mouvements lents du manteau terrestre ( $Re \approx 10^{-20}$ ), déplacement des glaciers ( $Re \approx 10^{-17}$ ), écoulement de fluide visqueux comme le miel.

Pour ce type d'écoulement on peut réécrire l'équation de Naviers Stokes en négligeant l'inertie :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v} \quad (9)$$

La condition de faible nombre de Reynolds n'impose pas la condition de stationnarité de l'écoulement. Néanmoins on va considérer que l'écoulement généré est quasi stationnaire. Il vient alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}}P = \eta \Delta \vec{v} - \rho \vec{g} \quad (10)$$

Qui peut s'écrire simplement en prenant  $\overrightarrow{\text{grad}}-\rho \vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}(P - P_0)$  avec  $\overrightarrow{\text{grad}}P_0$  le gradient hydrostatique. En pratique, on ne fait pas intervenir ces forces de volume lorsqu'elles n'échangent pas d'énergie avec l'écoulement. Ainsi  $\rho \vec{g}$  peut être directement pris en compte implicitement dans  $\overrightarrow{\text{grad}}P$ . Il vient alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}}P = \eta \Delta \vec{v} \quad (11)$$

On obtient ainsi une équation linéaire que l'on appelle équation de Stokes. Cette équation possède de nombreuses propriétés :

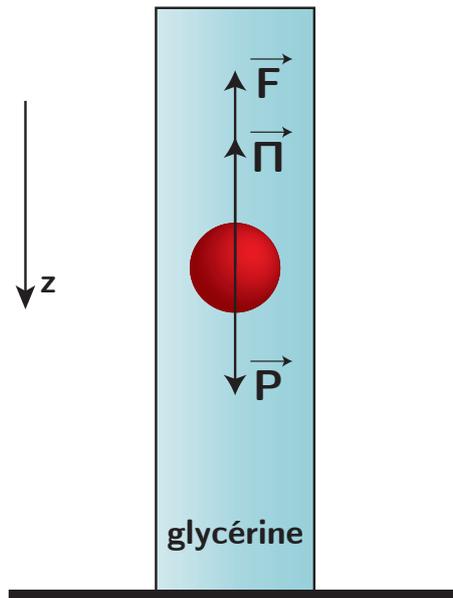
- Sa **linéarité** que l'on peut exprimer par le principe de superposition. Si  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  sont deux solutions de l'équation, alors  $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2$  est du coup solution de l'équation de Stokes. Le gradient  $p$  correspondant s'écrit  $\mathbf{grad} p = \lambda_1 \mathbf{grad} p_1 + \lambda_2 \mathbf{grad} p_2$ .
- Son **unicité** : l'équation de Stokes a une unique solution pour un écoulement et des conditions aux limites donnés.
- Sa **réversibilité** : si on inverse le sens de l'écoulement les particules fluides vont refaire en sens inverse le même chemin. Cette propriété est bien mise en évidence

2. <https://youtu.be/CMuKNWGxw9c>

dans l'expérience de Taylor où une goutte de colorant est placée dans un fluide très visqueux entre deux cylindres coaxiaux. Après mise en rotation du cylindre interne la tache de colorant se répartit dans la zone entre les deux cylindres. Si on inverse le sens de rotation du cylindre interne, les particules de colorant refont en sens inverse le même trajet et la tâche de colorant se reforme.

### 3. Application à la sédimentation à bas nombre de Reynolds

MANIP : Sédimentation d'une sphère dans une colonne de glycérine.



Considérons une particule sphérique en acier de diamètre  $D$  et de masse volumique  $\rho_p$  qui sédimente dans un fluide visqueux, de masse volumique  $\rho_f$  et de viscosité dynamique  $\eta_f$ , à la vitesse  $U$ . Les forces qui s'appliquent à cette particules sont :

- Son poids :  $\vec{P} = \frac{4}{3}\pi(D/2)^3\rho_p\vec{g}$  ;
- La force d'Archimède :  $\vec{\Pi} = -\frac{4}{3}\pi(D/2)^3\rho_f\vec{g}$  ;
- La force de frottement ou force de traînée :  $\vec{F}$ .

En appliquant le PFD on trouve :

$$\frac{4}{3}\pi R^3\rho_p\vec{g} - \frac{4}{3}\pi R^3\rho_f\vec{g} + \vec{F} = m\frac{d\vec{U}}{dt} \quad (12)$$

On a à notre disposition 5 paramètres :  $F$ ,  $D$ ,  $U$ ,  $\eta_f$  et  $\rho_f$ , caractérisés par trois dimensions différentes :  $MLT^{-2}$ ,  $L$ ,  $LT^{-1}$ ,  $ML^{-1}T^{-2}$  et  $ML^{-3}$ . On peut utiliser le théorème Pi qui stipule alors que l'on peut construire :  $5-3=2$  nombres sans dimensions :

$$\frac{F}{\rho_f D^2 U^2} \text{ et } \frac{\rho_f U D}{\eta_f}$$

Le deuxième nombre est le nombre de Reynolds. Ainsi par analyse dimensionnelle on peut écrire que :

$$\frac{F}{\rho_f D^2 U^2} = f(\text{Re})$$

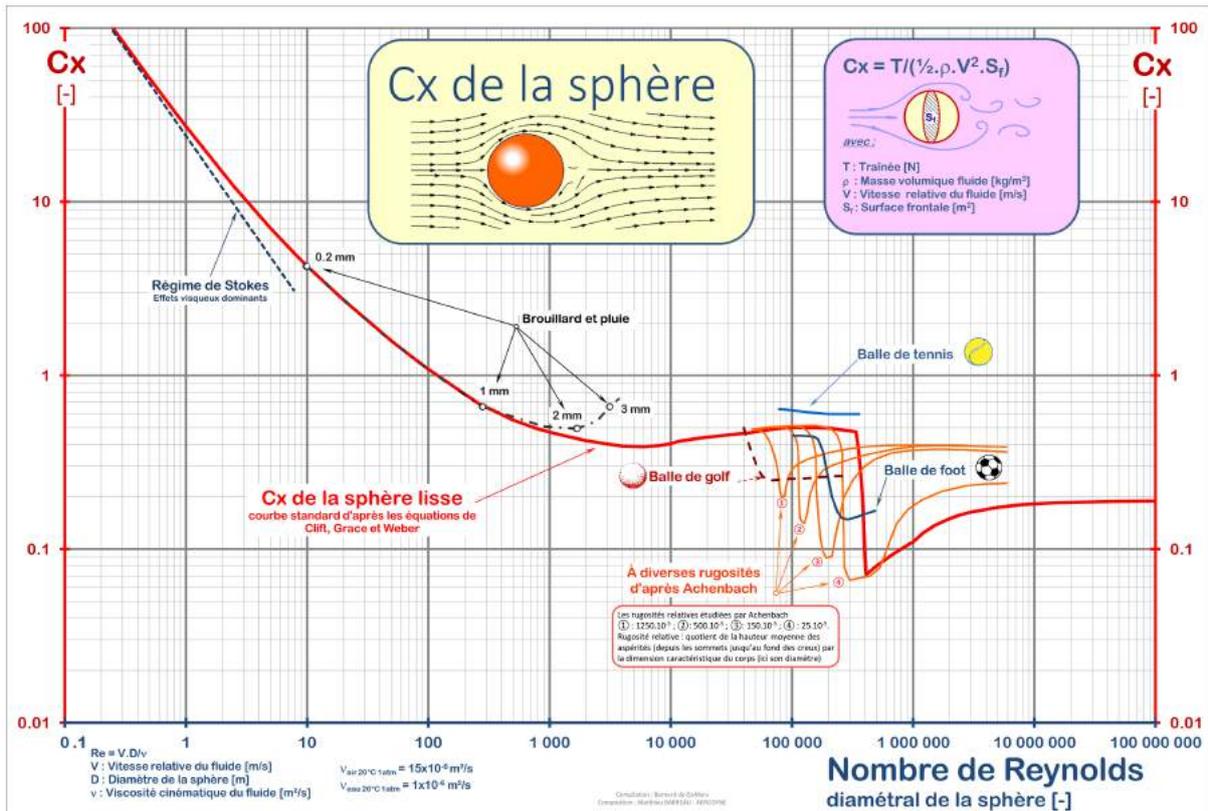
où  $f$  est inconnue. Cette relation est usuellement exprimée sous la forme :

$$F = \frac{1}{2} C_x(\text{Re}) \rho_f \pi D^2 U^2 \quad (13)$$

avec le coefficient de traînée qui s'exprime selon :

$$C_x(\text{Re}) = \frac{8F}{2\rho_f \pi D^4 U^2} \quad (14)$$

Ainsi on peut représenter ce coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds :



On remarque que pour un faible nombre de Reynolds une dépendance linéaire de  $C_x$  en fonction de  $\text{Re}$  en échelle logarithmique : c'est la signature d'une loi de puissance de la forme  $C_x = A\text{Re}^\alpha$ . En effet en prenant le logarithme il vient :  $\log(C_x) = \alpha \log(\text{Re}) + \log(A)$ . La pente de la droite donne la valeur de la puissance  $\alpha$ . En analysant le graphe on trouve pour un faible nombre de Reynolds :

$$C_x = 24\text{Re}^{-1}$$

La force de traînée s'en déduit sachant que  $\vec{F}$  opposé au sens de la chute :

$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \frac{24}{\text{Re}} \rho_f \frac{\pi D^2}{4} \vec{U}^2 = -\frac{12\eta_f}{\rho_f D U} \rho_f \frac{\pi D^2}{4} U^2 = -6\pi\eta_f R \vec{U}$$

**Rq :** Autre façon de trouver la force de traînée page 157 du H-prépa exo6.

Ainsi en reprenant l'équation issue de la PFD on a lorsque la sphère a atteint sa vitesse finale constante :

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_p \vec{g} - \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_f \vec{g} - 6\pi\eta_f R \vec{U} = \vec{0} \quad (15)$$

On peut alors en déduire la valeur de la vitesse finale de la sphère :

$$\vec{U} = \vec{U}_{St} = \frac{2(\rho_p - \rho_f)R^2}{9\eta_f} \vec{g} \quad (16)$$

Dans le cas où le nombre de Reynolds est faible on est dans le régime faiblement inertielle ou régime visqueux : cela implique alors que, dans ces conditions, la bille lors de sa chute va adopter très rapidement sa vitesse finale, appelé également vitesse de Stokes  $\vec{U}_{St}$ . Ainsi on peut alors retrouver le profil de vitesse dans les premiers instants de la chute de la sphère et il vient :

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{U}}{dt} &= \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_p - \rho_f)\vec{g} - 6\pi R\eta_f \vec{U} \\ \frac{d\vec{U}}{dt} &= \frac{(\rho_p - \rho_f)}{\rho_p} \vec{g} - 6\pi R\eta_f \vec{U} \\ \frac{d\vec{U}}{dt} &= -\frac{\vec{U} - \vec{U}_{St}}{\tau} \end{aligned} \quad (17)$$

avec  $\tau = \frac{2R^2\rho_p}{9\eta_f}$ . La solution s'écrit alors :

$$U(t) = U_{St} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (18)$$

A l'aide d'un logiciel on peut mesurer expérimentalement  $U_{St}$  et  $\tau$ . Connaissant  $\tau$  on peut alors déduire la viscosité du fluide : on a fait un viscosimètre à bille, appareil créé par Stokes durant le XIXème siècle et qui peut être utilisé pour mesurer la viscosité de certain fluide si on reste dans le régime visqueux. On alors aussi comparer la valeur de  $U_{St}$  avec la valeur donnée par la théorie en utilisant la viscosité mesurée ou connue concernant le produit.

On peut donner le calcul d'erreur sur  $U_{St}$

$$\frac{\Delta U_{St}}{U_{St}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\rho_f}{\rho_f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\rho_p}{\rho_p}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\eta_f}{\eta_f}\right)^2} \quad (19)$$

et sur  $\eta_f$  :

$$\frac{\Delta\eta_f}{\eta_f} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\rho_f}{\rho_f}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\rho_p}{\rho_p}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)^2} \quad (20)$$

L'incertitude sur  $\tau$  est donnée par le logiciel qui traite l'expérience.

La puissance dissipé au cours de la chute s'écrit :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{U} = -6\pi\eta_f R U^2 \quad (21)$$

**Rq** : On aurait pu aller plus loin en supposant que finalement la valeur du nombre de Reynolds est finie et de l'ordre de 1-2 du coup on est plus parfaitement en régime visqueux. On peut alors recourir à l'approximation d'Oseen qui donne (**page 319 de Sanz**) :

$$C_x = \frac{24}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{3}{16}\text{Re} \right)$$

**Rq** : Écoulement autour d'un obstacle p519 Perez et p444 Guyon.

## Écoulement de Couette ou Poiseuille

Si il reste du temps même si cela serait étonnant on peut traiter soit :

1. L'écoulement de Couette (page 349 de Sanz ou page 262 Renvoizé) ;
2. L'écoulement de Poiseuille (page 351 de Sanz ou page 263 Renvoizé).

Pour la partie concernant la puissance volumique dissipé voir page 262 du H-prépa.

## Conclusion

On a pu voir dans cette leçon comment nous pouvions définir la notion de viscosité pour un fluide. Nous avons vu quelles en étaient les interprétations microscopiques de la viscosité et les méthodes pour la mesurer. Nous avons appris ensuite comment écrire le fondamentale de la dynamique lorsqu'on prend en compte la viscosité, pour finalement obtenir l'équation de Navier Stokes. Cette équation fait apparaitre deux termes qui peuvent définir le nombre de Reynolds. Enfin on a pu voir une application des écoulements à bas nombre de Reynolds pour mesurer la viscosité d'un fluide. On aurait pu citer d'autres types d'écoulement comme celui de Poiseuille ou de Couette. Enfin la théorie développée dans cette leçon est utilisée dans les micro-mélangeurs. Ils utilisent des écoulements rampants et sont utilisés lors de la préparation de produits pharmaceutiques à partir d'une faible quantité de matière.

# L.P. 09 - Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Cinématique des fluides
- Équation de Navier-Stokes
- Opérateurs mathématiques
- Viscosité
- Nombre de Reynolds

## Bibliographie

- Cap prépa PC, Renvoizé, *Pearson*
- Hydrodynamique physique, Guyon, *EDP*
- H prépa Mécanique des fluides, Brébec, *Hachette*
- Mécanique, Perez, *Dunod*
- Tout en un PC, Sanz, *Dunod*
- Expériences de physique (Fluides), Bellier, *Dunod*

Essayer de faire quelques manips : quantitative on peut faire le Pitot ou bien le Venturi si possible.

## Introduction

Dans une leçon précédente, nous avons étudié la dynamique des fluides visqueux, nous avons pu constater que le formalisme était lourd, bien que capable de décrire complètement les phénomènes dans le fluide. Dans cette leçon nous allons, au prix de quelques approximations, alléger l'équation de Navier-Stokes. Ceci est nécessaire, car résoudre les grands systèmes complexes avec l'équation originale est pratiquement impossible du fait de sa non-linéarité. Ceci nous permettra aussi de traiter le cas des écoulements parfaits compressibles.

## 1. Écoulement parfait

### a) Définition

Un écoulement est dit parfait si on peut y négliger les phénomènes de diffusion (viscosité, diffusion thermique).

Une écoulement parfait est une approximation dans les cas où les effets visqueux sont négligeables. Un fluide parfait est un fluide possédant une viscosité rigoureusement nulle. Il n'y a implication que dans un sens :

fluide parfait  $\implies$  écoulement parfait

Les fluides parfaits sont également appelés superfluides. Par exemple, l'hélium IV devient superfluide en dessous de la température de 2,17K : on constate expérimentalement l'absence totale de perte de charge lors de son écoulement. Cette propriété, découverte en 1937, est due à des effets quantiques qui dépassent largement le cadre de la leçon.

L'approximation d'écoulement parfait consiste également à négliger les échanges thermiques au sein du fluide. En négligeant ainsi la diffusion thermique et la diffusion de la quantité de mouvement (viscosité), on supprime tout phénomène irréversible dans l'écoulement. Les écoulements parfaits sont donc réversibles au sens thermodynamiquement. Une particule de fluide garde donc une entropie constante au cours de son mouvement. L'écoulement est dit isentropique :  $DS/Dt = 0$ .

## b) Limites

Hormis quelques cas marginaux du superfluides, tous les fluides possèdent une viscosité. Assimiler un fluide réel à un fluide parfait mène à des paradoxes.

Pour un fluide parfait,  $\eta = 0$ , et donc  $Re$  est infini. Si nous extrapolons sans précaution les résultats précédents, un écoulement de fluide parfait devrait être toujours turbulent. Ce paradoxe tient au fait que le modèle du fluide parfait n'est pas une extrapolation d'un fluide réel de faible viscosité. La vitesse d'un fluide réel, même de très faible viscosité, est nulle au contact du solide, alors que celle d'un fluide parfait est non nulle et tangente à la surface du solide.

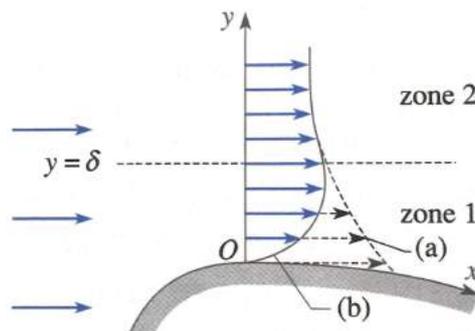


FIGURE 2 – (a) profil qui existerait avec un fluide parfait ; (b) profil réel.

Au voisinage d'un obstacle, les profils de vitesse sont très différents si l'on considère le modèle du fluide parfait ou le fluide visqueux, donc réel. Alors que la vitesse est non nulle avec le modèle du fluide parfait, elle est nulle pour le fluide réel. On peut ainsi observer deux zones sur la figure :

- La zone 1  $y < \delta$  les deux profils sont très différents. Dans cette zone la vitesse varie rapidement suivant  $y$ , mais peu suivant  $x$  on a :  $\vec{v} = v_x(y) \vec{e}_x$ . Les forces de viscosité, donc les transferts de quantité de mouvement par diffusion, sont prédominants ;
- La zone 2  $y > \delta$  les deux profils sont quasi identiques. La vitesse varie très peu en fonction des grandeurs de l'espace, on a :  $\vec{v} = v_\infty \vec{e}_x$ . Il est parfois utile de modéliser le profil des vitesses par une loi linéaire ou parabolique ou exponentielle.

Il existe une transition située à la distance  $\delta$  de l'obstacle : on vient de mettre en évidence la couche limite, correspondant à la zone dans laquelle les profils des vitesses sont très différents. Cette quantité,  $\delta$ , est souvent appelée épaisseur de couche limite. A

l'aide de l'équation de Navier-Stokes et sachant que dans la couche limite nous avons un écoulement parallèle, le terme d'accélération advective est nul :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{0}$$

Par ailleurs, l'invariance par translation dans les directions  $x$  et  $z$  impose que la pression ne dépende que de  $y$ . Par conséquent  $-\overrightarrow{\text{grad}}P$  a une composante nulle sur  $x$ . L'équation de Navier-Stokes, en projection sur la direction  $x$  s'écrit :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \implies \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (1)$$

On obtient ainsi l'équation de diffusion à une dimension selon l'axe  $y$ . Elle caractérise le fait que les couches de fluides sont progressivement entraînées en mouvement (évolution de  $v_x$ ), les une après les autres, en partant de la paroi. Le coefficient de diffusion est la viscosité cinématique :  $\nu = \eta/\rho$ .

A partir de cette équation on peut évaluer le temps typique  $\tau$  nécessaire pour que la couche initialement immobile, située à une distance  $\delta$  de la paroi, soit affectée par le mouvement. Estimons l'ordre de grandeur :

$$\frac{v}{\tau} \sim \frac{\eta}{\rho} \frac{v}{\delta^2} \implies \delta \sim \sqrt{\frac{\eta}{\rho} \tau}$$

Or on peut dire que  $\tau \sim L/v$  avec  $L$  la longueur caractéristique du système et  $v$  la vitesse de l'écoulement. Alors :

$$\delta = \sqrt{\frac{\eta L}{\rho v}} = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (2)$$

### c) Équation d'Euler

Dans les zones où l'écoulement peut être considéré comme parfait, on peut négliger le terme  $\eta \Delta \vec{v}$  dans l'équation de Navier-Stokes. Celle-ci prend alors le nom d'équation d'Euler :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho \vec{g} \quad (3)$$

Cette équation est valable pour les écoulements compressibles. Si le référentiel n'est pas galiléen, il faut ajouter des forces volumiques d'inertie.

L'équation d'Euler, comme l'équation de Navier-Stokes, est établie à partir d'un bilan d'actions mécaniques sur une particule mésoscopique au sein du fluide.

**Rq :** Démo bilan des forces sur un fluide en mouvement page 293 Sanz.

L'équation de Navier-Stokes a une validité limitée aux écoulements incompressibles uniquement à cause du terme de viscosité  $\eta \Delta \vec{v}$ . L'équation d'Euler n'est pas limitée aux écoulements incompressible.

L'accélération particulière peut être décrite sous trois formes :

- Dans la base de Frenet (trajectoire planes des particules) :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{Dv}{Dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n$$

- Accélérations locale et advective :

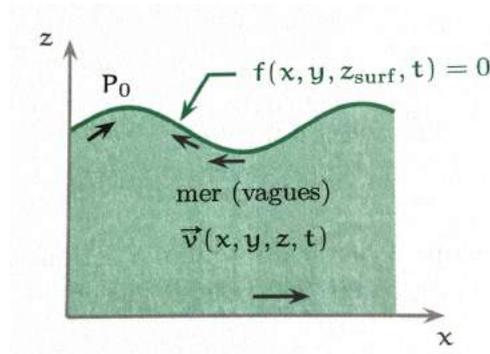
$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}$$

- Pour faire apparaître le terme d'énergie cinétique volumique :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\text{rot}\vec{v}) \wedge \vec{v} + \text{grad}\frac{v^2}{2} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} + \text{grad}\frac{v^2}{2}$$

avec  $\vec{\Omega} = (1/2)\text{rot}\vec{v}$  le vecteur tourbillon.

## Conditions aux limites



En utilisant ce que l'on a vu sur les limites de l'écoulement parfait et l'équation de Navier-Stokes on peut imposer certaines conditions aux limites. Soit un écoulement parfait dont la surface a pour équation :

$$f(x, y, z_{surf}, t) = 0$$

On distingue deux types de conditions aux limites :

- Si on néglige les phénomènes de tension superficielle, la pression est continue à la traversée d'une interface entre deux fluides :

$$\forall(x, y, t) P(x, y, z_{surf}, t) = P_0$$

- La fluide ne peut pas pénétrer à l'intérieur d'une surface solide :

$$\forall(x, y, t) v(x, y, 0, t) = 0$$

## Aspect thermodynamique

A priori dans un problème de mécanique des fluides nous avons cinq inconnues : trois composantes de la vitesse  $\vec{v}$ , la pression  $P$  et la masse volumique  $\rho$ . Il faut donc cinq équations pour fermer le problème :

- L'équation d'Euler donne trois équations scalaire ;
- L'équation de la conservation de la masse  $m$  :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

- L'équation d'état du fluide (sous forme locale) est une équation scalaire faisant intervenir la pression, mais elle contient aussi la température  $T$  qui est alors une inconnue supplémentaire. Par exemple pour un gaz parfait  $P = (\rho RT)/M$ , avec  $M$  la masse molaire du gaz et  $R$  la constante des gaz parfaits. L'équation sous forme  $PV = nRT$  n'a aucun intérêt car le volume  $V$  n'est pas un champ eulérien. Notons que le mot "parfait" n'a pas le même sens dans "gaz parfait" (particules ponctuelles sans interactions entre elles) et "écoulement parfait".

Un écoulement parfait étant isentropique, la connaissance de la compressibilité isentropique :

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \quad (4)$$

donne une équation supplémentaire. Pour un gaz parfait en écoulement isentropique on vérifie la loi de Laplace  $P\rho^{-\gamma} = cst$ , où la constante est donnée par les conditions de départ du gaz. Cela permet d'exprimer la compressibilité isentropique.

**Rq** : Écoulement autour d'un obstacle voir page 73 H-prépa.

**Rq** : Si besoin approfondir les notions thermodynamiques avec un livre de thermodynamique comme celui de Bernard Diu Thermodynamique, *Hermann*.

## d) Exemple d'application : l'effet Coanda

**MANIP** : Montrer avec une cuillère et un robinet l'effet Coanda.

Un jet de fluide a tendance à entraîner avec lui le fluide environnant. Lorsqu'un solide convexe vient toucher le jet, l'aspiration du fluide environnant est rendue dissymétrique, ce qui plaque le jet contre le solide. Cette effet, déjà décrit par Thomas Young au début du XIXème siècle, a été utilisé en aéronautique par l'ingénieur roumain Henri Coanda.

Ainsi l'effet Coanda peut se décrire comme cela : **Lorsqu'un solide convexe est placé contre un jet de fluide, les lignes de courant s'incurvent et le jet a tendance à longer le solide.**

Sur une échelle assez petite, la pesanteur joue un rôle négligeable devant l'effet du solide convexe sur la géométrie des lignes de courant. Plaçons-nous dans le cas où les lignes de courant sont planes et écrivons l'équation d'Euler en exprimant l'accélération dans la base de Frenet :

$$\rho \left[ \frac{Dv}{Dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n \right] = -\overrightarrow{\text{grad}}P \quad (\rho \vec{g} \text{ est négligé})$$

où  $\vec{e}_n$  est dirigé vers le centre de courbure des lignes de courant et  $R$  est le rayon de courbure local des lignes de courant. La projection de cette équation sur  $\vec{e}_n$  s'écrit :

$$\frac{v^2}{R} = -(\overrightarrow{\text{grad}}P) \cdot \vec{e}_n$$

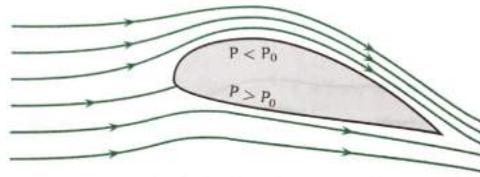
Pour revenir à des notations habituelles, introduisons le vecteur unitaire  $\vec{e}_x = \vec{e}_n$ . La dernière égalité s'écrit alors :

$$\frac{v^2}{R} = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

Donc  $\partial P/\partial x$  est négative, ce qui montre que plus on va vers l'intérieur du virage, plus la pression décroît. On peut dire que la pression vers le centre de courbure des lignes de courant est plus faible qu'en périphérie.

Cela explique les phénomènes de portance. Une aile d'avion dévie les lignes de courant. La courbure des lignes de courant sur l'extrados (le dessus) de l'aile crée une dépression

qui "aspire" l'aile vers le haut.



**Rq : MANIP** - On peut aussi faire la lévitation d'une balle de pingpong avec une sèche cheveux page 462 du Bellier. En inclinant petit à petit le flux d'air, la balle reste en lévitation car l'air longe la partie supérieure de la balle par effet Coanda. La balle est soutenue comme l'est une aile d'avion.

## 2. Relation de Bernoulli

A quelques approximations près, de nombreux écoulements peuvent être considérées comme parfaits, stationnaires et incompressibles comme l'écoulement de l'eau dans une canalisation de grand diamètre, l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion en vol subsonique à vitesse constante, décrit dans le référentiel de l'avion. Ce type d'écoulement obéit au théorème de Bernoulli, qui est d'une grande utilité en mécanique des fluides.

### a) Énoncé

Considérons deux points  $A$  et  $B$  appartenant à la même ligne de courant de l'écoulement. L'écoulement étant parfait, il obéit à l'équation d'Euler :

$$\underbrace{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{=\vec{0}} + \rho [(\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}] + \rho \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g}$$

La dérivée partielle par rapport au temps est nulle car l'écoulement est permanent. En introduisant l'axe  $z$  vertical ascendant, le champ de pesanteur peut être écrit :

$$\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz)$$

L'équation d'Euler devient alors :

$$\rho [(\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}] + \overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \overrightarrow{\text{grad}}(gz) + \rho \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) = \vec{0}$$

Calculons sa circulation de  $A$  à  $B$  le long de la ligne de courant. Cela consiste à faire le produit scalaire avec un élément  $\vec{dl}$  de la ligne de courant, puis à intégrer ce produit scalaire de  $A$  à  $B$  :

$$\int_A^B \rho [(\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}] \cdot \vec{dl} + \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} P \cdot \vec{dl} + \int_A^B \rho \overrightarrow{\text{grad}}(gz) \cdot \vec{dl} + \int_A^B \rho \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) \cdot \vec{dl} = 0$$

Par définition d'une ligne de courant, l'élément  $\vec{dl}$  est parallèle à la vitesse locale, donc orthogonal au terme  $(\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}$ . Le produit scalaire  $[(\vec{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v}] \cdot \vec{dl}$  est donc toujours nul, ce qui supprime la première intégrale.

Par définition toujours, un écoulement incompressible est tel qu'une particule de fluide garde sa masse volumique constante au cours de son mouvement. Or, l'écoulement étant

permanent, les lignes de courant se confondent avec les trajectoires des particules. Par conséquence, la masse volumique du fluide  $\rho$  est constante le long d'une ligne de courant. Cela permet de faire sortir  $\rho$  des intégrales :

$$\int_A^B dP + \rho \int_A^B d(gz) + \rho \int_A^B d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0 \implies \left[ P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho gz \right]_A^B = 0 \quad (5)$$

On a montré le théorème de Bernoulli qui est valable pour deux points d'une même ligne de courant dans le référentiel galiléen, avec un écoulement parfait, permanent et incompressible.

### Cas d'un écoulement irrotationnel

Si l'écoulement est irrotationnel, le terme  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$  disparaît, si bien qu'il n'est plus nécessaire d'intégrer le long d'une ligne de courant, mais entre deux points quelconques. Ainsi la vitesse dans ce cas dérive d'un potentiel et nous avons  $\overrightarrow{\text{rot}} = \vec{0}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$  et par conséquent en vertu du théorème de Schwartz :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{grad}}\phi) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

L'équation d'Euler s'écrit :

$$\overrightarrow{\rho \text{grad}}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \overrightarrow{\rho \text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho \vec{g} \quad (6)$$

où  $\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(gz)$ . L'expression pour le liquide est alors dans le cas où la masse volumique est uniforme :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left[\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + \rho gz + P\right] = \vec{0}$$

Ainsi pour un écoulement parfait, irrotationnel et de masse volumique uniforme :

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + P + \rho gz + \rho \frac{v^2}{2} = f(t) \quad (7)$$

Si l'écoulement est en plus permanent on trouve :

$$P + \rho gz + \rho \frac{v^2}{2} = 0 \quad (8)$$

**Rq :** Voir page 100-101 du H-prépa.

### b) Aspect énergétique

Rappelons que l'incompressibilité d'un écoulement ne signifie pas nécessairement que la masse volumique est uniforme. Le contre-exemple classique est celui du vent. Il s'agit d'un écoulement horizontal approximativement incompressible : la masse volumique est constante le long d'une ligne de courant horizontale, mais elle décroît lorsque l'altitude croît. Pour une démonstration générale du théorème de Bernoulli, il ne faut pas faire entrer la masse volumique à l'intérieur des gradients.

Par définition, le travail fourni par une force à un point  $M$  est la circulation de cette force le long de la trajectoire  $M$  :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Au facteur multiplicatif  $d\tau$  près, la démonstration du théorème de Bernoulli revient à calculer les travaux reçus par une particule de fluide de volume  $d\tau$ . En effet, l'équation peut être écrite sous la forme suivante :

$$\underbrace{\int_A^B \rho \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{v^2}{2} \right) \cdot d\vec{\ell}}_{\text{variation d'E}_c \text{ volumique}} = \underbrace{\int_A^B (-\overrightarrow{\text{grad}}P) \cdot d\vec{\ell}}_{\text{travail volumique des actions de pression}} + \underbrace{\int_A^B \rho \vec{g} \cdot d\vec{\ell}}_{\text{travail volumique du poids}}$$

Le poids et les actions de pression s'écrivent comme des gradients, donc l'expression de leurs travaux ne dépend que de  $A$  et  $B$ . Ces travaux peuvent être vus comme l'opposé de variations d'énergies potentielles :

$$[E_c]_A^B = -[P]_A^B - [E_{p\vec{g}}]_A^B = -(P_B - P_A) - \rho g(z_b - z_a)$$

L'équation de Bernoulli n'est rien d'autre qu'une équation de conservation de l'énergie avec  $\rho \Delta v^2/2$  la variation d'énergie potentielle  $\rho g(z_b - z_a)$  la variation d'énergie potentielle et  $P_B - P_A$  est la variation de pression, la pression étant une forme d'énergie potentielle volumique du fluide.

Ainsi la charge de l'écoulement :

$$P + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2}$$

représente l'énergie mécanique volumique d'une particule de fluide. Le théorème de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie mécanique des particules de fluide au cours de leur déplacement.

Dans un écoulement on appelle :

- La pression motrice, le terme  $P + \rho g z$ , souvent noté  $P^*$  ;
- La pression dynamique, le terme  $(1/2)\rho v^2$ .

La charge est la somme de la pression motrice et de la pression dynamique.

**Rq :** L'équation de Bernoulli représente alors une forme locale du premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement permanent :  $h + v^2/2 + gz = cste$ , avec  $h$  l'enthalpie massique. On a  $dH = VdP + TdS \implies dh = (V/m)dP + (T/m)dS$  et donc pour un écoulement isentropique  $dh = dP/\rho$  et  $h = P/\rho$ .

**Rq :** Application plus industrielle voir page 342 du Renvoizé.

## c) Applications

### Effet venturi

**MANIP :** Effet Venturi page 463 Bellier essayer de faire du quantitatif si il y a un tube avec des veines de mesures.



En soustrayant les deux relations on a :

$$P_{A'} - P_{B'} = \rho g(z_A - z_B) \quad (13)$$

Les relations (6) et (10) donnent :

$$\frac{\rho}{2}(v_{B'}^2 - v_{A'}^2) = \rho g(z_A - z_B) \quad (14)$$

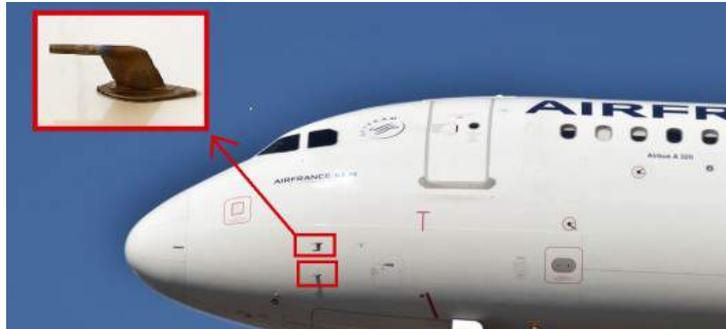
Par ailleurs, la conservation du débit volumique le long de la canalisation s'écrit :  $v_{A'}S_A = v_{B'}S_B$ , ce qui permet d'éliminer par exemple  $v_{B'}$  de l'équation précédente :

$$v_{A'}^2 \left( \frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right) = 2g(z_A - z_B) \implies v_{A'} = \sqrt{\frac{2g(z_A - z_B)}{\left( \frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right)}} \quad (15)$$

Ainsi la lecture de  $z_A - z_B$  permet de connaître  $v_{A'}$  : c'est le principe du débitmètre. On en déduit l'effet Venturi : la pression est moindre dans l'étranglement, donc le fluide est moins maintenant vers le haut dans le tube vertical. Concernant le point  $C$  théoriquement on a  $z_A = z_C$ . En réalité l'écoulement subit une perte de charge c'est à dire une diminution de pression par viscosité. On a donc expérimentalement  $z_A > z_C$  : on a par conservation du débit  $v_{A'} = v_{C'}$  et  $z_{A'} = z_{C'}$  donc il reste  $P_{A'} > P_{C'}$ .

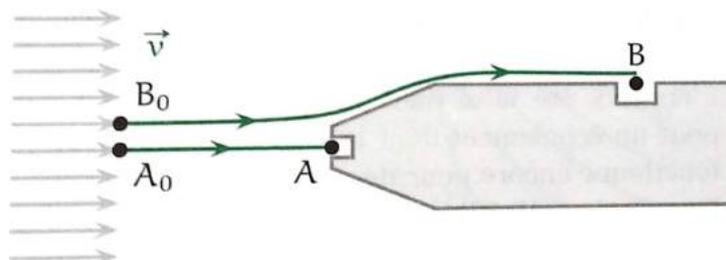
## Tube de Pitot

**MANIP : Tube de Pitot que l'on place en face d'un écoulement.**



Cet outils a été inventé par le français Henri Pitot au XVIIIème siècle. C'est un système destiné à mesurer la vitesse d'un avion par rapport à l'air ambiant. Le tube est fixé le long du fuselage de l'avion, hors de la couche limite de manière à être dans la zone d'écoulement parfait du fluide.

L'étude du dispositif se fait dans le référentiel de l'avion, qui peut être considéré comme galiléen en général.



Soit un tube de Pitot placé dans un écoulement uniforme, à la vitesse constante  $\vec{v} = v\vec{e}_x$ , loin en amont du tube. Deux trous sont percés dans le tube le trou  $A$  fait face à l'écoulement et le trou  $B$  est sur le côté du tube.

Le point  $A$  est un point d'arrêt de l'écoulement car la cavité est bouchée. Considérons deux lignes de courant passant respectivement par  $A$  et  $B$ . Elles proviennent de deux points voisins  $A_0$  et  $B_0$ . Appliquons le théorème de Bernoulli :

$$\begin{aligned} P_{A_0} + \rho \frac{v_{A_0}^2}{2} + \rho g z_{A_0} &= P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A \\ P_{B_0} + \rho \frac{v_{B_0}^2}{2} + \rho g z_{B_0} &= P_B + \rho \frac{v_B^2}{2} + \rho g z_B \end{aligned} \quad (16)$$

Les propriétés des points  $A_0$  et  $B_0$ , très voisins, sont identiques. En faisant la différence membre à membre des deux lignes, les termes de gauche s'annulent :

$$(P_A - P_B) - \frac{\rho}{2}(v_A^2 - v_B^2) + \rho g(z_A - z_B) = 0 \quad (17)$$

$A$  étant un point d'arrêt,  $v_A = 0$  et  $P_A = P_0$ . L'écoulement longe le tube, donc  $v_B = v$ . En pratique  $z_A - z_B$  est de l'ordre du centimètre, donc le terme  $\rho g(z_A - z_B)$  est largement négligeable devant le terme de vitesse. Il reste :

$$(P_A - P_B) - \frac{\rho}{2}v^2 = 0 \implies v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(P_A - P_B)} \quad (18)$$

La pression mesurée par le capteur  $B$  est indépendant de la vitesse de l'écoulement de l'air. En effet l'équation (13) donne  $P_B = P_{B_0}$ , qui est la pression de l'air ambiant à l'altitude de l'avion ("pression statique"). L'équation montre que la cavité  $A$  ressent, en plus de la pression statique  $P_B$ , la pression dynamique  $(1/2)\rho v^2$  due à l'impact sur le point  $A$ . La cavité  $A$  est appelée "prise de pression dynamique".

D'après sa position, le tube de Pitot est hors de la couche limite qui longe le fuselage de l'avion. Donc l'écoulement limite se développe le long du tube de Pitot. En toute rigueur, le point  $B$  de l'étude est donc un peu à l'extérieur de la cavité, hors de la couche limite pour travailler dans l'hypothèse d'écoulement parfait. En supposant cette couche limite laminaire (hypothèse simplificatrice), le champ de vitesse est localement de la forme  $v(z)\vec{e}_x$ , ce qui implique de  $D\vec{v}/Dt = \vec{0}$ , donc l'équation d'Euler se résume localement à :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho \vec{g} = \vec{0} \quad (19)$$

Le champ de pression local obéit à la statique des fluides. La pression dans la cavité  $B$  est donc quasiment la même que la pression au point  $B$  hors de la couche limite.

La vitesse donnée par l'équation (15) dépend de  $\rho$ , la masse volumique locale de l'air, qui diminue avec l'altitude. La vitesse indiquée est donc supérieur à la vitesse réelle. Les pilotes connaissent la "recette" pour retrouver rapidement la vitesse réelle à partir de la vitesse indiquée. Pour éviter toute conversion, on peut utiliser l'équation d'état de l'air, assimilé à un gaz parfait :

$$P_B = \frac{\rho RT}{M} \implies v = \sqrt{\frac{2RT}{MP_B}(P_A - P_B)} \quad (20)$$

La pression  $P_B$  du dénominateur et mesurée par la prise statique du tube de Pitot. il faut également un thermomètre pour avoir  $T$ . Un calculateur dans l'avion se charge d'en

déduire la vitesse.

Cette étude a été faite en supposant l'écoulement comme incompressible, qui n'est acceptable que pour un écoulement dont la vitesse est inférieure à environ 30% de la célérité du son. Le tube fonctionne encore pour des vitesses d'écoulement plus grandes, y compris supersoniques, mais l'expression (15) doit être modifiée.

**Rq :** Autre application tube de Torricelli page 109 (stationnaire) et 124 (instationnaire) du H-prépa.

**Rq :** Connaitre et savoir écrire l'effet Magnus page 108 et p123 du H-prépa et page 310 du Renvoizé.

## Conclusion

On a pu voir dans cette leçon comment l'on pouvait définir un écoulement parfait et ses limites. On a pu voir les conséquences de cette considérations : on trouve l'équation d'Euler avec ses conditions aux limites et ses applications comme l'effet Coanda. En utilisant cette dernière équation en prenant certaines hypothèses on a pu retrouver la relation de Bernoulli. Ce théorème, on a pu le voir est utilisé dans de nombreuses applications industriels. Finalement cette théorie est utile pour décrire assez simplement les écoulements à haut nombre de Reynolds et ainsi s'affranchir du caractère visqueux du fluide qui le compose.

# L.P. 10 - Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Thermodynamique
- Mécanique des fluides
- Mécanique

## Bibliographie

- Gouttes, bulles, perles et ondes, de Gennes, *Belin*
- Hydrodynamique physique, Guyon, *EDP*
- Thermodynamique, Diu, *Hermann*
- Expériences de physique (Fluides), Bellier, *Dunod*
- BUP n.963, Gassin (2014)
- BUP n.851(2), Gheusi (2003)
- Phys. Chem. of Surfaces, Adamson, *Wiley-Interscience*

**Beaucoup de manip qualitatives à faire donc il faut essayer de gérer son temps et choisir les parties que l'on plus aborder sans compter qu'il faut absolument faire la manip finale sur les capillaires et la loi de Jurin.**

## Introduction

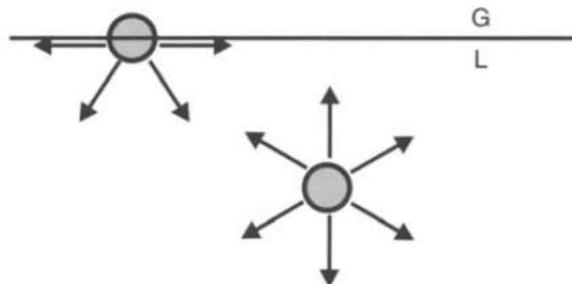
Avant de commencer cette leçon, commençons par introduire quelques concepts fondamentaux. Tout d'abord, qu'entend t-on par surface ou interface ? Si on considère deux phases qui coexistent elles sont nécessairement séparés par une zone qui délimite ces deux phases homogènes. Cette zone est appelée une interface. Il s'agit d'une frontière physique entre deux phases considérées (ex : solide-solide, liquide-liquide) ou entre une phase condensée et un gaz. Étudier ces interfaces permet de répondre un ensemble de questions : Pourquoi une goutte d'un liquide est-elle sphérique ? Pourquoi l'eau dans un tube forme t-elle un ménisque ? Pourquoi l'eau monte-elle dans une paille lorsque celle-ci y est plongée ? ou bien Pourquoi une plaque de verre adhère fortement a une surface place lorsque celle ci est mouillée ?

## 1. Tension superficielle

Un liquide coule, et pourtant il adopte des formes géométriques très stables. Une petite goutte de pluie, un globule d'huile dans l'eau, une bullet de savon forment une sphère parfaite, lisse à l'échelle atomique, et très peu déformable. Les fluctuations de l'épaisseur de la surface sont de l'ordre de l'angström. Ces exemples nous montrent que la

surface d'un liquide est donc comme une membrane tendue, caractérisée par une tension superficielle (ou "tension de surface"), qui s'oppose à ses déformations.

### a) Origine microscopique



Un liquide est un état condensé : les molécules s'attirent. Lorsque cette attraction l'emporte sur l'agitation thermique, les molécules passent d'une phase gazeuse à une phase dense mais encore désordonnée : un liquide. Les molécules au sein du liquide bénéficient d'interactions attractives avec toutes leurs voisines et sont dans un état "heureux". Au contraire, à la surface du liquide, elles perdent la moitié des interactions cohésives et sont "malheureuses". C'est pour cette raison que les liquides vont ajuster leur forme pour exposer le minimum de surface : vos cheveux secs sont bouffants et volumineux, mais une fois mouillés, ils collent ensemble tristement !

Exposée à la surface, une molécule est donc dans un état énergétique défavorable. Si  $U$  est l'énergie de cohésion par molécule, une molécule à la surface perd en gros  $1/2 \cdot U$ . La tension de surface mesure directement ce défaut d'énergie par unité de surface. Si  $a$  est la dimension moléculaire et  $a^2$  la surface exposée par molécule, la tension de surface est  $\gamma \sim U/(2a^2)$ . Plus les interactions attractives sont fortes, plus la tension de surface est grande. Pour la plupart des huiles, où les interactions sont de type van der Waals, on a  $U \sim kT$ , l'agitation thermique. A  $25^\circ\text{C}$ ,  $kT$  vaut  $1/40$  eV, ce qui donne  $\gamma \sim 20\text{mJ}/\text{m}^2$ .

La tension superficielle est associée aux forces de cohésion internes qui s'exercent entre les molécules d'un fluide : forces de van der Waals, liaisons hydrogène, liaisons ioniques, liaisons métalliques. Dans un fluide en volume, les forces exercées par chaque molécule sont équilibrées par celles exercées par les molécules voisines. Si l'on introduit une interface, par exemple avec le vide, les forces exercées dans sa direction ne sont plus équilibrées : c'est l'origine de l'énergie superficielle. La valeur de la tension superficielle sera très variable suivant la nature des forces qui s'exercent entre les tomes ou les molécules. La tension superficielle élevée de beaucoup de métaux liquides ( $0,48\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$  pour le mercure et jusqu'à  $2,5\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$  pour l'osmium à  $3000\text{K}$ ) s'explique par la forte valeur des énergies associées aux liaisons métalliques ; les forces de Van der Waals, qui jouent un rôle prépondérant dans de nombreux corps moléculaires, donnent des valeurs seulement de l'ordre de  $20 \cdot 10^{-3}$  à  $25 \cdot 10^{-3} \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ .

Liquide	Éthanol	Glycérol	Eau	Mercure	Hélium (4K)	Eau (100°C)
$\gamma$ ( $\text{mJ}/\text{m}^2$ )	23	63	72	485	0,1	58

TABLE 1 – Ordre de grandeur de la tension superficielle

Cette tension superficielle, qui est une grandeur macroscopique, est dépendante de la température et par exemple pour l'eau on a :

$$\frac{d\gamma}{dT} = \frac{72 - 58}{100 - 25} \approx 0,2 \text{ mJ.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$

## b) Énergie superficielle et force capillaire

### Travail de surface

On sait qu'il faut fournir de l'énergie mécanique pour créer de la surface, lorsque l'on bat des oeufs en neige, ou que l'on émulsionne de l'eau dans l'huile pour faire une mayonnaise.

Déformons le liquide de manière à augmenter sa surface  $\mathcal{A}$  de  $d\mathcal{A}$ . Le travail est proportionnel au nombre de molécules qu'il faut amener à la surface, donc à  $d\mathcal{A}$ , et l'on peut écrire :

$$\delta W = \gamma d\mathcal{A} \quad (1)$$

où  $\gamma$  est la tension superficielle. En dimension,  $[\gamma] = EL^{-2}$ . L'unité est le  $\text{mJ/m}^2$ . On peut donc dire que :

$\gamma$  est l'énergie à fournir pour augmenter la surface d'une unité

La tension de surface contribue au travail en thermodynamique des surfaces.  $\gamma$  est la variable conjuguée de  $\mathcal{A}$ . on peut la définir par l'augmentation de l'énergie interne  $U$  ou de l'énergie libre  $F$ , qui accompagne l'augmentation de surface :

$$\gamma = \left[ \frac{\partial F}{\partial \mathcal{A}} \right]_{T,V,n} \quad (2)$$

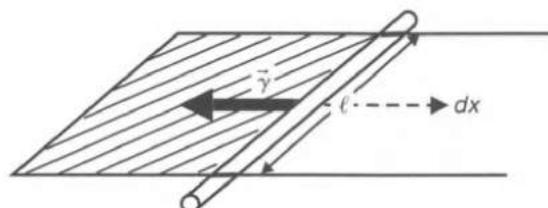
où  $n$  est le nombre de molécules et  $V$  le volume total. La thermodynamique des surfaces est une science subtile en particulier lorsque l'on travaille à potentiel chimique  $\mu$  imposé, on utilise le grand-potentiel  $\Omega = F - n\mu = -pV + \gamma\mathcal{A}$ .

**Rq :** Pour les questions connaître parfaitement les relations thermodynamiques  $F$ ,  $G$ , etc...

### Forces capillaires

**MANIP :** Prendre un cercle métallique dont un fil à coudre le traverse. On plonge le tout dans du savon et on observera que le fil va se tendre suivant un arc de cercle - page 457 Bellier.

La tension superficielle peut aussi être considérée comme une force par unité de longueur : en dimension, on peut écrire  $[\gamma] = FL^{-1}$  et exprimer  $\gamma$  en N/m. On peut voir la manifestation de ce phénomène dans la manip du cercle métallique traversé par un fil à coudre ou bien par l'expérience de la baguette de verre :



Une baguette de verre a été recourbée de manière à constituer trois côtés d'un rectangle. Une autre baguette mobile, qui peut rouler sur les deux côtés parallèles, constitue le quatrième côté de longueur  $l$ . On plonge l'appareil dans du liquide glycerique (liquide contenant de l'eau, du savon pour faire des bulles, et de la glycérine pour rendre le mélange visqueux) de manière à former une lame liquide rectangulaire. Dès que l'appareil est hors du liquide, on constate que la tige mobile se déplace spontanément dans le sens de la flèche pour diminuer la surface ; si le cadre est incliné, la baguette mobile peut même remonter la pente pour retomber brusquement si on perce la lame. Si l'on déplace la tige mobile de  $dx$ , on fournit un travail :

$$\delta W = F dx \quad (3)$$

Ainsi la surface va varier de :

$$dS = 2l dx \quad (4)$$

où le facteur 2 correspond aux deux interfaces du film avec l'air. Il vient ainsi :

$$\delta W = 2\gamma l dx = 2\gamma dS \quad (5)$$

Cela montre que :

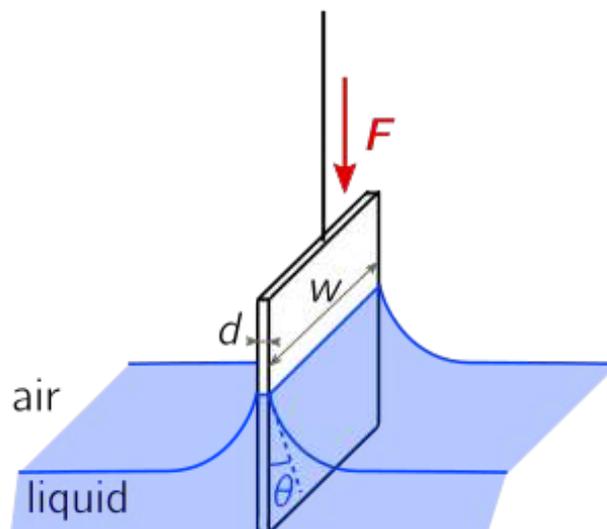
$\vec{\gamma}$  est une force (par unité de longueur) normale à la tige, dans le plan de la surface, et dirigée vers le liquide.

On aura finalement compris que les phénomènes de tension superficielle ont pour effet de minimiser l'aire de l'interface, compte tenu des contraintes imposées par ailleurs au système (gravité, pression...). En particulier, en l'absence de gravité, une goutte prend une forme sphérique car celle-ci assure une surface minimale pour un volume donné.

### c) Méthode de mesure

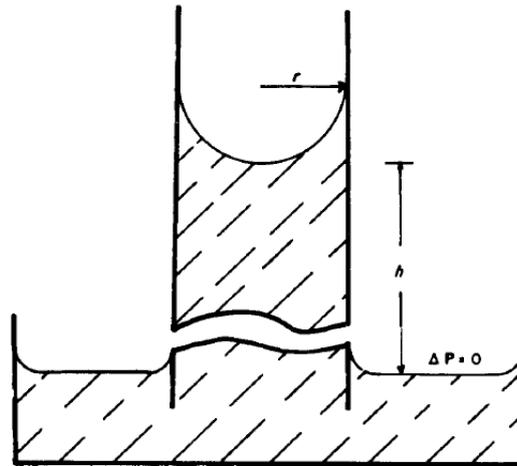
Les méthodes de mesure sont nombreuses :

- La méthode de Wilhelmy où l'on plonge une lame (ou un anneau) dans un bain de liquide et l'on mesure la force capillaire sur cette lame lorsqu'on l'arrache du liquide à l'aide d'une balance. On a dans ce cas  $\gamma = F / (W \cos(\theta))$ .



MANIP : idée de manip pas mal si il y a une balance d'arrachement.

- La montée du liquide dans un capillaire fin. On a dans ce cas  $\gamma = \Delta\rho ghr / (2 \cos(\theta))$



- les méthodes de goutte : on caractérise la forme des gouttes dans divers états (posée, tournante, pendante), et on ajuste cette forme à une forme théorique paramétrée par  $\gamma$ .

**MANIP : idée de manip pas mal si possible dans le BUP 963.**

- les ondes capillaires : on excite des ondes capillaires et on mesure la relation entre la fréquence et la longueur d'onde, en suivant optiquement la déformation de la surface, grâce à la déflexion d'un faisceau laser.

Toutes ces méthodes exigent beaucoup de précautions. Les surfaces des liquides sont des surfaces idéales, lisses à l'échelle atomique et chimiquement homogènes. Mais elles se contaminent très facilement. Les mesures de la tension superficielle de l'eau présentaient une dispersion énorme jusqu'au jour où Agnès Pockels, qui expérimentait dans sa cuisine, comprit qu'il fallait racler la surface de l'eau. Une surface d'eau fraîche a une tension bien définie :  $\gamma = 72 \text{ mJ/m}^2$ . mais l'eau, qui a une tension superficielle spécialement élevée, se pollue très vite pour abaisser son énergie de surface. Si l'on veut éviter cet inconvénient majeur et travailler avec des surfaces liquides qui n'évoluent pas au cours du temps, on utilise des huiles silicones, qui ont des faible tension superficielle. On les utilise aussi comme agent anti-graffiti et anti-salissure pour protéger les façades des immeubles, dont elles abaissent l'énergie de surface, les rendant non-adhésives.

Il existe bien d'autre méthode présentée dans Physical Chemistry of Surface de A.W. Adamson.

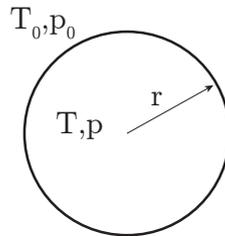
**Rq : Tensio-actifs :** Les tensioactifs sont constitués de molécules amphiphiles c'est-à-dire munies d'un pôle hydrophile et d'une longue chaîne hydrophobe. Lorsqu'un tensioactif est ajouté à de l'eau il vient se placer immédiatement à la surface, avec la queue hydrophobe pointant à l'extérieur de la surface. Ce processus s'accompagne d'une stabilisation de la surface et donc d'une chute de la tension superficielle. Ce n'est qu'une fois la surface saturée, et n'offrant plus d'espace disponible à de nouvelles molécules amphiphiles, que les tensioactifs vont former des structures organisées au sein du liquide : ce sont les micelles. Les micelles sont des structures sphériques ou ellipsoïdales dont la surface est constituée des têtes hydrophiles des tensioactifs, alors que les queues hydrophobes de ces derniers sont regroupées à l'intérieur. L'effet nettoyant des tensioactifs découle du fait que les substances hydrophobes, telles que les matières grasses, peuvent être contenues à l'intérieur des micelles. La concentration de tensioactifs au-dessus de laquelle les micelles

commencent à se former est connue comme la concentration micellaire critique (CMC). Elle s'obtient en déterminant la concentration à partir de laquelle la tension superficielle cesse de chuter.

## 2. Interface à deux fluides

La tension de surface est à l'origine de la surpression à l'intérieur des gouttes des bulles. Cette différence de pression a des conséquences multiples. Par exemple dans une émulsion, on observe que les petites gouttes disparaissent au profit des grosses ; dans un aérosol, elles s'évaporent les premières lors d'un refroidissement. Elle aussi de comprendre l'adhésion capillaire entre deux plaque et l'adhésion entre eux des cheveux ou des fibres, induite par des ponts capillaires. Lorsque l'on traverse une surface (ou interface) courbe, il y a un saut de pressions que nous allons évaluer pour une bulle de savon et pour une surface courbe quelconque.

### a) Loi de Laplace



Nous examinons ici une bulle de savon, et cherchons son équilibre dans l'atmosphère, thermostat à la température  $T_0$  et réservoir de volume à la pression  $p_0$ . Le degré hygrométrique de l'air est supposé suffisant pour que l'évaporation de la bulle (principale cause de son éclatement) soit négligeable pendant l'expérience. On néglige aussi les effets de la pesanteur.

Nous allons raisonner sur le système que constitue la bulle et l'air qu'elle renferme. Les paramètres extérieurs, qui resteront fixés tout au long de l'argument, regroupent évidemment  $T_0$  et  $p_0$ , mais aussi la quantité d'eau qui forme la bulle et la quantité d'air qu'elle contient (aucun passage à travers ses parois). L'énergie interne du système peut être écrite comme la somme des énergies internes de la bulle et de l'air intérieur ; il en est de même pour l'entropie :

$$U = U_a + U_b \text{ et } S = S_a + S_b$$

Comme  $T_0$  et  $p_0$  restent fixées de l'extérieur, l'équilibre du système correspond au minimum de son enthalpie libre externe :

$$G_0 = U - T_0 S + p_0 V \tag{6}$$

par rapport aux variables internes. Celles-ci sont les énergies  $U_a$  et  $U_b$  de l'air et de la bulle - que nous remplacerons par les entropies  $S_a$  et  $S_b$  -, ainsi que le volume de l'air enfermé et l'air de la bulle.

L'accroissement infinitésimal  $dU$  de l'énergie interne se décompose en deux contributions, celle de  $dU_a$  de l'air intérieur et celle de  $dU_b$  de la bulle. la première s'exprime comme :

$$dU_a = T_a dS_a - p dV \tag{7}$$

et la seconde :

$$dU_b = T_b dS_b + \gamma d\Sigma \quad (8)$$

où  $\Sigma$  représente l'aire de la surface qui sépare la bulle liquide de l'air environnant et  $\gamma$ , positif, note le coefficient de tension superficielle de l'eau savonneuse dans l'air). La différentielle du potentiel  $G_0$  prend la forme :

$$dG_0 = (T_a - T_0)dS_a + (T_b - T_0)dS_b + (p_0 - p)dV + \gamma d\Sigma \quad (9)$$

Mais, pour une bulle sphérique, le volume intérieur  $V$  et l'aire  $\Sigma$  sont reliés : si  $r$  désigne le rayon de la bulle :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ et } \Sigma = 2 \times 4\pi r^2$$

de sorte que :

$$dV = 4\pi r^2 dr \text{ et } d\Sigma = 16\pi r dr$$

Ceci se reflète dans la différentielle du potentiel :

$$dG_0 = (T_a - T_0)dS_a + (T_b - T_0)dS_b + 4\pi r^2 \left( p_0 - p + \frac{4\gamma}{r} \right) dr \quad (10)$$

Il s'ensuit que, à l'équilibre (minimum  $G_0$  par rapport aux trois variables internes indépendantes  $S_a$ ,  $S_b$  et  $r$ ) :

$$T_a = T_0; T_b = T_0 \text{ et } p = p_0 + \frac{4\gamma}{r}$$

L'équilibre suppose donc, évidemment, une température uniforme dans le système, fixée par le thermostat extérieur. D'autre part la dernière relation, associée à l'équation d'état du gaz, détermine le rayon d'équilibre de la bulle. Cette dernière relation, concernant les pressions porte le nom de loi de Laplace. Le coefficient  $\gamma$  étant positif, la pression  $p$  à l'intérieur de la bulle est supérieure à la pression  $p_0$  imposée de l'extérieur. Ceci est compréhensible : la tension superficielle tend à réduire la surface de la bille ; pour que celle-ci se maintienne en place, il est nécessaire que la pression intérieure excède la pression extérieure.

**Rq** : Explications supplémentaire page 211-212 du Diu.

## Généralisation à une surface quelconque

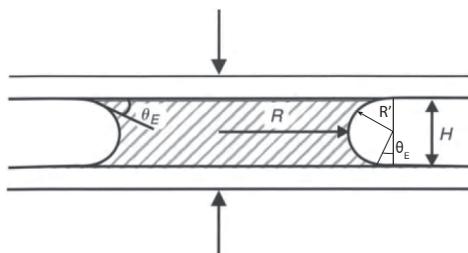
Le théorème de Laplace (1805) s'énonce :

L'accroissement de pression hydrostatique  $\Delta p$  qui se produit quand on traverse la surface de séparation de deux fluides, est égal au produit de la tension superficielle  $\gamma$  par la courbure de la surface  $C = 1/R + 1/R'$  :

$$\Delta p = \gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) = \gamma C \quad (11)$$

où  $R$  et  $R'$  sont les rayons de courbure de la surface.

## b) Application : adhésion capillaire



Deux surfaces mouillées peuvent coller très fortement ensemble si le liquide les mouille avec un angle de contact  $\theta_E < \pi/2$ . Écrasons une grosse goutte entre deux plaques distantes de  $H$ . Elle forme ce qu'on appelle un "pont capillaire" ; nous noterons  $R$  son rayon et  $\mathcal{A} \sim \pi R^2$  sa surface. La pression de Laplace dans la goutte s'écrit :

$$\Delta p = \gamma \left( \frac{1}{R} - \frac{\cos(\theta_E)}{H/2} \right) \sim -\frac{2\gamma \cos(\theta_E)}{H} \quad (12)$$

Avec  $R' = H/2 / \cos(\theta_E)$ . En posant  $H \gg R'$  on a :

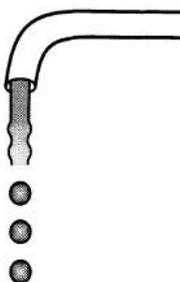
$$\Delta p \sim -\frac{2\gamma \cos(\theta_E)}{H} \quad (13)$$

La force qui colle les plaques est attractive si  $\theta_E < \pi/2$ , c'est à dire si  $\Delta p < 0$  ( $O_{int} < P_{ext}$ ) et égale (si  $H \ll R$ ) à  $F = \pi R^2 \frac{2\gamma \cos(\theta_E)}{H}$ . La force qui colle les plaques est répulsive si  $\theta_E > \pi/2$ , c'est à dire si  $\Delta p > 0$  ( $O_{int} > P_{ext}$ )

**MANIP : Prendre deux plaques de verres pour microscope et verser une goutte d'eau entre les deux plaques, puis les "coller" pour ensuite les désolidariser pour constater un pont mais aussi la résistance.**

Pour de l'eau, en prenant  $R = 1cm$ ,  $H = 5\mu m$  et  $\theta_E = 0$ , on trouve une dépression  $\Delta p \approx 1/3atm$  et une force d'adhésion  $F \sim 10N$  capable de supporter le poids d'un litre d'eau!

## c) Instabilité de Rayleigh-Plateau



Si l'on ouvre un robinet, on voit un jet d'eau se fragmenter en gouttelettes pour abaisser son énergie de surface. Pour comprendre cette diminution de surface, cassons un

cylindre de rayon  $R$  et de longueur  $L$  en  $n$  gouttelettes de rayon  $r$ . La conservation du volume conduit à :

$$\pi R^2 L = \frac{4}{3} \pi r^3 n \quad (14)$$

Faisons le rapport de la surface finale des gouttes  $S_n$  à la surface initiale  $S_0$  et éliminons  $n$  :

$$\frac{S_n}{S_0} = \frac{n 4\pi r^2}{2\pi R L} = \frac{3R}{2r} \quad (15)$$

Ainsi, dès que  $r \geq (3/2)R$ , la surface des gouttes est inférieure à celle du cylindre. On appelle ce phénomène l'instabilité de Rayleigh-Plateau. Un jet est une façon de réaliser des émulsions mono-disperses, où la taille des gouttes est bien calibrée. Cette méthode est utilisée en particulier dans la fabrication du lait homogénéisé, mais aussi dans de nombreux secteurs de l'industrie.

### 3. Contact à trois phases : le mouillage

Le mouillage est l'étude de l'étalement d'un liquide déposé sur un substrat solide (ou liquide). Ce phénomène touche de nombreux domaines de l'industrie (chimique, automobiles, verre, alimentaire...). Il joue aussi un rôle en science de la vie : ainsi le gonflement des poumons à la naissance est rendu possible par des molécules dites "tensioactives" qui abaissent l'énergie de surface.

#### a) Angle de mouillage

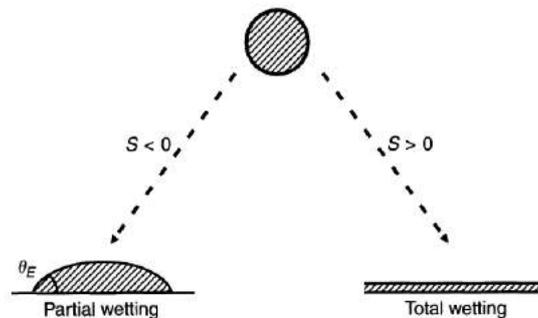


FIGURE 3 – Mouillage total et mouillage partiel.

Lorsque l'on pose une goutte d'eau sur du verre très propre, on la voit s'étaler complètement. En revanche, sur une feuille de plastique, le liquide reste rassemblé en goutte. Il y a donc deux régimes de mouillage représentés sur la figure. La grandeur qui les distingue est le paramètre d'étalement  $S$ , qui mesure la différence entre l'énergie de surface du substrat sec et mouillé (par unité de surface) :

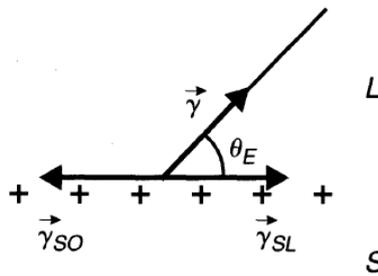
$$\begin{aligned} S &= E_{\text{sec}}^{\text{substrat}} - E_{\text{mouillé}}^{\text{substrat}} \\ S &= \gamma_{SG} - (\gamma_{SL} + \gamma_{LG}) \end{aligned} \quad (16)$$

où les trois tensions sont successivement la tension superficielle solide/gaz, solide/liquide et liquide/gaz.

On va ainsi distinguer deux cas :

- $S > 0$  : mouillage total, le liquide s'étale complètement pour abaisser l'énergie superficielle (l'angle de contact est nul :  $\theta_E = 0$ ). L'état final est un film d'épaisseur nanoscopique qui résulte d'une compétition entre les forces moléculaires et capillaires ;
- $S < 0$  : mouillage partiel, la goutte ne s'étale pas et forme à l'équilibre une calotte sphérique qui s'appuie sur le substrat en faisant un angle de contact  $\theta_E$ . On dira que le liquide est "plutôt mouillant", si  $\theta_E \leq \pi/2$ , et "plutôt non mouillant" si  $\theta_E > \pi/2$ .  $\theta_E = \pi/2$  ne joue aucun rôle particulier, au sens de la thermodynamique contrairement à  $\theta_E = 0$  (transition de mouillage). Mais on verra qu'un liquide plutôt mouillant envahit spontanément un capillaire, un milieu poreux ou une éponge.

**MANIP : on peut verser des gouttes d'huile silicone, de glycérol, de cyclohexane et d'eau sur une lame de cuivre et constater la forme des gouttes.**



L'angle de mouillage peut facilement être obtenu en équilibrant les forces capillaires agissant sur la ligne de contact (appelé ligne triple) : par unité de longueur, ces forces sont les tensions interfaciales entre les trois phases S/L/G. En projetant l'équilibre des forces sur le plan solide, on obtient la relation de Young :

$$\gamma \cos(\theta_E) = \gamma_{SG} - \gamma_{SL} \quad (17)$$

En reportant il vient :

$$S = \gamma(\cos(\theta_E) - 1) \quad (18)$$

On voit qu'on ne peut définir  $\theta_E$  que si la paramètre d'étalement est négatif.  $\theta_E$  est d'autant plus grand que le liquide est non mouillant. La projection des forces capillaires sur la verticale est équilibrée par une force élastique de réaction du solide. Si le solide est dur, cette déformation est inobservable ; mais si le solide est mou, comme par exemple un caoutchouc ou un film de peinture, il se déforme. C'est pour cette raison qu'une petite goutte d'eau sur de la peinture encore fraîche laisse une trace circulaire.

### Facteurs influents

Comment savoir si une goutte va plutôt s'étaler ou bien rester partiellement sphérique ? Différents critères sont en jeu :

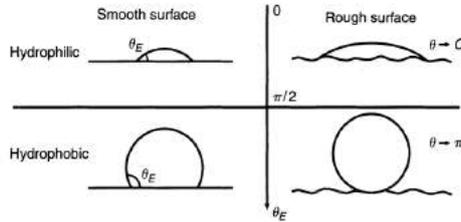
- Nature du substrat : un liquide s'étale complètement s'il est moins polarisable que le solide. Pour aller plus loin, on définit la tension critique de surface  $\gamma_c$  telle que  $\gamma > \gamma_c$  : mouillage partiel ;  $\gamma < \gamma_c$  : mouillage total. Ce critère est appelé critère empirique de Zisman et permet de classer ces solides. Il y a alors les surfaces de haute énergie pour lesquels  $\gamma_{SG} \sim E^{\text{liaison}}/a^2 \sim 500 - 5000 \text{ mN/m}$  et les surfaces de basse énergie pour lesquels  $\gamma_{SG} \sim kT/\alpha^2 \sim 10 - 50 \text{ mN/m}$ .

**MANIP : verser des gouttes sur du cuivre, du zinc, du verre et conclure sur le classement des  $\gamma_c$  des matériaux.**

- L'état de surface du substrat : selon la rugosité du substrat l'observation est différente. On a :

$$\cos(\theta^*) = r \cos(\theta_E) \text{ avec } r = \mathcal{A}_{\text{réel}} / \mathcal{A}_{\text{apparent}}$$

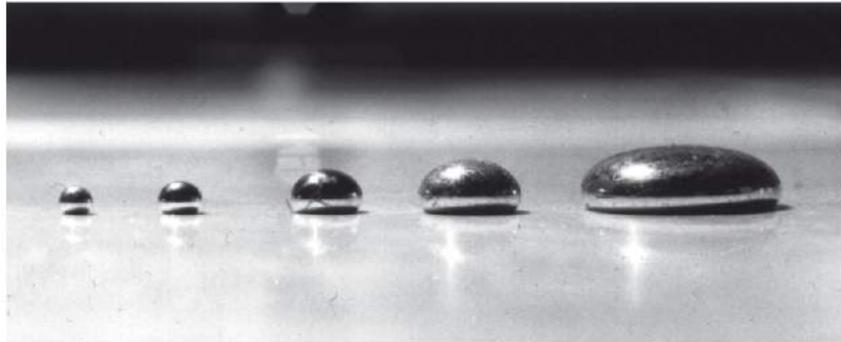
Selon la valeur de la rugosité le substrat est qualifié d'hydrophobe ou d'hydrophile.



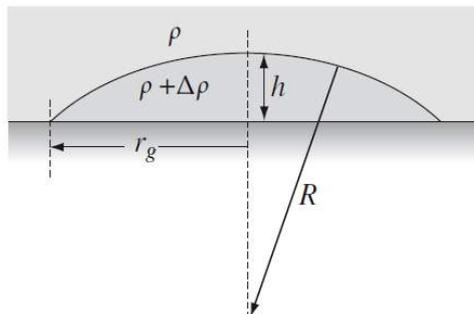
**Rq :** Voir plus de renseignement sur état de surface page 192 de De Gennes.

### b) Influence de la gravité

Les effets de capillarité, qui sont directement liés à la courbure des interfaces, sont importants lorsque l'on s'intéresse à des phénomènes aux petites échelles de longueur. Pour les objets de grande taille, ils sont masqués par l'influence des force en volume, comme la gravité.



La figure illustre ce point : des gouttes de mercure de tailles différentes sont posées sur une surface horizontale. Les plus petites ont une forme de calotte sphérique, tandis que les plus grosses sont aplaties sous l'effet de la gravité. Estimons l'ordre de grandeur relatif des différences de pression capillaires et hydrostatiques intervenant sur une goutte en forme de calotte sphérique posée sur une surface plane.



Pour plus de généralités, on considère une goutte d'un fluide de densité  $\rho + \Delta\rho$  entourée d'un fluide de densité  $\rho$ . La différence de pression capillaire et la différence de pression hydrostatique sur la hauteur  $h$  de la goutte sont respectivement :

$$\Delta p_{cap} = 2\frac{\gamma}{R} \text{ et } \Delta p_{grav} = \Delta\rho gh$$

Or on a pour une goutte pas trop déformée par rapport à une calotte sphérique avec  $r_g$  le rayon de la ligne de contact :

$$\begin{aligned} R^2 &= (R - h)^2 + r_g^2 = r_g^2 + R^2 \left(1 - \frac{h}{R}\right)^2 \approx r_g^2 + R^2 \left(1 - \frac{2h}{R}\right) \\ \Leftrightarrow 0 &= r_g^2 - R^2 \left(\frac{2h}{R}\right) \\ \Leftrightarrow h &= \frac{r_g^2}{2R} \end{aligned}$$

On peut alors caractériser l'importance relative des effets de gravité et de ceux de capillarité par le rapport des différences de pression correspondantes, soit :

$$Bo = \frac{\Delta\rho gh}{2\gamma/R} \approx \frac{\Delta\rho g r_g^2}{\gamma} \quad (19)$$

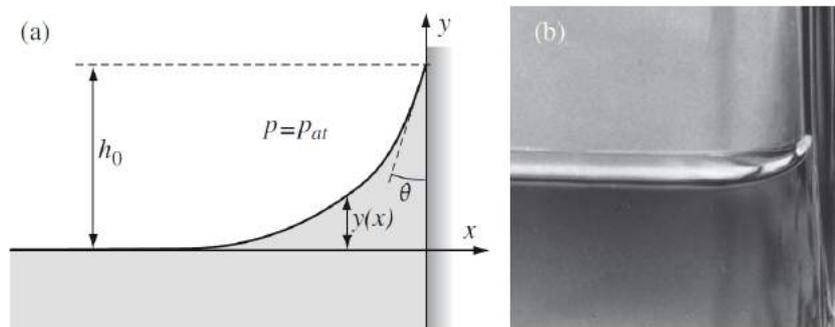
Ce rapport qui donne une valeur sans dimension est appelé nombre de Bond. Une grande valeur de ce nombre correspond à des effets de gravité dominants ceux de tension de surface. La valeur  $Bo = 1$  permet de définir une longueur caractéristique  $\ell_c$  appelée longueur capillaire :

$$\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\Delta\rho g}} \quad (20)$$

### c) Ascension capillaire

(facultatif)

La longueur capillaire  $\ell_c$  intervient dans de nombreux phénomènes. Elle peut représenter, l'ordre de grandeur de la hauteur d'ascension capillaire d'un fluide le long d'une paroi verticale dans le cas où le fluide mouille celle-ci, c'est à dire lorsque le centre de courbure de l'interface est à l'extérieur du liquide.



Déterminons la hauteur d'ascension du liquide au voisinage de la paroi. La pression à l'intérieur du liquide à une ordonnée  $y(x)$  au-dessous de l'interface s'écrit :  $p_s(x) = p_{at} - (\gamma/R(x)) + \rho g y(x)$  où  $R(x)$  représente le rayon de courbure local de l'interface,  $p_{at}$

la pression de l'air au-dessus de l'interface. Le terme en  $\gamma/R$  représente les effets de la tension superficielle et le terme  $\rho g y(x)$  ceux de pression hydrostatique. D'autre part, juste au-dessous de l'interface, dans sa partie plane, la pression dans le liquide est  $p_{sat}$ . On en déduit l'égalité :

$$\rho g y(x) = \frac{\gamma}{R(x)} \quad (21)$$

En utilisant la relation géométrique  $R(x) = [(1 + y'(x)^2)^{3/2}]/y''(x)$ , on obtient l'équation différentielle :

$$\rho g y = \gamma \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (22)$$

soit :

$$d(y^2) = -2 \frac{\gamma}{\rho g} d \left( \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) \quad (23)$$

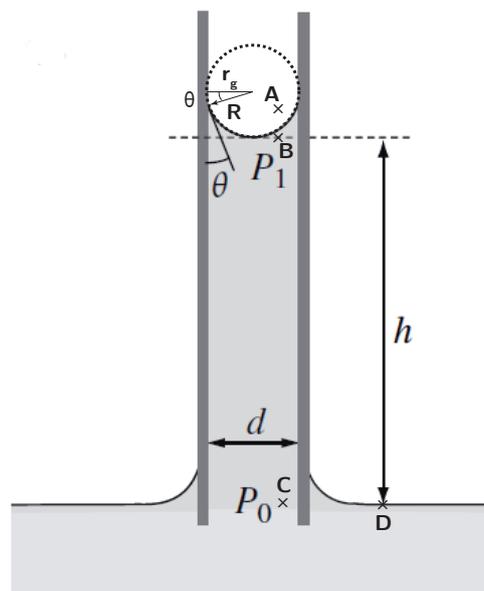
On voit apparaître l'échelle de longueur caractéristique du problème, la longueur capillaire. Par intégration, en utilisant les conditions asymptotiques pour  $x$  très grand (en valeur absolue),  $y \rightarrow 0$  et  $y' \rightarrow 0$  et en remarquant que  $y'(x=0) = -\cotan(\theta_0)$ , on obtient pour la hauteur d'ascension capillaire le long de la paroi :

$$h_0^2 = 2\ell_c(1 - \sin(\theta_0)) \quad (24)$$

Cette hauteur d'ascension est donc bien de l'ordre de grandeur de la longueur capillaire, corrigée par un facteur faisant intervenir les propriétés de mouillage de la paroi par le liquide (angle de raccordement  $\theta_0$ ).

### Ascension capillaire dans un tube : loi de Jurin

**MANIP : Expérience quantitative de la mesure de hauteur d'ascension page 458 Bellier.**



Lorsqu'un tube capillaire est plongé dans un liquide, on observe une déformation de l'interface près des parois mais également une ascension du ménisque dans le tube par rapport à l'extérieur si celui-là est de petit diamètre et si le fluide est mouillant pour la paroi du tube (angle de raccordement  $\theta$  avec la paroi solide inférieur à  $90^\circ$ ) ; si le fluide

est non mouillant (comme le mercure) le niveau de l'interface dans le tube est plus bas qu'à l'extérieur. Nous allons calculer l'ordre de grandeur de la différence de niveau entre l'intérieur et l'extérieur du tube.

On sait la loi de Laplace s'écrit au niveau de l'interface entre les points  $A$  et  $B$  :

$$\Delta P = P_A - P_B = \frac{2\gamma}{R} \quad (25)$$

avec  $r_g = R \cos(\theta)$ . Si on applique la loi de l'hydrostatique entre  $C$  et  $B$  et  $D$  et  $A$  :

$$\begin{aligned} P_C &= P_B + \rho_f g h \\ P_D &= P_A + \rho_g g h \end{aligned}$$

Ainsi on a en supposant que  $P_C = P_D$  et  $\rho_f \gg \rho_g$  :

$$\begin{aligned} \underbrace{P_D - P_C}_{=0} &= P_A - P_B + (\rho_g - \rho_f) g h \\ \Leftrightarrow 0 &= \Delta P - \rho_f g h \\ \Leftrightarrow \rho_f g h &= \Delta P = \frac{2\gamma}{R} = \frac{2\gamma \cos(\theta)}{r_g} \\ \Rightarrow h &= \frac{2\gamma \cos(\theta)}{\rho_f g r_g} \end{aligned} \quad (26)$$

On vient de trouver la loi de Jurin. Cette loi permet ainsi de déterminer la tension superficielle d'un liquide connaissant la hauteur d'ascension et en supposant un mouillage idéal ( $\theta = 0$ ) :

$$\gamma = \frac{h \rho_f r_g}{2} \quad (27)$$

**Rq** : Autre méthode : énergétique voir BUP n.851(2).

## Conclusion

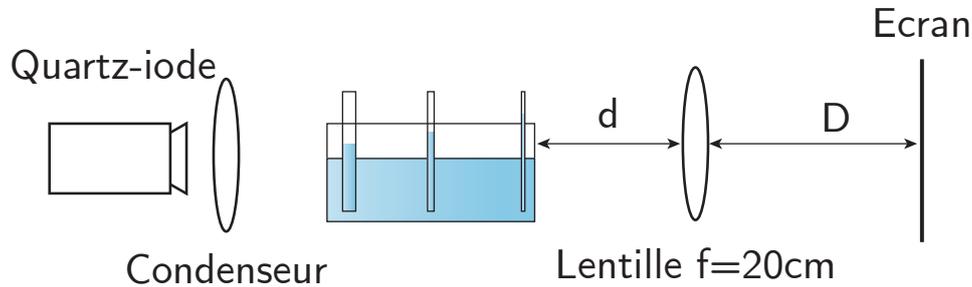
On a vu dans cette leçon comment que les phénomènes interfaciaux entraînent dans de nombreuses problématiques physiques et est utilisé dans plusieurs processus industriel et naturel.

Nous avons pu découvrir précisément ce qu'est la tension superficielle à l'échelle microscopique et quels en sont les manifestations. On sait désormais quels sont les outils qui permettent de cette constante propre à chaque liquide. On a également pu voir comment on peut décrire mathématiquement une interface à deux fluides par la loi de Laplace puis trois phases différentes par la loi de Jurin.

# MANIP : Loi de Jurin

## MANIP Bellier page 458

On va mesurer la hauteur d'ascension de l'eau dans un capillaire pour déterminer expérimentalement la valeur de sa constante de tension de surface.



On utilise des capillaires de rayon  $r_g$  différent que l'on plonge dans de l'eau colorée. On place notre dispositif dans un système optique : on utilise une lentille de focale de l'ordre de 20cm. On sait que le grandissement est donné par :

$$\alpha = \frac{D}{d} \quad (28)$$

Ainsi connaissant ce paramètre la hauteur  $h'$  mesuré sur l'écran peut directement donner  $h$  dans le capillaire par la relation :

$$h = \frac{h'}{\alpha} \quad (29)$$

Ainsi on trouve  $\gamma$  :

$$\gamma = \frac{h\rho_f r_g}{2} \quad (30)$$

avec l'erreur associée :

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r_g}{r_g}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\rho_f}{\rho_f}\right)^2} \quad (31)$$

On peut également remarquer que plus le rayon du capillaire est faible plus la hauteur d'ascension est importante.

# L.P. 12 - Premier principe de la thermodynamique

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Équilibre thermodynamique
- Mécanique du point et des systèmes
- Gaz parfait

## Bibliographie

- Physique Tout en un MPSI-PSI, Sanz, *Dunod*
- Thermodynamique, Bertin, Faroux, *Dunod*
- Les 1001 questions en prépa, Garing *Ellipse*
- H-prépa Thermodynamique, *Hachette supérieur*

## Introduction

La thermodynamique est une science relativement jeune. Elle prend naissance au 19<sup>e</sup> siècle sous la forme d'une discipline combinant l'étude de toute les transformations qui s'accomplissent à notre échelle ( $\rightarrow$  échelle macroscopique)

- changements d'états physicochimiques
- changement de positions seuls (mécanique classique)

Ce domaine des sciences peut concerner différents types de systèmes :

- Les systèmes dit ouverts : échange de la matière et échange d'énergie avec le monde ambiant
- Les systèmes dit fermés : échange d'énergie avec le monde ambiant
- Les systèmes dit isolés : aucun échange (le système le plus idéal)

Toutes ces transformations mettent en jeu la température et la chaleur.

La chaleur est une forme d'énergie pour laquelle les savants ont mis du temps à donner un statut scientifique : dès l'antiquité elle fut étudiée et souvent confondue avec la température. On la définissait plus à travers une sensation. Ainsi ils pensaient qu'un corps chaud contenait du chaud et un corps froid contenait du froid.

Finalement, nous avons autour de nous une multitude de système fermé qui peut échanger de l'énergie avec son environnement. Par exemple un piston dans un conduit qui va frotter et échanger de l'énergie à travers les parois  $\rightarrow$  échange de chaleur ou bien par l'action d'une force extérieur agissant sur le système  $\rightarrow$  travail.

Comment définir ces deux éléments qui permettent de traduire l'interaction d'un système avec son milieu ? En les définissant on pourra alors définir la conservation de l'énergie d'un système fermé et immobile à travers le premier principe.

# 1. Concept de travail et de chaleur

## a) Travail

### Exemple du piston

Dans la majorité des transformations que nous étudions, le travail est dû aux variations de volume du système.

Soit un piston de section droite  $A$ . Nous supposons que le déplacement du piston est suffisamment lent pour que l'état du fluide puisse être constamment assimilé à un état d'équilibre thermodynamique interne (c.a.d les paramètres d'état intensifs pression et température sont uniformes dans le système). Une transformation infiniment lente est parfois appelée transformation quasi statique.

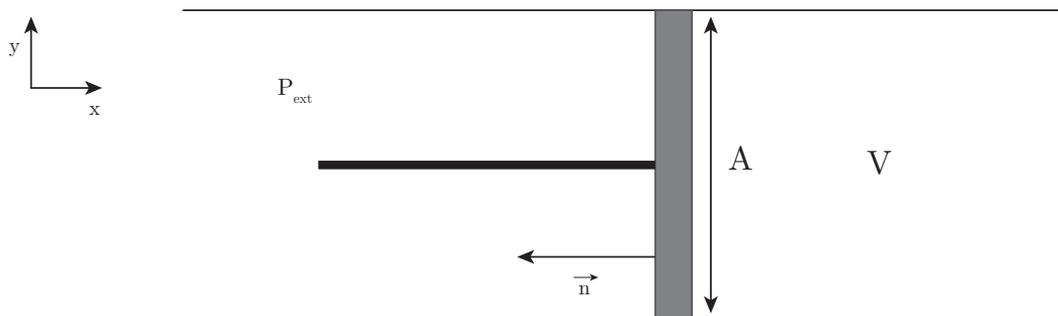
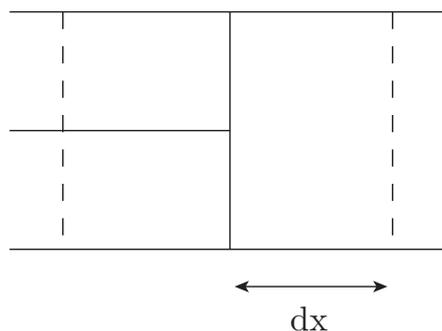


FIGURE 4 – Schématisation du piston

Soit la force  $\vec{F}$  exercé sur le piston par la pression extérieure :

$$F = -P_{ext}A \cdot \vec{e}_x \quad (1)$$

Si on considère le mouvement du piston :



Soit une détente, le volume de gaz augmente et on a :  $dx < 0$   $dV > 0$

Soit une compression le volume de gaz diminue et on a :  $dx > 0$   $dV < 0$

On peut alors définir le travail élémentaire pour une transformation au cours de laquelle le système "fluide" reste dans un état proche d'un état d'équilibre thermodynamique interne :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{x} = (P_{ext}A \vec{x}) \cdot (dx \vec{x}) = P_{ext} \cdot Adx = -P_{ext}dV \quad (2)$$

Le volume  $Adx$  balayé par le piston est en effet l'opposé de la variation de volume  $dV$  du gaz et il convient d'être attentif au signe !  $\delta W$  est équivalent à l'énergie mécanique fournie

au système par le milieu extérieur.

→  $\delta W > 0$  : compression ( $dV < 0$ ), le milieu extérieur cède de l'énergie au système.

→  $\delta W < 0$  : détente ( $dV > 0$ ), le système cède de l'énergie.

Si on note temporairement  $\delta W'$  le travail des forces de pression reçu par le gaz seul, alors le théorème de l'énergie cinétique appliqué au piston s'écrit sur un petit déplacement :

$$dE_c = -P_{ext}dV + (-\delta W') + \delta W_{frottement} \quad (3)$$

Le travail du gaz sur le piston est l'opposé du travail  $\delta W'$  du piston sur le gaz. On a aussi le travail des forces de frottement mécanique dans le déplacement du piston contre l'enceinte. Alors on peut écrire :

$$\delta W' = -P_{ext}dV - dE_c + \delta W_{frot} \quad (4)$$

On peut supposer une absence de frottement et de plus considérer un déplacement quasi statique pour que  $dE_c = 0$  ce qui entraîne également  $P_{ext} = P$  où  $P$  est la pression du gaz. Alors on peut écrire :

$$\delta W' = -P_{ext}dV = -PdV \quad (5)$$

Le travail reçu par le piston est intégralement transféré au gaz. Ces hypothèses définissent les transformations mécaniquement réversibles.

Ainsi si on considère une transformation entre deux états d'immobilité du piston avec  $\delta W_{frot} = 0$  à  $P_{ext} = cste$ , on a alors :

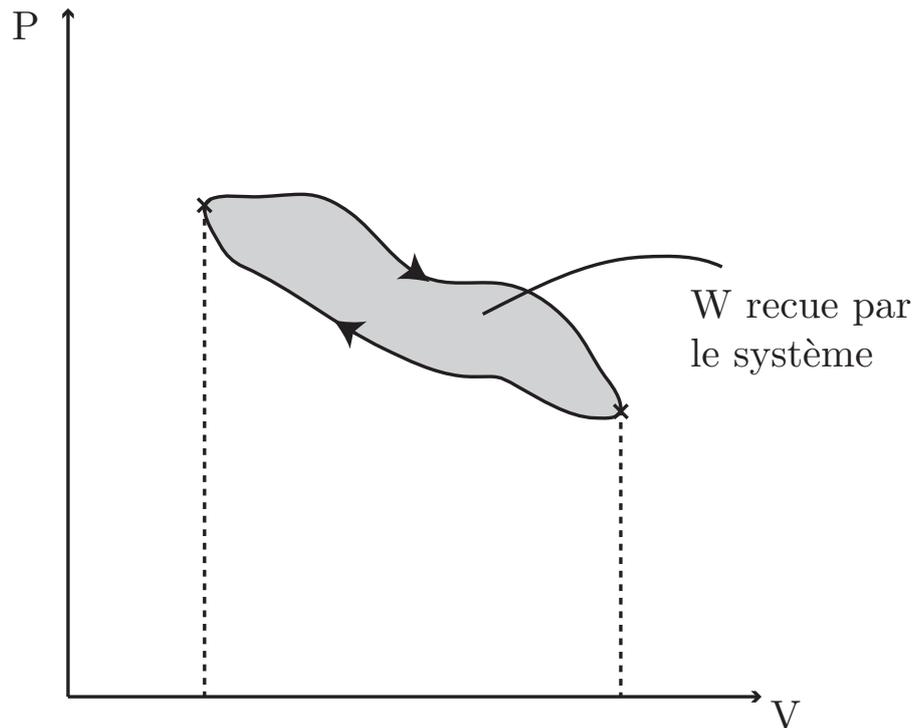
$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P_{ext}dV = -P_{ext}(V_2 - V_1) \quad (6)$$

Si on considère maintenant une transformation mécaniquement réversible, alors  $P_{ext} = P$  et on a :

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} PdV \quad (7)$$

On remarque que le travail est fonction du chemin suivi !

On peut tracer par exemple la pression  $P$  en fonction du volume  $V$  dans le diagramme de Clapeyron.



Rq : Si le cycle est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre alors  $W < 0$  et on dit que le cycle est moteur. Mais dans tous les cas l'aire équivaut à  $|W|$ .

## b) Chaleur

On note la chaleur  $Q$ . Elle correspond à un échange d'énergie entre le système et le milieu extérieur à l'échelle microscopique. → elle correspond à une variation du désordre microscopique (excitation/vibration des molécules).

→ lié à la température sachant que la chaleur peut passer du système le plus chaud au système le plus froid.

Sa dimension est le Joule ( $J$ ).

Cette énergie est transmise par les trois processus d'échange thermiques : rayonnement, conduction et convection.

On peut distinguer trois cas :

- si  $Q > 0$  le système reçoit de la chaleur du milieu extérieur
- si  $Q < 0$  le système cède de la chaleur au milieu extérieur
- si  $Q = 0$  le système n'échange pas de chaleur on dit qu'il est adiabatique, le système est isolé thermiquement.

$Q$  dépend aussi du chemin suivi (d'où la notation  $\delta Q$ ).

Cette quantité de chaleur va dépendre du système considéré : fluide, solide ; c'est à dire sa capacité à réagir à ce qu'on lui fait subir et aussi en fonction des conditions du milieu extérieur.

Pour traduire cette capacité du système on utilise des coefficients appelé capacité calorifique. On sait qu'un transfert de chaleur vers un système s'accompagne généralement d'un changement de température. Dans certains cas cette variation de température est proportionnelle à  $Q$ .

### Considérons une transformation réversible :

La chaleur  $Q$  absorbée par un système thermodynamique monophasé de composition constante peut être exprimée en fonction de la température  $T$  et du volume  $V$  selon :

$$\delta Q = C_V dT + l dV \quad (8)$$

avec,

- $C_V$  la capacité thermique isochore (J/K). Elle représente la chaleur absorbée par le corps à volume constant rapportée à la variation de température du corps engendrée par cette transformation (pas dans la leçon mais  $C_V = T (\partial S / \partial T)_V$ ).
- $l$  est le coefficient calorimétrique de dilatation (ou chaleur latente de dilatation isotherme), grandeur intensive exprimée en  $Pa$  et représente la chaleur absorbée par le corps à température constante rapportée à la variation de volume du corps engendrée par cette transformation (pas dans la leçon mais  $l = T (\partial S / \partial V)_T$ ).

On a pour une transformation isochore ( $V = cste$ ) :

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C_V . dT \quad (9)$$

La chaleur  $Q$  absorbée par un système thermodynamique monophasé de composition constante peut être exprimée en fonction de la température  $T$  et de la pression  $P$  selon :

$$\delta Q = C_P dT + h dP \quad (10)$$

avec,

- $C_P$  la capacité thermique isobare, grandeur extensive exprimée en  $J/K$ . Elle représente la chaleur absorbée par le corps à pression constante rapportée à la variation de température du corps engendrée par cette transformation (pas dans la leçon mais  $C_P = T (\partial S / \partial T)_P$ ).
- $h$  le coefficient calorimétrique de compression (anciennement chaleur latente de compression isotherme), grandeur extensive exprimée en mètre cube,  $m^3$ . Il représente la chaleur absorbée par le corps à température constante rapportée à la variation de pression du corps engendrée par cette transformation (pas dans la leçon mais  $h = T (\partial S / \partial P)_T$ ).

On a pour une transformation isobare ( $P = cste$ ) :

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C_P . dT \quad (11)$$

Ces deux coefficients correspondent à la quantité d'énergie qu'il faut fournir à un matériau pour augmenter sa température de  $1K$ .

ex : eau à 14.5 degrés à pression atmosphérique  $C_p = 4.18 J.K^{-1}$

On peut également les écrire sous forme massique ou bien molaire :

$C_v = mc_v$  et  $C_p = mc_p$  ou  $C_v = nc_{vm}$  et  $C_p = nc_{pm}$

Dans le cas d'un gaz parfait, ces deux coefficients sont reliés par la relation de Mayer :

$$C_p - C_v = nR \quad (12)$$

Pour un gaz quelconque on peut aussi définir un exposant adiabatique :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (13)$$

Ainsi pour un gaz parfait on a les relations suivantes :

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \text{ et } C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$\text{Relation générale de Mayer : } C_p - C_v = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_{V,n} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P,n}$$

### c) Énergie

On note l'énergie interne d'un système  $U$ . Considérons un système composé d'une multitude de particules. Alors on définit  $U$  comme étant la somme de :

- l'énergie cinétique microscopique totale des particules (dépendant notamment de l'agitation thermique et donc de la température)
- l'énergie potentielle totale d'interaction entre les particules du système

Cette relation s'écrit :

$$U = E_c^{int} + E_p^{int} \quad (14)$$

La grandeur  $U$  est une grandeur extensive ( $U + U = 2U$ ), elle est définie par les variables d'état ( $P, V, T$ ), et c'est une fonction d'état.

Si on considère maintenant l'énergie externe. Celle-ci va dépendre de l'environnement dans lequel on se trouve (gravitation pour la Terre, champ électrostatique...). On va alors également avoir une énergie potentielle et cinétique.

On peut alors écrire l'énergie totale comme étant :

$$E = U + E_c + E_p \quad (15)$$

Dans le cas d'une transformation,  $U$  est définie à l'état initial et à l'état final.

→ sa variation ne dépend pas du chemin suivi

→ on note alors  $\Delta U = U_f - U_i$

On a pu voir comment on pouvait décrire un système grâce à trois variables énergétiques qui sont le travail, la chaleur et l'énergie interne. Mais comment fait-on pour les relier entre elles et surtout sous quelles conditions on peut les relier !

## 2. Premier principe de la thermodynamique

Le 1er principe de la thermodynamique décrit le bilan des échanges d'énergie d'un système avec son milieu environnant.

Alors on sait que l'énergie totale d'un système s'écrit :

$$E = U + E_c + E_p \quad (16)$$

Cette variable ne dépend pas du chemin suivi. On peut alors écrire :

$$\Delta E = E_f - E_i = \Delta(U + E_c + E_p) \quad (17)$$

Si le système que l'on étudie est isolé on a  $E = cste$ . De plus si l'on se place dans un système qui est "purement" thermodynamique, c'est à dire macroscopiquement au repos dans le référentiel d'étude, alors son énergie cinétique macroscopique et son énergie

potentielle dans le champ de force extérieur ne varient pas. Le premier principe s'écrit sous la forme simplifiée à partir de ces hypothèses :

$$\Delta E = \Delta U \quad (18)$$

Selon le premier principe de la thermodynamique, lors de toute transformation, il y a conservation de l'énergie. Dans le cas des systèmes thermodynamiques fermés, il s'énonce de la manière suivante :

" Au cours d'une transformation quelconque d'un système fermé, la variation de son énergie est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur, par transfert thermique (chaleur) et transfert mécanique (travail). "

Ainsi en faisant le bilan on voit que les deux façon de transférer de l'énergie sont le travail  $W$  et la chaleur  $Q$ . On a alors :

$$\Delta E = W + Q \quad (19)$$

Il existe donc une fonction d'état  $U$  tel que :

$$\Delta U = W + Q \quad (20)$$

Pour une transformation élémentaire (infinitésimale) on écrit :

$$dU = \delta W + \delta Q \quad (21)$$

On note  $d$  car  $U$  est une fonction d'état. Le travail  $W$  et  $Q$  ne sont pas des formes d'énergie mais des façon de transférer de l'énergie d'où la notation  $\delta$ .

Cette équation s'applique entre deux moments d'équilibre.

Si on revient avec les expressions de  $\delta Q$  et  $\delta W$  on peut écrire l'énergie interne pour une transformation réversible :

$$dU = \delta Q + \delta W = C_V dT + (l - P)dV \quad (22)$$

En écrivant la forme différentielle de l'énergie interne :

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV \quad (23)$$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} C_V &= \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \\ l &= P + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T \end{aligned} \quad (24)$$

Si l'on adopte à présent une description de l'état du système basée sur  $T$  et  $P$  pour une transformation réversible, on a :

$$dU = \delta W + \delta Q = C_P dT + l dP - P dV \quad (25)$$

Afin de ramener à deux variables indépendantes, on introduit une nouvelle fonction d'état, l'enthalpie  $H$  :

$$H = U + PV \quad (26)$$

Ainsi on obtient :

$$dH = C_P dT + (h + V)dP \quad (27)$$

On en déduit alors :

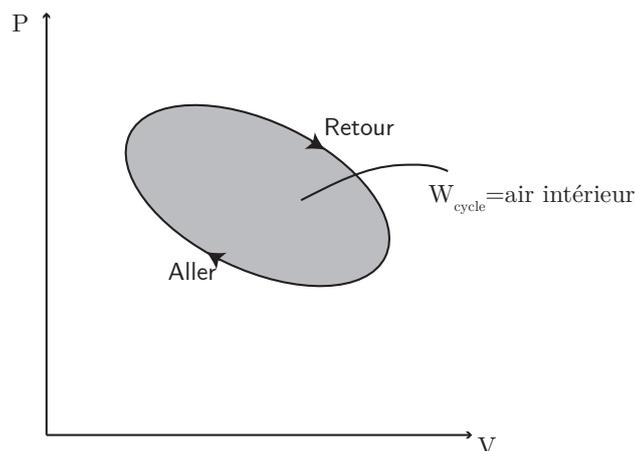
$$\begin{aligned} C_P &= \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \\ h &= -V + \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T \end{aligned} \quad (28)$$

L'enthalpie est mieux adaptée que l'énergie interne au traitement de problèmes dans lesquels l'état du système est décrit à partir de  $T$  et  $P$ . On a pu voir comment on pouvait relier les variables  $W$ ,  $U$  et  $Q$ . Mais dans quelle mesure peut on s'en servir dans notre quotidien et comment ? C'est ce que l'on va voir avec deux applications courantes.

### 3. Applications

#### a) Cycle d'Otto

Définition d'un cycle : c'est une courbe fermée dans le plan  $(P, V)$ .



En général le cycle est approximé par une succession de transformation caractéristique. Le cycle permet d'étudier des machines de tailles finies et ainsi permet de réduire la taille des machines connaissant leurs gamme optimal de fonctionnement. Le cycle d'Otto est un cycle proche de celui des moteurs deux temps (cyclomoteur, tondeuse ...).

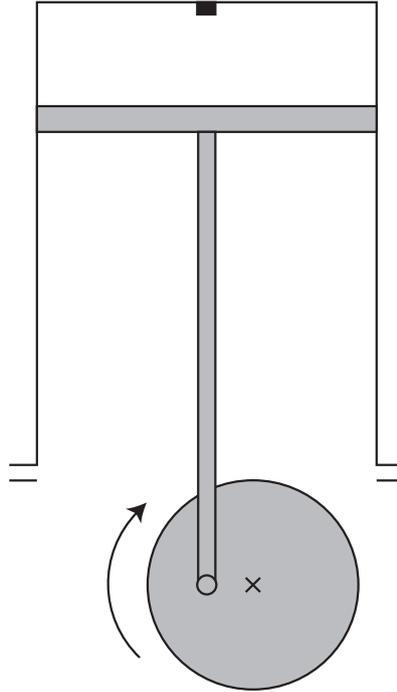


FIGURE 5 – *Principe moteur*

A chaque tour il y a combustion et donc apport de chaleur et production de travail.

Détails des phases :

- Phase 0-1 ou 1er temps : c'est la phase d'admission de l'air, la soupape d'admission s'ouvre, un peu de combustible (essence vaporisée) est aussi aspirée. A la fin de cette phase, la soupape d'admission se ferme et on travaille avec l'air enfermé à la température  $T_1$  ;
- Phase 1-2 : le piston remonte et le gaz est comprimé, la phase est rapide et comme les échanges thermiques sont lents, la transformation est adiabatique (cas idéal), on la suppose en général aussi quasi-statique et donc isentropique ;
- Phase 2-3 : explosion, à cet instant une étincelle provoque l'explosion du mélange, il y a accroissement de la pression par l'explosion, à volume constant car le piston n'a pas le temps de réagir (cas idéal) ;
- Phase 3-4 : détente et effet moteur, l'air chauffé se détend en repoussant le piston et en fournissant un travail ( $\delta W = -PdV < 0$ ), on l'idéalise par une transformation isentropique ;
- Phase 4-1 : la soupape d'échappement s'ouvre, la pression interne retombe instantanément à la pression atmosphérique (donc à volume constant), puis le piston remonte en repoussant l'air restant (retour à 0).

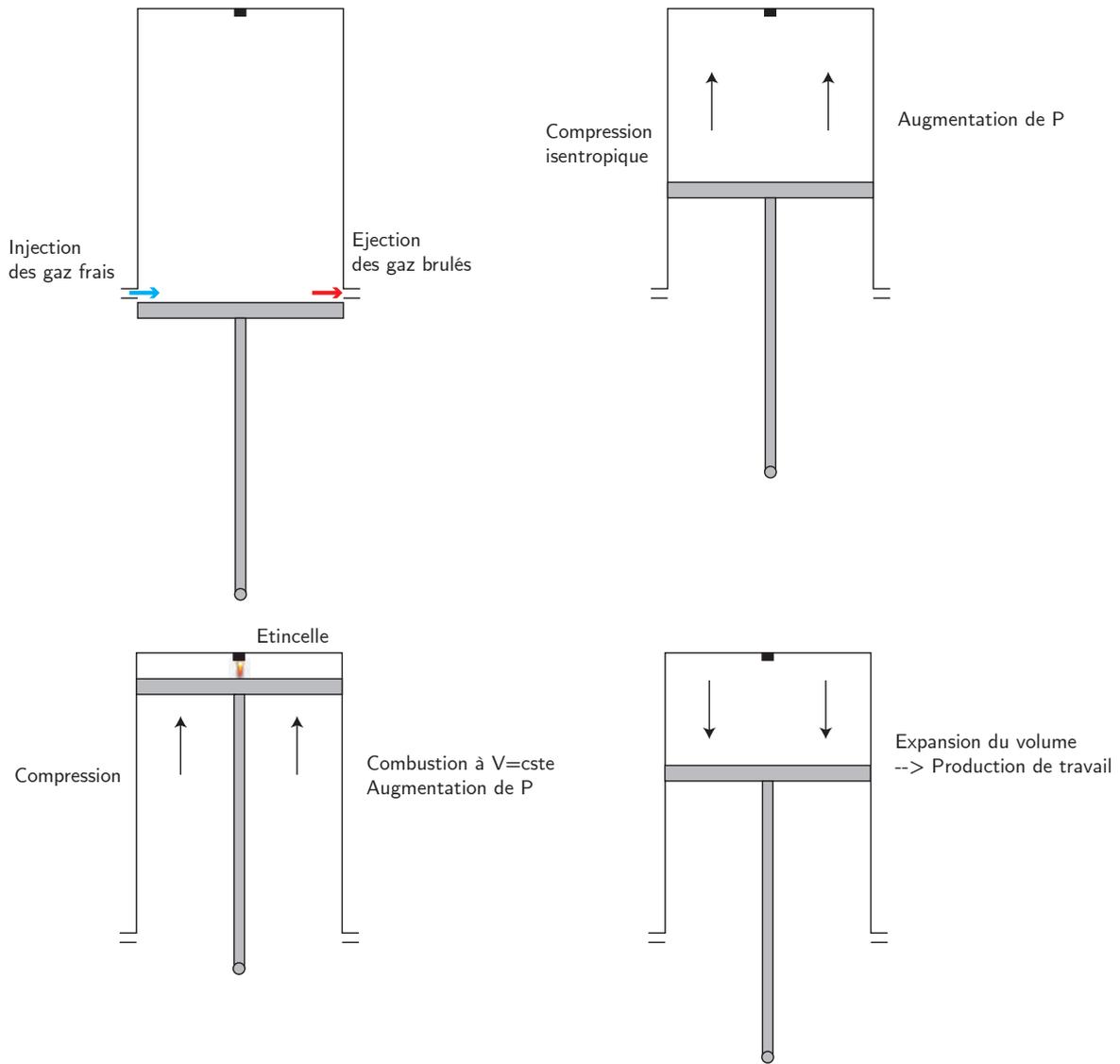


FIGURE 6 – Cycle Otto

On peut tracer ce cycle sur un diagramme ( $P, V$ ) :

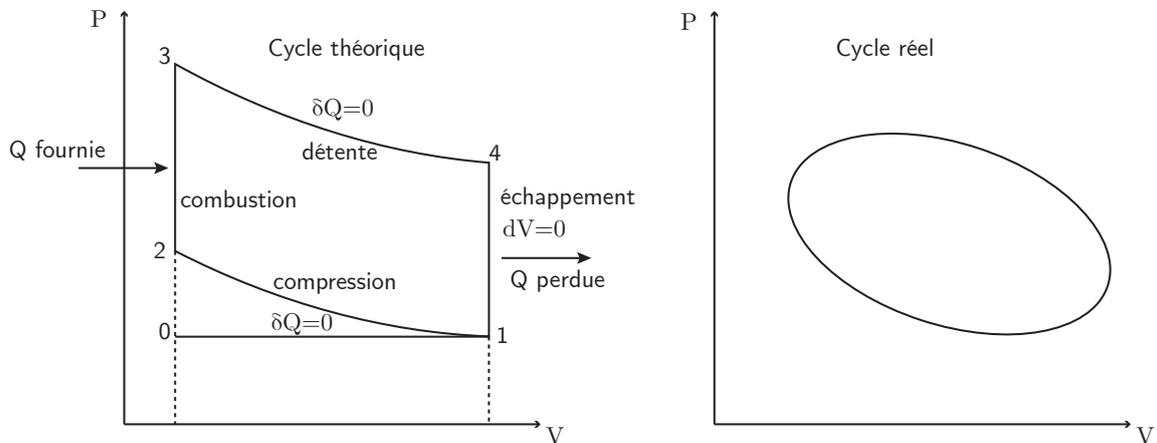


FIGURE 7 – Cycle Otto théorique et réel

On peut ainsi pour chaque chemin calculer le travail et la quantité de chaleur :

1→2

$$Q_{1-2} = 0 \quad (29)$$

2→3

$$Q_{2-3} = Q_c = nc_V(T_3 - T_2) \quad (30)$$

3→4

$$Q_{3-4} = 0 \quad (31)$$

4→1

$$Q_{4-1} = Q_f = nc_V(T_1 - T_4) \quad (32)$$

On sait que pour un cycle on a la relation :  $\Delta U = 0$ . Ainsi en développant on peut écrire que, d'après le premier principe :

$$\Delta U = Q + W = 0 \quad (33)$$

D'où,

$$W = -Q \quad (34)$$

Si on fait la somme des travaux on obtient

$$W_c = nc_v(T_3 - T_2 + T_1 - T_4) \quad (35)$$

On définit le rendement comme étant :

$$\eta = \frac{|W_c|}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (36)$$

En utilisant la relation de Laplace pour les gaz parfait :  $PV^\gamma = cste$ , on obtient puisque les transformations 1 – 2 et 3 – 4 sont isentropiques, et en considérant que le mélange air/carburant est un fluide parfait, on a :

$$\begin{aligned} \frac{T_3}{T_4} &= \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\gamma-1} \\ \frac{T_1}{T_2} &= \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \alpha^{\gamma-1} \end{aligned} \quad (37)$$

Avec  $\alpha = V_2/V_1$  le rapport de compression. On a pour un moteur essence  $\alpha = 10$  et pour un diesel  $\alpha = 10$ . Finalement on obtient en remplaçant dans la formule du rendement :

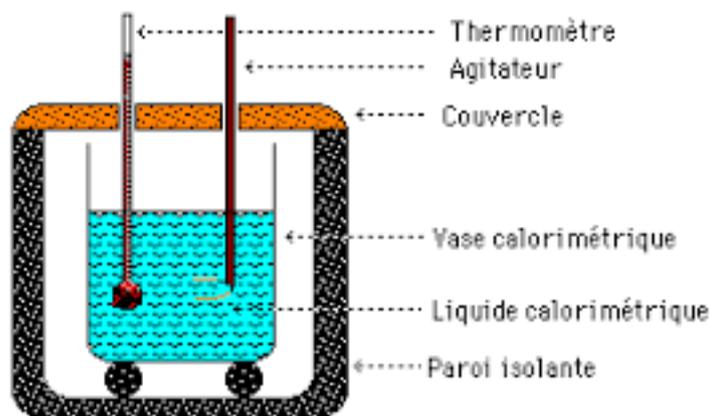
$$\eta = 1 - \frac{1}{(\alpha)^{\gamma-1}} \quad (38)$$

En général on a un rendement de l'ordre de 30%

## b) Calorimétrie

### MANIP

Un calorimètre est un outils qui permet de mesurer les échanges de chaleur entre deux corps pour en déduire leur capacité thermique, ou bien la chaleur latente du à un changement d'état ou par réaction chimique. Le plus fréquemment utilisé est le calorimètre de Berthelot.



Nous avons une enceinte isolante pour limiter les échanges avec le milieu extérieur → adiabatique. L'agitateur permet d'homogénéiser la température. On a également à notre disposition un thermomètre pour faire le suivi de la température du système au cours du temps.

Pour procéder à la mesure on place un échantillon de masse  $m_{ech}$  qui est à la température de la pièce  $T_{ech}$  et de capacité  $C_{ech}$ , dans l'eau de masse  $m_{eau}$ , de capacité  $C_i$  et à la température du calorimètre  $T_i$ . La transformation est à pression constante ne l'oublions pas !

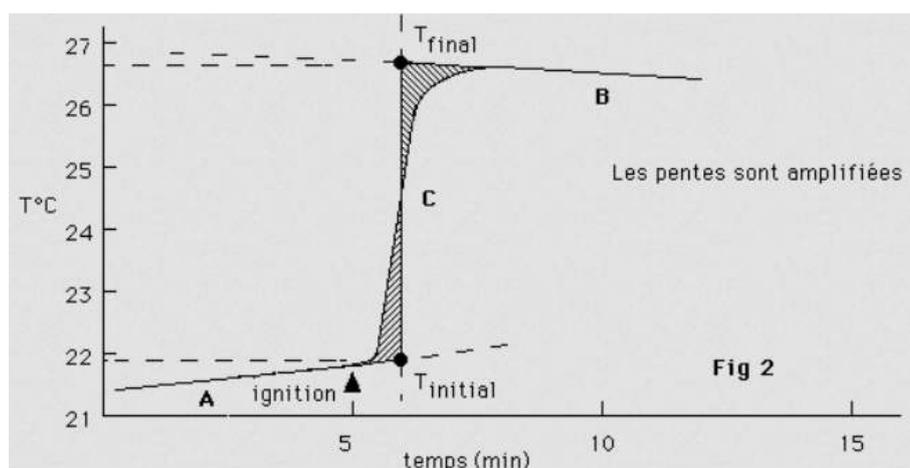


FIGURE 8 – Température au cours du temps dans le calorimètre

Les zones hachées représentent les pertes par convection du calorimètre. Souvent on fait une compensation de température entre les pertes du haut et du bas sur le graphe.

On va considérer pour ce cas ci que l'ensemble {vase + thermomtre + agitateur} se comporte thermiquement comme une masse d'eau équivalente appelée la valeur en eau du calorimètre que l'on note  $\mu$  (kg). Elle est mesurée au préalable lors d'essais d'étalonnage. En supposant que l'isolation du calorimètre est parfaite alors on peut écrire le bilan des énergies internes en appliquant le 1er principe de la thermo :

$$\Delta U_{cal} + \Delta U_{eau} + \Delta U_{ech} = 0 \quad (39)$$

D'où,

$$\mu c_{eau}(T_f - T_i) + m_{eau}c_{eau}(T_f - T_i) + m_{ech}c_{ech}(T_f - T_{ech}) = 0 \quad (40)$$

Finalement on peut en déduire la capacité thermique massique de notre échantillon :

$$c_{ech} = \frac{c_{eau}(\mu + m_{eau})(T_i - T_f)}{m_{ech}(T_f - T_{ech})} \quad (41)$$

## Conclusion

On a pu voir dans cette leçon comment on pouvait relier, à travers une équation d'énergie, donner par le 1<sup>er</sup> principe de la thermo, le travail, la chaleur et l'énergie interne. On a pu également voir comment on peut utiliser ce principe pour déterminer des grandeurs utiles dans la vie de tous les jours comme le rendement ou bien des capacités calorifiques. Cependant le premier principe n'est pas à lui seul suffisant pour décrire les évolutions de systèmes thermodynamiques. En effet, un second principe est nécessaire pour prévoir le sens d'évolution des systèmes, et la thermodynamique statistique permet de connaître l'état macroscopique d'un système grâce à la connaissance qu'a le physicien sur les particules qui le compose.

# L.P. 15 - Transitions de phase

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- 1er et 2nd principe
- Potentiels thermo

## Bibliographie

- Thermodynamique, Diu, *Hermann*
- Thermodynamique PC-PSI, Choimet, *Bréal*
- Thermodynamique, J-P Perez, *Dunod*
- Thermodynamique PC-PSI, Brébec, *Hachette*
- Expériences de physique (Elect), Bellier, *Dunod*

**Leçon assez délicate, il ne faut pas perdre de temps donc aller à l'essentiel et bien faire la manip de la mesure de  $L$  avec les erreurs. Si pas le temps ne pas faire les manips secondaires !**

## Introduction

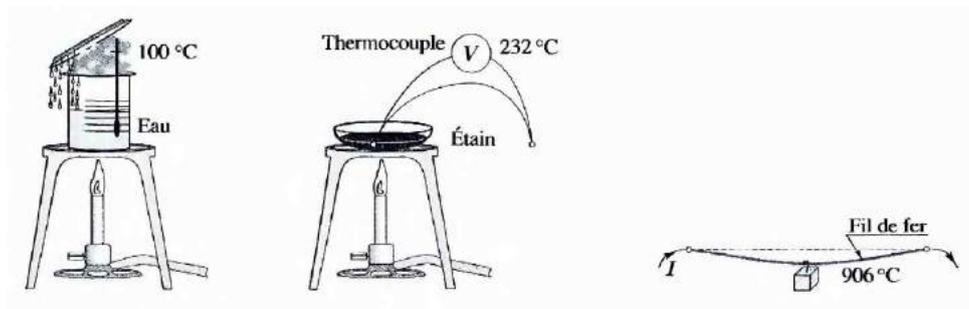
Un corps pur est un système constitué d'une seule espèce chimique ; on sait qu'il peut exister dans des états physiques différents, gazeux, liquide, solide ; on dit aussi sous différentes phases, c'est à dire sous différentes parties homogènes caractérisées par les mêmes propriétés physiques et chimiques. Lorsqu'un corps pur évolue d'un état d'équilibre à un autre, on assiste parfois à une modification importante et soudaine de certaines de ses propriétés physiques, mécaniques, optiques, électrique ... On dit qu'il subit un changement d'état ou une transition de phase. Ce phénomène est fréquemment observé dans la nature ; on connaît bien la solidification de l'eau ainsi que sa vaporisation, mais le passage du fer de l'état  $\alpha$  à l'état  $\gamma$ , par chauffage, est aussi une transition de phase.

Les transitions de phase présentent un intérêt à la fois théorique et pratique. En effet, d'une part leur interprétation fondamentale, en termes microscopiques, est encore un sujet de réflexion, d'autre part, on les utilise très largement dans les machines thermiques en raison des grandes énergies mises en jeu. Dans cette leçon on étudiera plus particulièrement les conditions dans lesquelles un corps pur peut se trouver en équilibre sous plusieurs phases.

## 1. Généralités

### a) Mise en évidence

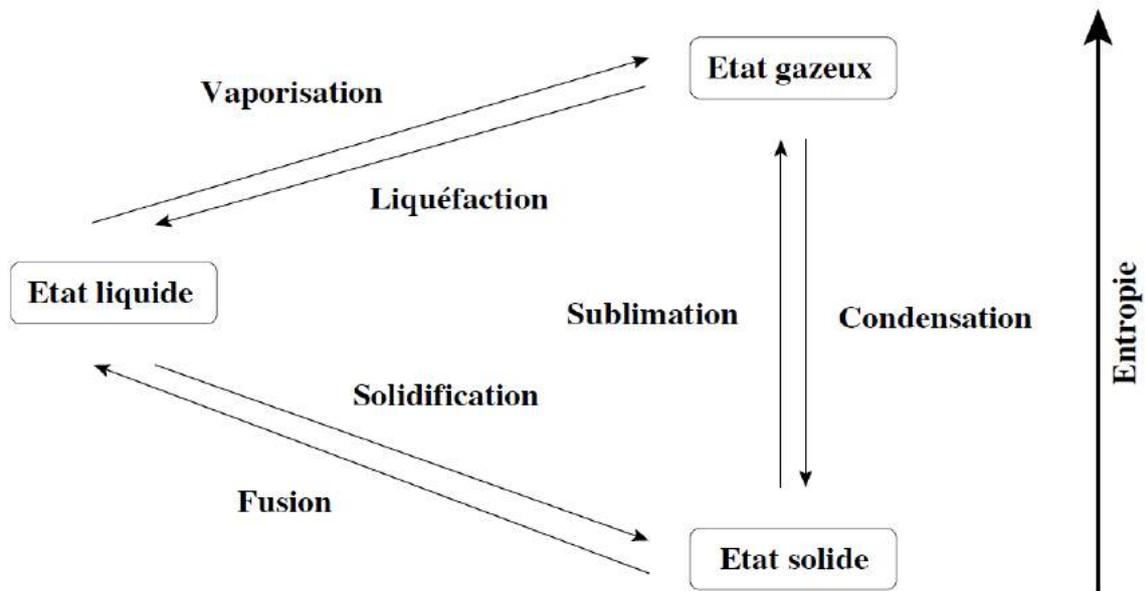
Manip : faire la manip de la recalescence du fer. p 472 Bellier



Trois expériences permettent de mettre en évidence les transitions de phases. La première est le chauffage d'une masse d'eau dans un récipient : on constate qu'à pression atmosphérique  $p \approx 1$  bar, l'eau se transforme en vapeur (ou gaz) vers 373K, laquelle se condense sur une paroi froide placée au-dessus du récipient. Les molécules d'eau liquide reçoivent de l'énergie qui leur permet de s'agiter de plus en plus, au point de vaincre les forces intermoléculaires qui assuraient les liaisons entre elles. Certaines se libèrent en franchissant la surface de séparation du liquide et se dispersent ; le liquide se vaporise et passe à l'état gazeux. En raison de la pression qu'exerce le gaz environnant sur la surface du liquide, la libération des molécules exige une température suffisante, dans ce cas de l'ordre de 373K. Si cette pression devient plus faible, la vaporisation se produit à une température plus basse.

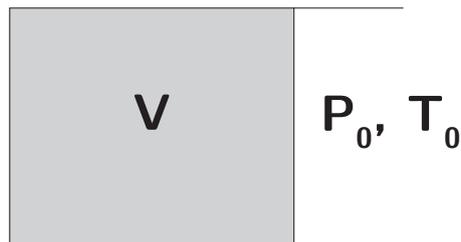
Une seconde expérience est la fusion de l'étain : en chauffant dans une coupelle de l'étain solide jusqu'à une température de 505K, on constate que ce métal fond et se transforme complètement en liquide. On mesure cette température à l'aide d'un thermocouple. Les ions régulièrement disposés dans le cristal métallique vibrent de plus en plus quand on leur fournit de l'énergie par échange thermique. L'ensemble finit par se disloquer : c'est la fusion du cristal. Dans la transition solide-liquide, il y a aussi croissance de l'entropie.

Une troisième expérience permet de mettre en évidence la transition du fer pur de l'état  $\alpha$  où le réseau est cubique centré, à l'état  $\gamma$  où le réseau est cubique à faces centrées. On fait passer un courant à travers un fil de fer de telle sorte que le fil se déforme et devienne rouge ( $T > 1200K$ ). ; en supprimant le courant le fil se refroidit et la masse qu'on a accrochée en son milieu remonte. Au cours de la remontée, on constate que la contraction du fil marque un temps d'arrêt lorsque la température est 1179K. Cette transition est appelée la recalescence du fer. Le changement de structure se traduit par une variation spatiale des ions et donc par une variation d'entropie.



**Rq** : Variance notion à savoir au cas où. page 256 du Perez.

## b) Condition d'évolution et d'équilibre



Supposons un système qui n'échange de la chaleur qu'avec une seule source de chaleur (un thermostat) dont la température est  $T_0$  et constante (monotherme); qui échange du travail avec un réservoir de volume dont la pression  $P_0$  est constante (monobare) et qui n'échange pas d'autre forme de travail avec l'extérieur.

Les seules évolutions possibles d'un état (i) vers un état (f) sont celles qui vérifient l'inégalité de Clausius :

$$(i) \rightarrow (f) \text{ est possible si } \Delta S = S(f) - S(i) \geq Q/T_0$$

Le premier principe nous donne  $U(f) - U(i) = Q + W^{ext}$  où  $W^{ext} = -P_0[V(f) - V(i)]$  désigne le travail échangé par le système avec le réservoir. Alors par conséquent :

$$[U(f) - T_0S(f) + P_0V(f)] - [U(i) - T_0S(i) + P_0V(i)] = 0 \quad (1)$$

On définit alors la nouvelle fonction  $G^* = U - T_0S + P_0V$ ,  $G^*$  caractérise le système dans son environnement. Le nouveau critère d'évolution est :

$$(i) \rightarrow (f) \text{ est possible si } \Delta G^* = G^*(f) - G^*(i) \geq 0$$

La condition nécessaire d'équilibre est donc  $dG^* = 0$ . Pour un système en contact avec un thermostat n'échangeant de travail qu'avec un réservoir de volume, le potentiel thermodynamique est donc la fonction  $G^*$ .

Considérons maintenant un fluide monophasé contenu dans un récipient fermé par un piston sans masse, mobile et sans frottement ; le fluide est en contact thermique avec l'extérieur dont la température est constante, égale à  $T_0$ . L'évolution est également monobare  $P_0$ . La condition d'équilibre est :

$$dG^* = 0 = dU - T_0 dS + P_0 dV \quad (2)$$

On sait que  $dU = TdS - PdV = TdS - PdV$  et donc :

$$dG^* = (T - T_0)dS - (P - P_0)dV = 0 \quad (3)$$

Les conditions d'équilibre s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial G^*}{\partial S} \right)_V = T - T_0 = 0 \\ \left( \frac{\partial G^*}{\partial V} \right)_S = -(P - P_0) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Soit  $T_0 = T$  et  $P = P_0$ . On peut donc généraliser ces conditions d'équilibre que dans les cas où il est possible de définir la pression du système à l'équilibre. À l'équilibre la fonction  $G^*$  s'identifie avec l'enthalpie libre  $G$  du système :  $G^* = G(T_0, P_0)$ .

Finalement pour un système "de pression uniforme" en contact avec un thermostat de température  $T_0$  et un réservoir de volume  $P_0$ , n'échangeant pas de travail utile avec l'extérieur, l'équilibre est atteint lorsque :

- $T = T_0$
- $P = P_0$
- $G$  est minimale par rapport à toutes les variables internes indépendantes du système :

<b>Condition nécessaire d'équilibre : <math>dG = 0</math></b>
---

$G$  apparaît le paramètre le plus judicieux pour pouvoir étudier le phénomène de transition de phase.

## 2. Étude thermodynamique d'un corps pur sous deux phases

En première année de prépa a été abordée l'étude descriptive des changements d'état : diagrammes d'équilibre en coordonnée  $(P, T)$ ,  $(P, V)$  et  $(T, S)$  ; notions d'entropie de changement d'état et d'enthalpie de changement d'état (appelée encore chaleur latente de changement d'état).

Nous allons nous limiter ici à l'étude de corps pur, hypothèse forte, car dans la réalité ce n'est jamais le cas (par exemple, le séchage du linge met en jeu un mélange d'air et de vapeur d'eau dans la phase gazeuse). Toutefois, les résultats que nous allons voir sont facilement transposables au cas des mélanges.

## a) Potentiel thermodynamique

Soit un corps pur de masse  $m$  sous deux phases 1 et 2 : la masse de la phase 1 est notée  $m_1$  et celle de la phase 2 est notée  $m_2$ . Les variables  $m_1$  et  $m_2$  ne sont pas indépendantes entre elles : la conservation de la masse impose :

$$m_1 + m_2 = m \quad (5)$$

Par conséquent on peut décrire la taille et la composition du système par la donnée de  $m$  (paramètre de contrôle) et de  $m_1$  (variable interne), qui sont toutes deux des paramètres extensifs.

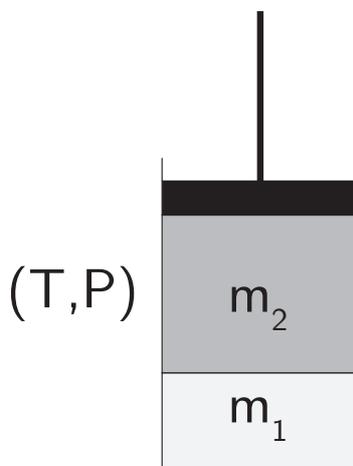
Il peut être commode de remplacer la variable extensive  $m_1$  par une variable interne intensive équivalente. On définit pour cela le titre massique  $x_1$  de la phase 1 tel que  $x_1 = m_1/m$  et la même chose pour la phase 2 en prenant  $x_2$ .

La conservation de la masse impose évidemment la relation

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (6)$$

Les variables  $x_1$  et  $x_2$  ne sont pas indépendantes. Par conséquent, on peut également décrire la taille et la composition du système par la donnée de  $m$  (paramètre de contrôle extensif) et  $x_1$  (paramètre de contrôle intensif).

Nous faisons l'hypothèse que le système précédemment décrit est enfermé dans une enceinte dont les parois sont dia-thermes et fermée par un piston sans pouvant coulisser librement.



Le système est donc en contact avec l'extérieur dont la température est fixée, égale à  $T$ , et dont la pression, également fixée, vaut  $P$ .

Les paramètres de contrôle sont donc  $m$ ,  $T$  et  $P$  et la variable interne est  $x_1$ .

Nous supposons qu'à l'équilibre thermodynamique, la pression est uniforme dans tout le système étudié. Le potentiel thermodynamique adapté est donc l'enthalpie libre.

Soit  $g_1(T, P)$  l'enthalpie libre massique de la phase 1 pure et  $g_2(T, P)$  l'enthalpie libre massique de la phase 2 pure.

L'enthalpie libre du système diphasé étant une fonction extensive, celle-ci s'écrit donc :

$$\begin{aligned} G &= m_1 g_1(T, P) + m_2 g_2(T, P) = m_1 g_1(T, P) + (m - m_1) g_2(T, P) \\ G &= m [x_1 g_1(T, P) + (1 - x_1) g_2(T, P)] \end{aligned} \quad (7)$$

Le potentiel thermodynamique est l'enthalpie libre du système qui ne dépend que de la variable interne  $x_1$  (outre les trois paramètres de contrôle  $T, P, m$ ) :

$$G(T, P, m; x_1) = m[x_1 g_1(T, P) + (1 - x_1) g_2(T, P)] \quad (8)$$

## b) Condition d'équilibre

### Condition d'équilibre entre phases

À l'équilibre thermodynamique, le potentiel thermodynamique  $G(T, P, m; x_1)$  est minimal par rapport à la variable interne  $x_1$  :

$$\left( \frac{\partial G}{\partial x_1} \right)_{T, P, m} = m[g_1(T, P) - g_2(T, P)] = 0 \quad (9)$$

La condition d'équilibre d'un corps pur sous deux phase est donnée par l'égalité des enthalpies libres massiques des deux phases pures :

$$g_1(T, P) = g_2(T, P) \quad (10)$$

Il en découle plusieurs conséquences :

1. À l'équilibre entre phases, la température et la pression en sont pas indépendantes puisqu'elles vérifient la relation  $[g_1 - g_2](T, P) = 0$ . Par conséquent,  $P_{eq} = \Pi(T)$ . Cela justifie a posteriori l'existence d'un diagramme d'état en coordonnées  $(P, T)$ , où les domaines de stabilité de chaque phase sont délimités par les courbes  $P_{eq} = \Pi(T)$ . Au point triple, par définition, il y a coexistence des trois phases en équilibre :

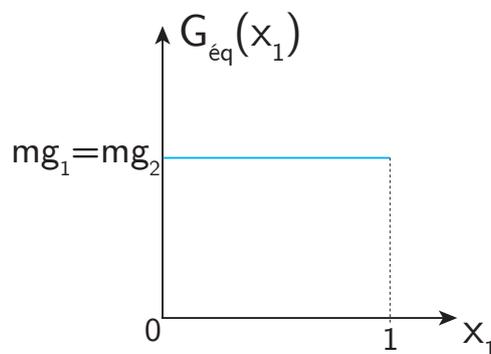
$$g_{sol}(T, P) = g_{liq}(T, P) = g_{vap}(T, P) \quad (11)$$

ce qui implique l'unicité du couple  $(T_T, \Pi_T)$  pour lequel cette coexistence est possible.

2. Nous constatons que la condition d'équilibre entre phases ne fait pas intervenir la variable  $x_1$ , c'est à dire la composition du système diphasé. En effet, à l'équilibre entre phases, l'enthalpie libre du système s'écrit :

$$\begin{aligned} G(T, P, m; x_1) &= m[x_1 g_1(T, P) + (1 - x_1) g_1(T, P)] \\ G(T, P, m; x_1) &= m g_1(T, P) = m g_2(T, P) \end{aligned} \quad (12)$$

Traçons la courbe représentative des variations de  $G$  en fonction de  $x_1$  :



À l'équilibre entre phases, l'enthalpie libre est indépendante de  $x_1$  : on dit que l'équilibre est "indifférent". Par conséquent, un point sur une courbe d'équilibre entre phases  $P_{eq} = \Pi(T)$  du diagramme  $(P, T)$  correspond à une infinité d'états physiques

différents (puisque  $x_1$  peut varier continûment entre 0 et 1 sans que l'équilibre entre phases soit rompu).

De la même façon, le point triple correspond en fait à une infinité d'états physiques qui diffèrent par les proportions des trois phases en présence. Par conséquent, un changement d'état est une suite d'états d'équilibre infiniment proches ( $x_1$  variant continûment de 0 à 1) constituant une transformation isotherme et isobare : à tout moment il y a donc équilibre du système avec l'extérieur.

**Un changement d'état est une transformation réversible réelle.**

### Condition d'évolution d'un corps pur diphasé à $T$ et $P$ fixées

Nous supposons ici que l'équilibre entre phases n'est pas réalisé ; en d'autres termes, la température  $T$  et la pression  $P$  imposées sont telles que :

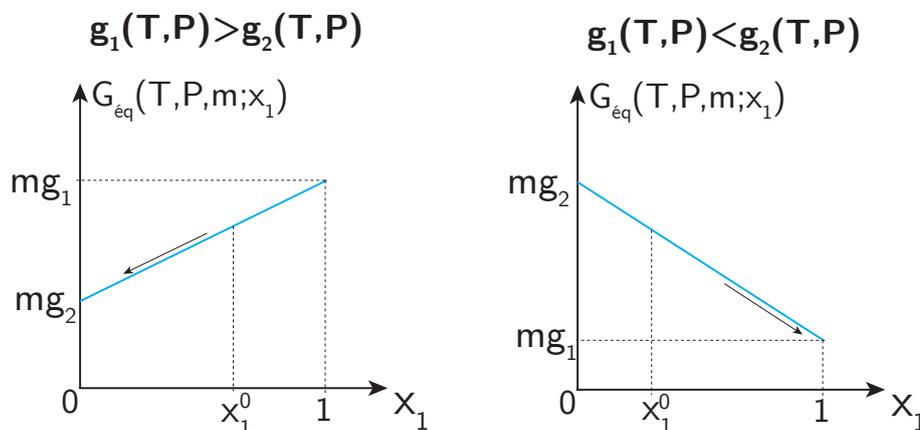
$$g_1(T, P) \neq g_2(T, P) \quad (13)$$

Nous supposons que le système est initialement dans un état diphasé caractérisé par le titre initial de la phase 1 :  $x_1^0$ .

Écrivons l'enthalpie libre du système diphasé, qui rappelons-le est le bon potentiel thermodynamique puisque nous travaillons à  $T$  et  $P$  fixées :

$$G(T, P, m; x_1) = m[(g_1(T, P) - g_2(T, P))x_1 + g_2(T, P)] \quad (14)$$

Traçons la courbe représentative des variations de  $G(T, P, m; x_1)$  en fonction de  $x_1$ . Deux cas se présentent :



Dans les deux cas, l'état d'équilibre correspond au minimum de  $G(T, P, m; x_1)$  par rapport à la variable interne  $x_1$ .

Seule subsiste à l'équilibre thermodynamique la phase de plus faible enthalpie libre massique : si  $g_1 > g_2$ ,  $x_{1,eq} = 0$ , si  $g_1 < g_2$ ,  $x_{1,eq} = 1$ .

À  $T$  et  $P$  fixées, lorsque la condition d'équilibre entre phases n'est pas remplie, le système diphasé évolue dans le sens de la disparition de la phase de plus grande enthalpie libre massique : l'état d'équilibre thermodynamique n'est pas un état d'équilibre entre phases.

## Cas de l'équilibre liquide-vapeur

Nous allons illustrer notre propos sur l'exemple liquide-vapeur. Considérons un point de la courbe d'équilibre liquide-vapeur :  $(T, \Pi(T))$  où  $\Pi(T)$  désigne la pression de vapeur saturante à la température  $T$ . Par définition de  $\Pi(T)$ , la condition d'équilibre entre phases est remplie :

$$g_\ell(T, \Pi(T)) = g_v(T, \Pi(T)) \quad (15)$$

À la même température  $T$ , faisons varier la pression de  $dP$  :

$$P = \Pi(T) + dP \quad (16)$$

Nous pouvons effectuer un DL de  $g_\ell$  et  $g_v$  à l'ordre un, au voisinage du point d'équilibre  $(T, \Pi(T))$  :

$$\begin{cases} g_\ell(T, P) = g_\ell(T, \Pi(T)) + dg_\ell \\ g_v(T, P) = g_v(T, \Pi(T)) + dg_v \end{cases} \quad (17)$$

avec  $\begin{cases} dg_\ell = -s_\ell dT + v_\ell dP = v_\ell dP \\ dg_v = -s_v dT + v_v dP = v_v dP \end{cases}$  puisque  $g_\ell(T, P)$  et  $g_v(T, P)$  sont des fonctions caractéristiques de l'unité de masse de chacun des deux phases. En substituant et en tenant compte de la condition d'équilibre entre phases au point  $(T, \Pi(T))$ , il vient :

$$g_\ell(T, P) - g_v(T, P) = (v_\ell - v_v)dP = (v_\ell - v_v)(P - \Pi(T)) \quad (18)$$

Comme le volume massique de la phase liquide est toujours inférieur à celui de la phase vapeur, on en déduit que  $P - \Pi(T)$  est toujours du signe de  $g_v(T, P) - g_\ell(T, P)$ .

Ainsi on peut dire que :

- Si  $P > \Pi(T)$ , l'évolution du système se fait dans le sens de la liquéfaction ;
- Si  $P < \Pi(T)$ , l'évolution du système se fait dans le sens de la vaporisation.

Il s'agit là d'un fait bien connu que nous venons de retrouver par un raisonnement purement thermodynamique.

## c) Formule de Clapeyron

**MANIP : Bouillant de Franklin pour calculer la chaleur latente de l'eau.**

La notion d'enthalpie massique de changement d'état (encore appelée "chaleur latente de changement d'état") a été introduite en 1er année de prépa ; par définition elle vaut :

$$L_{1 \rightarrow 2}(T) = h_2(T) - h_1(T) \quad (19)$$

où  $h_1(T)$  et  $h_2(T)$  désignent les enthalpies massiques du corps pur dans chacune des phases 1 et 2 au point d'équilibre entre phases  $(T, \Pi(t))$ . De même, l'entropie massique de changement d'état a été définie en 1er année :

$$s_{1 \rightarrow 2}(T) = s_2(T) - s_1(T) \quad (20)$$

Elle est liée à l'enthalpie massique de changement d'état par la relation :

$$s_{1 \rightarrow 2}(T) = \frac{L_{1 \rightarrow 2}(T)}{T} \quad (21)$$

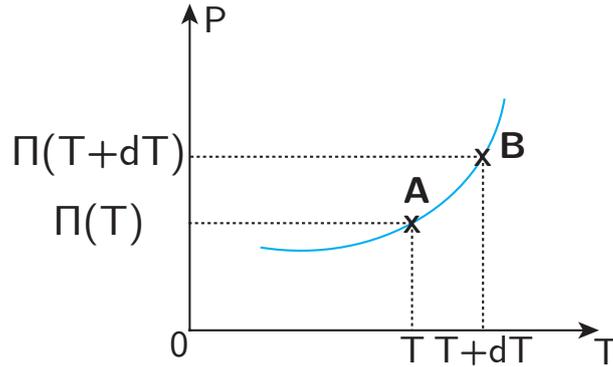
Nous allons montrer ici que la forme de la courbe d'équilibre  $\Pi(T)$  entre les phases 1 et 2 est liée à  $L_{1 \rightarrow 2}(T)$  : c'est l'objet de la formule de Clapeyron. Plaçons nous en un

point  $A$  de coordonnées  $(T, \Pi(T))$  de la courbe d'équilibre entre les phases 1 et 2 dans le diagramme  $(P, T)$ . En ce point, il y a équilibre entre phases, donc :

$$g_1(T, \Pi(T)) = g_2(T, \Pi(T)) \quad (22)$$

Considérons un point  $B$  situé sur la courbe d'équilibre, au voisinage du point  $A$  :  $B$  a pour coordonnées  $(T + dT, \Pi(T + dT))$ .  $B$  correspond également à un état d'équilibre entre phases ; par conséquent :

$$g_1(T + dT, \Pi(T + dT)) = g_2(T + dT, \Pi(T + dT)) \quad (23)$$



Développons les enthalpies libres massiques au point  $B$  à l'ordre un par rapport à l'accroissement  $dT$  :

$$\begin{cases} g_1(T + dT, \Pi(T + dT)) = g_1(T, \Pi(T)) + dT \left[ \left( \frac{\partial g_1}{\partial T} \right)_P + \left( \frac{\partial g_1}{\partial P} \right)_T \left( \frac{\partial \Pi}{\partial T} \right) \right] \\ g_2(T + dT, \Pi(T + dT)) = g_2(T, \Pi(T)) + dT \left[ \left( \frac{\partial g_2}{\partial T} \right)_P + \left( \frac{\partial g_2}{\partial P} \right)_T \left( \frac{\partial \Pi}{\partial T} \right) \right] \end{cases} \quad (24)$$

L'équilibre entre phases dans les états  $A$  et  $B$  implique :

$$\left( \frac{\partial g_1}{\partial T} \right)_P + \left( \frac{\partial g_1}{\partial P} \right)_T \left( \frac{\partial \Pi}{\partial T} \right) = \left( \frac{\partial g_2}{\partial T} \right)_P + \left( \frac{\partial g_2}{\partial P} \right)_T \left( \frac{\partial \Pi}{\partial T} \right) \quad (25)$$

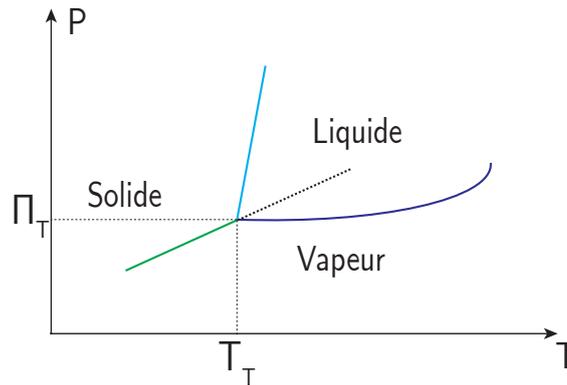
De plus, les identités thermodynamiques relatives à  $g_1(T, P)$  et  $g_2(T, P)$  nous donnent :

$$\left( \frac{\partial g_i}{\partial T} \right)_P = -s_i \text{ et } \left( \frac{\partial g_i}{\partial P} \right)_T = v_i$$

où  $i = 1$  ou  $2$ ,  $s_i$  et  $v_i$  désignant les entropies massiques et volumes massiques de chaque phase. On en déduit alors la relation de Clapeyron :

$$\begin{aligned} -s_1 + v_1 \frac{d\Pi}{dT} &= -s_2 + v_2 \frac{d\Pi}{dT} \\ \Leftrightarrow \frac{d\Pi}{dT} &= \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} = \frac{L_{1 \rightarrow 2}}{T(v_2 - v_1)} \end{aligned} \quad (26)$$

## d) Conséquences sur le diagramme d'état (P,T)



### Signes des pentes des courbes d'équilibre

Puisque l'on a toujours les inégalités  $v_{vap} > v_{liq}$  et  $v_{vap} > v_{sol}$ , ainsi que  $s_{vap} > s_{liq}$  et  $s_{vap} > s_{sol}$ , la phase vapeur étant une phase toujours moins ordonnée qu'une phase condensée, les pentes des courbes d'équilibre solide-vapeur et liquide-vapeur sont toujours positives. D'autre part, une phase solide cristalline est toujours plus ordonnée qu'une phase liquide, donc  $v_{liq} > v_{sol}$ , le plus souvent. On en déduit donc de même que la pente de la courbe d'équilibre liquide-solide est elle aussi le plus souvent positive.

Toutefois, cette loi n'est pas absolument générale : l'eau en est un contre exemple célèbre. En effet l'eau solide est moins dense que l'eau liquide (les glaçons flottent dans le pastis !). Par conséquent, la pente de la courbe d'équilibre liquide-solide est négative dans le cas de l'eau. Enfin notons que l'on a le plus souvent :

$$(v_v - v_\ell) \approx (v_v - v_s) \approx v_v \quad \text{et} \quad |v_\ell - v_s| \ll v_v \quad (27)$$

ce qui explique que la pente de la courbe d'équilibre liquide-solide est en générale beaucoup plus grande que celles des deux autres d'équilibre entre phases.

### Point critique

Au point critique, les deux phases vapeur et liquide deviennent identiques ; par conséquent, au point critique :  $s_{vap} = s_{liq}$  et  $v_{vap} = v_{liq}$ .

D'après la formule de Clapeyron, la pente  $d\Pi/dT(T_C)$  de la courbe d'équilibre liquide-vapeur peut rester finie au point critique. On peut se poser la question de savoir qu'il existe pareillement un point critique les deux autres courbes d'équilibre. La réponse est non, car s'il est envisageable que le volume massique du solide tende vers celui du liquide ou du gaz, il est en revanche impossible d'avoir les égalités  $s_{vap} = s_{sol}$  et  $s_{liq} = s_{sol}$  : un solide cristallin est caractérisé par des propriétés de symétrie qui sont présentes ou absentes, mais ne peuvent en aucun cas apparaître graduellement.

Autrement dit, la différence entre un liquide et un gaz est plutôt d'ordre quantitatif (densité) alors que la différence entre un liquide et un solide cristallin est essentiellement d'ordre qualitatif (symétrie).

Comme  $s_{liq} \neq s_{sol}$ , la pente de la courbe d'équilibre liquide-solide,  $d\Pi/dT$  serait infinie à une température pour laquelle les phases solide et liquide seraient d'égale densité.

### Point triple

Comme  $L_{1 \rightarrow 2}$  est une enthalpie de changement de phase, il est clair qu'au point triple :

$$L_{sol \rightarrow vap}(T_T) = L_{sol \rightarrow liq}(T_T) + L_{liq \rightarrow vap}(T_T) \quad (28)$$

En écrivant la formule de Clapeyron pour chacune des trois courbes d'équilibre au point triple :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{sol \rightarrow vap}(T_T) = T_T(v_v - v_s) \left( \frac{d\Pi}{dT} \right)_{sol \leftrightarrow vap} \approx T_T v_v \left( \frac{d\Pi}{dT} \right)_{sol \leftrightarrow vap} \\ L_{liq \rightarrow vap}(T_T) = T_T(v_v - v_\ell) \left( \frac{d\Pi}{dT} \right)_{liq \leftrightarrow vap} \approx T_T v_v \left( \frac{d\Pi}{dT} \right)_{liq \leftrightarrow vap} \\ L_{sol \rightarrow liq}(T_T) = T_T(v_\ell - v_s) \left( \frac{d\Pi}{dT} \right)_{sol \leftrightarrow liq} \end{array} \right. \quad (29)$$

en négligeant le volume massique des phases liquide et solide devant celui de la phase vapeur.

Puisque  $L_{sol \rightarrow liq}(T_T) > 0$ ,  $L_{sol \rightarrow vap}(T_T) > L_{liq \rightarrow vap}(T_T)$  et par conséquent au point triple on a :

$$\left( \frac{d\Pi}{dT} \right)_{sol \leftrightarrow vap} > \left( \frac{d\Pi}{dT} \right)_{liq \leftrightarrow vap} \quad (30)$$

### 3. Classification des transitions de phases

#### a) Explications

Le physicien allemand Paul Ehrenfest a proposé en 1933 une classification des transitions de phase fondée sur les propriétés de continuité de l'enthalpie libre massique et de ses dérivées à la transition de phase :

- Pour une transition du premier ordre, l'équilibre entre phases se traduit par l'égalité des enthalpies libres massiques  $g_1$  et  $g_2$  des deux phases pures, alors que les entropies et volumes massiques qui sont les dérivées premières de  $g_1$  et  $g_2$  sont au contraire discontinus à la transition.
- Pour une transition du second ordre, à l'équilibre entre phases, on a non seulement égalité des enthalpies libres massiques  $g_1$  et  $g_2$  des phases pures, mais aussi égalité de leurs entropies massiques  $s_1$  et  $s_2$  et de leurs volumes massiques  $v_1$  et  $v_2$  (c'est à dire des dérivées premières de  $g_1$  et  $g_2$ ). En revanche les dérivées secondes de  $g_1$  et  $g_2$  (c'est à dire les capacités thermiques, compressibilités et coeff de dilatations) sont discontinues.

Pour les transitions d'ordre 1 on peut utiliser la relation de Clapeyron pour décrire notre système. En revanche pour les transitions d'ordre 2, étant donné qu'il y a égalité du volume et de l'entropie massique pour deux points voisins de la courbe de saturation, l'équation  $L_{1 \rightarrow 2} = T(s_2 - s_1)$  permet de caractériser de telles transformation par leur absence de chaleur latente. La formule de Clapeyron est alors remplacée par les formules d'Ehrenfest.

#### b) Relations d'Ehrenfest

Comme on l'a fait toute à l'heure pour la formule de Clapeyron, considérons deux points  $A(\Pi(T), T)$  et  $B(\Pi(T + dT), T + dT)$  très proches, se trouvant tous les deux sur la courbe d'équilibre entre phase.

En  $A$  on a équilibre entre phases, donc

$$g_1(\Pi(T), T) = g_2(\Pi(T), T) \quad (31)$$

mais aussi, la transition étant du seconde ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1(\Pi(T), T) = s_2(\Pi(T), T) \\ v_1(\Pi(T), T) = v_2(\Pi(T), T) \end{array} \right. \quad (32)$$

De même en  $B$  :

$$g_1(\Pi(T + dT), T + dT) = g_2(\Pi(T + dT), T + dT) \quad (33)$$

et :

$$\begin{cases} s_1(\Pi(T + dT), T + dT) = s_2(\Pi(T + dT), T + dT) \\ v_1(\Pi(T + dT), T + dT) = v_2(\Pi(T + dT), T + dT) \end{cases} \quad (34)$$

Considérons l'égalité des entropies massiques en  $A$  et  $B$  :

$$s_1(\Pi(T + dT), T + dT) = s_2(\Pi(T + dT), T + dT) \quad (35)$$

En effectuant un DL à l'ordre 1 par rapport à  $T$  on obtient :

$$\begin{aligned} s_1(\Pi(T), T) + \left(\frac{\partial s_1}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial s_1}{\partial T}\right)_T \left(\frac{d\Pi}{dT}\right) dT \\ = s_2(\Pi(T), T) + \left(\frac{\partial s_2}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial s_2}{\partial P}\right)_T \left(\frac{d\Pi}{dT}\right) dT \end{aligned} \quad (36)$$

Or on sait que  $\left(\frac{\partial s_i}{\partial T}\right)_P = \frac{C_{P,i}}{T}$ , où  $C_{P,i}$  désigne la capacité thermique massique à pression constante de la phase ( $i$ ). Pour déterminer  $\left(\frac{\partial s_i}{\partial T}\right)_P = \frac{C_{P,i}}{T}$ , écrivons l'identité thermodynamique relative à l'enthalpie libre massique de la phase ( $i$ ) :  $dg_i = -s_i dT + v_i dP$ .

On en déduit :

$$\left(\frac{\partial s_i}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial v_i}{\partial T}\right)_P = -\alpha_i v \quad (37)$$

où  $\alpha_i$  désigne le coefficient de dilatation isobare de la phase ( $i$ ) et  $v$  le volume massique commun aux deux phases en équilibre (transition du second ordre). Finalement on obtient **la première relation d'Ehrenfest** :

$$\frac{d\Pi}{dT} = -\frac{\left(\frac{\partial s_2}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial s_1}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial s_2}{\partial P}\right)_T - \left(\frac{\partial s_1}{\partial P}\right)_T} = \frac{1}{vT} \frac{C_{P,2} - C_{P,1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \quad (38)$$

Considérons l'égalité des volumes massiques en  $A$  et en  $B$  :

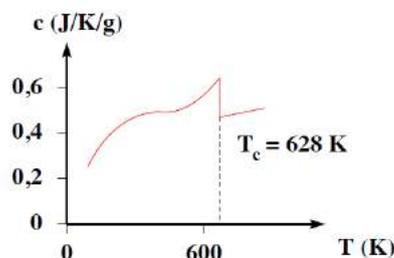
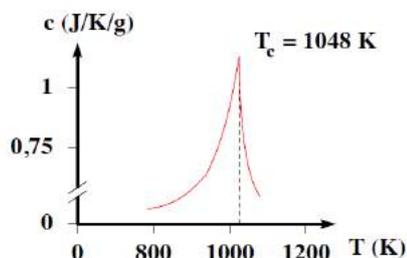
$$\begin{aligned} v_1(T + dT, \Pi(T + dT)) &= v_2(T + dT, \Pi(T + dT)) \\ \Leftrightarrow v_1(T, \Pi(T)) + \left(\frac{\partial v_1}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial v_1}{\partial T}\right)_T \left(\frac{d\Pi}{dT}\right) dT \\ &= v_2(\Pi(T), T) + \left(\frac{\partial v_2}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial v_2}{\partial P}\right)_T \left(\frac{d\Pi}{dT}\right) dT \end{aligned} \quad (39)$$

On sait que  $\left(\frac{\partial v_i}{\partial T}\right)_P = \alpha_i v_i = \alpha v_i$ ,  $v$  désignant le volume massique au deux phases en équilibre, et  $\left(\frac{\partial v_i}{\partial P}\right)_T = -\chi_{T,i} v_i = -\chi_{T,i} v_s$ ,  $\chi_{T,i}$  étant la compressibilité isotherme de la phase ( $i$ ). Par conséquent il vient **la deuxième relation d'Ehrenfest** :

$$\frac{d\Pi}{dT} = -\frac{\left(\frac{\partial v_2}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial v_1}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial v_2}{\partial P}\right)_T - \left(\frac{\partial v_1}{\partial P}\right)_T} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\chi_{T,2} - \chi_{T,1}} \quad (40)$$

## Exemple de cas d'ordre élevé

Une substance ferromagnétique perd son aimantation spontanée dès qu'elle dépasse la température de Curie. A titre d'exemple, la capacité thermique du fer est représentée en fonction de la température sur la figure. Comme elle est continue et que seule sa dérivée est discontinue, cette transition est une transition de 3eme espèce. En revanche, la capacité thermique du nickel est discontinue, ce qui est le signe d'une transition de 2ème espèce.



## Conclusion

On a pu voir dans cette leçon comment caractériser la transition de phase : à travers le potentiel thermodynamique  $G$ . On a vu que l'on pouvait classer les transitions selon leur ordre. On a vu quelques présentations de manips au début concernant les transitions d'ordre un qui est la vaporisation de l'eau. Les transitions d'ordre supérieur concerne la transition conducteur-supraconducteur ou la transition ferromagnétique-paramagnétique par exemple.

**Rq :** Voir page 267 Perez

**Rq :** Manip qualitative de lévitation aimant : On verse de l'azote liquide pour faire baisser la température : on a une lévitation de l'aimant. A partir d'une certaine température le matériaux génère un champ magnétique qui s'oppose au champ de l'aimant. Il faut prendre un supraconducteur. (effet Meissner).

**Rq :** Manip point triple de l'azote : on place de l'azote liquide dans un bêcher, on place un thermocouple Pt100 à l'intérieur. On met le tout dans une cloche sous vide pour faire diminuer la pression à l'aide d'une pompe. Ainsi on va se rapprocher du point triple (azote  $T=63$ K et  $P=0,126$  bar). On peut voir au cours du temps l'apparition de la solidification de l'azote à la surface du bêcher, puis il y a une dépression à l'intérieur du bêcher et une explosion.

**Rq :** Connaitre les autres types de représentation graphique ! page 300 du Diu.

**Rq :** Résolution de la nucléation homogène : page 616 du Diu.

# MANIP : Calcul de la chaleur latente

Voir page 476 du Bellier

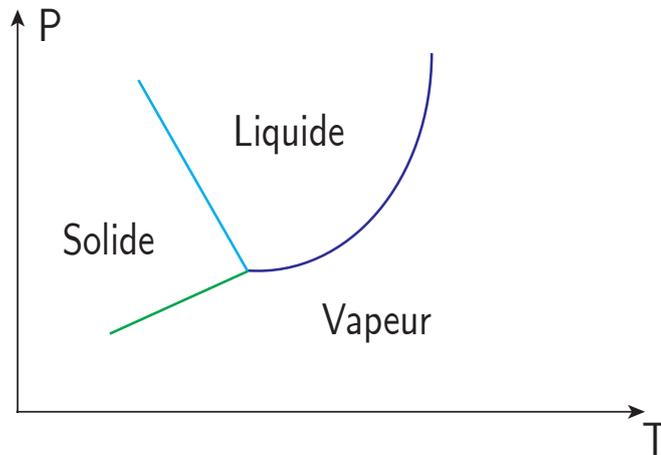
On sait que :

$$L_{1 \rightarrow 2} = \frac{dP}{dT} T (v_2 - v_1) \quad (41)$$

avec  $v$  le volume molaire. On va se "balader" sur la courbe de coexistence entre liquide (1) et vapeur (2) pour le cas de l'eau. Pour l'eau on a  $v_2 \gg v_1$ .

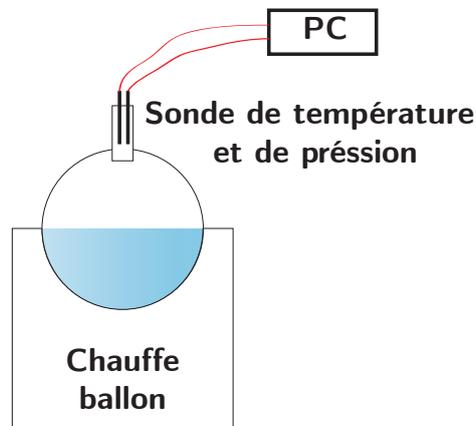
Pour un gaz parfait on a  $v_2 = v_G = RT/P$  donc :

$$L_{1 \rightarrow 2} = \frac{RT^2}{M} \frac{1}{P} \frac{dP}{dT} = -\frac{R}{M} \frac{d \ln(P)}{d(1/T)} \quad (42)$$



Pour procéder à la manip on prend un ballon bicol rempli d'eau et auquel on a rajouté des pierres ponce pour forcer/faciliter la nucléation de l'eau.

On chauffe notre ballon pendant 15/20 minutes pour chasser l'ai présent dans le ballon. Ensuite on place le bouchon sur le ballon (sur le deuxième col) pour le rendre hermétique. Puis on attend 20 minutes et on abaisse le chauffe ballon pour qu'il n'y est plus de chauffage et en même temps on lance l'acquisition. On va pourvoir avoir  $P$  et  $T$  au cours du temps (pendant 15 minutes). On prend un point toute les 4 secondes.



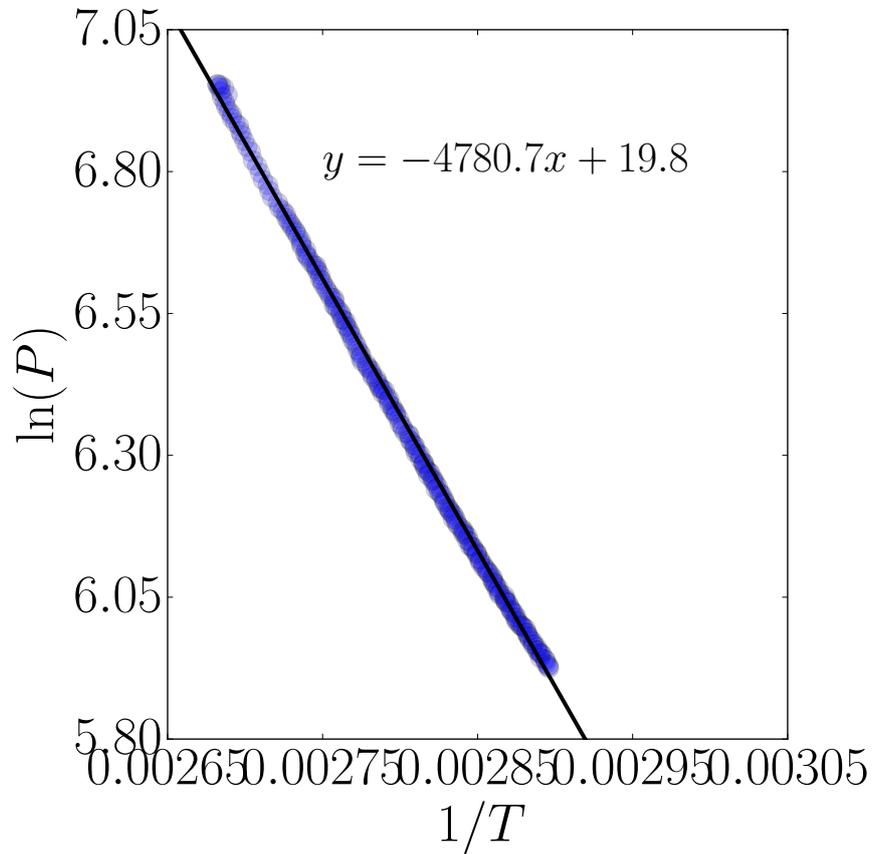
Il suffit ensuite de tracer  $\ln(P)$  en fonction de  $1/T$  :

$$\frac{\ln(P)}{d(1/T)} = \frac{L}{R} M \quad (43)$$

avec  $R$  la constante des gaz parfaites et  $M$  la masse molaire. On trouve dans notre cas  $\frac{L}{R}M = 4798,75$  SI. D'où :

$$L_{1 \rightarrow 2} = 2257 \text{ kJ.kg}^{-1} \quad (44)$$

La valeur tabulé est 2242 kJ/kg : donc on a une bonne estimation.



On peut calculer une erreur en fonction de l'écart type de la droite.

# L.P. 18 - Phénomène de transport

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Thermodynamique
- Electrocinétique

## Bibliographie

- Tout en un PC, Sanz, *Dunod*
- Les 1001 questions en physique PC, Garing, *Ellipse*
- Thermodynamique, J-P Perez, *Dunod*
- H-prépa thermodynamique PC-PSI, Brébec, *Hachette*
- Thermodynamique, Diu, *Hermann*
- Dictionnaire Thermo, Quaranta, *Pierron*
- Exercices et pbs de thermodynamique, Galecki, *Hermann*
- Hydrodynamique physique, Guyon, *EDP*
- BUP n.944, Toutain (2012)

**Leçon assez sympa. Il faut essayer de faire des manip jolies. Pour la deuxième partie on est pas obligé de re-détailler tous les calculs car c'est le même principe que ce qui a été développé dans la partie 1.**

## Introduction

Certaines propriétés macroscopiques, telles que la diffusion moléculaires, la diffusion thermique, la conductivité électrique et la viscosité, peuvent être attribuées au transport de grandeurs physiques par les molécules. Ainsi, la diffusion moléculaire est due au transport du nombre de particules par unité de volume, la diffusion thermique au transport de l'énergie, la conduction électrique au transport de la charge électrique et la viscosité d'un fluide au transport de la quantité de mouvement.

Dans cette leçon nous allons nous intéresser à deux types de diffusion : la diffusion thermique et la diffusion moléculaire. Pour ces deux cas nous allons étudier les équations régissant les phénomènes et une application illustrant ces concepts.

## 1. Diffusion thermique

### a) Mode de transport

Lorsque deux corps sont à des températures différentes, il y a un transfert thermique d'énergie du plus chaud vers le plus froid. On distingue trois modes de transfert thermique chacun régi par des lois bien spécifiques :

- La conduction (aussi appelée diffusion) est le transfert thermique qui intervient dans un milieu dont la température n'est pas homogène et qui ne s'accompagne pas, à l'échelle macroscopique, de mouvement de matière. Ce mode est prépondérant dans les solides.

Un exemple générique consiste à prendre une tige métallique dont l'extrémité gauche est encastrée dans un four maintenant une température donnée (à l'image d'un manche de casserole). La conduction explique l'augmentation, au cours du temps, de la température de la partie droite du manche métallique d'une casserole posée sur le feu.

Au niveau microscopique l'agitation thermique des molécules (vibrations sur place pour un solide) peut se transmettre (en sens inverse du gradient de température) plus ou moins bien suivant la nature plus ou moins conductrice du milieu. Les métaux sont de bons conducteurs électriques.

- La convection est un transfert accompagné d'un déplacement macroscopique de matière, et concerne donc les fluides (liquides et gaz) et pas les solides. Par exemple l'eau dans une casserole chauffée par le fond se met en mouvement spontanément. Les particules de fluide (volume mésoscopique) proches du fond sont échauffées, elles deviennent moins denses et s'élèvent vers la surface à cause de la poussée d'Archimède. Arrivées en surface, elles sont refroidies par un environnement plus froid, leur densité augmente et elles repartent vers le bas. Le bilan est un transfert thermique dans l'eau plus efficace que la simple conduction.

De même l'air échauffé au contact d'un radiateur de chauffage central va s'élever et entraîner un phénomène de convection permettant une homogénéisation plus rapide de la température dans la pièce.

On peut aussi réaliser une convection forcée en provoquant une circulation artificielle du fluide : soufflerie d'un sèche-cheveux, circulation de l'eau dans un circuit de chauffage central.

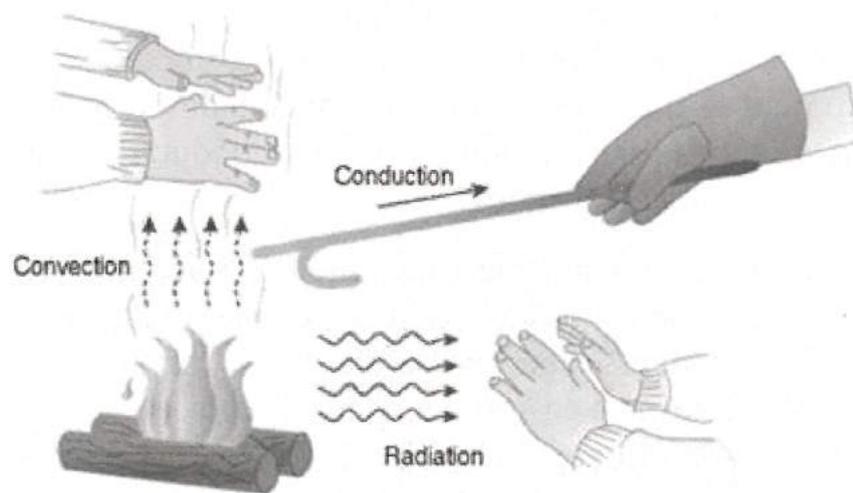
La convection forcée est un moyen efficace d'homogénéisation d'autres paramètres que la température, comme par exemple une concentration : en tournant son café avec une cuillère, on homogénéise, plus efficacement qu'avec la diffusion, la concentration en sucre.

- Ton corps émet un rayonnement électromagnétique qui transporte de l'énergie susceptible, entre autres, d'échauffer le corps qui la reçoit. Contrairement à la conduction et à la convection, le transfert par rayonnement peut s'effectuer dans le vide. Avec une modélisation, dite du corps noir, le spectre d'émission est continu et dépend de la température du corps ; il suit en particulier la loi de Wien qui relie la longueur d'onde  $\lambda_m$  pour laquelle le spectre émis est maximal et la température  $T$  par :

$$\lambda_m T \sim 3000 \mu m . K \quad (1)$$

Pour le corps humain à  $37^\circ C$ ,  $\lambda_m \approx 10 \mu m$  est dans l'infrarouge et on parle de rayonnement thermique.

Un exemple d'adaptation du rayonnement au corps qui le reçoit, en vue d'un échauffement efficace est le rayonnement micro-onde ( $\lambda \approx 12 cm$ ) des fours à micro-ondes, qui agit directement sur les molécules d'eau de l'aliment.



## b) Hypothèse de l'équilibre thermodynamique local

On a défini en classe de prépa trois échelles de longueur :

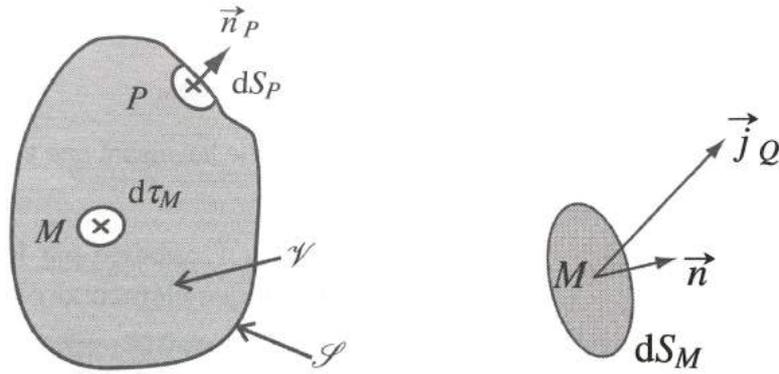
- l'échelle microscopique : la taille caractéristique  $\delta$  de cette échelle est la distance moyenne entre particules dans un liquide ou dans un solide et le libre parcours moyen des particules dans un gaz, les variations des grandeurs physiques comme la densité volumique de molécules sont gouvernées par le déplacement des molécules ;
- l'échelle macroscopique : la taille caractéristique de cette échelle est l'échelle de longueur  $L$  caractéristique du système étudié ;
- l'échelle mésoscopique : c'est une échelle intermédiaire dont la taille caractéristique est très grande devant le libre parcours moyen et très petite devant l'échelle de longueur caractéristique du système étudié, c'est à dire  $\delta \ll d \ll L$ .

Le système macroscopique  $\Sigma$  étudié n'est pas à l'équilibre thermodynamique. Une variable d'état quelconque  $Y$  (par exemple la pression, température, masse volumique) ne prend pas une valeur unique constante dans tout le système. Cependant, on peut diviser  $\Sigma$  en volume mésoscopiques pour lesquels  $Y$  a une valeur bien déterminée : il suffit que la taille des volumes mésoscopiques soit très inférieure à la distance caractéristique de variation de  $Y$ . Ceci permet de définir  $Y(M, t)$ , valeur locale de  $Y$  en un point  $M$  du système, à l'instant  $t$ .

C'est l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local vue dans le premier chapitre de thermodynamique selon laquelle ces volumes mésoscopiques sont quasiment des systèmes thermodynamiques à l'équilibre. Le système hors d'équilibre  $\Sigma$  peut être dès lors être décrit, à l'instant  $t$ , comme une réunion de systèmes thermodynamiques à l'équilibre. Cette hypothèse sera valable si le déséquilibre n'est pas trop fort.

**Rq** : Voir plus en détail Diu page 462.

### c) Flux thermique et vecteur densité



On considère un système thermodynamique  $\Sigma$  de volume  $V$  et délimité par une surface fermée  $S$ . Le flux thermique reçu de l'extérieur par le système  $\sigma$  à travers la surface élémentaire  $dS_P$  s'écrit :

$$d\Phi_{ext \rightarrow \Sigma} = \phi_{ext \rightarrow \Sigma}(P, t) dS_P \quad (2)$$

où  $\phi_{ext \rightarrow \Sigma}$  est le flux thermique surfacique qui s'exprime en  $W/m^2$ . Le flux thermique total reçu de l'extérieur par  $\Sigma$  est alors :

$$\Phi_{ext \rightarrow \Sigma}(t) = \iint_{P \in S} \phi_{ext \rightarrow \Sigma}(P, t) dS_P \quad (3)$$

La puissance qui traverse une surface élémentaire s'écrit comme le flux d'un vecteur, appelé vecteur densité de courant thermique et noté  $\vec{j}_Q$  à travers cette surface. Soit une surface élémentaire  $d\vec{S}_M = dS_M \vec{n}$  orientée par le choix d'un vecteur normal  $\vec{n}$  et située en un point  $M$ . Le transfert thermique élémentaire à travers  $d\vec{S}_M$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  s'écrit :

$$\delta Q = \vec{j}_Q(M, t) \cdot d\vec{S}_M dt \quad (4)$$

Cette équation définit le vecteur densité de courant thermique  $\vec{j}_Q$ . L'énergie se déplace dans la direction pointée par le vecteur  $\vec{j}_Q$ . Ainsi  $\delta Q$  est positif lorsque l'énergie traverse la surface dans le sens de  $\vec{n}$  et négatif dans le cas contraire. La définition (4) s'exprime de manière équivalente par :

$$\phi_{\vec{n}}(M, t) = \vec{j}_Q(M, t) \cdot \vec{n} \quad (5)$$

où  $\phi_{\vec{n}}(M, t)$  est le flux surfacique dans le sens du vecteur  $\vec{n}$ .

Soit une surface orientée  $S$ . Le flux thermique traversant  $S$  dans le sens vecteurs surface élémentaire  $d\vec{S}_P = dS_P \vec{n}_P$  est :

$$\Phi(t) = \iint_{P \in S} \phi_{\vec{n}_P}(P, t) \cdot dS_P = \iint_{P \in S} \vec{j}_Q(P, t) \cdot d\vec{S}_P \quad (6)$$

Le flux thermique à travers une surface est égal au flux du vecteur densité de courant thermique. Si la surface  $S$  est la surface fermée délimité le système  $\Sigma$ , le flux thermique reçu par  $\Sigma$  est :

$$\Phi_{ext \rightarrow \Sigma}(t) = - \iint_{P \in S} \phi_{\vec{n}_P}(P, t) \cdot dS_P = - \iint_{P \in S} \vec{j}_Q(P, t) \cdot d\vec{S}_P \quad (7)$$

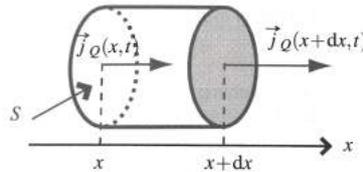
## Équation locale de bilan thermique

Considérons un milieu solide ou fluide au repos. Il n'y a pas de mouvement macroscopique de matière. On suppose que le matériau évolue à volume constante. Le milieu est caractérisé par sa masse volumique  $\rho$ , sa capacité thermique massique à volume constante  $c_v$  et sa conductivité thermique  $\lambda$ . Une éventuelle production d'énergie à l'intérieur du matériau est caractérisée par la densité volumique de puissance  $P_V(M, t)$ .

Le premier principe pour un échantillon de matériau s'écrit sous la forme :

$$dU = \delta Q + P_{prod}dt \quad (8)$$

car il ne reçoit pas de travail mécanique.



Soit un problème 1D : un cylindre de section  $S$ , de longueur  $dx$  et de volume  $d\tau = Sdx$ , noté  $\Sigma$  dans la suite, entre  $t$  et  $t + dt$ .  $dx$  choisi petit devant la distance caractéristique de variation de  $T(x, t)$  et  $dt$  petit devant sa durée caractéristique de variation.

La variation d'énergie interne du système  $\Sigma$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est :

$$dU = U(t + dt) - U(t) = \delta mc(T(x, t + dt) - T(x, t)) \quad (9)$$

où  $\delta m = \rho Sdx$  est la masse du système  $\Sigma$ . Au premier ordre en  $dxdt$  on a :

$$dU = \rho c S \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) dt dx \quad (10)$$

Le transfert thermique reçu par le système entre  $t$  et  $t + dt$  est :

$$\begin{aligned} \delta Q_x &= \vec{j}_Q(x, t) \cdot (S \vec{u}_x) dt = j_Q(x, t) S dt \\ \delta Q_{x+dx} &= \vec{j}_Q(x + dx, t) \cdot (-S \vec{u}_x) dt = -j_Q(x + dx, t) S dt \end{aligned} \quad (11)$$

On remarque le signe moins : il s'agit du transfert thermique reçu par le système. Le transfert thermique total reçu par  $\Sigma$  est :

$$\delta Q_{ext \rightarrow \Sigma} = \delta Q_x + \delta Q_{x+dx} = (j_Q(x, t) - j_Q(x + dx, t)) S dt \simeq -\frac{\partial j_Q(x, t)}{\partial x} S dx dt \quad (12)$$

L'énergie produite dans le cylindre est :  $P_{prod} = P_V(x, t) S dx$ . Le premier principe s'écrit finalement :

$$\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j_Q(x, t)}{\partial x} = P_V(x, t) \quad (13)$$

En absence de sources internes on a :

$$\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j_Q(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

Dans le cas tridimensionnel on a :

$$\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q(M, t) = 0 \quad (15)$$

On a trouvé l'équation de la conservation de l'énergie.

## d) Loi de Fourier

La loi de Fourier exprime une relation linéaire entre le vecteur densité de courant thermique et le gradient du champ de température  $T(M, t)$ . Il s'agit d'une loi phénoménologique.

$$\vec{j}_Q(M, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(M, t) \quad (16)$$

où  $\lambda$  est la conductivité thermique qui s'exprime en  $W/(m.K)$ . Le signe moins traduit le fait que l'énergie est transportée, conformément au second principe de la thermodynamique des régions chaudes vers les régions froides.

Cette loi n'est plus valable si : le gradient de température est trop fort, si le gradient thermique varie trop rapidement dans le temps, si la conductivité thermique dépend de la direction de l'espace.

La conductivité thermique traduit la capacité d'un matériaux à transférer le flux de chaleur.

	sec	hum.		Conductivité thermique des matériaux $\lambda$ en W/m.K
Matériaux isolants	0,028		polyuréthane	
	0,040		laine minérale, liège	
	0,058		vermiculite	
	0,065		perlite	
Bois et dérivés	0,17	0,19	feuillus durs	
	0,12	0,13	résineux	
Maçonneries	0,27	0,41	briques 700-1000 kg/m <sup>3</sup>	
	0,54	0,75	briques 1000-1600 kg/m <sup>3</sup>	
	0,90	1,1	briques 1600-2100 kg/m <sup>3</sup>	
Verre	1,0	1,0		
Béton armé	1,7	2,2		
Pierres naturelles	1,40	1,69	tuft, pierre tendre	
	2,91	3,49	granit, marbres	
Métaux		45	acier	
		203	aluminium	
		384	cuivre	

## e) Équation de diffusion

En combinant la loi de Fourier et l'équation traduisant le bilan énergétique on obtient une équation au dérivée partielle vérifiée par la température (en 1D) :

$$\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + P_V(x, t) \quad (17)$$

C'est l'équation de la diffusion thermique unidimensionnelle avec terme source.

Dans le cas d'une géométrie quelconque sachant que  $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}) = \Delta$  :

$$\rho c \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = \lambda \Delta T(M, t) + P_V(M, t) \quad (18)$$

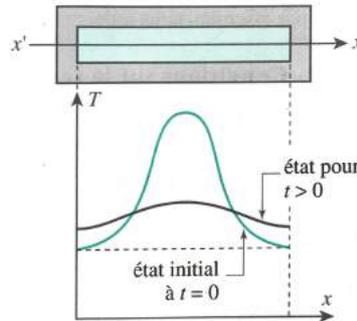
Dans le cas où il n'y a pas de terme source on a :

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T(M, t) \quad (19)$$

On appelle diffusivité thermique le coefficient  $a = \lambda/(\rho c)$  ( $m^2/s$ ).

Cette équation présente quelques particularité :

- **Unicité de la solution** : l'équation permet de déterminer l'évolution de la température  $T(M, t)$  en fonction des coordonnées du point  $M$  et du temps  $t$ . La solution est unique selon les conditions initiales ;
- Si on prendre l'exemple 1D de la tige isolé que l'on chauffe et qui est isolée avec l'extérieur.



On a  $\partial^2 T / \partial x^2 < 0$  dans les zones chaudes.  $\partial T / \partial t$  est donc négative et la température diminue. Inversement elle augmente dans les zones froides. Le système étant isolé, son énergie est constante, la température moyenne est donc constante.

Si on procède au processus inverse on se rend compte que c'est impossible car  $\partial T / \partial t$  change de signe mais pas  $\partial^2 T / \partial x^2$  et l'équation de diffusion n'est plus vérifiée. **La diffusion est irréversible et donc créatrice d'entropie.**

- On arrive à construire un **temps et longueur caractéristique** qui correspondent respectivement à la période typique de variation et la longueur sur laquelle se passe la variation :

$$L \sim \sqrt{a\tau} \text{ et } \tau \sim L^2/a$$

### Analogie électrocinétique

Si on reprend l'expression du flux :  $\Phi = j_Q S$  avec  $j_Q = -\lambda dT/dx$  en 1D. Cela donne :

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} \sim -\frac{\lambda S}{L} \Delta T \quad (20)$$

Cette expression fait penser à la loi d'Ohm : l'intensité qui traverse un conducteur, flux du vecteur densité de courant électrique à travers une section du conducteur, est proportionnelle à la différence de potentiel à ses bornes. On généralise cette propriété à une géométrie quelconque et par analogie avec la résistance électrique, on définit la résistance thermique  $R_{th}$  (K/W) et la conductance thermique  $G_{th}$  (W/K) :

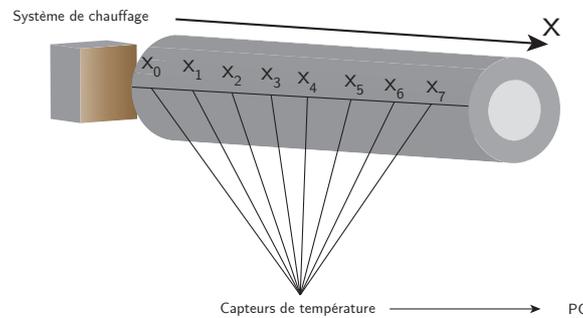
$$\begin{aligned} R_{th} &= -\frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{L}{\lambda S} \\ G_{th} &= \frac{1}{R_{th}} = -\frac{\Phi}{\Delta T} = \frac{\lambda S}{L} \end{aligned} \quad (21)$$

L'analogie entre les phénomènes de conduction thermique et de conduction électrique sont données :

	Conduction thermique	Conduction électrique
grandeur transportée	énergie interne $U$	charge électrique $q$
densité de courant	$\vec{j}_Q$	$\vec{j}_{el}$
équation locale de la conservation	$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q = P_V$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{el} = 0$
loi phénoménologique locale	$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$	$\vec{j}_{el} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$
forme intégrale	$\Phi = \Delta T / R_{th}$	$I = \Delta V / R$

## f) Application

Nous allons étudier la propagation d'une variation de température dans une direction pour une barre de fer dans le but de pouvoir déterminer le coefficient de diffusivité thermique de cette objet.



Cette expérience a pour but d'illustrer l'équation de diffusion valide pour les conditions limites spatiales et temporelles suivant :

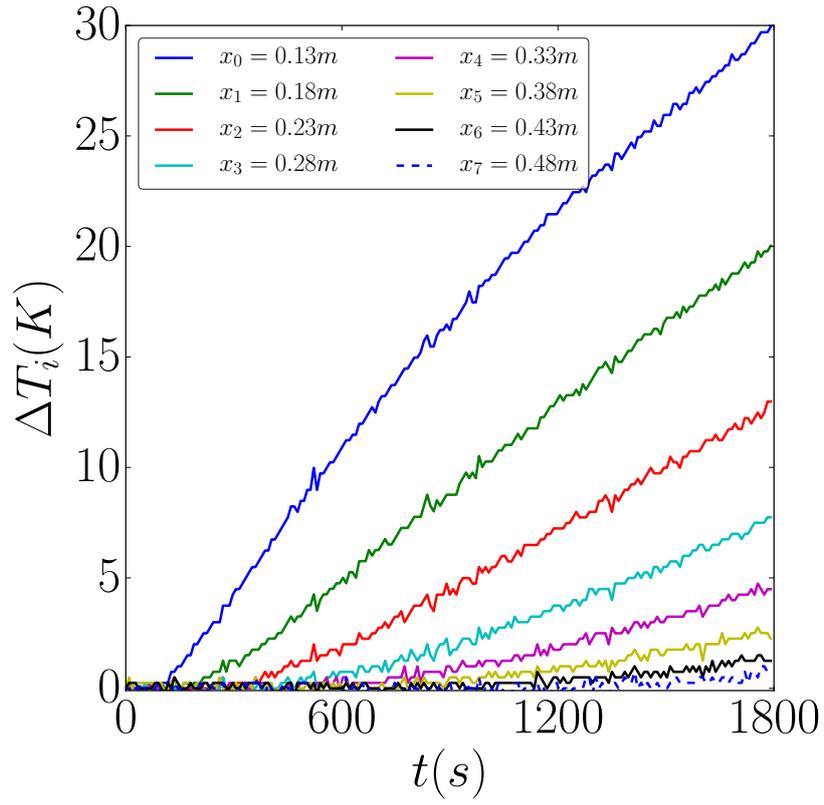
$$t = 0, T(x) = T_{amb} \text{ et } \forall t > 0, T(x=0) = T_0, T(x \rightarrow \infty) = T_{amb}.$$

Avec  $T_0$  la température du four, et  $T_{amb}$  la température ambiante. Dans ces conditions la solutions est donnée par :

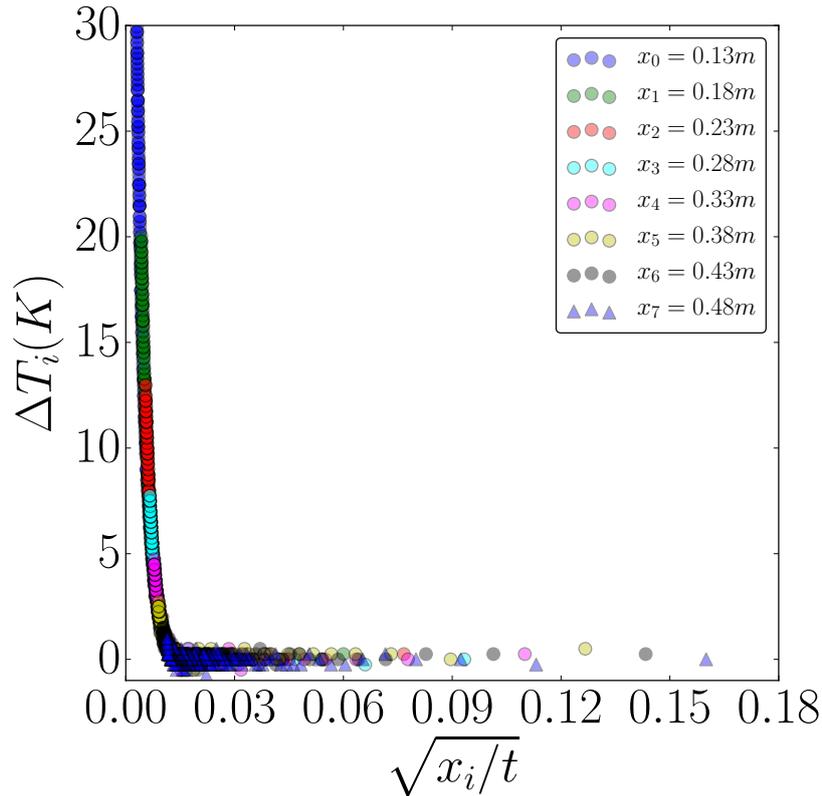
$$T(x, t) = (T_0 - T_{amb}) \left( 1 - \text{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right) + T_{amb} \quad (22)$$

avec  $\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-u^2) du$ .

Le four est considéré comme un thermostat qui impose une température de contact  $T_0 < 200^\circ\text{C}$ , (cette valeur n'intervient pas dans le traitement). Il est alimenté en 110V à travers un auto-transfo, ce dernier est branché sur un transformateur d'isolement, si l'auto-transfo n'est pas isolé. Ce four contient un solide métallique que l'on met en contact avec la barre (s'assurer du bon contact) à l'instant initial. On acquiert  $T(x_i, t)$  pour les abscisses  $x_i = 13, 18, 22, 28 \dots 48\text{cm}$ , pendant 30 minutes. Les capteurs thermiques sont des LM135 (voir doc). Le dernier capteur témoigne de ce qu'on est encore dans le régime transitoire tant qu'il n'a pas bougé : ce qui reste vrai durant une vingtaine de minutes. On lance l'acquisition au moment où l'on met en contact la barre et le four.



On superpose à l'aide de LatisPro les différentes courbes  $T(x_i, t) - T(x_i)$  en fonction de  $x_i/\sqrt{t}$ . Le retranchement de  $T(x_i, 0)$  permet de s'affranchir d'une erreur systématique due aux capteurs.



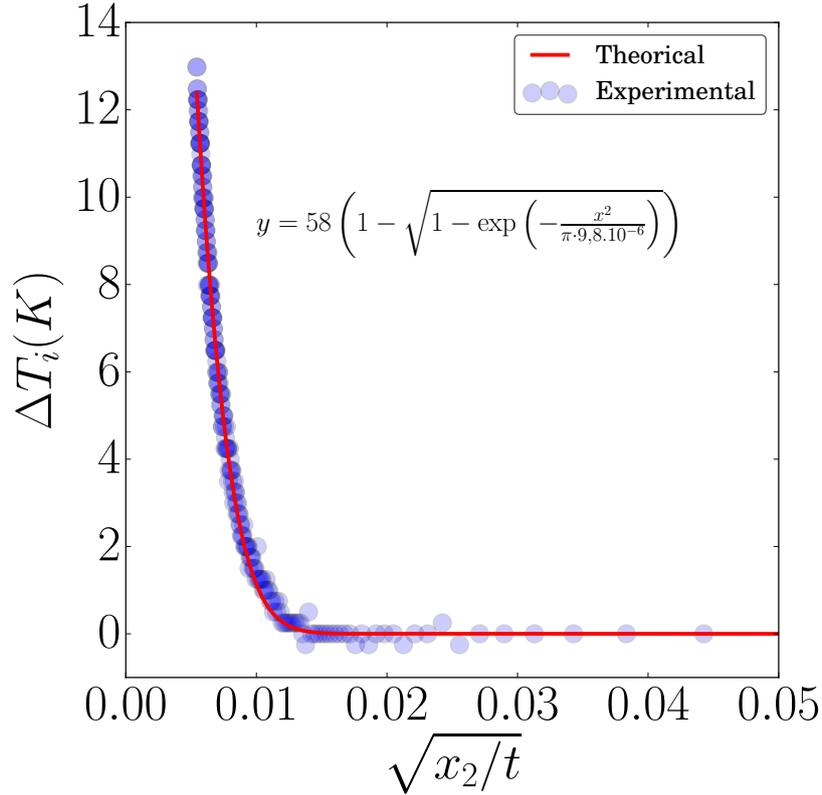
On peut modéliser l'une de ces courbes (ici pour  $x_2$ ) en utilisant une approximation satisfaisante de la fonction erreur :

$$\operatorname{erf}(u) \approx \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{4u^2}{\pi}\right)} \quad (23)$$

On peut enfin en déduire  $a$ , le coefficient de diffusion et le comparer à la valeur attendue  $a = \lambda/(\rho c)$ , pour le fer pur à 20°C on a  $a = 22,8 \cdot 10^{-6}$ . Avec Latis pro il faut créer une modélisation en entrant le modèle suivant :

$$dT_2 = a(1 - \sqrt{1 - \exp(-x_2^2 / (\pi \cdot b))})$$

Une fois la formule faite il faut "aider" le modèle à converger : pour cela il faut rentrer des valeurs de  $a \approx 50$  et  $b \approx 10^{-6}$ . On trouve grâce à Latispro  $a \approx 10^{-6}$  soit deux fois moins que ce qui est donné dans la théorie : cela s'explique par le fait qu'ici nous n'avons pas de fer pur, la barre n'est pas vraiment isolée et la position des capteurs n'est pas vraiment optimale. (écart type trouvé avec Latis pro :  $16,45 \cdot 10^{-3}$ )



**Rq : Démonstration du résultat théorique dans Guyon page 14-15**

## 2. Diffusion de particules

Le phénomène de diffusion moléculaire est très courant. On peut citer différentes observations physiques de la vie courante : étalement d'une tache d'encre sur un buvard, diffusion d'une odeur dans une pièce, diffusion des ions dans les piles et les électrolyseurs etc.... Il existe en fait deux moyens d'effectuer des transports de matière, l'un a son origine au niveau microscopique et l'autre au niveau macroscopique : la diffusion et la convection.

### a) Courant et bilan de particules

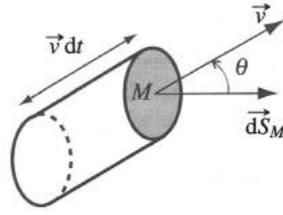
#### Courant de particules

On appelle flux de particules  $\Phi_S(t)$  à travers une surface  $S$  le débit de particules à travers cette surface à l'instant  $t$ . Le nombre de particules traversant  $S$  pendant la durée  $dt$  est donc :

$$dN = \Phi_S(t)dt \quad (24)$$

On définit le vecteur densité de courant de particule  $\vec{j}(M, t)$  dont le flux à travers  $S$  est égal au flux de particules à travers cette surface. En raisonnant de la même façon que dans la première partie il vient le nombre de particules traversant  $S$  entre  $t$  et  $t + dt$  :

$$dN = \Phi_S(t)dt = \iint_{M \in S} \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S}_M dt \quad (25)$$

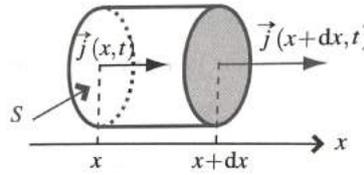


Considérons des particules de vitesse  $\vec{v}$  traversant un élément de surface  $d\vec{S}_M$  faisant un angle  $\theta$  avec  $\vec{v}$ . On note  $n(M, t)$  le nombre de ces particules par unité de volume en  $M$  et à l'instant  $t$ . Ce cylindre a pour volume  $d\tau = dS_M \times v dt \times \cos(\theta) = \vec{v} \cdot d\vec{S}_M dt$ . Ainsi :  $dN = n d\tau = (n \vec{v}) \cdot d\vec{S}_M dt$ . En utilisant l'équation (23) il vient :

$$\vec{j}(M, t) = n(M, t) \vec{v}(M, t) \quad (26)$$

avec  $n$  la densité moléculaire en  $m^{-3}$ .

### Bilans de particules



En procédant toujours de la même façon que pour la diffusion thermique sauf que cette fois-ci on fait un bilan du nombre de particules dans un cylindre entre  $t$  et  $t + dt$ . On se place en 1D et on sait que le cylindre est de longueur  $dx$  et de volume  $d\tau = S dx$  noté  $\Sigma$ . Ainsi le nombre de particules entrant par la face située en  $x$  et en  $x + dx$  est :

$$\begin{aligned} \delta N_x &= \vec{j}(x, t) \cdot (S \vec{u}_x) dt = j_x(x, t) S dt \\ \delta N_{x+dx} &= \vec{j}(x + dx, t) \cdot (-S \vec{u}_x) dt = -j_x(x + dx, t) S dt \end{aligned} \quad (27)$$

Le nombre de particules qui est entré dans le volume  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t + dt$  est donc :

$$\begin{aligned} \delta N_{ext \rightarrow \Sigma} &= \delta N_x + \delta N_{x+dx} = (j_x(x, t) - j_x(x + dx, t)) S dt \\ \text{DL au 1er ordre en } dx \quad \delta N_{ext \rightarrow \Sigma} &= -\frac{\partial j_x(x, t)}{\partial x} S dx dt \end{aligned} \quad (28)$$

Le nombre contenues dans le volume  $\Sigma$  a varié entre les instants  $t$  et  $t + dt$  de la quantité  $dN = (n(x, t + dt) - n(x, t)) S dx dt$ . Soit en développant au 1er ordre en  $dt$  :

$$dN = \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} S dx dt \quad (29)$$

Cette variation s'explique uniquement par le transfert de particules qui ont traversé la surface soit  $dN = \delta N_{ext \rightarrow \Sigma}$ . On obtient, après simplification par  $S dx dt$ , l'équation de conservation de la matière en 1D sans production ou disparition de particules :

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_x(x, t)}{\partial x} \quad (30)$$

Dans le cas où il y a une production ou disparition de particules, on introduit  $p(x, t)$  positif (production) ou négatif (disparition) tel que  $dN = \delta N_{ext \rightarrow \Sigma} + \delta N_{prod}$ . On a alors :

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j_x(x, t)}{\partial x} + p(x, t) \quad (31)$$

Dans le cas tridimensionnel et avec production on a :

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}(M, t) = p(M, t) \quad (32)$$

**Rq** : Plus de détail page 95 Sanz.

## b) Loi de Fick

Comme la loi de Fourier, la loi de Fick est une loi phénoménologique qui relie le vecteur densité de courant de particules au gradient de la densité particulaire. Expérimentalement on constate que les molécules diffusent de l'endroit où leur densité est la plus importante vers l'endroit où leur densité est la plus faible. Le flux de particules tend ainsi à réduire le déséquilibre et rendre la densité particulaire uniforme. Cette loi s'écrit :

$$\vec{j}(M, t) = -D \overrightarrow{\text{grad}} n(M, t) \quad (33)$$

$D$  est une constante positive appelé coefficient de diffusion qui s'exprime en  $m^2/s$  (OdG : molécule dans un gaz  $D = 10^{-6} - 10^{-4} m^2.s^{-1}$ , dans un liquide  $D = 10^{-12} - 10^{-8} m^2.s^{-1}$ , atomes dans un solide  $D = 10^{-30} - 10^{-16} m^2.s^{-1}$ ).

Cette loi n'est plus valable si le gradient de densité est trop important, si le gradient de densité varie trop vite dans le temps et si la diffusivité dépend de la direction de l'espace.

## c) Équation de diffusion

De la même façon que dans la première partie en combinant la loi de Fick et l'équation de conservation de la matière on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} \quad (1D) \\ \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} &= D \Delta n(x, t) \quad (3D) \end{aligned} \quad (34)$$

On a toujours pour cette équation : **unicité de la solution et irréversibilité**. Là aussi on peut estimer un temps et une longueur caractéristique :

$$L \sim \sqrt{D\tau} \text{ et } \tau \sim L^2/D$$

**Exemple** : Morceau de sucre dans le café : si on mélange pas à l'intérieur du café le transfert est diffusif. Le coefficient de diffusion sucre dans l'eau est  $D = 0,5.10^{-9} m^2.s^{-1}$ . Avec une tasse de taille  $L = 3cm$  on a  $\tau \approx 3$  semaines ! Il vaut mieux utiliser une cuillère pour ajouter un transfert convectif au transfert diffusif.

**Rq** : Approche microscopique page 101 du Sanz.

## d) Application

**Manip : Au lieu de faire la tache d'encre on peut faire le glycérol selon le temps !**

Soit une tache d'encre qui est déposée sur un papier filtre ; elle s'élargit progressivement sous l'effet de la diffusion.

Pour étudier cette expérience, on adopte un modèle unidimensionnel : la densité en particules colorées  $n$  ne dépend que de  $x$  et du temps  $t$  et le colorant est mis initialement en  $x = 0$ . La densité de particules  $n(x, t)$  vérifie l'équation (32). La condition initiale du problème est :  $n(x, 0) = 0$  si  $x \neq 0$ . Les conditions aux limites sont :  $n(\infty, t) = n(-\infty, t) = 0$  car le colorant progresse à vitesse finie.

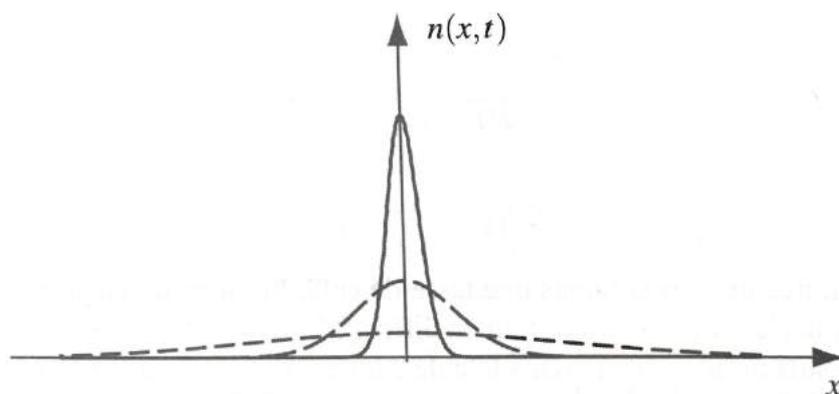
Le calcul de la solution sort du cadre de la leçon ; elle s'écrit pour  $t > 0$  :

$$n(x, t) = \frac{A}{\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{Dt}\right) \quad (35)$$

où  $A$  est une constante dépendant du nombre de particules de colorant déposées sur le papier. La représentation graphique de la solution est donnée sur la figure. On observe la tache qui s'étale lentement ; la largeur de la courbe est en gros multipliée par trois chaque fois que la durée est multiplié par dix. On peut définir la largeur  $L(t)$  de la tache à l'instant  $t$  par :

$$n\left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{n(0, t)}{10} \Leftrightarrow L = 4\sqrt{\ln(10)}\sqrt{Dt} \quad (36)$$

L'aire sous la courbe  $n(x, t)$  à  $t$  fixé représente le nombre total de particules déposées sur le papier. Elle est donc identique pour toutes les courbes.



## Conclusion

Nous avons vu dans cette leçon les différents mécanismes permettant de mettre en équation les phénomènes de transport. La diffusion est un de ces phénomènes, et que ce soit pour les particules ou pour la chaleur, les équations sont identiques, et une forte analogie peut être développée entre ces deux phénomènes.

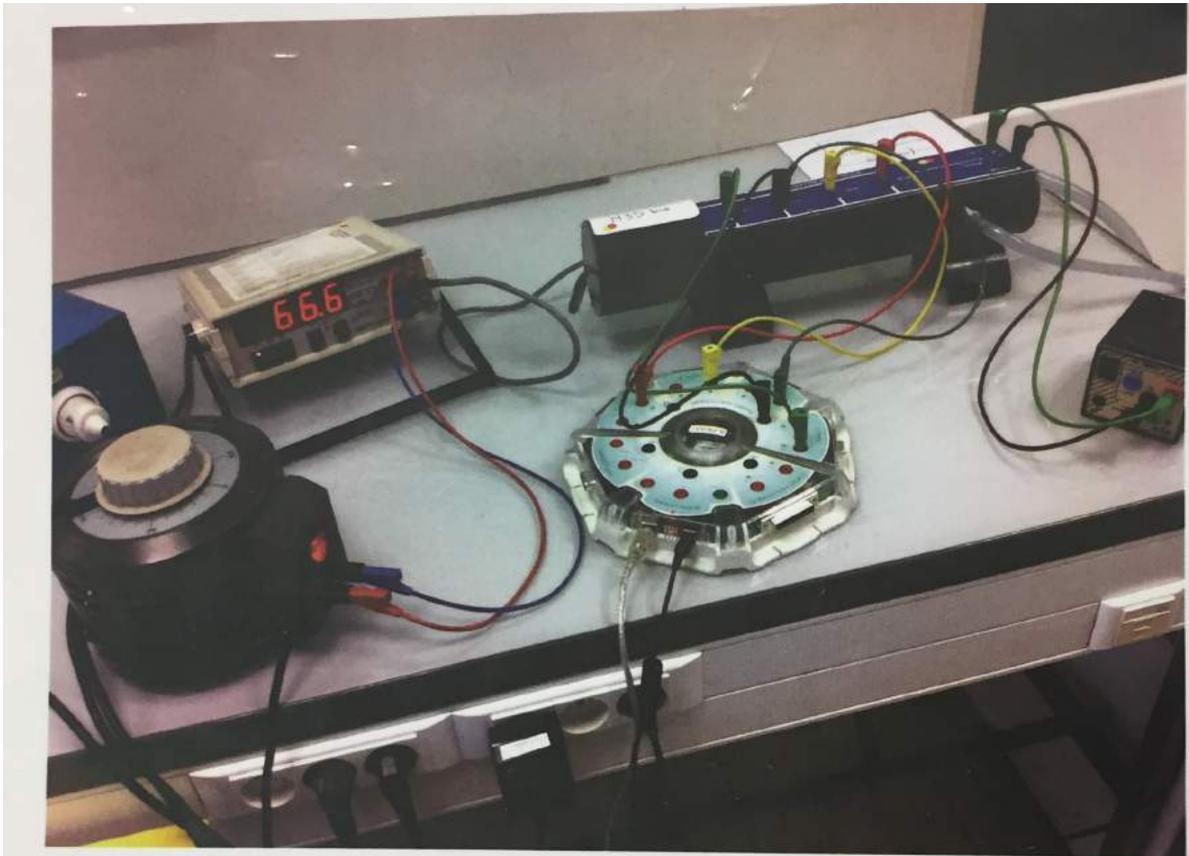
**Rq :** Autre type de diffusion comme la viscosité voir page 523 Diu.

**Rq :** Plus de détail sur la diffusion page 79 Perez.

**Rq :** Autre manip en électrocinétique donné par BUP n.944, Toutain (2012).

# MANIP : Régime permanent dans la barre de cuivre

On peut se fier au Quaranta page 97.



- Bibliographie : Dictionnaire de physique expérimentale Tome II, p 97.
- Le dispositif est constitué d'une barre homogène de cuivre de diamètre 30 mm.
- On suppose que l'on impose la puissance thermique et donc le flux thermique à l'origine, et on néglige les pertes thermiques entre la résistance chauffante et la barre. La puissance fournie est mesurable à l'aide d'un wattmètre. **Ne pas dépasser 70 W.**
- La résistance de chauffe est alimentée sous tension réglable à l'aide d'un transformateur d'isolement et d'un alternostat. L'extrémité froide est refroidie par une circulation d'eau, qui permet de limiter la température moyenne dans la barre.
- Des capteurs thermiques (composants LM135) sont placés de manière équidistante le long de la barre, aux distances  $x = -5, 10, 15, 20, 25 \dots 45$  cm de l'origine. L'ensemble des capteurs est alimenté par une source de tension de +15V. La tension de sortie vaut 10 mV pour 1K.
- L'acquisition des températures après atteinte d'un régime permanent (au bout d'environ 20 min) permet de connaître le gradient de température dont on déduira la conductivité thermique du cuivre, compte tenu des approximations faites.

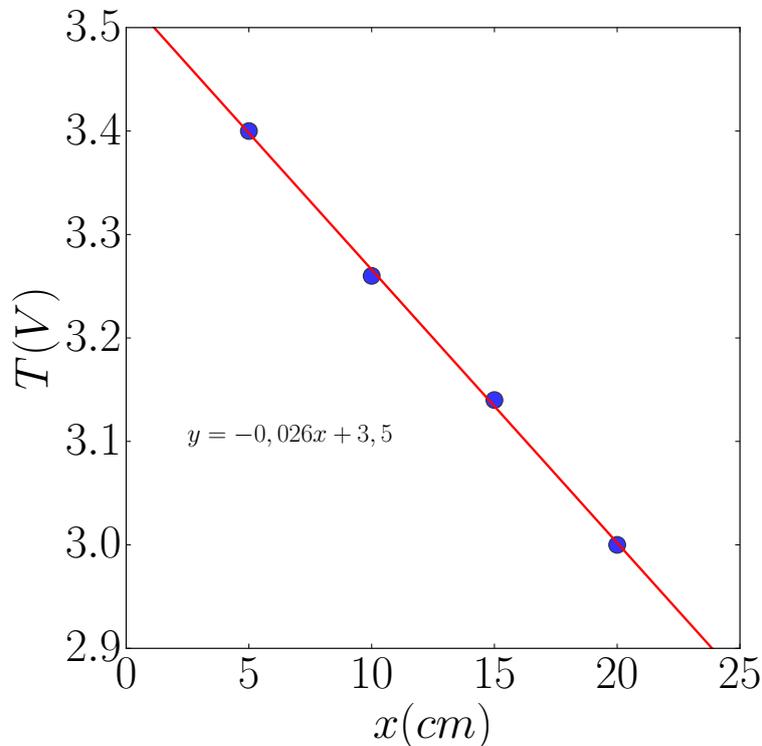
Une fois alimenté, il faut attendre 20 minutes pour être en régime permanent. Dans ce cas on a :

$$D\Delta T = 0 \Rightarrow T = Ax + B \quad (37)$$

On a pour les capteur  $10m = 1K$ . On impose une puissance thermique à travers une puissance électrique en négligeant les pertes. On a  $x = 0, 5, 10, 15cm$ . Le flux thermique est lisible en  $W$  sur le wattmètre. On sait que  $\vec{j} = -\lambda \text{grad}T$  donc  $\lambda = -\vec{j} / \text{grad}T$  et  $\vec{j} = \Phi/S$ .

On obtient les points suivants :

x(cm)	5	10	15	20
T(V)	3,4	3,26	3,14	3



Ainsi on trouve une pente de  $264K/m$ . Ainsi :

$$j = \frac{P}{S} = \frac{61}{\pi R^2} = 86000W/m^2$$

alors,  $\lambda = \frac{j}{\nabla T} \approx 330W/(m.K)$

La théorie donne  $350W/(m.K)$ . La différence est due à l'isolation thermique de la barre, la mauvaise estimation de la puissance fournie qui doit se traduire par une mauvaise estimation de  $\lambda$ , la dépendance de  $\lambda$  de  $T$ .

**Rq :** On pourrait aller encore plus loin en mesurant la conductivité d'une bobine de cuivre :  $\sigma = L/(RS)$ . On mesure la résistance  $R$  (méthode à 4 points) et connaissant  $L$  et  $d$  on en déduit  $\sigma$ . Wiedemann et Franz établissent une loi empirique : dans les métaux le rapport des conductivités thermiques et électrique vérifie :

$$\frac{\lambda}{\sigma} = LT \tag{38}$$

avec  $L \in [2, 12; 2, 26]10^{-8}W\Omega/K$ , le nombre de Lorentz. Il varie peu d'un métal à l'autre. Un modèle simple des métaux (modèle de Sommerfeld) établit que  $L = L_0 = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e}\right)^2 = 2,44.10^{-8}W\Omega/K$ . Ainsi on peut comparer le rapport de nos mesures et comparer. Critique :  $\lambda$  est une fonction de la température. Ayant mesuré la conductivité électrique à

l'ambiante on estime aussi que la valeur de  $K$  déterminée est celle à l'ambiante. Néanmoins le rapport des conductivités est satisfaisant. Le modèle de Sommerfeld qui prédit  $L_0$  ne prend en compte que la conductivité thermique due aux électrons, or il y a d'autres vecteurs de la diffusion de l'énergie thermique (les photons par ex.). Dans les bon métaux la contribution électronique domine.

## MANIP : Diffusion dans le glycérol

On peut s'aider du Quaranta page 466 ou bien Galecki page 357. Si on fait cette manip il faut la faire dès le début pour avoir un temps suffisant pour l'exploiter.

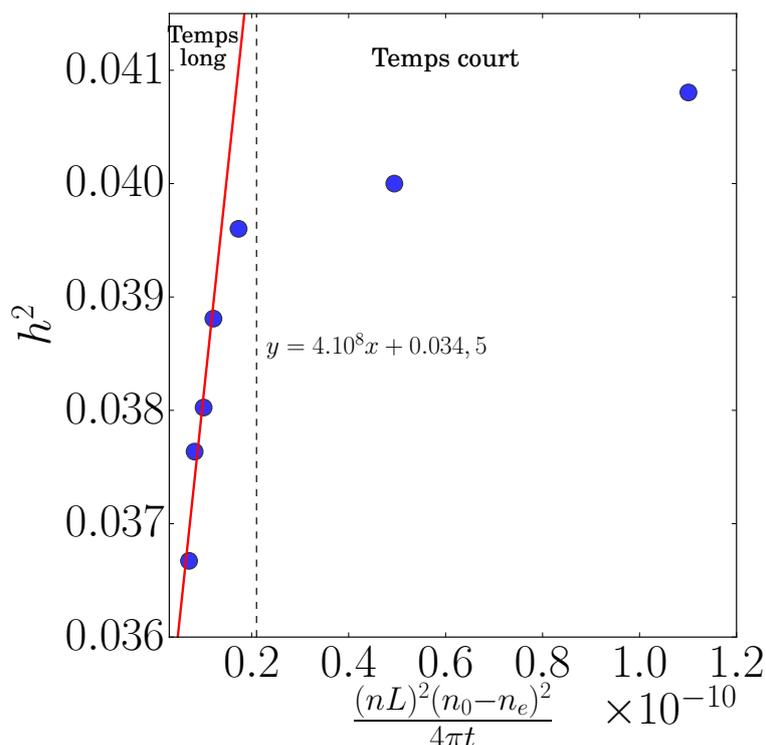
Il faut mélanger une petite cuve en proportion 1/2 glycérole et 1/2 d'eau. Il faut un barreau en verre, un laser et une feuille millimétrée. On projette le faisceau sur le barreau de verre puis sur la cuve et enfin le faisceau se projette sur la feuille millimétrée accrochée au mur.

Avant de remplir la cuve du mélange, on prend la marque du trait initial sur le papier millimétré. On a la relation :

$$h(t) = \frac{dL(n_0 - n_e)}{\sqrt{4\pi Dt}} \quad (39)$$

où  $L$  est la distance cuve écran,  $d$  l'épaisseur de la cuve,  $n_0 = n_e + (n_g - n_e)c_0$  l'indice de la glycérine dans le mélange ( $c_0 = 1/2$ ,  $n_e = 1,33$  indice de l'eau et  $n_g = 1,47$  indice de la glycérine).

h(cm)	20,2	20	19,9	19,7	19,5	19,4	19,15
t(min)	11	24,5	70	100	120	147	171



Il faut faire la pente sur les temps courts. On trouve une pente de  $4.10^8$ , ce qui donne  $D \approx 9,5.10^{-9} m^2/s$ . La théorie donne  $6.10^{-10} m^2/s$ . On a le bon ordre de grandeur. Il faut maintenant discuter des erreurs et de l'écart!

**EXPÉRIENCE 3 : étude optique de la diffusion d'un corps dissout**

Nous étudions par une méthode optique, la diffusion d'un corps dissout (noté (g)) en supposant que la diffusion a lieu suivant une seule direction (problème à une dimension). Il est nécessaire de rappeler quelques points.

**Rappels théoriques**

**a) Solution de l'équation de diffusion en régime variable**

Dans une solution, il est difficile d'imposer des conditions aux limites qui conduisent au régime stationnaire, aussi étudions-nous le régime dynamique et devons-nous chercher la solution de l'équation de diffusion en absence de source

(conservation de la matière et loi de Fick) : 
$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion et  $c$  la concentration des particules diffusantes par unité de volume. Si au temps  $t = 0$  on met en contact dans une cuve le corps (g) et de l'eau (figure T36), les conditions initiales s'expriment en utilisant la fraction molaire  $x_g$  de (g) dans l'eau au lieu de la concentration par :

$$x_g(z, 0) = 1 \text{ pour } z \leq 0 \text{ et } x_g(z, 0) = 0 \text{ pour } z \geq 0$$

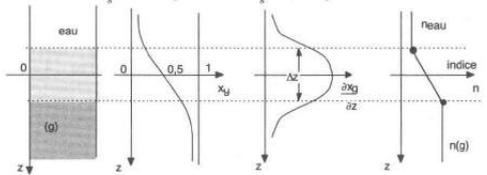


Figure T36 : diffusion à une dimension dans une solution

La solution de l'équation de diffusion correspondant à ces conditions donne :

$$\frac{\partial x_g(z,t)}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right) \quad (1)$$

Pour  $t > 0$ , la fraction molaire à l'origine vaut :

$$x_g(0, t) = 1/2 \quad (2)$$

La figure T36 donne l'aspect de  $x_g(z,t)$  et de  $\frac{\partial x_g(z,t)}{\partial z}$  (gaussienne).

On peut donc estimer la largeur de la zone de diffusion (où le gradient de concentration prend une valeur notable) par :

$$\Delta z = 4\sqrt{Ln2} \sqrt{Dt} \quad (3)$$

Matériel :	Une cuve à face parallèles (environ : 10 cm x 2 cm x 6 cm) Une pipette Un agitateur (facultatif) De l'eau, de la glycérine plus ou moins concentrée Une solution très concentrée de thiosulfate de sodium... Un laser, une lentille cylindrique, un écran Une règle graduée Un pied à crémaillère
------------	--

**Manipulation 1 : déviation d'un rayon lumineux au cours du temps**

On réalise le montage de la figure T38.

Pour cette expérience, il est préférable d'utiliser une solution diluée de glycérine ou une solution saturée de thiosulfate de sodium (dissoudre des cristaux de thiosulfate dans de l'eau chaude jusqu'à saturation). En effet, avec de la glycérine pure le gradient d'indice étant très important, le rayon de courbure est faible ; il est alors difficile d'évaluer la distance  $d$  sur laquelle le rayon lumineux est courbe.

• On verse tout d'abord l'eau sur une hauteur de deux à trois centimètres. On verse en suite très délicatement la solution de glycérine ou de thiosulfate au fond de la cuve (à l'aide d'un pipette) en évitant les remous qui entraîneraient le mélange des solutions.

• On place cette cuve d'épaisseur  $\ell$  sur un pied à crémaillère.

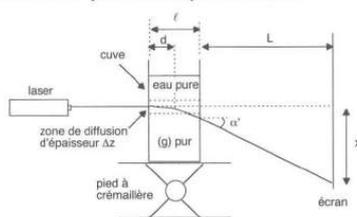


Figure T38 : observation de la diffusion

• On dirige le faisceau laser normalement à la cuve. En déplaçant verticalement la cuve on constate qu'il n'y a aucune déviation lorsque la lumière traverse l'eau pure ou la solution pure : on note la trace sur l'écran placé à la distance  $L$  de la cuve.

• On dirige ensuite le faisceau dans la zone de diffusion. La trajectoire de la lumière s'incurve, on note la nouvelle trace sur l'écran. Si  $L \gg \ell$ , on obtient un ordre de grandeur de l'angle  $\alpha$  (figure T38) :  $\text{tg} \alpha' = x/L$  et  $\sin \alpha' = n_g \sin \alpha$  (car

$\Rightarrow$  La zone de diffusion s'élargit au cours du temps comme  $\sqrt{Dt}$ .

**b) Aspect optique**

Compte tenu de la diffusion, l'indice de réfraction varie dans la zone de diffusion ; en première approximation, l'ordre de grandeur du gradient d'indice dans cette zone peut s'écrire :

$$\frac{\partial n(z,t)}{\partial z} = \frac{\Delta n}{\Delta z} = \frac{n_g - n_{eau}}{4\sqrt{Ln2Dt}}$$

D'autre part dans un milieu d'indice variable, le rayon de courbure vaut

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n} \cdot \text{grad } n$$
 où  $\vec{N}$  est la normale au rayon (voir un traité d'optique). Les rayons étant peu inclinés dans un plan perpendiculaire à Oz, on a :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n} \frac{\partial n(z,t)}{\partial z}$$

En suivant l'approximation précédente, il vient :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{n_o} \frac{n_g - n_{eau}}{4\sqrt{Ln2Dt}}$$

où  $n_o$  est un indice moyen compris entre  $n_g$  et  $n_{eau}$ .

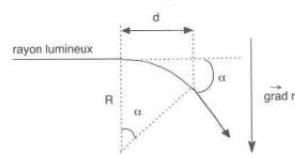


Figure T37 : déviation du rayon lumineux

En assimilant le rayon lumineux à son cercle osculateur, dans la zone où existe le gradient d'indice, la figure T37 montre que la déviation  $\alpha$  après la traversée de la distance  $d$  vaut  $\alpha = d/R$ . Les relations précédentes donnent alors à la date  $t$  :

$$\alpha = \frac{d(n_g - n_{eau})}{4n_o \sqrt{Ln2Dt}} \quad (4)$$

$\Rightarrow$  La déviation  $\alpha$  évolue dans le temps comme  $\frac{1}{\sqrt{Dt}}$  :  $\alpha = \frac{C}{\sqrt{Dt}}$

$\triangleright$  Nous pouvons exploiter les résultats (3) et (4) de deux façons différentes : soit étudier la déviation  $\alpha$  d'un rayon lumineux au cours du temps, soit estimer optiquement et globalement l'évolution de la zone de diffusion  $\Delta z$ .

on doit tenir compte de la réfraction sur la face de sortie de la cuve ; on prend pour indice de réfraction la valeur moyenne notée  $n_o$ .

Pour  $30 \text{ mn} \leq t \leq 4 \text{ heures}$  on mesure  $x$ .

Puis on trace  $\alpha$  en fonction de  $1/\sqrt{t}$  afin de vérifier la relation (4) et en déduire un ordre de grandeur du coefficient de diffusion  $D$ .

• En homogénéisant la solution (agitateur), la déviation disparaît.

**Exemple**

On donne :  $d = 2 \text{ cm}$ ,  $L = 50 \text{ cm}$ .

• Avec une solution de thiosulfate de sodium saturée  $n_g = 1,40$ ,  $n_o = 1,36$ , on a les résultats suivants (valeurs approximatives) :

t (heures)	x (cm)	$1/\sqrt{t} (s^{-1/2})$	$\alpha'$ (rd)	$\alpha$ (rd)	$\Delta z$ * (mm)
1	18,0	0,0166	0,35	0,25	4,0
2	12,5	0,0117	0,25	0,18	5,6
3	10,3	0,0096	0,20	0,15	6,9
4	8,9	0,0083	0,17	0,13	8,0

La pente de la droite (figure T39) est de l'ordre de 15,5 SI ce qui donne un coefficient de diffusion de l'ordre de :

$$D = 4 \cdot 10^{-10} m^2 \cdot s^{-1}$$

\* Les valeurs de  $\Delta z$  sont déduites de la relation (3).

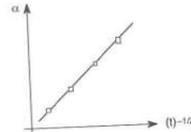


Figure T39

• Avec de la glycérine pure  $n_g = 1,47$  et  $n_o = 1,40$ , la pente de la droite est de l'ordre de 30 SI, ce qui conduit approximativement à un angle de 28 degrés pour  $t = 1 \text{ heure}$  et un angle de 8 degrés pour  $t = 13 \text{ heures}$ .

Tableau T4 : coefficient de diffusion dans l'eau à 10 °C (en $10^{-10} m^2 \cdot s^{-1}$ )				
sucré	glycérine	CuSO <sub>4</sub>	AgNO <sub>3</sub>	ZnSO <sub>4</sub>
3,0	4,0	4,6	11,0	2,7

**Manipulation 2 : étude optique de la largeur de la zone de diffusion**

On étudie la diffusion de la glycérine pure dans l'eau.

• On remplit la cuve avec les mêmes précautions que dans la manipulation 1, puis on la place sur un pied à crémaillère.

- Le faisceau laser est élargi grâce à une lentille cylindrique, puis incliné d'un angle  $i$  par rapport à l'horizontale (on prendra de préférence  $i = 45^\circ$ ) autour d'une normale à la face d'entrée de la cuve. Les rayons lumineux incidents sont dans un même plan, mais certains d'entre eux traversent l'eau pure ou la glycérine pure alors que d'autres rayons traversent la zone de diffusion (figure T40). Ces derniers rayons sont les seuls déviés.
- Le faisceau issu de la lentille cylindrique étant *divergent*, on détermine au préalable le grandissement  $\gamma$  en mesurant l'ombre portée sur l'écran d'un objet de dimension connue placé au niveau de la face de sortie de la cuve.
- On observe ensuite la trace du faisceau traversant la cuve sur un écran placé à  $L \approx 50$  cm de la face de sortie de la cuve. Cette observation permet d'estimer la largeur  $\Delta z$  de la zone de diffusion dans la cuve à partir de la mesure de  $\Delta Z'$  sur l'écran :  $\Delta z = \Delta Z'/\gamma = (\Delta Z' \sin i)/\gamma$  (voir la figure T40bis).

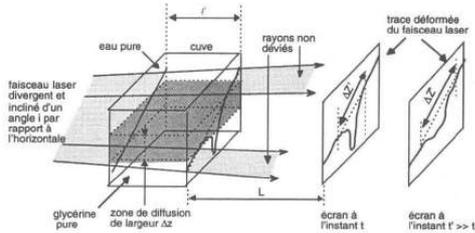


Figure T40 : détermination de la largeur de diffusion

Bien que les mesures soient imprécises, on peut relever l'ordre de grandeur de  $\Delta z$  en fonction du temps (prévoir environ 2 jours pour des mesures complètes), puis tracer  $\Delta z = f(\sqrt{t})$  (figure T41).

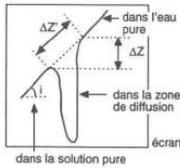


Figure T40 bis : trace du faisceau sur l'écran

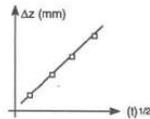


Figure T41

- En utilisant la relation (3), on peut en déduire une valeur approchée du coefficient de diffusion  $D$  puisque la pente de la droite est égale à  $4\sqrt{DLn^2}$ . Pour la glycérine pure cette pente est de l'ordre de  $6,6 \times 10^{-5}$  SI.
- En homogénéisant la solution (agitateur), la déviation disparaît.

#### REMARQUES

1) *Durée caractéristique de diffusion* : le coefficient de diffusion  $D$  est homogène à [longueur<sup>2</sup>]/[temps]. Si  $l$  est une dimension caractéristique du système, on peut lui associer une durée  $\tau$  telle que :  $\tau = l^2/D$ . Dans le cas de la glycérine, et pour des dimensions de l'ordre du centimètre, on trouve un temps de l'ordre de 3 jours. Ce temps peut être pris comme une estimation de la « durée » de la diffusion dont on appréciera la lenteur.

2) *Relation d'Einstein* : si on connaît les dimensions «  $a$  » des particules diffusantes, la formule d'Einstein peut être appliquée pour calculer  $D$  :  $D = \frac{kT}{6\pi a \eta}$

( $T$  température,  $\eta$  viscosité et  $k$  constante de Boltzmann).

#### 4 TRANSPORT DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

▷ On se reportera au tome 1 "Fluides réels" pour l'étude de la viscosité. Pour illustrer ce transport, nous utilisons un viscosimètre de Couette.

EXPÉRIENCE : description et utilisation du viscosimètre de Couette

Matériel :	Un viscosimètre de Couette De la glycérine Facultatif : un cristalliseur + un fil de torsion + une « bouteille » lestée + un « tourne-disque »
------------	--

Si l'on ne dispose pas d'un viscosimètre de Couette, la difficulté de cette expérience est la réalisation d'un viscosimètre de type Couette. On peut réaliser une expérience de principe (cristalliseur tournant dans lequel plonge une bouteille suspendue à un fil de torsion) ou fabriquer un appareil en atelier<sup>6</sup> (figure T42).

- Le cylindre central de rayon  $R$  est soumis au couple de rappel d'un fil de torsion. L'équilibre en rotation n'est possible parce que le liquide en mouvement lui transfère de la quantité de mouvement. Ce transfert est équivalent à l'application d'une force par unité de surface : la force de frottement visqueux dont le couple équilibre celui du fil de torsion. L'étude de la viscosité est donc essentielle dans l'étude du transfert de quantité de mouvement comme l'indique le tableau T4 où la

<sup>6</sup> Voir le BUP n° 785 juin 1996.

# L.P. 20 - Conversion de puissance électromécanique

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Électromagnétisme
- Mécanique
- Induction

## Bibliographie

- Tout en un PSI-PSI\*, Cardini, *Dunod*
- Électrotechnique, Brenders, *Bréal*
- H-prépa Électronique PSI-PSI\*, Brébec, *Hachette*
- Dico Électricité IV, Quaranta, *Pierron*
- BUP n846, Vigouroux (2002)

**Leçon qui ne nécessite pas de détailler tous les calculs. Ils sont donnés ici au cas où pour des questions ou pour comprendre tout simplement. Essayer de faire les manips pour illustrer chaque partie, cela peut être sympathique.**

## Introduction

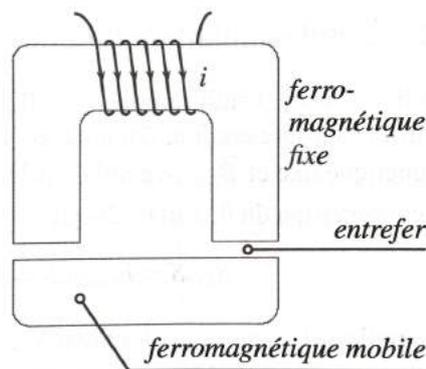
La science relative aux machines tournantes date de la deuxième du XIXe siècle, ce qui en fait une science assez jeune. Pour rappel, la dynamo a été inventé en 1869 et la fin du XIXe siècle voit apparaître le transport de tensions continues et alternatives sur de grandes distances, permettant l'essor de ces machines électromécaniques. Elles nous entourent aujourd'hui, elles sont utilisées comme moteurs (vibreurs de téléphones, trains...) ou comme génératrice (éoliennes, turbines...).

Dans cette leçon nous allons ainsi voir quel est le principe de ces machines ; quels en sont les différents types ; et enfin comment les caractériser mathématiquement et les quantifier pour mieux comprendre leur mode de fonctionnement.

## 1. Intro à la conversion électro-magnéto-mécanique

L'étude du phénomène d'induction électromagnétique met en évidence la possibilité de convertir de l'énergie électrique en énergie mécanique et réciproquement.

### a) Description d'un contacteur électromagnétique



On réalise un contacteur électromagnétique en juxtaposant deux ferromagnétiques. Il est constitué d'un circuit ferromagnétique déformable et d'une bobine. Une partie mobile en translation est séparée de la partie fixe par deux entrefers identiques. L'ensemble est également appelé relais.

Lorsque l'intensité  $i$  est nulle dans la bobine, la partie mobile ne subit aucune force. En présence d'un courant, la partie fixe se comporte comme un électroaimant, elle attire la partie mobile avec une certaine force qu'on cherche à déterminer.

### b) Force électromagnétique

Soit  $E_{em}$  l'énergie électromagnétique emmagasinée par le système, sous forme de champ magnétique. Si le milieu magnétique est linéaire, alors la force électromagnétique exercée sur la partie mobile est :

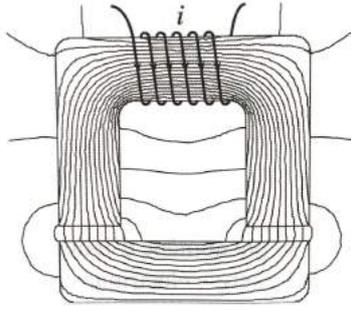
$$F_{em} = \left( \frac{\partial E_{em}}{\partial x} \right)_i \quad (1)$$

où  $x$  est la distance dont s'écarte le ferromagnétique mobile par rapport au fixe. L'indice  $i$  signifie que la dérivée se calcule à  $i$  constant.

### c) Application au contacteur

La méthode est systématique, quelque soit le type d'actionneur étudié : on détermine l'inductance vue par le circuit électrique, au moyen du théorème d'Ampère et de la conservation du flux du champ magnétique ; on en déduit l'énergie stockée, puis la force exercée sur la partie mobile.

Soit  $S$  la section du matériau ferromagnétique, fixe comme mobile. La carte de lignes de champ montre que dans l'entrefer, la section où les lignes restent parallèles est pratiquement égale à  $S$ . Les lignes qui s'écartent du flux principal véhiculent un flux de fuite d'autant plus faible qu'elles sont écartées. On modélise le flux dans l'entrefer par un tube de champ de section  $S$ .



Les lignes restent suffisamment parallèles pour que l'on puisse considérer le champ comme uniforme sur une section. On note  $\vec{B}_e$  le champ entre les entrefers,  $\vec{B}_{fixe}$  celui dans le ferromagnétique fixe et  $\vec{B}_{mobile}$  celui dans le ferromagnétique mobile. La conservation du flux magnétique impose alors :

$$B_{fixe}S = B_{mobile}S = B_eS \text{ soit } B_{fixe} = B_{mobile} = B_e$$

On applique le théorème d'Ampère ( $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ ) à une ligne de champ moyenne  $\mathcal{L}$  du ferromagnétique orientée par le courant d'intensité  $i$  selon la règle de la main droite. On note  $x$  la position du ferromagnétique mobile ( $x$  est donc l'épaisseur d'un entrefer),  $\ell_1$  la longueur de la ligne de champ dans le ferromagnétique fixe et  $\ell_2$  celle dans le ferromagnétique mobile :

$$H_{fixe}\ell_1 + H_{mobile}\ell_2 + H_e \cdot 2x = Ni \quad (2)$$

Attendu que dans l'air de l'entrefer,  $B_e = \mu_0 H_e$  et que dans le ferromagnétique  $B_{fixe} = \mu_0 \mu_r H_{fixe}$  et  $B_{mobile} = \mu_0 \mu_r H_{mobile}$  :

$$\frac{B_{fixe}}{\mu_0 \mu_r} \ell_1 + \frac{B_{mobile}}{\mu_0 \mu_r} \ell_2 + \frac{B_e}{\mu_0} 2x = Ni \quad (3)$$

où on remplace  $B_e$  et  $B_{mobile}$  par  $B_{fixe}$  :

$$\frac{B_{fixe}}{\mu_0 \mu_r} \ell_1 + \frac{B_{fixe}}{\mu_0 \mu_r} \ell_2 + \frac{B_{fixe}}{\mu_0} 2x = Ni \quad (4)$$

On en tire  $B_{fixe}$  :

$$B_{fixe} = \frac{\mu_0 Ni}{\frac{\ell_1 + \ell_2}{\mu_r} + 2x} \quad (5)$$

On privilégie  $B_{fixe}$  car on cherche l'inductance du circuit magnétique, définie par le flux magnétique  $\phi = Li$  dans les  $N$  spires de la bobine. Or le champ dans ces spires est  $B_{fixe}$ , qu'il faut garder.

Le flux magnétique à travers les  $N$  spires de la bobine vaut donc :

$$\phi = N \cdot B_{fixe} S = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S i}{\ell_1 + \ell_2 + 2\mu_r x} \quad (6)$$

Dans un circuit magnétique linéaire déformable, l'inductance dépend de la position de la partie mobile.

La partie fixe du dispositif est alimentée par un générateur de tension qui fournit un travail électrique  $W_e$ . L'énergie ainsi reçue a deux destinations ; en négligeant toute forme de perte, une partie de cette énergie est stockée sous forme d'énergie électromagnétique  $E_{em}$  dans le ferromagnétique et l'entrefer, le reste est fourni à la partie mobile sous forme

de travail mécanique  $W_m$ . On a donc immédiatement le bilan  $W_e = \Delta E_{em} + W_m$ . La puissance instantanée fournie par le générateur, qui applique la tension  $u$  et délivre le courant  $i$ , vaut, en convention générateur,  $p = ui$ . D'après la loi de Faraday, la tension  $u$  délivrée par le générateur est liée à la f.é.m. induite  $e$  dans les spires de la bobine par :

$$u = -e = +\frac{d\phi}{dt} \quad (7)$$

donc  $p = id\phi/dt$ . Soit  $L(x)$  l'inductance propre de la bobine enroulée autour du circuit magnétique constitué du ferromagnétique fixe, de celui qui est mobile, et des deux entrefers. Dans un ferromagnétique infiniment doux et non saturé, donc linéaire, l'inductance  $L$  relie  $\phi$  à  $i$ ,  $\phi = Li$ , alors :

$$p = i\frac{d}{dt}(Li) = i\left(L\frac{di}{dt} + i\frac{dL}{dt}\right) \quad (8)$$

soit, en scindant en deux le dernier terme :

$$p = \underbrace{Li\frac{di}{dt} + \frac{i^2}{2}\frac{dL}{dt}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)} + \frac{i^2}{2}\frac{dL}{dt} \quad (9)$$

Le terme  $\frac{1}{2}Li^2$  représente la variation d'énergie emmagasinée dans le ferromagnétique et les entrefers, sous forme de champ magnétique. Attendu que  $L$  dépend du temps via la position de la partie mobile,  $\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dL}{dx}v$  et il vient :

$$p = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + \frac{i^2}{2}\frac{dL}{dx}v \quad (10)$$

où le dernier terme représente la puissance mécanique  $F_{em}v$  de la force électromagnétique  $F_{em}$  qui s'exerce que sur la partie mobile :

$$F_{em} = \frac{i^2}{2}\frac{dL}{dx} = \left(\frac{\partial E_{em}}{\partial x}\right)_i \quad (11)$$

La force électromagnétique qui s'exerce sur le ferromagnétique mobile devient, en développant l'énergie magnétique stockée dans le ferromagnétique et les deux entrefers :

$$F_{em} = \left(\frac{\partial E_{em}}{\partial x}\right)_i = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)_i \quad (12)$$

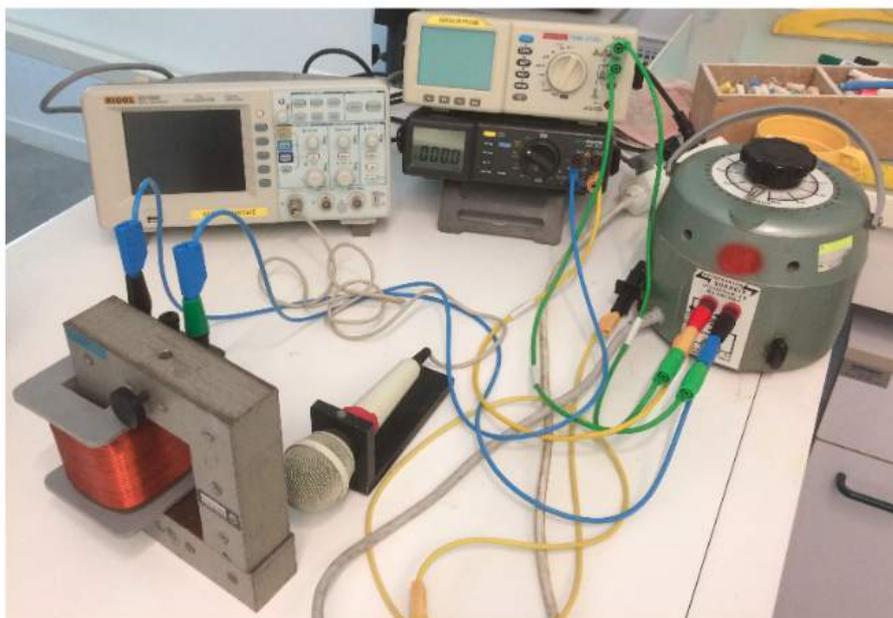
ainsi :

$$F_{em} = \frac{i^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_0\mu_r N^2 S}{\ell_1 + \ell_2 + 2\mu_r x}\right) = -\frac{\mu_0\mu_r^2 N^2 S i^2}{(\ell_1 + \ell_2 + 2\mu_r x)^2} \quad (13)$$

Le signe négatif montre que la force électromagnétique est toujours attractive ; elle tend à diminuer le volume des entrefers.

## d) Détermination de la perméabilité

**MANIP : Faire la mesure de la perméabilité du fer.**



Soit une bobine possédant  $N = 250$  spires et parcourue par un courant variable de fréquence  $50\text{Hz}$ . Le circuit électrique créé enlace un circuit magnétique de longueur  $\ell = 50\text{cm}$ , canalisé par un noyau de fer doux. Un barreau de masse  $m = 2\text{kg}$  est mobile en translation. La section du noyau est  $S = 16\text{cm}^2$ . Il existe un entre fer de largeur variable largeur variable notée  $2x$ .

On déduit du son généré du fait de la vibration du barreau que celui ci est attiré de façon périodique. On mesure à l'aide d'un micro relié à un oscilloscope la fréquence de cette vibration via une analyse spectrale : on trouve deux pics un à  $50\text{Hz}$  et l'autre  $\sim 100\text{Hz}$ .

On mesure l'amplitude minimale de l'intensité nécessaire pour soulever le barreau :  $i_m = 200\text{mA}$ , soit  $i_{eff} = i_m/\sqrt{2} = 142\text{mA}$ . La force magnétique compense alors le poids  $P = mg$ . Soit  $\ell_e = \ell_1 + \ell_2$  on a :

$$\phi = \frac{\mu_0\mu_r N^2 S i}{\ell_e + 2\mu_r x} \quad (14)$$

Soit alors :

$$E_{em} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0\mu_r N^2 S i^2}{\ell_e + 2x} \quad (15)$$

La force électromagnétique est donc :

$$F_{em} = - \frac{\mu_0\mu_r^2 N^2 S i^2}{(\ell_e + 2\mu_r x)^2} \quad (16)$$

La force est attractive, quelque soit le signe de  $i$ . Avec  $i = i_0 \cos(\omega t)$ , on a  $i^2 = (1/2)i_0^2(\cos(2\omega t) + 1)$ , d'où le doublement de fréquence. La valeur moyenne de la norme de la force est :

$$\langle |F| \rangle = \frac{\mu_0\mu_r^2 N^2 S i_{eff}^2}{(\ell_e + 2\mu_r x)^2} \quad (17)$$

Avec  $i_{eff}^2 = (1/T) \int_0^T i^2(t) dt$ . En appliquant la loi de la résultante dynamique à la pièce en équilibre, il vient :

$$mg = \frac{\mu_0\mu_r^2 N^2 S i_{eff}^2}{(\ell_e + 2\mu_r x)^2} \quad (18)$$

Ainsi quand le barreau est soulevé on a  $x = 0$  et il vient :

$$\mu_r = \sqrt{\frac{mgl_e^2}{\mu_0 N^2 S i_{eff}^2}} \quad (19)$$

Calcul d'erreur :

$$\frac{\Delta\mu_r}{\mu_r} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\ell_e}{\ell_e}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta S}{S}\right)^2 + \left(\frac{\Delta i_{eff}}{i_{eff}}\right)^2} \quad (20)$$

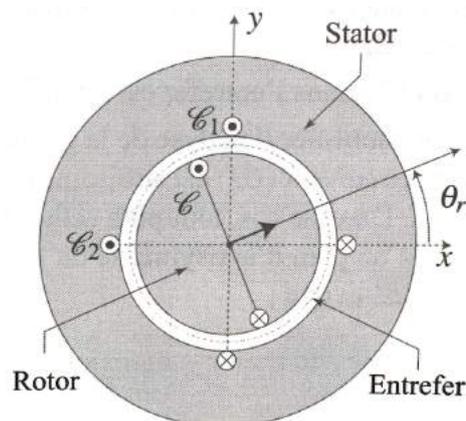
**Rq :** On doit ensuite comparer la valeur avec  $\mu_r \approx 5000H/m$  pour le fer. La différence peut venir du fait qu'on ne prend pas en compte dans le modèle les fuites de champ (donc on aurait besoin d'un  $i$  plus grand) ou bien les pertes de fer ( induction  $\Rightarrow$  courant de Foucault (perte fer)  $\Rightarrow$  perte énergie par effet joule).

**Rq :** Application électroaimant de levage p722 du Cardini.

## 2. Machine synchrone

La machine synchrone est un exemple de convertisseur électromagnétique réversible, fonctionnant en moteur ou en générateur. Les alternateurs, machines synchrones génératrices, sont utilisés dans la production d'énergie électrique sous forme de courant alternatif ou bien dans des applications de moindre puissance plus courantes comme, par exemple, les véhicules automobiles ou ferroviaire.

### a) Principe



L'ensemble de la machine constitue un circuit magnétique taillé dans un alliage à base de fer, traversé par les lignes de champ magnétique générées par les courants de deux types de bobinages, certains situés sur le stator, partie fixe, d'autres sur le rotor, partie mobile en rotation séparée du rotor par un entrefer. On étudiera la machine dans le cadre d'un modèle simplifié vérifiant les hypothèses suivantes :

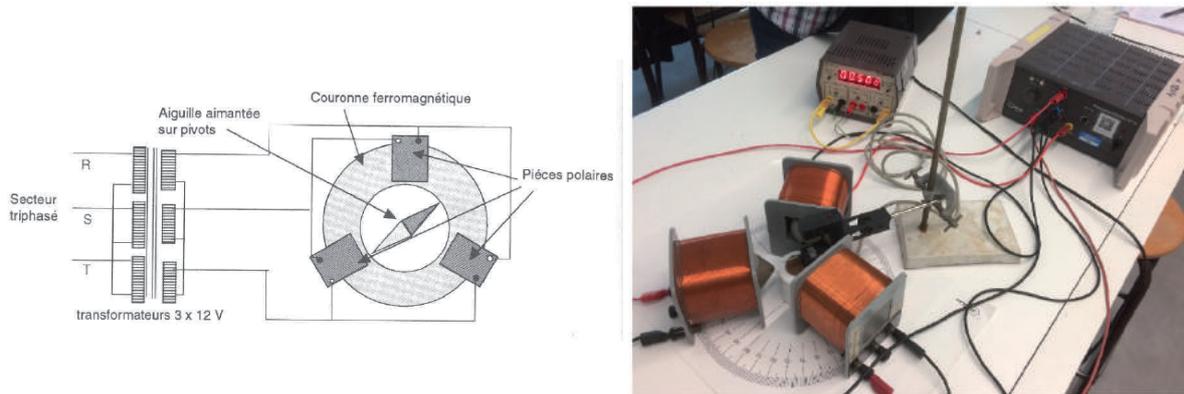
- le matériau constituant le stator et le rotor est un matériau magnétique linéaire de perméabilité magnétique relative infinie ;
- l'épaisseur de l'entrefer est constante. On se place donc dans le cadre d'étude d'une machine à pôles lisses ;

- la machine comporte trois circuits électriques, les circuits  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  bobinés sur le stator et un seul circuit  $\mathcal{C}$  bobiné sur le rotor.

**Rq :** Explications supplémentaires voir BUP n.846 et notamment sur le cas asynchrone.

## b) Illustration

**MANIP :** page 101-102 et page 283 du Quaranta



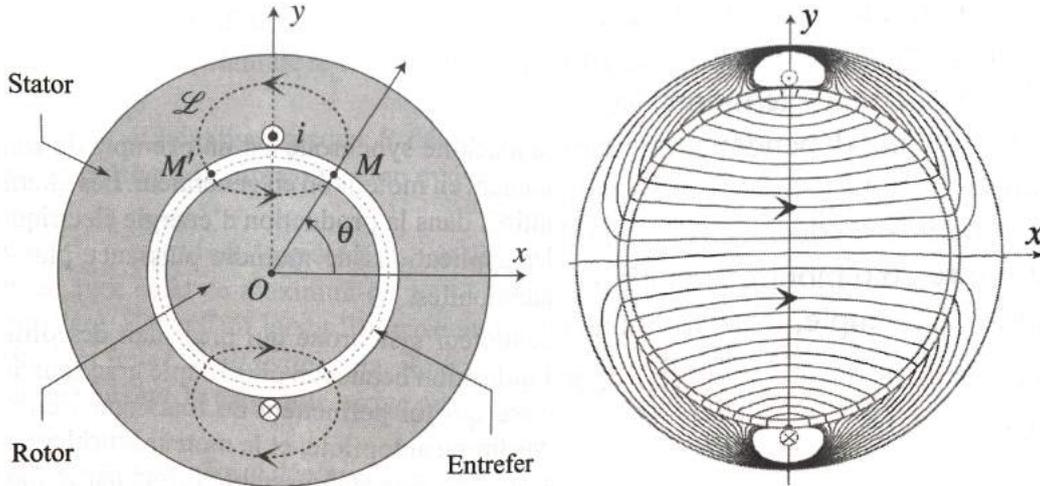
On dispose d'une aiguille aimantée entourée de trois bobines identiques, disposé à  $120^\circ$  l'une de l'autre. On alimente les bobines avec un courant sinusoïdales de 0,1 ou 1 Hz, de même amplitude et déphasé de  $2\pi/3$  (géré par le générateur triphasé). Le champ magnétique au centre  $\vec{B}_{stator}$  est alors tournant. L'aiguille, de moment dipolaire magnétique  $\vec{m}$ , subit un couple de moment  $\vec{m} \wedge \vec{B}_{stator}$  qui tend à l'aligner avec le champ. On observe l'aiguille tourner à la même fréquence que le champ. C'est le principe du moteur synchrone. Si on inverse le branchement de l'une des bobines : la rotation s'effectue en sens inverse.

On peut montrer avec cette manip le théorème de Ferraris : "Trois bobines disposées à  $120^\circ$  alimentées par des courants triphasés de fréquence  $f$  créent un champ magnétique tournant à la même fréquence".

**Rq :** Démonstration théorème Ferraris voir page 101 Quaranta.

## c) Champ magnétique

### Circuit statorique



On analyse dans un premier temps le champ magnétique dans la machine, produit par le circuit  $\mathcal{C}_1$ . Le circuit statorique  $\mathcal{C}_1$  constitue une phase. La géométrie du bobinage de ce circuit est conçue afin de générer en un point  $M$  situé dans l'entrefer, un champ magnétique égale à une fonction sinusoïdale de la position angulaire  $\theta$  de ce point.

Le circuit, fixé sur le stator, se présente sous la forme de plusieurs spires enroulées sur un cadre rectangulaire contenu dans le plan  $(0, y, z)$ . On définit le repère de coordonnées cartésiennes. L'épaisseur de l'entrefer  $e$  étant très faible devant  $R$  le rayon du rotor, on considérera que les points dans l'entrefer sont tous situés sur le cercle de centre  $O$  de rayon  $R$  représenté sur la figure.

Un point  $M$  dans l'entrefer est repéré par l'angle  $\theta$ . Afin de simplifier l'analyse de la géométrie des lignes de champ, on suppose que la longueur des spires suivant  $(Oz)$  est suffisamment grande devant  $R$  pour permettre de négliger les effets de bord. Dans ce cas, tout plan orthogonal à l'axe  $(Oz)$ , tel que le plan de coupe de la figure, est un plan d'antisymétrie de la répartition de courant et du matériaux ferromagnétique. On en déduit que les lignes de champ magnétique appartiennent aux plans orthogonaux à l'axe  $(Oz)$ . Par ailleurs, le plan  $(O, y, z)$  de la spire, est un plan de symétrie de la répartition de courant et du matériau ferromagnétique. Le plan  $(O, y, z)$  est un plan d'antisymétrie du champ magnétique.

Enfin, la perméabilité magnétique relative du matériau formant le stator et le rotor étant infinie, les lignes du champ magnétique entrent et sortent de l'entrefer orthogonalement aux cylindres de rayon  $R$  et  $R + e$  : les lignes de champ magnétique sont radiales dans l'entrefer.

La spire étudiée est une distribution de courant à symétrie faible et de ce fait, la détermination de la géométrie des lignes de champ magnétique nécessite une résolution numérique des équations locales. Cette résolution permet d'obtenir une carte des lignes de champ magnétique dans le plan de coupe.

La figure représente schématiquement la ligne de champ  $\mathcal{L}$ , passant par le point  $M$  dans l'entrefer repéré par l'angle  $\theta$  où le champ magnétique s'écrit  $\vec{B}(M) = B(r = R, \theta) \vec{u}_r = B(\theta) \vec{u}_r$ . D'après les propriétés de symétrie, le champ magnétique en  $M'$ , symétrique de  $M$  par rapport au plan  $(O, y, z)$ , est l'opposé du symétrique de  $\vec{B}(M)$  par rapport au

plan  $(O, y, z)$ .

En tenant compte de la modification du vecteur  $\vec{u}_r$  dont la direction évolue entre les points  $M$  et  $M'$  il vient  $\vec{B}(M') = -B(r = R, \theta) \vec{u}_r = -B(\theta) \vec{u}_r$ . En utilisant le théorème d'Ampère sur le contour fermé  $\mathcal{L}$  on a :

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i \quad (21)$$

Pour un matériau magnétique idéal, de perméabilité magnétique relative infinie, la circulation de  $\vec{H}$  sur les portions de  $\mathcal{L}$  incluses dans le matériau magnétique est nulle. Il vient alors :

$$\text{pour } \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ , \oint_{\mathcal{L}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{B(\theta)}{\mu_0} 2e \Rightarrow B(\theta) = \frac{\mu_0 i}{2e}$$

$$\text{Par symétrie } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[ , B(\theta) = -\frac{\mu_0 i}{2e}.$$

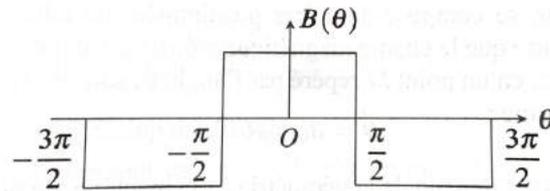


FIGURE 9 - Champ magnétique dans l'entrefer.

Dans le cas de  $N$  spires enroulées sur le cadre rectangulaire, filiforme, contenu dans le plan  $(O, y, z)$  : on admettra que l'amplitude de la composante sinusoïdale utile du champ magnétique dans l'entrefer obtenue dans le cadre du modèle simplifié, soit son fondamental, s'obtient à partir de celle du champ créé par une spire rectangulaire, égale à  $\mu_0 i / 2e$ , en la multipliant par le facteur de proportionnalité  $4N/\pi$ . En notant  $i_1$ , l'intensité du courant circulant dans le circuit  $\mathcal{C}_1$  de normale conjointe  $\vec{u}_x$ , il vient que le circuit  $\mathcal{C}_1$  génère en un point  $M$  de l'entrefer repéré par l'angle  $\theta$ , le champ magnétique radial :

$$\vec{B}_1(\theta) = k i_1 \cos(\theta) \vec{u}_r \quad (22)$$

avec  $k = 2\mu_0 N / (\pi e)$ .

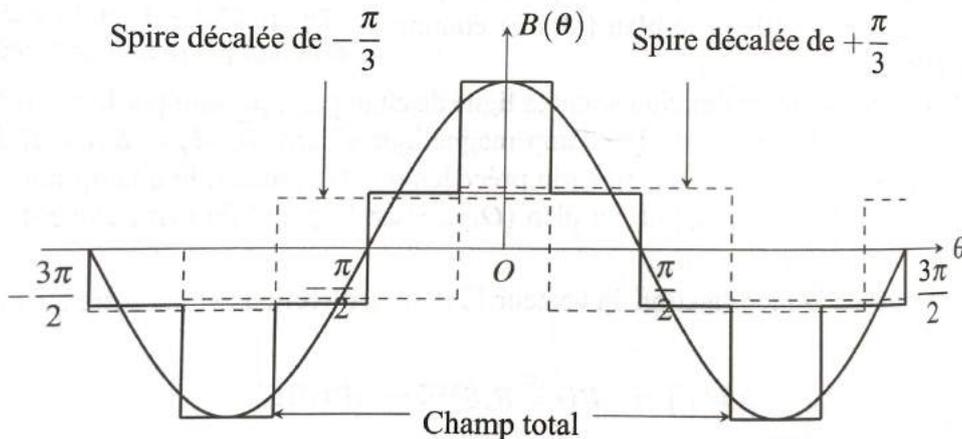
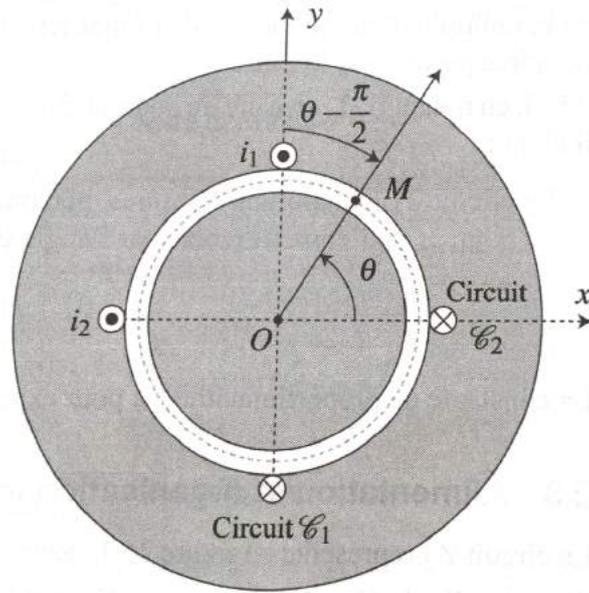


FIGURE 10 - Champ créé pour  $N = 3$  décalées de  $\pi/3$ .

## Champ statorique glissant



Soit la configure à deux phases, qui sont séparées par une rotation de  $\pi/2$ . Les intensités  $i_1$  et  $i_2$  des courants circulant dans les deux phases statoriques sont choisies de telle sorte que le champ magnétique total dans l'entrefer soit glissant. Par définition, en tout point  $M$  de l'entrefer repéré par l'angle  $\theta$ , un champ glissant à la pulsation  $\omega$  se présente sous la forme :

$$\vec{B}(\theta, t) = B_0 \cos(\omega t - \theta) \vec{u}_r \quad (23)$$

où  $B_0$  est une constante positive, homogène à un champ magnétique. Les lignes de champ magnétique dans l'entrefer sont radiales et le champ magnétique se comporte comme une onde progressive transversale se propageant selon  $\vec{u}_\theta$ . La vitesse angulaire  $\Omega_B$  de déplacement de cette onde selon  $\vec{u}_\theta$  se déduit de la phase instantanée de l'onde progressive :

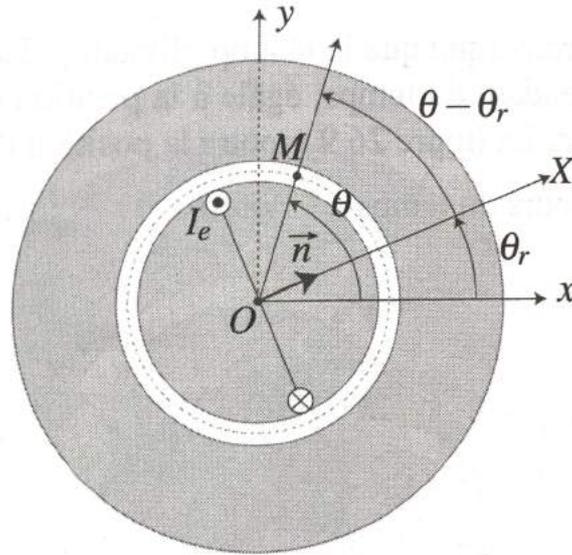
$$\phi = \omega t - \theta = \omega \left( t - \frac{\theta}{\omega} \right) \Rightarrow \Omega_B = \omega$$

Sachant que l'on a  $\vec{B}_1(\theta, t) = k i_1 \cos \theta \vec{u}_r$  alors on a  $\vec{B}_2(\theta, t) = k i_2 \cos(\theta - \pi/2) \vec{u}_r = k i_2(t) \sin \theta \vec{u}_r$ . Le champs magnétique  $\vec{B}_s$  crée par la présence des deux courants circulant dans les phases statoriques est la superposition des champs  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$ , soit :

$$\vec{B}_s(\theta, t) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = k(i_1(t) \cos \theta + i_2(t) \sin \theta) \vec{u}_r \quad (24)$$

**Rq :** Si les courants d'intensité  $i_1$  et  $i_2$  sont sinusoïdaux de pulsation  $\omega$ , de valeur efficace identique notée  $I$ . En choisissant  $i_1(t)$  comme origine des phases, et en désignant par  $\gamma$  le déphasage entre  $i_2$  et  $i_1$  on a  $i_1(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$  et  $i_2(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \gamma)$ . Alors on a  $\vec{B}_s(\theta, t) = kI\sqrt{2} \cos(\omega t - \theta) \vec{u}_r$ .

## Circuit rotorique



Le bobinage enroulé sur le rotor est parcouru par le courant d'excitation permanent d'intensité  $I_e$ . Il est conçu pour générer en tout point  $M$  de l'entrefer un champ radial, fonction sinusoïdale de sa position angulaire. Mais dans ce cas le bobinage du rotor est entraîné par le mouvement de rotation du rotor. La position du rotor est définie par l'angle  $\theta_r$  et celle de  $M$  par l'angle  $\theta$  l'angle entre  $\vec{n}$  et  $\overrightarrow{OM}$  est égale à  $\theta - \theta_r$ . En reportant les résultats obtenus pour les circuits statoriques, on obtient pour le champ magnétique radial  $\vec{B}_r$  créé par le courant d'excitation du bobinage rotorique, en un point  $M$  dans l'entrefer, repéré par l'angle  $\theta$  :

$$\vec{B}_r(\theta) = k' I_e \cos(\theta - \theta_r) \vec{u}_r \quad (25)$$

où la constante de proportionnalité  $k'$  se déduit de  $k$  en remplaçant  $N$  par  $N_r$  désignant le nombre de spires enroulées sur le cadre du rotor. On a  $k' = 2\mu_0 N_r / (\pi e)$ .

### d) Couple électromagnétique

#### Énergie électromagnétique

Le rotor reçoit le couple électromagnétique  $\Gamma_{em}$  qui s'exprime en fonction de l'énergie électromagnétique  $E_{em}$  du dispositif :

$$E_{em} = \iiint_M w_{em}(M, t) d\tau \quad (26)$$

$M$  appartenant aux domaines où l'énergie volumique  $w_{em}(M, t)$  est non nulle. Dans le cadre de l'ARQS on pose  $w_{em} = B^2 / (2\mu_0 \mu_r)$ . L'énergie électromagnétique de la machine synchrone a pour expression :

$$E_{em} = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{B_r^2 + B_S^2 + B_r B_S}{2\mu_0} d\tau = E_S + E_r + E_{Sr} \quad (27)$$

Ainsi l'énergie se décompose en trois termes : un terme représentant l'énergie magnétique "propre" des deux circuits statoriques seuls, un terme représentant l'énergie du circuit rotorique seul et un terme représentant l'énergie magnétique de couplage entre les circuits

statorique et rotorique.

**Rq** : Détails du calcul de chaque terme page 737 du Cardini.

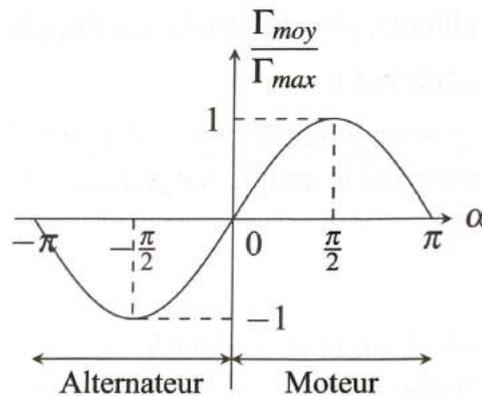
## Couple

Le couple électromagnétique se déduit par dérivation de l'énergie électromagnétique en supposant le régime permanent ( $d\theta_r/dt = \Omega$  alors  $\theta_r = \Omega t - \alpha$  où  $\alpha$  est déterminée par la position du rotor à  $t = 0$ ) :

$$\Gamma_{em} = \left( \frac{\partial E_{em}}{\partial \theta_r} \right) = \frac{\partial E_{Sr}}{\partial \theta_r} = K I I_e \sin((\omega - \Omega)t + \alpha) \quad (28)$$

**Rq** : Si  $\Omega = \omega$ , c'est à dire quand le rotor tourne à la même vitesse que le champ glissant statorique, le couple moyen est non nul. Cette dernière condition se nomme condition de synchronisme et on a  $\Gamma_{em} = K I I_e \sin(\alpha)$ .

La position du rotor étant  $\theta_r = \omega t - \alpha$ , à  $t = 0$ , l'axe polaire du rotor ( $OX$ ), de vecteur unitaire  $\vec{n}$ , est situé à  $\theta_r = -\alpha$ . Le rotor tournant à la même vitesse que  $\vec{B}_S$ , l'angle entre  $\vec{n}$  et  $\vec{n}_S$  reste constant, égal à l'angle initial  $-\alpha$ . L'angle  $\alpha$  intervient dans le couple selon la relation  $\Gamma_{moy} = K I I_e \sin \alpha = \Gamma_{max} \sin \alpha$ .



Lors de son fonctionnement où  $I$  et  $I_e$  sont constants, les variations de  $\Gamma_{moy}$  en fonction de  $\alpha$  font apparaître deux domaines :

- Pour le sens de rotation  $\Omega > 0$ ,  $\alpha > 0$ , le couple est positif. La machine fonctionne en moteur et le rotor est mis en mouvement sous l'effet du couple électromagnétique moteur. Les circuits électrique et le rotor fournissent de l'énergie mécanique en entraînant une charge.
- Lorsque  $\alpha < 0$ , le couple est négatif. La machine consommant de l'énergie mécanique et restituant de l'énergie électrique aux circuits électriques statoriques fonctionne en générateur. Elle développe un couple résistant. Une machine synchrone génératrice porte le nom d'alternateur.

Finalement les qualités de ce types d'appareil sont : excellent rendement (85-95%), facteur de puissance facilement réglable au moyen du courant d'excitation  $I_e$  alimentant le rotor et vitesse fixée par la fréquence du courant d'alimentation créant le champ tournant et permettant l'auto-pilotage du moteur. Les défauts sont : démarrage difficile et non autonome et risque de décrochage en cas de surcharge mécanique.

**Rq** : Plus de détail à partir de la page 741 du Cardini, notamment concernant l'équation électrique du moteur, l'expression des puissances (et pertes !) et du rendement qu'il faut savoir pour les questions et également l'expression du couple en mode alternateur.

### 3. Machine à courant continu

Les machines à courant continu font partie des convertisseurs électro-magnéto-mécanique réversibles. Elles ont été les premières à être utilisées massivement dans toutes les gammes de puissance du fait de la simplicité de leur commande en vitesse.

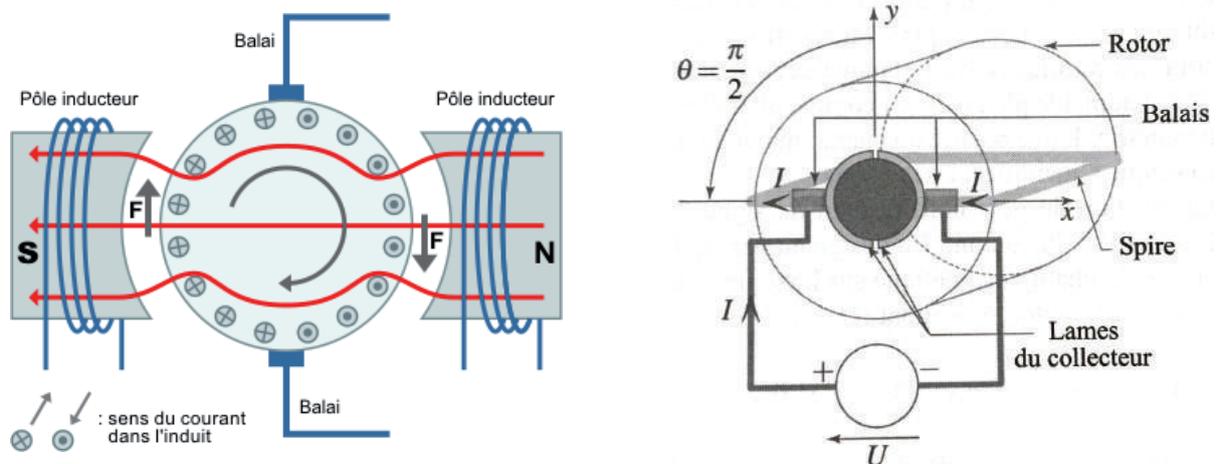
Une machine est dite à courant continu lorsque les grandeurs électriques (potentiels et courants) sont unidirectionnelles. Une machine à courant continu est un convertisseur électromécanique rotatif "réversible" (ou "inversible") permettant :

- une conversion d'énergie électrique en énergie mécanique : fonctionnement moteur ;
- une conversion d'énergie mécanique en énergie électrique : fonctionnement génératrice.

Une machine à courant continu est un convertisseur électromécanique rotatif utilisant :

- les forces de Laplace dans le dispositif mécanique ;
- les phénomènes d'induction électromagnétique dans le dispositif électrique.

#### a) Principe

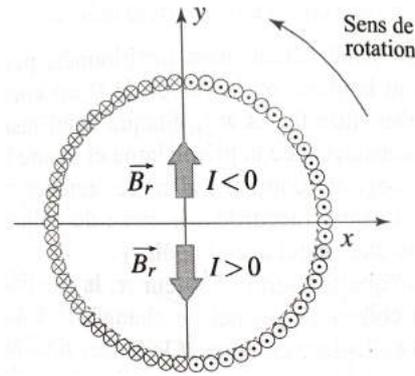


Une machine à courant continu s'analyse en un circuit magnétique, deux circuits électriques et un dispositif de commutation. Il est constitué d'une partie fixe, le stator ou inducteur, solidaire du bâti de la machine dont l'arbre porte la partie mobile, le rotor ou induit. Le collecteur permet d'inverser le sens du commutateur rotatif. Le champ rotorique conserve le même axe de symétrie au cours du temps. Les balais assure le passage du courant, et sont les pièces sensibles à changer régulièrement.

L'axe du champ statorique est selon la direction Nord Sud, l'axe du champ rotorique étant selon la direction et le sens de la ligne polaire.

En première approximation, dans l'entrefer situé entre les deux cylindres, le champ magnétique  $\vec{B}$  est de type radial. En désignant par  $B_r$  la norme du champ magnétique sur l'axe polaire, au centre du rotor, on obtient :

$$\text{si } I > 0, \vec{B}_r = -B_r \vec{u}_y \text{ et si } I < 0, \vec{B}_r = B_r \vec{u}_r$$



## b) Couple électromagnétique

En utilisant les équations que l'on a trouvé dans la partie précédente, on peut faire une analogie entre le moteur synchrone et le moteur à courant continu.

La configuration des deux champs interagissent pour générer le couple est similaires dans les deux machines. Ainsi, pour  $\Omega > 0$ , l'expression du couple reçu par le rotor de la machine à courant continu peut se déduire de celle du couple de la machine synchrone en y reportant les grandeurs analogues aux intensités positive  $I_r$  et  $I_s$ , égales respectivement à  $|I|$  et  $I_e$ , puis celle de  $\alpha$  qui dépend du signe de  $I$ .

La constante de proportionnalité dans le cas de la machine à courant continu, non nécessairement identique à  $K$ , car la forme géométrique des circuits est différente, est notée  $K'$ . Par ailleurs, le produit  $K'I_e$  est homogène à un flux magnétique noté  $\phi_0$ , grandeur positive qui dépend par conséquent du courant d'excitation  $I_e$  et de la constitution de la machine.

Dans le cas  $I > 0$ ,  $\alpha = \pi/2$  et  $|I| = I$  donc  $\Gamma_{em} = K'II_e = \phi_0 I > 0$ , la machine fonctionne en moteur.

Dans le cas  $I < 0$ ,  $\alpha = -\pi/2$  et  $|I| = -I$  donc  $\Gamma_{em} = \phi_0 I < 0$ , la machine fonctionne en génératrice.

Le couple électromagnétique délivré par une machine à courant continue est :

$$\Gamma_{em} = \phi_0 I \quad (29)$$

## c) F.é.m d'induction

**MANIP : Mesure de la vitesse de rotation d'un moteur en fonction de la tension avec le dynamomètre de Jeulin, voir page 147 Quaranta.**

Pour établir l'expression de la force électromotrice  $E_{em}$  reprenons la loi de conservation de la puissance électromagnétique en tenant compte du signe des grandeurs en convention récepteur :

$$P_m = P_e \quad (30)$$

En notant  $\vec{\Omega}$  la vitesse angulaire de rotation du rotor, nous avons :

$$P_m = \Gamma_{em} \Omega = \phi_0 I \Omega = E_{em} I \quad (31)$$

Ainsi la f.é.m. d'induction s'écrit :

$$E_{em} = \phi_0 \Omega \quad (32)$$

La machine fonctionne :

- en moteur quand  $E_{em}I > 0$  : la machine reçoit la puissance électrique et fournit de la puissance mécanique ;
- en générateur  $E_{em}I < 0$  : la machine reçoit de la puissance mécanique et fournit de la puissance électrique.

**Rq : Calcul bien fait aussi dans le Quaranta page 279.**

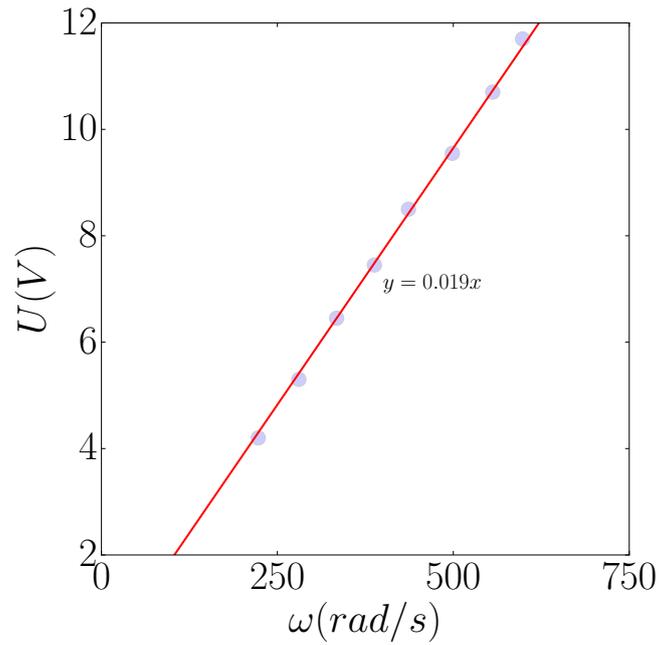
**Rq :** Plus de détail de calcul page 285 du H-prépa mais aussi le bilan énergétique, schéma électrique équivalent, rendement et démarrage du moteur à partir de la page 782 du Cardini.

Cette machine présente des avantages : la tension donne directement la vitesse de rotation synchronisme naturel. L'inconvénient est qu'il faut régulièrement entretenir le collecteur.

### MANIP

On peut procéder à la manip avec le dynamomètre Jeulin. On peut vérifier ce comportement linéaire de la vitesse de rotation en fonction de la tension. On fait varier la tension et avec un oscilloscope on regarde la réponse afin de mesurer la tension :

U(V)	T(s)	$\omega = 2\pi/T(\text{rad/s})$
4,2	0,51	$2,82 \cdot 10^2$
5,3	0,81	$2,24 \cdot 10^2$
6,45	1,21	$1,88 \cdot 10^2$
7,45	1,60	$1,62 \cdot 10^2$
8,5	2,07	$1,44 \cdot 10^2$
9,55	2,65	$1,26 \cdot 10^2$
10,7	3,32	$1,13 \cdot 10^2$
11,7	3,98	$1,05 \cdot 10^2$



## Conclusion

Cette leçon nous a permis de voir les fonctionnements des machines synchrones et à courant continu. Même si ces machines sont très répandues, une troisième espèce de machine électromécanique est de plus en plus utilisée, c'est la machine asynchrone. Cette machine combine les avantages des machines synchrones (la puissance passe dans le rotor, il n'y a donc pas de collecteur) et à courant continu (il n'y a pas de condition de synchronisme à satisfaire).

# L.P. 21 - Induction électromagnétique

Niveau :L2

## Pré-requis

- Électromagnétisme
- Mécanique
- ARQS

## Bibliographie

- Tout en un PSI-PSI\*, Cardini, *Dunod*
- Expériences de Phys. (Electricité), Bellier, *Dunod*
- Cap prépa Phys. PC, Renvoizé, *Pearson*
- Dico Électricité IV, Quaranta, *Pierron*
- BUP n. 891, Article I & II, Deiber et Idda (2007)
- BUP n. 902, Deiber et Idda (2008)
- Électromagnétisme 3, Bertin et Faroux, *Dunod*
- Électromagnétisme MP-PT, Gié, *Lavoisier Tec&Doc*
- Magnétisme : stat., induc. et milieux, Garing, *Ellipses*

**Leçon assez longue surtout avec toutes les expériences qualitative et une quantitative. Donc essayer de ne pas trop détailler tout les calculs, allez à l'essentiel et garder les détails pour les questions. Bien préparer les remarques qui sont inscrites pour les questions avec notamment des définitions et démonstrations. Il y a peut être (et surement) des erreurs de signes donc vérifier tout !.**

## Introduction

Le phénomène d'induction est le nom donné à l'apparition de courants, dits induits, dans un circuit électrique sous l'effet d'un champ magnétique. On va distinguer deux cas :

- Si le circuit est fixe et indéformable, le champ magnétique étant temporellement variable, on parle d'induction de Neumann ;
- si le circuit est mobile ou déformable, le champ magnétique étant stationnaire, on parle d'induction de Lorentz.

Il s'agit de deux aspects du phénomène général d'induction, qui dépendent du point de vue de l'observateur. Dans le cas de Neumann, l'observateur est lié au circuit et soumis au champ magnétique variable créé par un dispositif mobile. Dans le cas de Lorentz, il est lié à la source de champ magnétique et c'est le circuit qui se déplace.

Cette leçon a ainsi pour but de caractériser grâce aux équations de Maxwell ces deux cas et on verra quelques applications qui en découlent.

## Mise en évidence

MANIP : page 393 du Bellier et page 624 du Cardini

on a un courant lorsque le flux de  $\vec{B}$  varie à travers un conducteur, que ce soit l'un ou l'autre qui bouge. Apparition d'un courant induit dépendant du sens de variation de  $\vec{B}$ , loi de Lenz, couplage électro-mécanique : on va voir le cas de Neumann et de Lorentz.

## 1. Induction de Neumann

### a) Loi de l'induction de Neumann

L'induction de Neumann peut se définir ainsi : Lorsqu'un circuit électrique, fixe et indéformable, est plongé dans un champ magnétique extérieur variable dans le temps, il peut être le siège de courants dits induits.

Le phénomène d'induction se traite dans le cadre de l'ARQS magnétique, où le courant de déplacement est négligé. Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j} \text{ et } \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Les équations sur le champ magnétique montrent que  $\vec{B}$  se calcule comme en régime stationnaire (la loi de Biot et Savart et le théorème d'Ampère sont valables).

**Rq** : ARQS magnétique expliqué page 621 du Cardini.

L'équation de Maxwell-Faraday donne au champ électrique une composante à circulation non conservative liée à  $-\partial \vec{B} / \partial t$  :

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1)$$

Ainsi la composante de  $\vec{E}$  à circulation non conservative porte le nom de champ électromoteur de Neumann :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2)$$

où  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur magnétique défini par  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ . Sa circulation porte le nom de force électromotrice (FEM) de Neumann :

$$e = \oint \vec{E}_m \cdot \vec{d\ell} \quad (3)$$

Cette force électromotrice a les mêmes effets qu'un générateur : elle crée les courants induits en fournissant du travail aux charges mobiles le long d'un circuit fermé. Ce terme s'exprime en V.

Lorsque le circuit est fixe, comme c'est le cas en induction de Neumann, on peut intervertir les intégrales spatiales et les dérivations temporelles, selon le calcul suivant :

$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot \vec{d\ell} = \oint_{\Gamma} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{d\ell} = -\frac{d}{dt} \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{d\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{S(\Gamma)} \vec{B} \cdot \vec{d\vec{S}} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (4)$$

en utilisant le théorème de Stokes-Ampère. La surface d'intégration  $S(\Gamma)$  est une surface s'appuyant sur le contour  $\Gamma$ , orientée d'après l'orientation de  $\Gamma$  par la règle de la main droite.

La loi de Faraday s'énonce : la FEM induite dans un circuit filiforme immobile, baignant dans un champ magnétique dépendant du temps, est égale à l'opposé de la variation du flux magnétique à travers ce circuit :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad (5)$$

Cette loi donne la FEM orientée en convention générateur.

On en déduit la loi de modération de Lenz : Le courant induit, par son sens, tend à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

La loi de modération est implicitement contenue dans le signe moins de la loi de Faraday.

## b) Inductance et auto-inductance

Soit deux circuit filiformes orientés  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . on note  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  les champs magnétiques créés respectivement par les courants  $i_1$  et  $i_2$ . Chaque champ crée un flux magnétique à travers chaque circuit.

On appelle flux propre le flux magnétique créé par un circuit à travers lui-même.

On vient de la notation suivante :  $\phi_{i \rightarrow j}$  signifie "le flux à travers le circuit  $j$  du champ magnétique créé par le courant dans le circuit  $i$ ". Les symboles  $\phi_{1 \rightarrow 1}$  et  $\phi_{2 \rightarrow 2}$  correspondent à des flux propres et :

$$\begin{aligned} \phi_{1 \rightarrow 1} &= \iint_{\mathcal{C}_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{dS}_1 \\ \phi_{1 \rightarrow 2} &= \iint_{\mathcal{C}_2} \vec{B}_1 \cdot \vec{dS}_2 \\ \phi_{2 \rightarrow 2} &= \iint_{\mathcal{C}_2} \vec{B}_2 \cdot \vec{dS}_2 \\ \phi_{2 \rightarrow 1} &= \iint_{\mathcal{C}_1} \vec{B}_2 \cdot \vec{dS}_1 \end{aligned} \quad (6)$$

D'après la loi de Biot et Savart,  $\vec{B}_1$  est proportionnel à  $i_1$  et  $\vec{B}_2$  est proportionnel à  $i_2$ . Par conséquent, on peut définir des coefficients de proportionnalité  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M_{1 \rightarrow 2}$  et  $M_{2 \rightarrow 1}$  de la façon suivant :

$$\begin{aligned} \phi_{1 \rightarrow 1} &= L_1 i_1 \\ \phi_{1 \rightarrow 2} &= M_{1 \rightarrow 2} i_1 \\ \phi_{2 \rightarrow 2} &= L_2 i_2 \\ \phi_{2 \rightarrow 1} &= M_{2 \rightarrow 1} i_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Ces quatre coefficients ne dépendent que de la géométrie des circuits. Pour les calculer de façons exacte, il faudrait exprimer les champs magnétiques comme des intégrales par

la loi de Biot et Savart dans les expressions (6). Sauf cas très particulier, ces calculs sont compliqués. On peut cependant donner des informations sur ces coefficients. Si  $i_1 > 0$ , les lignes du champ magnétique  $\vec{B}_1$  traversant le circuit 1 sont orientées dans le sens de  $\vec{dS}_1$ , donc  $\phi_1 > 0$ . Cela montre que le coefficient  $L_1$  est positif. De même  $L_2 > 0$ .

Pour un circuit filiforme, on définit un coefficient d'auto-inductance, grandeur positive dépendant uniquement de la géométrie du circuit, liée au flux magnétique propre par :

$$\phi_{1 \rightarrow 1} = L_1 i_1 \quad (8)$$

$L_1$  est en henry (H). On peut démontrer que les coefficients  $M_{1 \rightarrow 2}$  et  $M_{2 \rightarrow 1}$  sont égaux. On note  $M$  leur valeur commune.

**Rq : voir Perez page 274-275 pour la démonstration.**

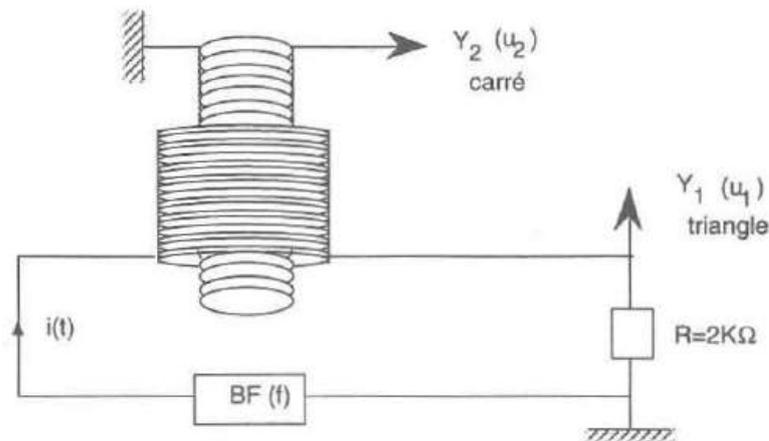
Soit deux circuits filiformes. On définit le coefficient d'inductance mutuelle  $M$ , entre les deux circuits par :

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \quad ; \quad \phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2 \quad (9)$$

Il dépend uniquement de la géométrie de l'ensemble des deux circuits et s'exprime en henry. Son signe peut être quelconque : il dépend des orientations relatives des circuits.

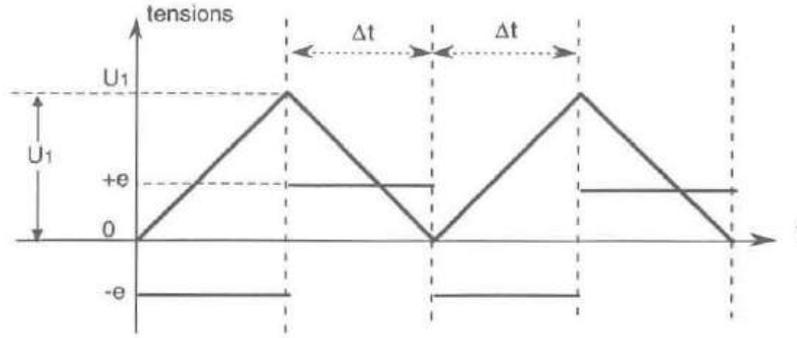
**Application à la mesure de du coefficient M**

**MANIP : Voir le Quaranta page 227 ou 277 selon la version.**



On se propose de vérifier la relation  $e = -d\phi/dt = -M di/dt$  en mesurant le coefficient d'induction mutuelle  $M$ .

Cette vérification est effectuée à partir de l'expérience suivante. On envoie le signal d'entrée  $u(t)$  triangulaire d'amplitude crête à crête  $U_1$  (on l'observe sur la voie 1 ; à la sortie on recueille le signal  $u_2(t)$  carré (voie 2) d'amplitude crête à crête  $2e$ .



On observe ainsi :

- le carré est bien la dérivée du triangle. En effet  $di/dt = (1/R)(du/dt)$ . En faisant varier la fréquence on change la pente des triangles et ainsi on change la valeur de  $dt$  ;
- lorsque la pente est positive,  $e < 0$  et inversement (attention aux sens des enroulements des deux bobines) ;
- $|e|$  augmente avec  $f$ .

Attention il faut s'assurer que la fréquence du signal triangulaire vérifie  $f \ll 1/\tau$  avec  $\tau = L_1/R$ , de sorte que  $L_1(di_1/dt) \ll Ri_1(t)$ .

Ainsi il faut procéder aux mesures. Pour cela :

- pour chaque valeur de la fréquence  $f$ , on vérifie tout d'abord que l'amplitude  $U_1$  conserve une valeur constante ;
- on mesure  $\Delta t$  à l'aide de la base de temps de l'oscilloscope ;
- on calcule  $du_1/dt = \pm U_1/\Delta t$  ce qui donne  $di/dt = \pm(1/R)(U_1/\Delta t)$  car  $i = u_1/R$  ;
- on mesure  $e$  (voie 2).

On dresse alors le tableau suivant :

$f$ (Hz)	$U_1$ (V)	$\Delta t$ (ms)	$\Delta i/\Delta t = (1/R)(U_1/\Delta t)$ (A/s)	$e$ (mV)
...	...	...	...	...

On trace ensuite  $|e| = f(\Delta i/\Delta t)$  : la loi de Lenz-Faraday étant vérifiée, on obtient une droite passant par l'origine. La pente de cette droite est égale au coefficient d'inductance mutuelle  $M$  des deux bobines en Henry.

Dans le cas de deux circuits, couplés par mutuelle induction, l'énergie magnétique est aussi stockée dans le champ magnétique. Attendu que la densité volumique d'énergie magnétique est positive, l'énergie magnétique l'est aussi. On en déduit :

$$E_m = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2 \geq 0 \quad (10)$$

En factorisant l'expression de l'énergie magnétique par  $i_2^2$  celle-ci s'exprime en fonction de  $x = i_1/i_2$  :

$$E_m = i_2^2 \left( \frac{1}{2}L_1x^2 + Mx + \frac{1}{2}L_2 \right) \quad (11)$$

Le polynôme en  $x$  ainsi formé est positif et ne peut pas changer de signe. Il n'admet donc pas de racines réelles ; son discriminant est négatif :

$$M^2 - L_1L_2 \leq 0 \implies M^2 \leq L_1L_2 \quad (12)$$

Le cas maximum est pour  $|M| = \sqrt{L_1L_2}$ , on parle alors de couplage parfait.

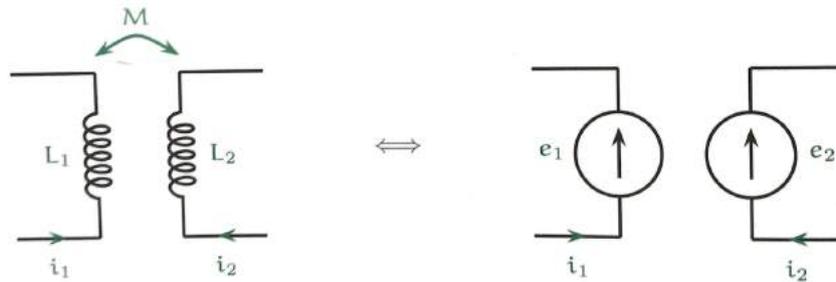
**Rq** : Plus de détail dans Cardini page 630.

On peut également vérifier que  $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$  : pour le 1er dispositif  $L_1$  et  $L_2$  peuvent être mesuré au banc de mesure, pour le second dispositif, on peut estimer  $L$ .

**MANIP** : Voir le Quaranta page 44 pour estimer  $L$ .

### Utilisation des coefficients d'inductance

La schématisation de deux circuits couplés par inductance est donnée sur la figure.



Avec les coefficients d'inductance, les flux dans chaque circuit s'exprime par :

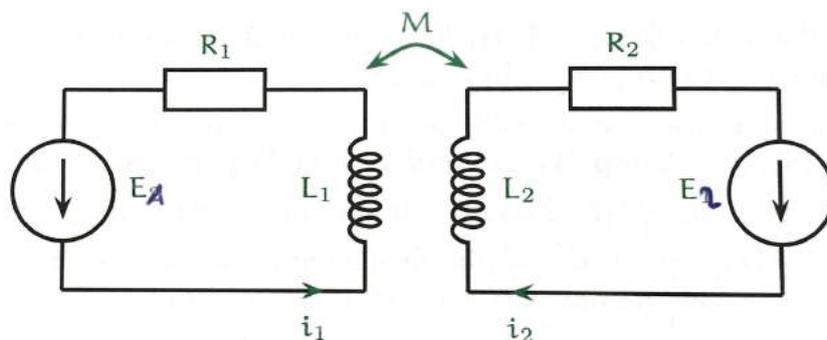
$$\begin{aligned}\phi_1 &= L_1 i_1 + M i_2 \\ \phi_2 &= L_2 i_2 + M i_1\end{aligned}\quad (13)$$

On applique la loi de Faraday à chaque circuit pour avoir les forces électromotrices induites :

$$\begin{aligned}e_1 &= -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ e_2 &= -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}\end{aligned}\quad (14)$$

Cela permet d'avoir le schéma électrocinétique équivalent. On parle de couple car la force électromotrice dans chaque circuit dépend du courant dans les deux circuits.

### c) Énergie magnétique



On considère deux circuits fixes couplés par inductance mutuelle, contenant chacun un générateur (FEM respectives  $E_1$  et  $E_2$ ) et une résistance. les variations éventuelles des

courants provoquent des FEM induites dont les expressions sont données par les relations précédentes. Les équations électrocinétiques des circuits sont donc :

$$\begin{aligned} E_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} &= R_1 i_1 \\ E_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} &= R_2 i_2 \end{aligned} \quad (15)$$

Pour réaliser un bilan énergétique sur l'ensemble des deux circuits, on multiplie la première équation par  $i_1$  et la seconde par  $i_2$ , ce qui fait apparaître des puissances électriques. ON somme les équations ainsi obtenues, ce qui donne :

$$\underbrace{E_1 i_1 + E_2 i_2}_{\text{générateurs}} = \underbrace{R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2}_{\text{effet Joule}} + \underbrace{L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}}_{\text{champ } \vec{B}} \quad (16)$$

On remarque ainsi que le membre de gauche s'interprète comme la puissance délivrée par les deux générateurs. Les deux premiers termes de droite représentent la puissance électrique reçue par les deux résistances qui est convertie en énergie interne (effet Joule). Les quatre derniers termes sont liée aux flux magnétique à travers les circuits : c'est la puissance dépensée par les générateurs pour faire croître le champ magnétique total lorsque les courants varient. Ce terme peut être vu comme la dérivé de :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right) \quad (17)$$

On définit ainsi l'énergie potentielle magnétique de deux circuits :

$$E_p = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \quad (18)$$

qui correspond à l'énergie qu'ont dû fournir les générateurs aux deux circuits pour créer le champ magnétique :

$$E_p = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 d\tau \quad (19)$$

**Rq :** Pour un solénoïde  $L = \mu_0 N^2 S / \ell$  avec  $S$  et  $\ell$  la section et longueur du solénoïde.

En raison de la continuité de  $E_p = (1/2) Li^2$ , l'intensité  $i$  est toujours continue dans une branche contenant une bobine. Si on ouvre brutalement cette branche, une étincelle de rupture prend naissance.

## d) Cas des circuits non filiformes

La notion de flux magnétique ne pose pas de problème lorsque le circuit électrique est filiforme car le contour et la surface de calcul sont bien définis dans ce cas. Lorsque le conducteur est un bloc de métal plongé dans un champ magnétique temporellement variable, l'induction de Neumann se manifeste par des courants volumiques, appelés courant de Foucault. Il y a deux types de résolutions : **Voir page 538-539 du Renvoizé.**

## 2. Induction de Lorentz

Soit un circuit en mouvement dans un référentiel où règne un champ magnétique permanent. L'apparition de courants induits observée dans ce cas est appelée induction de

Lorentz. L'effet du champ magnétique sur le circuit en mouvement équivaut à celui d'un générateur caractérisé par une force électromotrice dite de Lorentz.

La loi d'Ohm est le passage obligé pour faire le lien entre les forces électromotrices induites et les courants induits. Pour appliquer la loi d'Ohm, il faut connaître le champ électromagnétique dans le référentiel du circuit. Or, le champ électromagnétique est en général connu dans le référentiel du laboratoire. Il faut pouvoir en déduire le champ dans le référentiel d'un conducteur en mouvement.

### a) Changement de référentiel

Considérons une charge ponctuelle  $q$  en mouvement dans un laboratoire.

1. Dans le ref. du laboratoire, la charge crée un champ électrique. Comme elle est en mouvement dans le labo., elle constitue un courant et crée donc aussi un champ magnétique.
2. Dans le ref. barycentrique de la charge, la charge est immobile. Elle crée donc seulement un champ électrostatique.

Ainsi le champ magnétique est nul dans un référentiel et pas dans l'autre. Le champ électrique est indépendant du temps dans un ref. et pas dans l'autre.

Ainsi on décrit la transformation galiléenne du champ électromagnétique dans l'ARQS magnétique comme étant : On note 2 un référentiel en translation par rapport à 1. Dans le cadre de l'ARQS magnétique ( $|E_1| \ll c|B_1|$ ), les champs électromagnétiques dans 1 et 2 sont liés par :

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_1 \text{ et } \vec{E}_2 = \vec{E}_1 + v_e \wedge \vec{B}_1$$

où  $\vec{v}_e$  désigne la vitesse d'entraînement de 2 par rapport à 1.

**Rq** : Démonstration page 540 et 541 du Renvoizé.

### b) Champ électromoteur de Lorentz

Le dernier théorème concernant la transformation galiléenne, montre que le champ magnétique n'est pas modifié par changement de référentiel. Désormais, on notera simplement  $\vec{B}$  sa valeur dans les deux référentiels. Il reste simplement  $\vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$  dans le référentiel du conducteur en mouvement.

Soit  $\vec{v}_e$  la vitesse d'un point d'un conducteur dans le référentiel du laboratoire. Soit  $\vec{B}$  le champ magnétique dans le référentiel du laboratoire. On appelle champ électromoteur de Lorentz le terme :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e(M, t) \wedge \vec{B}(M) \quad (20)$$

Ce champ a les mêmes effets qu'un champ électrique et s'ajoute aux champs électriques déjà existants. Sa circulation le long du circuit est la force électromotrice de Lorentz :

$$e = \oint_{\text{circuits}} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} \quad (21)$$

### c) Généralité

Dans le cas général d'un conducteur mobile dans un champ variable dans le temps, le phénomène d'induction résulte de la superposition des "causes"  $-\partial A/\partial t$  et  $\vec{v}_e \wedge \vec{B}$  identifiée. Dans le cas d'un circuit filiforme en particulier, on peut montrer que l'on retrouve la loi expérimentale de Faraday en calculant la circulation de la somme de ces deux termes :

$$e = \oint_{\text{circuit}} \left( -\frac{\partial A}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (22)$$

$d\phi/dt$  représente la variation totale du flux  $\phi$  en fonction de  $t$ , due aux deux causes (variation du champ magnétique au cours du temps et déplacement du circuit).

**Rq** : Plus de détails page 272 du Gié.

**Rq** : Dans le cas relativiste les expressions de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  voir article Wikipédia<sup>3</sup>.

**Rq : Démonstration du cas général** : On considère l'évolution de la surface  $S(t)$  en translation à la vitesse  $\vec{v}_e$ . Le contour  $C(t)$  encadre  $S(t)$ , le contour  $C(t + dt)$  encadre  $S(t + dt)$ . On écrit l'équation de Maxwell-Thompson :

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}, t) d\vec{S} = 0 \quad (23)$$

En particulier :

$$-\iint_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t + dt) \vec{n} dS + \iint_{S(t+dt)} \vec{B}(\vec{r}, t + dt) \vec{n} dS + \iint_{S_{lat}} \vec{B}(\vec{r}, t + dt) \vec{n}_{lat} dS = 0 \quad (24)$$

Or  $\iint_{S_{sat}} \vec{n}_{sat} dS = \int_{C(t)} d\vec{\ell} \cdot \vec{v}_e dt$ .

Donc :

$$\begin{aligned} & -\iint_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t + dt) \vec{n} dS \\ & + \iint_{S(t+dt)} \vec{B}(\vec{r}, t + dt) \vec{n} dS \\ & = - \int_{C(t)} (\vec{d\ell} \wedge \vec{v}_e) \vec{B}(\vec{r}, t + dt) dt \\ & = - \int_{C(t)} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}(\vec{r}, t + dt)) \cdot \vec{d\ell} dt \end{aligned} \quad (25)$$

D'après les propriétés du produit mixte. Exprimons la variation pendant  $dt$  du flux du

3. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Transformations\\_de\\_Lorentz\\_du\\_champ\\_%C3%A9lectromagn%C3%A9tique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Transformations_de_Lorentz_du_champ_%C3%A9lectromagn%C3%A9tique)

champ magnétique à travers la surface variable  $S(t)$  :

$$\begin{aligned}
 d\phi &= \phi(t + dt) - \phi(t) \\
 &= \iint_{S(t+dt)} \vec{B}(\vec{r}, t + dt) \vec{n} dS - \iint_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \vec{n} dS \\
 &= \iint_{S(t+dt)} \vec{B}(\vec{r}, t + dt) \vec{n} dS - \iint_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \vec{n} dS + \iint_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t + dt) \vec{n} dS \\
 &\quad - \iint_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t + dt) \vec{n} dS \\
 &= - \int_{C(t)} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}(\vec{r}, t + dt)) \cdot \vec{d\ell} dt + \iint_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}, t) dt \vec{n} dS \\
 &= - \int_{C(t)} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}(\vec{r}, t)) \cdot \vec{d\ell} dt + O(dt^2) + \iint_{S(t)} \text{rot} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{r}, t) \right) dt \vec{n} dS \\
 &= - \int_{C(t)} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}(\vec{r}, t)) \cdot \vec{d\ell} dt + O(dt^2) + \int_{C(t)} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{r}, t) dt \vec{d\ell}
 \end{aligned} \tag{26}$$

On en déduit alors la formule de la force électromotrice :

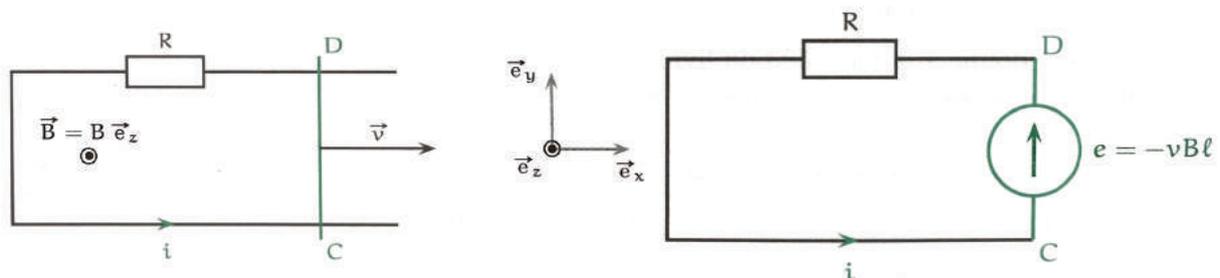
$$e(t) = - \frac{d\phi(t)}{dt} = - \oint_{C(t)} \left( - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{d\ell} \tag{27}$$

**Rq** : Voir le Bertin Faroux page 97.

### 3. Applications

#### a) Exemple des rails de Laplace

**MANIP** : Faire une manip qualitative page 247 du Quaranta. Penser à inverser les branchements pour montrer l'effet. Et apparition d'un courant lorsqu'on force le mouvement !



Les rails de Laplace sont utilisés à titre pédagogique pour mettre en évidence le principe des générateurs. Il s'agit de deux rails horizontaux en cuivre sur lesquels peut coulisser une barre de cuivre. On note  $R$  la résistance du circuit. L'orientation du circuit est fixée arbitrairement. Un opérateur anime la barre d'une vitesse  $\vec{v} = v \vec{e}_x$ , qui devient ainsi une portion de circuit électrique en mouvement dans un champ magnétique extérieur indépendant du temps : c'est un cas d'induction de Lorentz. En chaque point  $M$  de la

barre règne un champ électromoteur  $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = v \vec{e}_x \wedge B \vec{e}_z = -vB \vec{e}_y$ . Le champ électromoteur est nul ailleurs. La FEM induite dans le circuit est obtenue en calculant la circulation de  $\vec{E}_m$  le long du circuit. Ici, nous choisissons arbitrairement de calculer la circulation dans le sens choisi pour  $i$  :

$$e = \oint_{\text{circuit}} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_C^D -vB \vec{e}_y \cdot dy \vec{e}_y = \int_0^\ell -vB dy = -vB\ell \quad (28)$$

Le circuit électrique équivalent est donné sur la figure. Il conduit à l'équation électrique suivante :

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{vB\ell}{R} \quad (29)$$

**Rq :** Si on avait calculer l'intégral dans l'autre sens on aurait un "+" au lieu du "-" pour  $e$ , mais elle aurait été dirigée de  $D$  vers  $C$  donc on aurait la même équation électrique. (**Autres remarques voir page 543 du Renvoizé**).

La loi de Faraday  $e = -d\phi/dt$  est valable quelle que soit la cause de variation du flux magnétique à travers le circuit (mouvement du circuit par rapport aux sources et/ou variations temporelles du champ magnétique).

La barre est parcourue par un courant électrique alors qu'elle est plongée dans un champ magnétique. Elle est donc soumise à des actions de Laplace ( $d\vec{F}_L = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ ) :

$$\vec{F}_L = \int_C^D i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_{y=0}^\ell i dy \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z = \int_{y=0}^\ell -\frac{vB\ell}{R} dy B (+\vec{e}_x) = -\frac{vB^2\ell^2}{R} \vec{e}_x \quad (30)$$

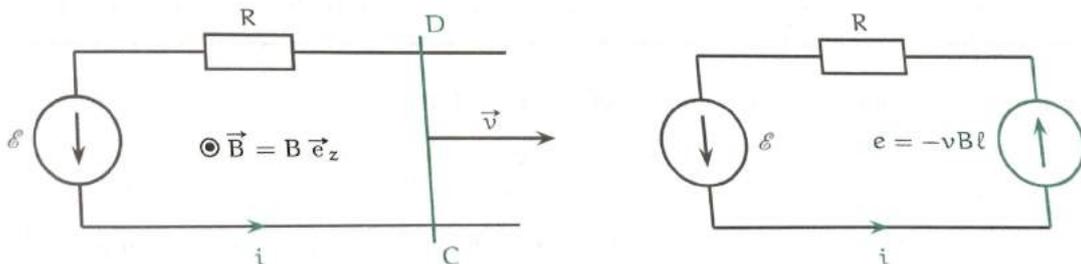
La force de Laplace tend à ralentir la barre quel que soit le signe de  $v$ . La puissance mécanique fournie par la force de Laplace à la barre, dans le référentiel des rails est :

$$P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -\frac{v^2 B^2 \ell^2}{R} \quad (31)$$

Par ailleurs la puissance électrique  $P_e$  fournie par la FEM induite au reste du circuit est, en convention générateur :

$$P_e = e \times i = \frac{e^2}{R} = \frac{v^2 B^2 \ell^2}{R} \quad (32)$$

On constate que  $P_L = -P_e$ . Ce résultat est général pour l'induction de Lorentz dans le cas où le champ magnétique est permanent !. Si le champ magnétique est temporelle variable, il existe en plus une FEM de Neumann et le bilan de puissance est modifiée.



Les rails de Laplace peuvent être utilisés comme un moteur, à condition d'alimenter le dispositif par un générateur électrique. La barre étant initialement immobile, le générateur fait circuler un courant. Étant plongée dans un champ magnétique, la barre est alors soumise à une force de Laplace qui la met en mouvement. La barre est donc le siège d'une FEM induite, ce qui donne le schéma électrique équivalent.

Pour la résolution du problème on choisit l'orientation indiquée sur la figure. Lorsque la barre évolue à la vitesse  $\vec{v}$ , on peut calculer la FEM comme à la section précédente :  $e = -d\phi/dt = -vBl$ . Le schéma électrique équivalent donne l'équation électrique :

$$\mathcal{E} + e = Ri \implies \mathcal{E} - vBl = Ri \quad (33)$$

Dans le référentiel galiléen des rails, la barre est soumise à son poids  $m\vec{g}$ , à la réaction  $\vec{R}$  des rails qui est purement verticale s'il n'y a pas de frottement et aux actions de Laplace :

$$\vec{F}_L = \int_C^D i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_{y=0}^{\ell} idy \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z = i\ell B \vec{e}_x \quad (34)$$

Le théorème de la résultante dynamique appliqué à la barre s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_L \implies m \frac{dv}{dt} = i\ell B \quad (35)$$

On a posé les équations électrique et mécanique du problème. On élimine par exemple  $i$  de ces deux équations, ce qui donne :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 \ell^2}{mR} v = \frac{\mathcal{E} \ell B}{mR} \implies \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau} \quad (36)$$

où  $\tau = mR/(B\ell)^2$  et  $v_{lim} = \mathcal{E}/(B\ell)$ . En supposant que la vitesse initiale de la barre est nulle (phase de démarrage du moteur), la vitesse est :

$$v(t) = v_{lim} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (37)$$

On a ainsi pu voir le principe des moteurs.

**Rq** : Pour le cas où la barre est aussi alimenté par un courant voir le Garing page 203.

**Rq** : Pour des explication pour les machines à courant continue voir page 547 du Renvoizé.

**Rq** : Pour le cas d'un circuit non filiforme page 548 du Renvoizé.

## b) Freinage par courant de Foucault

**MANIP** : Peut être faire la manip de l'aimant qui tombe dans un tube conducteur page 397-398 du Bellier.

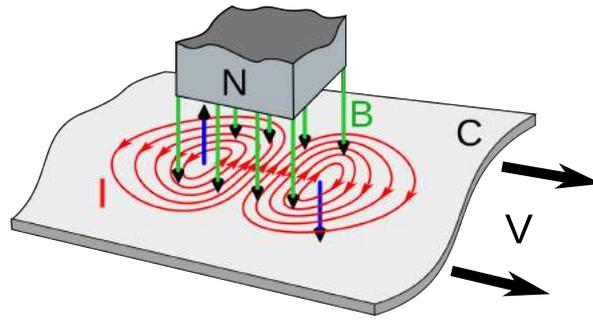


FIGURE 11 – Les courants de Foucault ( $I$ , rouge) induits dans une plaque métallique ( $C$ ) se déplaçant vers la droite par un aimant stationnaire ( $N$ ). Le champ magnétique ( $B$ , vert) est dirigé vers le bas. Les courants génèrent leur propre champ magnétique (flèches bleues) qui produit une force de traînée qui s'oppose au mouvement.

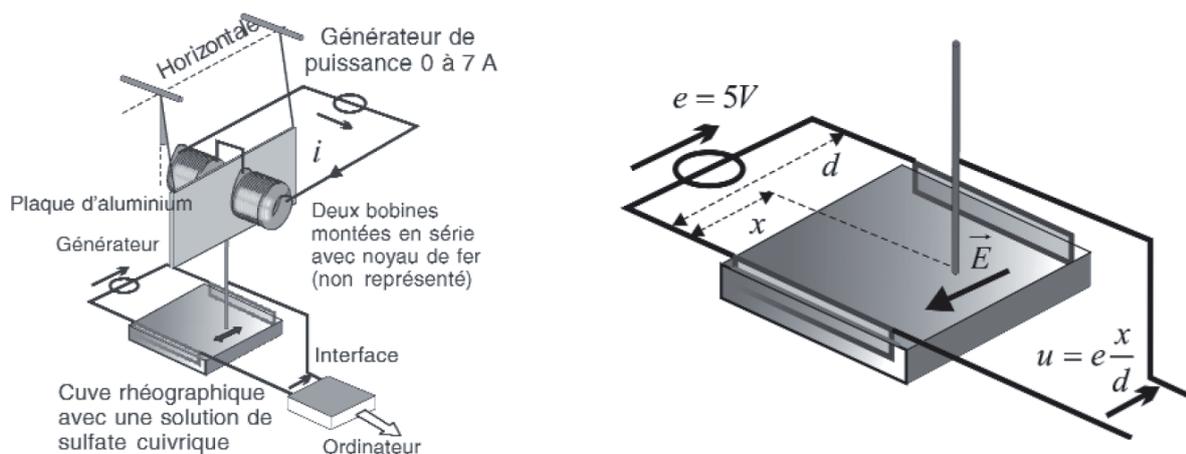
On appelle courants de Foucault les courants électriques créés dans une masse conductrice, soit par la variation au cours du temps d'un champ magnétique extérieur traversant ce milieu (le flux du champ à travers le milieu), soit par un déplacement de cette masse dans un champ magnétique. Ils sont une conséquence de l'induction électromagnétique.

Ces courants ont deux effets :

- ils créent un champ magnétique qui s'oppose à la cause de la variation du champ extérieur (loi de Lenz) ;
- ils provoquent un échauffement par effet Joule de la masse conductrice d'autant plus fort que la vitesse entre l'inducteur et la pièce conductrice est importante.

Lorsque la variation de flux est due à un déplacement du milieu devant un champ magnétique constant, les courants de Foucault sont responsables de l'apparition de forces de Laplace qui s'opposent au déplacement, d'où l'effet de freinage observé sur les systèmes utilisant ce genre de dispositif.

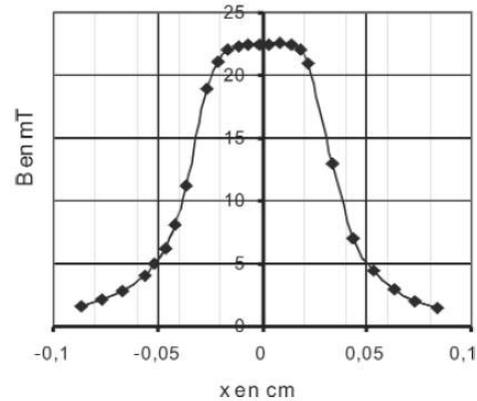
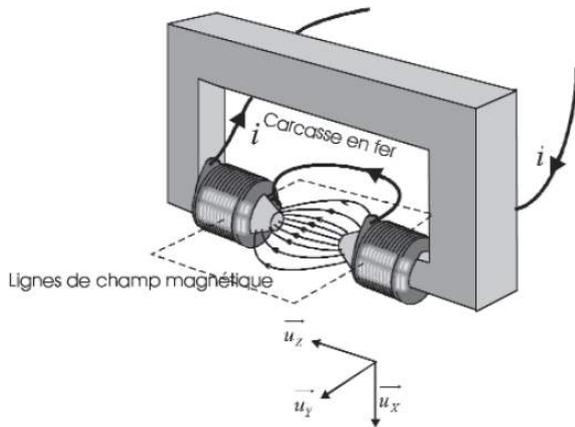
**Expliquer la manip issu du BUP. Je ne pense pas qu'elle soit réalisable le jour-J au vu du matériel nécessaire.**



Soit une plaque en aluminium de  $30\text{cm} \times 30\text{cm}$  suspendue à deux fils parallèles qui peut effectuer des oscillations dans le champs de pesanteur. Des bobines d'axe commun horizontal sont placées de part et d'autre de la plaque de telle sorte que celle-ci oscille dans le plan médiateur du système. Un générateur associé aux bobines permet de modifier la valeur du champ magnétique et par conséquent du coefficient d'amortissement. La position

du mobile est repérée par une méthode rhéographique.

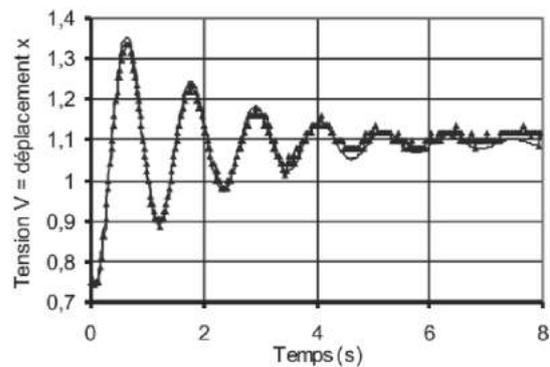
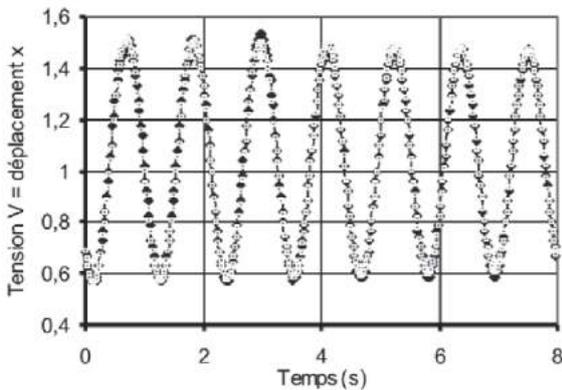
Le champ magnétique n'est pas uniforme dans l'entrefer. Mais en tout point  $M$  du plan médiateur des bobines, il est perpendiculaire à ce plan, que nous noterons  $XOY$  où  $O$  est le centre du dispositif expérimental.



La norme du champ magnétique peut être mesurée sur l'axe  $OX$  de part et d'autre de  $O$  au moyen d'une petite sonde à effet Hall. La courbe nous montre qu'il y a invariance par rotation autour de l'axe  $OZ$ . Nous pouvons alors écrire  $\vec{B}(M) = B_z(R)\vec{u}_z$  à l'intensité dans les bobines fixées. La norme est maximale en  $O$ .

## Résultats expérimentaux

Plusieurs enregistrements ont été faits pour  $I$  variant de 0A à 4A dans les bobines.



On remarque que plus l'intensité est importante plus l'amortissement est significatif et rapide. On peut essayer de modéliser mathématiquement cette réponse tel que  $u(t)A + C \exp(\lambda t) \cos(\omega t + \phi)$  typique d'un oscillateur harmonique amorti par frottement fluide. On voit que le modèle fonctionne relativement bien.

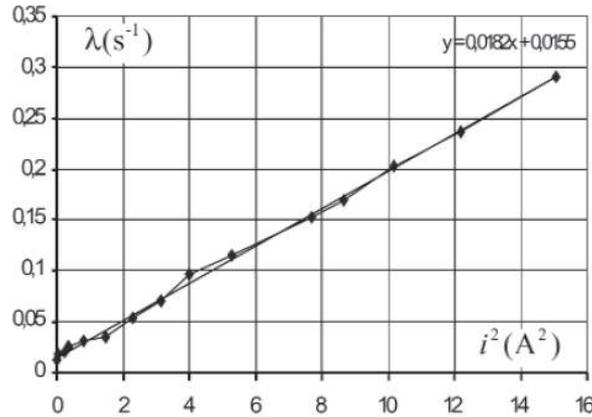
La modélisation utilisée signifie que la plaque est soumise à une force de frein de la force  $\vec{F}_L = -\alpha \vec{v}$  et qu'en l'absence d'amortissement, les oscillations de la plaque de masse  $m$  sont harmoniques. En effet comme la puissance des tensions des fils de suspension de longueur  $L$  est nulle, le théorème de la puissance cinétique appliqué à la plaque en translation donne une équation différentielle vérifiée par l'angle  $\theta$  que forment un des fils avec la verticale :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m L^2 \left[ \frac{d\theta}{dt} \right]^2 + mgL(1 - \cos \theta) = -\alpha L^2 \left[ \frac{d\theta}{dt} \right]^2 \right) \quad (38)$$

Dans l'hypothèse des oscillations de faibles amplitude, on peut faire l'approximation  $\theta \simeq (x - x_0)/L$  et il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{g}{L}x &= \frac{g}{L}x_0 \\ \implies \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2x &= \omega_0^2x_0 \end{aligned} \quad (39)$$

avec  $\lambda = \alpha/2m$ . Ainsi expérimentalement on peut retrouver  $\lambda$  en fonction de l'intensité du courant dans les bobines.



Le graphe montre que les résultats expérimentaux sont en bon accord avec le modèle :

$$\lambda = \lambda_0 + ki^2 \quad (40)$$

$\lambda_0$  est lié à l'amortissement résiduel (frottement avec l'air). Il est donc surprenant que  $\lambda - \lambda_0$  soit proportionnelle au carré de l'intensité dans les bobines :  $\lambda - \lambda_0 = 0,0182i^2$ .

## Confrontation avec un modèle

Le modèle usuellement développé à un niveau élémentaire repose sur une hypothèse essentielle. La densité de courant  $\vec{j}$  dans la zone de champ magnétique ne dépend que du champ électromoteur  $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$  qui règne dans le conducteur. Comme  $\vec{v} = v\vec{u}_y$  et  $\vec{B}(M) = B_z(R)\vec{u}_z$ , nous obtenons  $\vec{E}_m = vB_z(R)\vec{u}_x$  puis  $\vec{j} = \gamma\vec{E}_m = \gamma vB_z(R)\vec{u}_x$  en notant  $\gamma$  la conductivité de l'aluminium.

La densité volumique de force de Laplace s'écrit :

$$\vec{f}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} = -\gamma v B_z^2 \vec{u}_y \quad (41)$$

Pour calculer la résultante des forces de Laplace, il suffit d'intégrer sur le volume conducteur d'épaisseur  $h$  :

$$\vec{F}_L = -\gamma v \left| \int_{R=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{Z=h/2}^{h/2} B_z^2 R dR d\theta dZ \right| \vec{u}_y \quad (42)$$

La force de Laplace est bien une force opposée à la vitesse du mobile du type  $\vec{F}_L = -\alpha\vec{v}$ . Le coefficient de frottement  $\alpha$  peut se simplifier :

$$\alpha_{theo} = 2\pi h \gamma \int_{R=0}^{\infty} B_z^2 R dR \quad (43)$$

Application numérique : pour  $i = 1A$ ,  $\lambda - \lambda_0 = 0,0182s^{-1}$  d'où  $\alpha_{exp} = 0,0138kg$  pour  $m = 381g$ . Connaissant  $B_z(R)$  expérimentalement on peut estimer avec un ordinateur :

$$C = \int_{R=0}^{\infty} B_z^2 R dR = 2,53.10^{-7} T^2 m^2 \quad (44)$$

Comme  $\gamma_{Al} = 3,61.10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ ,  $\alpha_{theo} = 0,086kg/s$ . On a le même ordre de grandeur mais un facteur 6 du au fait des différentes hypothèses faites dans cette études.

**Rq :** Plus d'explications sur les articles BUP 891 et 902.

Le freinage par courants de Foucault intervient dans de nombreuses applications technologiques modernes. Outre les freins pour camions, on peut citer la limitation des oscillations des satellites et des vibrations des fusées ou des navettes spatiales.

## Chauffage par induction

(Facultatif si le temps)

Voir page 170 du Garing

## Conclusion

Au cours de cette leçon, nous avons étudié le phénomène d'induction, et nous avons vu des applications particulièrement utiles dans le cadre quotidien comme le principe de fonctionnement des moteurs ou bien le freinage par courant de Foucault. Dans une autre leçon vous allez justement voir le principe de fonctionnement de moteur synchrone, asynchrone et des moteurs à courant continu.

**Rq :** Être au point sur les jauges de Lorentz et de Coulomb.

# L.P. 22 - Rétroaction et oscillation

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- AOP
- Système linéaire
- Fonction de transfert
- Notions d'oscillateurs

## Bibliographie

- Physique Tout en un PC-PC\*, Sanz, *Dunod*
- Physique Tout en un PSI, Cardini, *Dunod*
- Mécanique, Perez, *Dunod*
- Électronique PSI, Brenders, *Bréal*
- Expériences de physique, Bellier, *Dunod*
- Électronique, Perez *Dunod*

**N.B. : Leçon longue donc faire le tri dans le choix du contenu de la leçon et ne pas forcément détailler tout les calculs !!!**

## Introduction

La mesure du temps est un problème lié au développement de l'humanité. Les premières horloges étaient les cadrans solaires mais elles étaient tributaires de l'ensoleillement. Vers 3000 ans avant J.C., les Égyptiens inventent les premières horloges à eau ou clepsydras. Pour mesurer le temps, il est nécessaire de disposer d'un système qui reproduit un phénomène de manière périodique et ce avec la plus grande précision possible : ce système est un oscillateur. La première horloge à pendule pesante est mise au point par Christiaan Huygens en 1657. Depuis les horloges n'ont eu de cesse d'augmenter la stabilité du système pendulaire pour améliorer la précision de l'horloge. Le mouvement du pendule sert de régulateur mais à cause des divers frottements, son amplitude s'atténue et il faut lui communiquer une petite impulsion pour entretenir le mouvement. C'est le rôle du poids ou du ressort spiral encore appelée organe moteur, cette impulsion doit être donnée au niveau de la position d'équilibre stable du régulateur par un système de rouage à roues et pignons dentés servant en plus au mouvement des aiguilles.

De nos jours, les horloges mécaniques tendent à disparaître car de nombreux circuits électroniques produisent un signal périodique : ces circuits sont des oscillateurs.

Certains oscillateurs produisent des signaux sinusoïdaux (ou quasi sinusoïdaux) alors que d'autres, produisent des signaux rectangulaires, sont appelés multivibrateurs.

**Rétroaction** : consiste à "réinjecter" une fraction du signal de sortie sur l'entrée de l'amplificateur. On parle alors de système bouclé.

Dans cette leçon on va ainsi étudier comment des systèmes oscillent et quelles sont les causes de cette oscillation mais également comment un système est auto-entretenu.

# 1. Rétroaction et systèmes bouclés

Nous savons qu'un système est un dispositif physique qui fait correspondre une grandeur de sortie à une grandeur d'entrée. Ce concept est très général puisqu'on le trouve dans tous les domaines de la physique, et même en biologie :

- En électronique : les amplificateurs sont des systèmes qui font correspondre une tension de sortie à une tension d'entrée ; on définit alors les facteurs d'amplification en tension, en puissance et en intensité, rapports des grandeurs de sortie sur celles d'entrée.
- En électromécanique : les moteurs électriques sont des systèmes qui réalisent une conversion de puissance électrique en puissance mécanique ; précisément, la grandeur d'entrée peut être la puissance électrique d'alimentation du moteur et la grandeur de sortie la puissance mécanique disponible sur l'arbre du moteur, ou la vitesse de rotation de ce dernier.
- En optique : les lentilles font correspondre une répartition de l'amplitude complexe, ou de l'intensité, de l'onde lumineuse dans un plan image, à une répartition de cette même grandeur dans un plan objet ; le grandissement transversal est alors le rapport des extensions spatiales dans les deux plans objet et image.
- En thermodynamique : un four peut être considéré comme un système qui fait correspondre une grandeur de sortie, la température du four, à la grandeur d'entrée, la puissance électrique fournie au résistor chauffant.
- En biologie : les organismes vivants sont aussi des systèmes qui fournissent, par l'intermédiaire du métabolisme interne, une grandeur de sortie, l'énergie nécessaire à la vie de l'organisme (travail pour ses déplacements, compensation des pertes d'énergie par conduction thermique ou par évaporation, ...) à partir d'une grandeur d'entrée, l'énergie apportée par la nutrition des aliments absorbés.

Cependant, lorsqu'ils se réduisent à cette seule correspondance, entrée vers sortie, les systèmes présentent un inconvénient majeur : ils ne prennent pas en compte la valeur effective de la grandeur de sortie, alors que cette dernière peut ne pas satisfaire aux attentes, soit que le système n'ait pas pu être totalement maîtrisé lors de sa conception, soit que des actions extérieures indésirables le perturbent de façon significative.

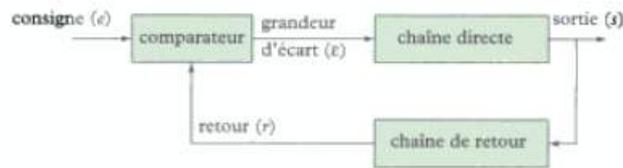
Il apparaît alors indispensable d'introduire le concept général de rétroaction ou de système bouclé.

## a) Les systèmes bouclés

Qu'est ce qu'un système bouclé ou système asservi ? Un système asservi est un dispositif technique qui permet d'asservir une grandeur physique à une consigne. Un système de ce type ne doit pas nécessiter l'intervention d'un opérateur humain : il est de ce fait automatique.

### Structure d'un système asservi

Un système asservi est un système dans le quel la grandeur de sortie est utilisée pour commander l'élément qui agit sur cette grandeur. Un tel système est qualifié de système bouclé. Un système asservi simple possède la structure suivant, où chaque bloc a une fonction bien définie :



La chaîne directe est l'organe qui permet de commander la grandeur à asservir. Son entrée correspond à la sortie du comparateur et sa grandeur de sortie est la grandeur à asservir.

Une chaîne directe est un organe de commande qui dispose :

- d'un actionneur permettant d'agir sur la grandeur de sortie
- d'une amplification de puissance permettant de fournir l'énergie nécessaire à l'actionneur

La chaîne de retour est un dispositif comportant un capteur (convertit une grandeur physique quelconque sous forme d'un signal électrique qui est l'image de cette grandeur) qui permet de convertir la grandeur à asservir (vitesse, position, température ...) en un signal que le comparateur peut ensuite traiter.

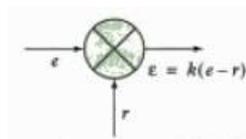
Le comparateur est l'organe de comparaison. Ses entrées sont constituées par la grandeur de retour ( $r$ ) et la consigne ( $e$ ). Sa sortie est la grandeur d'écart ( $\varepsilon$ ). Un comparateur est un système produisant un signal fonction de la différence des signaux d'entrée et de retour ( $e - r$ ).

Les grandeurs  $e$ ,  $\varepsilon$  et  $r$  doivent être de la même nature physique. Dans la majorité des cas, nous rencontrerons des comparateurs linéaires.

Un comparateur linéaire est un système produisant un signal  $\varepsilon$  proportionnel à la différence des signaux d'entrée ( $e - r$ ) :

$$\varepsilon = k(e - r) \quad (1)$$

Souvent,  $k = 1$  et le comparateur est représenté par le schéma suivant :



### Transmittance d'un système linéaire

Un système linéaire, à une entrée notée  $e$  et une sortie notée  $s$ , est caractérisé par sa fonction de transfert ou transmittance que l'on écrit en notation complexe ou en notation symbolique de Laplace.

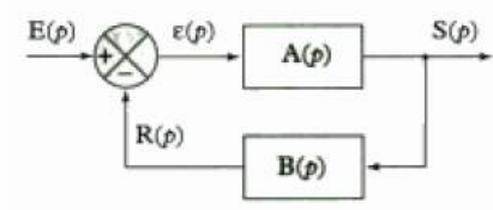
La transmittance d'un système linéaire est donnée par :

- $\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$  où  $\underline{e}$  et  $\underline{s}$  sont les expressions complexes respectivement de la grandeur d'entrée et de la grandeur de sortie
- $A(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ , où  $E(p)$  et  $S(p)$  sont les expressions sous forme symbolique de Laplace respectivement de la grandeur de d'entrée et de la grandeur de sortie.

### Calcul de la transmittance d'un système bouclé

Notons  $A(p)$  la transmittance de la chaîne directe et  $B(p)$  la transmittance de la chaîne de retour. La consigne est représenté par le signal  $E(p)$ , la grandeur d'écart par  $\varepsilon(p)$ , la

grandeur de sortie  $S(p)$  et la grandeur de retour par  $R(p)$ . Le système bouclé se représente sous la forme :



La transmittance d'un système asservi en boucle ouverte est :

$$H_{BO} = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} \quad (2)$$

D'après la figure nous avons :

$$\begin{aligned} R(p) &= B(p)S(p) \\ S(p) &= A(p)\varepsilon(p) \end{aligned} \quad (3)$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} R(p) &= B(p)A(p)\varepsilon(p) \\ \Leftrightarrow H_{BO}(p) &= \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = A(p)B(p) \end{aligned} \quad (4)$$

La transmittance d'un système asservi en boucle ouverte est le produit des transmittance  $A(p)$  et  $B(p)$  des chaînes directe et de retour :

$$H_{BO}(p) = A(p)B(p) \quad (5)$$

### Transmittance en boucle fermé

La transmittance d'un système asservie en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad (6)$$

où  $E(p)$  et  $S(p)$  sont les expressions sous forme symbolique de Laplace respectivement de la grandeur d'entrée et de la grandeur de sortie.

D'après la figure nous avons :

$$S(p) = A(p)\varepsilon(p), \quad R(p) = B(p)S(p) \quad \text{et} \quad \varepsilon(p)E(p) - R(p)$$

soit,

$$S(p) = A(p)[E(p) - B(p)S(p)]$$

Nous en déduisons la transmittance en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{A(p)}{1 + H_{BO}(p)} \quad (7)$$

## Cas d'une chaîne directe à grand gain

Dans cette partie, nous travaillerons en notation complexe pour une meilleure compréhension. La transmittance en boucle fermée s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)} = \frac{\underline{A}(j\omega)}{1 + \underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)} \quad (8)$$

On parle de chaîne directe à grand gain lorsque  $|\underline{A}(j\omega)|$  est suffisamment élevé pour considérer :

$$|\underline{H}(j\omega)| = |\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)| \gg 1 \quad (9)$$

La transmittance en boucle fermée se simplifie alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &\approx \frac{\underline{A}(j\omega)}{\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)} = \frac{1}{\underline{B}(j\omega)} \\ \implies H(p) &\approx \frac{1}{B(p)} \end{aligned} \quad (10)$$

La transmittance d'un système asservi ayant une chaîne directe à grand gain ne dépend donc que de la transmittance de la chaîne de retour. Les caractéristiques de la chaîne de retour déterminent les caractéristiques du système bouclé dans le cas où la chaîne directe possède une amplification importante.

## Régime propre et stabilité

### Stabilité

La stabilité d'un système physique comportant une entrée et une sortie peut se définir ainsi : Un système bouclé évoluant en régime libre (entrée  $e$  nulle) est stable lorsque la sortie  $s$  tend spontanément vers 0.

L'étude de la stabilité d'un système bouclé linéaire peut se faire à partir de sa transmittance :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (11)$$

où  $N(p)$  et  $D(p)$  sont deux polynômes en  $p$ . En se limitant aux systèmes du second ordre, nous aurons toujours :

$$\text{degré numérateur} \leq \text{degré du dénominateur} \leq 2$$

le numérateur et le dénominateur pouvant se mettre sous la forme :

$$N(p) = b_0 + b_1p + b_2p^2 \text{ et } D(p) = a_0 + a_1p + a_2p^2$$

De la définition de  $H(p)$  il vient :

$$b_0E(p) + b_1pE(p) + b_2p^2E(p) = a_0S(p) + a_1pS(p) + a_2p^2S(p)$$

ce qui donne l'équation différentielle :

$$b_0e(t) + b_1\frac{de(t)}{dt} + b_2\frac{d^2e(t)}{dt^2} = a_0s(t) + a_1p\frac{ds(t)}{dt} + a_2p^2\frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

La sortie  $s(t)$  est ainsi la somme d'un régime forcé  $s_f(t)$  et d'un régime libre  $s_\ell(t)$ . Si le système n'est pas intégrateur ( $a_0 \neq 0$ ), le régime forcé est borné, donc la stabilité dépend du régime libre, qui vérifie l'équation homogène (sans second membre) :

$$a_0s_\ell(t) + a_1\frac{ds_\ell(t)}{dt} + a_2\frac{d^2s_\ell(t)}{dt^2} = 0$$

Les critères de stabilité du système dépendront ainsi des coefficients  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  du dénominateur de la transmittance du système bouclé.

## Système du premier ordre

Pour un système du premier ordre, nous avons :

$$\text{degré du numérateur} \leq \text{degré du dénominateur} \leq 1$$

Cette condition équivaut à :  $a_2 = 0$ ,  $a_1 \neq 0$  et  $a_0 \neq 0$ , soit  $D(p) = a_0 + a_1 p$ . Le régime libre  $s_\ell(t)$  vérifie donc l'équation différentielle :

$$a_1 \frac{ds_\ell(t)}{dt} + a_0 s_\ell(t) = 0, \text{ soit } \frac{a_1}{a_0} \frac{ds_\ell(t)}{dt} + s_\ell(t) = 0$$

Les solutions de cette équation sont du type  $s_\ell(t) = A \exp(-a_0 t / a_1)$ . Lorsque  $t$  tend vers l'infini cette solution tend vers 0 si  $a_0 / a_1 > 0$  soit  $a_0$  et  $a_1$  de même signe.

Un système du premier ordre tel que le dénominateur de la transmittance est du type  $a_1 p + a_0$  est stable si  $a_0$  et  $a_1$  sont du même signe.

## Système du second ordre

Pour un système du second ordre nous avons :

$$a_2 \frac{d^2 s_\ell(t)}{dt^2} + a_1 \frac{ds_\ell(t)}{dt} + a_0 s_\ell(t) = 0$$

En écrivant l'équation caractéristique on va trouver 3 cas selon la valeur du discriminant  $\Delta$ . On en déduira que pour un système du second ordre tel que le dénominateur de la transmittance est du type  $a_2 p^2 + a_1 p + a_0$  est stable si  $a_2$ ,  $a_1$  et  $a_0$  sont de même signe. Si  $a_1 = 0$  le système est à la limite de la stabilité et se comporte comme un oscillateur sinusoïdal.

## Généralisation

Nous avons vu que l'étude de la stabilité se ramène à la recherche des racines de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle du système. Les racines de cette équation caractéristique sont aussi les solutions de l'équation  $D(p) = 0$ . Elles sont appelées dans ce cas les "pôles de  $H(p)$ ".

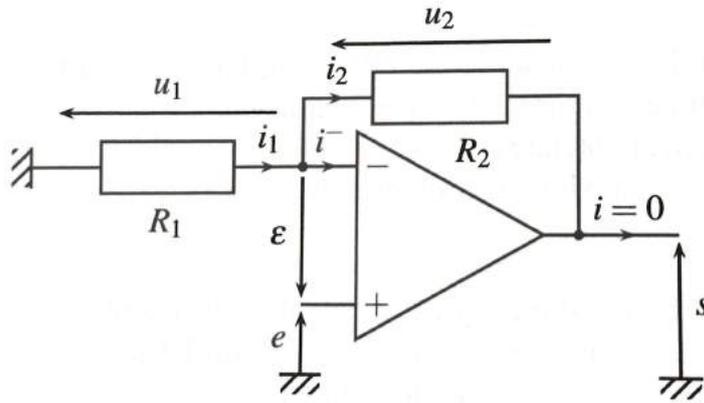
Un système linéaire est stable si les pôles de sa transmittance sont à partie réelles négatives.

D'autre part, comme la transmittance d'un système bouclé s'écrit  $H(p) = A(p)/(1 + H_{BO}(p))$ , rechercher la stabilité d'un système bouclé revient à rechercher les parties réelles des racines du dénominateur :  $1 + H_{BO}(p) = 0$ .

Un système bouclé linéaire est stable si les parties réelles des solutions de l'équation  $1 + H_{BO}(p) = 0$  sont négatives.

## b) Amplificateur non inverseur

Le montage amplificateur non inverseur est conçu afin d'amplifier la tension d'entrée. L'amplificateur opérationnel est rétro-actionné sur sa borne inverseuse.



Un montage réalisé avec un amplificateur opérationnel s'étudie avec deux équations :  
 - la fonction de transfert de l'amplificateur opérationnel ;  
 - une relation liant  $\varepsilon$  aux tensions d'entrée, de sortie et des impédances des dipôles du montage

Celle-ci est obtenue au moyen de la loi des nœuds, écrite sous forme de potentiels. A l'entrée inverseuse :

$$i_1 = i_2 + i^+$$

D'après la loi d'Ohm, en convention récepteur :

$$i_1 = \frac{u_1}{R_1} = \frac{0 - v^-}{R_1} \text{ et } i_2 = \frac{u_2}{R_2} = \frac{v^- - s}{R_2}$$

Attendu que  $i^- = 0$ , la loi des nœuds devient :

$$\frac{0 - v^-}{R_1} = \frac{v^- - s}{R_2} \text{ soit } v^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s$$

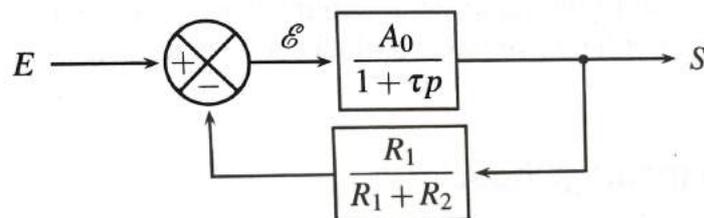
avec  $v^+ = e$ , on forme alors :

$$\varepsilon = v^+ - v^- = e - \frac{R_1}{R_1 + R_2} s$$

On aboutit donc finalement aux deux équations, écrites dans le formalisme de Laplace :

$$\begin{cases} S(p) = \frac{A_0}{1 + \tau p} \varepsilon(p) \\ \varepsilon(p) = E(p) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} S(p) \end{cases} \quad (12)$$

qui décrivent le schéma bloc suivant :



En effet le signe "-" de  $\varepsilon(p)$  est obtenu grâce au signe dans le comparateur.

Un montage à amplificateur opérationnel se met sous la forme d'un système bouclé, avec comparateur, chaîne direct et chaîne retour.

## Fonction de transfert

- L'expression de la fonction de transfert du montage s'opère :
- soit en éliminant  $\varepsilon(p)$  dans les deux équations du montage ;
  - soit en utilisant la formule dans dans le cours de SII :

$$H(p) = \frac{\frac{A_0}{1+\tau p}}{1 + \frac{A_0}{1+\tau p} \frac{R_1}{R_1+R_2}} \quad (13)$$

Par exemple avec la première méthode :

$$(1 + \tau p)S(p) = A_0\varepsilon(p) = A_0 \left( E(p) - \frac{R_1}{R_1 + R_2} S(p) \right)$$

soit en multipliant par  $R_1 + R_2$  :

$$(R_1 + R_2)(1 + \tau p)S(p) = A_0[(R_1 + R_2)E(p) - R_1S(p)]$$

au final :

$$(R_1 + A_0R_1 + R_2 + (R_1 + R_2)\tau p)S(p) = A_0(R_1 + R_2)E(p)$$

Ce résultat se simplifie grandement avec  $A_0 \gg 1$ . En effet  $R_1 + A_0R_1 \approx A_0R_1$ . De plus  $R_1$  et  $R_2$  sont du même ordre de grandeur, ainsi  $R_2 \ll A_0R_1$ . On trouve ainsi un passe bas du premier ordre, écrit sous forme canonique en divisant par  $A_0R_1$  :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{\tau}{A_0} p}$$

La fonction de transfert d'un montage à amplificateur opérationnel, modélisé par un passe-bas du premier ordre, se simplifie toujours compte tenu de  $A_0 \gg 1$ .

## Stabilité du montage bouclé

Le premier enseignement que l'on tire de cette fonction de transfert, est la stabilité du montage. En effet les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert sont de même signe : le système est donc stable.

La rétroaction sur la borne inverseuse, nommée rétroaction négative, est stabilisatrice.

## 2. Oscillateurs quasi sinusoïdaux

Il existe plusieurs grands types de montages électroniques qui délivrent des oscillations, sinusoïdales pour la génération de fréquences, rectangulaires pour les signaux d'horloge des ordinateurs par exemple. Nous allons dans cette partie étudier les oscillateurs quasi sinusoïdaux.

Un oscillateur quasi-sinusoïdal est un oscillateur qui génère un signal comprenant un harmonique principal et des harmoniques secondaires à faible effet sur le signal sinusoïdal. La forme du signal est alors proche d'une sinusoïde (dite quasi sinusoïde).

## a) Éléments structurels d'un oscillateur quasi sinusoïdal

Afin d'obtenir un système quasi sinusoïdal plusieurs critères doivent être respecté :

- Nécessité d'une instabilité d'un système linéaire comme source d'oscillations ;
- Nécessité d'un filtre : la fréquence du signal ne peut être ajustée de manière précise que grâce à une sélection par filtrage ;
- Nécessité d'une amplification : la présence d'un filtre passif et, de manière générale, la présence de composants résistifs, conduit à une atténuation du signal. Il y a donc nécessité d'amplifier le signal. Ce rôle est assuré par le composant actif, dont le plus simple est qu'il soit linéaire : l'AOP ;

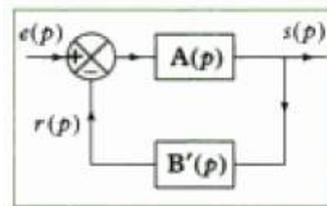
### Structure d'un oscillateur quasi sinusoïdal

Un oscillateur quasi sinusoïdal est donc un système instable. En électronique, l'instabilité est obtenu par bouclage à partir des fonctions stables amplification et et filtrage. Le filtre, qui a pour rôle de sélectionner la fréquence d'oscillation , est généralement passif. Aussi, l'amplificateur compense les pertes d'énergie, et de niveau de signal, dues au filtre. D'autres critères entrent en ligne de compte de manière indirect pour déterminer la structure finale qui doit être :

- minimale ;
- limitée en coût et en mise en œuvre.

Pour cela, l'électronique spécialise les chaines, c'est à dire confie un nombre limité de fonctions à une chaîne, ce que nous faisons en choisissant une fonction d'amplification et une fonction de filtrage.

### Critère de fonctionnement



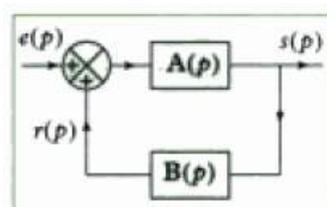
### Fonction de transfert d'un système linéaire à réaction négative

A partir de la figure, nous reprenons les résultats concernant la théorie des système linéaires bouclés. La fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B'(p)} \quad (14)$$

Dans le cas où le dénominateur s'annule, la fonction de transfert devient infinie, ceci quel que soit le signal d'entrée, ce qui fait que la sortie devrait devenir infinie.

Dans la pratique, cette conséquence entrainera la saturation de l'élément actif.



## Fonction de transfert d'un système linéaire à réaction positive

Dans ce cas là on a  $B(p) = -B'(p)$ , d'où :

$$H(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)}{1 - A(p)B(p)} \quad (15)$$

### Structure de boucle fermé

Dans le cas particulier où l'entrée est nulle, cas qui nous intéresse, le schéma se simplifie encore et l'on obtient une boucle dont les équations de fonctionnement sont :

$$s(p) = A(p)r(p) \text{ et } r(p) = B(p)s(p)$$

Nous obtenons alors :  $s(p) = A(p)B(p)s(p)$ , donc  $A(p)B(p) = 1$ .

Une structure de boucle (A,B) fermée avec  $A(p)B(p) = 1$  permet de réaliser un oscillateur.

### Condition d'existence des oscillations

Pour obtenir des oscillations, l'ordre de la boucle est au minimum égal à 2 et donnent des solutions du type  $s(t) = S_m \exp(-m\omega_0 t) \cos(\omega t + \phi)$ .

En réalité, l'entrée n'est jamais nulle, bien qu'aucune tension n'y soit appliquée par l'expérimentateur. Pour autant, nous ne connaissons jamais cette tension car elle est constituée du bruit électronique. De la sorte, le schéma fonctionnel à considérer lors du démarrage est la dernière figure avec  $H(p) = s(p)/e(p) = A(p)/(1 - A(p)B(p))$ .

Si le système est stable ( $m > 0$ ), le signal d'entrée génère un signal transitoire amorti en sortie, donnée par la solution type, signal qui disparaît au bout d'une durée liée à la valeur de la constante d'amortissement  $m$ .

Pour que des oscillations naissent en sortie, elles doivent augmenter d'amplitude, et bien au delà de celle du bruit. Il est donc nécessaire que le facteur d'amortissement soit négatif ( $m < 0$ ), ou autrement dit la partie réelle des racines de l'équation  $A(p)B(p) = 1$  doit être positive. On voit bien l'importance de la notion de transmittance ( $T(p) = A(p)B(p)$ ).

Un oscillateur est donc un système bouclé instable à réaction, composé d'un amplificateur et d'un filtre (généralement passif), qui, placé à la limite de stabilité, délivre un signal de sortie sans être excité par un signal extérieur périodique.

### Condition de Barkhausen

Le régime harmonique est le plus adapté pour étudier la transmittance de chaque élément de la boucle, ou de la boucle ouverte. Cependant, ce régime harmonique ne correspond pas au régime exact de fonctionnement écrit précédemment, lié à l'instabilité. Mais il reste une bonne approximation du régime réel. L'examen des conditions d'oscillation en régime harmonique est donc particulièrement intéressant.

Ce cas correspond à la réponse libre du système, avec  $m = 0$ ; les pôles sont alors imaginaires conjugués ( $\pm j\omega_0$ ). En posant  $p = j\omega$ , nous avons alors :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(j\omega)}{\underline{e}(j\omega)} = \frac{\underline{A}(j\omega)}{1 - \underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)} \quad (16)$$

$A(p)B(p) = 1$ , conduit à :

$$\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega) = 1$$

Cette condition est appelée condition de Barkhausen et porte à la fois :

- sur les modules :

$$|\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)| = \underline{A}(j\omega)|\underline{B}(j\omega)| = 1;$$

- sur les arguments :

$$\arg|\underline{A}(j\omega)| = -\arg|\underline{B}(j\omega)| \text{ (modulo } 2\pi)$$

**Rq** : Dans tous les systèmes que nous étudierons, la fréquence des oscillations est fixée par la fréquence  $f_0$  unique qui vérifie la relation entre les arguments. L'équation sur les modules impose la condition d'amplification. L'oscillateur doit osciller dès sa mise sous tension alors qu'aucune entrée ne lui est appliquée. Or le bruit électronique est composée de signaux de fréquences diverses dont une au moins se confond avec la fréquence d'oscillation. Ce signal est amplifié, renvoyé et filtré par la chaîne de retour, amplifié, et ainsi de suite...

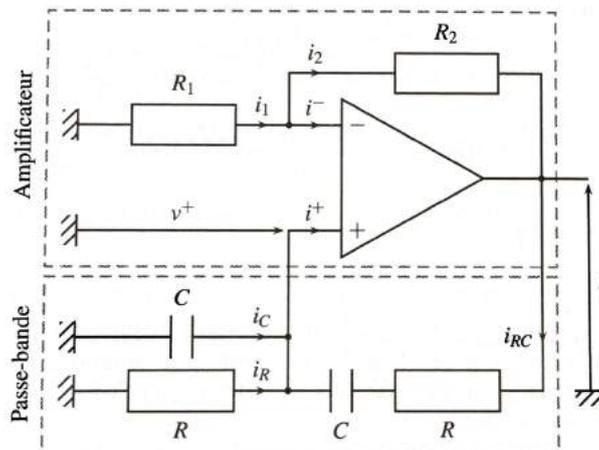
## b) Oscillateur de Wien

MANIP Bellier, p332 oscillateur de Wien.

**Rq** : À l'époque de sa création, le montage en pont était un mode de mesure d'un composant par comparaison avec ceux dont les caractéristiques étaient connues. La technique consistait alors à mettre le composant inconnu sur l'une des branches du pont, puis la tension centrale était réduite à zéro en ajustant les autres branches ou en changeant la fréquence de l'alimentation. Un autre exemple typique de cette technique est le pont de Wheatstone. Le pont de Wien permet, lui, de mesurer avec précision la capacité  $C_x$  d'un composant et sa résistance  $R_x$ . (cf Wikipédia)

Les notions sont ici introduites sur un exemple expérimental l'oscillateur de Wien. Les deux blocs, amplificateur et passe bande, sont clairement identifiés sur le schéma du montage bouclé :

- la tension d'entrée de l'amplificateur est  $v^+$ , sa tension de sortie est  $s$ , tension de sortie de l'amplificateur opérationnel ;
- la tension d'entrée du passe-bande est  $s$ , celle de sortie  $v^+$ .



La tension  $s$  n'est pas la tension de sortie du montage. En effet, ce circuit bouclé n'a ni entrée, ni sortie définie. L'observation expérimentale montre que lorsqu'il oscille, tous les

points du circuit oscillent à la même pulsation. Le signal peut être prélevé en tout point du circuit ; une étude ultérieure montre que la tension  $v^+$  est "plus sinusoïdale" que la tension  $s$ . Étudions chaque bloc séparément.

### Amplificateur

La loi des nœuds,  $i_1 = i_2 + i^-$ , exprimée en terme de potentiels mène à :

$$\frac{0 - V^-}{R_1} = \frac{V^- - S}{R_2} + i^- \text{ donc avec } i^- = 0, V^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} S$$

En considérant que l'amplificateur opérationnel a un gain statique infini et qu'il fonctionne en régime linéaire,  $v^+ = v^-$ . Ce bloc est alors décrit par sa fonction de transfert, notée  $A$  :

$$\frac{S}{V^+} = 1 + \frac{R_1}{R_2} = A \quad (17)$$

Attendu que  $A = 1 + R_2/R_1 > 1$ , il s'agit bien d'un amplificateur.

### Passe-bande

La loi des nœuds,  $i_C + i_R + i_{RC} = i^+ = 0$ , exprimée en terme de potentiels, mène à :

$$(0 - V^+)Cp + \frac{0 - V^+}{R} + \frac{S - V^+}{R + \frac{1}{Cp}} = 0 \quad (18)$$

D'où,

$$\frac{Cp}{1 + RCp} S = \left( Cp + \frac{1}{R} + \frac{Cp}{1 + RCp} \right) V^+, \text{ soit } \frac{RCp}{1 + RCp} S = \left( RCp + 1 + \frac{RCp}{1 + RCp} \right) V^+$$

ainsi,

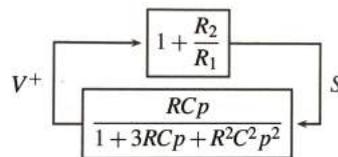
$$RCpS = ((1 + RCp)^2 + RCp) V^+, \text{ soit } \frac{V^+}{S} = \frac{RCp}{1 + 3RCp + R^2C^2p^2}$$

On reconnaît ici un passe-bande, dont la forme canonique est :

$$\frac{V^+}{S} = H_0 \frac{2\xi \frac{p}{\omega_0}}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}, \text{ avec } \omega = \frac{1}{RC}, \xi = \frac{3}{2}, H_0 = \frac{1}{3}$$

### Montage bouclé

Le montage se met sous la forme d'un schéma-bloc :



## Conditions théorique d'auto-oscillation

On observe expérimentalement que le montage oscille à une certaine fréquence, pour un certain choix de  $R_1$  et de  $R_2$ , que l'on cherche théoriquement.

On suppose que le montage oscille. Alors, en notation complexe, où  $p = j\omega$ , les deux transmittance impliquent :

$$\frac{v^+}{s} = H_0 \frac{2j\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{A} \quad (19)$$

On en déduit :

$$2H_0 A j \xi \frac{\omega}{\omega_0} = 1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

Soit en ordonnant partie réelle et partie imaginaire :

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} (1 - H_0 A) = 0$$

Le complexe est nul, donc sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles. on tire de la nullité de la partie réelle :

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 0, \text{ donc } \omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Le montage oscille à la pulsation caractéristique du passe-bande. C'est en effet la pulsation la moins atténuée par le passe bande. Il est donc normal que cette pulsation caractéristique émerge. Quant à la partie imaginaire, avec  $\omega \neq 0$  :

$$H_0 A = 1, \text{ soit } \frac{1}{3} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} = 1\right) \text{ donc } R_2 = 2R_1$$

La condition d'oscillation  $R_2 = 2R_1$  est celle qui autorise les oscillations à la pulsation  $\omega_0$ .

Un oscillateur quasi-sinusoidale, constitué d'un passe-bande bouclé avec un amplificateur, oscille à la pulsation caractéristique du passe-bande, lorsque la condition d'oscillation est assurée.

## Condition de démarrage des oscillation

Afin d'étudier l'apparition des oscillations, on cherche une équation différentielle à laquelle obéit une tension du montage. On part de la fonction de transfert du passe-bande :

$$\frac{V^+}{S} = \frac{RCp}{1 + 3RCp + R^2C^2p^2} \text{ donc } (R^2C^2p^2 + 3RCp + 1)V^+ = RCpS$$

qui correspond à l'équation différentielle :

$$(RC)^2 \frac{d^2v^+}{dt^2} + 3RC \frac{dv^+}{dt} + v^+ = RC \frac{ds}{dt} \quad (20)$$

Puis on utilise le lien entre  $v^+$  et  $s$  qu'impose l'amplificateur  $s(t) = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v^+(t)$ .

Alors :

$$(RC)^2 \frac{d^2v^+}{dt^2} + 3RC \frac{dv^+}{dt} + v^+(t) = RC \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{dv^+}{dt} \quad (21)$$

soit finalement,

$$(RC)^2 \frac{d^2 v}{dt^2} + RC \left( 2 - \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{dv^+}{dt} + v^+(t) = 0 \quad (22)$$

**$s$  et  $v^+$  sont proportionnelles via l'amplificateur,  $s$  obéit à la même équation différentielle.**

Avant la mise sous tension de l'amplificateur opérationnel, tous les points du circuit présentent une tension nulle par rapport à la masse. Après la mise sous tension, si le montage bouclé est stable, attendu qu'il n'y a aucune entrée, le montage reste à la tension nulle. Il n'oscille donc pas.

Les oscillations ne naissent donc que si le montage est instable  $\rightarrow$  un oscillateur quasi sinusoïdal n'oscille que si le montage bouclé est instable.

En appliquant le critère nécessaire et suffisant d'instabilité au système bouclé décrit par l'équation différentielle sur  $v^+$ , le montage est instable si :

$$2 - \frac{R_2}{R_1} < 0 \text{ soit } R_2 > 2R_1$$

La condition d'oscillation  $R_2 = 2R_1$  apparaît donc être une condition limite.

Ainsi on observe expérimentalement que le montage oscille pour  $R_2 > 2R_1$ . Mais plus on s'éloigne de la condition limite d'oscillation  $R_2 = 2R_1$ , moins les oscillations sont harmoniques et d'une période plus grande que  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , comme le montrent les relevés sur l'oscilloscope.

**Rq :** Plus on s'éloigne de la condition limite, moins les oscillations sont harmoniques et si on fait la FFT du signal de sortie on observera plusieurs harmoniques. On aura uniquement les harmoniques impaires, car la transformée de Fourier d'un signal sinusoïdale carré ne donne que les fréquences impaires du fait que la fonction sinus est une fonction impaire.

## Amplitude des oscillations

Lorsque la condition de démarrage des oscillations est vérifiée,  $R_2 > 2R_1$  l'amplitude des oscillations croît exponentiellement, jusqu'à la saturation de l'amplificateur opérationnel. C'est pourquoi la tension  $s$  de sortie de l'amplificateur opérationnel est limitée à  $V_{sat}$   $\rightarrow$  l'amplitude des oscillations est limitée par la tension de saturation de l'amplificateur opérationnel.

Ainsi les oscillations en sortie de l'amplificateur opérationnel sont légèrement aplaties à cause de la saturation. Elles ne sont donc plus rigoureusement sinusoïdales, ce qui génère des harmoniques, de pulsation multiple du fondamentale  $\omega_0$ .

Ces harmoniques supplémentaires sont filtrées par le passe-bande, centré sur  $\omega_0$ . La tension prélevée à l'entrée non-inverseuse,  $v^+$ , apparaît donc "plus sinusoïdale" que celle en sortie de l'amplificateur opérationnel, car moins riche en harmonique.

**Rq :** On peut également regarder le portait de phase en ajoutant un filtre passe haut tel que  $\omega = 1/RC = \omega/10$ . (voir Bréal p.245)

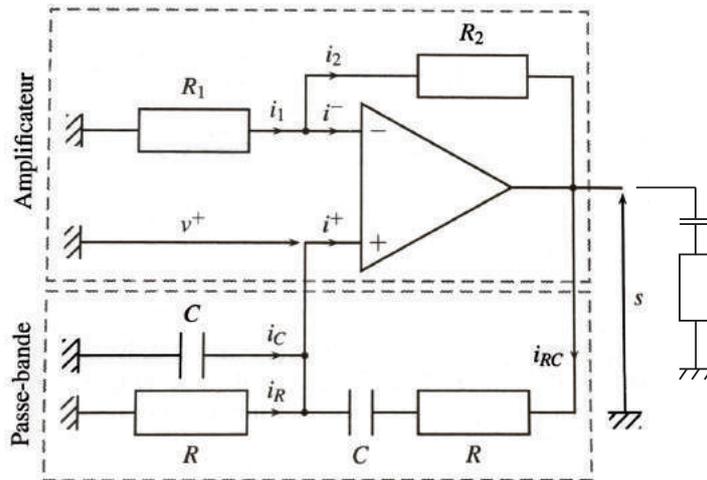


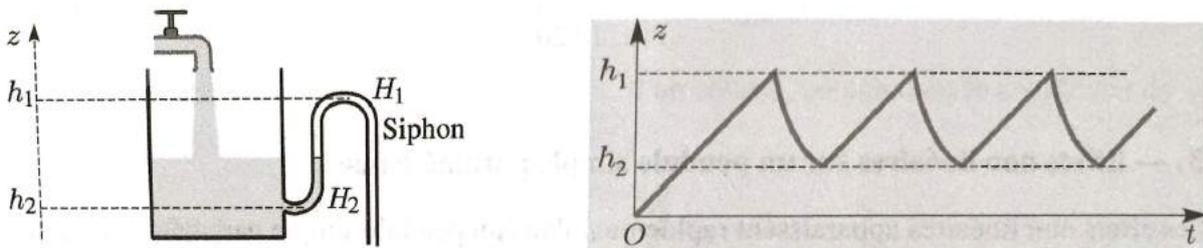
FIGURE 12 – Oscillateur de Wien avec filtre passe haut pour portrait de phase

### 3. Oscillateurs à relaxation

Des oscillateurs peuvent également être aperçus dans d'autres domaines de la physique et ce que l'on va voir avec un oscillateur à relaxation.

Les oscillateurs de relaxation sont des systèmes qui évoluent périodiquement entre deux états de fonctionnement d'énergies différentes, grâce à une source extérieure d'énergie. On les appelle ainsi en raison du retour périodique du système vers un état de plus faible énergie.

#### a) Le vase de Tantale



L'exemple mécanique d'oscillateur de relaxation est la fontaine intermittente. On la représente par un vase que l'on remplit d'eau, avec un débit  $q_v$  constant, jusqu'à ce que le niveau atteigne le sommet  $H_1$  du siphon. On distingue deux phases cinématiques :

- Phase 1 : le vase se remplit

L'équation à laquelle satisfait la cote  $z$  du niveau de l'eau est fournie par le bilan de masse du fluide supposé incompressible. Il vient, en désignant  $\mathcal{S}$  la section du vase de remplissage :

$$\mathcal{S}dz = q_v dt \text{ soit } \frac{dz}{dt} = \frac{q_v}{\mathcal{S}} = Cste$$

- Phase 2 : le vase se vide

Le bilan de masse donne,  $s$  étant la section à l'extrémité du siphon et  $v$  la vitesse d'écoulement en ce point :

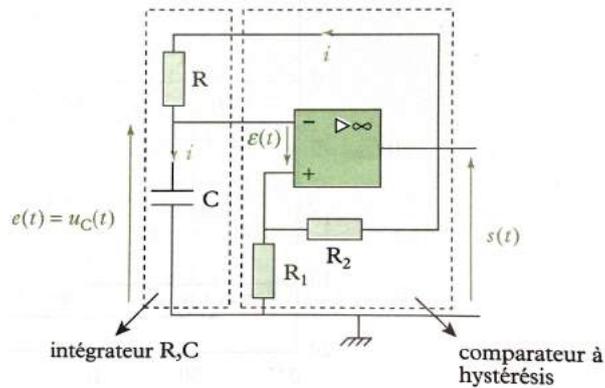
$$Sdz = q_v dt - sv dt \text{ soit } \frac{dz}{dt} = \frac{q_v}{S} - \frac{s}{S}(2gz)^{1/2}, \text{ car } v = (2gz)^{1/2}$$

d'après le théorème de Torricelli. Cette phase cesse lorsque le siphon se désamorce puis le cycle recommence. Sur la figure, on a représenté le graphe de la fonction  $z(t)$  qui reproduit périodiquement une partie rectiligne et une partie parabolique.

## b) Multivibrateur avec amplificateur opérationnel

MANIP : Bellier p.334

Les différentes horloges des ordinateurs, des montres, des multimètres numériques utilisent des dispositifs électroniques de type multivibrateur astable. C'est un montage électronique dans lequel la charge et la décharge d'un condensateur à travers une résistance sont commandées, par exemple, par un basculement de la tension de sortie d'un amplificateur opérationnel monté en comparateur à hystérésis.



Détail du calcul p.308 Bréal.

L'amplificateur opérationnel, est ici, utilisé en comparateur à hystérésis.  $s(t)$  ne peut donc prendre que deux valeurs :  $\pm V_{sat}$ .

Supposons que  $s(t) = +V_{sat}$  :

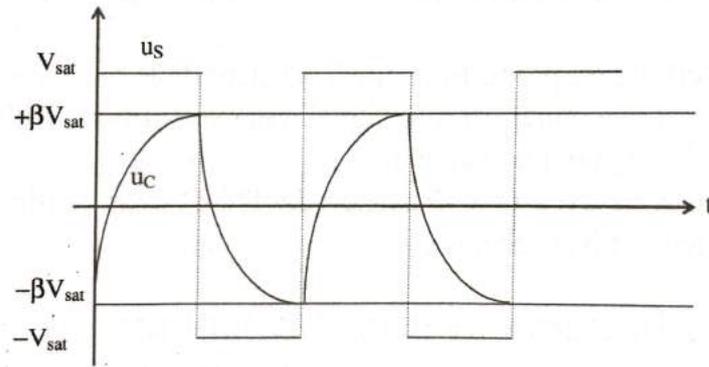
- Le condensateur  $C$  se charge alors à travers la résistance  $R$ . La tension  $u_c$  augmente,  $s$  reste égale à  $+V_{sat}$  tant que  $\epsilon$  reste positif, soit tant que  $u_c$  reste inférieur à

$$U_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}.$$

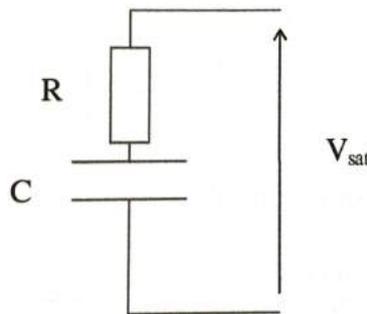
- Quand  $u_c$  atteint la valeur  $\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ , le système bascule et  $s = -V_{sat}$ . Le condensateur se décharge et se recharge sous la tension  $-V_{sat}$ ,  $u_c$  décroît de  $\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$  à

$$-\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} \text{ avant le basculement suivant.}$$

Posons  $\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ . Si on représente  $u_c$  et  $s$  :



A  $t = 0$ ,  $u_c = -\beta V_{sat}$ , l'A.O bascule et la tension de sortie passe à  $+V_{sat}$ . Le condensateur se charge à travers la résistance  $R$  sous la tension  $V_{sat}$ . Le montage est alors équivalent à :



La loi des mailles implique que  $V_{sat} = u_c + Ri$ . Or  $i$  est de la forme  $I_{max} \exp(-t/\tau)$  donc  $u_c = V_{sat} - K \exp(-t/\tau)$ . Pour déterminer la valeur de  $K$  écrivons qu'à  $t = 0$ ,  $u_c(0) = -\beta V_{sat}$ . On obtient

$$K = (1 + \beta)V_{sat}$$

D'où,

$$u_c = V_{sat} - (1 + \beta)V_{sat} \exp(-t/\tau)$$

Écrivons maintenant que  $u_c(T/2) = \beta V_{sat}$ . On obtient :

$$\beta V_{sat} = V_{sat} - (1 + \beta)V_{sat} \exp(-T/2\tau)$$

On tire de cette relation :

$$T = 2RC \ln \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)$$

## Conclusion

On a pu voir à travers cette leçon comment on pouvait asservir un système linéaire, c'est à dire comment respecter une consigne en sortie. On a également pu voir différents type d'oscillateur et leur utilité. Il y en a bien d'autre comme par exemple le laser qui est un oscillateur quasi sinusoïdale.

# L.P. 23 - Traitement d'un signal. Étude spectrale

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- AOP
- Système linéaire
- Fonction de transfert
- Notions d'électrocinétiques

## Bibliographie

- Physique Tout en un MPSI 3e edition, Sanz, *Dunod*
- Expériences de physique, Bellier, *Dunod*
- Physique PSI, Renvoizé, *Pearson*
- Électronique PSI, Brenders, *Bréal*
- Physique Tout en un PSI, Cardini, *Dunod*
- Expériences d'électronique, Duffait, *Bréal*

## Introduction

Que ce soit pour recevoir la radio ou regarder la télévision, la transmission d'un signal entre un point  $A$  et un point  $B$  est un phénomène omniprésent dans la vie de tous les jours. Dans la pratique les signaux physiques observés sont la superposition d'un grand nombre de signaux harmoniques de fréquences différentes. Par exemple, le son émis par un instrument de musique résulte d'une superposition de sons harmoniques dont les fréquences sont liées aux résonances acoustiques du système et à la manière dont on met ce système en vibration. On peut en faire l'expérience en analysant une note de piano ou de guitare. Lors de la génération de la note, on commence par entendre un son riche (nombreuse composante). Puis, les différentes composantes ne s'amortissant pas sur les mêmes échelles de temps, la composition du son s'appauvrit pour finir quasiment comme un son harmonique pur.

C'est cette richesse harmonique qui procure des sonorités bien différentes au piano et au clavecin alors que les deux instruments sont quasiment identiques et que seule la manière d'attaquer la corde diffère (frappée pour le piano et pincée pour le clavecin).

La restitution du son par une chaîne à haute fidélité nécessite, pour des raisons mécaniques, la séparation du signal en plusieurs parties que l'on envoie sur les différents haut-parleurs en fonction de leur fréquence.

Le principe physique du transport de l'information par les ondes électromagnétiques et la modulation de fréquence est un autre exemple de l'intérêt de savoir mélanger et filtrer des signaux non sinusoïdaux.

Il est ainsi primordial de savoir analyser la richesse d'une grandeur périodique, non seulement car les signaux naturels sont rarement sinusoïdaux, mais encore en tant que physicien lors du traitement ou de la synthèse de ce même signal.

# 1. Rappels sur l'analyse de Fourier

## a) Principe général de la décomposition en série de Fourier

Soit  $f$ , une fonction  $T$ -périodique, représentant par exemple un signal de pulsation  $\omega = 2\pi/T$  et de classe  $C^1$  par morceaux. Alors  $f$  peut s'écrire sous la forme d'une série trigonométrique, appelée série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (1)$$

avec  $\forall n \geq 0$ ,  $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt$  et  $\forall n \geq 1$ ,  $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$ .

**Rq :**

- si  $f$  est paire, sa décomposition en série de Fourier ne comportera que des termes en cosinus de sorte que  $\forall n \geq 1$ ,  $b_n = 0$  ;
- si  $f$  est impaire, on n'aura que des termes en sinus et  $\forall n \geq 0$ ,  $a_n = 0$ . Il faut donc, comme toujours, commencer par analyser la parité avant de se lancer dans un calcul inutile ;
- du fait de la périodicité de la fonction  $f(t)$ , le résultat des intégrales ne dépend pas de la borne inférieure, pourvu que l'on intègre bien sur une période  $T$  entière. Pour une fonction impaire, on a par exemple intérêt à calculer  $\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt$

plutôt que  $\frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$ .

Ainsi, un signal  $f(t)$  périodique peut s'analyser comme la somme d'un signal constant  $a_0/2$  et d'un nombre infini de signaux sinusoïdaux  $f_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$ , respectivement de pulsation  $\omega, 2\omega, \dots, n\omega$ , appelés harmoniques et constituant l'ondulation du signal. Le terme constant  $a_0/2$  représente la valeur moyenne  $\langle f(t) \rangle$  du signal. L'harmonique  $n = 1$ , de pulsation  $\omega$ , est appelé harmonique fondamental de la série car il est de même période que la fonction.

En regroupant les termes de même pulsations  $n\omega$ , on peut aussi écrire cette somme comme :

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n) \quad (2)$$

avec  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  et  $\tan \phi_n = -b_n/a_n$  pour  $n \geq 1$  et  $c_0 = a_0/2$ .

## b) Caractéristique d'un signal périodique

Un signal  $f(t)$  est périodique s'il reprend identiquement la même valeur à intervalles de temps égaux :

$$\exists T \in \mathcal{R} \text{ tel que, } \forall t \in \mathcal{R}, \text{ on a } f(t+T) = f(t)$$

L'intervalle de temps minimal nécessaire pour retrouver la même valeur de la fonction est la période  $T$ . La fréquence  $f$  du signal est l'inverse de la période  $T$  :

$$f = \frac{1}{T}, \text{ avec } f \text{ en hertz (Hz) si } T \text{ en seconde}$$

La valeur moyenne  $F_m$  d'un signal périodique, exprimée dans la même unité que le signal, est par définition calculée sur un intervalle dont la largeur est égale à une période :

$$F_m = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(u) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (3)$$

Le carré de la valeur efficace  $F_{eff}$  d'un signal périodique est par définition égale à la valeur moyenne du carré de ce signal :

$$F_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (4)$$

En utilisant le théorème de Parseval :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}\right) \quad (5)$$

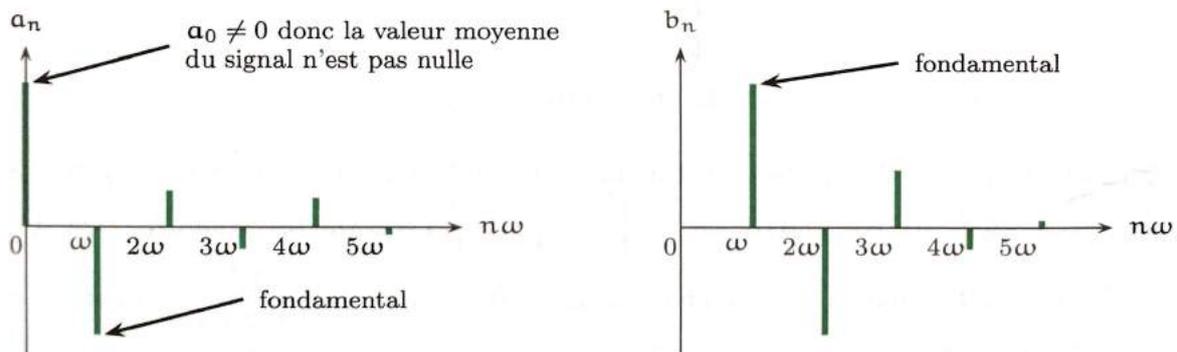
Le théorème de Parseval a donc l'interprétation suivante : la puissance moyenne du signal est la somme des puissances transportées par chacun de ses harmonique. Cela peut être réécrit :

$$F_{eff}^2 = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n^2}{2} \quad (6)$$

### c) Spectre

**MANIP : spectre d'un signal périodique avec un diapason/puis deux, puis mesure de la fréquence du diapason en faisant la FFT sur l'oscilloscope.**

Le spectre de Fourier d'une fonction périodique  $f(t)$  de période  $T = 2\pi/\omega$  est le graphe donnant les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n\omega$ .



**FIG. 3.1. Spectre de Fourier d'un signal.**

En pratique on s'intéresse souvent seulement à l'amplitude des différents harmoniques : on parle alors abusivement du spectre pour le graphe  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  en fonction de  $n\omega$ . Cette seule donnée est insuffisante pour pouvoir remonter à la fonction  $f(t)$ , il faudrait en effet connaître également  $\phi_n$  en fonction de  $n\omega$ .

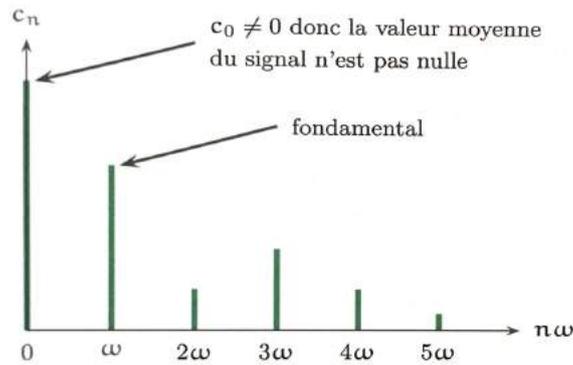


FIG. 3.2. Spectre de Fourier simplifié d'un signal.

La présence d'un harmonique de pulsation nulle montre que la fonction est de valeur moyenne non nulle et la lecture de la pulsation  $\omega$  de l'harmonique fondamental  $n = 1$  donne accès à la période  $T = 2\pi/\omega$  du signal.

### d) Exemple du signal créneau

(Autre résolution p11 du Bréal)

On considère un signal créneau de valeur moyenne nulle et d'amplitude  $A$ , représenté sur la figure. Le signal choisi est une fonction impaire du temps, cela simplifie le calcul des coefficients de Fourier sans nuire à la généralité des conclusions.

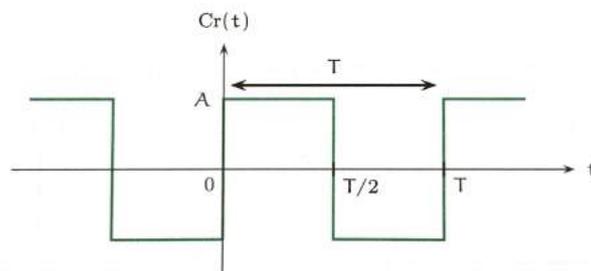


FIG. 3.6. Signal créneau.

Le signal étant une fonction impaire de valeur moyenne nulle, on a  $a_n = 0$ , il faut pour finir calculer  $b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt = 2 \int_0^{T/2} A \sin(n\omega t) dt$  toujours avec  $\omega T = 2\pi$ .

En intégrant on a  $b_{2p} = 0$  et  $b_{2p+1} = \frac{4A}{\pi(2p+1)}$ , donc  $Cr(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)\omega t)$ .

Le spectre de Fourier est donné sur les figures suivantes. La courbe en pointillé représente la décroissance en  $1/n$  des amplitudes des harmoniques.

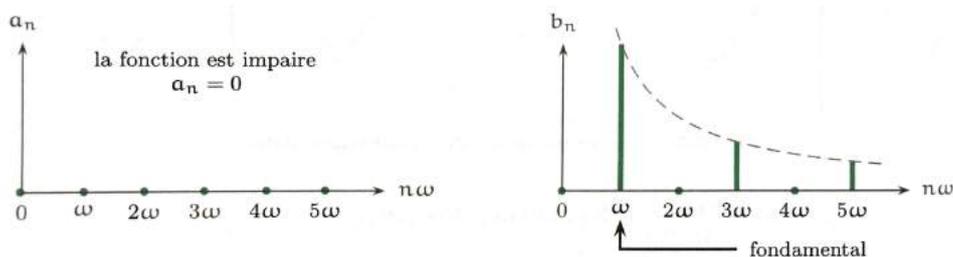


FIG. 3.7. Spectre de Fourier d'un signal créneau.

En calculant les sommes partielles  $Cr_N(t)$  on obtient les courbes de la figure suivante. L'analyse de ces courbes apport quelques nouvelles remarques :

- Plus il y a d'harmoniques, plus la somme partielle ressemble à l'original ;
- Même avec un nombre important de termes, la somme partielle diffère assez nettement de la fonction. La décroissance des coefficients en  $1/n$  est en effet plus lente que pour un signal triangulaire. C'est la discontinuité de la fonction qui rend plus difficile la convergence ;
- Les harmoniques de rang élevé permettent de mieux restituer la discontinuité, mais occasionnent en même temps de fortes oscillations en son voisinage. Ce phénomène est connu sous le nom du "problème de Gibbs" ; il est lié à la nature de la convergence de la série vers la fonction. Joseph Fourier eut d'ailleurs beaucoup de mal à faire admettre ses idées par l'académie des sciences, ses contradicteurs pensaient en effet qu'il était impossible qu'une fonction discontinue soit la limite d'une somme, même infinie, de fonctions continues.

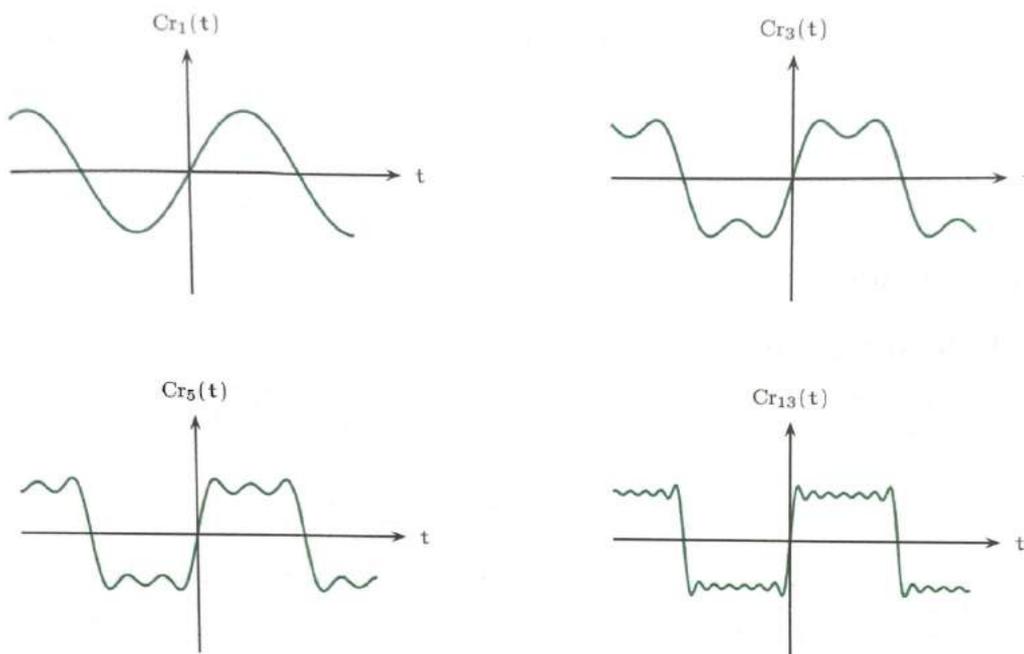


FIG. 3.8. Séries partielles du signal créneau.

### Rq : Pb de Gibbs

On retiendra que la décroissance des harmoniques est d'autant plus lente que la fonction est irrégulière, et que la convergence est difficile au voisinage des discontinuités. On dit que les irrégularités du signal contribuent à la "largeur du spectre".

En toute rigueur, il faut un nombre infini d'harmoniques pour reconstituer un signal périodique à partir de sa série de Fourier. Cependant, en pratique, l'amplitude  $c_n$  des harmoniques décroît lorsque  $n$  augmente. Il est donc possible d'obtenir une approximation du signal en tronquant sa série de Fourier jusqu'à un certain rang. De manière évidente, l'approximation s'améliore lorsque le nombre d'harmonique pris en compte augmente.

## 2. Filtrage linéaire

Un signal utile est souvent accompagné d'un bruit ou d'autres signaux inutiles. Il est alors possible de filtrer le signal brut afin d'en extraire le signal utile. Exemples : télé-

vision(plusieurs chaînes, dont une est désirée),téléphone(plusieurs communications, dont une est destinée à l'utilisateur).

Un filtre est un quadripôle qui a pour rôle de transmettre, sans déformation, les composantes sinusoïdales d'un signal complexe dans un domaine de fréquence constituant sa bande passante et d'éliminer les composantes sinusoïdales du signal complexe hors de sa bande passante (bande coupée). Le filtre parfait ou idéal est celui pour lequel le module de la fonction de transfert est égale à 1 dans sa bande passante et 0 dans sa bande coupée.

Un filtrage linéaire n'ajoute pas de nouvelles fréquences au signal.

**Rq : Filtre linéaire**

- Ordre 1 :  $A \frac{ds(t)}{dt} + Bs(t) = C \frac{de(t)}{dt} + De(t)$
- Ordre 2 :  $A' \frac{d^2s(t)}{dt^2} + B' \frac{ds(t)}{dt} + C' s(t) = D' \frac{d^2e(t)}{dt^2} + E' \frac{de(t)}{dt} + F' e(t)$

**a) Principe général**

On s'intéresse à un système linéaire sollicité par une entrée périodique  $e(t)$ . On peut alors mettre à profit la décomposition en série de Fourier de ce signal que l'on écrit sous la forme :

$$e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n \cos(n\omega t + \phi_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(t) \tag{7}$$

Le système étudié étant linéaire, on peut appliquer le théorème de superposition : la réponse globale  $s(t)$  est la somme des réponses à chacun des harmoniques ( $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ ). Il suffit donc d'évaluer séparément les réponses aux harmoniques de pulsation  $n\omega$ . La décomposition en série de Fourier ramène donc directement à l'étude mono-harmonique.

De plus, les signaux sinusoïdaux étant des fonctions isomorphes des systèmes linéaires, chaque composante du signal de sortie est de la forme  $s_n(t) = S_n \cos(n\omega t + \phi'_n)$ . Il est alors judicieux d'introduire la fonction de transfert complexe du système :

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega) \exp(j\phi(\omega)) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}$$

En effet, quand on isole une des composantes  $e_n(t) = E_n \cos(n\omega t + \phi_n)$ , on sait que la sortie associée à cet harmonique est :

$$s_n(t) = S_n \cos(n\omega t + \phi'_n) \tag{8}$$

Avec  $S_n = H(n\omega)E_n$  et  $\phi'_n = \phi_n + \phi(n\omega)$ .

La fonction de transfert nous donne deux informations :

- le rapport des amplitudes grâce au module :  $|\underline{H}(j\omega)| = S_n/E_n$
- le déphasage grâce à son argument :  $arg(\underline{H}(j\omega)) = \phi$

**b) Représentation des fonctions de transfert harmonique**

On appelle représentation dans le plan de Bode d'une fonction de transfert harmonique  $\underline{H}(j\omega)$  l'ensemble des deux diagrammes :

- la courbe de gain : tracé du module  $G(db)$ , en décibels, en fonction de la pulsation  $\omega$  ou de la fréquence  $f$  en échelle logarithmique :

$$G(dB) = 20 \log(H(\omega)) = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|$$

- la courbe de phase : tracé de l'argument  $\phi(\omega)$ , en radians, ou en degrés, en fonction de la pulsation  $\omega$  ou de la fréquence  $f$  en échelle logarithmique.

Il est souvent utile d'étudier le comportement aux limites des très basses fréquences et des très hautes fréquences d'un circuit électronique. En échelle logarithmique, cela correspond aux deux limites à l'infini de l'axe des abscisses. Nous chercherons systématiquement ces deux asymptotes pour toute fonction de transfert.

On appelle diagrammes asymptotiques les diagrammes de Bode réduits à leurs asymptotes.

L'abscisse du point d'intersection des deux asymptotes de la courbe de gain, lorsqu'il existe, constitue la pulsation de cassure ou brisure.

### Bande passante à -3 dB

La courbe de gain d'un circuit réel présente toujours une borne supérieure, car physiquement, le gain ne peut pas être infini. Lorsque c'est possible, on définit alors une ou deux pulsations de coupure ( $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ ).

On appelle pulsation de coupure du filtre toute pulsation  $\omega_c$  telle que :

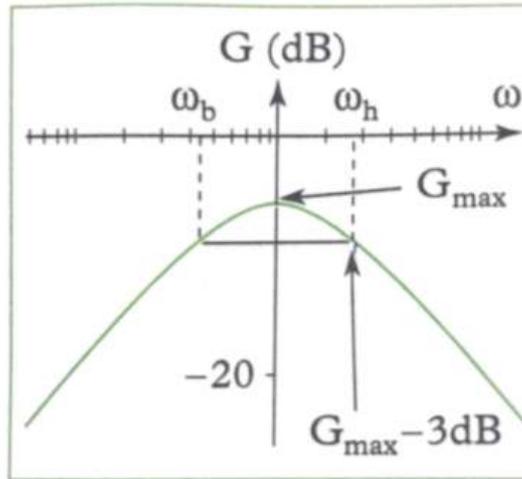
$$|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

où  $H_{max}$  désigne la valeur maximale prise par le module de la fonction de transfert (l'amplification).

La bande passante d'un filtre est l'intervalle de fréquence pour lequel :

$$|\underline{H}| > \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

En décibels, la définition d'une pulsation de coupure correspond à un point d'intersection de la courbe de gain avec une droite horizontale située à -3dB sous le maximum.



**Fig. 13** - Définition de la bande passante à  $-3$  dB.

### c) Filtre du premier ordre

(Aussi bien expliqué dans le tout en un MPSI-PCSI-PTSI 3eme edition p.404)

On sait que pour les filtres du premier ordre on a  $A \frac{ds(t)}{dt} + Bs(t) = C \frac{de(t)}{dt} + De(t)$ .  
 En supposant un régime harmonique alors  $H = \underline{s}/\underline{e} = (D + j\omega C)/(B + j\omega A)$ .

Voyons les principaux filtres du 1er ordre.

#### Filtre passe-bas

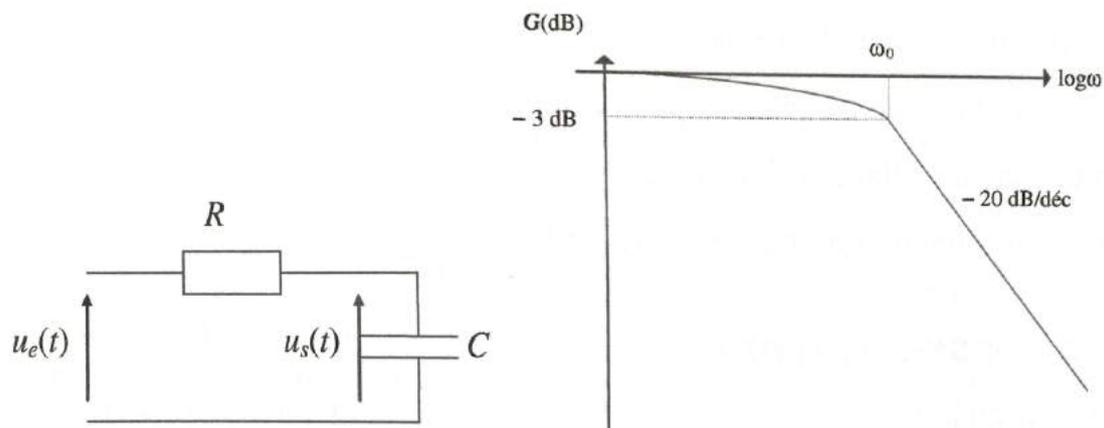


FIGURE 13 - Filtre passe bas

$u_e(t)$  désigne une tension alternative sinusoïdale. En notation complexe, la fonction de transfert de ce quadripole est égale à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad (11)$$

On a un diviseur de tension.

Le module de la fonction de transfert de ce filtre est de la forme :

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (12)$$

avec  $\omega_0 = 1/RC$ . Ce module correspond l'amplification en tension.

Le gain en tension est tel que  $G_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log(H(\omega))$ . Pour caractériser les propriétés d'un filtre, il est nécessaire de définir le domaine de fréquences (bande passante) pour lequel le signal de sortie est d'une amplitude "suffisante".

Pour définir ce domaine de fréquence on cherche la fréquence pour laquelle le module de la fonction de transfert est maximal. Ici  $H_{max} = 1$  quand  $\omega$  tend vers 0 et  $G_{max} = 0dB$ . Puis, il faut déterminer la ou les fréquences de coupure ( $f_C$  ou  $\omega_C$ ), avec  $H(\omega_C) = H_{max}/\sqrt{2}$  et donc :

$$G(\omega_C) = 20 \log(H(\omega_c)) = 20 \log(H_{max}) - 10 \log(2) = G_{max} - 3dB, \text{ car } 10 \log(2) \approx 3$$

Ici  $H(\omega_C) = H_{max}/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$ . La pulsation de coupure à  $-3dB$  est donc  $\omega_C = \omega_0$ .

### Filtre passe-haut

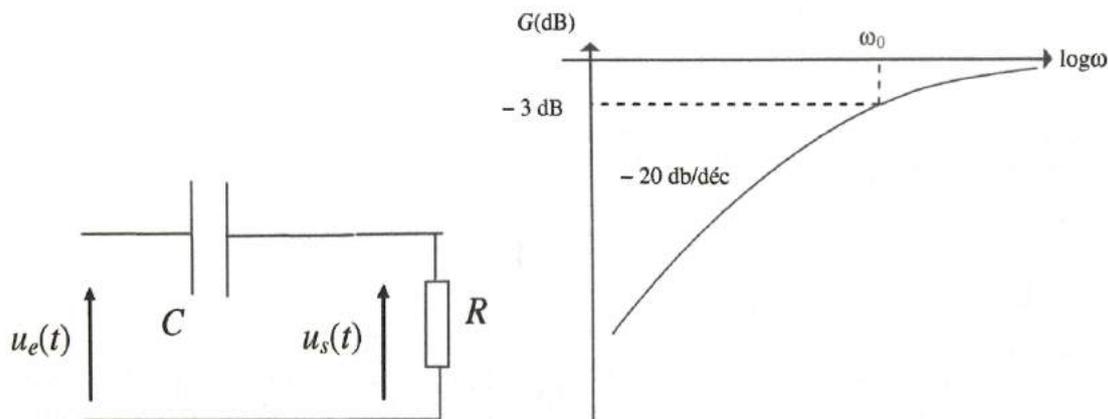


FIGURE 14 - Filtre passe-haut

Dans ce cas la fonction de transfert s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (13)$$

avec  $\omega_0 = 1/RC$ . On a un gain maximum pour  $\omega \rightarrow \infty$  donc passe haut.

### d) Filtre du second ordre

On sait que pour les filtres du second ordre on a  $A' \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + B' \frac{ds(t)}{dt} + C' s(t) = D' \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + E' \frac{de(t)}{dt} + F' e(t)$ .

Plus l'ordre d'un filtre est élevé, plus forte sera l'atténuation en sortie (-40dB/déc. pour un filtre d'ordre 2 et -20dB/dec pour un filtre d'ordre 1) quand on se trouve hors de la bande passante et donc plus le filtre est efficace.

**Rq :** En effet système ordre 2 pour le basse-bas par exemple :  $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2j\sigma\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

avec  $\sigma$  le coefficient d'amortissement. Alors en posant  $x = \omega/\omega_0$ ,  $G(dB) = -10 \log[(1 - x^2)^2 + 4\sigma^2 x^2]$ ,  $\omega \rightarrow \infty \Leftrightarrow G(dB) \rightarrow -40 \log(x)$ .

### Filtre passe-bas et passe-haut

On utilise les circuits R,L,C en posant  $Q = 1/2\sigma = \omega/\Delta\omega$ , le facteur de qualité et  $\Delta\omega$  pris à -3dB :

- Passe-bas :  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$

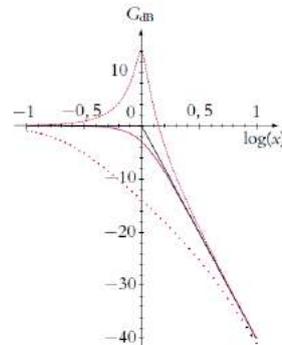
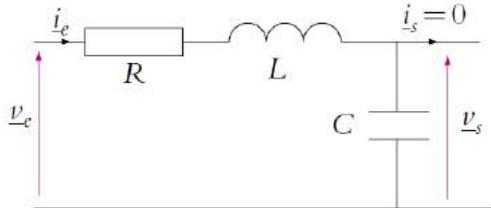
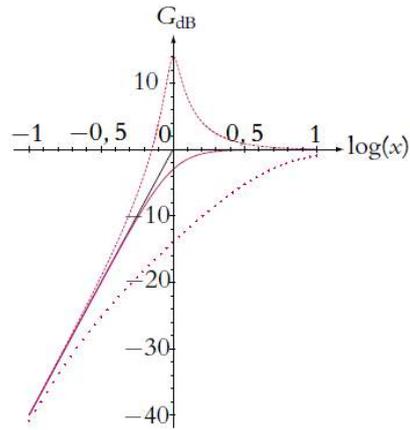
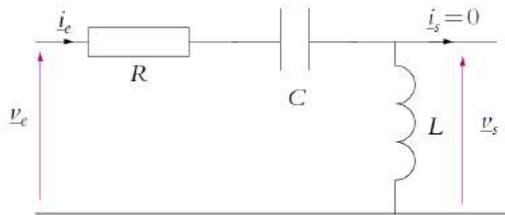


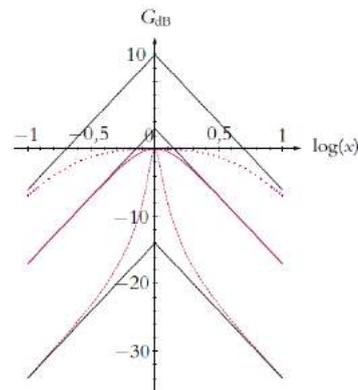
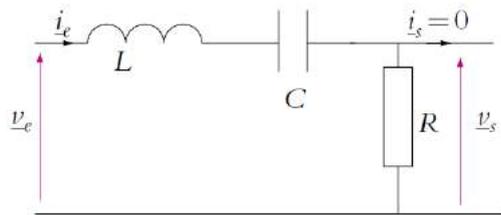
Figure 18.28 Diagramme de Bode en gain d'un filtre passe-bas du second ordre pour différentes valeurs du facteur de qualité : pointillés :  $Q = 5$ , trait plein :  $Q = 1/\sqrt{2}$ , croix :  $Q = 0,2$ .

- Passe-haut :  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $\underline{H}(j\omega) = \frac{-H_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$



**Figure 18.33** Diagramme de Bode en gain d'un filtre passe-haut du second ordre pour différentes valeurs du facteur de qualité : pointillés :  $Q = 5$ , trait plein :  $Q = 1/\sqrt{2}$ , croix :  $Q = 0,2$ .

### Filtre passe-bande



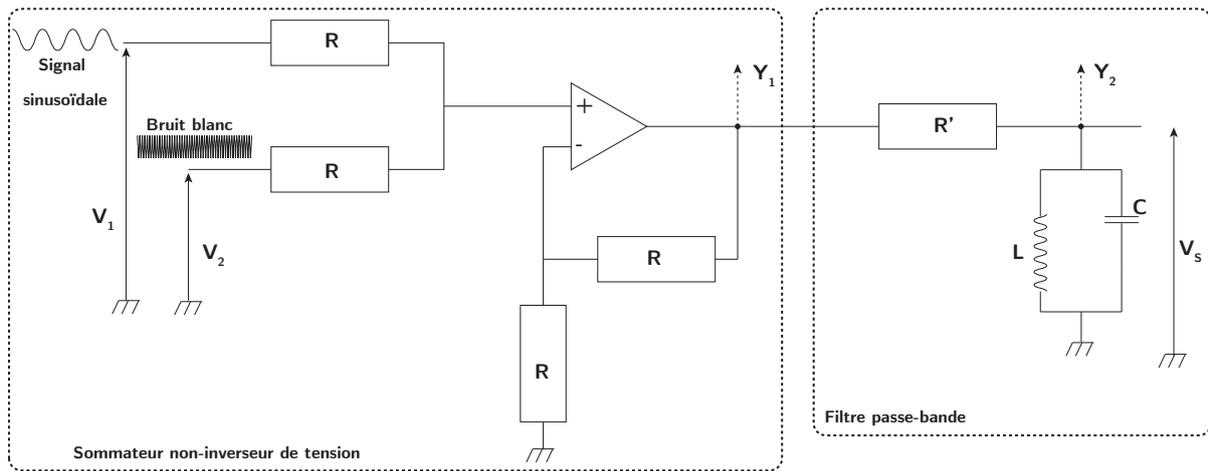
**Figure 18.38** Diagramme de Bode en gain d'un filtre passe-bande du second ordre pour différentes valeurs du facteur de qualité : pointillés :  $Q = 5$ , trait plein :  $Q = 1/\sqrt{2}$ , croix :  $Q = 0,2$ .

On trouve :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (14)$$

### Application au filtrage d'un signal bruité : MANIP : Montage signal + bruit

Pour le sommateur non inverseur : on prend quatre résistances identiques ( $R = 10k\Omega$ ). Le sommateur non inverseur permet de sommer un signal sinusoïdal avec un générateur de bruit blanc (compris entre 10Hz et 100kHz).



Le courant étant nul et les résistances toutes égales à  $R$ , on trouve la tension  $V^+$  via le théorème de Millman et  $V^-$  par un pont diviseur. Ainsi sachant que les quatre résistances sont identiques :

$$\begin{aligned}
 V^+ &= \frac{\frac{V_1}{R} + \frac{V_2}{R}}{\frac{2}{R}} \\
 V^- &= V_S \left( \frac{R}{2R} \right) = \frac{V_S}{2}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Or  $V^+ = V^-$ , car l'AOP est supposé idéal, en régime linéaire, alors  $V_S = V^+ + V^-$ , on somme bien les deux signaux.

Pour ce qui est du filtre passe bande on prendra  $R' = 47k\Omega$ ,  $L = 17mH$  et  $C = 14nF$ , sachant que la fréquence du signal initial est  $f_0 = 10kHz$ . Le bruit est compris entre 10Hz à 100Hz. Ainsi pour essayer de centrer sur  $f_0$  on choisit les valeurs de la conductance et l'inductance selon  $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ .

### 3. Modulation-démodulation

Les systèmes de télécommunication ont pour objet de transmettre des informations à l'aide d'un signal se propageant dans l'espace ou le long d'une ligne, de son point d'émission à celui de réception. Que ce soit en transmission hertzienne (radio, TV, ...), en téléphonie ou en transmission de données, le procédé de modulation est la solution considérée comme la plus efficace. Le signal à transmettre (ou signal modulant) est utilisé pour moduler (faire varier) une des caractéristiques d'un signal porteur, de fréquence plus élevé.

Tout d'abord, rappelons que la voix humaine produit des sons dont les fréquences sont comprises entre 100 et 7500Hz. Pour un orchestre, la plage est 30/20000Hz. Supposons que l'on veuille transmettre de tels signaux par voie hertzienne. La transmission directe est impossible ; en effet :

- il n'est pas possible, à la réception, de distinguer ce signal de tout autre signal encombrant la même plage de fréquence (signaux "industriels" à 50Hz par exemple) ;
- les dimensions des antennes, de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, auraient des valeurs irréalistes (ex : pour  $f = 1kHz$ ,  $\lambda = cT = c/f = 300km$ ) ;
- de plus, l'éventuelle antenne ne serait pas adaptée pour des signaux de 50Hz à 15kHz, par exemple, qui est la plage retenue pour la transmission en radio commerciale.

La modulation utilise des fréquences de porteuses de 100kHz à 100MHz typiquement (jusqu'à plusieurs GHz pour les transmissions entre paraboles). Le spectre du signal utile est translaté vers la fréquence de la porteuse, sa bande de fréquence relative est réduite d'autant.

### a) Principes

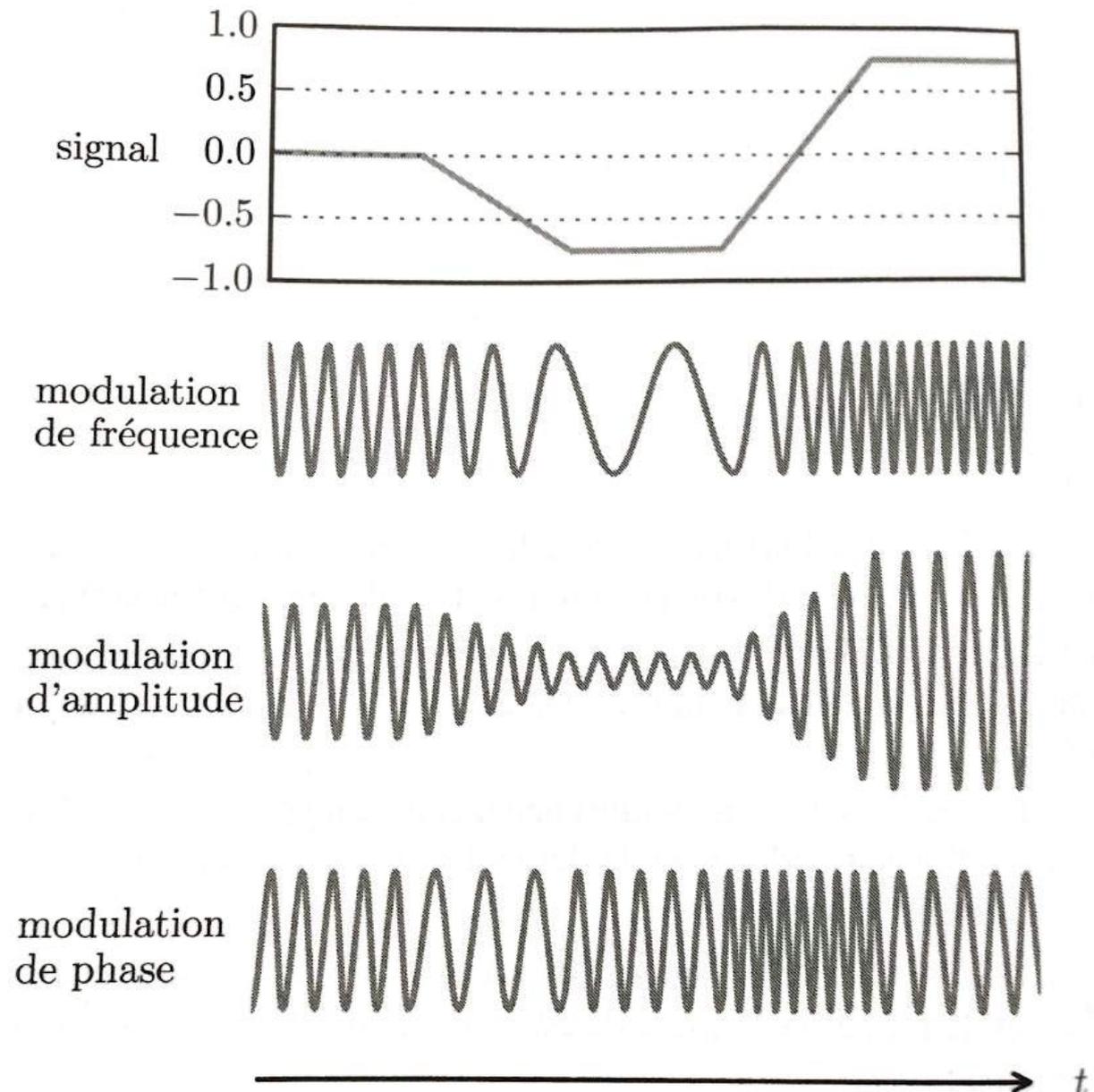
Le principe de la modulation est le suivant :

- on part d'un signal porteur sinusoïdal  $s_p(t)$  de haute fréquence, couramment appelée la porteuse, caractérisé par trois paramètres : son amplitude  $A_p$ , sa fréquence  $f_p$  et sa phase  $\phi_p$  :

$$s_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + \phi_p)$$

- on module un des trois paramètres de la porteuse, en fonction du signal  $s(t)$  à transmettre.

En fonction du paramètre modifié, on obtient les trois types de modulation, représentées ci dessous :



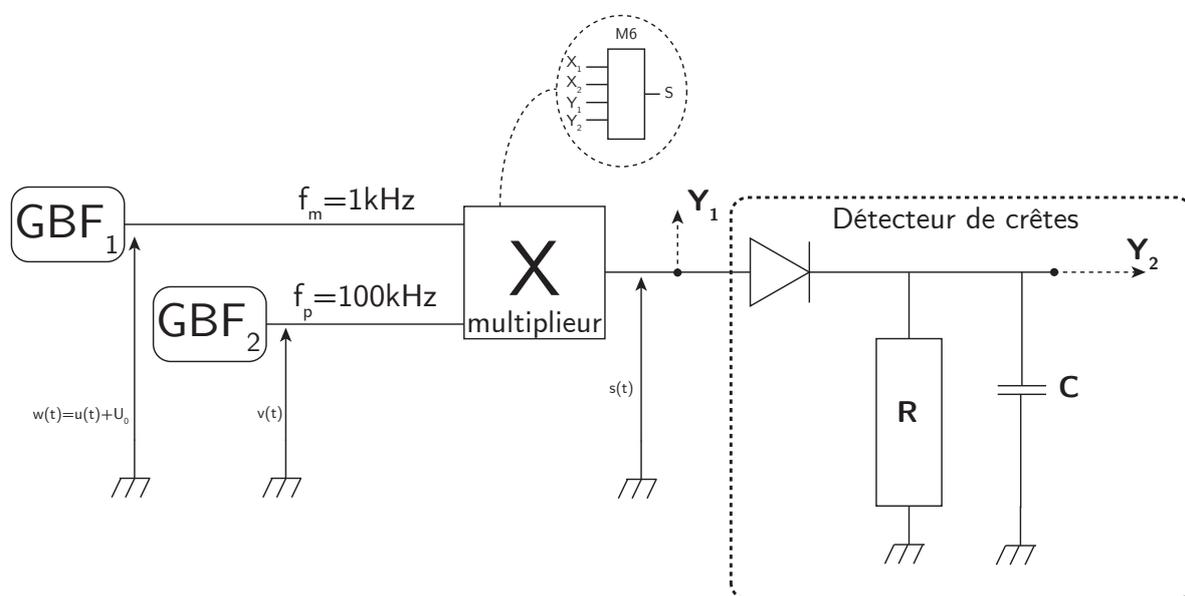
La modulation d'amplitude est la plus ancienne, elle est encore utilisée pour les émissions en Grandes Ondes ou ondes AM (Amplitude Modulation). En France, la plage de fréquence attribuée à la modulation d'amplitude est la plage 150-300 kHz. C'est la plus simple à mettre en oeuvre, elle sera étudiée en détail.

La modulation de fréquence lui est souvent préférée de nos jours, du fait de sa meilleure immunité au bruit. Elle est utilisée en radiophonie dans la bande FM (Frequency Modulation); la plage qui lui est dévolue en France est la plage 87-108 MHz.

Enfin, la téléphonie mobile et la technologie Wifi utilisent respectivement des bandes de fréquence au voisinage de 900 MHz et 2.4 GHz. Les signaux transmis sont numériques, et les modulations angulaires.

## b) Application à la modulation et démodulation d'amplitude

MANIP : Aide page 291 du Bellier



### Modulation

Une tension modulée en amplitude est une tension qui garde une fréquence constante mais dont l'amplitude varie en fonction du temps. Soient  $s(t)$  le signal modulé en amplitude;  $\Omega$  la pulsation de la porteuse et  $\omega$  la pulsation instantanée du signal à transporter. En choisissant un signal modulant de forme sinusoïdale, on ne restreint pas notre étude car tout signal complexe (périodique) peut être décomposé en série de Fourier, donc en une somme de sinusoïdes pures. Il est assez simple de produire une tension modulée en amplitude ( ce qui n'est pas le cas pour une tension modulée en fréquence). On utilise, pour créer une tension modulée en amplitude, un simple multiplieur électronique.

Il se présente sous la forme d'un circuit intégré dont les connexions sont représentées sur la figure. Sur l'entrée  $X_1$  on applique une tension  $w(t) = u(t) + U_0$  est la tension modulante (signal à transporter de basse fréquence) et  $U_0$  une tension de décalage. Sur l'entrée  $Y_1$ , on applique une tension  $v(t)$  qui représente la porteuse de haute fréquence.

En sortie  $S$  on récupère le signal  $s(t) = 0.1 \cdot w(t) \cdot v(t)$ .

Si  $u(t) = U_m \cos(\omega t)$  et  $v(t) = V_m \cos(\Omega t)$  alors

$$s(t) = 0.1V_m[U_0 + U_m \cos(\omega t)] \cos(\Omega t)$$

En mettant  $U_0$  en facteur, il vient

$$s(t) = A[1 + m \cos(\omega t)] \cos(\Omega t)$$

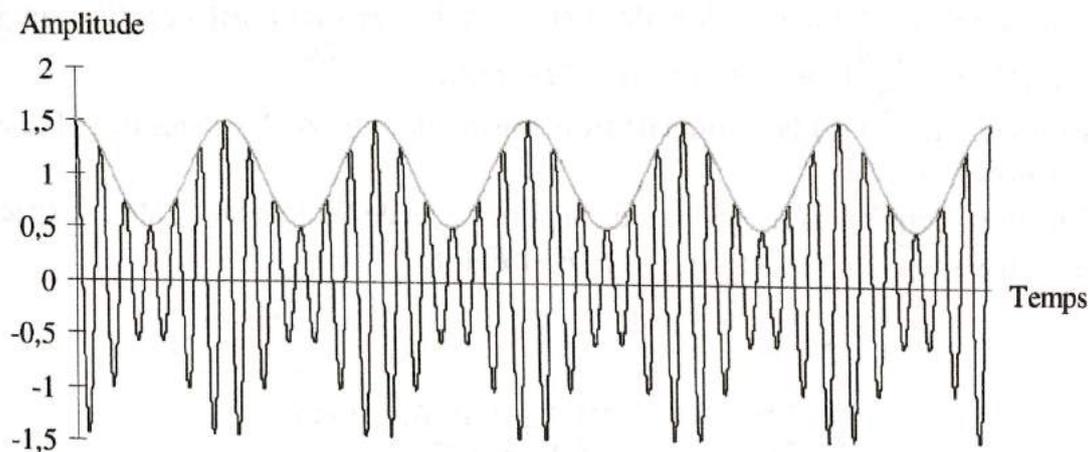
où  $A = 0.1U_0V_m$  et  $m = U_m/U_0$ .  $A$  représente l'amplitude de la tension modulée et  $m$  le taux de modulation.

Pour la manip on prend diode de germanium car tension au seuil 0.2V. La diode sert à lever la partie négative du signal modulé. On prend  $C = 111nF$  et  $R = 10k\Omega$ . Prendre des résistances et conductivité variable pour vérifier et aller plus vite. Pour choisir il faut avoir la condition :

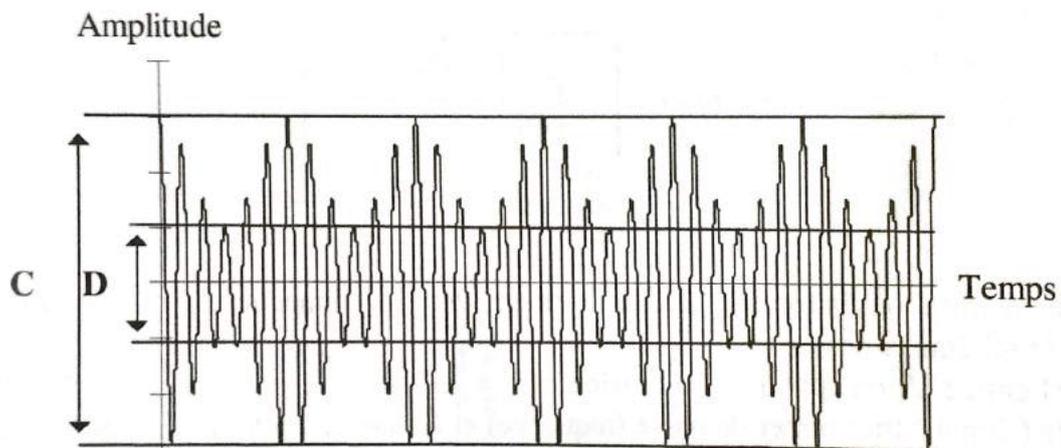
$$f_m < \frac{1}{2\pi RC} < f_p$$

Ne pas oublier de régler amplitude pour les deux GBF :

- pour le GBF<sub>1</sub>,  $A = 2V_{pp}$ , Offset=1.3V
- pour le GBF<sub>2</sub>,  $A = 4V_{pp}$ , Offset=0V



Tension modulée et signal modulant



Modulation d'amplitude

Déterminons le taux de modulation. L'amplitude maximale crête à crête est  $C = 2A(1 + m)$ ; l'amplitude minimale crête à crête est  $D = 2A(1 - m)$ . On a donc  $C + D = 4A$  et  $C - D = 4Am$ . On peut alors définir le taux de modulation par :

$$m = \frac{C - D}{C + D} \quad (16)$$

Pour obtenir une bonne modulation il faut que  $m < 1$  donc que  $U_m < U_0$  et que la fréquence de la porteuse soit nettement supérieur à la fréquence de la modulante.

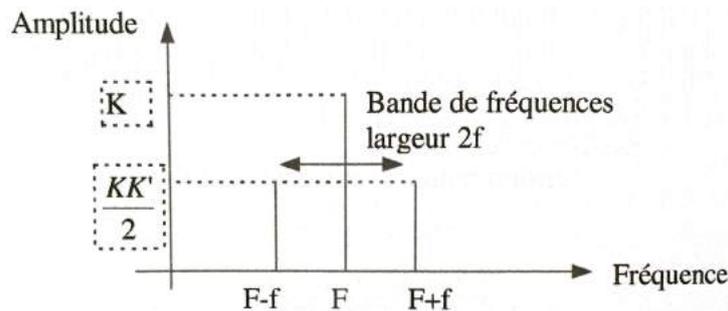
En utilisant la relation trigonométrique  $\cos(a) \cos(b) = (1/2)(\cos(a + b) + \cos(a - b))$  on peut développer l'expression de  $s(t)$  :

$$s(t) = A[1 + m \cos(\omega t)] \cdot \cos(\Omega t)$$

$$\text{en } s(t) = A \cdot \cos(\Omega t) + \frac{Am}{2} [\cos((\Omega + \omega)t) + \cos((\Omega - \omega)t)]$$

On constate que  $s(t)$  est la somme de trois fonctions sinusoïdales pures de pulsations  $\Omega$ ,  $\Omega + \omega$  et  $\Omega - \omega$ .

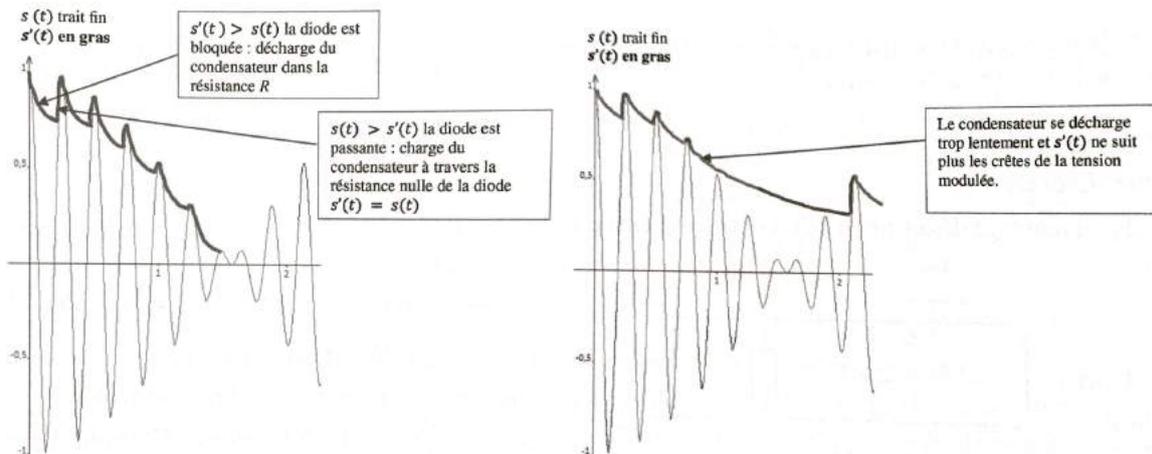
Si  $F$  et  $f$  représentent les fréquences de la porteuse et de la modulante, alors le spectre présente trois raies de fréquence  $F - f$ ,  $F$  et  $F + f$ .



Comme indiqué précédemment, un signal complexe se décompose en une somme de signaux simples sinusoïdaux. Les fréquences audibles étant comprises entre  $20Hz$  et  $20kHz$ , le spectre réel se compose de la porteuse entourée de deux bandes latérales.

## Démodulation

On utilise pour cela un montage détecteur de crêtes. Considérons que la diode est parfaite et qu'à l'instant initial, le condensateur est déchargé. La tension aux bornes de la diode est  $U_D = s(t) - s'(t)$ . On considère aussi que la résistance  $R$  est très grande. Soit  $T$  la période de la porteuse. Pour que la tension  $s'(t)$  suive parfaitement les crêtes de la tension  $s(t)$  (c'est à dire qu'elle représente la tension de modulation), il faut que la constante de temps des circuits  $RC$  soit très supérieur à la période  $T$  de la porteuse, tout en étant inférieur à la période du signal modulant. En effet, dans le cas contraire le condensateur se décharge trop lentement et ne "rencontre" plus la charge sur l'alternance suivante.



**ATTENTION : Pour ce qui est de la démodulation synchrone, puis de la modulation en fréquence voir Bréal p209 ou 294 du Bellier**

## Conclusion

Nous avons pu voir dans cette leçon comment caractérisé un signal quelconque à travers la décomposition de Fourier. On le sait maintenant tout signal est décomposable en une somme de sinus et cosinus. On a pu ainsi voir qu'un signal est caractérisable par une fréquence, que l'on peut obtenir après un filtrage. Le filtrage peut donc être de plusieurs ordre selon le degré du polynôme définissant la fonction de transfert. Enfin nous avons pu voir comment faisons-t-on dans la "vraie vie" pour envoyer des ondes grâce à la modulation de signal.

# L.P. 24 - Ondes progressives. Ondes stationnaires

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Mécanique du point
- Signaux

## Bibliographie

- Physique Tout en un PC-PC\*, Sanz, *Dunod*
- H-prépa Ondes, *Hachette supérieur*
- Ondes mécaniques et diffusion, Garing *Ellipse*

## Introduction

Dans la partie correspondant aux signaux physique du cours de première année de prépa, un certain nombre de phénomènes de propagation ont été étudiés, sans référence à l'équation d'onde (équation aux dérivées partielles) vérifiée par la grandeur physique considérée. Dans cette leçon nous allons établir sur deux exemples l'équation de propagation et relier celle-ci aux phénomènes rencontrés en première année de prépa.

**Manip** : Une ficelle, ont une extrémité est fixée à un mur, est maintenue tendue par un observateur. Lorsque l'expérimentateur imprime une secousse à l'extrémité de la corde, ce déplacement ne met pas brutalement en mouvement toute la corde : une onde, caractérise par le déplacement d'un point de la corde, se propage le long de celle-ci milieu de propagation matériel et continu.

Nous retrouvons un phénomène de propagation d'onde, présentant des similitudes avec la propagation des déformations le long d'une chaîne de mobiles couplés : la déformation imposée à la corde se propage le long de la corde.

Dans les deux cas, l'onde se propage dans la direction  $(Ox)$  de la corde ou de la chaîne de mobiles. Cependant :

- Le mouvement des mobiles considérés est parallèle à  $(Ox)$  ;
- Le déplacement de la corde est perpendiculaire à cette direction de propagation.

Dans le cas de la chaîne de mobiles, nous parlerons d'ondes longitudinales, alors que dans le cas de la corde il s'agit d'ondes transverses.

Observons plus attentivement la propagation le long de la corde en prenant des clichés de celle-ci aux instants successifs :  $t_0, t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_0 + 2\Delta t, \dots$  Nous constatons que la déformation de la corde est à chaque fois la même mais qu'elle se déplace pendant un intervalle de temps  $\Delta t$ , d'une longueur  $\Delta x$  proportionnelle à  $\Delta t$  :

$$\Delta x = c\Delta t \tag{1}$$

L'onde de déformation se propage ainsi à la vitesse  $c$  constante le long de la corde, dans le sens des  $x$  croissants : c'est une onde progressive.

Le déplacement  $y(x, t)$  de la corde vérifie :

$$y(x + c\Delta t, t + \Delta t) = y(x, t) \quad (2)$$

Une telle fonction reste donc constante si  $u = t - \frac{x}{c}$  est fixée. Elle ne dépend que de la seule variable  $u$  :

$$y(x, t) = f(u) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (3)$$

**Rq :** Autrement dit soit en  $t = 0$  on a  $y(x, 0) \rightarrow y(t - x/c, 0) = y(u)$  avec  $u = t - x/c$ .

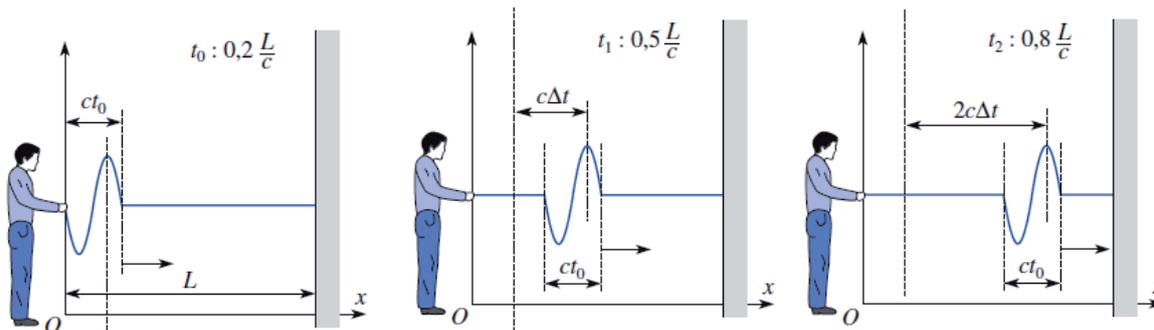
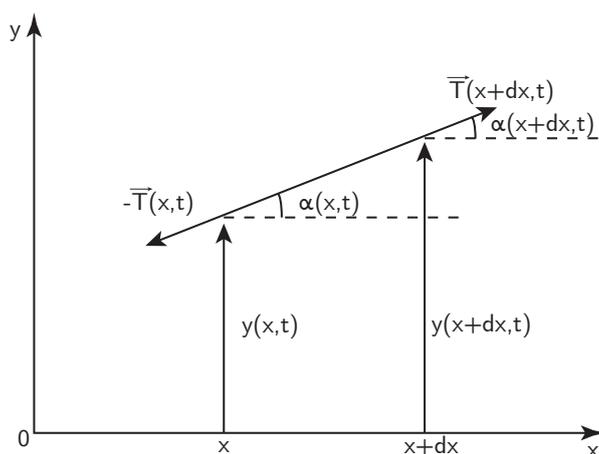


FIGURE 15 – Propagation d'une déformation imprimée à la corde  $c\Delta t = 0.3L$ , clichés à  $t_0$ , puis  $t_0 + \Delta t$ , puis  $t_0 + 2\Delta t$ ...

On va voir justement dans cette leçon que la fonction d'onde  $y(x, t) = f(u(x, t))$  est solution de l'équation de propagation de d'Alembert.

## 1. La corde vibrante : équation de d'Alembert et ses solutions



Soit une corde sans raideur, inextensible, de masse linéique constante  $\mu$ , est tendue par une tension  $\vec{T}$ . Au repos elle se confond avec l'axe  $Ox$ .

De part et d'autre de cette position d'équilibre, on étudie les petits mouvements transversaux de cette corde dans le plan  $xOy$ , en admettant qu'un élément de corde au repos (point  $M_0$ ) reste pendant le mouvement à la même abscisse. L'élongation d'un point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$  (point  $M$ ) est notée  $y(x, t)$ . La tangente en  $M$  à la corde fait avec

l'axe  $Ox$  un angle  $\alpha(x, t)$  qui reste petit, ce qui suppose que  $|\frac{\partial y}{\partial x}| \ll 1$ .

**Rq :**  $\tan(\alpha) = \alpha = dy/dx$  et soit le triangle rectangle  $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2(1 + dy^2/dx^2) = dx^2(1 + (dy/dx)^2) = dx^2(1 + \alpha^2)$ .

Enfin, l'action du champ de pesanteur sur le mouvement, ainsi que toute cause d'amortissement sont négligées.

Soit la longueur de la corde varie très peu lorsqu'elle vibre. On appelle  $\alpha$  l'angle que fait la tangente à la corde au point  $M_0$ , à l'instant  $t$ . L'élément de la corde est donné par pour des petits mouvements ( $|y(x, t)| \ll L$  et  $|\alpha(x, t)| \ll 1$ ) :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 \left( 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) \simeq dx^2(1 + \alpha^2) \quad (4)$$

car  $\tan(\alpha) = \frac{\partial y}{\partial x}$  reste petit donc :  $ds \simeq dx$ .

**Rq :** On peut justifier, au même ordre d'approximation près, que la tension  $\vec{T}$  reste tangente à la corde. En effet considérons le même élément de la corde. Son moment d'inertie par rapport à un axe passant par une des extrémités est en  $ds^2$ . D'après le théorème du moment cinétique en ce point, et toujours au même ordre d'approximation près, le moment de la tension à l'autre extrémité apparaît donc nul, ce qui suppose que cette tension reste tangente à la corde (il n'y a pas de couple de flexion car la corde est souple).

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique pour un élément de la corde de masse  $\mu ds \simeq \mu dx$ , compris entre  $x$  et  $x + dx$ . En considérant les hypothèses prises et en prenant  $\vec{T}(x)$  la tension au point d'abscisse  $x$  exercée par la partie de droite sur la partie de gauche, on obtient :

$$\begin{aligned} \mu dx \vec{a} &= \vec{T}(x + dx) - \vec{T}(x) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} dx \\ \Rightarrow \mu \vec{a} &= \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} \end{aligned} \quad (5)$$

En projection sur  $Ox$  :  $0 = \frac{\partial T_x}{\partial x} \Rightarrow T_x = T \cos(\alpha) = Cste$ .

Soit puisque  $\alpha \ll 1$ ,  $T = |\vec{T}| = Cste$ .

En projection sur  $Oy$  :  $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} = \frac{\partial(T \sin(\alpha))}{\partial x} = (T \cos(\alpha)) \frac{\partial \tan(\alpha)}{\partial x} \simeq T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ .

D'où l'équation de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

avec  $v = \sqrt{T/\mu}$  la célérité de l'onde.

## 2. Solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle

### a) Ondes planes progressives

On a vu à l'introduction que pour une déformation identique au cours du temps le long de la corde on pouvait écrire la déformation comme étant  $y(u) = y(t - x/v)$  pour une propagation vers les  $x$  croissants.

On introduit les grandeurs  $p = t - \frac{x}{v}$  et  $q = t + \frac{x}{v}$ . Soit donc le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} p = t - \frac{x}{v} &\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = 1 \text{ et } \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{v} \\ q = t + \frac{x}{v} &\Rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} = 1 \text{ et } \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{v} \end{aligned}$$

Considérant les anciennes variables en fonction des nouvelles,

$$\begin{aligned} x = x(p, q) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{v} \left( -\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} \right) \\ t = t(p, q) &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} = \left( \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} \right) \end{aligned}$$

Sous forme de composition d'opérateurs (il s'agit de trouver le noyau de l'opérateur d'Alembertien), on écrit  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) y = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) y = 0$ , soit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \left[ -\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} - \left( \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p} \right) \right] \cdot \frac{1}{v} \left[ -\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} \right] y &= 0 \\ \Leftrightarrow \left( \frac{\partial}{\partial p} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial q} \right) y = \frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Après intégration par rapport à  $p$ , il vient  $\frac{\partial y}{\partial q} = G(q)$ , et après intégration par rapport à  $q$ ,  $y(p, q) = f(p) + g(q)$  où  $g$  est une primitive de  $G$ . La solution générale s'écrit donc :

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad (8)$$

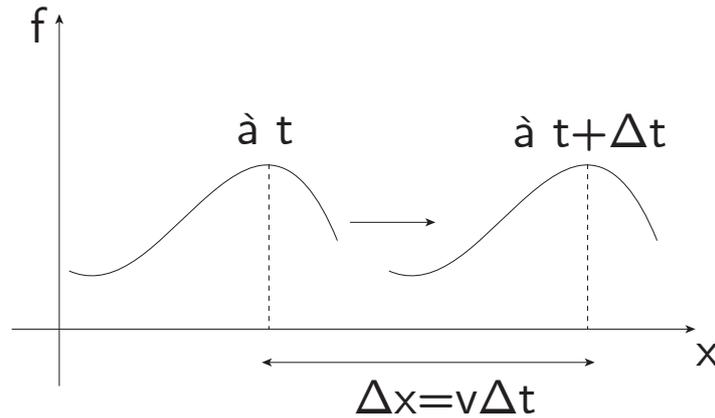
$f$  et  $g$  étant deux fonctions quelconques (au niveau de l'expression analytique pourvu qu'elles soient continues et deux fois dérivables.

#### Comment interpréter ces solutions ?

Considérons le cas  $y_1(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ , en notant que  $t - \frac{x}{v} = t\Delta t - \frac{x + \Delta x}{v}$  si  $\Delta x = v\Delta t$ , il vient alors  $y_1(x, t) = y_1(x + \Delta x, t + \Delta t)$ .

Cela signifie que le signal  $y_1$  apparaît en  $x + \Delta x$  à l'instant  $t + \Delta t$  exactement comme il était en  $x$  à l'instant  $t$ ; il s'est donc propagé, identique à lui même, pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  sur une distance  $\Delta x = v\Delta t$ .

La constante  $v$  représente ainsi la vitesse de propagation du signal  $y_1$  (célérité).



$f(t - \frac{x}{v})$  est une onde progressive se propageant à la vitesse  $v$  dans la direction des  $x$  croissants. A l'instant  $t$ , dans tout le plan  $x = Cste$ ,  $f$  a la même valeur : l'onde progressive est dite plane.

La solution  $y(x, t) = f(t - \frac{x}{v}) + g(t + \frac{x}{v})$  représente ainsi la superposition de deux ondes planes progressives se propageant à la même vitesse suivant l'axe  $Ox$ , mais en sens opposé.

**Def onde plane :** La déformation subit par la corde est la même/constante dans un seul plan. L'amplitude de déformation est constante.

## b) Ondes progressives harmoniques

**Rq :** L'intérêt d'utiliser une notation complexe pour décrire la propagation des ondes réside dans le fait tout d'abord d'avoir une aisance dans les calculs liés aux équations de d'Alembert, mais aussi dans le fait que l'on fait apparaître une seule fréquence. De plus cette notation est plus pratique pour reconstruire un paquet d'onde par exemple.

Constatant que les ondes que nous avons étudiées jusqu'à présent correspondent à des mouvements vibratoires de systèmes stables, nous pouvons rechercher des solutions de l'équation de d'Alembert à dépendance sinusoïdale vis à vis du temps ; c'est à dire tel que :

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x, t) \quad (9)$$

avec  $\omega$  la pulsation de l'onde.

Cherchons donc, en notation complexe, une solution de la forme :

$$\underline{y}(x, t) = \underline{A}(x) \exp(j\omega t) \quad (10)$$

L'équation de propagation vérifiée pour tout  $t$ , impose :

$$\frac{d^2 \underline{A}(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{v^2} \underline{A}(x) = 0 \quad (11)$$

Dont la solution générale est de la forme :

$$\underline{A}(x) = \underline{y}_{01} \exp(-jkx) + \underline{y}_{02} \exp(jkx) \quad (12)$$

avec  $\underline{y}_{01} = y_{01} \exp(j\phi_{01})$  et  $\underline{y}_{02} = y_{02} \exp(j\phi_{02})$ .

On note que  $k = \frac{\omega}{v}$  le vecteur d'onde dirigé dans le sens de propagation de l'onde.

Les solutions sinusoïdales recherchées sont donc de la forme :

$$\underline{y}(x, t) = \underline{y}_{01} \exp(j(\omega t - kx)) + \underline{y}_{02} \exp(j(\omega t + kx)) \quad (13)$$

Soit en notation réelle :

$$y(x, t) = y_{01} \cos(\omega t - kx + \phi_{01}) + y_{02} \cos(\omega t + kx + \phi_{02}) \quad (14)$$

Nous reconnaissons ici la forme générale obtenue précédemment, avec :

$$\begin{aligned} f\left(t - \frac{x}{v}\right) &= y_{01} \cos(\omega t - kx + \phi_{01}) \\ g\left(t + \frac{x}{v}\right) &= y_{02} \cos(\omega t + kx + \phi_{02}) \end{aligned} \quad (15)$$

Chaque terme de la solution caractérise une onde plane progressive harmonique. Ainsi l'onde progressive sinusoïdale est une fonction sinusoïdale à la fois :

- du temps avec une pulsation temporelle  $\omega$
- de la variable spatiale  $x$ , avec une pulsation spatiale  $k$

On parle de la double périodicité spatio-temporelle de l'onde.

De même que la période temporelle  $T = 2\pi/\omega$ , la période spatiale est la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ .

La fréquence spatiale est le nombre d'onde  $\sigma = 1/\lambda$ .

Le lien entre les deux aspects se fait par l'intermédiaire de l'équation de d'Alembert, qui donne la relation de dispersion :

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (16)$$

### 3. Solution en ondes stationnaires de l'équation de d'Alembert

A présent la corde de longueur  $l$  est fixée en ses extrémités, deux points de l'axe  $Ox$  d'abscisse  $x = 0$  et  $x = l$ . Prenons  $y(x, t)$  de la forme :  $y(x, t) = F_1(t - \frac{x}{v}) + F_2(t + \frac{x}{v})$ .

Traduisant les conditions aux limites, à savoir l'immobilité de la corde aux deux bouts :

$$\begin{aligned} \forall t, y(0, t) = F_1(t) + F_2(t) = 0 &\implies F_1 = -F_2 \text{ fonction unique notée } F \\ \text{d'où } y(x, t) &= F\left(t - \frac{x}{v}\right) - F\left(t + \frac{x}{v}\right) \\ \forall t, y(l, t) = F\left(t - \frac{l}{v}\right) - F\left(t + \frac{l}{v}\right) = 0 &\implies F\left(t - \frac{l}{v}\right) = F\left(t + \frac{l}{v}\right) \end{aligned}$$

et avec le changement de variable  $t' = t - \frac{l}{v}$ ,  $F(t') = F(t' + \frac{2l}{v})$ . Il apparaît donc que  $F$  et par conséquent  $y$  est "doublement périodique", en  $t$  (à  $x$  fixé) de période  $2l/v$  et en  $x$  (à  $t$  fixé) de période  $2l$ .

On cherche des solutions de l'équation sous la forme de variables séparées :

$$y(x, t) = f(x) \cdot g(t) \quad (17)$$

caractéristiques des ondes stationnaires.

En remplaçant  $y(x, t) = f(x)g(t)$  dans l'équation de d'Alembert on trouve :

$$\begin{aligned} g \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{v^2} \frac{d^2 g}{dt^2} &= 0 \\ \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dt^2} &= \frac{v^2}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Chaque membre de l'égalité est une fonction d'une variable différent ; les deux membres de l'égalité sont donc égaux à une constante :

- si elle est positive, les solutions sont exponentielles, fonctions incapables de satisfaire les deux conditions aux limites  $f(x=0) = f(x=l) = 0$ .
- si elle est nulle,  $f(x) = Ax + B = 0$  pour que  $f(x=0) = f(x=l) = 0$
- elle doit être négative, d'où les solutions sinusoïdales :

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dt^2} = -\omega^2 &\implies g(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \\ \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} = -k^2 &\implies f(x) = \alpha' \cos(kx) + \beta' \sin(kx) \end{aligned} \quad (19)$$

On connaît les conditions initiales :

- $f(x=0) = 0$  soit  $\alpha' = 0$
- $f(x=l) = 0$  soit  $k_n l = n\pi \implies k_n = \frac{n\pi}{l}$  et  $\omega_n = vk_n = \frac{n\pi v}{l}$ ,  $n \in \mathcal{N}^*$

Par définition (la longueur d'onde  $\lambda$  est la période spatiale de  $y(x, t)$ ),  $k = 2\pi/\lambda$  soit ici :

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{l} \\ \implies l &= n \frac{\lambda_n}{2} \\ \implies f &= \frac{nv}{2l} \end{aligned} \quad (20)$$

La longueur de la corde est un multiple entier de demi-longueurs d'onde.

On veut maintenant l'expression d'une solution  $y_n(x, t)$  correspondant au mode de vibration d'indice  $n$ . Pour cela on sait que :

$$y_n(x, t) = f_n(x) \cdot g_n(t) = [\beta'_n \sin(k_n x)] [\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)] \quad (21)$$

Notons  $\alpha_n \beta'_n = a_n$  et  $\beta_n \beta'_n = b_n$ , il vient alors :

$$y_n(x, t) = \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi vt}{l}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad (22)$$

ou de manière équivalente  $y_n(x, t) = A_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x)$ .

On sait que l'équation de d'Alembert est à coefficients constants, homogène et linéaire par rapport aux dérivées. Une expression générale de la solution est donc obtenue par combinaison linéaire sur tous les modes soit  $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t)$  ; c'est le principe de superposition des petits mouvements.

Le mode  $n$  s'écrit sous la forme  $y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \phi_n)$ .

Le premier facteur peut être interprété comme une amplitude qui dépend de  $x$ , le second, le facteur de phase en est alors indépendant et ne dépend que de  $t$  ; il n'y a donc plus

propagation de la phase : l'onde fait du "surplace" ; la phase de l'onde est dite stationnaire.

### MANIP : corde de Melde !!

**Rq :** Pourquoi en  $x = 0$  on a une condition de déformation nulle ? Même sil en  $x = 0$  il y a l'excitateur la superposition des ondes qui se propage suivant les  $x$  croissants et décroissants font que en  $x = 0$  la déformation de la corde est nulle.

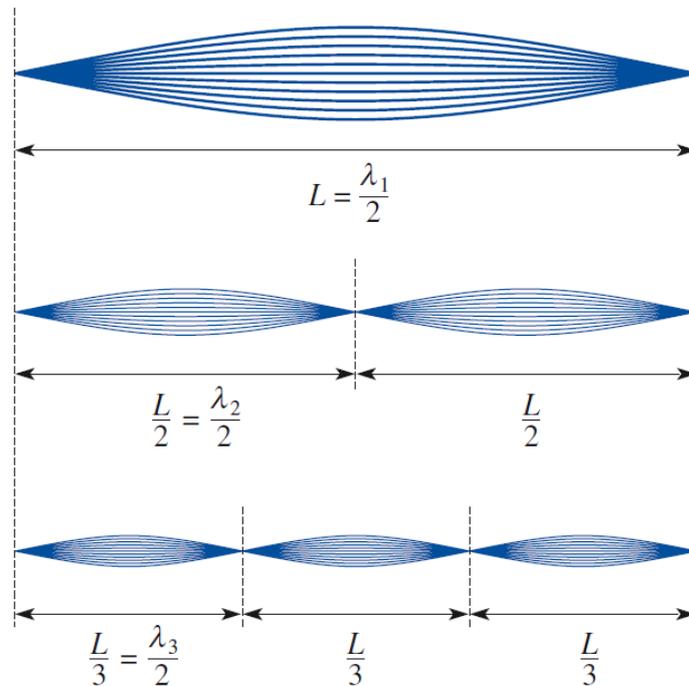


FIGURE 16 - La corde de Melde en résonance ( $n = 1, n = 2, n = 3$ )

Les points d'amplitude nulle  $\forall t$  sont des nœuds de vibration ; ils sont donnés par  $\sin(\frac{n\pi x}{l}) = 0$ , soit  $n + 1$  positions :  $0, l/n, 2l/n, \dots, l$ , séparées par  $\lambda_n/2$ , extrémités comprises. Entre les nœuds, des ventres, c'est à dire des points qui au cours du temps, vibrent avec une amplitude maximale.

## 4. Aspect énergétique d'une corde vibrante

On a pu voir lors de l'expérience que la déformation se propage avec une certaine vitesse. Cette déformation est permise de part la propagation de l'énergie le long de la corde. Ainsi on va essayer de déterminer l'énergie mise en jeu.

La densité linéique d'énergie  $e(x, t)$  de la corde en mouvement est une grandeur telle que l'énergie de la corde à l'instant  $t$  s'écrive  $E(t) = \int_0^l e(x, t) dx$ .

## a) Notion d'impédance

On a vu dans la première partie que lorsqu'on projetait suivant  $Oy$  on avait :

$$\begin{aligned} T_y &= T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \\ \longrightarrow \partial/\partial t &\longrightarrow \frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial V_y}{\partial x} \end{aligned} \quad (23)$$

Si on écrit l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit en projetant suivant  $Oy$  :

$$\mu dx \frac{\partial V_y}{\partial t} = -T_y(x, t) + T_y(x + dy, t) = \frac{\partial T_y}{\partial x} \implies \mu \frac{\partial V_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x} \quad (24)$$

Si on suppose que la tension suivant  $y$  est de la forme  $T_y = f_T(t - x/v)$  et la vitesse  $V_y = f_V(t - x/v)$ , alors on peut re-écrire l'équation (23) :

$$T_0 \cdot f'_V = -v f'_T \quad (25)$$

Si on intègre équation on obtient :

$$\begin{aligned} -v T_y &= T_0 V_y \\ T_y &= -\frac{T_0}{v} V_y \\ T_y &= Z^+ V_y \end{aligned} \quad (26)$$

Avec  $Z^+ = -\sqrt{T_0 \mu}$  l'impédance de la corde pour les  $x$  croissants.

En utilisant l'équation (24) on aurait pu trouver la même chose et en procédant à la même démarche pour les  $x$  décroissants on obtiendrait une relation similaire avec cette fois ci  $Z^- = \sqrt{T_0 \mu}$ .

## b) Densité d'énergie linéique de la corde

Soit la puissance est définie par la relation :

$$\mathcal{P} = -\vec{T} \cdot \vec{u} = -T_y V_y \quad (27)$$

Si on fait un bilan énergétique sur un élément de la corde on va avoir :

$$\begin{aligned} [e(x, t + dt) - e(x, t)] dx &= [\mathcal{P}(x, t) dt - \mathcal{P}(x + dx, t)] dt \\ \frac{\partial e}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = \frac{\partial (T_y V_y)}{\partial x} \\ \Leftrightarrow &= \frac{\partial T_y}{\partial x} V_y + T_y \frac{\partial V_y}{\partial x} \\ \Leftrightarrow &= \mu \frac{\partial V_y}{\partial t} V_y + \frac{1}{T_0} T_y \frac{\partial T_y}{\partial t} \\ \Leftrightarrow &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu V_y^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{T_0} T_y^2 \right) \end{aligned} \quad (28)$$

On retrouve bien :

- la densité d'énergie cinétique  $e_c = \frac{1}{2} \mu V_y^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$
- la densité d'énergie potentielle  $e_p = \frac{1}{2} \frac{1}{T_0} T_y^2 = \frac{1}{2} T_0 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$

**A quelle vitesse se déplace cette énergie ?**

Soit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial e}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \\
 &= \frac{\partial(T_y V_y)}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} T_y V_y + \frac{1}{2} T_y V_y \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} (-\sqrt{T_0 \mu}) V_y^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{-\sqrt{T_0 \mu}} T_y^2 \right) \\
 &= -\sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \mu V_y^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{T_0} T_y^2 \right) \\
 &= -v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \mu V_y^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{T_0} T_y^2 \right)
 \end{aligned} \tag{29}$$

On voit alors que l'énergie se déplace à la vitesse de la célérité de l'onde  $v$ .

### c) Autre méthode

#### Densité d'énergie cinétique

Soit l'élément de masse  $dm = \mu dx$ , de vitesse  $\partial y / \partial t$  possède une quantité d'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}
 \Delta E_c &= \frac{1}{2} \mu dx \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \\
 \iff e_c &= \frac{\Delta E_c}{dx} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2
 \end{aligned} \tag{30}$$

avec  $e_c$  la densité d'énergie cinétique.

#### Densité d'énergie potentielle

On considère la corde tout à fait inextensible, pendant le mouvement. Alors sa longueur serait  $L$  supérieur à sa longueur de repos  $l$ .

Posons :

$$L = \int ds \tag{31}$$

avec  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ . Alors :

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} dx \simeq \int_0^l \left( 1 + 2 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) dx \tag{32}$$

car  $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1$ , d'où :

$$L = l + \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \tag{33}$$

Le travail de l'opérateur (on rappelle que par hypothèse,  $T$  reste constant) pendant cet allongement est  $W_{0p} = T(L - l) = \frac{T}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$ .

En effet,  $T$  est le module de la force que devrait exercer un opérateur extérieur à la corde pour obtenir son allongement. Son travail (positif) s'identifie donc à la variation d'énergie potentielle de la corde.  $E_p$  étant prise nulle pour la corde au repos, il vient :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{T}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \\ \iff e_p &= \frac{dE_p}{dx} = \frac{T}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (34)$$

#### d) Densité d'énergie mécanique

On a la densité d'énergie mécanique :

$$e = e_c + e_p = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{T}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \quad (35)$$

avec  $v^2 = T/\mu$ .

Alors on peut écrire :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -T \frac{\partial y}{\partial t} \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \right) \quad (36)$$

On reconnaît dans le crochet l'équation de d'Alembert qui est nulle. On a alors l'équation local de la conservation de l'énergie (analogue à celle de l'électromagnétisme avec  $\vec{j} \cdot \vec{E} = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}(S) &= 0 \quad (3D) \end{aligned} \quad (37)$$

avec  $S = -T \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$ .

Le terme  $\partial S / \partial x$  est la réduction sur l'axe  $Ox$  de  $\text{div}(\vec{S})$  avec  $\vec{S} = S \vec{u}_x$ ,  $S$  représentant le flux d'énergie à travers la corde en un point et un instant données (ou plus exactement la puissance puisqu'il n'y a pas de surface ici).

$\partial e / \partial t \neq 0$  ; l'énergie se propage le long de la corde, mais sa densité n'est pas constante.

#### e) Cas de l'onde stationnaire

On sait qu'une onde stationnaire s'écrit :  $y_n(x, t) = A_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x)$ . Alors en utilisant l'expression des énergies on peut obtenir les énergies cinétique, potentielle et mécanique :

$$\begin{aligned} E_c^n &= \frac{\mu}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial y_n}{\partial t} \right)^2 dx = \frac{T}{4} A_n^2 k_n^2 l \cos^2(\omega_n t + \phi_n) \\ E_p^n &= \frac{T}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial y_n}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{T}{4} A_n^2 k_n^2 l \sin^2(\omega_n t + \phi_n) \\ \implies E_n &= \frac{T}{4} A_n^2 k_n^2 l = \frac{\pi^2 T}{4l} n^2 A_n^2 \end{aligned} \quad (38)$$

**Rq :** En considérant la corde comme un assemblage de petits éléments (de longueurs  $dx$ ) qui effectuent chacun autour de sa position de repos respective sur l'axe  $Ox$  un mouvement sinusoïdale d'amplitude  $A_n \sin(k_n x)$ , on aurait la même énergie mécanique.

On veut maintenant calculer l'énergie totale  $E$  d'une corde fixée aux deux bouts, en tenant compte de tous les modes :

$$E = \int_0^l \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{T}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (39)$$

Avec  $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t) = \sum_n A_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x)$ ;  $k_n = \pi n/l$ .

Profitant du fait que  $E$  ne dépend pas du temps, effectuons le calcul en  $t = 0$  :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} (x) &= \sum_n A_n \omega_n \cos(\phi_n) \sin(k_n x) \\ \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{t=0} (x) &= \sum_n A_n k_n \sin(\phi_n) \cos(k_n x) \end{aligned} \quad (40)$$

On voit bien que l'expression de l'énergie totale va être composée de produit de somme et son expression est trop longue. Pour nous faciliter la démarche on va utiliser l'orthogonalité des fonctions sinus et cosinus :

$$\int_0^l \sin(k_n x) \sin(k_m x) dx = \frac{l}{2} \delta_{n,m} \quad (41)$$

avec  $\delta_{n,m}$  le symbole de Kroenecker. Pour le cosinus on a la même expression.

Ainsi on peut exprimer facilement  $E$  :

$$\begin{aligned} E &= \frac{Tl}{4} \sum_n A_n^2 k_n^2 = \frac{\pi^2 T}{4l} \sum_n n^2 A_n^2 \\ E &= \sum_{n=1}^{\infty} E_n \end{aligned} \quad (42)$$

Il s'agit là d'une illustration du théorème de Parseval, lié à l'orthogonalité des fonctions  $\sin(k_n x)$  et  $\cos(k_n x)$ .

Physiquement il apparaît donc que l'énergie totale de la corde vibrante est la somme des énergies de chaque mode ou composante harmonique. Cela n'a rien d'évident a priori puisque l'énergie est une grandeur quadratique par rapport à l'élongation et non linéaire.

## Conclusion

On a pu voir dans cette leçon, à travers l'exemple de la corde vibrante comment on pouvait décrire la propagation d'une onde grâce à l'équation de d'Alembert. On a pu voir dans quelles conditions on pouvait obtenir des solutions correspondant à des ondes progressives puis stationnaire. Enfin on a pu faire une étude de l'aspect énergétique, toujours pour le cas de la corde vibrante, on a pu voir qu'une onde stationnaire ne transporte pas d'énergie (elle la stocke) alors que les ondes progressives ne la stocke pas.

Bien entendu le domaine de la physique des ondes ne s'arrête pas à la corde vibrante mais concerne la propagation des ondes EM, de l'acoustique, des phénomènes de dispersion ou absorption... et cela sera abordé dans d'autres leçon.

# L.P. 25 - Ondes acoustiques

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Ondes progressives
- Ondes stationnaire
- Mécanique des fluides
- Théorème de Schwartz
- Thermodynamique

## Bibliographie

- Physique Tout en un PC-PC\*, Sanz, *Dunod*
- H-prépa Ondes, *Hachette supérieur*
- Ondes mécaniques et diffusion, Garing *Ellipse*

## Introduction

On a vu dans des leçon précédente comment caractériser le phénomène de propagation d'une onde. On connaît l'aspect progressif et stationnaire des ondes à travers leur écriture mathématique. Qui dit propagation d'onde acoustique dit équation de d'Alembert. Dans cette leçon on va à travers une démarche similaire établir l'équation de propagation d'une onde acoustique dans un fluide.

Un objet, la membrane d'un haut parleur par exemple, se déplace dans un fluide. Ce déplacement doit être rapide sinon le fluide s'écoule simplement autour de l'objet. Les fluides étant des milieux élastiques, les particules de fluides au voisinage immédiat de cet objet voient leur volume et donc leur masse volumique varier. Cette modification de volume entraine une modification de la pression qui permet la mise en mouvement des particules de fluide voisines, cette mise en mouvement entraînant des variations de volume et donc de pression des particules de fluides voisines et ainsi de suite, générant ainsi une onde sonore (ou onde acoustique).

Deux points importants ressortent de cette description :

- La présence d'un milieu matériel est nécessaire. (expérience de la pompe à vide)
- La propagation des ondes sonores résulte du couplage entre les variations de pression et le déplacement des particules fluides.

Outre la pression, le volume et la masse volumique, d'autres grandeurs, comme la température, varient. Nous serons donc amenés à faire des hypothèses thermodynamiques concernant les transformations subies par la particule de fluide.

# 1. Équation de propagation des ondes sonores

## a) Équation de couplage

On va considérer ici un fluide parfait dont on néglige l'influence de la pesanteur. Au repos, le fluide est caractérisé par :

- Une pression uniforme  $P_0$
- Une masse volumique uniforme  $\mu_0$
- Une vitesse particulaire nulle

L'onde sonore est une perturbation par rapport à cet état d'équilibre.

Si on fait le bilan, l'état du fluide est donc décrit par :

- La pression  $P(M, t) = P_0 + p_1(M, t)$  avec  $|p_1(M, t)| \ll P_0$  ;
- La masse volumique  $\mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1(M, t)$  avec  $|\mu_1(M, t)| \ll \mu_0$  ;
- La vitesse particulaire  $\vec{v}(M, t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M, t)$ , avec  $||\vec{v}_1(M, t)|| \ll V_0$  où  $V_0$  est une vitesse que nous déterminerons plus tard.

Les grandeurs  $p_1/P_0$ ,  $\mu_1/\mu_0$  et  $v_1/V_0$  seront traitées comme des infiniment petits du premier ordre, comme toutes les autres perturbations que pourra engendrer l'onde sonore dans le milieu. La quantité  $p_1$  est appelée pression acoustique ou surpression.

Pour étudier la propagation des ondes sonores et chercher les équations qui relient les grandeurs  $p_1$ ,  $\mu_1$  et  $\vec{v}_1$ , nous allons utiliser les résultats vus dans le cours de mécanique des fluides.

Les équations locales utilisées dans le cours de mécanique des fluides sont :

- L'équation locale de la conservation de la masse ;

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(M, t) + \text{div}(\mu \vec{v}(M, t)) = 0 \quad (1)$$

- L'équation d'Euler (le fluide est supposé parfait et on néglige la pesanteur)

$$\mu(M, t) \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(M, t) + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}(M, t) \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P(M, t) \quad (2)$$

On compte alors 5 inconnus scalaires (3 composantes pour la vitesse, la pression et la masse volumique). Or on ne dispose que de 4 équations scalaires. Il manque donc une équation. Celle-ci viendra d'une hypothèse thermodynamique sur la nature de la transformation qui sera précisée plus tard. Nous allons simplement supposer que le comportement du fluide est décrit par une équation reliant la masse volumique et la pression, de la forme :

$$\mu = f(P) \quad (3)$$

Nous préciserons ce que peut être cette équation.

### Linéarisation des équations

En utilisant les grandeurs que l'on a introduit on peut ré-écrire l'équation de la conservation de la masse au point  $M$  à l'instant  $t$  :

$$\frac{\partial(\mu_0 + \mu_1)}{\partial t}(M, t) + \text{div}((\mu_0 + \mu_1) \vec{v}(M, t)) = 0 \quad (4)$$

Le terme  $\mu_1 \vec{v}_1$ , produit de deux termes du premier ordre, est du deuxième ordre : il est négligeable. Par ailleurs,  $\mu_0$  est constant.

A l'ordre 1, l'équation devient :

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t}(M, t) + \mu_0 \operatorname{div}(\vec{v}(M, t)) = 0 \quad (5)$$

En ce qui concerne l'équation d'Euler, l'accélération convective, produit de deux termes du premier ordre, est du deuxième ordre/ Elle est négligeable devant l'accélération locale, qui est du premier ordre. Étudions l'ordre de grandeur du rapport entre l'accélération convective et l'accélération locale, pour préciser devant quelle vitesse  $V_0$  la vitesse particulière es négligeable. On appelle  $T$  la durée caractéristique de variation temporelle de la vitesse,  $L$  la distance caractéristique de variation spatiale de la vitesse et  $U$  l'ordre de grandeur caractéristique de la vitesse particulière. Les ordres de grandeur cherchés sont :

$$\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\| \sim \frac{U}{T} \text{ et } \left\| \left( \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{v} \right) \right\| \sim \frac{U^2}{L}$$

donc,

$$\frac{\left\| \left( \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{v} \right) \right\|}{\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{U^2 T}{L U} = \frac{U}{L/T} \ll 1$$

Or  $L/T = c$ , la célérité des ondes sonores dans le milieu, d'où  $U \ll c$  : la vitesse particulière est négligeable devant la célérité des ondes. L'infiniment petit d'ordre un correspondant est  $U/c$ .

De plus,  $\mu \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$  à l'ordre un. L'équation d'Euler linéarisé dans le cadre de l'approximation acoustique est donc :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1(M, t)}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} p_1(M, t) \quad (6)$$

Un développement limité au premier ordre de la relation  $\mu = f(P)$  donne :

$$\begin{aligned} \mu &= f(P_0 + p_1) = f(P_0) + f'(P_0)p_1 \\ \mu &= \mu_0 + \left( \frac{d\mu}{dP} \right)_{p_1=0} p_1 \\ \implies \mu_1 &= \left( \frac{d\mu}{dP} \right)_{p_1=0} p_1 \end{aligned}$$

On peut donc ré-écrire l'équation sous la forme :

$$\mu_1(M, t) = \mu_0 \chi_0 p_1(M, t) \quad (7)$$

où  $\chi_0 = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{d\mu}{dP} \right)_{p_1=0}$  est le coefficient de compressibilité isentropique.

Les équations à considérer maintenant sont des équations couplées :

$$\begin{aligned} \chi_0 \frac{\partial p_1}{\partial t}(M, t) &= -\operatorname{div} \vec{v}_1(M, t) \\ \mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}(M, t) &= -\overrightarrow{\operatorname{grad}} p_1(M, t) \end{aligned} \quad (8)$$

## b) Équation de propagation

On va nous placer dans une situation unidimensionnelle et supposer que  $p_1(M, t) = p_1(x, t)$  uniquement. Dans ce cas alors,  $\overrightarrow{\text{grad}}p_1 = \frac{\partial p_1}{\partial x} \overrightarrow{u}_x$ , donc  $\overrightarrow{v}_1 = v_1 \overrightarrow{u}_x$ .

$$\begin{aligned}\chi_0 \frac{\partial p_1}{\partial t}(x, t) &= -\frac{\partial v_1}{\partial x}(x, t) \\ \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t}(x, t) &= -\frac{\partial p_1}{\partial x}(x, t)\end{aligned}\tag{9}$$

Pour découpler les deux équations précédentes on va utiliser le théorème de Schwarz pour les dérivées partielles : on dérive par rapport au temps la 1er équation et la deuxième par rapport à  $x$  :

$$\begin{aligned}\chi_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, t) \right) \\ \mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_1}{\partial t}(x, t) \right) &= -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}(x, t)\end{aligned}\tag{10}$$

Ainsi on trouve l'équation dont vérifie la surpression  $p_1$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(x, t) &= \frac{1}{\mu_0 \chi_0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}(x, t) \\ \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 \Delta p_1(x, t) \quad (3D)\end{aligned}\tag{11}$$

Cette équation est également vérifiée par le potentiel des vitesses ( $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\Phi$ ) et les champs de vitesse ( $\overrightarrow{v}$ ).

### Célérité du son

La vitesse caractéristique de la propagation du son s'exprime en fonction des caractéristiques du fluide par :

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \chi_0} = \left( \frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_{p_1=0}\tag{12}$$

Soit deux variables temporelles :  $T_{diff}^*$  la durée caractéristique de la diffusion thermique et  $T^*$  la durée caractéristique de variation de grandeurs qui se propagent sur la même distance.

On sait que  $T_{diff}^* = L^2/D_{th}$  où  $D_{th}$  est la diffusivité thermique du milieu, et  $T^* = L/c$ . La diffusivité thermique de l'air est de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-5} m^2 \cdot s^{-1}$ . Les fréquences audibles se situent entre 20Hz et 20kHz, ce qui correspond à des longueurs d'onde comprise entre 1.7 cm et 17 m. Nous pouvons choisir comme longueur  $L$  justement la longueur d'onde. Dans ce cas,  $T^*/T_{diff}^* = f D_{th}/c^2 \ll 1$

**⇒ La durée caractéristique de la diffusion thermique est beaucoup plus grande que la durée caractéristique de variation des grandeurs qui se propagent : l'évolution du fluide sera donc considérée comme adiabatique au passage de l'onde sonore.**

De plus le fluide est considéré comme parfait, les effets de viscosité ont donc été négligés : les transformations subies par le fluide peuvent être considérées comme réversibles.

Le fluide subit des transformations adiabatiques réversibles, c'est à dire isentropiques.

$$\implies \chi_0 = \chi_S = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$$

Soit le fluide étant assimilé à un gaz parfait. Son évolution étant adiabatique réversible, l'équation qui la décrit est la loi de Laplace :

$$\begin{aligned} \frac{P}{\mu^\gamma} &= cste \\ \implies \frac{\partial \mu}{\partial P}(p_1 = 0) &= \frac{A}{\gamma} P_0^{\frac{1}{\gamma}-1} = \frac{\mu_0}{\gamma P_0} \end{aligned} \quad (13)$$

avec  $\gamma = c_p/c_v$ , rapport des capacités thermiques à pression et volume constants. D'où la relation définissant la vitesse du son dans un gaz :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \quad (14)$$

où  $M$  est la masse molaire du fluide et  $T_0$  sa température au repos.

## MANIP : HAUT PARLEUR MESURE DE LA CELERITE DU SON

Pour les ondes acoustiques dans les solides on a :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (15)$$

milieu	vitesse du son (m . s <sup>-1</sup> )
<b>gaz</b>	
dioxygène	317
air	331
diazote	339
dihydrogène	1 270
<b>liquides</b>	
eau	1 500
mercure	1 450
<b>solides</b>	
plomb	1 230
cuivre	3 750
fer	5 130
granit	6 000

FIGURE 17 – Ordre de grandeur de la vitesse du son dans différents milieux

## 2. Solutions de l'équation

### a) Ondes planes progressives monochromatique

On va considérer ici, une solution particulière de l'équation de d'Alembert : l'OPPH. Considérons une onde plane progressive monochromatique, de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k} = k \vec{u}_x$ , dont le potentiel est, en notation complexe :

$$\underline{\phi} = \underline{\phi}_0 \exp(j(\omega t - kx))$$

Les champs de vitesse et de surpressions sont alors :

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \overrightarrow{\text{grad}} \underline{\phi} = -jk \underline{\phi}_0 \exp(j(\omega t - kx)) \overrightarrow{u}_x \\ \underline{p} &= -\mu_0 \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial t} = -j\omega \mu_0 \underline{\phi}_0 \exp(j(\omega t - kx)) \end{aligned} \quad (16)$$

Ainsi on retrouve pour l'équation de propagation :

$$\Delta \underline{\phi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\phi}}{\partial t^2} = \left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \underline{\phi} = 0 \quad (17)$$

avec la relation de dispersion  $k^2 = \omega^2/c^2$ .

## b) Notion d'impédance

En électrocinétique, une impédance est égale au rapport de l'amplitude complexe d'une tension  $v$  sur celle d'une intensité  $i$  :  $Z = v/i$ .

Par analogie, nous pouvons définir une impédance pour une onde sonore plane monochromatique se propageant dans un tuyau de section  $S$  comme le rapport de l'amplitude d'une force  $pS$  sur l'amplitude du débit volumique correspondant  $vS$  :  $Z = pS/vS = p/v$ .

Dans le cas d'une onde plane progressive harmonique se propageant selon les  $x$  croissants, la pression  $p$  et la vitesse  $\underline{v}$  sont proportionnelles :

$$\underline{v} = -j \frac{\omega}{c} \exp(j\omega t - kx) \overrightarrow{u}_x = \underline{v} \overrightarrow{u}_x \text{ et } \underline{p} = -j\omega \mu_0 \underline{\phi}_0 \exp(j\omega t - kx) \overrightarrow{u}_x$$

Soit alors :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{p}}{\underline{v}} = Z_c = \mu_0 c = \frac{1}{\chi_0 c} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_0}} \quad (18)$$

Cette impédance  $Z_c$  est réelle et indépendante de  $x$  et de  $\omega$ . Dans le cas d'une onde plane progressive monochromatique se propageant selon les  $x$  décroissants,  $\underline{\phi} = \underline{\phi}_0 \exp(j(\omega t + kx))$ , d'où :

$$-Z_c = \frac{\underline{p}}{\underline{v}} \quad (19)$$

Ordre de grandeur : L'impédance acoustique d'un liquide est environ 5000 fois plus grande que celle d'un gaz : en effet, la masse volumique d'un liquide est environ 1000 fois plus grande que celle d'un gaz et la célérité du son dans un liquide environ 5 fois plus importante que dans un gaz. Plus précisément, les impédances acoustique de l'eau et de l'air sont :  $Z_{eau} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$  et  $Z_{air} = 410 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pour un solide,  $Z_a$  est du même ordre de grandeur que pour un liquide mais un peu plus grande car  $\mu_0$  et  $c$  sont légèrement plus importantes. Nous retiendrons donc le résultat suivant :

$$Z_{a,solide} > Z_{a,liquide} \gg Z_{a,gaz}$$

## c) Aspect énergétique

Dans le cadre de la leçon concernant les ondes progressives et les ondes stationnaires, vous avez sûrement vu l'aspect énergétique concernant la propagation d'une onde. Faisons de même pour une onde sonore.

## Puissance transférée à travers une surface $\mathcal{S}$

La puissance transférée à travers une surface  $\mathcal{S}$  est la puissance des forces de pression, soit :

$$\mathcal{P} = \iint_{M \in \mathcal{S}} (P_0 + p_1(M, t)) d\vec{S}_M \cdot \vec{v}_1(M, t) \quad (20)$$

Cette puissance s'écrit comme le flux du vecteur  $(P_0 + p_1)\vec{v}_1$  à travers la surface  $\mathcal{S}$ . Nous pouvons alors définir le vecteur densité de courant d'énergie, que nous noterons  $\vec{\Pi}$  (vecteur de Poynting sonore) :

$$\vec{\Pi}(M, t) = (P_0 + p_1(M, t))\vec{v}_1(M, t) \quad (21)$$

**Rq :** Il est composé d'un terme d'ordre 1,  $\vec{\Pi}_1(M, t) = P_0\vec{v}_1(M, t)$ , dont la valeur moyenne temporelle est nulle dans le cas d'une onde plane progressive sinusoidale, et d'un terme d'ordre 2,  $\vec{\Pi}_2(M, t) = p_1\vec{v}_1(M, t)$  qui permet d'exprimer le transfert d'énergie dû à la surpression donc aux ondes sonores.

## Densité volumique d'énergie

L'énergie cinétique volumique associée au mouvement (macroscopique) du fluide est à l'ordre 2 :

$$e_K = \frac{1}{2}\mu_0 v^2 \quad (22)$$

Quand la particule de fluide est au repos, sa pression est  $P_0$  et son volume  $d\tau_{M,0}$ . En présence de l'onde sonore, sa pression est  $P = P_0 + p_1$  et son volume  $d\tau_M$ . Le travail des efforts de pression est stocké sous forme d'énergie potentielle par la particule de fluide : il est emmagasiné au cours des phases de compression, où la particule de fluide augmente son énergie potentielle, et transmis au reste du fluide au cours des phases de détente, où la particule de fluide voit son énergie potentielle diminuer.

La particule de fluide possède l'énergie potentielle :

$$dE_P(M, t) = e_P(M, t)d\tau_M \quad (23)$$

On définit la densité volumique d'énergie  $e(M, t) = e_c(M, t) + e_P(M, t)$ .

## Bilan énergétique

Considérons un volume de fluide  $\mathcal{V}$  quelconque. A l'instant  $t$ , il contient l'énergie :

$$\mathcal{E}(t) = \iiint_{M \in \mathcal{V}} e(M, t)d\tau_M \quad (24)$$

A l'instant  $t + dt$ , son énergie est devenue :

$$\mathcal{E}(t + dt) = \iiint_{M \in \mathcal{V}} e(M, t + dt)d\tau_M \quad (25)$$

Entre les deux instant il a perdu l'énergie :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{V} \rightarrow ext} = \mathcal{P}_{\mathcal{V} \rightarrow ext} dt = \oint \oint_{P \in \mathcal{S}} \vec{\Pi}(P, t) \cdot d\vec{S}_P dt \quad (26)$$

où  $\mathcal{S}$  est la surface qui délimite le volume  $\mathcal{V}$ . La conservation de l'énergie du fluide contenu dans le volume  $\mathcal{V}$ , s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t + dt) &= \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}_{\mathcal{V} \rightarrow ext} \\ \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \mathcal{P}_{\mathcal{V} \rightarrow ext} &= 0\end{aligned}\quad (27)$$

On a bien l'équation globale de conservation de l'énergie. En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \mathcal{P}_{\mathcal{V} \rightarrow ext} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \iiint_{M \in \mathcal{V}} e(M, t) d\tau_M \right) + \oint \oint_{P \in \mathcal{S}} \vec{\Pi}(P, t) \cdot \overrightarrow{dS}_P &= 0 \\ \Leftrightarrow \iiint_{M \in \mathcal{V}} \frac{\partial e(M, t)}{\partial t} d\tau_M + \iiint_{M \in \mathcal{V}} \text{div} \vec{\Pi}(M, t) d\tau_M &= 0\end{aligned}\quad (28)$$

Cette équation étant valable quel que soit le volume  $\mathcal{V}$ , on en déduit l'équation locale de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial e}{\partial t}(M, t) + \text{div} \vec{\Pi}(M, t) = 0 \quad (29)$$

On retrouve la forme générale de toutes les équations de conservation déjà rencontrées. Pour simplifier les calculs, nous nous placerons dans le cas 1D.

### Densité volumique d'énergie potentielle

On cherche  $e_P(x, t)$  solution de l'équation :

$$\frac{\partial e_P}{\partial t} + \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 \right)}{\partial t} + \frac{\partial (P_0 v_1 + p_1 v_1)}{\partial x} = 0 \quad (30)$$

Cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial e_P}{\partial t} = -\mu_0 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} - P_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} - p_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (31)$$

Compte tenu des équations de couplage on a finalement :

$$\frac{\partial e_P}{\partial t} = \left( P_0 \chi_0 p_1 + \frac{1}{2} \chi_0 p_1^2 \right) \quad (32)$$

On a une terme d'ordre 1 et un terme d'ordre 2. Par ailleurs le terme d'ordre 1 de l'énergie potentiel s'annule avec le terme d'ordre un du vecteur de Poynting. On en déduit alors :

$$\frac{\partial e_C}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial e_{P2}}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial \Pi_2}{\partial t}(x, t) = 0 \quad (33)$$

Le bilan énergétique locale est vérifié à chaque ordre d'approximation.

### d) Intensité sonore

L'intensité d'une onde acoustique est définie comme la puissance moyenne par unité de surface transportée par l'onde. Elle s'exprime donc en  $W.m^{-2}$  et est égale au flux moyen du vecteur de Poynting sonore à travers une surface unité perpendiculaire à sa direction de propagation  $\vec{n}$  :

$$I = \langle \Pi \rangle = \langle \vec{\Pi} \cdot \vec{n} \rangle \quad (34)$$

L'intensité des sons naturels varie énormément : du bourdonnement d'un moustique au bruit d'un avion au décollage, l'oreille humaine est capable de détecter des sons dont l'intensité varie d'un facteur  $10^{12}$  environ. D'autre part, quand l'intensité d'un son est multipliée par dix, l'oreille le perçoit comme un doublement du volume sonore : l'oreille est un récepteur logarithmique. C'est pourquoi l'intensité sonore s'exprime en bels ou en décibels. On définit l'intensité sonore en décibels, ou niveau sonore par :

$$I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (35)$$

avec  $I_0 = 10^{-12} W.m^{-2}$ , le seuil d'audibilité pour une fréquence voisine de 4000 Hz, c'est à dire à l'intensité minimale que peut détecter l'oreille humaine. Pour une onde plane harmonique,  $I = \frac{p_{1eff}^2}{\mu_0 c}$ . Le seuil d'audibilité correspond donc à une surpression efficace  $p_{1eff,0} = 2.10^{-5} Pa$ . L'intensité sonore en décibels peut donc s'écrire aussi :

$$I_{dB} = 20 \log \frac{p_{1eff}}{p_{1eff,0}} \quad (36)$$

avec  $p_{1eff,0} = \sqrt{\mu_0 c I_0}$

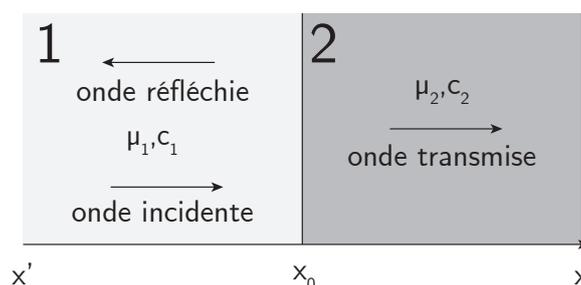
Quelques niveaux sonores	
Pièce silencieuse :	30 dB
Lave-vaisselle silencieux :	50 dB
Rue animée :	75 dB
Bébé qui pleure :	80 dB
Scooter (en accélération) :	90 dB
Cantine scolaire :	100 dB
Balladeur à fond :	105 dB
Scooter sans pot en accélération :	115 dB
Avion :	120 dB
Chantier de marteaux piqueurs :	130 dB
Boîte de nuit :	130 dB
Fusée :	180 dB

FIGURE 18 – Ordre de grandeur d'intensité sonores

### 3. Réflexion et transmission des ondes sonores

Intéressons nous à des ondes planes se propageant dans des conduites de section constante.

#### a) Conditions aux limites



Considérons la réflexion d'une onde plane à l'interface de séparation de deux fluides. Nous nous limiterons au cas de l'incidence normale, l'onde incidente se propageant perpendiculairement à la surface plane séparant le milieu 1 et le milieu 2.

L'onde incidente  $f_1\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$  donne naissance à une onde réfléchie  $g_1\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$  et à une onde transmise  $f_2\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$ , qui peuvent être déterminées en précisant les conditions aux limites vérifiées par les vitesses et les surpressions de ces ondes à l'interface.

Posons donc (en notant  $Z_{c1} = \mu_1 c_1$  et  $Z_{c2} = \mu_2 c_2$ ) les impédances caractéristiques des deux milieux :

$$\begin{cases} v_1(x, t) = f_1(x, t) + g_1(x, t) = f_1\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{c_1}\right) \\ p_1(x, t) = Z_{c1} [f_1(x, t) - g_1(x, t)] = Z_{c1} \left[ f_1\left(t - \frac{x}{c_1}\right) - g_1\left(t + \frac{x}{c_1}\right) \right] \\ v_2(x, t) = f_2(x, t) = f_2\left(t - \frac{x}{c_2}\right) \\ p_2(x, t) = Z_{c2} f_2(x, t) = Z_{c2} f_2\left(t - \frac{x}{c_2}\right) \end{cases} \quad (37)$$

### Continuité de la vitesse

Par définition de l'interface, les déplacements, donc les vitesses, des fluides perpendiculaires à celui-ci sont identiques :

$$v_{1x}(x_0, t) = v_{2x}(x_0, t) \text{ soit } f_1(x_0, t) + g_1(x_0, t) = f_2(x_0, t)$$

### Continuité de la pression

Considérons un piston de masse  $M$ , de section  $S$  et d'épaisseur négligeable, au niveau de l'interface. Soumis aux forces de surpression  $p_1$  et  $p_2$ , son mouvement est décrit par l'équation  $a(t)$  étant son accélération :

$$Ma(t) = S[p_1(x_0, t) - g_1(x_0, t)] = Z_{c2} f_2(x_0, t) \quad (38)$$

L'accélération du piston est celle du fluide au niveau de l'interface, elle reste finie. Lorsque la masse  $M$  tend vers zéro, le produit  $Ma(t)$  tend vers zéro et conduit à la continuité des surpressions :

$$p_1(x_0, t) = p_2(x_0, t) \text{ soit } Z_{c1}[f_1(x_0, t) - g_1(x_0, t)] = Z_{c2} f_2(x_0, t)$$

## b) Coefficients de réflexion et de transmission des ondes sonores

### Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude

Le coefficient de réflexion (transmission) est le rapport entre l'amplitude de l'onde réfléchie (transmise) et l'amplitude de l'onde incidente au niveau de l'interface.

Les conditions aux limites étant traduites par les équations de continuités de vitesse et de pression. Nous en déduisons donc les coefficients de réflexion en vitesse  $r_{12(v)}$  et en surpression  $r_{12(p)}$ .

$$r_{12(v)} = \frac{g_1\left(t + \frac{x_0}{c_1}\right)}{f_1\left(t - \frac{x_0}{c_1}\right)} = \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}} = -r_{12(p)} \quad (39)$$

et ceux de transmission  $\tau_{12(v)}$  et  $\tau_{12(p)}$  :

$$\tau_{12(v)} = \frac{f_2 \left( t - \frac{x_0}{c_2} \right)}{f_1 \left( t - \frac{x_0}{c_2} \right)} = \frac{2Z_{c1}}{Z_{c1} + Z_{c2}} = \frac{2\mu_1 c_1}{\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2} \quad (40)$$

$$\tau_{12(p)} = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}} = \frac{2\mu_2 c_2}{\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2}$$

## Coefficients de réflexion et de transmission énergétique

Le coefficient de réflexion énergétique  $R$  est le rapport (en valeur absolue) entre la puissance réfléchie et la puissance incidente à l'interface. Le coefficient de transmission énergétique  $T$  est le rapport (en valeur absolue) entre la puissance transmise et la puissance incidente à l'interface :

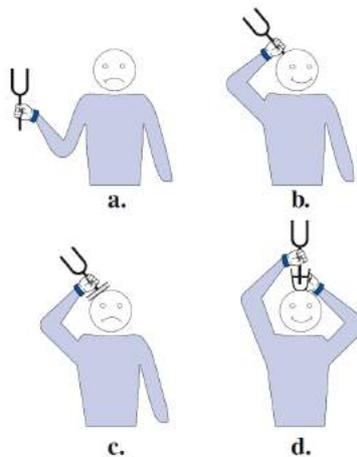
$$R = \left| \frac{\vec{\Pi}_r \cdot \vec{u}_x S_r}{\vec{\Pi}_i \cdot \vec{u}_x S_i} \right| \quad \text{et} \quad T = \left| \frac{\vec{\Pi}_t \cdot \vec{u}_x S_t}{\vec{\Pi}_i \cdot \vec{u}_x S_i} \right|$$

avec  $\vec{\Pi} = Z_c f^2(x_0, t) \vec{u}_x$  pour les trois indices,  $r$ ,  $t$  et  $i$ . Sachant que la section est constante on obtient finalement :

$$R = |r_{12(v)} r_{12(p)}| = \left( \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}} \right)^2 = \left( \frac{\mu_1 c_1 - \mu_2 c_2}{\mu_1 c_1 + \mu_2 c_2} \right)^2 \quad (41)$$

$$T = |\tau_{12(v)} \tau_{12(p)}| = \frac{4Z_{c1} Z_{c2}}{(Z_{c1} + Z_{c2})^2} = 1 - R$$

Considérons, par exemple, une interface liquide-gaz. Le liquide est nettement plus dense que le gaz et la vitesse du son y est supérieure. Nous obtiendrons alors  $R \approx 1$  et  $T \ll 1$ . La transmission des ondes sonores entre un liquide et un gaz est fort peu efficace. Par exemple, un plongeur entendra distinctement le bruit d'une hélice de hors bord tournant dans l'eau, mais beaucoup plus difficilement une personne placée sur la berge criée.



Nous pouvons réaliser quelques manipulations simples à l'aide d'un diapason pour illustrer les conclusions que nous avons énoncées :

- (a) Le diapason excité par un choc initial, est tout d'abord maintenu en l'air. Il est délicat de percevoir le son qu'il émet même à proximité de la tête. **La transmission des ondes sonores entre un solide et un gaz est peu efficace.**

- (b) Si le diapason est placé contre la tempe (ce que fait un musicien), le son devient parfaitement audible. **La transmission des ondes sonore entre deux solides est efficaces.**
- (c) Si une plaque de polystyrène est placée entre le diapason et la tempe, le son redevient très faible. **Un certain nombre de matériaux (feutre, polystyrène...) absorbent les sons.**
- d Si le diapason est placé dans un verre d'eau sur la tête, le son est aussi perceptible. **La transmission des ondes acoustiques entre un solide et un liquide est efficace.**

## Conclusion

On va pu voir dans cette leçon comment formaliser mathématiquement la propagation des ondes acoustiques à travers un milieu. On a également pu aborder l'aspect énergétique qui découle de cette propagation et enfin comment raisonner en présence d'une interface entre deux milieux de nature différente et comprendre l'importance de la notion d'impédance.

# L.P. 27 - Propagation guidée des ondes

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Optique ondulatoire
- Optique géométrique
- Phys. des ondes
- Équation de Maxwell

## Bibliographie

- Physique Tout en un PC-PC\*, Sanz, *Dunod*
- H-prépa Ondes, *Hachette supérieur*
- Ondes EM dans les milieux diélectriques, Garing *Ellipse*
- Optique physique, Taillet *Deboeck*

## Introduction

On a pu voir dans des leçons précédentes comment se décrit la propagation des ondes à l'aide de l'équation de d'Alembert. Lorsqu'on parle on propage des ondes acoustiques qui se déplace dans un milieu... Mais comment faire pour concentrer en un point toute l'énergie des ondes ? Il faudrait les guider pour les forces et se "diriger" et canaliser l'énergie, pour pouvoir assurer le transport et l'utilisation de cette énergie.

Cette technologie de guidage dépend essentiellement des fréquences et des longueurs d'onde des ondes transporter. Par exemple, les fibres optiques utilisent les variations des indices de réfraction des matériaux isolants pour transporter la lumière dans le domaine du visible ou du spectre proche, tandis que les ondes de fréquence micro-ondes sont canalisées par des guides métalliques.

Le premier guide d'ondes fut proposé par Joseph John Thomson en 1893 et vérifié expérimentalement par Oliver Lodge en 1894.

On a déjà étudié les solutions en ondes planes de l'équation de d'Alembert, qui fait sortir une vitesse de propagation constante. Nous allons désormais étudier le cas d'un milieu dispersif, c'est-à-dire où la vitesse de propagation dépend de la fréquence (exemple introductif du prisme) à travers le guidage des ondes.

## 1. Guidage d'onde rectangulaire

### a) Position du problème

Soit quatre plan métalliques parfaitement conducteurs en  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  et  $y = b$ , de longueur infinie suivant  $Oz$ , de section droite rectangulaire et dans lequel règne le vide.

On veut étudier la propagation dans ce guide suivant la direction  $Oz$  d'une onde électromagnétique monochromatique de pulsation  $\omega$ , dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = f(y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_x \quad (1)$$

où  $f(y)$  désigne une fonction réelle de la variable  $y$ ,  $k_g$  est une constante positive. On pose  $k_g = 2\pi/\lambda_g$  ( $\lambda_g$  est la "longueur d'onde guidée") et  $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c$ .

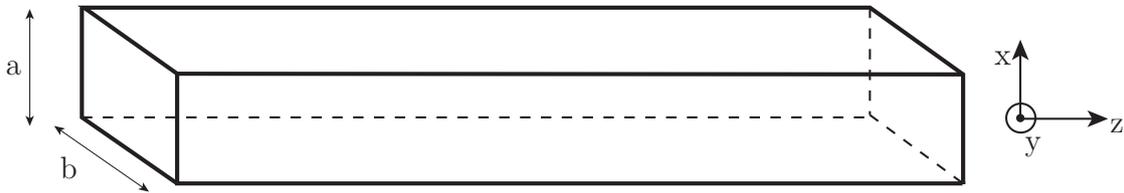


FIGURE 19 – Schéma du système considéré

Soit les équations de Maxwell dans le vide :

$$\begin{aligned} \text{(M-G)} \quad \text{div}(\vec{E}(M, t)) &= 0 \\ \text{(M-T)} \quad \text{div}(\vec{B}(M, t)) &= 0 \\ \text{(M-F)} \quad \text{rot} \vec{E}(M, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \\ \text{(M-A)} \quad \text{rot} \vec{B}(M, t) &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2)$$

Avec  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  le champs électrique et magnétique.  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide ( $\varepsilon_0 = 8.84 \cdot 10^{-12} F.m^{-1}$ ) et  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H.m^{-1}$ ).

L'objectif est de coupler  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Soit en prenant le rotationnel de l'équation (M-F) :

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E}(M, t))) = -\text{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}\right) \quad (3)$$

L'opérateur  $\text{rot}$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$  portent sur des variables indépendantes, donc ils se commutent et on obtient en utilisant l'équation (M-A) :

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{E}(M, t))) = -\frac{\partial(\text{rot}(\vec{B}(M, t)))}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2} \quad (4)$$

De plus on sait que  $\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ . Ainsi on peut finalement écrire :

$$-\Delta \vec{E}(M, t) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2} \quad (5)$$

En posant  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$  on obtient l'équation de d'Alembert tridimensionnelle :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(M, t)}{\partial t^2} \quad (6)$$

De la même façon en prenant le  $\text{rot}$  et en l'appliquant à l'équation (M-A) on obtient :

$$\Delta \vec{B}(M, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(M, t)}{\partial t^2} \quad (7)$$

On a bien une relation de la forme :

$$f''(y) + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right) f(y) = 0 \quad (8)$$

Ces ondes doivent être compatibles avec les conditions aux limites (C.L.) qui sont les relations de passage entre deux milieux de l'électromagnétisme. Le métal étant parfait (conductivité infinie), le champ électrique  $y$  est nul ; par continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  ( $\vec{E}$  est suivant  $\vec{u}_x$ , il est donc tangentiel aux parois parallèles à  $Oxz$ ), il faut  $\vec{E}(y=0) = \vec{E}(y=b) = \vec{0}$ , d'où  $f(y=0) = f(y=b) = 0$ . Une solution en exponentielles ne permet pas de satisfaire cette double condition et donc nécessairement  $\omega^2/c^2 - k_g^2 > 0$ , d'où :

$$f(y) = E^0 \sin \left[ \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2} \cdot y + \phi \right] \quad (9)$$

avec

$$\begin{aligned} f(y=0) = 0 &\implies \phi = 0 \\ f(y=b) = 0 &\implies \sin \left[ \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2} \cdot b \right] = 0 \implies \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \end{aligned}$$

D'où pour le mode  $n$  :

$$f_n(y) = E_0^n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad n \in \mathcal{N} \quad (10)$$

Le champ électrique s'écrit alors  $E_0^n \sin(n\pi y/b) \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_x$ , ce qui lui confère un caractère hybride : propagatif suivant  $Oz$  et stationnaire suivant  $Oy$ .

Sur les parois  $x=0$  et  $x=a$  où le champ  $\vec{E}$  est normal, on constate une discontinuité du champ, d'où l'apparition d'une densité superficielle de charge  $\sigma$ .

Comme le champ électrique n'est pas celui d'une onde plane progressive, la relation  $\vec{B} = \vec{u} \wedge \vec{E}/c$  n'est pas applicable (d'ailleurs de quel  $\vec{u}$  pourrait-il s'agir?). Il est indispensable de revenir à l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{vmatrix} 0 & E(y,z) & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ k_g E_0^n \sin \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - k_g z) \\ -\frac{n\pi}{b} E_0^n \cos \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \end{vmatrix} \quad (11)$$

d'où le champs  $\vec{B}$  où les constantes d'intégration sont nulles ( le système ne comporte pas de courants continus, il n'y a pas de champ magnétique statique).

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \vec{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{k_g}{\omega} E_0^n \sin \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \\ \frac{n\pi}{b\omega} E_0^n \cos \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - k_g z) \end{vmatrix} \quad (12)$$

$E = E_x$  est en phase avec  $B_z$  et en quadrature avec  $B_x$ . Alors que  $\vec{E}$  est polarisé rectilignement,  $\vec{B}$  est, "dans un plan  $y = cste$ , polarisé elliptiquement". Il possède une composante  $B_z$  sur la direction de propagation. De ce fait l'onde est bien transverse électrique, mais elle n'est pas transverse magnétique.

Comme  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  est nul dans le métal parfait. Sur les plans  $y=0$  et  $y=b$ ,  $B_y$  est composante normale donc continue et on a bien  $B_y(y=0) = B_y(y=b) = 0$ .

En revanche sur ces mêmes plans,  $B_z$  est composante tangentielle et non nulle ; cette discontinuité est liée à des courants surfaciques. En  $x=0$  et  $x=a$ , pas de composante

normale ( $B_x = 0$ ), donc continuité assurée, mais  $B_y$  et  $B_z$  sont toutes les deux tangentielles et non nulles, d'où courants surfaciques.

On remarque que  $\vec{B}$  n'est pas transverse : sa composante  $B_x$  n'est jamais nulle tant que  $p \neq 0$ .

## b) Relation de dispersion

On remarque que nous avons la relation  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ . On peut alors écrire la relation de dispersion :

$$\begin{aligned} k_g^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \\ \iff k_g &= \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{\omega a}\right)^2} \\ \iff \lambda_g &= \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2a}\right)^2}} \end{aligned} \quad (13)$$

car  $k_g = 2\pi/\lambda_g$  et  $\omega/c = 2\pi/\lambda_0$ .

**Rq :**  $\lambda_g$ , longueur d'onde guidée, dépend du mode  $p$ . Il n'y a plus de propagation pour  $k_g = 0 \rightarrow \omega_c = n\pi c/a$ .

Ainsi l'onde se propage uniquement si  $\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 > 0$ . Une onde de fréquence donnée ne peut se propager que dans un nombre fini de modes. On peut alors définir une fréquence de coupure :

$$\begin{aligned} \omega &\gtrsim \omega_c = \frac{n\pi c}{a} \\ f &\gtrsim f_c = \frac{nc}{2a} \end{aligned} \quad (14)$$

La fréquence la plus basse est obtenue pour  $n = 1$  d'où le fait que l'on peut dimensionner le guide pour avoir  $b = \frac{c}{2f_c}$ .

## c) Vitesse de phase et vitesse de groupe

La vitesse de phase d'une onde est la vitesse à laquelle la phase de l'onde se propage dans l'espace. Elle est définie comme étant :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_g} \quad (15)$$

Ainsi en utilisant la relation de dispersion on trouve :

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} > c \quad (16)$$

La vitesse de groupe caractérise le déplacement de l'ensemble du paquet, c'est si on veut une sorte de vitesse moyenne du groupe d'ondes planes qui définit le signal. Elle est définie par la relation :

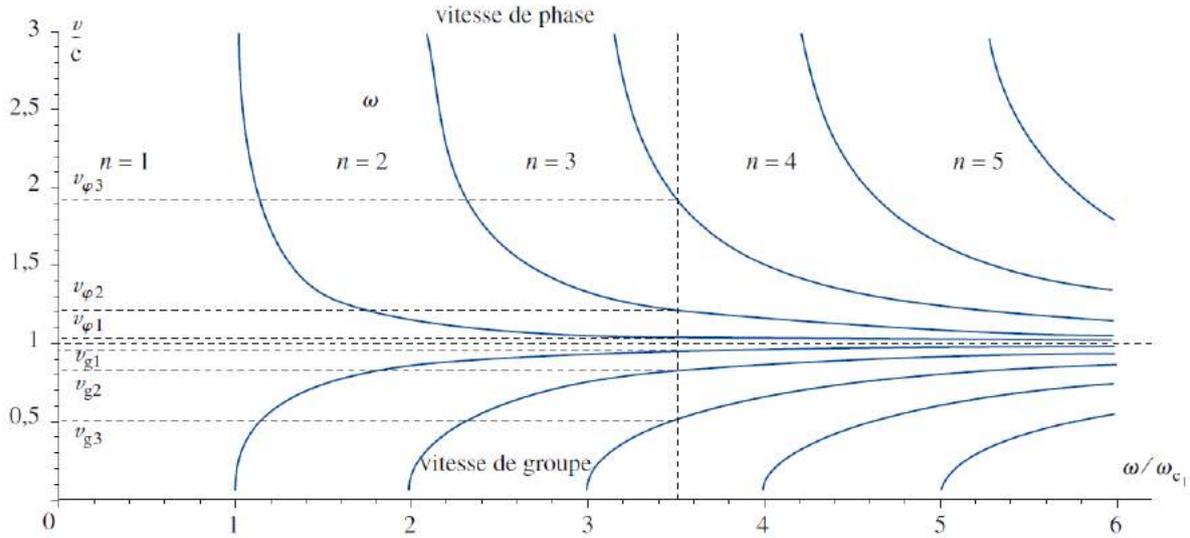
$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g} \quad (17)$$

En utilisant la relation de dispersion et en utilisant la notation différentielle on trouve :

$$\begin{aligned} 2k_g dk_g &= \frac{2\omega d\omega}{c^2} \\ \Leftrightarrow \frac{d\omega}{dk_g} &= \frac{c^2 k_g}{\omega} \end{aligned} \quad (18)$$

Alors on obtient :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{\frac{1}{k^2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + 1}} < c \quad (19)$$



Pour une valeur de  $\omega$  donnée, il existe plusieurs modes de propagation possibles correspondant à des valeurs de  $k$  différentes et donc à des vitesses de phase et de groupe différentes.

#### d) Aspect énergétique

Le flux d'énergie sortant peut s'écrire à travers le vecteur de Poynting. Dans notre cas on peut écrire :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} E & 0 \\ 0 & B_y \\ 0 & B_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ -EB_z \\ EB_y \end{vmatrix} \quad (20)$$

En développant on trouve :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{n\pi}{b\omega} E_0^{n2} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos(k_g z - \omega t) \sin(k_g z - \omega t) \\ \frac{k_g}{\omega} E_0^{n2} \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos^2(k_g z - \omega t) \end{vmatrix} \quad (21)$$

D'où la valeur moyenne du vecteur de Poynting :

$$\langle \Pi \rangle = \frac{k_g}{2\mu_0\omega} E_0^{n2} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{e}_x \quad (22)$$

La composante stationnaire sur  $\vec{e}_z$  possède donc une contribution nulle ( $E$  et  $B_x$  sont en quadrature). Seule la composante propagative suivant les  $x$  croissants contribue au

transport de l'énergie dans le sens de la propagation guidée ( $E$  et  $B_z$  en phase).

Une conséquence du théorème de Poynting est que la puissance électromagnétique traversant une surface  $\Sigma$  est donnée par le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_S &= \iint_{\Sigma} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot (dxdy \vec{u}_z) = a \frac{k_g}{2\mu_0\omega} E_0^{n2} \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dy \\ \implies \mathcal{P}_S &= \frac{abk_g E_0^{n2}}{4\mu_0\omega} \end{aligned} \quad (23)$$

Pour un guide rectangulaire de cotés égaux,  $a$ .

**Rq :** On peut aussi calculer la valeur moyenne  $\langle u \rangle$  de la densité volumique de l'énergie électromagnétique :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \\ \langle u \rangle &= \frac{\varepsilon_0 E_0^{n2}}{4} \left( 1 - \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \cos \left( \frac{2\pi n x}{a} \right) \right) \end{aligned} \quad (24)$$

**Rq :** L'énergie moyenne traversant la section droite du guide pendant le temps  $dt$  est :

$$dE = \mathcal{P} dt = \frac{a^2 k_g}{4\mu_0\omega} E_{0,p}^2 = \frac{a^2}{4\mu_0 v_\phi} E_{0,p}^2 dt \quad (25)$$

C'est aussi l'énergie moyenne localisée dans le volume dont la base est la section droite du guide et l'épaisseur  $dz = v_e dt$  où  $v_e$  est la vitesse de propagation de l'énergie. Et comme  $\langle u \rangle$  dépend de  $x$ , elle s'écrit :

$$v_e = \frac{c^2}{v_\phi} = v_g \quad (26)$$

La vitesse de groupe s'identifie à la vitesse de l'énergie (on a bien  $v_e = v_g < c$ )

## 2. La fibre optique à saut d'indice : approche géométrique

Les premières fibres optiques ont été utilisées en médecine, sur le principe de la réflexion totale. Grâce au laser, source de lumière à la fois puissante, cohérente et directionnelle, la fibre optique est devenue le canal de transmission privilégié en télécommunications.

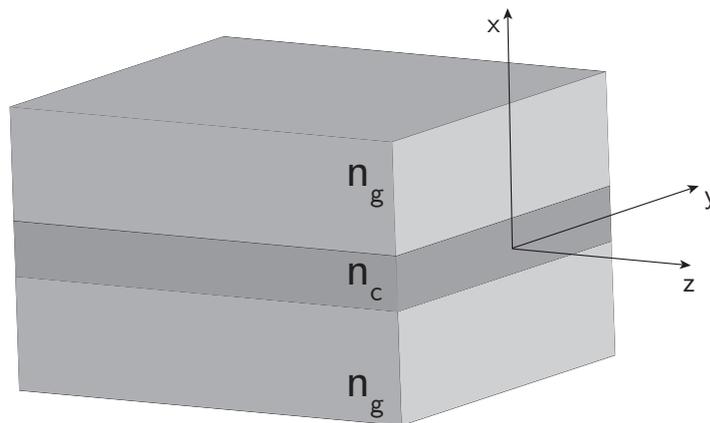
Ses principaux avantages :

- la faible atténuation permettant d'accroître la distance entre répéteurs ;
- l'insensibilité aux interférences électromagnétiques externes BF ;
- la large bande passante (débits importants) ;
- la réduction significative du nombre de stations d'amplification.

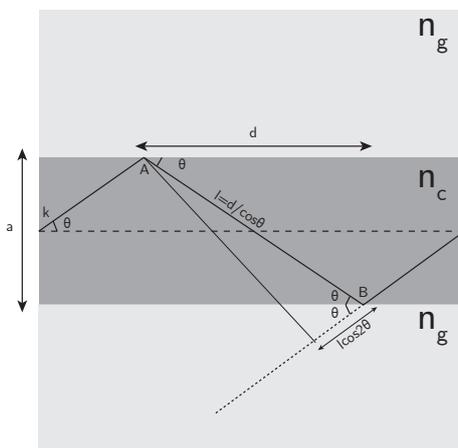
Deux inconvénients toutefois temporaires :

- le faible rendement dans les conversions optique  $\leftrightarrow$  électronique ;
- une certaine fragilité (mais actuelle).

### a) Réflexions successives - condition de réflexion totale



Une fibre optique est constituée d'un coeur d'épaisseur  $a$  et d'indice  $n_c$  entouré d'un gaine d'indice plus faible  $n_g < n_c$ .



Le rayon est guidé s'il atteint la surface coeur/gaine sous une incidence supérieure à l'angle de réfraction limite  $\theta_l$  au delà duquel il y a réflexion totale :

$$n_c \sin \theta_l = n_g \implies \sin \theta_l = n_g / n_c \quad (27)$$

Il faut donc que l'angle d'incidence  $\pi/2 - \theta$  sur les dioptries soit supérieur à l'angle critique, soit  $\sin(\pi/2 - \theta) > n_g / n_c$ , ce qui impose finalement que :

$$\cos(\theta) > \frac{n_g}{n_c} \quad (28)$$

Si l'angle d'incidence est trop grand la réflexion totale n'a pas lieu.

### b) Superposition des ondes réfléchies - modes

Quand la condition précédente est remplie, la fibre contient une superposition d'ondes réfléchies. Ces ondes interfèrent entre elles, ce qui peut conduire à une atténuation si les interférences sont destructives. Les ondes qui se propagent sans diminution sont celles pour lesquelles les ondes réfléchies se superposent en phase. Il faut donc s'assurer que la

différence de marche entre deux ondes réfléchies successives est un multiple de la longueur d'onde.

L'onde réfléchie deux fois a parcouru le chemin optique :  $l = n_c d / \cos \theta$  entre les points  $A$  et  $B$ , ce qui correspond à une phase :

$$\phi_2(d) = \frac{2\pi n_c}{\lambda} \frac{d}{\cos(\theta)} \quad (29)$$

La phase de la première onde plane sur l'axe  $z$  indiqué est donnée au bout de la distance  $d$  par :

$$\phi_0(d) = \frac{2\pi n_c}{\lambda} l \cos(2\theta) = \frac{2\pi n_c d \cos(2\theta)}{\lambda \cos(\theta)} \quad (30)$$

ce qui avec  $\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$  s'écrit aussi

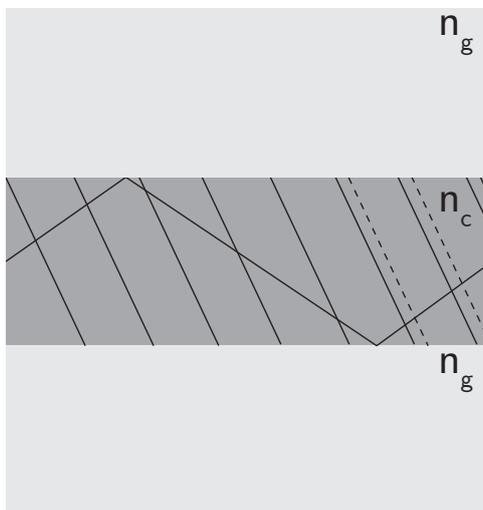
$$\phi_0(d) = \frac{2\pi n_c d}{\lambda} \left( \frac{2}{\cos(\theta)} - 2 \cos(\theta) \right) = \frac{4\pi n_c d \sin^2(\theta)}{\lambda \cos(\theta)} \quad (31)$$

La différence de phase est donc donnée par :

$$\Delta\phi = \phi_2(d) - \phi_0(d) = \frac{2\pi n_c d}{\lambda} \left( \frac{2}{\cos(\theta)} - 2 \cos(\theta) \right) = \frac{4\pi n_c d \sin^2 \theta}{\lambda \cos \theta} \quad (32)$$

Soit en remarquant que  $\tan \theta = a/d$ ,

$$\Delta\phi = \frac{4\pi n_c a}{\lambda} \sin \theta \quad (33)$$



Finalement c'est un réseau infini de sources espacées de  $2a$  qu'il faut considérer, pour tenir compte du nombre infini d'onde réfléchies qui se superposent dans la fibre. Les ondes réfléchies interfèrent constructivement à condition que  $\Delta\phi$  soit un multiple entier de  $2\pi$ , soit :

$$\frac{4\pi a \sin \theta}{\lambda} = 2\pi p \quad (34)$$

Ce qui donne une condition sur les angles  $\theta_p$  permis :

$$\sin \theta_p = \frac{p\lambda}{2a} \quad p \in \mathcal{N} \quad (35)$$

L'approche simplifiée nous indique donc que seuls certains angles d'incidence  $\theta_p$  peuvent se propager dans la fibre, on parle alors de modes de la fibre.

### c) Dispersion de mode

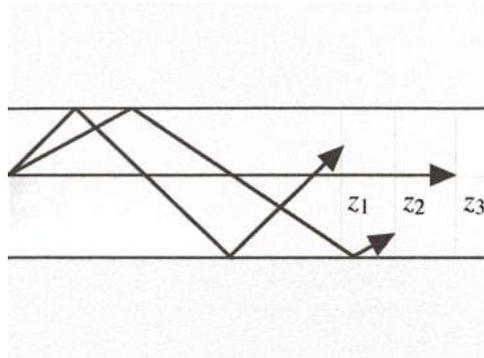
Le vecteur d'onde selon  $z$  est relié à la pulsation de manière différente selon les modes. Plus précisément en utilisant la relation précédente, on trouve

$$k_z^p = \frac{\omega}{c} \cos \theta_p = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 p^2}{a^2}} \quad (36)$$

C'est une relation de dispersion, et le fait qu'elle dépende de  $p$  est appelé dispersion de mode. A cause de cette dispersion, les signaux se déforment au cours de la propagation dans la fibre, comme nous allons le voir dans le prochain paragraphe.

On remarque aussi que pour une pulsation  $\omega$  donnée, un nombre fini de modes peuvent se propager dans la fibre, ceux pour lesquels  $\pi p c/a < \omega$ .

### d) Modes et bande passante



Les ondes associées à chacun des modes de propagation diffèrent dans la fibre. Du fait des incidences différentes, les fronts d'onde avancent à des vitesses différentes le long de la direction  $z$ . En effet, le temps  $t$  que met un front d'onde pour parcourir une distance  $z$  le long de la fibre est donné par (**vérifier formule car faute dans le Tillet**) :

$$t = \frac{z n_c}{c \cos \theta_p} \quad (37)$$

Si un signal est émis à l'entrée de la fibre, et se propage suivant deux modes différents  $\theta_p$  et  $\theta_q$ , il sera reçu au bout de la fibre de longueur  $\ell$  avec un décalage temporel

$$\Delta t_{pq} = \frac{\ell n_c}{c} \left( \frac{1}{\cos \theta_p} - \frac{1}{\cos \theta_q} \right) \quad (38)$$

Si ce temps est plus grand que le temps qui sépare deux informations dans le signal, alors les informations se mélangent au bout de la fibre et le signal est dégradé, à cause de la dispersion de mode.

La bande passante est définie par la fréquence maximale à laquelle on peut transmettre des informations sur la fibre. Elle est limitée par le décalage temporel  $\Delta t$  entre les modes extrêmes,  $\theta = 0$  et  $\theta_p$  où  $p$  est l'entier immédiatement inférieur à  $p_{max}$  :

$$\Delta t = \frac{\ell n_c}{c} \left( \frac{1}{\cos \theta_p} - 1 \right) \quad (39)$$

où l'on a utilisé la relation (28). C'est la condition de réflexion totale qui fixe le mode le plus grand qui peut se propager. Si on transmet des données séparées par un temps  $T$  inférieur à  $\Delta t$ , celles-ci seront brouillées au bout de la fibre à cause de la dispersion.

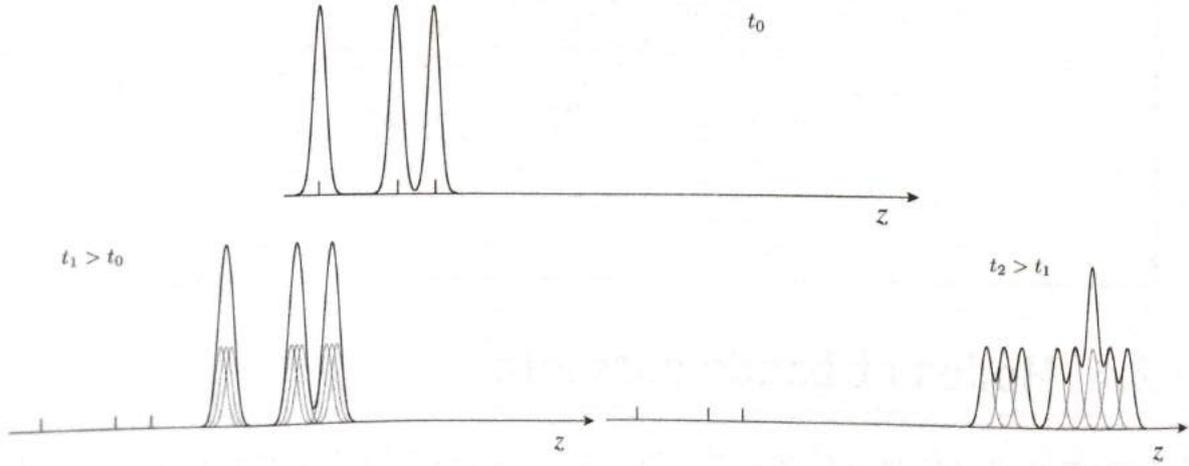


FIGURE 20 – Illustration schématique de la dispersion. À gauche les 3 signaux initiaux qu'on veut propager dans la fibre. Ce signal se propage selon plusieurs modes, ici 3. Sur les figures du milieu et de droite, les signaux sont représentés à des temps ultérieurs. L'effet de la dispersion est illustré pour une distance parcourue modérée et importante, respectivement. Sur la dernière figure le signal est trop déformé pour être exploitable.

La fréquence maximale à laquelle on peut transmettre les données est donc donnée par :

$$f_{max} = \frac{c}{\ell} \frac{n_c n_g}{n_c - n_g} \quad (40)$$

Plus les indices  $n_c$  et  $n_g$  sont proches, plus les angles d'incidence permis sont petits et plus la dispersion est faible. En limitant la longueur  $\ell$  de la fibre, on ne permet pas à un éventuel décalage de se développer pleinement et on peut augmenter la fréquence maximale. Pour transmettre le signal sur de longues distances, il faut remettre le signal en forme à intervalles réguliers pour le renvoyer sur une nouvelle portion de fibre, grâce à des répéteurs. L'expression qui précède, obtenue en ne considérant que la limite imposée par la condition de réflexion totale, donne une limite inférieure sur  $f_{max}$ . Il est possible d'obtenir des fréquences  $f_{max}$  plus importantes en utilisant le fait que les modes de propagation sont discrets et en s'arrangeant pour que l'onde ne se propage que selon un mode, comme nous allons le voir maintenant.

### e) Nombre de modes

Deux conditions, exprimées par les expressions (28) et (35) sont nécessaires pour que l'onde puisse se propager. On doit en effet avoir :

$$\cos \theta_p = \sqrt{1 - \frac{p^2 \lambda^2}{a^2}} > \frac{n_g}{n_c} \quad (41)$$

soit en réarrangeant,

$$p < p_{max} = \frac{a}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}} \quad (42)$$

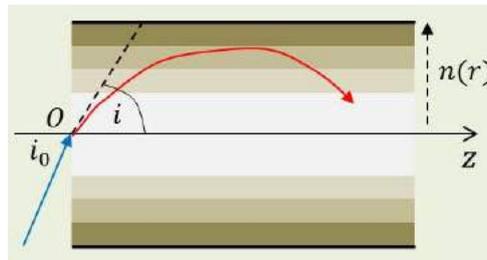
Le nombre de modes permis est limité et l'expression précédente permet d'évaluer comment les différents paramètres de la fibre interviennent sur le nombre de modes qui peuvent se propager dans la fibre. Nous avons vu plus haut que l'on a intérêt à limiter le nombre de mode permis. Ceci est réalisé en prenant des indices  $n_c$  et  $n_g$  très proches, ainsi qu'une taille  $a$  petite. La gaine joue donc un rôle très important dans les performances des fibres optiques : elle fournit un milieu d'indice très proche de celui du cœur, permettant de limiter fortement le nombre de mode permis.

Dans le meilleur des cas, seul le mode  $p = 0$  se propage, quand  $p_{max} < 1$ , soit

$$\frac{\sqrt{n_c^2 - n_g^2} a}{n_c \lambda} < 1 \quad (43)$$

On parle alors de fibre monomode. La quantité  $2\pi a \sqrt{n_c^2 - n_g^2} / \lambda$  est souvent notée  $V$  dans le contexte des fibres optiques.

## f) Quelques mots sur fibre à gradient d'indice



Ce sont des fibres optiques qui possèdent un cœur d'indice variable (milieu inhomogène) suivant la formule, pour une loi parabolique ( $g = 2$ ) :

$$n^2(r) = n_0^2(1 - \Delta r^g / a^g) = n_0^2(1 - \Delta r^2 / a^2) \quad (44)$$

pour  $r \leq a/2$  et  $n = n_g$  pour  $r \geq a$ . Dans ce cas là le temps de propagation est de :

$$t = \frac{\ell n_c}{c \cos \theta} \left(1 - \frac{2 - P}{2 + g} \sin^2 \theta\right) \quad (45)$$

avec  $P$  le paramètre de dispersion de profil (dépend du matériau et de la longueur d'onde).

### 3. Un exemple naturel : le canal SOFAR

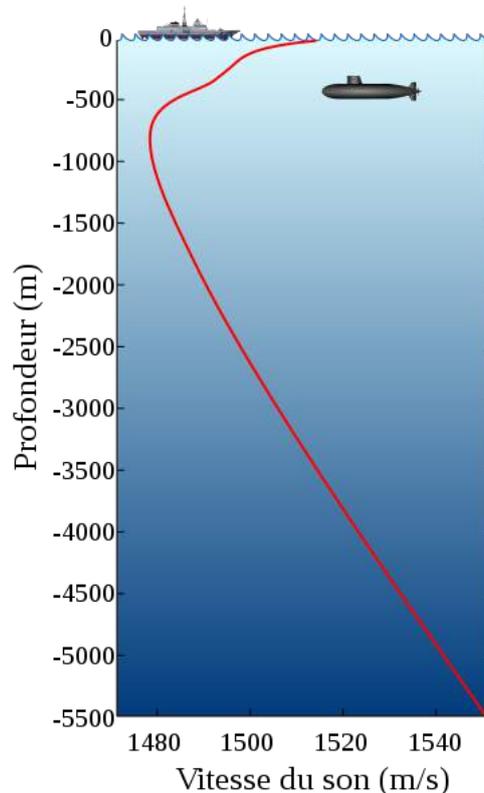


FIGURE 21 – Variation de la vitesse du son en fonction de la profondeur à une position au nord d'Hawaii, d'après le *World Ocean Atlas 2005*. Ici, l'axe du canal SOFAR est à une profondeur d'environ 750 m

Le canal SOFAR, pour Sound Fixing and Ranging, ou deep sound channel (DSC, canal sonore profond), est une couche d'eau horizontale dans la mer, à la profondeur de laquelle la vitesse du son est à son minimum. Le canal SOFAR agit comme un guide d'ondes pour le son, et les ondes sonores de basse fréquence qui s'y trouvent peuvent voyager sur plusieurs milliers de kilomètres avant de se dissiper. Ce phénomène constitue un facteur important dans la lutte anti-sous-marine. Ce canal sonore profond a été découvert et décrit indépendamment par Maurice Ewing, Stanley Wong et Leonid Brekhovskikh dans les années 1940.

Le canal SOFAR est centré sur la profondeur où la cumulation des effets de la température et de la pression de l'eau (et, à un moindre degré, de la salinité), se combinent pour créer une région où la vitesse du son est minimale dans la colonne d'eau. En mer, la pression augmente de façon linéaire avec la profondeur, mais la température est plus variable, chutant en général rapidement dans la thermocline principale depuis la surface jusqu'à une profondeur d'un millier de mètres, puis restant pratiquement inchangée de là jusqu'au plancher océanique dans les abysses. Près de la surface, la chute rapide de température cause une diminution de la vitesse du son, ou gradient de vitesse du son négatif. Lorsque la profondeur augmente, l'accroissement de la pression cause une augmentation de la vitesse du son, ou gradient de vitesse du son positif. La profondeur à laquelle la vitesse du son est minimale est appelée axe du canal sonore.

À proximité des Bermudes, l'axe du canal sonore se situe à une profondeur d'environ 1 000 m. En eaux tempérées, l'axe est moins profond, et à des latitudes plus élevées

(au-dessus de  $60^{\circ}\text{N}$ , ou en dessous de  $60^{\circ}\text{S}$ ), il atteint la surface.

Le son se propage dans ce canal par réfraction, ce qui fait que le son voyage à proximité de la profondeur de plus basse vitesse. Si une onde sonore se propage au-delà de ce canal horizontal, la partie de l'onde située le plus loin de l'axe du canal voyage plus vite, donc l'onde retourne vers l'axe du canal. Ceci a pour résultat que l'onde sonore trace un chemin qui oscille le long de l'axe du canal SOFAR. Ce principe est similaire à la transmission de la lumière à longue distance le long d'une fibre optique.

Les sons à basse fréquence, attribués au rorqual commun, se trouvent fréquemment dans le canal. Les scientifiques croient que les rorquals plongent jusqu'à ce canal et chantent pour communiquer avec d'autres rorquals situés à grande distance.

Durant la Seconde Guerre mondiale, Maurice Ewing a proposé de larguer en mer une sphère métallique intitulée bombe SOFAR, ou disque SOFAR, qui, spécifiquement prévue pour implorer dans le canal SOFAR, pourrait être utilisée comme signal de détresse par les pilotes abattus.

Le roman *Octobre rouge* décrit l'utilisation du canal SOFAR pour la détection de sous-marins.

La supposition de l'existence d'un canal similaire dans la haute atmosphère, proposée par Maurice Ewing, a conduit à l'expérimentation intitulée projet Mogul, organisée entre 1947 et fin 1948.

## Conclusion

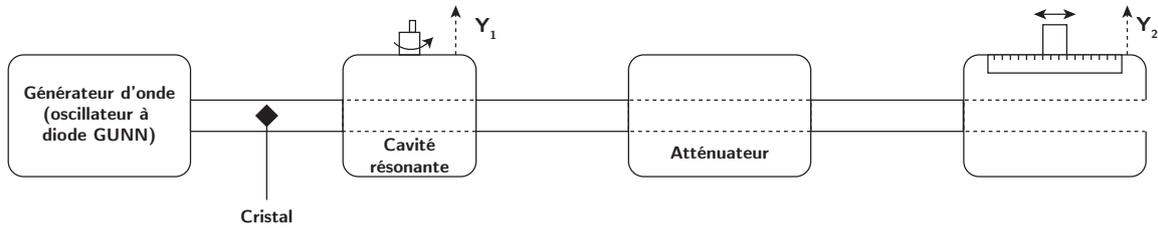
Nous avons pu voir à travers différents exemple comment on peut guider une onde. On a compris que le terme "guider" définissait le fait que l'on donne un direction particulière à l'onde tout en conservant son énergie, à l'image d'une conduite dans laquelle de l'eau passe on dirige le fluide tout en conservant le même débit.

Des guides d'ondes sont utilisés dans de nombreux domaines, de la recherche en physique, à l'électronique en passant par les radars ou les pinces optiques utilisées pour déplacer des particules ou des objets biologiques tels que des cellules.

# Manipulation : guide d'onde rectangulaire

Quelques indications sur le Quaranta IV p5.

Guide d'onde électromagnétique rectangulaire (section  $axb=23 \times 10 \text{mm}^2$ )



Tout le système est un guide d'onde sur lequel il y a un ensemble d'appareillage qui permet de faire des mesures. Le système est composé de plusieurs organes :

- Oscillateur à diode GUNN qui permet de générer une onde électromagnétique sinusoïdale ;
- Un cristal qui permet d'absorber les ondes réfléchies dans la cavité afin d'éviter les multiples réflexions ;
- Une cavité résonante qui permet de mesurer la fréquence  $f_0$  de l'onde générée ;
- Un atténuateur qui permet de faire abstraction du comportement non linéaire de la diode pour les mesures ;
- Un bloc terminal où l'onde se propage et se "jette" dans un autre milieu (ici l'air).  
On peut également boucher la sortie avec une plaque métallique.

Le but de cette manipulation va être de déterminer les caractéristiques de l'onde générée, puis de déterminer les caractéristiques de l'onde guidée et enfin de déterminer un coefficient de réflexion entre les deux interfaces défini par la frontière entre le guide et l'extérieur.

## Caractérisation de l'onde générée

Pour mesurer la fréquence de l'onde générée  $f_0$  il faut brancher l'oscilloscope sur  $Y_1$ , puis tourner la manivelle et observer la fréquence pour laquelle l'amplitude de la tension observée par l'oscilloscope est maximale. Cette fréquence correspond à  $f_0$  (ici  $f_0 = 9.39 \text{GHz}$ ). On peut ainsi définir la longueur d'onde sans guide de l'onde :

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 0.032 \text{m}$$

Une fois que cette mesure est effectuée, il faut penser à dérégler la manivelle, car la cavité est à sa fréquence de résonance et ainsi absorbe le maximum d'énergie. Pour ne pas être gêné pour les futures mesures il vaut mieux dérégler la manivelle.

## Caractérisation de l'onde guidée

Le guide d'onde est caractérisé par deux longueurs :  $a$  et  $b$ . Ainsi pour ce type de guide on a deux fréquences de coupure du fait de la présence de deux longueurs :

$$f_{c1} = \frac{c}{2a} = 6.5 \text{GHz}$$
$$f_{c2} = \frac{c}{2b} = 15 \text{GHz}$$

On a bien  $f_{c1} < f_0 < f_{c2}$ .

On va ensuite mesurer la longueur d'onde guidée,  $\lambda_g$ . Pour cela on ferme le guide en sortie à l'aide d'une plaque métallique : l'onde est réfléchiée. La superposition de l'onde qui va dans le sens des  $x$  croissants et de l'onde qui va dans le sens des  $x$  décroissants provoque la génération d'une onde stationnaire, caractérisée par des ventres et des noeuds. En se branchant sur  $Y_2$  on peut observer sur l'oscilloscope la distance entre deux ventres à l'aide de la règle graduée. Ainsi on trouve entre deux ventres, c'est à dire deux positions pour lesquels l'amplitude du signal est maximale :

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_g}{2} &= \Delta x = 23mm \\ \Leftrightarrow \lambda_g &= 46mm\end{aligned}$$

On sait que théoriquement on a la relation pour un guide d'onde :

$$\lambda_g^{theo} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f_0}\right)^2}} \quad (46)$$

avec  $f_c = f_{c1}$ , car sinon la racine serait négative.

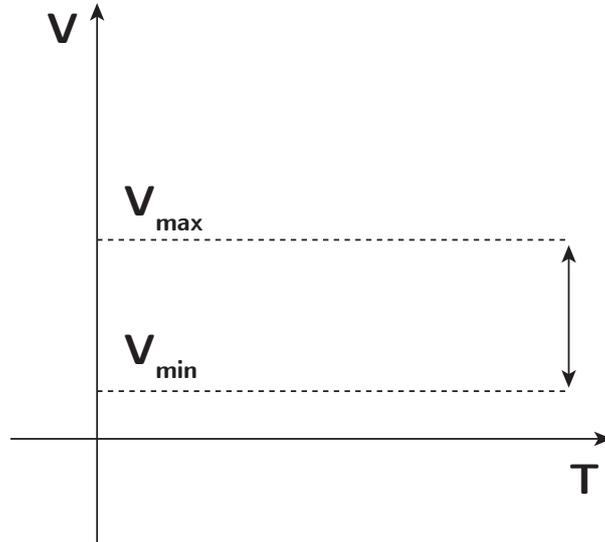
## Mesure du coefficient de réflexion

On sait que le coefficient de réflexion est de la forme :

$$r = |r| \exp(j\phi)$$

Dans un premier temps on va mesurer le module de  $r$ . Pour cela on ouvre le guide et on mesure la valeur de  $V_{min}$ , en déplaçant  $Y_2$  sur la graduation ,c'est à dire la valeur de l'amplitude minimale. Puis on déplace de nouveau  $Y_2$  jusqu'à atteindre un maximum. A partir de ce point on va noter la valeur inscrite sur l'atténuateur,  $A_1$ , puis on va régler l'atténuateur jusqu'à ce que la valeur de l'amplitude retourne sur la valeur  $V_{min}$  obtenue dans un premier temps. On note alors la valeur lue sur l'atténuateur  $A_2$ . Cette amplitude est mesurée à grâce à une diode. On sait qu'une diode a un comportement non linéaire, surtout pour de faible tension comme ici. L'utilisation de l'atténuateur nous permet de nous dispenser de la non linéarité de la diode de détection.

Il ne nous reste plus qu'à mesurer le déphasage induite par la réflexion. Pour cela on ferme le guide et on cherche la position, via la règle graduée, où l'on a  $V_{min}$ . Puis on ouvre le guide et on déplace vers la gauche  $Y_2$ , jusqu'à ce qu'on retrouve le minimum d'amplitude,  $V_{min}$ . Entre ces deux positions on a  $\Delta x'$ . On trouve  $\Delta x = 52 - 44.5 = 7.5mm$ .



On trouve ainsi  $V_{min} = 17.5mV$  avec  $A_1 = 1dB$ . On modifie l'atténuateur à  $V_{max}$  pour retrouver  $V_{min}$ . On a  $A_2 = 5.4dB$ , soit  $\Delta A = 4.4dB$ . Alors :

$$\begin{aligned} 10 \log(X_{lim} = X_{dB}) \\ \Leftrightarrow X_{lim} = 10^{\frac{X_{dB}}{10}} \\ \Leftrightarrow X_{lim} = 10^{0.44} = 2.75 \end{aligned}$$

On a ainsi définie le  $ROS$  qui est le rapport d'onde stationnaire :

$$ROS = \frac{V_{min}}{V_{max}} = 2.75$$

Le module du coefficient de réflexion  $|r|$  est définie comme étant :

$$|r| = \frac{ROS - 1}{ROS + 1} \quad (47)$$

On trouve alors  $|r| = 0.42$ . A titre d'exemple lors d'une réflexion totale on a  $ROS \rightarrow \infty$  et  $|r| = 1$ . Lors d'une adaptation totale on a  $ROS = 1$  et  $|r| = 0$ .

Il ne nous reste plus qu'à mesurer le déphasage induite par la réflexion. Pour cela on ferme le guide et on cherche la position, via la règle graduée, où l'on a  $V_{min}$ . Puis on ouvre le guide et on déplace vers la gauche  $Y_2$ , jusqu'à ce qu'on retrouve le minimum d'amplitude,  $V_{min}$ . Entre ces deux positions on a  $\Delta x'$ . On trouve  $\Delta x = 52 - 44.5 = 7.5mm$ .

On sait que le déphasage induit par une réflexion s'écrit :

$$\phi = \pi + \frac{4\pi\Delta x'}{\lambda_g} \quad (48)$$

Le  $\pi$  induit par la réflexion, c'est à dire le fait de forcer l'onde à faire chemin inverse et le facteur 2 correspondant à l'aller retour dans la cavité. On trouve finalement  $\phi = 5.2rad$ .

On a donc trouver le coefficient de réflexion  $r = 0.42 \exp(5.2j)$  induit par la différence d'impédance entre les deux milieux que sont le guide d'onde et le milieu extérieur (l'air).

# L.P. 32 - Microscopies optiques

Niveau : 1er année CPGE

## Pré-requis

- Optique géométrique
- Optique expérimentale
- Diffraction

## Bibliographie

- Optique, José-Philippe Perez, *Dunod*
- H-prépa Optique 1er année, Brébec, *Hachette*
- Optique expérimentale, Sextant, *Hermann*
- Optique, Houard, *De Boeck*
- Exp. de physique (Optique), Bellier, *Dunod*
- BUP n.775 (1995)
- Composition physique agrég. opt. physique (2015)

**Essayer de faire les manip pendant la présentation des chapitres en utilisant les valeurs obtenues !**

## Introduction

Dans son envie de comprendre le monde, l'homme a toujours voulu observer tout ce qui nous entoure. Des premiers microscopes simples de Van Leeuwenhoek au microscope à champ proche, des premières lunettes astronomiques de Galilée au télescope spatial Hubble, ces instruments ont connu des perfectionnements considérables. Ils sont tout à tour été le fruit où le moteur de découvertes fondamentales, comme il y a quelques semaines où des équipes de recherches des quatre coins du globe ont réussi à obtenir les premières images d'un trou noir en associant des télescopes du monde entier (de l'Europe au pôle Sud en passant par le continent américain) pour en créer un virtuellement de la taille de la Terre. Pour exemple, avec ce type d'instrument on pouvait de New-York savoir ce que lit sur le journal un habitant de Paris... quelle performance !

Dans cette leçon nous allons commencer par l'étude de la loupe puis nous focaliser sur le microscope : comment on caractérise ce système, quels sont les critères de performance de ce dernier et comment on peut reproduire son fonctionnement à l'aide de dispositif expérimental simplifié.

## 1. Le système (œil-loupe)

**MANIP p.28 Sextant sur la loupe. Faire la manip en même temps que la présentation si possible.**

## a) Intérêt de la loupe

On le sait : pour mieux observer les détails d'un objet, celui-ci doit être placé au punctum proximum (PP) correspondant à la distance minimale de vision distincte  $d_m = 25\text{cm}$ . La conséquence est une fatigue importante de l'œil.

En regardant un objet à travers une lentille convergent ou une loupe, nous pouvons observer une image de diamètre angulaire plus grand nécessitant une accommodation moindre. Pour cela, il faut placer l'objet entre le foyer objet et la lentille.

La loupe est utilisée le plus souvent avec un objet placé dans son plan focal objet. L'image est alors rejetée à l'infini. La position de l'œil est sans importance, mais plus l'œil est près de la loupe, plus les aberrations géométriques dues à la loupe sont négligeables (rayons proches de l'axe optique) car l'œil "sélectionne" les rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique.

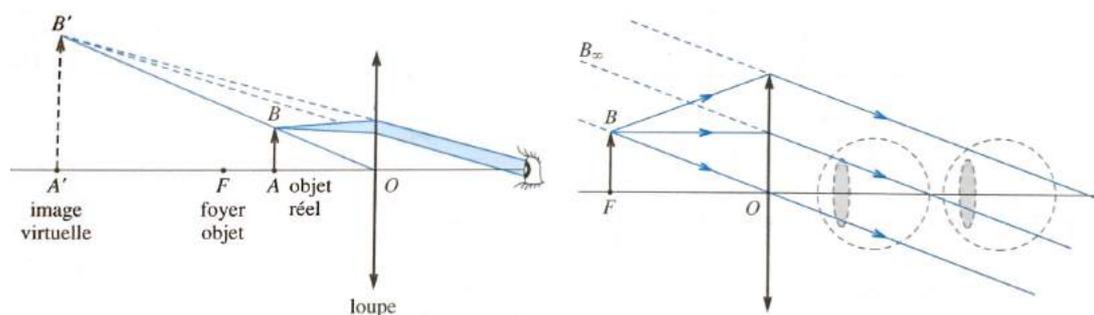


FIGURE 22 – (A gauche) Faisceau issu de B pénétrant dans l'œil. (A droite) Si l'objet est dans le plan focal objet de la lentille, la place de l'œil est indifférente. L'œil contre la lentille minimise les défauts d'aberration dus à la loupe (angles plus faibles).

Elle peut être aussi utilisée avec l'œil placé dans son plan focal image, car le diamètre angulaire de l'image est indépendant de la position de l'objet. En effet, l'angle  $\theta'$  ne dépend que de la taille de l'objet  $AB$  ; il ne dépend donc pas de la position de cet objet.

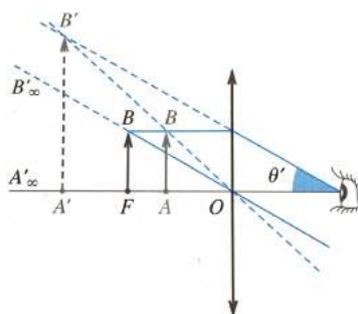


FIGURE 23 – Le diamètre angulaire de l'image ne dépend que de  $AB$ , quelque soit sa position si l'œil est dans le plan focal image de la loupe.

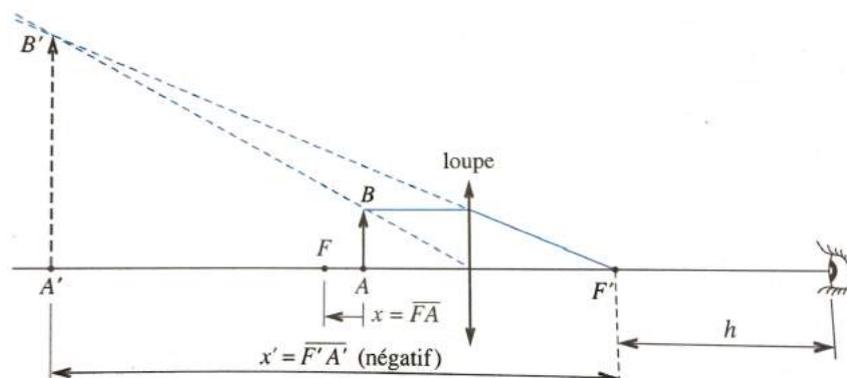
## b) Profondeur de champ et performances

### Profondeur de champ

Pour l'œil, l'image donnée par la loupe doit être entre le punctum proximum  $d_m$  de l'œil, et le punctum remotum (PR), situé à une distance  $D_m$  (distance infini pour un adulte).

La latitude de mise au point est l'intervalle des positions de l'objet tel que l'image soit visible par l'œil.

La profondeur de champ, ou plus précisément profondeur d'accommodation, est la différence entre ces deux distances.



Soit  $f'$  la distance focale image de la loupe,  $h$  la distance œil-foyer image de la loupe et  $x$  la distance algébrique objet-foyer de la loupe.

La formule de conjugaison aux foyers des lentilles minces (formules de Newton) donne ( $x = \overline{FA}$  et  $x' = \overline{F'A'}$ )  $x = -\frac{f'^2}{x'}$ , où  $x'$  est la distance algébrique image-foyer image de la loupe.

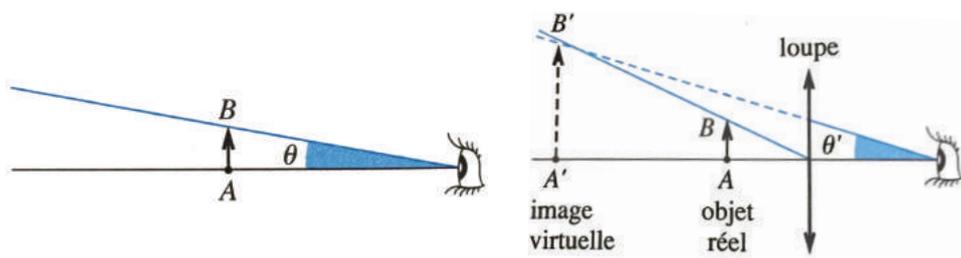
Donc  $x$  est compris dans le domaine  $\left[ \frac{f'^2}{D_m - h}, \frac{f'^2}{d_m - h} \right]$  à condition que  $h$  soit inférieur à  $d$ .

Pour  $h = 0$  (œil au foyer image de la loupe), le domaine devient  $\left[ \frac{f'^2}{D_m}, \frac{f'^2}{d_m} \right]$ . La profondeur de champ est alors :

$$\Delta p = f'^2 \left( \frac{1}{d_m} - \frac{1}{D_m} \right) \approx \frac{f'^2}{d_m} \quad (1)$$

La profondeur de champ est d'autant plus faible que la distance focale image est petite.

## Performance



## Grossissement

Le grossissement d'un instrument d'optique est défini par :

$$G = \left| \frac{\theta'}{\theta} \right| = \frac{AB/f'}{AB/d_m} = \frac{d_m}{f'} \quad (2)$$

où  $\theta'$  est le diamètre angulaire sous lequel est vue l'image de l'objet à travers l'instrument et  $\theta$  le diamètre angulaire sous lequel il est vu à l'œil nu.

Le grossissement commercial est défini pour une image vue au PR à travers l'instrument et un objet vu au PP à l'œil nu normal ( $d_m = 25\text{cm}$ ).

## Puissance

La puissance d'un instrument d'optique est définie par :

$$\mathcal{P} = \left| \frac{\theta'}{AB} \right| \quad (3)$$

où  $\theta'$  est le diamètre angulaire sous lequel est vue l'image de l'objet à travers l'instrument et  $AB$  la taille de l'objet. Elle se mesure en dioptrie ( $\delta$ ). Si l'image est à l'infini, on parle de puissance intrinsèque  $\mathcal{P}_i$ .

Dans le cas où l'œil est dans le plan focal image de la loupe, puissance et puissance intrinsèque sont confondues ; en effet, dans ce cas, le diamètre angulaire de l'image est indépendant de la position de l'objet.

La puissance intrinsèque d'une loupe est égale à sa vergence :

$$\mathcal{P}_i = V = \frac{1}{f'} = \frac{1}{OF'} \quad (4)$$

## Pouvoir séparateur du système

Soit un petit objet  $AB$  situé dans le plan focal objet de la loupe. Les images  $A'$  et  $B'$ , situées à l'infini de  $A$  et  $B$ , sont vues sous un écart angulaire  $\theta' = AB/f' = \mathcal{P}_i AB$ .

Appelons  $\theta_m$  le pouvoir de résolution de l'œil ( $\theta_m \approx 10^{-3}$  rad). Un objet est résolu par l'œil si  $\theta' > \theta_m$ . Le plus petit objet résolu avec la loupe a pour taille :

$$AB_{min} = \frac{\theta_m}{\mathcal{P}_i} \quad (5)$$

## 2. Le microscope

### a) Historique

*(facultatif)*

Si le pouvoir grossissant des lentilles était connu depuis l'antiquité, l'idée de les utiliser de manière systématique pour observer la Nature ne s'est imposée qu'à la fin du XVI<sup>e</sup> siècle. Ainsi, le premier microscope composé a été construit par les opticiens lunetiers hollandais Jansen père et fils vers 1590. Galilée lui-même en construisit un en 1610, mais son nom reste plutôt attaché à la lunette astronomique qu'il perfectionna en 1609.

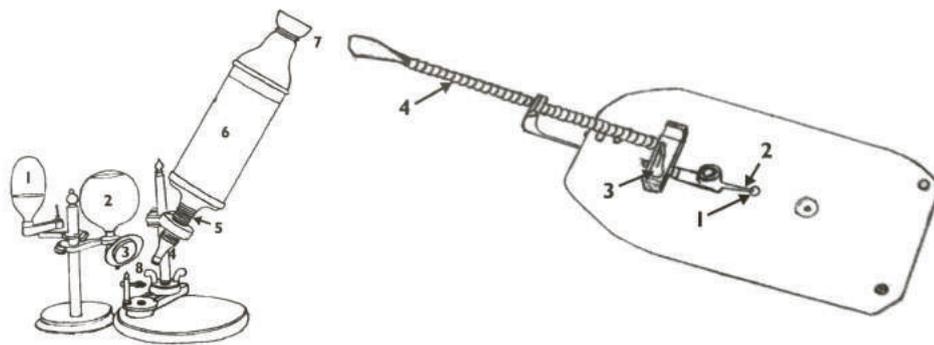
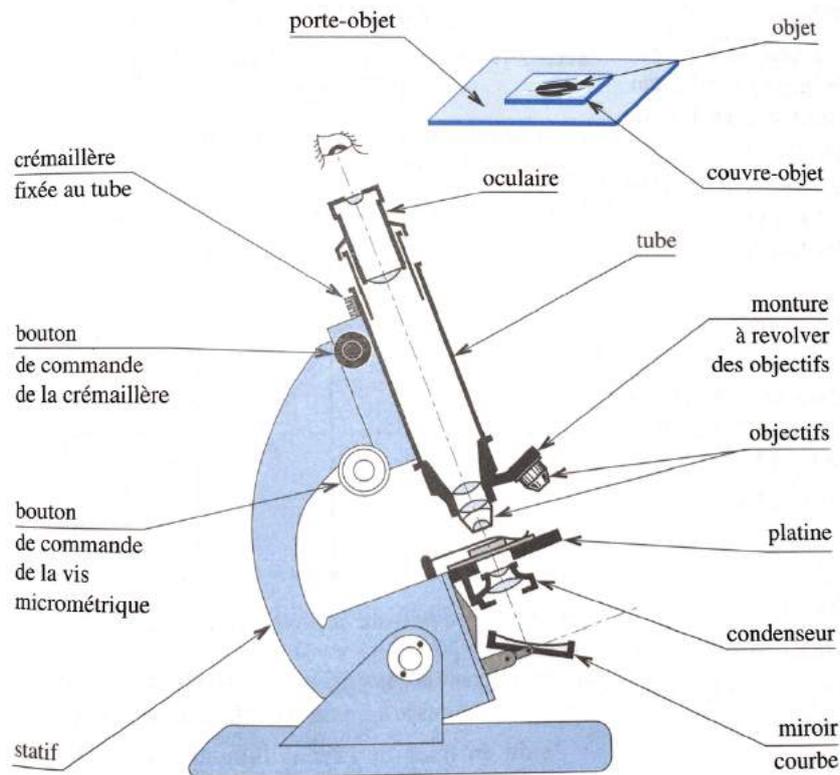


FIGURE 24 – (A gauche) Microscope composé de Hooke : 1. Lampe à huile, 2. Condenseur, 3. Lentille, 4. Objectif, 5. Vis de mise au point, 6. Tube, 7. Oculaire, 8. Spécimen. (A droite) Microscope simple de Van Leeuwenhoek : 1. Lentille sphérique sertie entre deux plaques, 2. Pointe échantillon, 3. Bouton de mise au point, 4. Vis de translation.

En 1665, l'anglais Robert Hooke publie *Micrographia*, dans lequel sont représentées des observations de poux, de cellules végétales, de champignons et de roches, réalisées avec un microscope composé à trois lentilles. Le système d'éclairage comportait une lampe à huile, un condenseur constitué d'un ballon d'eau et une lentille plan-convexe. La mise au point se faisait en déplaçant le tube du microscope par rapport à la platine porte-objet à l'aide d'une vis. L'optique comportait trois lentilles : une lentille objectif, une lentille oculaire et une lentille de champ disposée entre les précédentes. Les performances de son microscope étaient limitées par les aberrations chromatiques et géométriques cumulées à travers les différentes lentilles.

Un autre microscope fut inventé par Antonie Van Leeuwenhoek dont les meilleures grossissaient 500 fois et possédaient une résolution de l'ordre du micron ! Dans son microscope simple, la lentille unique était constituée d'une petite bille de verre sphérique possédant un rayon de l'ordre du millimètre, sertie dans une lame métallique. L'échantillon, placé sur une pointe, pouvait être déplacé devant la lentille, l'ensemble étant tenu très près de l'œil.

## b) Description du microscope



Un microscope comprend deux systèmes optiques importants :

- L'objectif, placé près de l'objet à examiner, à une distance de l'ordre du millimètre, donne une image réelle renversée et agrandie de l'objet. Il est constitué d'un ensemble de lentilles. Ce système est construit de façon à être stigmatique<sup>4</sup> et aplanétique<sup>5</sup> pour cet objet, bien qu'il ne fonctionne pas dans l'approximation de Gauss. Pour cet objectif, les aberrations géométriques sont corrigées.
- L'oculaire, placé devant l'œil, donne une image virtuelle non renversée de l'image intermédiaire précédente. Cet oculaire est modélisable par une loupe. Les microscopes de qualité sont généralement constitués d'un oculaire de Huygens.

Ces deux systèmes sont maintenus à une distance pratiquement constante l'un de l'autre par un tube métallique.

L'ensemble objectif-oculaire peut se déplacer par rapport à l'objet examiné à l'aide d'une crémaillère commandée par un bouton de mise au point rapide et un bouton micrométrique.

L'objet, placé entre une lame porte-objet et une lamelle couvre-objet, est posé sur la platine percée de façon à être éclairé.

Le microscope est l'association de deux systèmes convergents. Il donne une image virtuelle agrandie à l'infini d'un objet à distance finie.

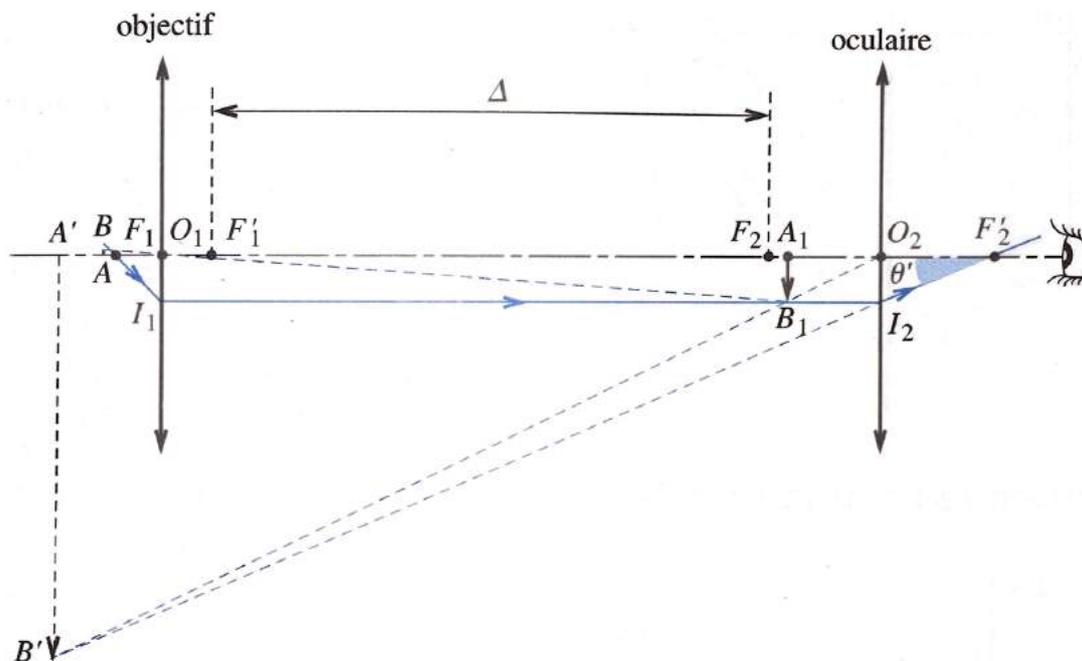
4. Un système optique est dit stigmatique pour deux points si l'ensemble des rayons lumineux issus d'un des points et traversant le système forment d'autres rayons lumineux dont les supports passent par le second point.

5. L'aplanétisme est une propriété des systèmes optiques dioptriques, catoptriques et catadioptriques capables, pour un objet étendu perpendiculaire à l'axe optique, de former une image perpendiculaire à l'axe optique.

### c) Microscope simplifié

MANIP : Construire le microscope p.68 Bellier ou BUP n.775 ou Sextant p.30. Faire les calculs en même temps que les manips avec les grandeurs prises durant l'expérience.

Nous utilisons le schéma simplifié d'un microscope en assimilant l'objectif et l'oculaire à des lentilles minces convergentes.



Posons :

- $f'_1$  la distance focale image de l'objectif (de l'ordre du millimètre);
- $f'_2$  celle de l'oculaire (de l'ordre du centimètre);
- $\Delta$  la distance entre le foyer image  $F'_1$  de l'objectif et le foyer objet  $F_2$  de l'oculaire (de l'ordre de 15cm)

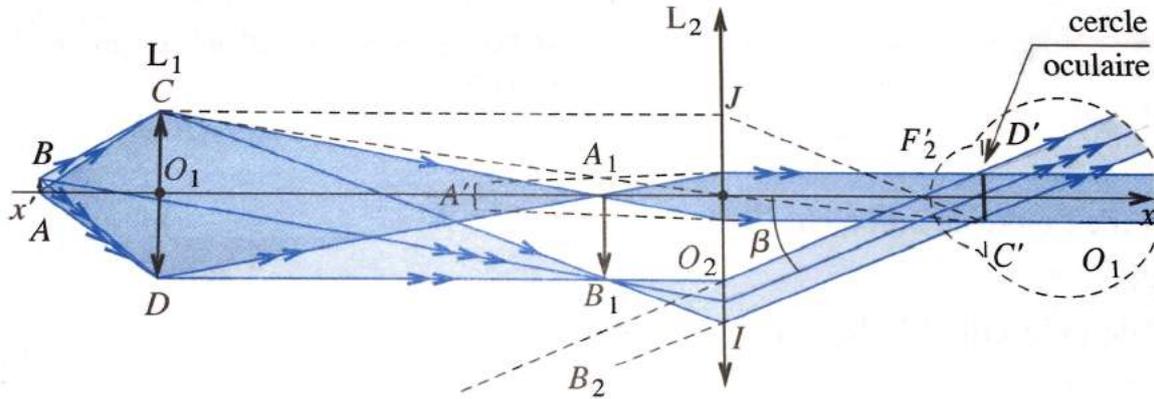
Nous avons les éléments conjugués suivants :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$$

Examinons rapidement leurs places respectives :

- Place de  $A_1$  : l'oculaire donne une image virtuelle  $A'$  de  $A_1$ .  $A'$  doit être entre  $d_m = 25\text{cm}$  et l'infini, devant l'œil placé au foyer image de l'oculaire.  $A_1$  est donc à une distance inférieure à  $\left| \frac{f'^2_2}{d_m} \right|$  (formule de Newton) : en prenant  $f'_2 = 1\text{cm}$ , nous trouvons que  $A_1$  doit être au maximum à environ 0.4mm de  $F_2$ .  $A_1$  est pratiquement en  $F_2$ .
- Place de  $A$  : la distance  $\overline{F'_1A_1}$  est égale à  $\Delta$  (à 0.4mm près);  $\Delta$  étant de l'ordre de 15cm, la distance  $\overline{F_1A}$  est donc  $\frac{f'^2_1}{\Delta}$  qui est de l'ordre du micron.  $A$  est pratiquement en  $F_1$ .
- Utilisation normale :  $A_1$  doit coïncider avec  $F_2$  pour que l'image finale soit rejetée (PR de l'œil normal). L'image finale est donc renversée en utilisation normale à l'infini.

## d) Cercle oculaire



Les rayons lumineux issus des différents points de l'objet se concentrent après la traversée du microscope dans un cercle voisin du plan focal image de l'oculaire. Si la pupille de l'œil est placée au niveau de ce cercle, appelé cercle oculaire, elle reçoit un maximum de lumière et la largeur de champ est maximale.

La position  $C'$  du cercle oculaire peut être calculée par application de la formule de conjugaison :

$$-\frac{1}{O_2O_1} + \frac{1}{O_2C'} = \frac{1}{f_2'} \quad (6)$$

ou alors par la relation de Newton :

$$\overline{F_2'C'} = -\frac{f_2'^2}{\overline{F_2'O_1}} \quad (7)$$

Cette dernière relation montre directement que la distance  $\overline{F_2'C'}$  diminue quand la convergence de l'oculaire augmente. En bref, dans le cas d'un microscope réel, la position  $C'$  du cercle oculaire est très voisine du plan focal image de l'oculaire.

**Rq :** Calcul du rayon du cercle oculaire voir Bellier p.70.

## e) Performance

On a déjà présenté dans la première partie les relations donnant le grossissement, le grossissement commercial et la puissance. On va les utiliser pour caractériser notre microscope simplifié.

### Puissance

On sait que :

$$\mathcal{P} = \left| \frac{\theta'}{AB} \right| = \left| \frac{\overline{A_1B_1}}{AB} \right| \left| \frac{\bar{\theta}'}{\overline{A_1B_1}} \right| \quad (8)$$

où  $\theta'$  est la taille angulaire de l'image vue par l'œil,  $\overline{AB}$  la taille de l'objet et  $\overline{A_1B_1}$  la taille de l'image intermédiaire.

On en déduit alors :

$$\mathcal{P} = \gamma_1 \mathcal{P}_2 \quad (9)$$

où  $\mathcal{P}_2$  est la puissance de l'oculaire et  $\gamma_1$  le grandissement de l'objectif.

Or on sait que  $\gamma_1 = -\overline{F_1 F_2} / f_1' = -\Delta / f_1'$  et pour un œil observant à l'infini :  $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_{2i} = 1 / f_2'$ , donc pour l'œil accommodant à l'infini, la puissance intrinsèque est :

$$\mathcal{P}_i = \frac{\Delta}{f_1' f_2'} \quad (10)$$

### Grossissement

Le grossissement commercial  $G_C$  est donné par :

$$G_C = \frac{\mathcal{P}_i}{4} \quad (11)$$

Remarquons que  $G_C = |\gamma_1| G_{2C}$ , avec  $|\gamma_1| = \Delta / f_1'$  et  $G_{2C} = 1 / (4f_2')$ .

Finalement le grossissement commercial  $G_C$  du microscope est le produit du grandissement  $|\gamma_1|$  de l'objectif par le grossissement commercial  $G_{2C}$  de l'oculaire :

$$G_C = |\gamma_1| G_{2C} \text{ et } G_C = \frac{\mathcal{P}_i}{4}$$

Leurs valeurs  $|\gamma_1|$  et  $G_{2C}$  sont gravées sur l'objectif et l'oculaire.

### Pouvoir séparateur

Soit deux points  $A$  et  $B$  que nous désirons distinguer, ou séparer, à l'aide d'un microscope. La plus petite distance  $AB$  accessible est le pouvoir séparateur du microscope.

Deux phénomènes distincts limitent le pouvoir séparateur d'un microscope :

- **Le pouvoir de résolution de l'œil :**

Soit un microscope de grossissement commercial  $G_C$ . Le pouvoir de résolution de l'œil est de l'ordre de  $\theta_m = 3.10^{-4}$  rad.

La dimension  $\delta$  du plus petit objet observable est donnée par :

$$\delta = \frac{\theta_m}{\mathcal{P}_i} = \frac{\theta_m}{4G_C}, \text{ avec } \theta_m = 3.10^{-4} \text{ rad}$$

ex : Pour un grossissement de 100, nous avons une résolution de  $0,75\mu\text{m}$ .

- **Le caractère ondulatoire de la lumière :**

L'objectif du microscope se comporte comme un trou qui diffracte la lumière. L'image d'un point n'est pas un point mais une tache entourée d'anneaux (disques d'Airy).

Il rend impossible la séparation de deux points  $A$  et  $B$  trop proches l'un de l'autre.

Pour pouvoir séparer les deux points  $A$  et  $B$ , il faut que (critère de Rayleigh) :

$$AB \geq \frac{1,22\lambda}{2n \sin(u)} = \frac{0,64\lambda}{n \sin(u)}$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le vide de la lumière utilisée,  $n$  l'indice du milieu dans lequel est l'objet et  $u$  l'angle d'ouverture de l'objectif, c.a.d l'angle entre l'axe optique et le rayon le plus incliné susceptible de traverser le système optique. Le produit  $n \sin(u)$  est appelé ouverture numérique.

**Rq :** Un petit plus de détails dans Perez p.119

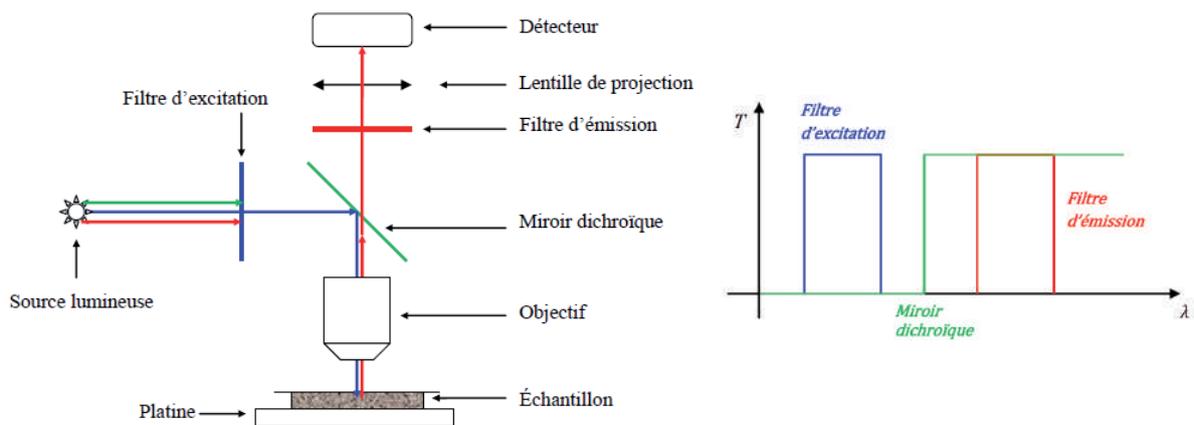
**Rq :** Soit  $N$  le nombre d'ouverture défini par  $N = D / f_1'$ , avec  $D$  le diamètre de l'objectif. L'angle d'ouverture  $u$  et le nombre  $N$  vérifient  $\tan(u) = N/2$ .

Pour un objectif courant,  $n = 1$  et  $N \approx 1$ . Nous remarquerons que l'objectif ne travaille pas dans l'approximation de Gauss :  $\tan(u) = 0,5$  donne  $u \approx 27^\circ$ . Dans ces conditions, le pouvoir de résolution vaut  $0,7\mu\text{m}$  pour  $\lambda = 0,5\mu\text{m}$ . Il est donc inutile d'avoir un grossissement important avec un tel objectif. Le grandissement commercial  $G_C = 100$  est suffisant pour voir les détails de l'objet.

**Rq :** Un fort grossissement n'apporte rien, il ne sert qu'au confort de l'œil.

### 3. Autres types de microscopes

#### a) Microscope optique de fluorescence



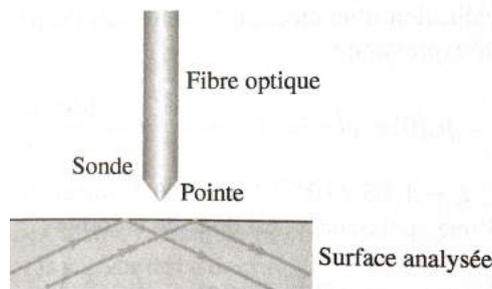
La fluorescence est l'émission de lumière par une molécule immédiatement après son excitation lumineuse, en général à une longueur d'onde plus grande. Les photons émis lors de l'émission de fluorescence n'ont pas de direction privilégiée. Ainsi pour détecter un maximum de lumière il faut choisir un objectif de grande ouverture numérique.

Dans un microscope de fluorescence, on trouve généralement, en plus des éléments d'optique conventionnels, un filtre d'excitation, un filtre d'émission et un miroir dichroïque filtrant. L'objectif joue le double rôle de focaliser la lumière incidente sur l'échantillon et de collecter la lumière que celui-ci renvoie. Ainsi chaque filtre a son propre rôle :

- Le filtre d'excitation sélectionne la longueur d'onde excitatrice des fluorophores de l'échantillon ;
- le filtre d'émission sélectionne la longueur d'onde de la lumière de fluorescence produite par l'échantillon ;
- le miroir dichroïque<sup>6</sup> filtrant réfléchit très bien les radiations excitatrices (et très mal les radiations d'émission) tandis qu'elle transmet très bien les radiations d'émission (et très mal les radiations d'excitation).

6. Wiki. : Un filtre dichroïque est un filtre dont les propriétés de transmission et de réflexion dépendent fortement de la longueur d'onde. En pratique, on distingue trois plages de longueur d'onde principales : une première, réfléchiée lorsque la lumière est en incidence normale, une seconde lorsqu'elle est à  $45^\circ$ , et enfin une troisième transmise par le filtre

## b) Microscope en champ proche



L'idée du microscope en champ proche date de 1972, mais les premiers prototypes ont fonctionné dès 1984. Ils permettent d'atteindre des résolutions spatiales bien plus faibles que celles des microscopes optiques, tout en utilisant la lumière émise par un laser. Le mode de fonctionnement diffère fondamentalement du microscope optique : alors que dans ces derniers l'onde est faiblement diffractée par le diaphragme d'ouverture de l'instrument et se propage dans la direction moyenne incidente, dans le microscope en champ proche, l'onde, à la sortie du diaphragme diffractant, est évanescente, c'est à dire qu'elle ne se propage pas selon la direction moyenne incidente mais selon une direction orthogonale à celle-ci. Dans ces conditions, il est possible de dépasser nettement la limite de résolution classique due à la diffraction.

**Rq :** Quelques calculs sur la profondeur de pénétration et sur les résolutions longitudinale et transversale Perez p.123.

On réalise un microscope en champ proche en plaçant, à proximité de la surface matérielle transparente à analyser, une sonde effilée, c.a.d une pointe donc le diamètre est d'une dizaine de nanomètres.

On éclaire la surface analysée par l'arrière, avec un laser hélium-néon, en réalisant une réflexion totale frustrée par la présence de la sonde. On détecte alors l'intensité de l'onde évanescente au niveau de la sonde. En déplaçant latéralement cette dernière, à quelques nanomètres de la surface, grâce à un dispositif à balayage très précis, on peut obtenir une cartographie des détails de la surface, avec une résolution spatiale bien inférieure à la longueur d'onde.

**Rq :** Présentation d'autres microscope : microscope pour objet opaque, microscope en champ sombre, microscope à effet tunnel, microscope à force atomique... p.123 Perez.

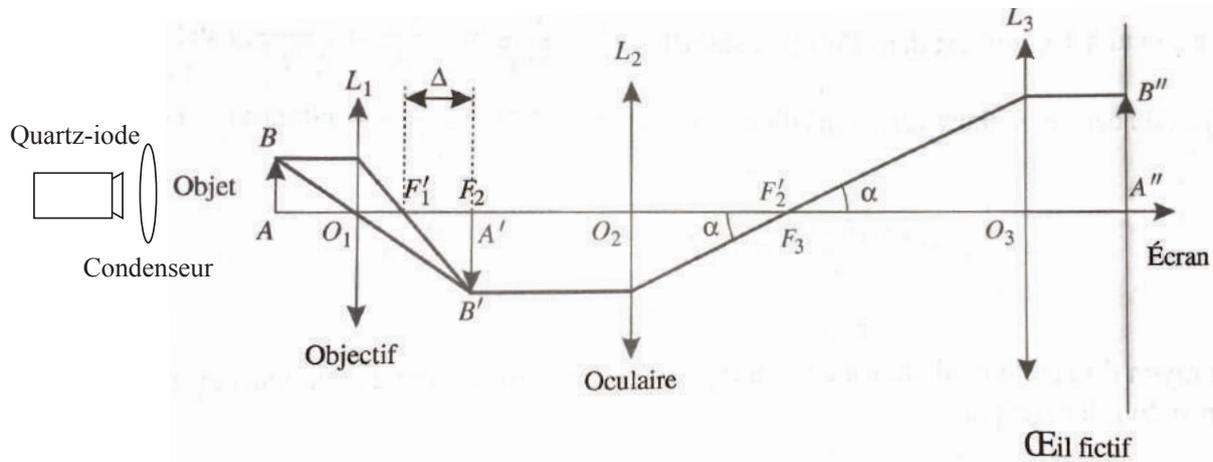
## Conclusion

On a pu voir dans cette leçon comment, grâce à des outils relativement simple et à des connaissances théoriques, l'homme a pu voir plus grand le monde du très petit. On a ainsi pu voir le principe de fonctionnement d'une lentille simple à travers l'exemple de la loupe puis le résultat de la combinaison de plusieurs lentilles : le microscope optique. On a vu comment on peut caractériser un tel système à travers des grandeurs tel que la puissance ou le grossissement. Enfin nous avons pu prendre connaissance d'autre type de microscope optique bien plus performant.

De nos jours, de nouveaux microscopes sont utilisés : les microscopes électroniques pour lesquels on peut obtenir des images d'objets microscopiques grâce à l'analyse de leur interaction avec un faisceau d'électrons. Principe similaire du microscope optique mais utilise les propriétés ondulatoires des électrons. Le faisceau d'électron est diffracté en traversant l'échantillon, et des lentilles magnétiques permettent de reconstruire l'image comme en microscopie optique. Résolution bien meilleure car longueur d'onde de de Broglie inférieure aux longueurs d'onde optiques.

# Manip microscope

Bellier p.70



Le but est de déterminer expérimentalement la puissance d'un microscope dans le cas d'une observation à l'infini. Ainsi l'image intermédiaire de l'objet par l'objectif de forme au foyer principal objet de l'oculaire. L'image finale est alors rejetée à l'infini.

L'objet source sera une grille millimétrique. Les lentilles sont :

- $L_1 = 100\text{mm}$  pour l'objectif ;
- $L_2 = 200\text{mm}$  pour l'oculaire ;
- $L_3 = 300\text{mm}$  pour l'œil fictif.

On fera varier la position de l'objectif par rapport à l'objet ainsi la position de l'image donnée par celui-ci sera variable. Pour une position donnée de l'objectif (toujours situé à une distance  $\overline{AO_1} > f_1'$ ), on détermine la position de l'image intermédiaire  $O_1A'$  et sa taille  $\overline{A'B'}$  à l'aide d'un écran escamotable (on prendra  $\overline{AB} = 1\text{cm}$ ). De la mesure de  $\overline{A'B'}$  on en déduira le grandissement  $\gamma_1$  de l'objectif. On placera ensuite l'oculaire de façon que  $A'B'$  soit dans son plan focal objet. Ainsi l'intervalle optique du microscope  $\Delta = (\overline{O_1A'} - f_1')$  sera variable.

Le microscope donne alors une image virtuelle inversée, à l'infini, vue du foyer image  $F_2'$  de l'oculaire sous un angle  $\alpha$ . On fera coïncider le foyer objet  $F_3$  de la lentille avec le foyer image  $F_2'$  de l'oculaire.

Placer l'écran au voisinage du plan focal image de  $L_3$  pour obtenir une image  $A''B''$  la plus nette possible. On verra par la suite que cette position éloignée de l'œil fictif n'est pas la plus judicieuse, toutefois cette position de  $L_3$  permet ici d'accéder facilement à la valeur de  $\alpha$ .

Il faut ensuite mesurer  $\overline{A''B''}$  et en déduire  $\alpha = \overline{A''B''}/f_3'$ . On peut alors calculer la puissance du microscope  $P = \alpha/\overline{AB}$ .

On va effectuer plusieurs mesures différentes en modifiant la distance  $\overline{AO_1}$  qui doit être mesurée avec précision.

**Méthode d'auto-collimation :** On prend un miroir qu'on place derrière  $L_1$  et on regarde la réflexion du miroir sur le bord de  $L_1$  : l'endroit où on est nette sera la position de  $L_1$ . Puis on règle  $L_3$  pour pouvoir voir net sur l'écran. Une fois que cette étape est faite on fixe  $L_3$  et on peut de nouveau bouger  $L_1$  : on a un objet à l'infini. (détails p.171 H-prépa ou p.37 Bellier).

## Résultats

$\overline{AO_1}(m)$	0.12	0.13	0.14	0.15	0.18
$\overline{O_1A'}(m)$	0.465	0.515	0.375	0.264	0.225
$\Delta = \overline{O_1A'} - f'_1(m)$	0.365	0.415	0.275	0.164	0.125
$\overline{A'B'}(m)$	0.05	0.055	0.037	0.023	0.017
$\gamma_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$	5.00	5.50	3.70	2.30	1.70
$\overline{A''B''}(m)$	0.1	0.12	0.065	0.04	0.022
$\alpha = \frac{\overline{A''B''}}{f'_3}$	0.33	0.4	0.22	0.13	0.07
$\mathcal{P} = \frac{\alpha}{\overline{AB}}(m^{-1})$	33.33	40	21.67	13.33	7.33
$\frac{\mathcal{P}}{\Delta}$	91.32	96.38	78.79	81.3	58.67

TABLE 2 – Résultats obtenus expérimentalement

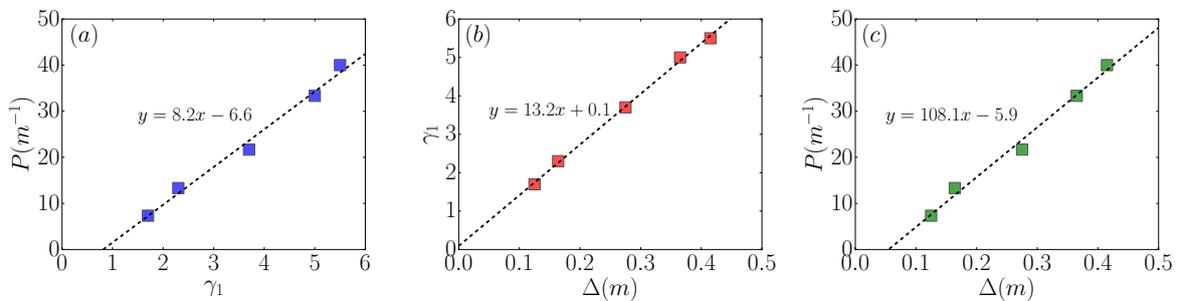


FIGURE 25 – (a)  $\mathcal{P}$  en fonction de  $\gamma_1$ ; (b)  $\gamma_1$  en fonction de  $\Delta$ ; (c)  $\mathcal{P}$  en fonction de  $\Delta$ .

On sait que théoriquement pour un microscope on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} &= \gamma_1 \mathcal{P}_\epsilon = \frac{\gamma_1}{f'_2} \\
 \gamma_1 &= -\frac{\Delta}{f'_1} \\
 \mathcal{P} &= \mathcal{P}_\gamma = \frac{\Delta}{f'_1 f'_2}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Expérimentalement on a en calculant la pente des trois graphiques présents sur la figure :

$$\begin{aligned}
 f'_2{}^{exp} &\approx 0,12m \text{ alors que théoriquement on a } f'_2 = 0,2m \\
 f'_1{}^{exp} &\approx 0,08m \text{ alors que théoriquement on a } f'_1 = 0,1m \\
 f'_1{}^{exp} &\approx f'_2{}^{exp} = 9,2 \cdot 10^{-3}m^2 \text{ alors que théoriquement on a } f'_1 \cdot f'_2 = 0,02m^2
 \end{aligned}$$

Les résultats sont différents mais dans le même ordre de grandeur. On peut estimer les erreurs :

$$\begin{aligned}\frac{d(f'_2)}{f_2} &= \sqrt{\left(\frac{d(\overline{A'B'})}{\overline{A'B'}}\right)^2 + \left(\frac{d(\overline{A''B''})}{\overline{A''B''}}\right)^2} \\ \frac{d(f'_1)}{f_1} &= \sqrt{\left(\frac{d(\overline{O_1A'})}{\overline{O_1A'}}\right)^2 + \left(\frac{d(\overline{A''B''})}{\overline{A''B''}}\right)^2 + \left(\frac{d(\overline{AB})}{\overline{AB}}\right)^2}\end{aligned}\tag{13}$$

Finalement on a réalisé l'étude de plusieurs microscopes car à chaque mesure on modifie  $\Delta$  pour avoir une image à l'infini alors que dans un microscope réel l'intervalle optique est constant.

### Cercle oculaire

On pourrait également mesurer le rayon du cercle oculaire. Pour cela il faut retirer l'œil fictif ( $L_3$  et écran), atténuer la source lumineuse et placer notre œil juste derrière l'oculaire. Il faut constater que :

- Le champ est très restreint et n'est pas uniformément éclairé ;
- La partie visible de l'objet dépend de la position de l'œil par rapport à l'axe optique.

Il faut ensuite reculer l'œil jusqu'à ce que le champ soit optimal, à cette position correspond le cercle oculaire.

Le cercle oculaire correspond en fait à l'image de l'objectif donnée par l'oculaire. En déplaçant un écran derrière l'oculaire, constater que la section du faisceau émergent de l'oculaire passe par un diamètre minimal. Cette position est celle du cercle oculaire. Il faut mesurer son rayon et la distance  $\overline{O_2C}$  par rapport à l'oculaire.

On peut ainsi déterminer théoriquement la position et la valeur du cercle oculaire et comparer avec les résultats expérimentaux.

**Rq :** Le rayon du cercle oculaire est d'autre part égal au rapport de l'ouverture numérique par la puissance du microscope.

**Rq :** Dans le cas d'un véritable microscope, le cercle oculaire est pratiquement dans le plan focal image de l'oculaire et sa taille inférieure à celle de la pupille de l'œil. L'observateur reçoit alors le maximum de lumière.

# L.P. 33 - Interférences à deux ondes en optique

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Optique géométrique
- Optique expérimentale
- Transformation de Fourier
- Physique des ondes

## Bibliographie

- Optique, José-Philippe Perez, *Dunod*
- Exp. de physique (Optique), Bellier, *Dunod*
- Optique expérimentale, Sextant, *Hermann*
- Tout en un PC, Sanz, *Dunod*
- Cap Prépa PC, Renvoizé, *Pearson*
- Optique, Bertin, *Dunod*

**MANIP Fentes d'Young : observer les figures et ce qu'il se passe et la majeure partie de la leçon autour de cette manip. Bellier p.186 et Sextant p.161.**

## Introduction

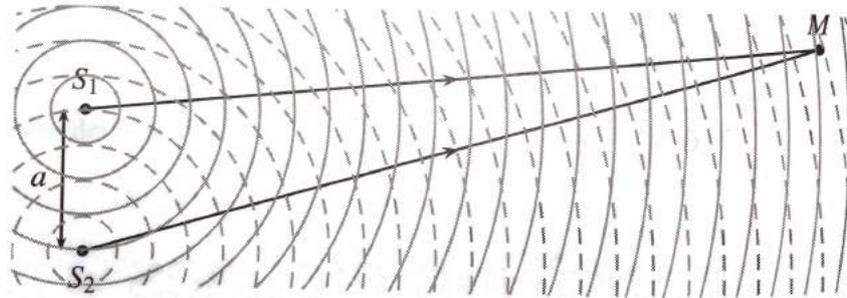
Le phénomène d'interférences est une manifestation flagrante de la nature ondulatoire de la lumière. À ce titre, un certain nombre d'expériences ont permis à la théorie ondulatoire de supplanter, au XIX<sup>e</sup> siècle, la théorie corpusculaire qui éclipsait jusque-là cette première théorie. Il est admis maintenant que la lumière présente un double caractère : c'est une onde électromagnétique tout en étant constituée de particules élémentaires sans masse appelées photons : on parle de dualité onde-corpuscule.

Le phénomène d'interférences se rencontre dans la vie de tous les jours : ondes sonores, ondes radio, ondes à la surface de l'eau ou bien ondes lumineuses. De l'expérience historique des fentes d'Young aux interféromètres de Michelson, de Fabry-Pérot ou de Sagnac, qui seront présentés dans une autre leçon... les techniques interférométriques ont connu des perfectionnements considérables. Elles constituent des outils d'analyse puissants, pouvant être utilisés dans des domaines aussi variés que l'industrie, l'astrophysique ou encore la recherche fondamentale, comme en témoigne l'expérience *Virgo*, menée depuis 2003 à Pise qui a permis de détecter l'existence d'ondes gravitationnelles.

Ainsi dans cette leçon nous allons nous attarder sur l'interférence entre deux ondes à travers des équations qui permettront de caractériser ce phénomène. On pourra ensuite présenter quelques dispositifs interférentiels et observer les figures qui en sont induites et enfin on aborde la notion de cohérence, point important et nécessaire à l'existence d'interférences.

# 1. Interférence de deux ondes lumineuses

## a) Définitions



Considérons deux ondes lumineuses progressive harmonique, de sources  $S_1$  et  $S_2$ , monochromatiques, polarisées rectilignement, dont l'expression du champ électrique des deux ondes rayonnées au point d'observation  $M$  est :

$$\vec{E}_i(M, t) = \vec{E}_{0,i} \cos(\omega_i t - \phi_i(M)) \quad (1)$$

En notation complexe les ondes s'écrivent :

$$\underline{\vec{E}}_i(M, t) = \underline{\vec{E}}_{0,i} \exp[j(\omega_i t - \phi_i(M))] \quad (2)$$

où les retards de phase au point  $M$  s'écrivent :

$$\phi_1(M) = \phi_{10} + \frac{\omega_1}{c}(S_1 M) \text{ et } \phi_2(M) = \phi_{20} + \frac{\omega_2}{c}(S_2 M)$$

Les phases  $\phi_{10}$  et  $\phi_{20}$  sont les phases à l'émission en  $S_1$  et  $S_2$ . Pour des ondes parfaitement monochromatiques, leurs valeurs sont parfaitement définies.

Le champ électrique résultant s'obtient en ajoutant les deux champs électriques. Ceci est possible de part la linéarité des équations de Maxwell :

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \sum_i \underline{\vec{E}}_i(M, t) = \underline{\vec{E}}_{0,1} \exp[j(\omega_1 t - \phi_1(M))] + \underline{\vec{E}}_{0,2} \exp[j(\omega_2 t - \phi_2(M))] \quad (3)$$

L'éclairement se déduit de l'amplitude en calculant le double de la valeur moyenne du carré de l'amplitude instantanée soit :

$$\mathcal{E}(M) = 2 \left\langle \|\vec{E}(M, t)\|^2 \right\rangle \quad (4)$$

Avec

$$\begin{aligned} \|\vec{E}(M, t)\|^2 &= (\underline{\vec{E}}_1 + \underline{\vec{E}}_2)(\underline{\vec{E}}_1^* + \underline{\vec{E}}_2^*) = \|\underline{\vec{E}}_1\|^2 + \|\underline{\vec{E}}_2\|^2 + \underline{\vec{E}}_1 \cdot \underline{\vec{E}}_2^* + \underline{\vec{E}}_1^* \cdot \underline{\vec{E}}_2 \\ \implies \|\underline{\vec{E}}(M, t)\|^2 &= \|\underline{\vec{E}}_1\|^2 + \|\underline{\vec{E}}_2\|^2 + 2\text{Re}(\underline{\vec{E}}_1^* \cdot \underline{\vec{E}}_2) \end{aligned}$$

Moyennés, les deux premiers termes donnent les éclairagements  $\mathcal{E}_1(M)$  et  $\mathcal{E}_2(M)$  de chaque onde, considérées séparément. Quant au troisième terme, il s'explicite selon, en gardant la notation réel :

$$2\text{Re}(\underline{\vec{E}}_1^* \cdot \underline{\vec{E}}_2) = 2 \cdot \vec{E}_{0,1} \cos(\omega_1 t - \phi_1(M)) \cdot \vec{E}_{0,2} \cos(\omega_2 t - \phi_2(M))$$

Ainsi on peut en déduire l'éclairement au point  $M$  :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + \mathcal{E}_{12}(M) \quad (5)$$

avec  $\mathcal{E}_1(M) = 2 \langle \|\vec{E}_1\|^2 \rangle = E_{0,1}^2$  et  $\mathcal{E}_2(M) = 2 \langle \|\vec{E}_2\|^2 \rangle = E_{0,2}^2$ , sachant que la valeur moyenne du carré d'un cosinus sur une période vaut  $1/2$ .

Finalement on constate que l'éclairement  $\mathcal{E}$  diffère de l'addition  $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ . Le troisième terme de l'expression est appelé terme d'interférences :

$$\mathcal{E}_{12}(M) = 2 \langle 2 \vec{E}_{0,1} \cos(\omega_1 t - \phi_1(M)) \cdot \vec{E}_{0,2} \cos(\omega_2 t - \phi_2(M)) \rangle$$

Ce terme peut se réécrire d'une façon différente en utilisant les relations trigonométriques :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{12}(M) = 2 \langle \vec{E}_{0,1} \cdot \vec{E}_{0,2} \cos((\omega_1 - \omega_2)t - \phi_1(M) + \phi_2(M)) \rangle + \\ 2 \langle \vec{E}_{0,1} \cdot \vec{E}_{0,2} \cos((\omega_1 + \omega_2)t - \phi_1(M) - \phi_2(M)) \rangle \end{aligned}$$

## b) Condition d'interférences

Les interférences sont visibles si et seulement si le terme d'interférences est non nul. Dans ce cas, on dit que les deux ondes sont cohérentes, notion que l'on abordera plus tard dans la leçon. Dans le cas contraire on dit qu'elles sont incohérentes.

La durée d'intégration des détecteurs optiques usuels est très largement supérieure à la période des ondes lumineuses visibles (de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-15}$ s). Pendant la durée de la mesure les termes sinusoïdaux qui figurent dans l'expression de  $\mathcal{E}_{12}$  sont moyennés sur un nombre gigantesque de périodes. Or, la moyenne d'un terme type  $\cos(\omega t - \phi)$  est nulle, à moins que  $\omega$  ne soit nul. On en déduit alors que le terme d'interférences  $\mathcal{E}_{12}$  est nul si  $\omega_1 \neq \omega_2$ .

Ainsi, il faut que les vibrations soient isochrones, ce qu'on supposera par la suite :

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

Le terme d'interférence s'écrit alors dans ces conditions :

$$\mathcal{E}_{12}(M) = 2 \langle \vec{E}_{0,1} \cdot \vec{E}_{0,2} \cos(\Delta\phi(M)) + \vec{E}_{0,1} \cdot \vec{E}_{0,2} \cos(2\omega t - \phi_1(M) - \phi_2(M)) \rangle \quad (6)$$

avec  $\Delta\phi(M) = \phi_2(M) - \phi_1(M)$ . Ainsi après calcul de la valeur moyenne, il reste :

$$\mathcal{E}_{12}(M) = 2 \vec{E}_{0,1} \cdot \vec{E}_{0,2} \cos(\Delta\phi(M)) \quad (7)$$

où le retard de phase s'écrit :

$$\Delta\phi(M) = \frac{\omega}{c} ((S_2M) - (S_1M)) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)$$

avec :

- $\lambda_0$  la longueur d'onde de deux sources (identique) ;
- $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$  la différence de marche qui est la différence des chemins optiques ;

Si les deux ondes sont de polarisations orthogonales, c'est à dire que  $\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} = 0$ , alors le terme d'interférences est nul, on a des ondes incohérentes : c'est une autre condition d'interférences.

Enfin, pour éviter d'avoir un terme d'interférences nul, il faut que  $\Delta\phi$  ne varie pas aléatoirement au cours du temps. La relation de phase entre les deux ondes doit être bien définie. Expérimentalement, on n'observe pas d'interférence avec deux sources lumineuses indépendantes car elles auraient une pulsation ou fréquence différente. Ainsi il faut pour s'en sortir diviser la lumière provenant d'une unique source pour obtenir deux sources de "cohérence mutuelle parfaite" autrement dit cohérence temporelle.

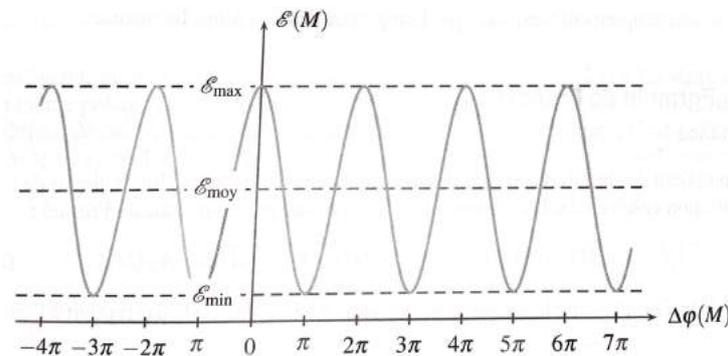
### c) Phénomène d'interférences

À partir de cette dernière formulation on obtient la formule de Fresnel qui donne l'éclairement induit par les interférences lumineuses entre deux ondes monochromatiques de même pulsation :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)} \cos(\Delta\phi(M)) \quad (8)$$

Selon le signe de  $\cos(\Delta\phi(M))$ , l'éclairement résultant est supérieur ou inférieur à la somme des éclairements des ondes. On distingue les deux cas suivants :

- Interférences constructives : elles sont réalisées en un point où  $\mathcal{E}(M) > \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)$ , c'est à dire si  $\cos(\Delta\phi(M)) > 0$ ;
- Interférences destructives : elles sont réalisées en un point où  $M < \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)$ , c'est à dire si  $\cos(\Delta\phi(M)) < 0$ .



D'autres informations peuvent découler de l'étude de la formule de Fresnel :

- la valeur moyenne  $\mathcal{E}_{moy}$  est  $\mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M)$ . Ce résultat est conforme à la conservation de l'énergie. Le phénomène d'interférence ne modifie que la distribution spatiale de l'énergie mais ne change pas l'énergie totale ;
- l'éclairement maximal s'obtient pour  $\cos(\Delta\phi(M)) = 1$  soit :

$$\Delta\phi(M) = 2m\pi$$

avec  $m$  entier relatif. La valeur de l'éclairement maximale est alors :  $(\sqrt{\mathcal{E}_1(M)} + \sqrt{\mathcal{E}_2(M)})^2$ . Dans ce cas les interférences sont totalement constructives ;

- l'éclairement minimal s'obtient pour  $\cos(\Delta\phi(M)) = -1$  soit :

$$\Delta\phi(M) = (2m + 1)\pi$$

avec  $m$  entier relatif. La valeur de l'éclairement minimale est alors :  $(\sqrt{\mathcal{E}_1(M)} - \sqrt{\mathcal{E}_2(M)})^2$ . Dans ce cas les interférences sont totalement destructives.

**Rq :** Dans le cas où les deux sources ont le même éclairement, qui est un cas fréquent, noté  $\mathcal{E}_0(M)$  la formule s'écrit  $\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0(M)(1 + \cos(\Delta\phi(M)))$ . Dans ce cas là on observe le comportement paradoxal selon lequel "lumière+lumière=obscurité".

### Différence de marche

On l'a rapidement aperçu : la différence des chemins optiques  $(S_2M) - (S_1M)$  est appelée différence de marche au point  $M$ . On la note  $\delta(M)$  :

$$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) \quad (9)$$

La différence de phase qui en découle s'exprime :

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0} \quad (10)$$

### Ordre d'interférences

On appelle ordre d'interférences le rapport de la différence de phase à  $2\pi$  :

$$p(M) = \frac{\Delta\phi(M)}{2\pi} \quad (11)$$

L'ordre d'interférences peut être relié à la différence de marche :

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \quad (12)$$

L'éclairement est maximal lorsque l'ordre d'interférences est un entier  $m$  et minimal lorsque l'ordre d'interférences est un demi-entier  $m + 1/2$ .

## 2. Figures d'interférences et dispositif interférentiel : les fentes d'Young

### a) Figure d'interférences

#### Champ d'interférences

On appelle champ d'interférences la zone de l'espace éclairée par les deux ondes cohérentes. C'est dans cette zone nécessairement limitée qu'est éventuellement observable le phénomène d'interférences.

#### Franges d'interférences

L'éclairement varie en fonction de la différence de phase, qui dépend du point  $M$  d'observation.

On appelle surfaces brillantes l'ensemble des point  $M$  de l'espace où l'éclairement est maximal, ce qui se traduit par  $\Delta\phi(M) = 2m\pi$ . Les intersections de ces surfaces avec l'écran d'observation sont les courbes d'éclairement maximal et sont appelées franges d'interférences brillantes, ou plus simplement, franges brillantes.

On appelle surfaces sombres l'ensemble des points  $M$  de l'espace où l'éclairement est minimal, ce qui se traduit par  $\Delta\phi(M) = (2m + 1)\pi$ . Les intersections de ces surfaces

avec l'écran d'observation sont les courbes d'éclairement minimal et sont appelées franges d'interférences sombres, ou plus simplement franges sombres.

Sur l'écran, l'ensemble des franges d'interférences forme la figure d'interférences.

### Contraste

On suppose que les éclaircements  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  sont différents au point  $M$ . C'est le cas réel des expériences d'optique en laboratoire.

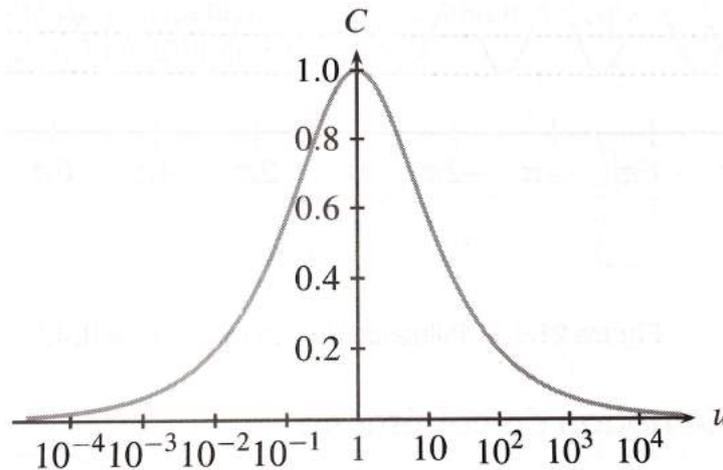
On appelle contraste ou visibilité d'une figure d'interférences la quantité :

$$C = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}} \quad (13)$$

Le contraste est une grande sans dimension qui, par construction, varie entre 0 et 1. En utilisant les cas limites de formule de Fresnel on obtient :

$$C = \frac{2\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}}{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2} \quad (14)$$

On peut analyser plus en détail cette relation en posant  $u = \mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2$ , ce qui revient à écrire  $C = 2\sqrt{u}/(1 + u)$ .



Ainsi grâce à la figure on voit que le contraste est maximum pour  $u = 1$ , c'est à dire pour  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ .

En utilisant la formulation du contraste on peut réécrire la formule de Fresnel :

$$\mathcal{E}(M) = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)(1 + C \cos(\Delta\phi(M))) \quad (15)$$

Ainsi plus la valeur du contraste est faible plus l'amplitude de l'éclairement en fonction de  $\Delta\phi(M)$  se réduit.

### b) Les fentes d'Young

Soit le dispositif interférentiel suivant :

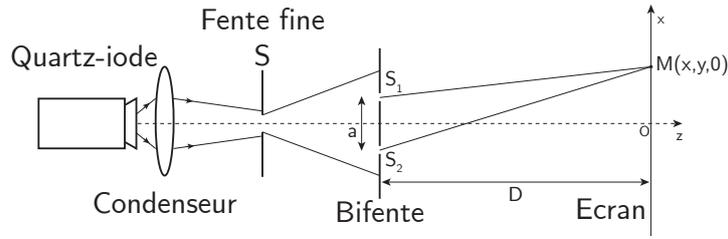
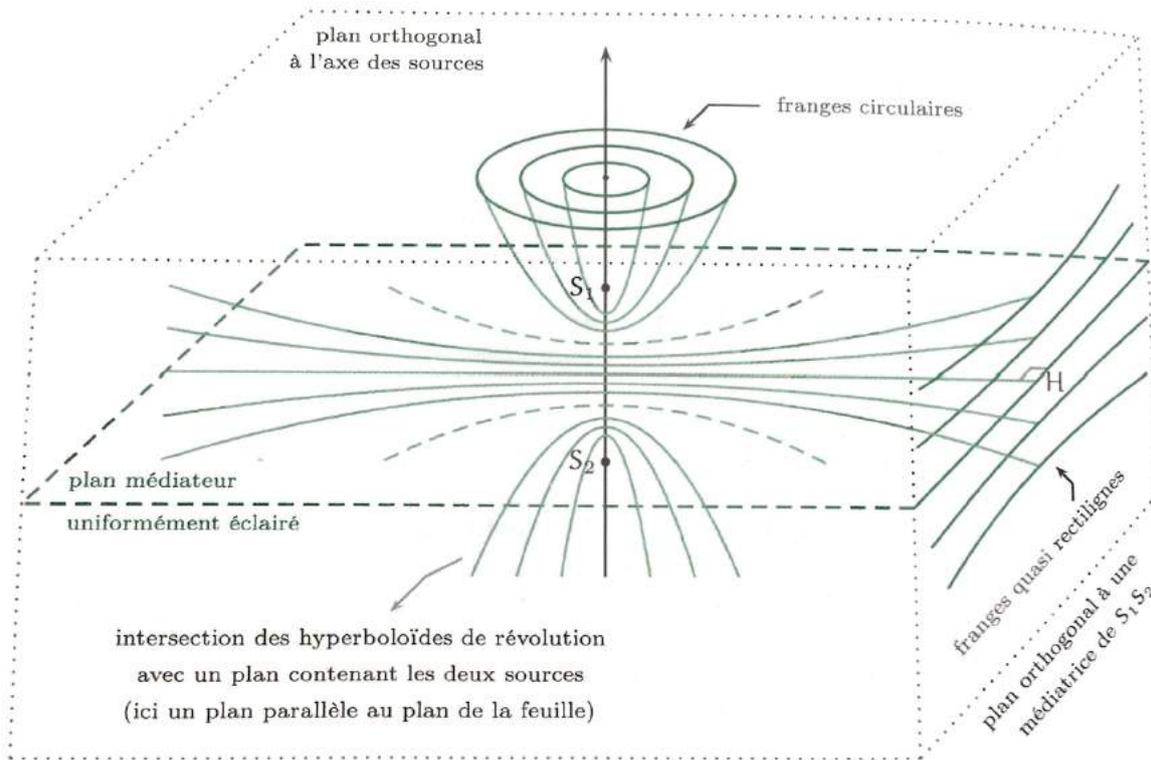


FIGURE 26 – Dispositif expérimental

Le champ d'interférences correspond à tout le volume de l'espace où les ondes diffractées par les deux trous se recouvrent. Expérimentalement, on constate que les franges d'interférences sont visibles sur l'écran d'observation quelle que soit sa position au-delà des deux fentes  $S_1$  et  $S_2$ . On dit que les interférences sont non localisées. Cette propriété est propre aux dispositifs interférentiels fonctionnant par division du front d'onde. Les surfaces d'éclairement maximal sont des hyperboloïdes de révolution autour de l'axe des sources :



Dans ce cas précis on peut calculer les différents paramètres présentés dans la première partie :

### Différence de marche

Soit la différence de marche définie comme étant  $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$ . On connaît les coordonnées des différents éléments :  $S_1(a/2, 0, -D)$ ,  $S_2(-a/2, 0, -D)$  et  $M(x, y, 0)$ . Alors la distance  $(S_1M)$  s'écrit :

$$(S_1M) = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D\sqrt{1 + \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2}$$

Les conditions expérimentales sont telles que, d'une part, l'observation se fait à grande distance c'est à dire que  $a \ll D$  et d'autre part l'observation se fait au voisinage du point  $O$  c'est à dire que  $|x| \ll D$  et  $|y| \ll D$ . Compte tenu de ces hypothèses on peut effectuer un développement limité à l'ordre 2 :

$$(S_1M) \simeq D \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{D} - \frac{a}{2D} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y}{D} \right)^2 \right] = D + \frac{D}{2} \left[ \left( \frac{x}{D} \right)^2 + \left( \frac{y}{D} \right)^2 + \left( \frac{a}{2D} \right)^2 \right] - \frac{ax}{2D}$$

De même pour  $(S_2M)$  :

$$(S_2M) \simeq D + \frac{D}{2} \left[ \left( \frac{x}{D} \right)^2 + \left( \frac{y}{D} \right)^2 + \left( \frac{a}{2D} \right)^2 \right] + \frac{ax}{2D}$$

En notant  $n$  l'indice du milieu de propagation (ici l'air  $n = 1$ ) il vient :

$$\delta(M) = \frac{nax}{D} \quad (16)$$

### Différence de phase

La différence se déduit immédiatement :

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi nax}{\lambda_0 D} \quad (17)$$

### Ordre d'interférence

L'ordre d'interférence s'exprime :

$$p(M) = \frac{nax}{\lambda_0 D} \quad (18)$$

En supposant les deux sources de même intensité, la formule des interférences conduit à un éclairement :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi nax}{\lambda_0 D} \right) \right) \quad (19)$$

On remarque que l'éclairement ne dépend que de  $x$  : on observe sur l'écran des franges rectilignes, alternativement sombres et brillantes.

L'éclairement présente une période spatiale qu'on nomme interfrange. Chaque frange brillante est repérée par une valeur entière de l'ordre d'interférence. À partir de l'équation (18), on obtient les positions des franges brillantes :

$$x_p = p \frac{\lambda_0 D}{na}, \text{ avec } p \text{ entier}$$

La distance entre deux franges brillantes consécutives donne l'interfrange  $i$  :

$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0 D}{na} \quad (20)$$

L'éclairement peut ainsi s'exprimer en fonction de  $i$  :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi x}{i} \right) \right) \quad (21)$$

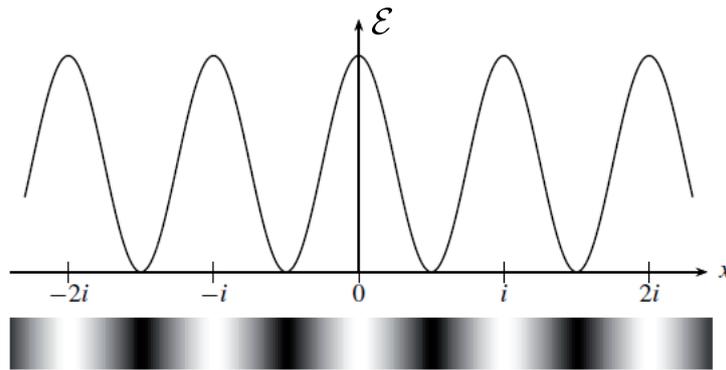


FIGURE 27 – Éclairement en fonction de l'interfrange  $i$

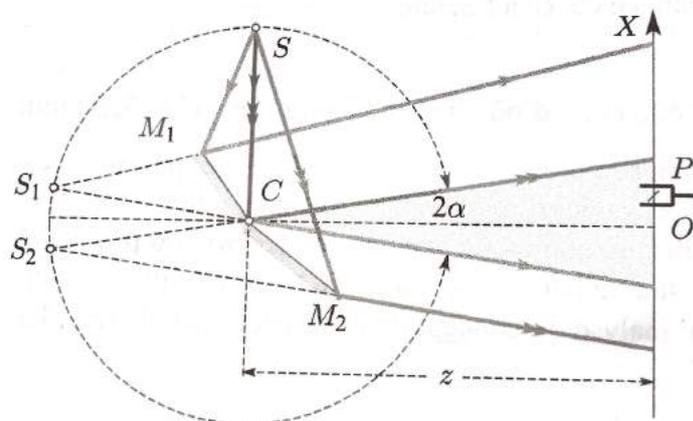
Ainsi on peut avec de dispositif et des moyens simples, remonter à la valeur de  $\lambda_0$  dans le cas où un utilise un laser monochromatique de longueur d'onde inconnue, on peut également mesurer la largeur de la tache centrale de diffraction et l'interfrange d'interférence que l'on peut comparer avec les valeurs théoriques. Attention à ne pas confondre les deux types de franges !

**Rq :** Pour le calcul de la diffraction dans le cas des fentes d'Young voir p.842 Cap prépa PC ou p.291 Perez.

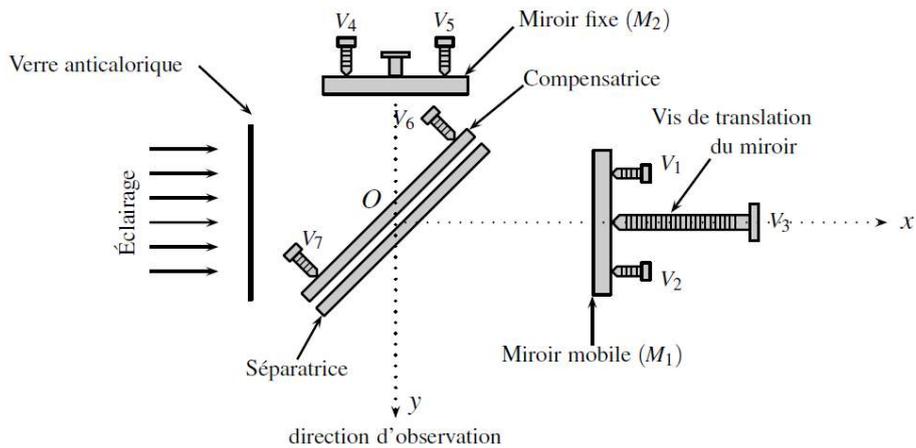
### c) Autres dispositifs

Il existe d'autres types d'interféromètres :

- **les systèmes interférentiels à division du front d'onde** comme c'est le cas pour les fentes d'Young : un front d'onde primaire est divisé en deux faisceaux spatialement différents qui suivent des chemins différents avant d'être recombinaés et produire des interférences. Il y a par exemple les miroirs de Fresnel où une source ponctuelle  $S$  éclaire deux miroirs plans qui font entre eux un angle  $\alpha$  de quelques minutes. Les rayons réfléchis qui semblent provenir des images respectives  $S_1$  et  $S_2$  se rencontrent et les ondes qu'ils véhiculent s'interfèrent.



- **les systèmes interférentiels à division d'amplitude** : un front d'onde primaire est divisé en deux faisceaux spatialement identiques qui suivent des chemins différents avant d'être recombinaés et produire des interférences. C'est le cas de l'interféromètre de Michelson que vous verrez dans une prochaine leçon.



### 3. Notion de cohérence

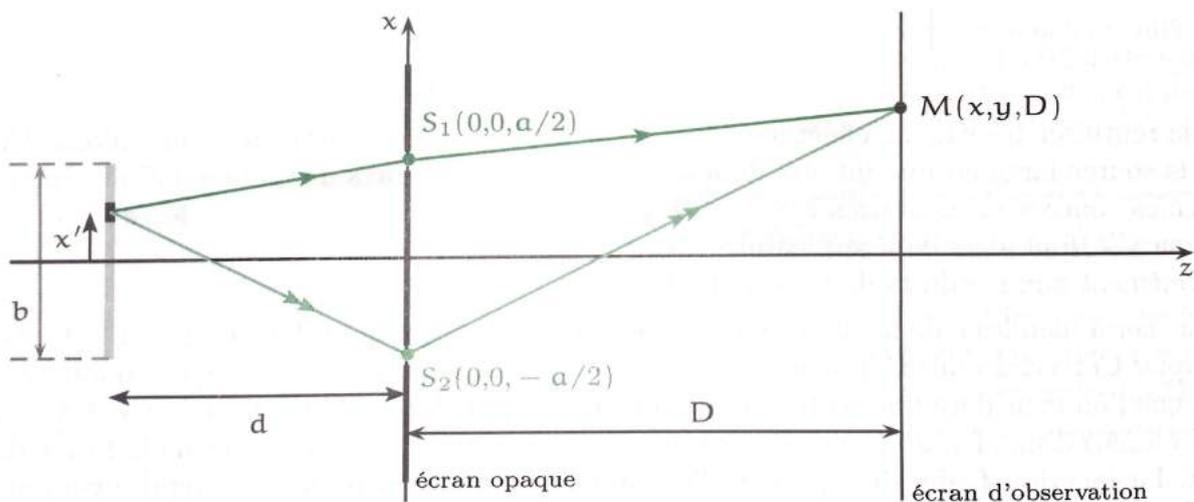
Le terme "cohérence" a pour le moment été employé afin de distinguer deux ondes qui pouvaient permettre l'observation d'interférences par opposition à des ondes dont le déphasage varie aléatoirement dans le temps.

Par la suite, la notion de cohérence restera liée à la possibilité d'observer ces phénomènes d'interférences. Nous allons distinguer deux causes qui limitent la visibilité du phénomène :

- **la cohérence spatiale** : une multitude de sources primaires réparties dans l'espace peuvent donner lieu à une superposition "anarchique" de systèmes de franges conduisant au brouillage de la figure d'interférence ;
- **la cohérence temporelle** : une source primaire constituée d'une multitude de radiation harmoniques (source non monochromatique) peut conduire au brouillage.

#### a) Cohérence temporelle

Jusqu'ici on considérait des sources ponctuelles dont nous caractérisions l'intensité par l'éclairement. Nous allons maintenant tenir compte de la largeur de la fente source  $S$ , pour le cas des fentes d'Young en prenant  $b$  la largeur de la fente source :



Nous supposons que les différents éléments de la source  $S$  sont incohérents entre eux, de sorte que les intensités correspondantes s'ajoutent dans le plan de l'écran. Isolons alors une bande de la source comprise entre les abscisses  $x'$  et  $x' + dx'$ . De cette

bande au point  $M$ , la différence de marche se calcule comme dans le cas des fentes d'Young en supposant  $b \ll d$  et  $|x| \ll D$  :

$$\delta = \frac{ax'}{d} + \frac{ax}{D}$$

et l'intensité correspondante, que nous supposons proportionnelle à la largeur  $dx'$  de la bande est :

$$d\mathcal{E}(M) = A \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right) dx' = A \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left[ \frac{x'}{d} + \frac{x}{D} \right] \right) \right) dx'$$

avec  $A$  une constante. En intégrant de  $-b/2$  à  $b/2$  :

$$\mathcal{E}(M) = A \left( b + \frac{\lambda_0 d}{2\pi a} \left[ \sin \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left( \frac{x}{D} + \frac{b}{2d} \right) \right) - \sin \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left( \frac{x}{D} - \frac{b}{2d} \right) \right) \right] \right)$$

soit en utilisant les relations trigonométriques :

$$\mathcal{E}(M) = Ab \left( 1 + \frac{\lambda_0 d}{\pi ab} \sin \left( \frac{\pi ab}{\lambda_0 d} \right) \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right)$$

Posons  $Ab = \mathcal{E}_0$  et  $u = \pi ab/(\lambda_0 d)$  :

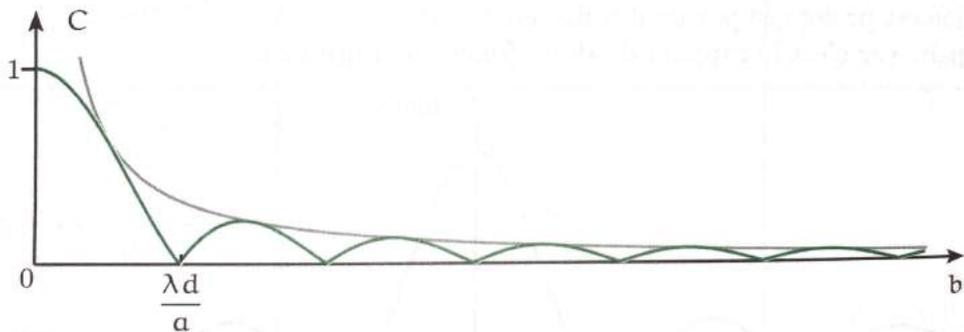
$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \left( 1 + \sin c(u) \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right) \quad (22)$$

À partir de cette relation on trouve que le contraste s'exprime ainsi :

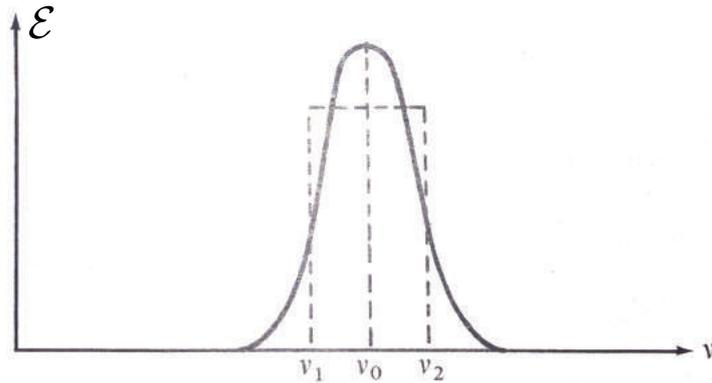
$$C = \frac{\sin(u)}{u}, \text{ avec } u = \frac{\pi ab}{\lambda_0 d}$$

Ainsi le contraste diminue quand  $b$  augmente. On appellera longueur de cohérence spatiale  $\ell_s$  la plus petite valeur  $b$  (largeur de la source) qui annule le contraste. La première annulation est obtenue lorsque le sinus cardinal est égale à  $\pi$  ce qui donne :

$$\frac{\pi a \ell_s}{\lambda_0 d} = \pi \implies \ell_s = \frac{\lambda_0 d}{a} \quad (23)$$



## b) Cohérence spatiale



Une source n'est jamais parfaitement monochromatique ; même pour un spectre de raies, chaque raie spectrale de fréquence  $\nu_0$  possède en fait une certaine largeur  $\Delta\nu$ . Physiquement, cet élargissement des raies spectrales est dû à plusieurs causes. L'une d'elles est l'effet Doppler : la lumière est émise par des atomes en état d'agitation thermique et cette agitation agit sur la fréquence perçue par un observateur dans le référentiel "fixe" du laboratoire. Par ailleurs d'autre effet, assez subtil mais fondamental, limite toujours la finesse des raies : c'est la durée finie du train d'onde émis par un atome.

On montre en effet, dans la théorie de la transformation de Fourier, que le spectre en fréquence d'une radiation émise pendant un laps de temps  $\tau$ , s'étale sur une bande  $\Delta\nu$  dont l'ordre de grandeur est :

$$\Delta\nu \sim 1/\tau$$

Signalons de plus que durant son émission, la phase d'un train d'onde peut être modifiée aléatoirement par les collisions que subit l'atome dans l'état excité. Ce phénomène élargit aussi la raie spectrale.

Reprenons notre montage initial sur les fentes d'Young. On suppose la source  $S$  très fine et émet une raie de largeur  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ . Pour nous simplifier les calculs, on supposera que le profil de la raie est rectangulaire : par hypothèse, la raie émet de l'énergie seulement entre  $\nu_1$  et  $\nu_2$  et pour une bande de largeur  $d\nu$ , l'énergie est proportionnelle à  $d\nu$ .

Pour cet intervalle, on peut appliquer la formule de Fresnel :

$$d\mathcal{E}(M) = A \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right) d\nu, \text{ avec } \nu = c/\lambda_0$$

où  $A$  est une constante de proportionnalité, nous obtenons alors :

$$d\mathcal{E}(M) = A \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi ax}{cD} \nu \right) \right) d\nu$$

Soit en intégrant de  $\nu_1$  à  $\nu_2$  :

$$d\mathcal{E}(M) = A(\nu_2 - \nu_1) \left( 1 + \frac{cD}{2\pi ax(\nu_2 - \nu_1)} \left[ \sin \left( \frac{2\pi ax}{cD} \nu_2 \right) - \sin \left( \frac{2\pi ax}{cD} \nu_1 \right) \right] \right)$$

ou encore :

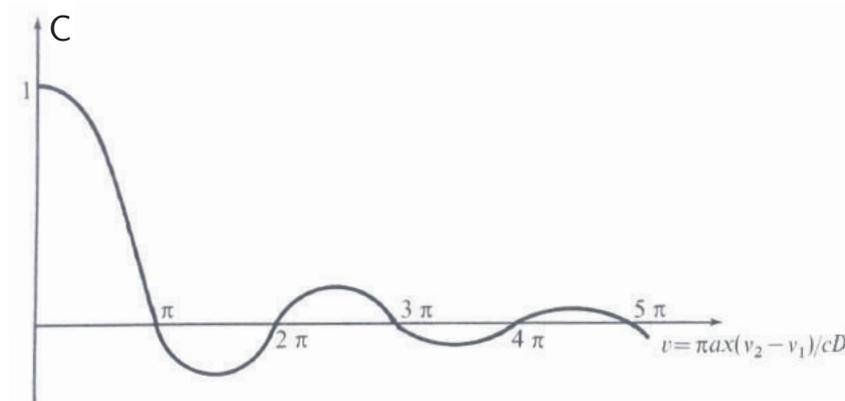
$$d\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \left[ 1 + \frac{\sin(v)}{v} \cos \left( \frac{2\pi a}{cD} \left( \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \right) x \right) \right], \text{ avec } v = \frac{\pi ax(\nu_2 - \nu_1)}{cD}$$

On peut introduire la fréquence moyenne  $\nu_m = (\nu_1 + \nu_2)/2$  et la longueur d'onde moyenne  $\lambda_m = c/\nu_m$  :

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \left[ 1 + \frac{\sin(v)}{v} \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_m c D} \right) \right] \quad (24)$$

De la même façon que toute à l'heure le contraste est donnée par :

$$C = \frac{\sin(v)}{v}, \text{ avec } v = \frac{\pi ax(\nu_2 - \nu_1)}{cD}$$



L'interprétation de cette courbe, qui permet de préciser quantitativement la notion de cohérence temporelle, est un peu plus délicate que celle du paragraphe précédent. En voyant la courbe, on remarque que l'on obtient un bon contraste si  $\nu < \pi$ . Soit si :

$$\frac{\pi ax(\nu_2 - \nu_1)}{cD} < \pi \text{ ou encore } ax/D < c/(\nu_2 - \nu_1)$$

Or  $ax/D$  représente la différence de marche  $\delta$  entre les deux rayons qui viennent interférer au point  $M$  d'abscisse  $x$ , alors :

$$\delta < c/(\nu_2 - \nu_1)$$

On ne peut obtenir d'interférences bien contrastées que si  $\delta$  est inférieure à une certaine quantité. Pour interpréter physiquement ce dernier résultat, rappelons que  $\Delta\nu \sim 1/\tau$ .  $\tau$  est appelé durée de cohérence de la raie ;  $c$  représente la vitesse de propagation de la lumière,  $c\tau$  est la longueur de cohérence de la lumière émise. La condition  $\delta < c/(\nu_2 - \nu_1)$  s'écrit donc :

$$\delta < c\tau = L$$

Dans le cas où la raie optique est émise dans élargissement "Doppler" ou collisionnel,  $\tau$  est égale à  $\tau_R$ , durée moyenne des trains d'onde émis par chaque atome. La condition de cohérence temporelle s'interprète alors facilement : la différence de marche doit être inférieure à  $L$  longueur du train d'onde émis. Si ce n'est pas le cas ce sont des ondes appartenant à des trains d'onde différentes qui interféreraient en  $M$ . Or d'un train d'onde à l'autre, la phase varie de façon aléatoire ; les phénomènes d'interférences de brouilleraient donc.

**Rq :** La figure peut donner quelques inquiétudes : on observe en effet une réapparition du contraste (avec inversion) pour  $v > \pi$  alors que la notion de train d'onde laisse prévoir qu'on ne peut observer de phénomènes d'interférences pour  $\delta > L$ . C'est ce seconde résultat qui est exact ; en effet, la courbe de la figure n'est qu'approximative : elle est tributaire du fait que nous avons assimilé le "profil" de la raie à un rectangle ; c'est cette approximation qui provoque cette apparition du contraste.

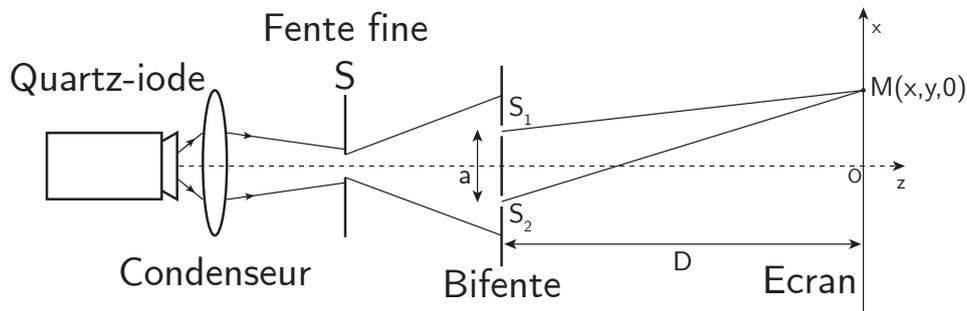
## Conclusion

Nous avons pu voir dans cette leçon l'aspect ondulatoire de la lumière et sa complexité. Notre œil (capteur optique) est sensible à la moyenne temporelle du module au carré du champ électrique. On a pu voir que finalement des critères devaient être respectés pour avoir interférences : les ondes doivent être cohérentes entre elles. On a pu voir que la cohérence spatiale et temporelle ajoute une limite sur l'étendue de la source et la différence de marche.

Toutefois, on a vu que les systèmes interférentiels peuvent être des outils de mesures efficaces et précis. On a vu les interférences entre deux ondes... dans une prochaine leçon vous verrez comment se caractérise des interférences entre  $N$  ondes mais aussi comment fonctionnent les interféromètres à division d'amplitude.

# Manip : Fentes d'Young

Voir page 186 du Bellier et page 161 du Sextant.



On peut utiliser dans un premier temps une lumière blanche pour montrer qualitativement le principe et les phénomènes. Ensuite pour des mesures qualitative on prend un laser monochromatique.

Dans un premier temps il faut mesurer la distance  $D$  séparant les fentes d'Young et l'écran.

Puis on mesure la distance entre  $n$  franges sachant que :

$$i = \frac{\lambda D}{a} \quad (25)$$

avec  $a$  la taille des fentes. On peut ainsi retrouver la longueur d'onde du laser, avec une erreur :

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\Delta i}{i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D}{D}\right)^2} \quad (26)$$

On peut ensuite montrer la notion de cohérence spatiale. Pour cela on change la largeur de la fente fine  $S$  pour voir la variation du contraste et calculer la longueur de cohérence spatiale en utilisant un diaphragme pour  $S$  gradué :

$$\ell_s = \frac{\lambda_0 d}{a} \quad (27)$$

où  $d$  est la distance entre  $S$  et les fentes d'Young. On vérifie expérimentalement la valeur avec la valeur théorique. Pour mesurer on choisi une ouverture pour laquelle le contraste est maximale on ferme ensuite le diaphragme jusqu'à ce que le contraste soit nul et on regarde la graduation parcourue pour avoir l'ouverture de la fente  $S$ .

On peut aussi déterminer la taille de fente inconnue mais en connaissant la valeur de la longueur d'onde du laser en utilisant la largeur d'interfrange  $i$ .

**Rq :** Pour la manip en lumière blanche p190 du Bellier.

# L.P. 34 - Interférométrie à division d'amplitude

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Optique ondulatoire
- Notion de cohérence
- Interférences

## Bibliographie

- Optique physique, Mauras, *PUF*
- Optique expérimentale, Sextant, *Hermann*
- Tout en un PC, Sanz, *Dunod*
- H-prépa Optique ondulatoire, Brébec, *Hachette*
- Optique , Perez, *Dunod*
- Optique physique , Taillet, *De Boeck*

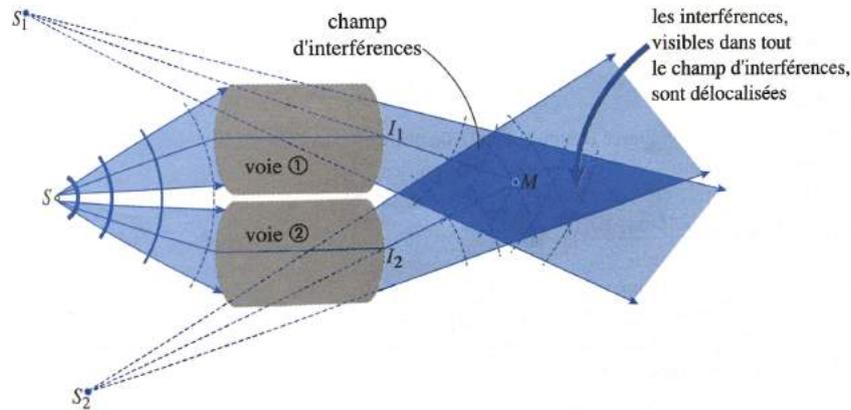
**Beaucoup de calculs donc essayer d'être bref rapide et efficace sachant qu'en plus il y a des manip à faire ! Donc pas la peine de tout détailler sauf pour le théorème de localisation qui est important.**

## Introduction

Nous avons étudié la formation d'interférences avec une source ponctuelle, en utilisant un dispositif diviseur du front d'onde ou diviseur d'amplitude. La source ponctuelle est un modèle que nous pouvons approcher expérimentalement avec un diaphragme très réduit. Pouvons-nous ouvrir le diaphragme sans perte de contraste pour la figure d'interférences ? Existe-il une taille optimale pour ce diaphragme ?

# 1. Intérêt de la division d'amplitude

## a) Rappels



Reprenons un schéma de réalisation d'interférences lumineuses qu'on a déjà vu : un dispositif à deux voies est éclairé par une source ponctuelle et monochromatique  $S$ . On sait que :

- un point  $M$  appartient au champ d'interférences s'il est à l'intersection de deux rayons émergeant du dispositif après avoir emprunté respectivement les voies 1 et 2 du dispositif ;
- en ce point d'observation nous détectons un éclairement  $\mathcal{E}(M)$  qui dépend de la différence de marche  $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$  des rayons qui interfèrent ;
- ces interférences sont caractérisées par un contraste  $C$ . Si le dispositif est bien conçu, les deux voies délivrent des éclairagements voisins et ce contraste peut être proche de l'unité, valeur optimale ;
- l'observation des interférences est possible dans tout le champ d'interférences

Ainsi on sait que lorsqu'un dispositif à division du front d'onde ou division d'amplitude est éclairé par une source ponctuelle monochromatique, les interférences sont délocalisées, c'est à dire visibles dans tout le champ d'interférences. Le contraste est sensiblement le même en tout point, et proche de l'unité si les voies du dispositif sont équitablement éclairées.

En supposant que les éclairagements issues de  $S_1$  et  $S_2$  sont identiques on a :

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0(M) = \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta(S, M)}{\lambda_0} \right) \right) \quad (1)$$

### Ensemble de sources incohérentes

La source ponctuelle est un modèle : le diaphragme que nous pouvons réduire au maximum peut tout au plus nous donner une source quasi ponctuelle, mais sa taille n'est jamais rigoureusement nulle.

Si on considère maintenant une source réelle, donc non ponctuelle, la source peut être considérée comme un ensemble de sources  $S$  incohérentes. Ainsi les sources secondaires issues de la même source élémentaire vont interférer. Mais les sources secondaires issues de sources élémentaires différentes sont incohérentes entre elles, elles n'interfèrent pas : les éclairagements donnés par chaque élément  $S$  de la source étendue s'ajoutent :

$$\mathcal{E}_{\text{source étendue}}(M) = \sum_{S \in \text{source étendue}} 2\mathcal{E}_{0,S} \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi\delta(S, M)}{\lambda_0} \right) \right) \quad (2)$$

Ainsi avec une source lumineuse étendue, ensemble de sources primaires incohérentes, l'éclairement observé est la superposition des phénomènes d'interférences données par les différents points de la source.

### Conséquences de l'élargissement de la source

Du fait d'utiliser une source étendue les conséquences sont multiples :

- le dispositif gagne en luminosité, la figure est plus lumineuse et observable dans une salle moins obscure ;
- risque d'une perte de contraste si les figures données par les différents points de la source étendue sont trop dissemblables ;
- si la différence de marche  $\delta(S, M)$  varie peu, à l'échelle de la longueur d'onde lumineuse  $\lambda_0$ , lorsque  $S$  balaye l'ensemble de la source étendue, le contraste des franges observées au voisinage du point  $M$  reste convenable. Le cas échéant, les franges sont brouillées par l'élargissement de la source. Problème de cohérence spatiale.

On la vu dans une précédente leçon pour les dispositifs à division du front d'onde : ils doivent être éclairés par des sources très fines. Dans ces conditions, le contraste reste convenable et les interférences sont délocalisées car observables dans l'ensemble du champ d'interférences.

**Rq** : Longueur de cohérence spatiale :  $\ell_s = (\lambda_0 d)/a$

### b) Théorème de localisation

Le constat effectué avec un dispositif diviseur du front d'onde est un peu décevant... mais il était à craindre : les longueurs d'onde optiques sont courtes, à l'échelle d'une expérience usuelle, et le critère de visibilité est très restrictif.

Nous pouvons alors nous demander s'il n'existe pas, pour certains dispositifs, quelques points  $M$  privilégiés, pour lesquels  $\delta(S, M)$  dépendrait suffisamment peu de  $S$ , pour que le brouillage soit évité lors de l'élargissement de la source.

S'il existe des points  $M$ , tels que  $\delta(S, M)$  dépend "très peu" de  $S$ , les interférences, brouillées par l'élargissement de la source, restent malgré tout visibles au voisinage de ces points, qui réalisent un contraste maximal dans le champ d'interférences : avec une source élargie, les interférences sont localisées au voisinage de ces points.

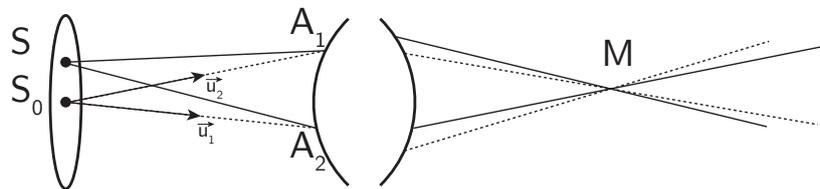


FIGURE 28 - Source large et système à deux voies

Reprenons un schéma de dispositif interférentiel, et considérons les rayons reliant, par les voies 1 et 2, un point  $S$  de la source étendue à un point  $M$ , d'observation. Si les voies de l'interféromètre sont convenablement stigmatiques, ces rayons qui passent par  $M$  en sortie de chaque voie doivent être passés par les points objets  $A_1$  et  $A_2$ , conjugués de  $M$  par les voies 1 et 2. Nous savons que les chemins optiques  $(A_1M) = L_1$  et  $(A_2M) = L_2$  ne dépendent pas des rayons choisis, donc pas de la position du point source  $S$  :

$$\delta(S, M) = (S_2M) - (S_1M) = SA_2 + L_2 - SA_1 - L_1$$

et

$$\delta(S_0, M) = S_0 A_2 + L_2 - S_0 A_1 - L_1$$

La variation des différences de chemin optique quand  $S_0$  donne  $S$  voisin de  $S_0$  est :

$$\Delta\delta(M) = \delta(S, M) - \delta(S_0, M) = (SA_2 - S_0 A_2) - (SA_1 - S_0 A_1) +$$

Évaluons le dernier terme entre rochets en supposant que la source est assez peu étendue pour utiliser un développement limité au premier ordre :

$$SA_1 - S_0 A_1 \approx -\vec{u}_1 \cdot \overrightarrow{S_0 S}$$

où  $\vec{u}_1$  est le vecteur unitaire pointant de  $S_0$  vers  $A_1$ . En procédant de même pour le point  $A_2$ , la différence de marche peut s'écrire :

$$\Delta\delta(M) = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot \overrightarrow{S_0 S}$$

Cette relation nous donne des informations précieuses : il y a deux possibilités pour que le contraste des interférences soit préservé quand la source est élargie :

- l'élargissement se fait orthogonalement aux rayons qui interfèrent ;
- les rayons qui interfèrent vérifient  $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ , ce qui signifie qu'ils proviennent du même rayon incident.

La première possibilité est contraignante sur la source. En outre, elle concerne seulement  $S_0 S$  et pas du tout le point d'observation : il n'y a donc pas d'effet de localisation des interférences dans ce cas. Cet aspect du critère de non-brouillage traduit l'observation d'interférences bien contrastées en éclairant des fentes d'Young non pas par un trou mais par une fente source parallèle aux fentes.

La seconde possibilité n'est pas contraignante sur la source mais sur l'interféromètre. En effet, il n'est pas possible de vérifier le critère  $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$  avec un interféromètre à division de front d'onde. Seul un interféromètre à division d'amplitude le permet.

Ainsi il en découle le théorème de localisation :

**Seuls les interféromètres à division d'amplitude peuvent donner lieu à l'observation d'interférences contrastées produites par une source arbitrairement large. Alors, ces interférences sont localisées au voisinage des points où les rayons qui interfèrent sont issus du même rayon entrant dans l'interféromètre.**

## 2. L'interféromètre de Michelson

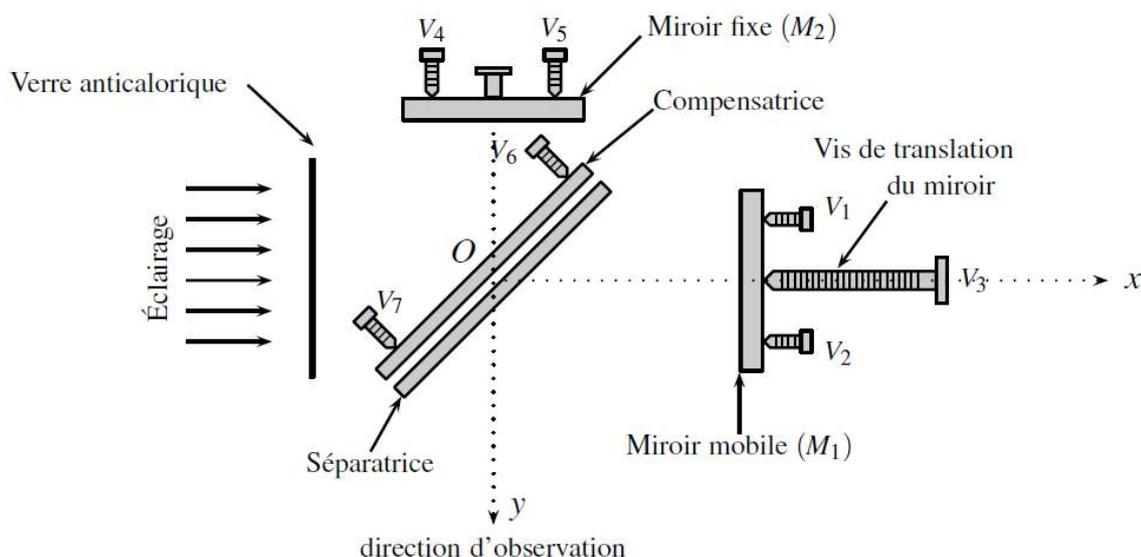
**MANIP : Faire la manip du Michelson en lame d'air pour déterminer le doublet du Sodium en même temps que la présentation, le but étant de montrer son fonctionnement mais ensuite de l'application possible : spectroscopie optique. p.143 et 230 du Sextant et page 144 du H-prépa.**

L'interféromètre de Michelson, porte le nom d'Albert Michelson (1852-1931), prix Nobel de physique en 1907. Il conçut et utilisa cet interféromètre pour tenter de vérifier la loi de composition des vitesses galiléenne et de mesurer la vitesse d'entraînement de la lumière dans le référentiel terrestre. Le résultat négatif de cette expérience ouvrit la voie à la théorie de la relativité d'Einstein. De nos jours cet appareil est très employé pour réaliser des mesures de grande précision (mesure de distance notamment). Les détecteurs

d'ondes gravitationnelles LIGO (Etats-Unis) et VIRGO (Europe) sont des interféromètres de Michelson géants dont les bras font quelques kilomètres de long. En Septembre 2015, l'instrument LIGO détecte pour la première fois une onde gravitationnelle, émise par la coalescence de deux trous noirs, il y a très très longtemps dans une galaxie très très lointaine. Cette mesure est une confirmation éclatante de la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Ce dispositif on l'aura compris permet de mesurer avec précision des longueurs. On va ainsi durant cette partie essayer de déterminer l'écart du doublet du sodium ou mercure.

## a) Principe



L'interféromètre est réalisé à partir d'éléments de haute qualité optique et mécanique :

- un miroir mobile  $M_1$ , pouvant être translaté le long de l'axe ( $Ox$ ) ;
- un miroir fixe  $M_2$
- une lame traitée sur sa face avant pour être semi-réfléchissante, appelée lame séparatrice, et une lame identique mais non traitée, appelée lame compensatrice, toutes deux inclinées d'un angle  $\pi/4$  par rapport aux axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ). L'ensemble de ces deux lames constituent le dispositif séparateur.

Les deux segments  $[O; M_1]$  et  $[O; M_2]$  constituent les deux bras de l'interféromètre.

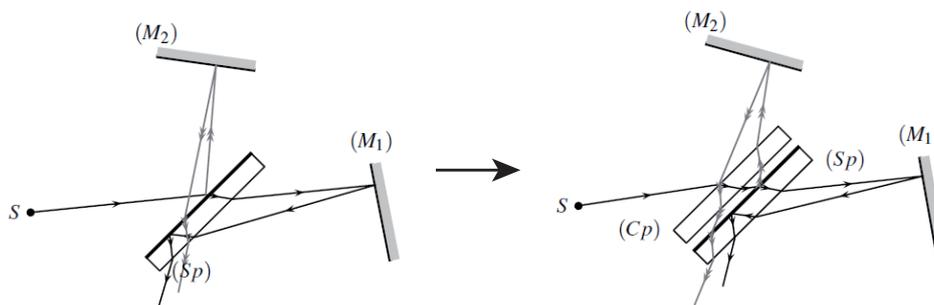
Un verre anticalorique est placé à l'entrée de l'interféromètre : il a pour rôle d'absorber le rayonnement infrarouge, protégeant ainsi toute l'optique de l'interféromètre.

Différentes vis (de 1 à 6) de réglage permettent de contrôler la position ou l'orientation des différents éléments : le miroir  $M_1$  en orientation et en translation (chariotage) et le miroir  $M_2$  en orientation.

L'interféromètre de Michelson offre deux voies possibles à la lumière incidente :

- Voie 1 : la lumière incidente est d'abord transmise par le dispositif séparateur, réfléchi ensuite par le miroir  $M_1$ , et enfin réfléchi par le dispositif séparateur avant d'émerger de l'interféromètre ;
- Voie 2 : la lumière incidente est d'abord réfléchi par le dispositif séparateur, réfléchi ensuite par le miroir  $M_2$ , et enfin transmise par le dispositif séparateur avant d'émerger de l'interféromètre.

## Le dispositif séparateur

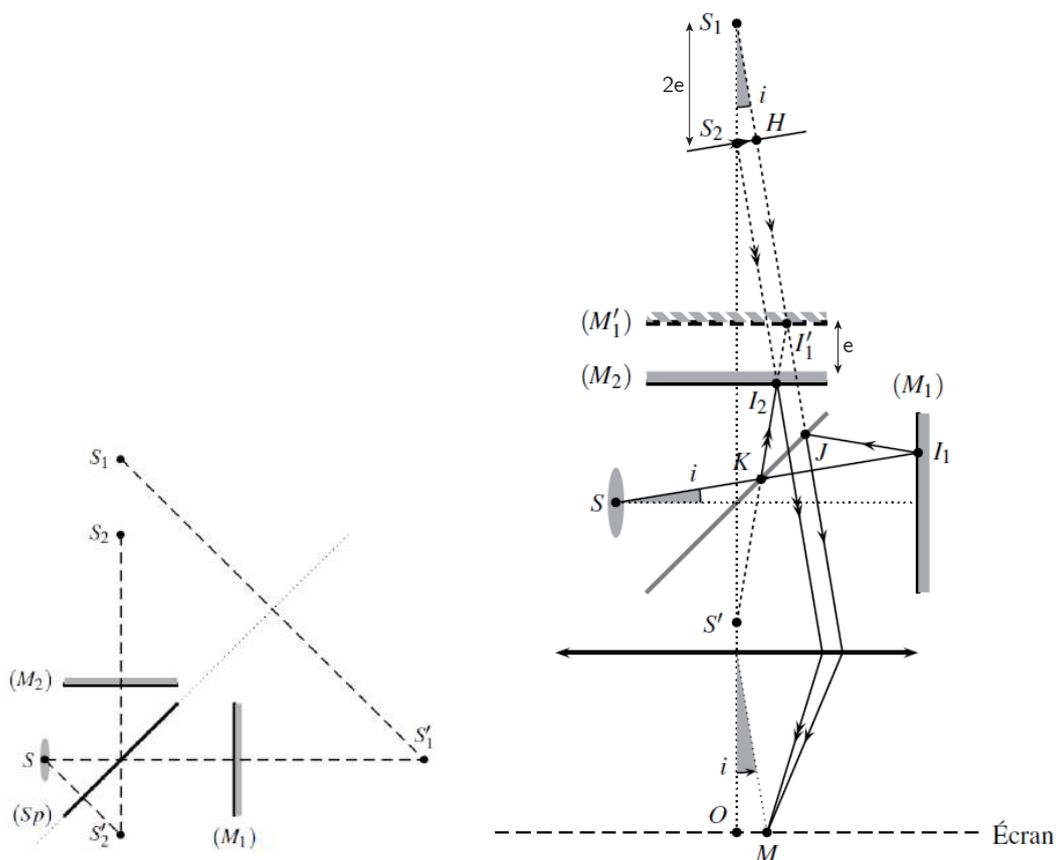


La lame séparatrice permet de séparer le faisceau lumineux incident en deux faisceaux d'éclairement moitié. Cependant, en l'absence de lame compensatrice, le rayon réfléchi par  $M_1$  traverse trois fois la séparatrice alors que le rayon réfléchi par  $M_2$  ne la traverse qu'une fois. Ceci entraîne une différence de chemins optiques irréductible entre les deux voies de l'interféromètre. Mais comme l'indice, optique de la lame compensatrice dépend de la longueur d'onde (effet de dispersion), cette différence de chemins optiques varie avec la longueur d'onde. On pourrait la compenser en lumière monochromatique en rapprochant convenablement le miroir  $M_1$  du dispositif séparateur. Mais cela devient inopérant en lumière polychromatique. Il faut donc rechercher une autre façon de compenser cette différence de marche. Pour cela on ajoute au dispositif séparateur une lame identique (sans traitement de surface cette fois-ci). Ainsi, chaque rayon transitant par une des deux voies de l'interféromètre aura traversé quatre fois l'épaisseur d'une lame. La présence de la lame compensatrice permet de rendre les deux voies de l'interféromètre équivalentes. Les vis  $V_6$  et  $V_7$  permettent de régler l'orientation de la lame compensatrice afin d'assurer le meilleur parallélisme possible avec la lame séparatrice.

Dans la suite de la leçon, on considèrera que l'ensemble des lames séparatrice et compensatrice est équivalent à une lame séparatrice d'épaisseur idéalement nulle, n'introduisant aucune différence de marche résiduelle.

**Rq :** Avec ce dispositif la moitié de l'éclairement est dirigée vers la sortie de l'interféromètre, et l'autre moitié est renvoyée vers la source.

## b) lame d'air



On dit que l'interféromètre est configuré en lame d'air lorsque les deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$  sont perpendiculaires.

### Observation des franges

L'expérience montre que dans la configuration de la lame d'air éclairée par une source étendue, les interférences sont très peu visibles lorsqu'on place à la sortie de l'interféromètre un écran à distance finie de l'interféromètre. On observe que la visibilité des franges augmente au fur et à mesure que l'on éloigne l'écran. Elle est même maximale lorsque l'écran est placé dans le plan focal image d'une lentille convergente. Cela signifie que la visibilité des franges est maximale à l'infini. On dit que les franges d'interférences sont localisées à l'infini.

Soit le schéma équivalent du dispositif en lame d'air présenté sur la figure. L'interféromètre est éclairé par une source étendue : on considère une source ponctuelle  $S$  appartenant à cette source. L'onde rayonnée par  $S$  est supposée monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda_0$ .

Analysons la position des deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  :

- Voie 1 : un rayon lumineux issu de  $S$  est transmis par la lame séparatrice  $S_p$  réfléchi par le miroir  $M_1$  et réfléchi par la lame séparatrice ;
- Voie 2 : un rayon lumineux issu de  $S$  est réfléchi par la lame séparatrice  $S_p$ , réfléchi par le miroir  $M_2$  et transmis par la lame séparatrice.

Les constructions géométriques font apparaître une symétrie du dispositif par rapport à l'axe de la séparatrice. On peut donc considérer le miroir  $M'_1$  symétrique de  $M_1$  par

rapport à la lame séparatrice. Cette transformation laisse la distance  $S_1$  et  $S_2$  inchangée. On renomme le point  $S'_2$  par  $S'$ . On peut considérer que  $S_1$  est l'image de  $S'$  par le miroir  $M'_1$ . On appelle épaisseur de la lame d'air la distance entre  $M_2$  et  $M'_1$ , notée  $e$ . On peut alors montrer que la distance entre  $S_1$  et  $S_2$  est  $2e$ .

## Calculs

Exprimons les chemins optiques de  $S$  à  $M$  pour les deux voies de l'interféromètre. On suppose que la réflexion sur les miroirs s'accompagne d'un chemin optique supplémentaire égale à  $\lambda_0/2$ . Nous choisissons, par souci de simplicité, de ne pas écrire les chemins optiques supplémentaires introduit par les réflexions sur la séparatrice idéale, en supposant qu'ils sont identiques sur les deux voies et qu'ils ne contribuent donc pas à la différence de marche.

$$\begin{aligned}(SM)_1 &= (SI_1) + \frac{\lambda_0}{2} + (I_1J) + (JM) = nSI_1 + \frac{\lambda_0}{2} + nI_1J + (JM) \\ (SM)_2 &= (SK) + (KI_2) + \frac{\lambda_0}{2} + (I_2M) = nSK + nKI_2 + \frac{\lambda_0}{2} + (I_2M)\end{aligned}$$

Or pour des raisons de symétrie,  $SI_1 = S'I'_1$  et  $I_1J = I'_1J$  d'une part, et  $SK + KI_2 = S'K + KI_2 = S'I_2 = S_2I_2$  d'autre part (les points  $S'$ ,  $K$  et  $I_2$  sont alignés, donc  $S'K + KI_2 = S'I_2$ ). De même, on peut écrire :  $S_1I'_1 + I'_1J = S_1J$  car les points  $S_1$ ,  $I'_1$  et  $J$  sont alignés. D'où :

$$\begin{aligned}(SM)_1 &= nSI'_1 + \frac{\lambda_0}{2} + nI'_1J + (JM) = (S_1M) + \frac{\lambda_0}{2} \\ (SM)_2 &= nS_2I_2 + \frac{\lambda_0}{2} + (I_2M) = (S_2M) + \frac{\lambda_0}{2}\end{aligned}$$

La différence de marche  $\delta(M) = (SM)_1 - (SM)_2 = (S_1M) - (S_2M)$ . Sur la figure est tracé un plan d'onde relatif à une source fictive qui serait placée en  $M$  et passe par  $S_2$  et  $H$ . On en déduit que  $(S_2M) = (HM)$  et que par conséquent  $\delta(M) = nS_1H$ .

L'angle correspondant au secteur angulaire grisé est  $i$ , de sorte que :

$$\delta(M) = 2ne \cos(i) \quad (3)$$

Ainsi on peut immédiatement déduire la différence de phase pour le cas en lame d'air :

$$\Delta\phi(M) = \frac{4\pi ne \cos(i)}{\lambda_0} \quad (4)$$

Mais aussi l'ordre d'interférence :

$$p(M) = \frac{2ne \cos(i)}{\lambda_0} \quad (5)$$

et enfin l'éclairement :

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi ne \cos(i)}{\lambda_0} \right) \right) \quad (6)$$

On voit que l'ordre d'interférence est indépendant de la position de la source  $S$  et dépendant de la position du point  $M$ . Ainsi tous les systèmes de franges d'interférences coïncident exactement, et ce quelle que soit l'extension spatiale de la source primaire. Les franges d'interférences visibles dans le plan focal de la lentille sont donc particulièrement lumineuses.

Lorsqu'un dispositif interférentiel, éclairé par une source étendue, fonctionne par division d'amplitude, les franges d'interférences sont localisées sur une surface, appelée surface de localisation où la visibilité des franges d'interférences est maximale. La surface de localisation est constituée de l'ensemble des points  $M$  qui correspondent à l'intersection des deux rayons émergents de l'interféromètre, et qui sont issu d'un seul et même rayon émergent de la source.

Le dispositif présente une symétrie de révolution autour de l'axe  $(S_1S_2)$ . Les franges d'interférences ont donc la même symétrie de révolution : elles sont circulaires. Plutôt que de parler de franges circulaires, on parle aussi d'anneaux.

L'ordre d'interférences  $p(M)$  ne dépend que de l'angle  $i$ . Une frange brillante donnée correspond à la même valeur de l'angle  $i$ . Comme cet angle correspond à l'inclinaison des rayons lumineux, on qualifie ces franges de franges d'égale inclinaison. L'ordre est maximal pour  $i$  minimale soit  $p_{max} = p(i = 0) = p_0$ .  $p$  est fonction décroissante de  $i$ .

## Rayon des anneaux successifs

(facultatif)

Soit  $r = OM$ . L'utilisation de la lentille dans les conditions de Gauss impose à  $i$  de garder des valeurs suffisamment faibles de sorte que  $i \simeq \tan(i) = r/f'$ . Alors :

$$p_0 = \frac{2ne}{\lambda_0} \cos(i_1) \simeq \frac{2ne}{\lambda_0} \left(1 - \frac{i_1^2}{2}\right) = \frac{2ne}{\lambda_0} \left(1 - \frac{r_1^2}{2f'^2}\right)$$

On en déduit le rayon  $r_1$  du premier anneau brillant :

$$r_1 = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{\lambda_0}{2ne} p_0\right)}$$

Le deuxième anneau correspond à un ordre d'interférence égale à  $p_0 - 1$ ... etc d'où :

$$r_m = f' \sqrt{2 \left(1 - \frac{\lambda_0}{2ne} (p_0 - m + 1)\right)} \quad (7)$$

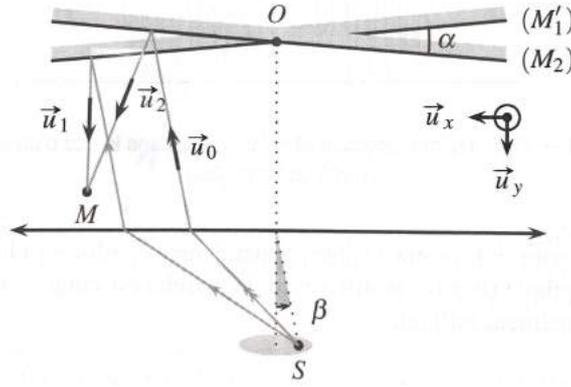
Lorsqu'on diminue l'épaisseur  $e$  de la lame d'air, un anneau donnée rétrécit et finit par disparaître au centre de la figure d'interférence.

**Rq :** On définit le contact optique quand  $e = 0$ . L'écran est uniformément éclairé : c'est la teinte plate.

### c) Coin d'air

On dit que l'interféromètre est configuré en coin d'air lorsque deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$  ne sont pas perpendiculaires.

Pour l'interféromètre de Michelson réglé en coin d'air, et éclairé par une source spatialement étendue, les franges d'interférences sont localisées au voisinage des miroirs.



On se place dans la situation rencontrée en pratique où l'interféromètre est éclairé par une source étendue. Pour faciliter l'analyse du dispositif, on considère que cette source est placée au foyer principal objet d'une lentille convergente. Cette situation est représentée sur la figure, où l'on considère l'interféromètre "replié". La figure montre que les deux miroirs  $M_2$  et  $M'_1$  emprisonnent un coin d'air, ce qui justifie son nom. En un point  $M$  on observe la superposition des deux ondes planes, qui se propagent suivant la direction  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ . On choisit le point  $O$  comme origine et on admet qu'on peut raisonner dans le plan de la figure  $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$ . Le point source  $S$  est repéré par l'angle  $\beta = 0$ , entre deux valeurs extrêmes  $\pm\beta_M$  qui définissent la largeur de la source étendue.

Dans la base  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ , on a  $\vec{u}_0 = \sin(\beta)\vec{u}_x - \cos(\beta)\vec{u}_y$ . Si les deux miroirs étaient confondus on aurait  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  confondus ( $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \sin(\beta)\vec{u}_x + \cos(\beta)\vec{u}_y$ ).

Lorsqu'on introduit un angle  $\alpha$  entre les deux miroirs, le miroir  $(M'_1)$  tourne d'un angle  $\alpha/2$ . Il en résulte que le rayon réfléchi par ce miroir tourne d'un angle double, c'est à dire de  $\alpha$ . Le vecteur  $\vec{u}_1$  forme alors un angle  $\beta - \alpha$  avec  $\vec{u}_y$  et s'écrit :  $\vec{u}_1 = \sin(\beta - \alpha)\vec{u}_x + \cos(\beta - \alpha)\vec{u}_y$ . De la même façon  $M_2$  tourne d'un angle  $-\alpha/2$  et on a  $\vec{u}_2 = \sin(\beta + \alpha)\vec{u}_x + \cos(\beta + \alpha)\vec{u}_y$ . On peut en déduire l'expression des vibrations lumineuses des deux ondes planes qui interfèrent en  $M$  :

$$s_1(M) = s_0 \exp\left(i(\omega t - \frac{2n\pi}{\lambda_0} \vec{u}_1 \cdot \vec{OM})\right) \text{ et } s_2(M) = s_0 \exp\left(i(\omega t - \frac{2n\pi}{\lambda_0} \vec{u}_2 \cdot \vec{OM})\right)$$

La différence des retards de phase des deux ondes au point  $M$  s'écrit :

$$\Delta\phi(M) = \frac{2\pi n}{\lambda_0} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{OM}$$

Ainsi l'ordre d'interférence s'écrit en  $M$  :

$$p(M) = \frac{\Delta\phi(M)}{2\pi} = \frac{n}{\lambda_0} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{OM} = \frac{2n \sin(\alpha)}{\lambda_0} (x \cos(\beta) - y \sin(\beta)) = \frac{2ne(M)}{\lambda_0} \quad (8)$$

L'ordre d'interférence en  $M$  dépende de la position de la source  $S$ .

La différence de marche est :

$$\delta(M) = 2ne(M) \quad (9)$$

**Rq** : Plus de détail et explications p813-814 tout en un PC-PC\*.

Pour ce type de dispositif les interférences sont localisées sur une surface voisine des deux miroirs.

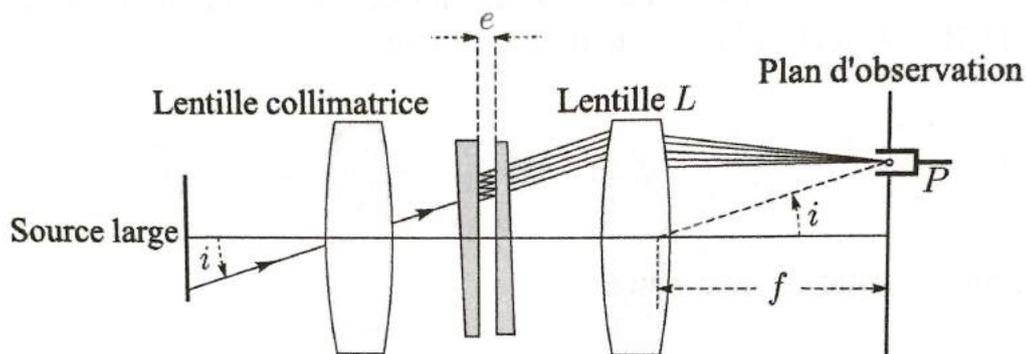
L'éclairement est dans ce cas la :

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi n \alpha x}{\lambda_0} \right) \right) \quad (10)$$

L'éclairement ne dépend que de  $x$  : on obtient des franges d'égale épaisseur rectilignes. L'interfrange est :

$$i = \frac{\lambda_0}{2n\alpha} \quad (11)$$

### 3. L'interféromètre de Fabry-Pérot



L'interféromètre de Fabry-Pérot, construit par les physiciens français Fabry et Pérot est très largement utilisé comme spectromètre à haute résolution, ainsi que comme cavité optique dans les lasers.

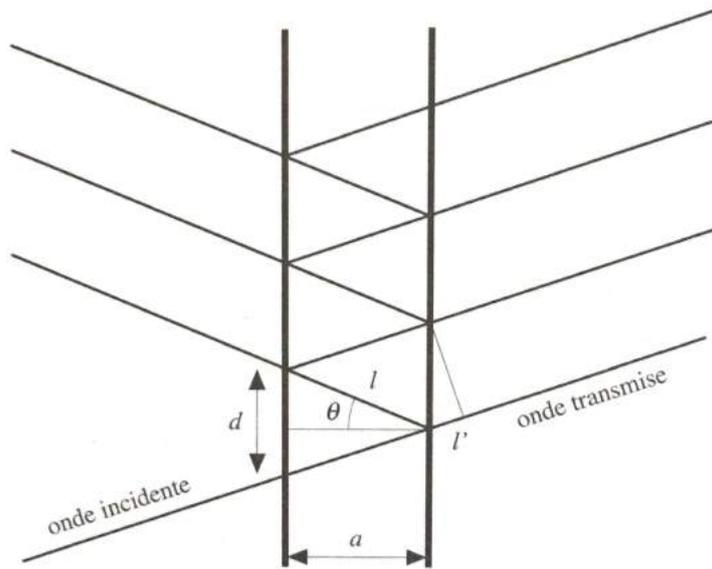
Cet appareil est constitué de deux miroirs semi-réfléchissants plans et parallèles à hauts coefficients de réflexion. La lumière entrante effectue de multiples aller-retour à l'intérieur de cette cavité optique et ressort partiellement à chaque réflexion. Les rayons sortants interfèrent entre eux et produisent des anneaux d'interférence localisés à l'infini.

L'interféromètre est constitué d'une paire de lames semi-réfléchissantes. Les lames sont en généralement en coin, pour éviter des franges d'interférence due aux faces arrières ; les dites faces arrières ont en général un traitement antireflet. Le système peut comporter en sortie une lentille de focalisation.

Le système est éclairé par un faisceau collimaté.

Pour simplifier l'étude, on suppose que l'interféromètre est éclairé par une source de lumière monochromatique. On peut représenter, comme sur la figure, un rayon en particulier, et calculer sa contribution à la lumière sortante.

**Rq :** Du fait de la multitude de réflexion il règne dans la cavité un champ électrique très important !



Chaque faisceau sortant de la cavité présente un déphasage  $\phi$  les uns par rapport aux autres, dépendant de l'angle  $\theta$ , l'angle entre la normale sortante à la lame et le faisceau pénétrant dans la lame.

Ces rayons interfèrent entre eux et on peut alors montrer que, selon la valeur de  $\theta$ , le rayon est transmis ou pas.

On s'aperçoit en fait que seules quelques valeurs de  $\theta$  permettent de transmettre la lumière du rayon incident. Chacune de ces valeurs peut être directement visualisée : elles correspondent à une série d'anneaux concentriques observés sur la figure d'interférence. En effet, en place une lentille convergente à la sortie de l'interféromètre, tous les rayons faisant le même angle  $\theta$  par rapport à l'axe central de la lentille formeront un anneau.

Le déphasage entre deux rayons successifs est donnée par :  $\phi = \phi(\theta) = 2kna \cos(\theta)$  où  $n$  est l'indice de réfraction de la couche,  $a$  son épaisseur,  $\theta$  l'angle de réfraction et  $k = 2\pi/\lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde. La phase du  $m$ -ième rayon est alors :  $\phi_m = \phi_{m-1} + \phi = \phi_0 + m\phi$ .

On arrive à calculer la différence de marche entre deux ondes successives. :

$$\delta = 2na \cos(\theta) \quad (12)$$

Or comme  $\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$  on a sachant que  $i = \theta$  :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2na \cos(\theta) \quad (13)$$

Soit  $\underline{\psi}_0$  l'amplitude complexe d'une onde plane incidente. Alors les amplitudes complexes des ondes transmises successivement ont pour expressions respectives :

$$\underline{\psi}_1 = \underline{\psi}_0 T \quad \underline{\psi}_2 = \underline{\psi}_0 TR \exp(i\phi) \quad \underline{\psi}_3 = \underline{\psi}_0 TR^2 \exp(i2\phi) \quad \underline{\psi}_4 = \underline{\psi}_0 TR^3 \exp(i3\phi) \dots$$

L'amplitude complexe de l'onde transmise au point  $P$  du plan focal de  $L$  est la somme des amplitudes complexes des ondes transmises :

$$\underline{\psi}_t(P) = \sum_i \underline{\psi}_i = \underline{\psi}_0 T [1 + R \exp(i\phi) + R^2 \exp(i2\phi) + R^3 \exp(i3\phi) + \dots R^m \exp(im\phi) + \dots]$$

Comme la raison de cette progression géométrique est  $R \exp(i\phi)$  et que  $R < 1$ , on trouve, après sommation :

$$\underline{\psi}_t(P) = \underline{\psi}_0 T \frac{1}{1 - R \exp(i\phi)} \quad (14)$$

L'intensité de l'onde résulte directement de ce qui précède :

$$I_t(P) = |\underline{\psi}_t(P)|^2 = |\underline{\psi}_0|^2 T^2 \frac{1}{|1 - R \exp(i\phi)|^2} \quad (15)$$

En introduisant l'intensité de l'onde incidente  $I_0 = |\underline{\psi}_0|^2$  et en développant, cette expression devient :

$$I_t(P) = I_0 \frac{T^2}{(1 - R \cos(\phi))^2 + R^2 \sin^2(\phi)} = I_0 \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos(\phi)} \quad (16)$$

Soit encore :

$$I_t(P) = I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + M \sin^2(\phi/2)} \quad (17)$$

avec  $M = 4R/(1 - R)^2$ .

La fonction est max si  $\phi = 2\pi p$  et vaut  $I_{max} = I_0 (T/(1 - R))^2$ .

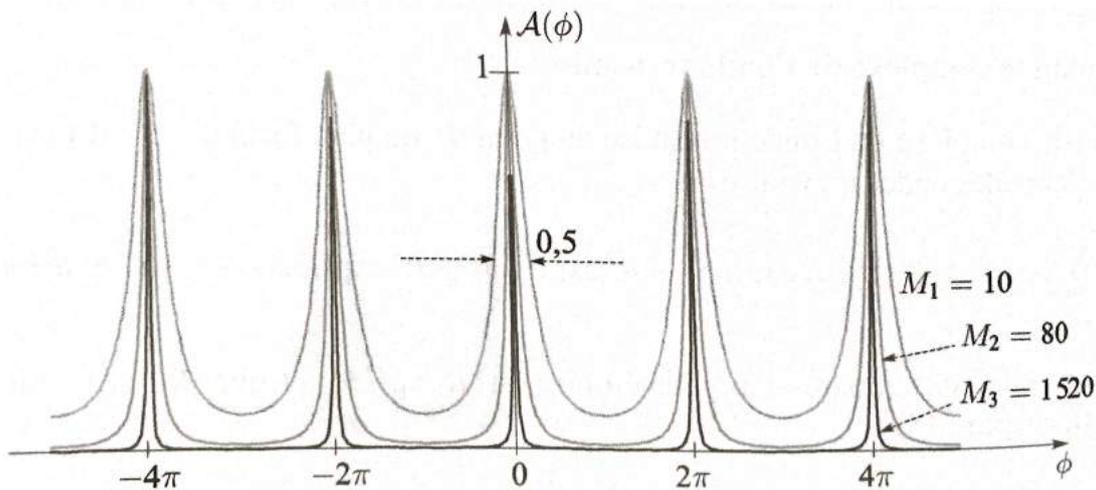
Soit :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2a = \frac{4\pi\nu a}{c} \quad (18)$$

On en déduit les mode propres pour  $\nu = pc/2a$  et l'intervalle spectrale  $\Delta\nu = c/2a$  (distance en fréquence séparant deux pics de la fonction d'Airy) . Seul ces fréquences émergent de la cavité, les autres sont atténuées.

Fonction d'Airy :

$$A(\phi) = \frac{I_t(P)}{I_{max}} = \frac{1}{1 + M \sin^2(\phi/2)} \quad (19)$$



On peut également déterminer la largeur totale des pics à mi-hauteur  $\Delta\phi_{1/2}$ , en supposant  $\phi \ll 1$  :

$$\text{Pour } A = 0.5 \text{ on a } \Delta\phi_{1/2} = \frac{4}{M^{1/2}} = \frac{2(1 - R)}{R^{1/2}}$$

Ce dispositif est utilisé en spectrométrie : en raison de la finesse des anneaux on peut analyser avec précision la distribution spectrale des sources lumineuses.

## Dispersion

On appelle dispersion la quantité :

$$\mathcal{D}_\phi = \frac{d\phi}{d\lambda} = -2\pi \frac{2e \cos(\theta)}{\lambda^2} \quad (20)$$

## Pouvoir de résolution

On sait que le pouvoir de résolution d'un spectromètre est :  $PR = \lambda/\Delta\lambda$ , avec  $\Delta\lambda$  le plus petit écart en longueur d'onde détectable. Si  $\Delta\phi_{1/2}$  désigne la variation de phase minimal que l'instrument peut détecter,  $\Delta\lambda$  est reliée à  $\mathcal{D}_\phi$  par :

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\phi_{1/2}}{|\mathcal{D}_\phi|}$$

Lorsque  $\Delta\phi_{1/2}$  est définie par la largeur à mi-hauteur des pics de la figure d'interférence, elle dépend du facteur  $M$  selon :

$$\Delta\phi_{1/2} = \frac{4}{M^{1/2}} \text{ d'où } \Delta\lambda = \frac{4/M^{1/2}}{2\pi 2a \cos(\theta)/\lambda^2} \text{ et } PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\pi M^{1/2} a \cos(\theta)}{\lambda}$$

On met généralement  $PR$  sous la forme :

$$PR = p\mathcal{F} \text{ où } p = \frac{2a \cos(\theta)}{\lambda} \text{ et } \mathcal{F} = \frac{\pi M^{1/2}}{1-R} = \frac{\pi R^{1/2}}{1-R}$$

qui sont respectivement l'ordre d'interférence et la finesse. Ainsi on remarque que plus le facteur de réflexion augmente la finesse et le pouvoir de résolution augmente aussi.

**Rq** : Plus de détails page 375 du Perez ou p114 du Taillet.

## Conclusion

On a pu voir dans cette leçon l'intérêt d'utiliser les interféromètres à division d'amplitude : on s'affranchit du problème de cohérence spatiale et on peut faire des mesures beaucoup plus précises (de l'ordre du  $\mu m$  certaine fois). Ce type d'appareil est, comme on l'a vu dans l'introduction du Michelson, à une échelle plus importante, utilisé dans la physique fondamentale mais également dans les dispositifs de contrôle dans l'industrie (contrôle optique de haute précision).

# MANIP : Détermination du doublet du sodium ou mercure

## CHAPITRE 9 – L'INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON

### 2.3 Applications

#### a) Mesure de l'écart du doublet du sodium

On a vu au chapitre précédent que les systèmes d'interférences correspondant aux deux longueurs d'onde d'un doublet se brouillent lorsque la différence de marche  $\delta$  est de la forme :

$$\delta = \frac{m + \frac{1}{2}}{\Delta\sigma},$$

où  $m$  est un entier (voir page 242) et  $\Delta\sigma$  la différence des nombres d'onde. Pour les différences de marche proches de ces valeurs, les franges sombres de chaque longueur d'onde coïncident localement aux franges brillantes de l'autre.

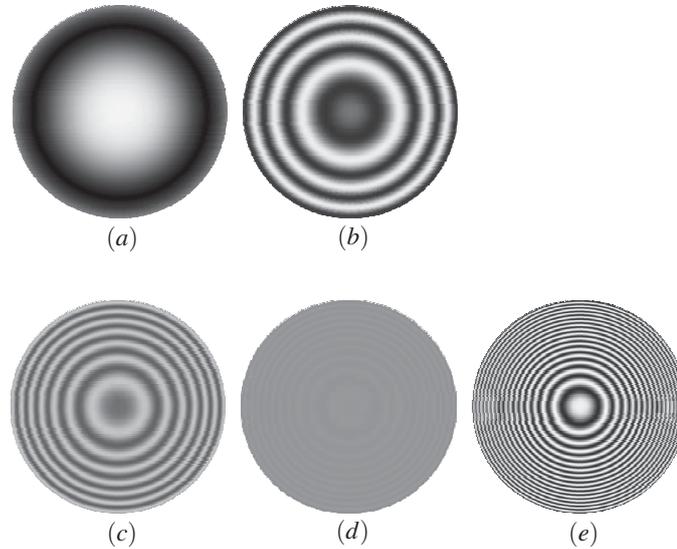
La lumière d'une lampe au sodium comporte deux raies jaunes très proches. Le phénomène de brouillage est inobservable avec un dispositif de trous de Young parce qu'on accède pas à des différences de marche suffisamment grandes, mais il est observé facilement avec l'interféromètre de Michelson ce qui permet de mesurer le très faible écart entre les longueurs d'onde du doublet.

#### Expérience

On règle un interféromètre de Michelson dans la configuration de la lame d'air puis on remplace la source par une lampe au sodium. Si les anneaux n'apparaissent pas, c'est peut être parce qu'on est précisément dans une zone de brouillage. On déplace le miroir mobile en « chariotant » pour voir des anneaux de plus en plus grands et se rapprocher du contact optique. On constate que le contraste des anneaux évolue et que les anneaux sont parfois brouillés.

Les simulations montrées sur la figure 9.10 donnent l'aspect de l'écran pour des épaisseurs croissantes de la lame d'air : (a) : on est proche du contact optique, on voit un anneau sombre de grande taille et bien contrasté ; (b) et (c) : l'épaisseur de la lame d'air est un peu plus grande, il y a de plus en plus d'anneaux et le contraste diminue ; (d) : les anneaux ne sont plus visibles, il y a brouillage ; (e) : pour une épaisseur plus grande les anneaux réapparaissent et il y en a de plus en plus.

On se place au contact optique (l'écran est uniformément éclairé et si charioté légèrement un anneau sombre de grand diamètre doit apparaître) et on note la position  $x_{C.O.}$  du chariot. Partant de cette position on chariotte dans le sens où  $x$  augmente et on note les positions  $x_m$  du chariot pour lesquelles il y a brouillage des anneaux :  $x_{C.O.} < x_1 < x_2 \dots$  ; on revient au contact optique et on recommence dans l'autre sens pour trouver des positions pour lesquelles il y a brouillage :  $x_{C.O.} > x_{-1} > x_{-2} \dots$ . Toutes ces positions sont lues sur la vis micrométrique avec une précision typique  $\Delta x = 5 \mu\text{m}$ . Il faut tourner la vis très lentement car le déplacement des anneaux est rapide.



**Figure 9.10** – Simulations numériques de l'aspect de l'écran d'observation pour différentes valeurs de l'épaisseur de la lame d'air avec une lampe au sodium : (a) :  $e = 10 \mu\text{m}$  ; (b) :  $e = 50 \mu\text{m}$  ; (c) :  $e = 100 \mu\text{m}$  ; (d) :  $e = 150 \mu\text{m}$  ; (e) :  $e = 200 \mu\text{m}$ .

L'épaisseur de la lame d'air pour la position  $x$  est  $e = |x - x_{C.O.}|$  et la différence de marche au centre de la figure est  $\delta = 2e = 2|x - x_{C.O.}|$ . On a donc, pour  $k = 1, 2, \dots$

$$2(x_k - x_{C.O.}) = 2(x_{C.O.} - x_{-k}) = \frac{k - \frac{1}{2}}{\Delta\sigma} \quad \text{d'où} \quad \Delta\sigma = \frac{k - \frac{1}{2}}{x_k - x_{-k}}.$$

Par ailleurs, notant  $\lambda_m$  la longueur d'onde moyenne du doublet et  $\Delta\lambda$  l'écart du doublet :  $\Delta\sigma = \frac{1}{\lambda_m - \Delta\lambda/2} - \frac{1}{\lambda_m + \Delta\lambda/2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2 - \Delta\lambda^2/4} \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2}$ . On obtient donc l'écart du doublet par :

$$\Delta\lambda = \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_m^2}{x_k - x_{-k}}.$$

Dans une expérience on a mesuré :  $x_{C.O.} = 4,450 \text{ mm}$ ,  $x_2 = 4,890 \text{ mm}$  et  $x_{-2} = 4,015 \text{ mm}$ . On sait que  $\lambda_m = 0,5893 \mu\text{m}$ . On en déduit :

$$\Delta\lambda = 5,95 \cdot 10^{-3} \mu\text{m} \pm 7 \cdot 10^{-2} \mu\text{m},$$

en tenant compte de l'incertitude sur la position du chariot.

**b) Mesure des longueurs d'ondes du doublet du mercure**

Dans l'expérience précédente, on n'a obtenu que l'écart entre les deux longueurs d'onde du doublet. Pour mesurer la longueur d'onde moyenne  $\lambda_m$  on peut décider de compter les anneaux qui entrent (ou sortent) au centre de la figure pendant un déplacement du chariot. En effet, lorsque le chariot se déplace de  $\Delta x$ , la différence de marche au centre,  $\delta(i=0) = 2e = 2|x - x_{C.O.}|$ , varie de  $2\Delta x$ . Comme le centre est un anneau brillant de rayon nul entrant (ou sortant) chaque fois que  $\delta(i=0)$  est un multiple de  $\lambda_m$ , le nombre d'anneaux entrant (ou sortant) est  $N = \frac{2\Delta x}{\lambda_m}$  d'où  $\lambda_m = \frac{2\Delta x}{N}$ . Mais il y a une difficulté : l'incertitude sur  $x$  étant  $5 \mu\text{m} \sim 10\lambda_m$ , il faut compter un nombre d'anneaux très grand pour avoir une précision acceptable sur  $\lambda_m$ . On résout ce problème en utilisant un moteur pour déplacer le chariot à vitesse constante et un capteur relié à une carte d'acquisition d'ordinateur.

On illustre ci-dessous la méthode dans le cas du doublet jaune du mercure (dont l'écart est plus grand que celui du sodium).

**Expérience**

On règle un interféromètre de Michelson dans la configuration de la lame d'air et on repère la position  $x_{C.O.}$  du chariot correspondant au contact optique. On place comme source une lampe au mercure munie d'un filtre interférentiel isolant le doublet jaune. Au centre des anneaux on place un récepteur de lumière relié à une carte d'acquisition d'ordinateur. On utilise le moteur pour déplacer le miroir ( $M_1$ ) en translation à la vitesse  $V$ , d'une position  $x_i < x_{-1}$  à une position  $x_f > x_1$  où  $x_{-1}$  et  $x_1$  sont les deux positions les plus proches du contact optique donnant un brouillage.

L'enregistrement du signal du capteur en fonction du temps a l'allure montrée sur la figure 9.11 : le signal a des oscillations très rapides dont l'amplitude est variable. À chaque maximum, un anneau apparaît (ou disparaît) au centre de la figure. On repère aisément le passage par les points de brouillage pour lesquels l'amplitude d'oscillation s'annule ; on peut ainsi mesurer la durée  $T_1$  entre les passages par les positions  $x_{-1}$  et  $x_1$ . On mesure aussi en dilatant l'échelle de temps la courbe la durée  $T_2$  correspondant à 20 oscillations.

D'après les calculs précédents on a :

$$T_1 = \frac{x_1 - x_{-1}}{V} = \frac{1}{2\Delta\sigma V} \simeq \frac{\lambda_m^2}{2\Delta\lambda V}$$

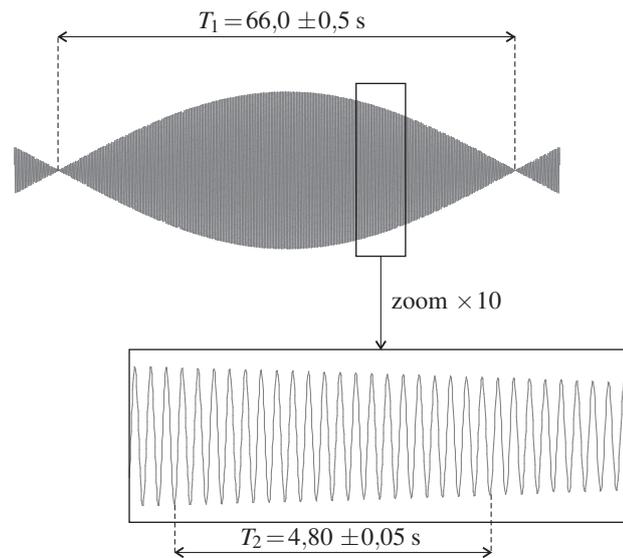
Par ailleurs, l'intensité est maximale chaque fois que la différence de marche  $\delta(i=0)$  est un multiple de  $\lambda_m$  ; étant donné que  $\delta(i=0) = 2e = 2|x - x_{C.O.}|$ , le chariot se déplace de  $\lambda_m/2$  entre deux maxima. Ainsi :

$$T_2 = 20 \times \frac{\lambda_m}{2V}$$

Sans connaître la vitesse  $V$  on peut calculer :  $\frac{\lambda_m}{\Delta\lambda} = \frac{20T_1}{T_2} = 275 \pm 5$ , résultat à com-

parer à la valeur tabulée qui est 274.

C'est le nombre d'oscillations du signal entre les deux brouillages puisqu'une oscillation dure  $\frac{T_2}{20}$  et le passage d'un point de brouillage à l'autre  $T_1$ . On vérifie d'ailleurs facilement que :  $\frac{x_1 - x_{-1}}{\lambda_m/2} = \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda}$ . Ce nombre peut être déterminé par un simple comptage (manuel ou informatisé) des oscillations.



**Figure 9.11** – Enregistrement du signal fourni par le détecteur au cours du temps.

Pour accéder à  $\lambda_m$  et  $\Delta\lambda$  il faut connaître la vitesse  $V$ . Pour cela on remplace la lampe au mercure par un laser hélium-néon de longueur d'onde connue  $\lambda_0 = 0,6238 \mu\text{m}$ . On enregistre le signal qui est alors quasiment sinusoïdal et on mesure la durée de 20 oscillations :  $T'_2 = 5,25 \pm 0,05 \text{ s}$ . On en déduit :  $V = \frac{20(\lambda_0/2)}{T'_2} = 1,2 \pm 0,01 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On remarquera l'ordre de grandeur très inhabituel de cette vitesse (le déplacement est provoqué par la rotation très lente d'une vis micrométrique).

Finalement on trouve :  $\lambda_m = \frac{VT_2}{10} = 0,576 \pm 0,011 \mu\text{m}$  (valeur vraie :  $0,5780 \mu\text{m}$ ) et  $\Delta\lambda = (2,09 \pm 0,08) \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$  (valeur vraie  $2,1 \cdot 10^{-3} \mu\text{m}$ ).

Il faut noter qu'on a supposé la vitesse  $V$  constante ce qui n'est pas forcément vrai.

## BONUS au cas où

CONFIGURATION DU COIN D'AIR ÉCLAIRÉ PAR UNE SOURCE ÉTENDUE

L'intensité vibratoire est alors :

$$I(M) = \frac{I_0}{2} \left( 1 + \cos \left( \frac{4\pi n \alpha x}{\lambda_0} \right) \right).$$

L'intensité vibratoire ne dépend que de  $x$  : on obtient donc des franges d'épaisseur rectilignes parallèles à l'intersection des deux miroirs. L'interfrange  $i$  correspond à la période spatiale de l'intensité vibratoire :

$$i = \frac{\lambda_0}{2n\alpha}.$$

### Remarque

La lentille ( $\mathcal{L}$ ) introduit un grandissement  $\gamma$ . L'interfrange observable sur l'écran est donc  $\gamma \frac{\lambda_0}{2n\alpha}$ .

Avec  $\alpha \simeq 10^{-3}$  rad,  $\lambda \simeq 0,5 \mu\text{m}$  et  $\gamma \simeq 10$  cet interfrange est d'environ 2,5 mm.

### 3.3 Application : détection des défauts d'une lame de verre

#### Expérience

On règle un interféromètre de Michelson pour observer les franges d'épaisseur du coin d'air en lumière de la lampe au sodium, considérée comme monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 0,590 \mu\text{m}$ . On introduit devant le miroir ( $M_1$ ) une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur  $e'$  et d'indice  $n'$  que l'on place parallèlement au miroir. On peut ainsi détecter les défauts de la lame qui n'a pas forcément un indice  $n'$  parfaitement homogène ou une épaisseur  $e'$  parfaitement égale en tout point. La figure 9.15 montre une simulation de la déformation des franges due à une « bosse » sur une lame d'indice  $n' = 1,5$  parfaitement homogène.

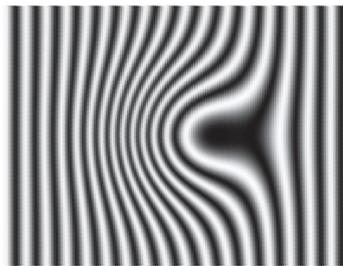


Figure 9.15 – Frange du coin d'air déformées par un défaut d'une lame de verre.

Le sommet de la bosse est au centre de la figure, sur la frange la plus déformée qui se décale vers la gauche (perpendiculairement aux franges) d'environ 4 interfranges. C'est le signe que la lumière qui traverse la lame à cet endroit a un supplément de marche optique égal à environ  $4\lambda_0$  dû à la bosse. Or ce supplément de marche optique est  $2(n' - 1)\Delta e'$  où  $\Delta e'$  est la hauteur de la bosse (le facteur 2 tient compte de l'aller et retour de la lumière à travers la lame). On en déduit que :  $\Delta e' \simeq \frac{4\lambda_0}{2(n' - 1)} \simeq 2,4 \mu\text{m}$ .

Cette méthode est utilisée pour contrôler des éléments d'optique haute précision. On peut déceler facilement un déplacement d'un dixième d'interfrange donc déceler une bosse de hauteur de l'ordre de  $\frac{\lambda_0}{10}$ . Pour le contrôle des lentilles on remplace le miroir ( $M_1$ ) par un miroir sphérique.

### SYNTHÈSE

#### SAVOIRS

- configuration de la lame d'air
- configuration du coin d'air
- franges localisées à l'infini pour un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et éclairé par une source spatialement étendue
- franges localisées au voisinage des miroirs pour un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air et éclairé par une source spatialement étendue
- définition des franges d'égale inclinaison
- définition des franges d'égale épaisseur
- expression de l'ordre d'interférences pour la lame d'air
- expression de la différence de marche pour le coin d'air

#### SAVOIR-FAIRE

- décrire, mettre en œuvre et justifier les conditions d'éclairage d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et en coin d'air
- établir et utiliser l'expression de l'ordre d'interférences dans le cas de la lame d'air
- interpréter la différence de marche dans le cas du coin d'air
- utiliser l'expression de la différence de marche pour retrouver l'ordre d'interférences dans le cas du coin d'air
- retrouver l'expression de l'interfrange pour le coin d'air formé par deux miroirs plans

#### MOTS-CLÉS

- lame d'air
- coin d'air
- division d'amplitude
- localisation des franges
- franges d'égale inclinaison
- franges d'égale épaisseur

# L.P. 35 - Diffraction de Fraunhofer

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Optique ondulatoire
- Notion de cohérence
- Interférences
- Optique expérimentale
- Transformée de Fourier

## Bibliographie

- Optique , Perez, *Dunod*
- Optique expérimentale, Sextant, *Hermann*
- Physique PC-PC\*, Renvoizé, *Pearson*
- Optique physique , Taillet, *De Boeck*
- Optique ondulatoire , Brébec, *Hachette*

**Leçon sympathique donc essayer tout le long de la leçon de montrer avec les manip les notions abordées.**

## Introduction

Le premier à observer attentivement le phénomène de diffraction de la lumière est le physicien italien Francesco Maria Grimaldi ; c'est lui qui proposa le mot "diffraction", du latin *diffringere* qui signifie "briser en morceaux".

Le physicien Huygens, en postulant que le front d'onde de l'onde lumineuse est l'enveloppe d'une infinité d'ondelettes sphérique émanant de chaque point du front d'onde à l'instant précédent, sera le premier à ébaucher une modélisation du phénomène. Par la suite, physicien Thomas Young reprit cette idée pour interpréter son expérience des trous de Young. il fallut cependant attendre les travaux du physicien Fresnel pour obtenir un énoncé cohérent du principe qui est maintenant souvent associé aux noms de Huygens et Fresnel. Plus tard, Kirchhoff montra comment ce principe pouvait être déduit des équations de Maxwell.

Longtemps considéré comme un principe qui donnait le bon résultat pour de mauvaises raisons, le principe de Huygens-Fresnel est néanmoins cohérent avec la théorie quantique de propagation de la lumière, développé notamment par le physicien Feynman.

Ainsi dans cette leçon nous allons essayer de comprendre de le phénomène de diffraction : on va essayer de le caractériser avec des équations et à l'aide de principe physique. On verra comment développer ces notions sur un cas simple et classique et enfin on verra les conséquences de la diffraction.

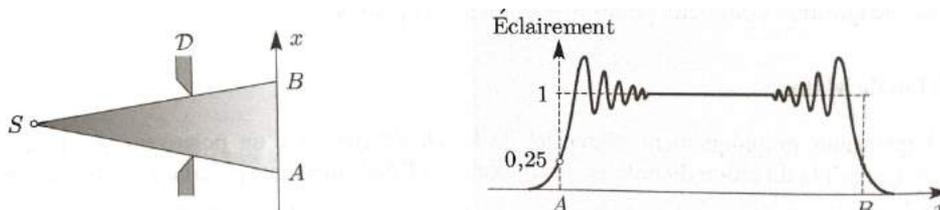
## 1. La diffraction

**Manip : faire la manip simple pour avoir la diffraction !**

## a) Le phénomène de diffraction

Les phénomènes de diffraction n'ont été étudiés que bien après les premiers travaux d'optique géométrique. C'est tout naturellement par opposition à l'optique géométrique que le mot "diffraction" trouve sa définition : **On parle de diffraction lorsque les lois de l'optique géométrique ne sont pas respectées.**

Contrairement aux prévisions de l'optique géométrique, les variations d'éclairement au voisinage de l'ombre d'un diaphragme ne sont pas brutales, mais présentent des oscillations.



On peut définir la diffraction comme le phénomène d'éparpillement de la lumière que l'on observe lorsqu'une onde lumineuse est matériellement limitée. On met facilement en évidence cet éparpillement en éclairant une fente suffisamment fine avec le faisceau lumineux cylindrique issu d'un laser. Sur un écran, on constate un étalement de la lumière dans une direction perpendiculaire à celle de la fente. La diffraction joue un rôle essentiel dans la formation des images, puisque tout système optique limite irrémédiablement l'étendue d'une onde incidente.

## b) Le principe de Huygens-Fresnel

L'interprétation quantitative de la diffraction s'appuie sur une théorie exclusivement ondulatoire dont les précurseurs sont C. Huygens et A. Fresnel. Leurs contributions, qui datent respectivement de 1678 et 1818, sont rassemblées sous le nom de principe d'Huygens-Fresnel.

Son énoncé comporte deux parties :

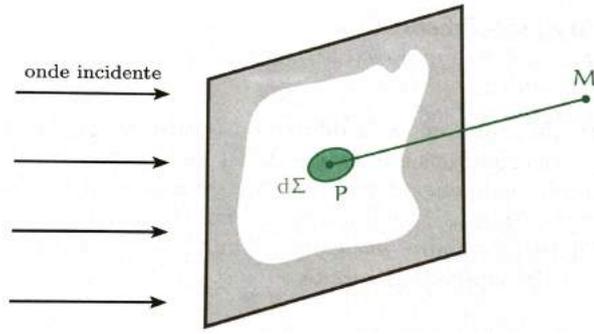
- Contribution d'Huygens : La lumière se propage de proche en proche. Chaque élément de surface atteint par elle se comporte comme une source secondaire qui émet des ondelettes sphériques dont l'amplitude est proportionnelle à cet élément ;
- Contribution de Fresnel : L'amplitude complexe de la vibration lumineuse en un point est la somme des amplitudes complexes des vibrations produites par toutes les sources secondaires. On dit que toutes ces vibrations interfèrent pour former la vibration au point considéré.

Notons que l'addition des amplitudes complexes découle naturellement de la linéarité des équations de Maxwell auxquelles satisfait le champ électromagnétique.

La difficulté d'une étude de la diffraction, à partir de la théorie électromagnétique de la lumière, est telle que la théorie scalaire, dont ce principe est le fondement, apparaît aujourd'hui comme la théorie la plus puissante et la plus adaptée à la presque totalité des problèmes rencontrés en optique ondulatoire.

Ce principe n'est valable que si les dimensions de la pupille diffractante sont grandes devant la longueur d'onde.

Pour être parfaitement rigoureux, Kirchhoff a montré que le retard de la phase de l'ondelette secondaire est en réalité celui de l'onde primaire incidente à  $\pi/2$  près.



Soit l'ondelette émise par  $P$  à la structure d'une onde sphérique. L'amplitude de l'onde arrivant en  $M$  est alors proportionnelle à l'inverse de la distance entre  $P$  et  $M$ , donc en  $1/PM$ . Notons  $\underline{s}_i(P, t) = \underline{s}_i(P) \exp(j\omega t)$  l'amplitude complexe instantanée de l'onde incidente au point  $P$ ; l'amplitude de l'ondelette secondaire en  $M$  est alors donnée par :

$$d\underline{s}_p(M, t) = \frac{C}{PM} \underline{s}_i(P) \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (PM) \right) \right] d\Sigma \quad (1)$$

où  $C$  est un facteur de proportionnalité et  $d\Sigma$  est la surface occupée par la source secondaire en  $P$ . Le terme  $2\pi(PM)/\lambda_0$  représente le déphasage lié à la propagation entre  $P$  et  $M$ . Puisque l'onde au point  $M$  présente un retard de phase par rapport à l'onde au point  $P$ , ce terme est précédé d'un signe moins dans l'équation car nous adoptons une variation temporelle en  $\exp(i\omega t)$ .

À très grande distance par rapport à une longueur caractéristique du diaphragme, les variations de la distance  $PM$  vont devenir négligeables et on peut alors assimiler  $PM$  à  $OM$  où  $O$  est un point de la pupille<sup>7</sup>. En posant  $K = C/OM$  (indépendant de  $P$ ), on peut écrire :

$$d\underline{s}_p(M, t) = K \underline{s}_i(P) \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (PM) \right) \right] d\Sigma$$

Si la pupille diffractante n'est pas seulement un trou creusé dans un écran opaque mais a une fonction de transmission (c'est le cas d'une lentille, par exemple la première lentille de l'objectif d'un appareil photo), il faut multiplier par la transparence complexe, ou fonction de transmission,  $\underline{t}(P)$ , avec :

- $\underline{t}(P) = 1$  au niveau d'un trou ;
- $\underline{t}(P) = -1$  pour un miroir métallique parfait ;
- $\underline{t}(P) = t_0 \exp \left[ -i \frac{2\pi}{\lambda} (n-1)e \right]$  (avec  $t_0 \leq 1$ ) pour un verre d'épaisseur  $e$  et une onde ayant une dépendance temporelle en  $\exp(i\omega t)$

La dernière expression ci-dessus suppose cependant que les rayons lumineux restent proches de la normale à la lame de verre. Nous allons enfin supposer que l'amplitude de l'onde incidente est sensiblement uniforme sur la pupille (source primaire loin de la pupille par exemple), en notant  $s_0$  cette amplitude, il reste à déterminer le retard de phase à l'origine des temps de l'onde incidente en  $P$  pour déterminer l'amplitude complexe instantanée. Avec une dépendance temporelle en  $\exp(i\omega t)$ , l'amplitude complexe instantanée de l'onde incidente au point  $P$  est de la forme :

$$\underline{s}_i(P, t) = s_0 \exp \left[ i \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (SP) - \phi_0 \right) \right]$$

7. On peut pas écrire  $(PM) \simeq (OM)$  car cette approximation n'est possible que si  $(PM) - (OM) \ll \lambda$

où  $\phi_0$  est le retard de phase à l'origine des temps de la source primaire  $S$ . Finalement l'amplitude des ondelette secondaire en  $M$  est donnée par :

$$d\underline{s}_p(M, t) = K s_0 \exp[i(\omega t - \phi_0)] \underline{t}(P) \exp \left[ -i \frac{2\pi}{\lambda_0} (SPM) \right] d\Sigma \quad (2)$$

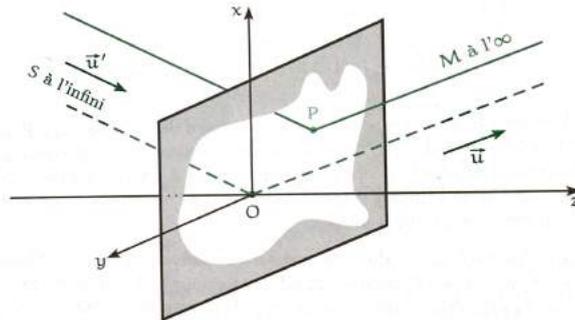
ce que l'on écrira encore :

$$d\underline{s}_p(M, t) = K s_0 \underline{t}(P) \exp [i(\omega t - \phi_p(M))] d\Sigma \quad (3)$$

Si  $\underline{t}(P)$  est un réel positif, le déphasage  $\phi_p(M)$  est le retard de phase en  $M$  à l'origine des temps de l'onde passant par  $P$ . Sans surprise, nous serons donc amenés à calculer des chemins optiques, ou plutôt des différences de chemins optiques par rapport à un chemin de référence. En effet,  $(SPM)$  est souvent infini, d'où l'intérêt de prendre  $(SOM)$  comme référence et par suite d'évaluer  $(SPM) - (SOM)$  qui est une quantité finie.

## 2. Diffraction de Fraunhofer

### a) Expressions générales



Soit une onde monochromatique incidente caractérisée par son vecteur d'onde  $\vec{k}'$ , ou par sa longueur d'onde  $\lambda$  et son vecteur unitaire  $\vec{u}'$ ; cette onde semble provenir d'une source  $S$  située à l'infini. L'observation se fait dans une direction  $\vec{u}$  pointant vers un point  $M$  situé à l'infini.

D'après le principe de Huygens-Fresnel, la pupille sera décomposée en infinité de sources secondaires dont la position est repérée par un point courant  $P$ . Pour les calculs, introduisons un repère  $Oxyz$ , l'origine étant un point de la pupille et l'axe  $z$  normal au plan de la pupille. Le point  $O$  va servir à définir le chemin de référence pour calculer les déphasages en  $M$  entre les différentes ondelettes. En reprenant l'équation (3), il faut déterminer :

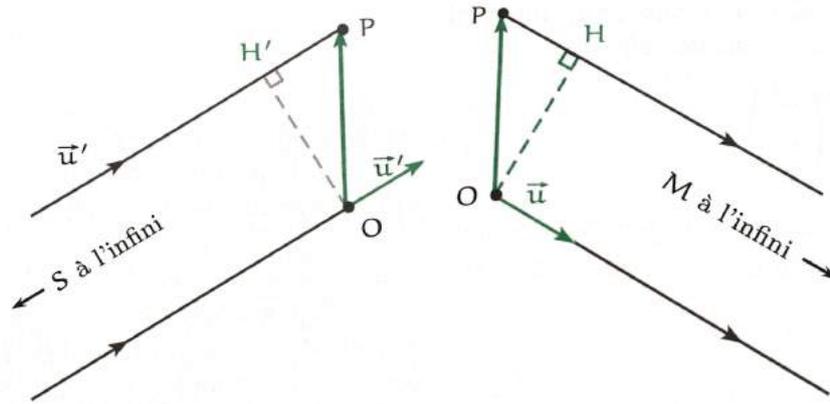
$$d\underline{s}_p(M, t) = K s_0 \exp[i(\omega t - \phi_0(M))] \underline{t}(P) \exp[-i\Delta\phi_p(M)] d\Sigma \quad (4)$$

avec  $\Delta\phi_p(M)$  le retard de phase en  $M$  de l'onde provenant de  $P$  par rapport à l'onde provenant de  $O$  (cette dernière onde est réelle ou fictive). Ainsi :

$$\Delta\phi_p(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} [(SPM) - (SOM)] \quad (5)$$

On posera par la suite  $\underline{s}_0 = s_0 \exp[-i\phi_0(M)]$ .

## Calcul du déphasage



Soit la différence de marche peut s'exprimer par :

$$(SPM) - (SOM) = [(SP) - (SO)] + [(PM) - (OM)]$$

En notant  $H'$  le projeté orthogonal de  $O$ , le théorème de Malus indique que  $(SH') = (SO)$ . Alors  $(SP) - (SO) = (H'P) = n\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u}'$ . De même en sortie de la pupille :  $(PM) - (OM) = (PH) = -n\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u}$ . Ainsi on en déduit :

$$\delta(M) = (SPM) - (SOM) = n\overrightarrow{OP}(\vec{u}' - \vec{u}) \quad (6)$$

On en déduit alors le déphasage immédiatement en notant  $\lambda = \lambda_0/n$  :

$$\Delta\phi_p(M) = \frac{2\pi}{\lambda}\delta(M) = \frac{2\pi}{\lambda} [(\vec{u}' - \vec{u}) \cdot \overrightarrow{OP}] \quad (7)$$

En introduisant les vecteurs d'onde  $\vec{k} = 2\pi/\lambda\vec{u}$  et  $\vec{k}' = 2\pi/\lambda\vec{u}'$ , il vient :

$$\Delta\phi_p(M) = (\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \overrightarrow{OP}$$

Pour ce qui est de l'amplitude diffractée, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} d\underline{s}_p(M, t) &= K_{\underline{s}_0} e^{i\omega t} \underline{t}(P) \exp[-i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \overrightarrow{OP}] d\Sigma \\ \Rightarrow \underline{s}(M, t) &= K_{\underline{s}_0} e^{i\omega t} \int \int_{\Sigma} \underline{t}(P) \exp[i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \overrightarrow{OP}] d\Sigma \end{aligned} \quad (8)$$

Nous allons maintenant utiliser le repère  $Oxyz$  : introduisons les composantes des vecteurs unitaires  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  dans la base orthonormée directe :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$$

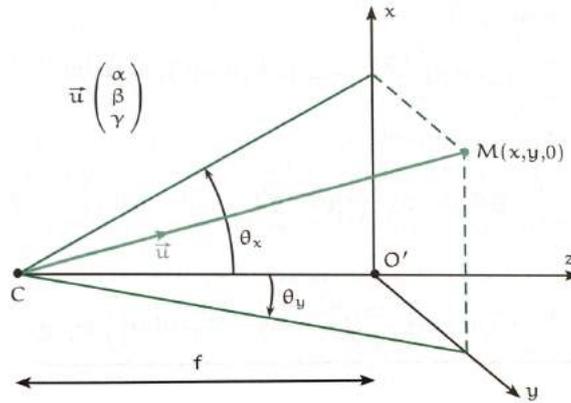
La pupille diffractante est supposée plane, l'axe  $Oz$  étant normal à la pupille. Les coordonnées du point  $P$  dans ce repère seront notées  $(x, y, 0)$  ; l'amplitude complexe instantanée totale est alors :

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}(\alpha, \beta, \gamma) = K_{\underline{s}_0} e^{i\omega t} \int \int_{\Sigma} \underline{t}(x, y) \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} [(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y]\right) dx dy \quad (9)$$

Ainsi pour déterminer l'éclairement en  $M$ , il suffit de calculer le produit  $\underline{s}(M, t)\underline{s}^*(M, t) = |\underline{s}(M, t)|^2$  :

$$\mathcal{E}(M) = K^2 s_0^2 \left| \int \int_{\Sigma} \underline{t}(P) \exp \left[ i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{OP} \right] d\Sigma \right|^2$$

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(\alpha, \beta) = K^2 s_0^2 \left| \int \int_{\Sigma} \underline{t}(x, y) \exp \left[ \frac{2\pi i}{\lambda} ((\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y) \right] dx dy \right|^2 \quad (10)$$



L'observation à l'infini peut se faire à l'œil nu, mais le plus souvent dans le plan focal d'une lentille convergente. Nous allons lier les composantes  $\alpha$  et  $\beta$  à la position sur un écran. Considérons le rayon passant par le centre  $C$  d'une lentille convergente de distance focale  $f$  (l'axe optique étant parallèle à la direction  $z$ ). Ce rayon n'est pas dévié, il est donc toujours suivant la direction d'observation  $\vec{u}$ .

Compte tenu du fait que dans le repère  $O'xyz$  le point  $C$  a pour coordonnées  $(0, 0, -f)$  et le point  $M$  a pour coordonnées  $(x, y, 0)$ , il est facile de déduire le vecteur  $\vec{u}$  tel que :

$$\vec{u} = \frac{\vec{CM}}{\|\vec{CM}\|} \text{ et } \vec{CM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + f\vec{e}_z$$

On trouve alors pour ses composantes :

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}}; \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}}; \gamma = \frac{f}{\sqrt{x^2 + y^2 + f^2}}$$

De même, les angles  $\theta_x$  et  $\theta_y$  sont liés aux coordonnées du point  $M$  :

$$\tan(\theta_x) = \frac{x}{f} \text{ et } \tan(\theta_y) = \frac{y}{f}$$

Si on suppose que ces angles sont faibles, c'est à dire que les rayons sont peu inclinés, la condition mathématique à vérifier est alors  $|x| \ll f$  et  $|y| \ll f$ . Les composantes du vecteur  $\vec{u}$ , les angles  $\theta_x$  et  $\theta_y$  ainsi que les coordonnées du point  $M$  sont alors liés linéairement par :

$$\alpha \simeq \theta_x \simeq \frac{x}{f}; \beta \simeq \theta_y \simeq \frac{y}{f}; \gamma \simeq 1$$

## b) Propriétés

**Manip : Faire les manip qualitative sur ces propriétés en fermant ou déplaçant le diaphragme.**

## Translation de la pupille

Soit la pupille subit une translation de  $x_0$  suivant  $\vec{e}_x$  (similaire pour translation suivant  $y$ ). La transparence complexe de la nouvelle pupille est alors  $\underline{t}'(x, y) = \underline{t}(x - x_0, y)$ . En procédant à un changement de variable  $x' = x - x_0$ , l'amplitude diffractée par la pupille translatée est la même que celle diffractée par la pupille de départ, à un déphasage uniforme près :

$$\underline{s}'(\alpha, \beta, t) = \exp\left[\frac{2\pi i}{\lambda}(\alpha - \alpha')x_0\right] \underline{s}(\alpha, \beta, t) \quad (11)$$

Lors du calcul de l'éclairement, le produit de l'exponentielle complexe par son conjugué va donner 1 et ainsi, l'éclairement est inchangé par translation de la pupille.

## Dilatation de la pupille

Soit une dilatation d'un facteur  $\mu$  suivant la direction  $x$  de la pupille. La nouvelle transparence complexe est alors  $\underline{t}'(x, y) = \underline{t}(x/\mu, y)$ . Dans ce cas l'amplitude diffracté s'écrit :

$$\underline{s}'(\alpha, \beta, t) = \mu \underline{s}(\alpha, \beta, t) \quad (12)$$

L'éclairement s'écrira cette fois-ci :

$$\mathcal{E}'(\alpha, \beta) = \mu^2 \mathcal{E}(\alpha, \beta)$$

## Linéarité - Théorème de Babinet

D'après l'équation (10), il y a linéarité entre l'amplitude complexe instantanée diffractée  $\underline{s}(M, t)$  et la transparence complexe  $\underline{t}(P)$ . Supposons, en effet qu'une pupille de transparence  $t_1$  produise une amplitude  $\underline{s}_1$  et qu'une pupille de transparence  $t_2$  produise une amplitude  $\underline{s}_2$ , alors une pupille de transparence  $\underline{t} = \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2$  produira une amplitude  $\mu_1 \underline{s}_1 + \mu_2 \underline{s}_2$ . Attention ce n'est pas le cas pour l'éclairement !

Deux pupilles de transparence complexe  $t_1$  et  $t_2$  sont complémentaires si :

$$\forall P \in \Sigma, t_1(P) + t_2(P) = 1$$

Il en découle le théorème de Babinet :

**La figure de diffraction produite par deux pupilles complémentaires est la même, sauf dans la direction de l'optique géométrique.**

**Rq :** Démo : Soit deux ouvertures complémentaires de transparence  $\underline{t}$  et  $\underline{t}' = 1 - \underline{t}$ . Alors :

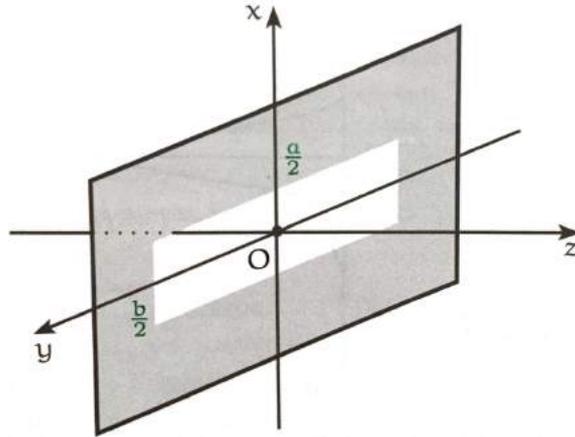
$$\begin{aligned} \underline{s}' &\propto \iint \underline{t}' \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}[(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y]\right) dx dy \\ &\propto \iint (1 - \underline{t}) \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}[(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y]\right) dx dy \\ &\propto \iint \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}[(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y]\right) dx dy - \underline{s} \end{aligned} \quad (13)$$

La figure de diffraction à l'infini se limite à un point lumineux dans la direction de propagation de l'onde plane incidente. Ainsi en dehors de ce point, l'amplitude est nulle et donc  $\underline{s} + \underline{s}' = 0$ . Les éclairements sont donc égaux :  $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}'(M)$ , à l'exception du point dans la direction de l'optique géométrique.

### c) Cas d'une fente rectangulaire

Manip : faire la manip sur le bi-fente et faire les mesures quantitatives.

Nous allons étudier le cas le plus classique : le cas de l'ouverture rectangulaire.



Considérons une pupille diffractante constituée d'une ouverture rectangulaire découpée dans un écran opaque. L'ouverture rectangulaire est centrée en  $O$ , sa largeur est  $a$  suivant  $x$  et  $b$  suivant  $y$  de telle sorte que la transparence complexe est :

$$\underline{t}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in [-a/2; a/2] \times [-b/2; b/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En injectant l'expression de la transparence dans l'expression de l'amplitude diffracté :

$$\underline{s}(\alpha, \beta, t) = K_{\underline{s}_0} e^{i\omega t} \int_{x=-a/2}^{a/2} \int_{y=-b/2}^{b/2} \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} [(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y]\right) dx dy$$

Il s'agit d'intégrer deux fois une exponentielle complexe, la dépendance en  $x$  et en  $y$  seront semblables :

$$\underline{s} = K_{\underline{s}_0} e^{i\omega t} \frac{\lambda}{2\pi i(\alpha - \alpha')} \left[ \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}(\alpha - \alpha')x\right) \right]_{-a/2}^{a/2} \frac{\lambda}{2\pi i(\beta - \beta')} \left[ \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}(\beta - \beta')y\right) \right]_{-b/2}^{b/2}$$

soit encore :

$$\underline{s}(\alpha, \beta, t) = K_{\underline{s}_0} e^{i\omega t} \frac{\lambda}{\pi(\alpha - \alpha')} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha')a\right) \frac{\lambda}{\pi(\beta - \beta')} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}(\beta - \beta')b\right)$$

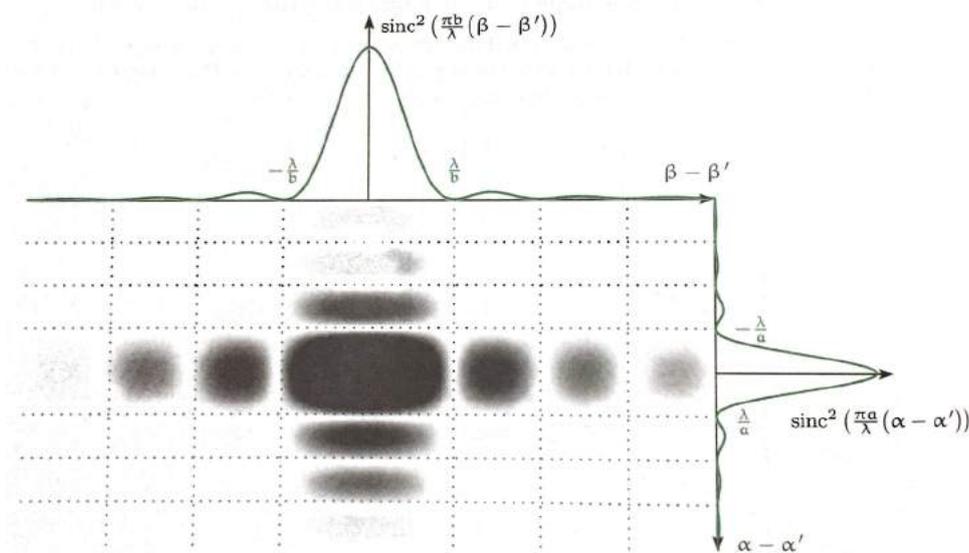
D'où en utilisant les sinus cardinaux :

$$\underline{s}(\alpha, \beta, t) = K_{\underline{s}_0} a b e^{i\omega t} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a}{\lambda}(\alpha - \alpha')\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi b}{\lambda}(\beta - \beta')\right) \quad (14)$$

Ainsi l'éclairement se traduit par le carré du module de l'amplitude précédent avec  $\mathbb{E}_0 = K^2 |\underline{s}_0|^2 a^2 b^2$ , l'éclairement obtenu dans la direction de l'optique géométrique ( $\alpha = \alpha'$  et  $\beta = \beta'$ ), alors :

$$\mathcal{E}(\alpha, \beta) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}(\alpha - \alpha')\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}(\beta - \beta')\right) \quad (15)$$

La figure de diffraction se représente ainsi :



On constate ainsi d'une part, que la position du maximum correspond à la direction de l'optique géométrique, et d'autre part que si les dimensions de la pupille sont infiniment grandes, la propagation de la lumière se fait de manière rectiligne ( $\alpha = \alpha'$  et  $\beta = \beta'$ ) conformément aux lois de l'optique géométrique.

La tache centrale est caractérisée par les largeurs angulaires  $2\lambda/a$  et  $2\lambda/b$ .

### Fente fine

Dans le cas d'une fente fine on considère que  $b \gg a$  ( $b$  infini). La largeur  $a$  doit de toute façon être au moins de l'ordre d'une centaine de longueurs d'ondes pour que le principe d'Huygens-Fresnel puisse être appliqué. Cette ouverture a alors l'allure d'une fente plutôt que d'un rectangle. Plus  $b$  devient grand, plus la largeur de la tache centre selon  $Oy$  devient petite. Dans ce cas là l'amplitude diffractée peut s'exprimer :

$$\underline{s}(\alpha, t) = K \underline{s}_0 a b e^{i\omega t} \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi a}{\lambda} (\alpha - \alpha') \right) \quad (16)$$

Ainsi l'éclairement se traduit :

$$\mathcal{E}(\alpha) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\pi a}{\lambda} (\alpha - \alpha') \right) \quad (17)$$

**Rq :** Cas des autres types de fentes (circulaire, fente fine, fente d'Young et réseaux, page 841 Renvoizé ou page 185 H-prépa ou page 152 Taillet.)

## 3. Conséquences

### a) Optique de Fourier

L'expression (15) montre que la figure de diffraction par une ouverture rectangulaire éclairée par une onde plane est donnée, dans les conditions de Fraunhofer, par la transformée de Fourier spatiale de l'ouverture. Les propriétés mathématiques de cette transformation ont des conséquences physiques intéressantes sur la diffraction. Tout d'abord, la transformé de Fourier établit une relation de réciprocité entre les distances dans le plan de l'ouverture et les distances angulaires de la figure de diffraction. Ceci signifie que les

caractéristiques à petite échelle (les détails fins) de l'ouverture déterminent les caractéristiques à grande échelle de la figure de diffraction et vice-versa. Ainsi la figure de diffraction par deux fentes de largeur  $a$ , séparées par une distance  $b > a$ , consiste en des franges dont la séparation angulaire est de l'ordre de  $\lambda/b$ , dont l'intensité est modulée à plus grande échelle sur une taille angulaire  $\lambda/a > \lambda/b$ .

On peut alors aborder ces questions en s'appuyant sur la notion de produit de convolution. Ce produit de convolution de deux fonctions (de deux variables dans le cas qui nous intéresse) est défini par :

$$(f \star g)(x, y) = \int \int f(x', y') \times g(x - x', y - y') dx' dy' \quad (18)$$

Cette notion intervient par exemple pour décrire un plan diffractant constituée d'ouvertures identiques, chacune de transparence  $f(x, y)$  et réparties à des positions  $(x, y)$  c'est à dire distribuées selon  $g(x, y) = \sum_i \delta(x - x_i, y - y_i)$  où  $\delta(., .)$  désigne la distribution de Dirac bidimensionnelle. La transparence est alors donnée par  $(f \star g)(x, y)$  défini dans l'expression précédente. Or, la transformée de Fourier d'un tel produit de convolution est égale au produit (au sens usuel) des transformées de Fourier.

Dans l'exemple considéré ici, il suffit donc de calculer la figure de diffraction d'une seule ouverture, celle de la distribution des positions, et d'en faire le produit. Pour illustrer cette description un peu abstraite, considérons les fentes d'Young de taille finie, séparés par une distance  $b$ , chacun ayant un rayon  $a$ . L'amplitude diffractée par une fente fine est donnée par (16), et celle correspondant à deux sources ponctuelles a été calculé dans la leçon précédente sur les interférences à deux ondes en optique. L'amplitude diffractée est alors de la forme en supposant une incidence normale ( $\alpha' = 0$ ) selon la direction  $\alpha$  pour  $\alpha \ll 1$  :

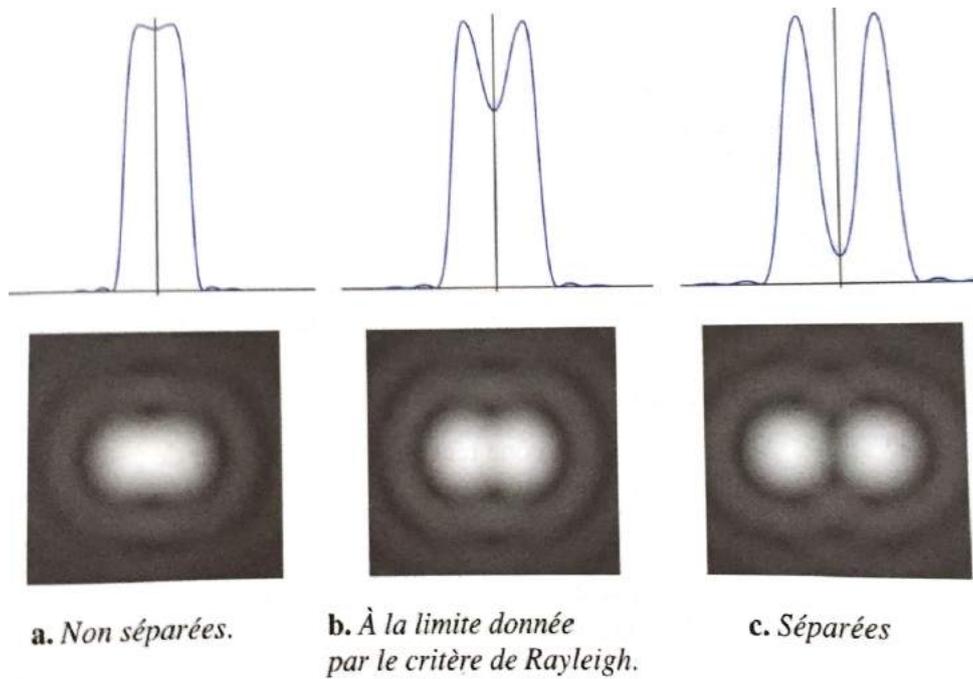
$$\underline{s}(\alpha, t) \propto \cos\left(\frac{2\pi b\alpha}{\lambda}\right) \times \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\alpha\right) \quad (19)$$

Finalement, le premier terme représente les interférences, le second la diffraction par chaque fente. La forme des fentes influence la modulation globale de l'intensité des franges d'interférences, mais pas l'interfrange.

## b) Application au pouvoir de résolution

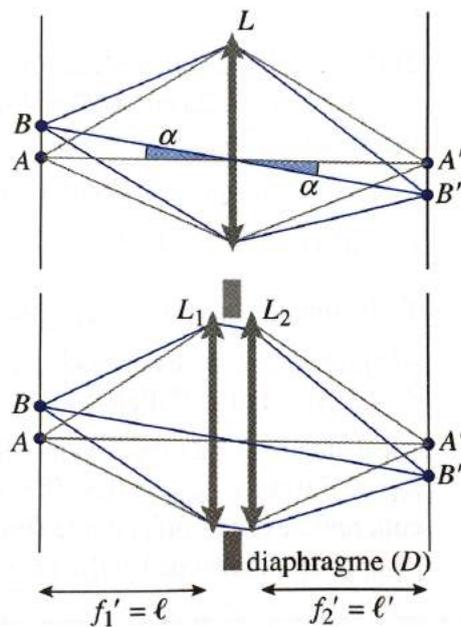
### MANIP : critère de Rayleigh.

On admettra pour cette partie, même si vous ferez en exercice le cas de la pupille circulaire, que la figure de diffraction de la pupille circulaire de diamètre  $D$  est constituée d'anneaux dont l'éclairement décroît très rapidement. Le pic central a un rayon angulaire de  $1,22\lambda/D$ .



Imaginons un instrument d'optique parfaitement stigmatique du point de vue de l'optique géométrique. Si la diffraction n'existait pas, sa résolution serait infinie, car il fournirait de deux points objets distincts, aussi près soient-ils, deux images distinctes. En fait, la résolution d'un instrument est limitée pour des raisons techniques, dues au caractères rigoureusement stigmatique des composants optiques ; mais aussi pour des raisons théoriques incontournables : l'instrument qui n'est pas infiniment large diffracte la lumière reçue de l'objet. À chaque objet ponctuel correspond une tache image centrée sur l'image géométrique.

La limite de séparation liée au récepteur qui doit séparer les deux taches images. Indépendamment de ce fait expérimental, on utilise souvent le critère de Rayleigh : à la limite de résolution, le maximum de la tache de diffraction d'un point image coïncide avec le premier zéro de la tache de l'autre. L'aspect visuel des éclaircissements produits par les taches de diffraction entourant deux images  $A'$  et  $B'$  plus ou moins séparées justifie le choix de ce critère.



Considérons les images  $A'$  et  $B'$  de deux points  $A$  et  $B$  situés dans le même plan de front, par une lentille de diamètre  $D$ .

Nous pouvons considérer cette lentille comme l'association de trois éléments très proches : une lentille de focale  $f_1' = \ell$ , un diaphragme de diamètre  $D$ , et une lentille de focale  $f_2' = \ell'$ . Ceci nous ramène à notre montage "classique" de diffraction à l'infini : les tâches de diffraction devant entourer les images  $A'$  et  $B'$  ont un rayon  $1,22 \frac{\lambda f_2'}{D}$ .

Si, vus de la lentille, les objets  $A$  et  $B$  sont séparés angulairement d'un angle  $\alpha$ , leurs images géométriques  $A'$  et  $B'$  sont séparées de  $\alpha f_2'$ . La séparation est donc réalisée si :

$$A'B' > 1,22 \frac{\lambda f_2'}{D}, \text{ soit } \alpha > 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

La résolution angulaire limite due à la diffraction d'une lentille de diamètre  $D$  est :

$$\alpha_{lim} = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Les points  $A$  et  $B$  sont discernables si :

$$AB > \alpha_{lim} \ell = 1,22 \lambda \frac{\ell}{D}$$

Le rapport  $\ell/D$  est le nombre d'ouverture de la lentille. Dans l'optique de Gauss, ce nombre est en principe assez grand. Pour des systèmes optiques adaptés à des conditions extrêmes, il est au mieux de l'ordre de 1. Nous en concluons donc que :

**En raison de la diffraction, les dimensions des plus petits détails discernables avec un instrument d'optique sont de l'ordre de la longueur d'onde de la lumière utilisée.**

Pour étudier des objets plus petits, il faudra avoir recours à des rayonnements de plus faible longueur d'onde. Pour étudier des structures à des échelles atomiques, on utilisera, par exemple, la diffraction de rayon X.

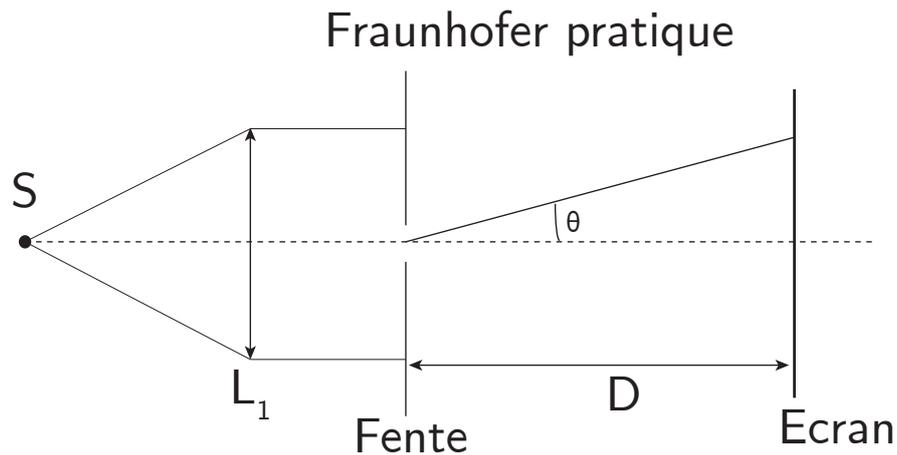
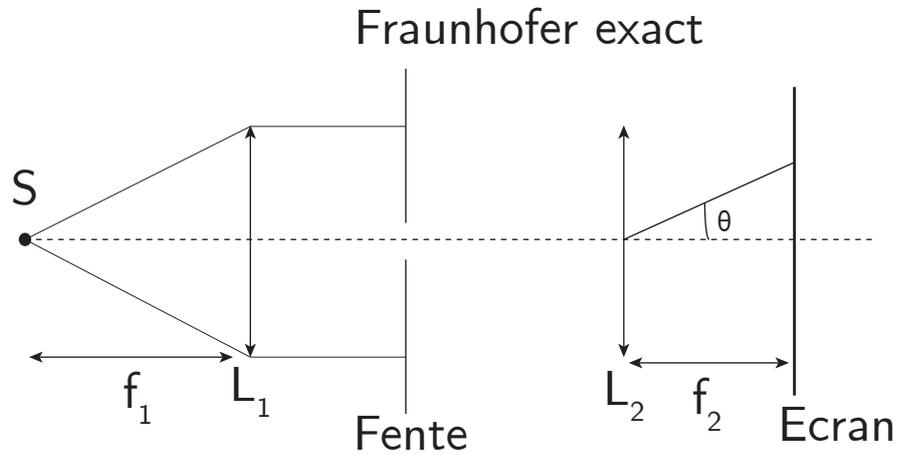
## Conclusion

Nous avons pu voir dans cette leçon comment caractériser et définir le phénomène de diffraction dans le cas de la diffraction de Fraunhofer. On peut bien entendu prolonger notre raisonnement et se pencher sur le cas d'un réseau... chose qui sera abordé dans une prochaine leçon.

# Manip de diffraction

## Diffraction par une fente

page 107 Sextant



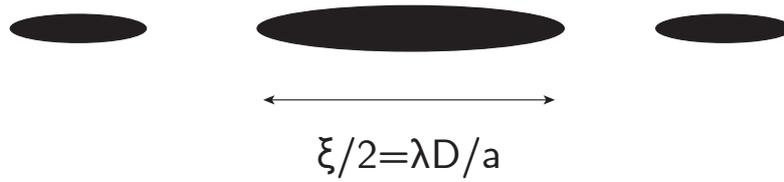
Pour la manip on fera le Fraunhofer pratique. La source est une laser sur lequel on aura ajouté une lentille type microscope (de focale  $f = 15mm$ ) où une autre lentille avant  $f = 5cm$ ). On prend  $f_1 = 10cm$ . Le but est ici de deviner la largeur de la fente en mesurant les figures de diffraction. Mais cette manip est a utiliser tout le long de la leçon pour imager les propos !

Dans un premier temps il faut conjuguer la source avec l'écran pour  $L_1$  : pour cela on positionne  $L_1$  de telle sorte à avoir un point net sur l'écran. Ensuite on peut mettre la fente.

On a le schéma suivant pour avoir une source ponctuelle :

$$\infty \implies L \implies \dots$$

On va avoir des taches sur l'horizontale. La tache central a pour dimension  $\xi$  :



Alors on retrouve :

$$a = \frac{D\xi}{2\lambda} \quad (20)$$

On peut aussi montrer que :

- la figure de diffraction reste perpendiculaire à la fente lorsqu'on tourne cette dernière ;
- si on translate dans son plan la fente diffractante, la figure ne change pas ;
- si on élargit la fente, la figure de diffraction se rétrécit (et inversement) ;
- la figure de diffraction du diaphragme complémentaire est identique (sauf au centre) à la figure de diffraction du diaphragme original.

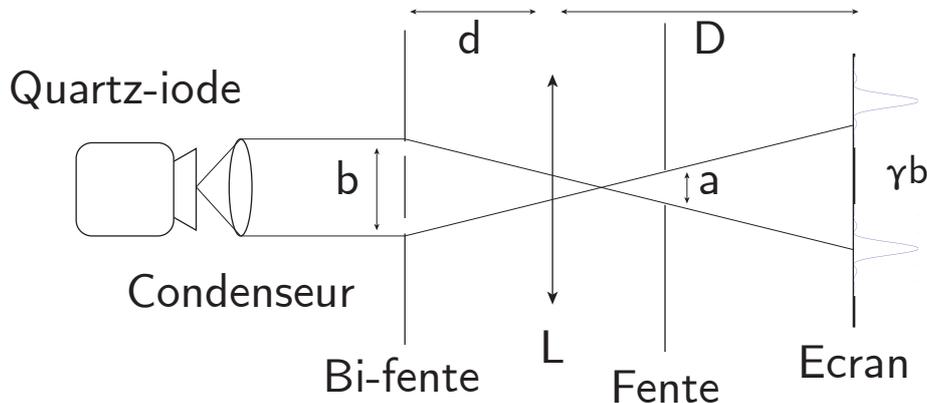
Toutes ces propriétés sont les conséquences du fait que la figure de diffraction de Fraunhofer est la transformée de Fourier bi-dimensionnelle de  $t(x, y)$ .

→ Application pour la mesure de longueur d'objet !

**Faire un calcul d'erreur!!!**

## Pouvoir de résolution : critère de Rayleigh

page 135 Sextant



Il faut prendre une fente  $a$  variable et graduée pour pouvoir mesurer le critère et comparer avec la théorie.

On a le grandissement  $\gamma = D/d$ . Le critère s'écrit :

$$\gamma b > \frac{\lambda D}{a} \quad (21)$$

Si  $\gamma b = \frac{\lambda D}{a}$  on ne résout plus rien. Ainsi le but est de comparer la valeur obtenue avec la théorie.

# L.P. 36 - Diffraction par des structures périodiques

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Optique ondulatoire
- Diffractions
- Interférences
- Optique expérimentale

## Bibliographie

- Optique , Perez, *Dunod*
- Optique expérimentale, Sextant, *Hermann*
- Optique, Houard, *De Boeck*
- Expériences de phys. Optique, Bellier, *Dunod*

Leçon assez cool mais il faut la construire autour de la manip sur les réseaux pour illustrer les propos.

## Introduction

On a pu voir dans une autre leçon les lois de la diffraction pour des objets «simples» (une fente, un trou, etc.), nous allons nous intéresser maintenant à des structures «périodiques» qui vont nous permettre de faire sortir un certain nombre de comportements communs.

## 1. Réseaux

**Manip : Faire la manip du réseau avec un laser simple. page 123 Bellier ou page 118 Sextant**

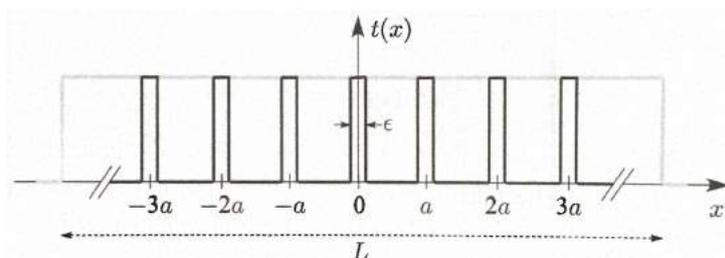
### a) Définitions

Un réseau est un arrangement matériel régulier qui impose, à une onde plane incidente, une variation périodique de son amplitude ou de sa phase ou des deux à la fois. Le réseau est alors dit d'amplitude, de phase ou d'amplitude et de phase. Ainsi la caractéristique fondamentale d'un réseau est sa période  $a$ , que l'on donne le plus souvent sous la forme du nombre de traits ou lignes par millimètre ; par exemple, lorsque  $a = 10\mu m$ , on dit que réseau a 100 traits par  $mm$  ou 1.p.m (ligne par  $mm$ ).

Les autres caractéristiques du réseau sont la largeur  $L$  de la portion éclairée par le faisceau incident et la largeur  $\epsilon$  de son motif élémentaire.

Le réseau le plus simple est constitué par un ensemble de fentes parallèles réalisant une

transmittance  $t(x)$  périodique binaire. C'est sur ce type de réseaux que nous présenterons la théorie générale.



Les premiers réseaux d'excellente qualité furent construits par H. Rowland en 1882, en traçant des traits équidistants sur une lame de verre, à l'aide d'une pointe en diamant. Chaque trait diffuse la lumière en dehors de la direction incidente et se comporte ainsi comme une bande opaque. En revanche, les parties situées entre les traits, qui laissent passer la lumière, jouent le rôle de fentes. La qualité des réseaux est directement liée au soin avec lequel les lignes sont tracées de façon périodique ; les défauts de périodicité donnent des figures parasites appelés ghosts.

Actuellement, on réalise d'excellents réseaux à partir de l'interférence d'ondes planes : ce sont les réseaux holographiques ; dans le cas de deux ondes, ces réseaux sont sinusoïdaux avec une période  $a$  égale à l'interfrange. La transmittance est proportionnelle à l'intensité du phénomène d'interférence :

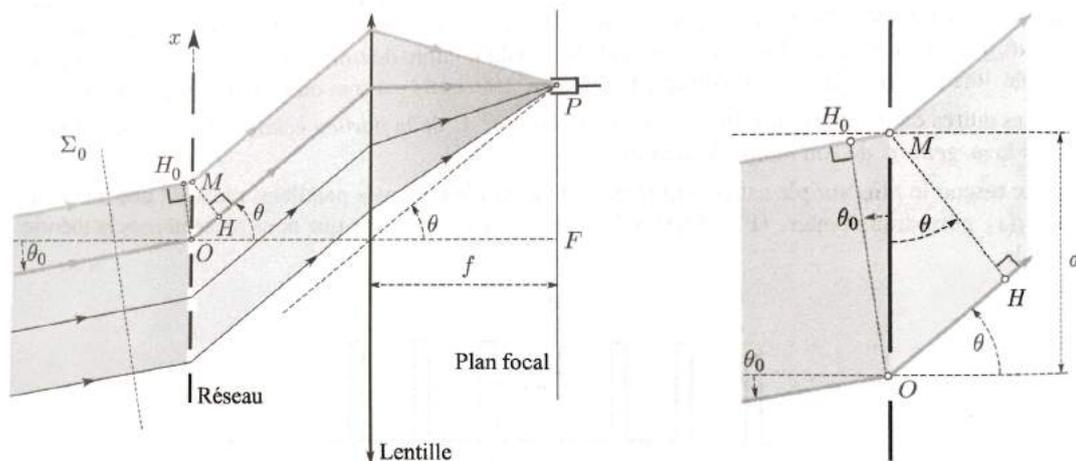
$$t(x) = 1 + \cos\left(2\pi\frac{x}{a}\right) \text{ avec } a = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha/2)}$$

La plupart des réseaux utilisés en spectrométrie travaillent, non par transmission, mais par réflexion ce qui permet d'éviter les défauts qu'occasionne la traversée du support (défaut d'homogénéité, de planéité... etc). On dépose sur les bandes d'un réseau holographique original une couche d'aluminium qui réfléchit la lumière incidente ; les zones en dehors de ces bandes ne réfléchissent pas la lumière et se comportent donc comme des parties opaques.

Les réseaux que l'on peut facile se procurer sont des répliques obtenues en déposant, sur le réseau original, une pellicule de collodion que l'on détache et que l'on fixe sur une lame de verre. Ces copies sont généralement d'excellent qualité.

## b) Formules fondamentales

Considérons une onde plane monochromatique  $\Sigma_0$ , d'amplitude unité, qui tombe sur un réseau de  $N$  fentes parallèles, sous l'angle  $\theta_0$ . L'expérience peut être aisément réalisée, en envoyant un faisceau laser sur un réseau de fentes, sous l'incidence  $\theta_0$  par rapport à la normale au plan du réseau.



Nous nous proposons d'étudier la répartition de l'intensité de la lumière diffractée, telle qu'on peut l'observer dans le plan focal d'une lentille convergente, par exemple de distance focale  $f = 30\text{cm}$ . Pour cela, désignons par  $\theta$  l'angle que font, avec la normal au réseau, l'ensemble des rayons diffractés qui se rencontrent au point courant  $P$  du plan focal.

### Réseau par transmission

L'équation donnant la position des maxima principaux d'intensité est appelée la relation fondamentale des réseaux. On l'établit de manière simple en traduisant un état interférentiel constructif entre toutes les ondes véhiculées par les rayons diffractés qui se rencontrent au point  $P$ . Pour cela, il suffit d'égaliser à un nombre entier  $m$  de fois  $2\pi$ , la différence de phase entre les ondes véhiculées par deux rayons consécutifs. Comme les rayons incidents sont parallèles ainsi que les rayons diffractés, la différence de chemin optique, entre le rayon passant par le point  $O$  et celui passant par le point homologue  $M$ , s'écrit, en supposant que le milieu ambiant est l'air, d'indice 1 et en utilisant le théorème de Malus :

$$OH - MH_0 = a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) \quad (1)$$

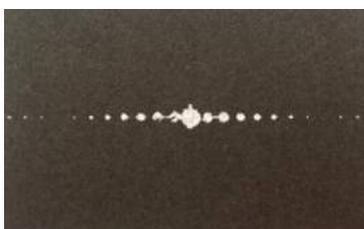
On en déduit :

$$\frac{2\pi}{\lambda} a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = 2\pi m$$

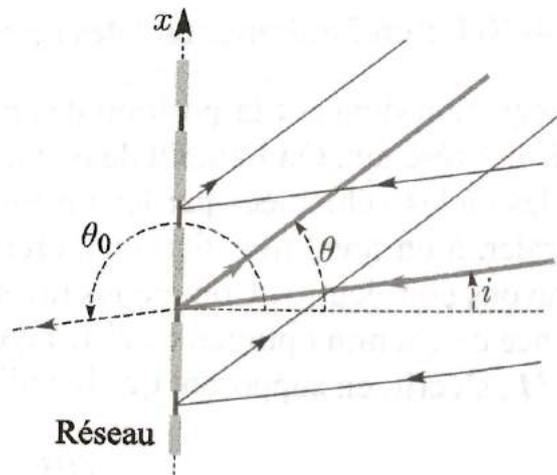
La relation fondamentale des réseaux est donc :

$$a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = m\lambda \quad (2)$$

$m$  étant un nombre entier positif, négatif ou nul. Notons que le cas où  $m = 0$  restitue la transmission directe en optique géométrique :  $\theta = \theta_0$ .  $m$  est appelé l'ordre de diffraction et le pic d'ordre  $m = 0$  correspond à la direction prédite par l'optique géométrique. La figure de diffraction d'un réseau d'amplitude est centrée sur l'image géométrique de la fente source.



## Réseau par réflexion

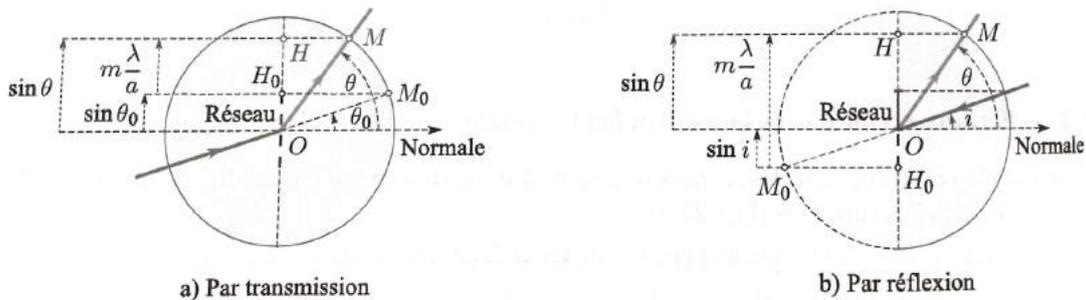


La relation fondamentale précédente a été écrite avec la même convention d'orientation pour les angles  $\theta_0$  et  $\theta$ . Pour un réseau par réflexion, l'angle  $\theta_0$  est obtus ; aussi est-il plus commode d'introduire l'angle d'incidence  $i = \theta_0 - \pi$ . La formule des réseaux devient alors :

$$a(\sin(\theta) + \sin(i)) = m\lambda \quad (3)$$

Le cas  $m = 0$  restitue la réflexion en optique géométrique :  $\sin(\theta) = -\sin(i)$  soit  $\theta = -i$ .

## Représentation géométrique de la formulation des réseaux



La relation fondamentale des réseaux peut être traduite géométriquement à l'aide d'un cercle trigonométrique. On a :

$$\sin(\theta) = \sin(\theta_0) + m\frac{\lambda}{a}$$

on porte successivement sur l'axe des ordonnées  $\sin(\theta_0)$ ,  $m\lambda/a$  et la somme qui vaut  $\sin(\theta)$ . On en déduit alors  $\theta$ . Par réflexion, la construction est analogue :

$$\sin(\theta) = -\sin(i) + m\frac{\lambda}{a}$$

## Intensité diffractée

On sait que l'amplitude de l'onde diffracté pour une fente fine de largeur  $b$  s'écrit :

$$\underline{s}(\alpha, t) = \underline{s}_0 \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}(\alpha - \alpha')x\right) dx = \underline{s}_0 b \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha')b\right) \quad (4)$$

où  $\alpha$  et  $\alpha_0$  sont les projections, suivant l'axe des  $x$ , du réseau, des vecteurs unitaires définis par les directions diffractée et incidente respectivement. On a  $\alpha = \sin(\theta)$  et  $\alpha_0 = \sin(\theta_0)$ .

Si le réseau comporte  $N$  fentes, numérotées de  $-n$  à  $n$ , de transmittance éventuellement complexe, l'amplitude complexe de l'onde diffractée par le réseau s'écrit :

$$\underline{s}(x) = \int \underline{t}(x) \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda}(\alpha - \alpha')x\right) dx \quad (5)$$

avec  $\underline{t}(x) = \sum_{m=-n}^{m=n} t_b(x - x_m)$ , où  $x_m = ma$  désigne la coordonnée de la fente de rang  $m$ .

En introduisant  $X = x - x_m$ , il vient avec  $u = (\alpha - \alpha')/\lambda$  :

$$\underline{s}(u) = \sum_{m=-n}^{m=n} \exp(2\pi i u x_m) \int t_b(X) \exp(2\pi i u X) dX = \sum_{m=-n}^{m=n} \exp(2\pi i u m a) \hat{t}_b(u)$$

Soit :

$$\underline{s}(u) = \hat{t}_b(u) \sum_{m=-n}^{m=n} \exp(im\phi) \text{ avec } \phi = 2\pi u a$$

On reconnaît une suite géométrique ainsi on a, en introduisant le nombre total de traits  $N = 2n + 1$  :

$$\underline{s}(u) = \hat{t}_b(u) \exp(in\phi) \frac{1 - \exp(-iN\phi)}{1 - \exp(-i\phi)} = \hat{t}_b(u) \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \quad (6)$$

On en déduit alors :

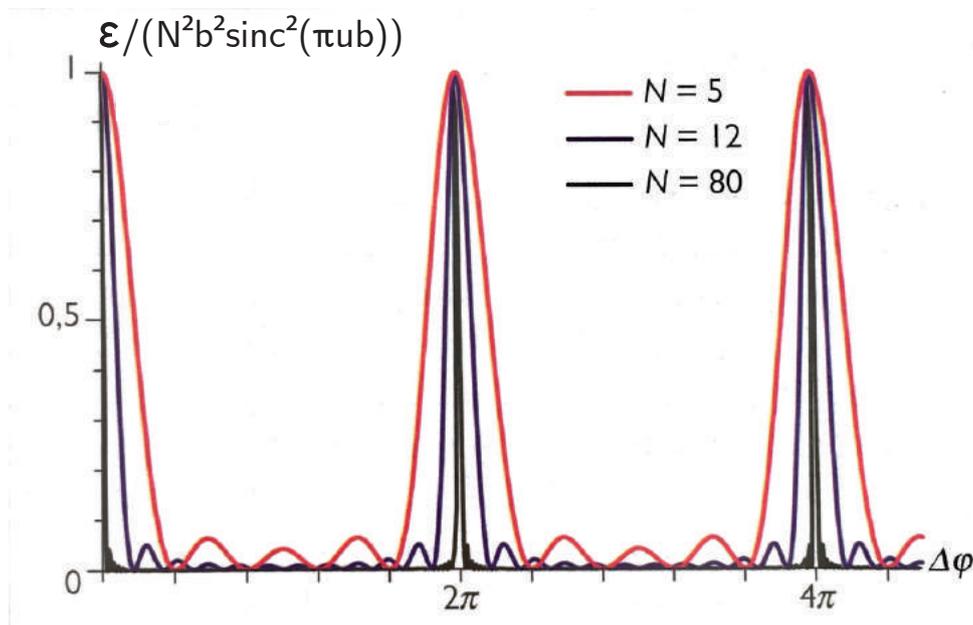
$$\underline{s}(u) = Nb \operatorname{sinc}(\pi ub) \frac{\sin(N\phi/2)}{N \sin(\phi/2)} \quad (7)$$

On en déduit l'éclairement :

$$\mathcal{E}(u) = N^2 b^2 \operatorname{sinc}^2(\pi ub) \left( \frac{\sin(N\phi/2)}{N \sin(\phi/2)} \right)^2 \quad (8)$$

On appelle la fonction réseau :

$$R = \left( \frac{\sin(N\phi/2)}{N \sin(\phi/2)} \right)^2$$



On voit ainsi que la hauteur des pics vaut :

$$N^2 b^2 \operatorname{sinc}^2(\pi ub)$$

La largeur des pics principaux diminue considérablement avec  $N$ . On peut montrer que la demi-largeur angulaire au pied d'un pic principal d'ordre  $m$  est égale à :

$$\Delta\theta_{1/2} = \frac{\lambda}{Na \cos(\theta)}$$

## 2. Propriétés et applications

**MANIP : spectroscopie par réseau : doublet du mercure.**

### a) Propriétés

#### Dispersion angulaire

Considérons deux ondes planes, de longueurs d'onde voisines  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ , qui tombent sur un réseau, en faisant le même angle d'incidence  $\theta_0$ . L'écart  $d\theta$ , entre les angles que font les ondes diffractées, est obtenu à partir de la relation :  $a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = m\lambda$ . En effet, en différentiant, on obtient :

$$a \cos(\theta) d\theta = m d\lambda$$

On en déduit la dispersion angulaire  $\mathcal{D}_a$  du réseau, dans le voisinage de l'ordre  $m$  :

$$\mathcal{D}_a = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{a \cos(\theta_m)}$$

La dispersion est donc plus forte lorsque l'ordre est élevé ( $m$  grand) et le pas faible (réseau serré). Notons que, contrairement au prisme, les ondes de grandes longueurs d'onde sont plus dispersées que celles de petites longueurs d'onde : l'angle de diffraction est plus grand pour "le rouge" que pour "le bleu". Notons que pour  $\theta \approx 0$ , la dispersion ne dépend pas de  $\theta$  au premier ordre ;  $\mathcal{D}_a = m/a$ . La variation de  $\theta$  avec  $\lambda$  est alors linéaire.

#### Minimum de déviation

Dans un réseau par transmission, la déviation de l'onde incidente,  $D = \theta - \theta_0$ , passe par un minimum, comme dans le prisme. Montrons le en calculant  $dD/d\theta_0$  :

$$\frac{dD}{d\theta_0} = \frac{d\theta}{d\theta_0} - 1$$

Comme  $a(\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) = m\lambda$ ,  $\lambda$ ,  $m$  et  $a$  étant connus on a :

$$\frac{d\theta}{d\theta_0} = \frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta)}, \quad \frac{dD}{d\theta_0} = \frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta)} - 1 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 D}{d\theta_0^2} = -\cos(\theta) \sin(\theta_0) + \cos^2(\theta_0) \tan(\theta) \cos^2(\theta)$$

Il en résulte que :

$$\frac{dD}{d\theta_0} = \frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta)} = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = -\theta_0$$

en excluant le cas  $\theta = \theta_0$  qui correspond au rayon non diffracté. Dans ces conditions :

$$\frac{d^2 D}{d\theta_0^2} = -2 \tan(\theta_0) > 0$$

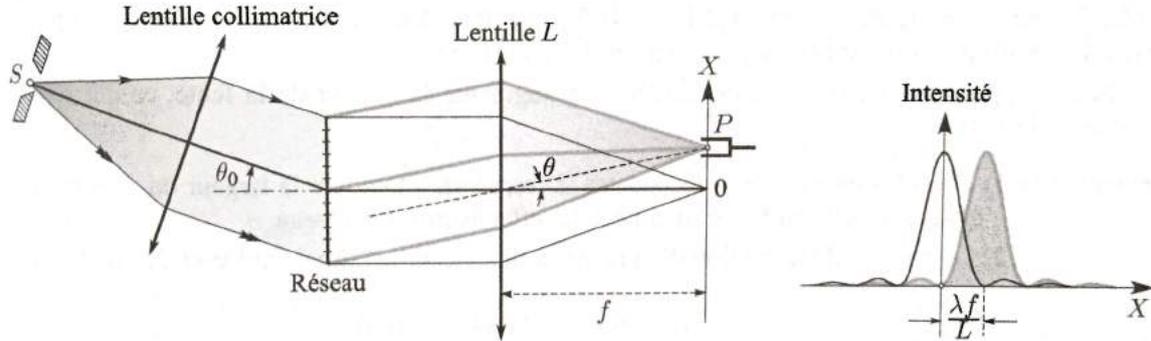
Pour  $\theta = -\theta_0$ , la déviation  $D$  passe donc par un minimum qui vaut :  $D_m = 2\theta_0$ . Dans la pratique, comme pour le prisme, on se place au minimum de déviation car les mesures sont plus précises.

## b) Spectromètres à réseau

Comme pour le prisme le pouvoir de résolution  $PR$  d'un réseau est défini par :

$$PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

$\Delta\lambda$  étant le plus petit écart en longueur d'onde, détectable dans le plan d'observation.



Dans l'étude de la composition spectrale des ondes émises par les sources réelles, les réseaux ont pratiquement remplacé les prismes. Le montage utilisé est généralement celui de la figure : la source ponctuelle ( ou infiniment fine), placée dans le plan focal d'une lentille, éclaire le réseau sous un angle  $\theta_0$ . Une seconde lentille, de distance focale image  $f$ , permet de visualiser, dans son plan focal la figure de diffraction du réseau, autour de la valeur  $\theta_m$  correspondant à l'ordre  $m$ .

Lorsque l'axe de la seconde lentille ne coïncide pas avec la normal au réseau, mais fait l'angle  $\theta_m$  avec elle, la largeur des pics de diffraction n'est plus  $\lambda f/l$  mais  $\lambda f/(L \cos(\theta_m))$ ,  $L \cos(\theta_m)$  étant la largeur de la fente diffractante équivalente. On retrouve ce résultat en cherchant le premier 0 de la fonction  $R(u)$  dans le voisinage de  $u = m/a$  :

$$R(u) = 0 \text{ pour } u = \frac{m}{a} + \frac{1}{Na} \text{ soit } \Delta u = u - \frac{m}{a} = \frac{1}{Na}$$

Or en différentiant  $u = \sin(\theta)/\lambda$ , on obtient une autre expression de  $\Delta u$  :

$$\Delta u = \frac{\cos(\theta)\Delta\theta}{\lambda} \approx \frac{\cos(\theta_m)\Delta\theta}{\lambda} \text{ d'où } \frac{1}{Na} = \frac{\cos(\theta_m)\Delta\theta}{\lambda}$$

Il en résulte que :

$$f\Delta\theta = f \frac{\lambda}{Na \cos(\theta_m)} = \frac{\lambda f}{L \cos(\theta_m)}$$

Si l'onde plane qui tombe sur le réseau est constituée de deux ondes monochromatiques de longueur d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , chacune de ces ondes donne sa propre figure de diffraction, et les deux figures de diffraction coexistent.

Si le plus petit écart de longueur d'onde  $\Delta\lambda$  détectable est défini par la largeur totale à mi-hauteur  $\Delta X_{1/2}$  d'un pic de diffraction (critère de Rayleigh), alors  $\Delta X_{1/2} = \lambda f/(L \cos(\theta_m))$ , puisque tout se passe comme si la fente diffractante avait pour largeur  $L \cos(\theta_m)$ . Par conséquent :

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta X_{1/2}}{\mathcal{D}_l} = \frac{\Delta X_{1/2}}{f\mathcal{D}_a} = \frac{\lambda f}{L \cos(\theta_m)} \frac{a \cos(\theta_m)}{fm} = \frac{\lambda a}{mL} = \frac{\lambda}{mN}$$

$N$  étant le nombre total de traits du réseau. On en déduit le pouvoir de résolution du réseau :

$$PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \quad (9)$$

Bien que le pouvoir de résolution soit proportionnel à l'ordre  $m$ , les valeurs choisies pour  $m$  sont généralement petites, car l'intensité de l'onde est faible lorsque  $m$  est élevé.

### Application des réseaux à la comparaison de deux longueurs d'onde

(facultatif)

On veut comparer deux laser de deux longueurs d'onde différente,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . On se place au minimum de déviation afin de neutraliser l'influence d'une erreur sur la mesure de l'angle d'incidence. Il vient, puisque  $\theta = -\theta_0 = D/2$  :

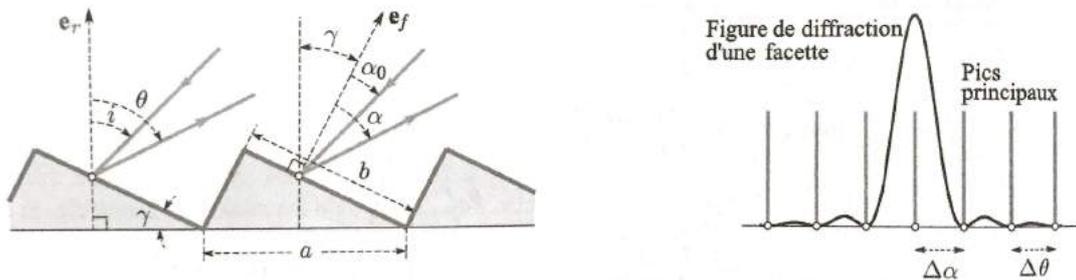
$$2a \sin(D_1/2) = m\lambda_1 \text{ et } 2a \sin(D_2/2) = m\lambda_2$$

Par conséquent :

$$\lambda_1/\lambda_2 = \sin(D_1/2)/\sin(D_2/2)$$

### c) Différents types de réseaux plans

#### Réseau échelonné



On sait que pour un réseau de fentes, l'intensité lumineuse est répartie sur plusieurs pics et présente sa valeur maximale sur le pic central, ce qui offre aucun intérêt spectrométrique, puisqu'en ce point, où  $u = 0$ , tous les radiations se superposent. Avec ce dispositif on cherche à concentrer toute la lumière sur un seul ordre, en choisissant une géométrie telle que :

- $m \neq 0$ , grâce à l'inclinaison d'un angle  $\gamma$  (angle de blaze) des différents motifs réfléchissants ;
- la largeur angulaire de la figure de diffraction du motif soit égale à la distance angulaire que sépare deux maxima principaux de la figure de diffraction du réseau.

Le système est caractérisé par la relation algébrique :

$$i = \alpha_0 + \gamma \text{ et } \theta = \alpha + \gamma$$

Le maximum de la figure de diffraction, donnée par une facette, est situé dans la direction réfléchi  $\alpha = -\alpha_0$ , définie par l'optique géométrique. La largeur angulaire s'écrit :

$$\Delta\alpha = \frac{\lambda}{b \cos(\alpha)} \quad (10)$$

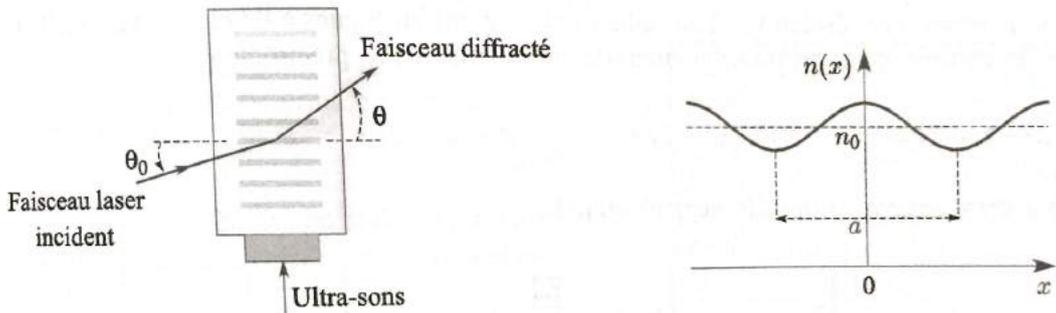
puisque  $b \cos(\alpha)$  est la largeur de la facette. La distance angulaire  $\Delta\theta$  qui sépare deux maxima principaux successifs est donnée par la fonction réseau  $R(u)$  :

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{a \cos(\theta)} \quad (11)$$

$a \cos(\theta)$  étant la période du réseau. L'égalité  $\Delta\alpha = \Delta\theta$  définit la géométrie qui convient :

$$\frac{\lambda}{b \cos \alpha} = \frac{\lambda}{a \cos(\theta)} \text{ soit } \frac{b}{a} = \frac{\cos(\theta)}{\cos(\alpha)}$$

## Réseau acousto-optique



Cet outil est capable de diffracter l'onde lumineuse émise par un laser en produisant des variations d'indice dans un matériau, à l'aide d'une onde acoustique sinusoïdale de grande fréquence (30MHz), produite par effet piézoélectrique. Le pas  $a$  du réseau de phase, ainsi constitué, est la longueur d'onde acoustique :

$$a = \lambda_a = v_a / f_a \approx 20 \mu m \text{ pour } v_a \approx 600 m.s^{-1}$$

Ainsi en faisant varier la fréquence du signal électrique, on peut modifier l'inclinaison du faisceau diffracté. Un tel réseau est appelé un défecteur acousto-optique. L'indice s'écrit :

$$n(x) = n_0 + n_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \quad (12)$$

$n_0$  et  $n_1$  des constantes positives. La différence de phase introduite par la perturbation acoustique est :

$$\phi(x) = 2\pi \frac{n(x)e}{\lambda_0} = \frac{2\pi e n_0}{\lambda_0} + \frac{2\pi n_1 e}{\lambda_0} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \quad (13)$$

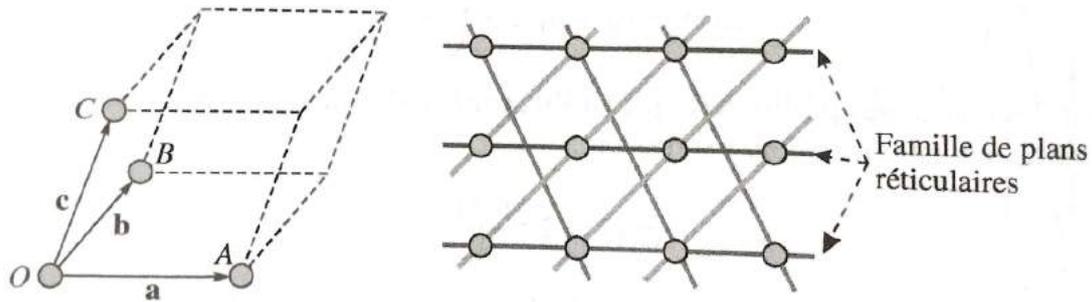
où  $e$  désigne l'épaisseur du matériau traversé et  $\lambda_0$  la longueur d'onde de la lumière émise par le laser. La transmittance du réseau est :

$$\underline{\hat{t}}(u) = \exp\left(\frac{2\pi e n_0 i}{\lambda_0}\right) \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[\frac{2\pi i n_1 e}{\lambda_0} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right] \exp(-i2\pi u x) dx \quad (14)$$

L'allure de la figure de diffraction est alors donnée par :

$$\mathcal{E}(u) = N |\underline{\hat{t}}(u)|^2 \left[ \frac{\sin(N\pi u a)}{N \sin(\pi u a)} \right]^2 \quad (15)$$

### 3. Extension aux réseaux tridimensionnels

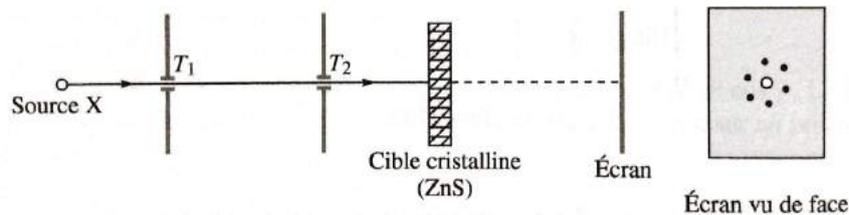


Les solides cristallins forment des réseaux tridimensionnels naturels que l'on peut reconstruire en reproduisant le motif élémentaire, appelé maille, selon ses trois directions. L'ordre de grandeur des trois dimensions de la maille est le dixième de nanomètre. Cette dernière est définie par trois vecteurs indépendants  $a$ ,  $b$  et  $c$ . À partir de la position d'un atome pris comme origine, la position de l'un quelconques des atomes constituant le cristal a pour expression :

$$r = m_1 a + m_2 b + m_3 c \quad (16)$$

avec  $m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  des entiers, positifs, négatifs ou nuls. En raison de la périodicité de la structure, toute droite passant par deux atomes définit une rangée d'atomes équidistants et tout plan contenant trois atomes non alignés définit un plan réticulaire. Ces plans peuvent être regroupés en ensemble parallèles et équidistants qui contiennent tous les atomes du cristal.

#### a) Diffraction des rayons X par les cristaux

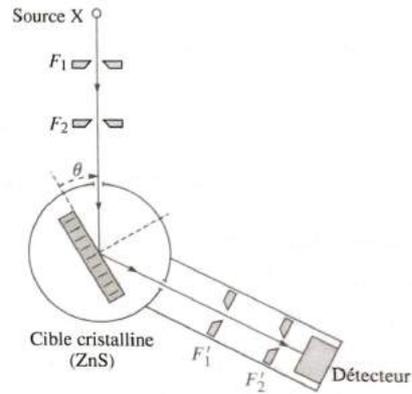
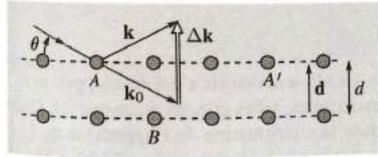


C'est le physicien allemand M. von Laue qui le premier en 1912, eut l'idée d'utiliser les réseaux cristallins pour tester la nature électromagnétique du rayonnement X : un pinceau de rayons X, défini par deux trous, percés dans deux écrans parallèles, est envoyé sur une cible cristalline de sulfure de Zinc. La figure enregistrée sur un écran photographique, placé après la cible, se présente sous forme d'un diagramme d'impacts, situés en des points privilégiés, symétriquement par rapport à la direction incidente. La comparaison de ce diagramme à celui obtenue en diffraction par les réseaux plan a permis d'établir que les rayons X étaient des ondes EM de longueur d'onde  $\lambda \approx 1 \mu m$ .

Pour parvenir à ce résultat von Laue admit des relations analogues à l'équation vectorielle fondamentale des réseaux, selon les trois directions définies par la maille :

$$\Delta k \cdot a = 2\pi q; \Delta k \cdot b = 2\pi r; \Delta k \cdot c = 2\pi s \text{ avec } \delta k = k - k_0$$

$q$ ,  $r$  et  $s$  étant des entiers positifs, négatifs ou nuls.



On peut donner à ces relations une forme différente, en associant convenablement les atomes du réseau cristallin. C'est ce que proposa le physicien Bragg, en considérant la famille de plan réticulaires, telle que les vecteurs d'ondes  $k$  et  $k_0$ , de même norme, soient symétriques par rapport à ces plans. Les ondes diffusées par les atomes d'un même plan réticulaire sont alors toutes en phase, puisque pour deux atomes quelconques  $A$  et  $A'$  de ce plan, on a :

$$\Delta k \cdot (r - r') = 0$$

ce qui exprime vectoriellement la condition de phase constructive. En outre, les ondes diffusées par les atomes  $A$  et  $B$ , appartenant à deux plan réticulaires parallèles seront, elles aussi, en phase, si une condition analogue est satisfaite, dans laquelle  $d$  désigne la distance qui sépare deux plan réticulaire consécutifs et  $m$  un entier positif négatif ou nul :

$$\Delta \cdot (r_A - r_B) = \Delta k \cdot d = 2\pi m$$

Il vint, en explicitant la condition précédente et en introduisant l'angle  $\theta$  que fait, dans le plan d'incidence, la direction de l'onde diffusée avec elle celle des plan réticulaires :

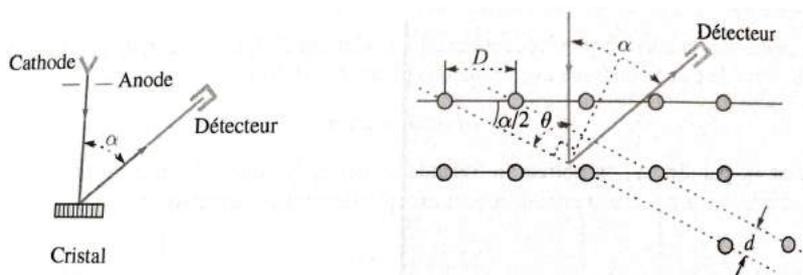
$$2k_0 d \sin(\theta) = 2\pi m$$

En remplaçant  $k_0$  par  $2\pi/\lambda$ , on obtient la formule de Bragg qui donne les directions dans lesquelles les ondes diffractées par un réseau cristallin sont exceptionnellement constructives :

$$2d \sin(\theta) = m\lambda \quad (17)$$

La formule de Bragg permet de mesurer les distances réticulaires, lorsque la longueur d'onde de la source des rayons X est connue.

## b) Diffraction des électrons par les cristaux



L'analyse des structures cristallines formant des réseaux tridimensionnels s'est développée avec la possibilité de diffracter les ondes associées aux particules matérielles, telles que les électrons. L'expérience de Davisson et Germer fut décisive dans la confirmation de l'hypothèse de L. de Broglie. Elle consiste à remplacer la source de rayons X par un canon à électrons. On obtient la relation suivante, entre la longueur d'onde  $\lambda_{DB}$ , la distance inter-atomique  $D$  et l'angle  $\alpha$  que fait le rayon émergent avec le rayon incident :

$$D \sin(\alpha) = m\lambda_{DB}$$

Cette relation est compatible avec la formule de Bragg. En effet, en négligeant la réfraction de ces ondes, il vient, si l'on introduit l'angle  $\theta = \pi/2 - \alpha/2$  que fait le rayon incident avec la direction des plans réticulaires, distants de  $d = D \sin(\alpha/2)$  :

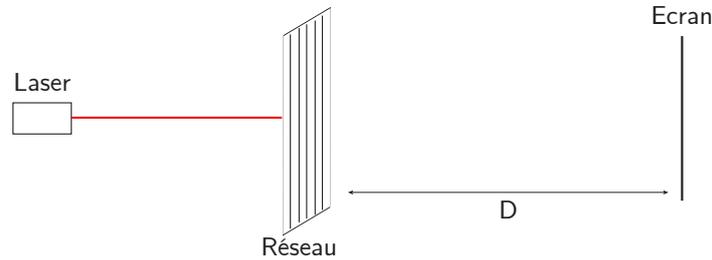
$$D \sin(\alpha) = 2D \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2) = 2d \sin(\theta) \text{ d'où } 2d \sin(\theta) = m\lambda_{DB}$$

## Conclusion

Nous avons vu dans cette leçon comment décrire les structures périodiques dans le domaine de l'optique notamment. On a pu voir les relations décrivant les réseaux et aussi voir l'intérêt de ces systèmes. Ainsi cela a permis de prévoir des méthodes pour sonder la composition de la matière à l'échelle atomique.

# MANIP : diffraction par un réseau

## Détermination de la longueur d'onde d'un laser



Soit  $a$  l'espace entre les fentes. Il faut avoir  $D \gg a$ . Le déphasage entre deux motifs voisins vaut :

$$\phi = \frac{2\pi a}{\lambda_0}(\sin(\theta) - \sin(\theta_i)) \quad (18)$$

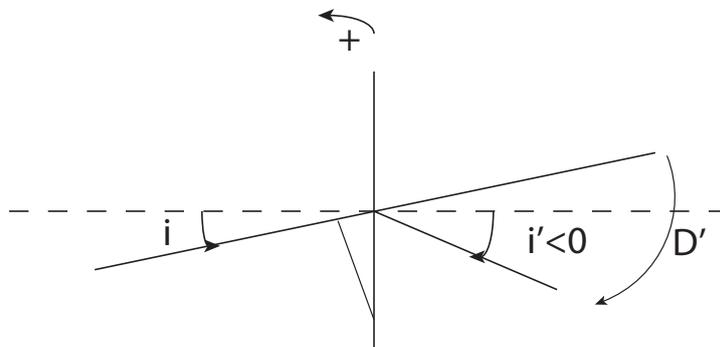
incidence normale  $\theta_i = 0$ , pour cela il faut se mettre au maximum de déviation : tourner le réseau jusqu'au point où on est au minimum.

On sait de plus :

$$\delta = p/\lambda \text{ et } \phi = 2\pi\delta/\lambda$$

Ainsi en incidence normale on a :

$$\sin(\theta) = p\lambda/a$$

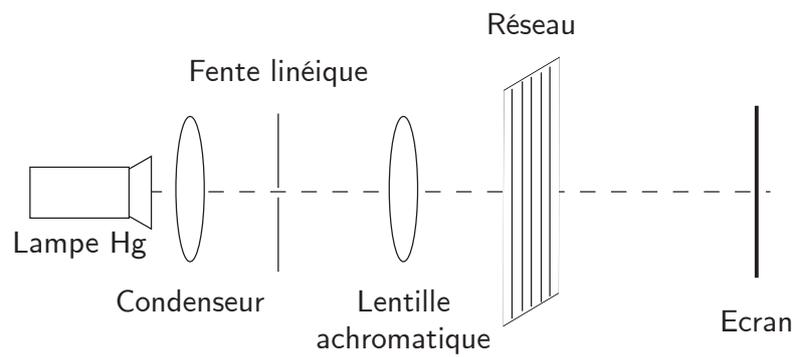


Soit  $D' = i' - i$ , alors  $dD' = 0$  et  $di = di'$ . Soit :

$$\begin{aligned} k\lambda &= a \sin(i) - a \sin(i') \\ k = 1 \text{ alors } 0 &= di \cdot a \cos(i) - di' \cdot a \cos(i') \\ \implies \cos(i) &= \cos(i') \implies i = -i' \implies D' = 2i' \\ &\Leftrightarrow k\lambda = 2a \sin(D'/2) \end{aligned}$$

Connaissant la distance entre l'écran et le réseau et la distance entre deux points successifs  $d$  on peut en déduire  $\tan(D') = d/D$ . Ainsi on en conclue sur la longueur d'onde du laser connaissant le pas du réseau  $a$ .

## Spectroscopie par réseau : doublet du mercure



On sait que :

$$k\lambda = -a \sin(i'), \text{ car incidence normale}$$
$$d\lambda = -a \cos(i') di'$$

Or :

$$di' = \delta/D$$

avec  $\delta$  distance entre les deux longueurs d'ondes du doublet du mercure  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Alors :

$$\Delta\lambda = a \frac{\delta}{D} \quad (19)$$

# L.P. 37 - Absorption et émission de la lumière

Niveau : L3

Pré-requis	Bibliographie
• Mécanique	• Physique tout en un PC-PC*, Sanz, <i>Dunod</i>
• Optique	• Quantique : fondements et applications, Perez, <i>De Boeck</i>
• Résonance	• Expériences d'optique, Duffait, <i>Bréal</i>
	• Les lasers, Hennequin, <i>Dunod</i>
	• Physique atomique, Cagnac, <i>Dunod</i>
	• BUP n.655, Barrat (1983)
	• BUP n.924, Gitton (2010)
	• Optique, Houard, <i>De Boeck</i>

Leçon assez lourde en terme de notation donc il faut faire attention. En plus de cela bien vérifier que les indices soient bon et valable pour chaque formule il doit y avoir des coquilles. Sinon il est important de bien faire les manip donc si c'est trop long ne pas hésiter à ne pas aborder la partie laser ou bien abréger tous les calculs pour aller à l'essentiel.

## Introduction

La lumière est un objet qui est souvent manipulé par le physicien et qui peut être modélisée de multiples manières. Une des modélisations possible, le photon, fait lien avec la nature quantique de l'atome et des niveaux discrets d'énergie dû au confinement de celui-ci. Nous allons donc étudier les divers moyens d'émission de la lumière et l'absorption de celle-ci.

### 1. Phénomène d'émission

#### a) Source thermique

**MANIP : Lampe à filament - détail à la fin.**

Le rayonnement électromagnétique émis par les corps condensés, en équilibre thermique à une température  $T$ , peut se ramener à celui d'un corps idéal, appelé corps noir,

qui possède des propriétés universelles, c'est à dire indépendantes de la composition de ces corps.



La propriété essentielle d'un corps noir, qui permet de le définir, est qu'il absorbe toutes les radiations qu'il reçoit. Par exemple, un petit trou percé à la surface d'un corps creux constitue un corps noir : tout rayonnement qui pénètre dans la cavité n'en ressort pas, car il est absorbé à la suite de multiples réflexions sur la surface intérieure du corps. L'énergie ainsi échangée par un tel corps ne sert qu'à modifier sa température, laquelle détermine le rayonnement électromagnétique émis. À température ordinaire (293K), le rayonnement qu'émet un corps noir est pauvre en radiations visibles ; il semble donc noir, d'où son nom. À une température plus élevée, ce même corps émet un rayonnement qui peut être visible.

La grandeur qui permet de mesurer le rayonnement émis est l'existence spectrale  $M_\nu$ , c'est à dire le flux énergétique (puissance rayonnée) par unité de surface émissive et par unité de fréquence  $\nu$ . Les physiciens ont montré à la fin du XIXe siècle que la densité spectrale d'énergie  $w_\nu$  du rayonnement électromagnétique (la répartition de l'énergie volumique du champ électromagnétique selon ses composantes monochromatiques) est donnée par :

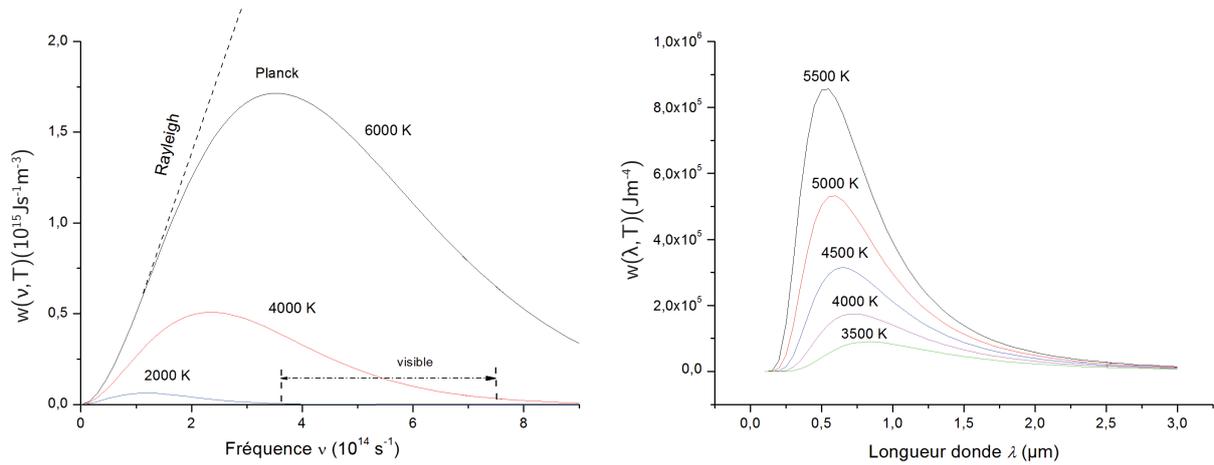
$$w_\nu = \frac{4M_\nu}{c} \quad (1)$$

Mais pour un corps noir son rayonnement émis dépend de sa température. C'est Planck qui donna la relation entre  $w_\nu$  et la température par la loi qui porte son nom :

$$w_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(\beta h\nu) - 1} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow M_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(\beta h\nu) - 1}$$

avec  $\beta = 1/(k_B T)$  et  $h$  la constante de Planck.



On peut alors représenter  $w_\nu$  en fonction de  $\nu$  pour différentes températures : on remarque que pour une température fixée,  $w_\nu$  passe par un maximum pour une certaine valeur de  $\nu$ .

Aux basses fréquences ( $h\nu/k_B T \ll 1$ ), on a  $\exp(\beta h\nu) - 1 \approx \beta h\nu$ , de sorte que l'on trouve la forme en  $\nu^2 T$  proposée par Rayleigh :

$$w_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3\beta} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \quad (3)$$

Aux hautes fréquences ( $h\nu/k_B T \gg 1$ ), on aboutit à l'expression de Wien :

$$w_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \exp(-\beta h\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) \quad (4)$$

La distribution spectrale du rayonnement, selon ses composantes monochromatiques, que l'on obtient expérimentalement à l'aide de spectromètres (prisme ou réseau), est le plus souvent donnée, en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  (dans le vide), par la densité monochromatique d'énergie électromagnétique  $w_\lambda(\lambda, T)$ , laquelle est liée à la densité spectrale d'énergie  $w_\lambda(\nu, T)$  par la relation :

$$w_\lambda(\lambda, T)d\lambda = -w_\nu(\nu, T)d\nu \text{ soit } w_\lambda(\lambda, T) = -w_\nu(\nu, T) \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} w_\nu(\nu, T) \text{ car } \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$$

On a alors :

$$w_\lambda(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\beta hc/\lambda) - 1} \quad (5)$$

On remarque que cette courbe passe par un maximum pour une longueur d'onde  $\lambda_m$  reliée à la température absolue  $T$  par la loi :

$$\lambda_m T \approx 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K} \quad (6)$$

Plus la température est grande, plus la longueur d'onde  $\lambda_m$  est petite.

On peut également montrer à partir de ces formulations la loi de Stefan-Boltzmann : on cherche à exprimer la puissance surfacique totale (pour toutes les pulsations) émises par un corps noir. Si  $\phi_e$  est la puissance émise par unité de surface d'un corps noir, on a  $d\phi_e/d\omega = cw_\nu/4$ . La puissance totale étant obtenue en sommant toutes ces puissances pour chaque pulsation, on cherche donc à calculer :

$$\int_0^\infty \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/(k_B T)) - 1} d\omega \quad (7)$$

En effectuant le changement de variable  $x = \hbar\omega/(k_B T)$  il vient :

$$P_S = \frac{(k_B T)^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x) - 1} dx = \sigma T^4 \quad (8)$$

avec  $\sigma = \frac{k_B^4}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} \frac{\pi^4}{15} \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \text{W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ . On peut vérifier cette loi expérimentalement !

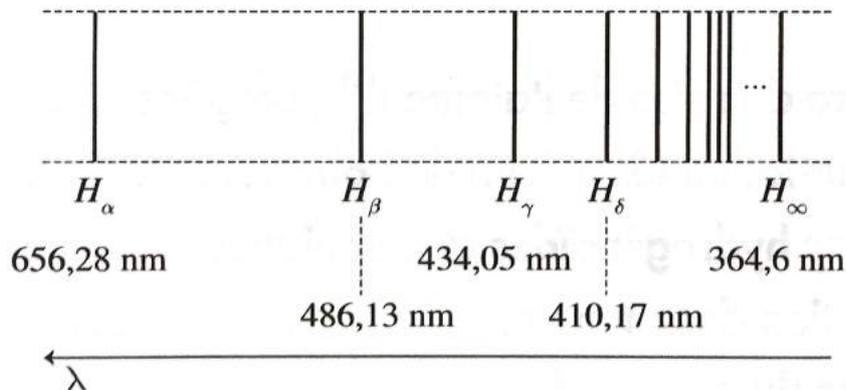
## b) Source spectrale

Alors que le spectre d'émission d'une lampe à incandescence est continu et passe par un maximum qui dépend de la température, conformément à l'analyse de Planck, le spectre d'émission d'une lampe à vapeur de mercure, par exemple, est formé de raies : c'est ce que l'on peut montrer en utilisant un réseau. Ce système donne alors de la fente plusieurs images associées à chacune des composantes monochromatiques du rayonnement émis par la source.

### Spectre de Raies de l'atome d'hydrogène

**MANIP : Faire la manip avec la lampe d'hydrogène et spectromètre à fibre optique pour la mesure de la constante de Rydberg page 134 du Duffait.**

Dans le domaine visible, le spectre de l'atome d'hydrogène présente de nombreuses raies dont la plus intense est la raie rouge  $H_\alpha$ , de longueur d'onde  $\lambda_\alpha \approx 656 \text{nm}$ . Au fur et à mesure que l'on s'approche des faibles longueur d'onde et donc du violet, les raies se resserrent jusqu'à une raie limite  $H_\infty$  de longueurs d'onde  $\lambda_\infty \approx 365 \text{nm}$ . C'est ce que découvrit l'astronome Huggins en 1881 en observant le spectre du rayonnement émis par les étoiles.



En 1885, Johann Balmer, remarqua que les longueurs d'onde de ces raies pouvaient être retrouvées à l'aide d'une formule simple comportant des nombres entiers :

$$\lambda = B \frac{n^2}{n^2 - 4} \quad (9)$$

avec  $n > 2$ . Ce qui fut écrit par le physicien Johannes Rydberg sous l'autre forme :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (10)$$

où  $R_H = 4/B = 10967758,10 \text{m}^{-1}$  est la constante de Rydberg. On peut ainsi retrouver les valeurs des longueurs d'onde  $\lambda_\alpha$  et  $\lambda_\infty$  de  $H_\alpha$  et  $H_\infty$  respectivement par :

$$\frac{1}{\lambda_\alpha} = R_H \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) \text{ et } \frac{1}{\lambda_\infty} = R_H \frac{1}{4}$$

En généralisant la formule de Rydberg devient :

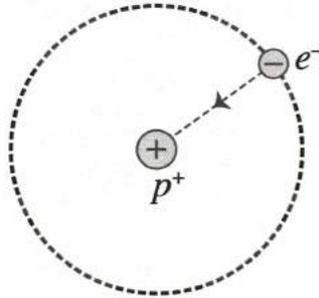
$$\frac{1}{\lambda_m} = R_H \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (11)$$

avec  $m < n$ . pour  $m = 1$  on obtient la série ultraviolette trouvée par Lyman en 1906 ; à  $m = 2$  correspond la série visible de Balmer et aux valeurs  $m = 3, 4, 5$  et  $6$  sont associées respectivement les séries infrarouges découverte par Pashen en 1908, Brackett en 1922, Pfund en 1924 et Humphreys en 1953.

### Quantification des énergies

Historiquement, les raies du spectre des atomes furent observées pour la première fois par Kirchoff et Robert Busen en dans les années 1850 ; le physicien suédois Anders Angström obtient, en 1853, le spectre du corps le plus simple l'hydrogène.

Ce n'est qu'en 1913 qu'une première interprétation de ce spectre fut proposée par Bohr. Le point de départ de sa théorie fut la formule de Balmer et le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, tel qu'il avait été initialement élaboré par Rutherford : l'électron décrit uniformément un cercle, sous l'action de la force électrique exercée par le proton  $e$ , à la manière d'une planète dans son mouvement autour du Soleil sous la force de la force de gravitation. Bohr proposa ce modèle planétaire en 1913, après un séjour de quatre mois à Manchester dans le laboratoire dirigé par Rutherford



Dans le référentiel du laboratoire, dans lequel le proton beaucoup plus massif que l'électron est supposé fixe, l'application de la loi fondamentale de la dynamique à l'électron, en mouvement circulaire uniforme, donne l'équation vectorielle suivante, la force électrique étant bien plus intense que la force de gravitation mutuelle et que la force de pesanteur terrestre :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \vec{e}_r \text{ soit } a_n = \frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{q_e^2}{r^2} \text{ avec } q_e^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

en explicitant l'accélération normale. On en déduit l'énergie cinétique  $E_k$  de l'électron et l'énergie potentielle  $E_p$  d'interaction dont l'origine est prise pour  $r$  infini :

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{q_e^2}{2r} \text{ et } E_p = -\frac{q_e^2}{r}$$

d'où les relations suivantes, analogues à celles d'un satellite artificiel en mouvement circulaire autour de la Terre, entre  $E_k$ ,  $E_p$  et l'énergie mécanique de l'électron  $E_m = E_k + E_p$  :

$$E_m = E_k + E_p = -\frac{q_e^2}{2r} = \frac{E_p}{2} = -E_k \quad (12)$$

Bohr formula deux hypothèses :

1. Dans certains états de l'atome d'hydrogène dits stationnaires, pour lesquels le moment cinétique est un multiple entier de  $\hbar$ , l'électron, en mouvement circulaire uniforme, bien qu'accélééré, ne rayonne pas d'énergie.

Il vient donc en introduisant l'entier  $n$  :

$$\vec{L}_n = \vec{r} \wedge \vec{p} = L_n \vec{e}_z \text{ avec } L_n = m_e v_n r_n = n\hbar$$

Comme, en outre  $E_k = m_e v_n^2 / 2 = q_e^2 / (2r_n)$ , on obtient, en éliminant la vitesse, le rayon  $r_n$  de la trajectoire :

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2}{m_e q_e^2} = n^2 r_1 \text{ avec } r_1 = \frac{\hbar^2}{m_e q_e^2} = \frac{4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} \approx 52,9 \cdot 10^{-12} m \quad (13)$$

représente une longueur caractéristique en physique atomique, appelée le rayon de l'atome de Bohr et noté  $a_B$ .

2. L'émission de la lumière par un atome d'hydrogène est due à des transitions entre deux états stationnaires, et l'énergie des photons émis est égale à la différence des énergies de l'atome dans les deux états considérés.

Ainsi la longueur d'onde du rayonnement émis est reliée à la différence de niveaux d'énergie par :

$$E_i - E_f = h\nu_{if} = h \frac{c}{\lambda_{if}} \quad (14)$$

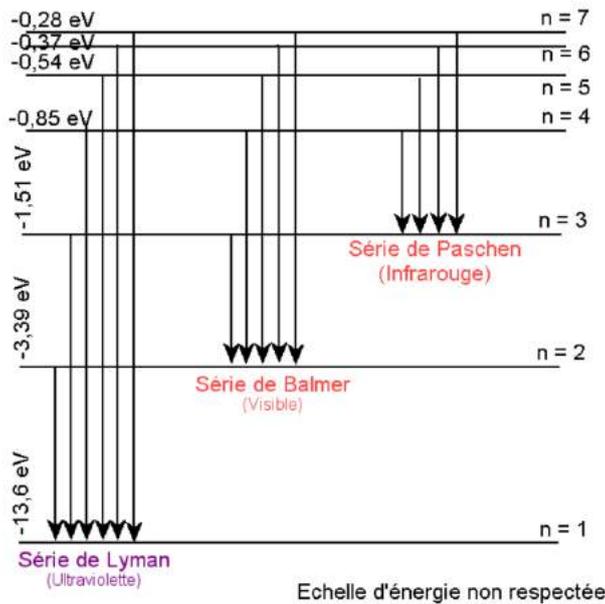
Cette dernière expression justifie l'utilisation du nombre d'onde spectroscopique  $\sigma_{if} = 1/\lambda_{if}$ .

Comme l'énergie est directement reliée au rayon de la trajectoire il vient :

$$E_m = -\frac{q_e^2}{2r_n} = -\frac{q_e^2}{2a_B n^2} \text{ soit } E_m = -\frac{Ry}{n^2} \text{ avec } Ry = \frac{q_e^2}{2a_B} = \frac{m_e q_e^4}{2\hbar^2} = \frac{m_e c^2}{2} \alpha_e^2$$

$Ry$  est le rydberg et  $\alpha_e = q_e^2 / (\hbar c) \approx 1/137$  la constante de structure fine. Finalement on trouve en calculant la valeur de  $Ry \approx 13,61 eV$  :

$$E_m(eV) \approx -\frac{13,61}{n^2} \quad (15)$$



**Rq :** Voir les remarques qui sont importantes page 73 du Perez.

Ainsi la transition de l'état d'énergie  $E_n$  vers l'état d'énergie plus faible  $E_m$ , avec  $E_m < E_n$ , se traduit par l'émission d'un rayonnement de fréquence :

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h} = \frac{Ry}{h} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (16)$$

En posant  $\lambda_{nm} = c/\nu_{nm}$  on retrouve la formule de Rydberg.

**Rq :** Limites du modèle de Bohr page 83 du Perez.

### c) Émission induite et spontanée

On a vu que finalement l'électron, pour passer d'un niveau à un autre va émettre un rayonnement caractérisé par une fréquence/longueur d'onde et une énergie. Pour le modèle de l'hydrogène c'est relativement simple mais pour les atomes polyélectroniques c'est plus compliqué. Néanmoins on sait que l'énergie du système qui échange de l'énergie avec la lumière est quantifiée. Le niveau dont l'énergie est la plus faible est le niveau fondamental, les autres sont les niveaux excités.

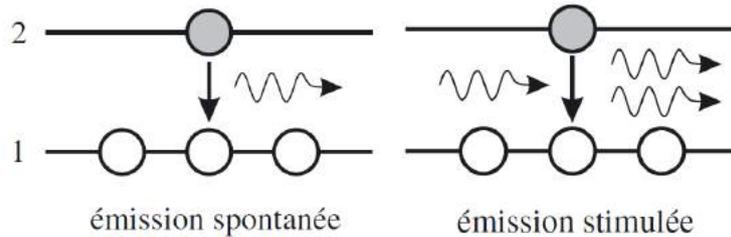
Soit deux niveaux d'énergie  $E_1$  et  $E_2 > E_1$ . Alors seules les fréquences voisines de  $\nu_a = (E_2 - E_1)/h$  ont une probabilité appréciable d'interagir avec le système. Ces niveaux sont caractérisés par :

- Les nombres d'atomes par unité de volume  $N_1$  et  $N_2$  se trouvant respectivement dans les niveaux 1 et 2 ;
- Chaque niveau d'énergie est aussi caractérisé par sa dégénérescence  $g_i$  : le niveau peut alors être considéré comme un ensemble de  $g_i$  sous niveaux de même énergie ;
- la durée de vie  $\tau_i$  du niveau d'énergie  $E_i$ . C'est le temps caractéristique de dépeuplement de ce niveau : si la population du niveau est  $N_i(0)$  à  $t = 0$ , elle sera à l'instant  $t > 0$  égale à  $N_i(t) = N_i(0) \exp(-t/\tau)$ . Le taux de relaxation  $\gamma_i = 1/\tau_i$  (inverse de la durée de vie).

À l'équilibre thermodynamique, la population des niveaux suit la loi de Boltzmann. Les populations de deux niveaux 1 et 2 sont reliées par :

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1}{g_2} \exp(-(E_1 - E_2)/k_B T) \quad (17)$$

On s'intéresse ici aux principaux processus d'interaction entre un atome à deux niveaux d'énergie  $E_1$  et  $E_2$ , et un rayonnement électromagnétique. Ces processus typiquement quantiques ont trouvé leur modélisation grâce aux travaux d'Einstein en 1917 : ce sont dans le cadre de l'émission, l'émission spontanée et l'émission induite. Dans chaque cas l'atome subit une modification de son énergie de la quantité  $E_2 - E_1$ .



### Émission spontanée

Dans ce processus un atome transite spontanément du niveau 2 vers le niveau 1 en émettant un photon d'énergie  $h\nu_a$ . Le niveau 2 se dépeuple au profit du niveau 1. La probabilité ou taux d'émission spontanée par atome et par unité de temps, notée  $A_{21}$ , est dénommée coefficient d'Einstein. Elle s'exprime en  $s^{-1}$ . La population du niveau 2 varie de la quantité  $dN_{2sp}$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  suivant la loi :

$$dN_{2sp} = -A_{21}N_2dt \quad (18)$$

où le signe moins indique le dépeuplement du niveau 2. Cette équation signifie aussi que le nombre de photons émis par unité de temps et de volume est égale à  $A_{21}N_2$ . Au cours du processus la population  $N_1$  augmente de la même quantité :

$$dN_{1,sp} = +A_{21}N_2dt \quad (19)$$

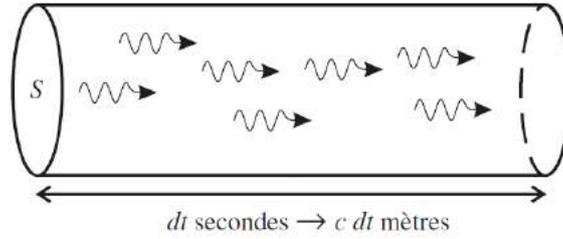
On remarque cette fois le signe "plus". La loi de dés-excitation de la population du niveau 2 liée à l'émission spontanée est exponentielle :

$$N_2(t) = N_2(t=0) \exp(-t/\tau) \quad (20)$$

$\tau = 1/A_{21}$  la durée de vie radiative du niveau 2.

L'intensité d'un faisceau de lumière est proportionnelle au flux de photon  $\mathcal{F}$ , c'est à dire au nombre de photons incidents par unité de surface et de temps (unité :  $s^{-1}m^{-2}$ ). La variation d'intensité lumineuse en terme de flux de photons peut s'obtenir en remarquant que les photons qui traversent la surface  $S$  pendant le temps  $dt$  occupent un volume  $Scdt$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le milieu. Les  $A_{21}N_2$  photons émis par unité de temps et de volume correspondent donc à une variation de flux :

$$d\mathcal{F}_{sp} = A_{21}N_2c dt \quad (21)$$



## Émission induite

Le processus d'émission induite, ou émission stimulée, est sans doute le moins intuitifs des concepts. C'est pourtant lui qui est à la base du fonctionnement des lasers. Lors de l'émission induite, un photon d'énergie  $h\nu_a$  induit la dés-excitation d'un atome du niveau 2 sur le niveau 1. Celle-ci s'accompagne de l'émission d'un photon de caractéristiques identiques à celles du photon inducteur : même fréquence, même direction de propagation et même état de polarisation. Le faisceau incident de lumière "s'enrichit" en photons identiques et il y a amplification de la lumière. Le bilan de ces processus pour les populations est le suivant :

$$\begin{aligned} dN_{2ind} &= -\sigma_{21}\mathcal{F}N_2dt \\ dN_{1ind} &= +\sigma_{21}\mathcal{F}N_2dt \end{aligned} \quad (22)$$

avec  $\sigma_{21}$  la section efficace d'émission stimulée et  $\sigma_{21}\mathcal{F}$  la probabilité d'émission stimulée. En utilisant les coefficients d'Einstein :

$$\begin{aligned} dN_{2ind} &= -B_{21}w_{\nu}(\nu_{21})N_2dt \\ dN_{1ind} &= +B_{21}w_{\nu}(\nu_{21})N_2dt \end{aligned} \quad (23)$$

Pour le nombre de photons, on obtient :

$$d\mathcal{F}_{ind} = \sigma_{21}\mathcal{F}N_2c dt \quad (24)$$

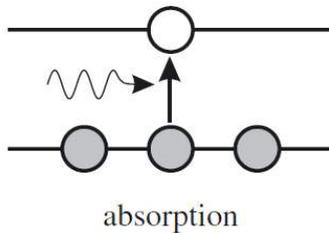
Il pourrait sembler que l'émission induite est un processus similaire à l'émission spontanée, mais cependant deux propriétés fondamentales les distinguent :

- dans l'émission spontanée, la présence préalable de photons n'est nullement nécessaire. En revanche dans l'émission induite, c'est un photon qui déclenche le processus. L'émission induite est donc caractérisé par un taux proportionnel à  $\mathcal{F}$ , alors que le taux d'émission spontanée en est indépendant ;
- le photon créé par émission induite possède les mêmes propriétés que le photon déclencheur (fréquence, direction de propagation, état de polarisation). Ces caractéristiques sont à la base de la cohérence des faisceaux laser. L'émission spontanée est par contre un processus désordonné, au caractère aléatoire. Par exemple elle donne naissance à un rayonnement dont toutes les directions de propagations sont équiprobables.

**Rq :** Relation entre coefficient et remarque voir page 489 du Perez, ou le BUP Barrat, ou Hennequin page 6.

## 2. Absorption

### a) Définition



En continuant avec les mêmes considérations, c'est à dire dans le cas de deux niveaux d'énergie, dans le processus d'absorption, un atome du niveau 1 atteint le niveau 2 en absorbant un photon d'énergie  $h\nu_a$  : le niveau 2 se peuple aux dépens du niveau 1. L'absorption est un processus induit par le champ électromagnétique : la probabilité de transition par atome et par unité de temps est donc proportionnelle au flux de photons. On l'écrit sous la forme  $\sigma_{12}\mathcal{F}$  (en  $s^{-1}$ ). Compte tenu de la dimension de  $\mathcal{F}$ , le coefficient de proportionnalité  $\sigma_{12}$  possède la dimension d'une surface et porte le nom de section efficace d'absorption. C'est une grandeur caractéristique du milieu atomique. Sa valeur est déterminée dans le cadre de la description quantique du couple entre le champ et le milieu atomique. Le nombre d'atomes du niveau 2 varie de la quantité  $dN_{2abs}$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  suivant la loi :

$$dN_{2abs} = +\sigma_{12}\mathcal{F}N_1dt \quad (25)$$

En utilisant les coefficients d'Einstein :

$$dN_{2abs} = +B_{12}w_{\nu}(\nu_{12})N_1dt \quad (26)$$

avec  $w_{\nu}(\nu_{12})$  l'énergie électromagnétique volumique spectrale à la fréquence  $\nu_{12}$ .  $B_{12}$  le coefficient relatif à l'absorption ( $J^{-1}m^3$ ). Dans le même temps, la population du niveau 1 diminue :

$$dN_{1abs} = -B_{12}w_{\nu}(\nu_{12})N_1dt \quad (27)$$

et le nombre de photon absorbés est :

$$d\mathcal{F}_{abs} = \sigma_{12}\mathcal{F}N_1cdt \quad (28)$$

**Rq :** La condition d'équilibre entre l'atome et le rayonnement se traduit par deux relations importantes :

- si les niveaux 1 et 2 possèdent la même dégénérescence, les sections efficaces d'absorption et d'émission induite sont égales :

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma \Leftrightarrow \frac{B_{12}}{B_{21}} = \frac{g_2}{g_1} \quad (29)$$

- le rapport entre l'émission induite et l'émission spontanée s'écrit :

$$\frac{\sigma\mathcal{F}}{A_{21}} = \frac{\lambda^2\mathcal{F}}{8\pi\Delta\nu} \Leftrightarrow \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h}{c^3}\nu_{12}^3 \quad (30)$$

## b) Application à la chimie

**MANIP : Faire la manip sur l'absorption du KMnO4 page 130 du Duffait.**

On peut appliquer ce genre de raisonnement à la chimie : on considère une onde EM plane d'intensité  $I$  se propageant dans un milieu où les photons peuvent entrer en résonance avec une paire de niveaux. Il peut donc y avoir une absorption et émission (stimulée ou spontanée) de photons, et l'intensité de l'onde va changer au fur et à mesure que l'onde se propage dans le milieu.

Soit deux états, 1 et 2 (de plus haute énergie). La probabilité d'occurrence de l'état 1 vers le 2 pendant  $dt$  est :

$$dW_{12}dt = \frac{dN_1}{N_1} = B_{12}w_\nu dt \quad (31)$$

où  $w$  est la densité spectrale de puissance du rayonnement électromagnétique. De la même manière, l'atome peut descendre de l'état 2 à l'état 1 et la probabilité associée à cette dés-excitation est :

$$dW_{21}dt = (A_{21} + B_{21}w_\nu)dt \quad (32)$$

Dans le cadre de ces hypothèses, la condition d'équilibre est obtenue sous la forme  $N_1dW_{12} = N_2dW_{21}$ .

Nous allons établir un bilan d'énergie pour les photons dans le mode  $(\vec{k}, \vec{r})$ . La conservation de l'énergie appliquée à un élément de volume infinitésimal s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{I}_{\vec{k}, \vec{r}} = h\nu(N_2W_{21} - N_1W_{12} + N_2A_{21,(\vec{k}, \vec{r})}) \quad (33)$$

Le membre de gauche décrit la divergence du vecteur de Poynting et celui de droite le taux de production de puissance électromagnétique par unité de volume dans le mode  $(\vec{k}, \vec{r})$ , en  $W/m^3$ . Le membre de droite contient l'émission stimulée  $W_{21}$ , l'absorption  $W_{12}$  et la partie d'émission spontanée émise dans le mode  $\vec{k}, \vec{r}, A_{21, \vec{k}, \vec{r}}$ .

En règle générale l'émission spontanée se produit dans une très grande quantité de modes différentes (dans toutes les directions, sur toute la largeur spectrale de la raie d'émission considérée, dans l'une ou l'autre polarisation s'il y a polarisation), et donc seulement une infime partie de celle-ci se fera dans le mode considéré. On peut donc négliger le dernier terme du membre de droite puisque  $A_{21,(\vec{k}, \vec{r})} \ll W_{21}$ .

De plus dans le cas unidimensionnel selon l'axe  $\vec{e}_z$  on a  $\vec{\nabla} = \partial/\partial z$ . Il vient alors :

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial z} = h\nu(N_2W_{21} - N_1W_{12}) \quad (34)$$

Or  $W$  doit être proportionnel à l'intensité  $I$  de l'onde électromagnétique incidente, et donc au flux de photon donc :  $W = I\sigma/(h\nu)$  car dans le cas d'une même dégénérescence  $\sigma_{21} = \sigma_{12}$ . Alors :

$$\frac{dI}{dz} = (N_2 - N_1)\sigma I \quad (35)$$

On définit alors le coefficient d'absorption  $\kappa$  ( $m^{-1}$ ) comme le rapport entre la fraction du rayonnement absorbé par une couche d'épaisseur  $\delta z$  sur l'épaisseur de cette couche, soit :

$$\kappa \equiv \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-\Delta I/I}{\Delta z} = -\frac{1}{I} \frac{dI}{dz} \quad (36)$$

Par identification on a :

$$\kappa = (N_1 - N_2)\sigma \quad (37)$$

La résolution de l'équation différentielle en prenant  $\kappa$  constante donne la loi de Beer-Lambert :

$$I = I_0 \exp(-\kappa x) \quad (38)$$

$\kappa$  peut aussi s'exprimer comme étant :

$$\kappa = \epsilon C \quad (39)$$

avec  $\epsilon$  le coefficient d'extinction molaire et  $C$  la concentration molaire.

Sur l'exemple du KMnO4 on voit bien que l'on a pas un spectre continu mais des pics traduisant la capacité du milieu à absorber certaines longueurs d'onde caractérisant le changement de niveau d'énergie des photons.

### 3. Le Laser

Le laser est un des domaines qui réunis les phénomènes d'émissions et d'absorption des photons. On va essayer de modéliser un laser à deux niveaux pour comprendre son fonctionnement.

#### a) Dynamique des populations et du flux de photons

##### Sous l'effet de l'émission stimulée et de l'absorption

Considérons un milieu atomique en interaction avec un champ électromagnétique. Un tel milieu compte un grand nombre de niveaux. La prise en compte de tous ces niveaux mène à un modèle complexe difficilement exploitable. Soit deux niveaux d'énergie tel que  $E_2 > E_1$  et  $E_2 - E_1 = h\nu_a$ . Ces deux états sont les niveaux de la transitions laser. Les populations  $N_1$  et  $N_2$  de ces deux variables représentatives de l'oscillation laser sont d'une part les populations  $N_1$  et  $N_2$  et d'autre part le flux de photon  $\mathcal{F}$ .

Dans le cas où les deux niveaux ont la même dégénérescence et si on s'intéresse qu'aux transitions induites on a :

$$\begin{aligned} \dot{N}_2 &= -\sigma\mathcal{F}(N_2 - N_1) \\ \dot{N}_1 &= \sigma\mathcal{F}(N_2 - N_1) \\ \dot{\mathcal{F}} &= c\sigma\mathcal{F}(N_2 - N_1) \end{aligned} \quad (40)$$

Où le point symbolise la dérivé temporelle. Si  $N_2 < N_1$  alors les transitions atomiques se produisent préférentiellement du niveau bas vers le niveau haut : il y a plus d'absorption que d'émission induite ( $\dot{\mathcal{F}} < 0$ ) et le milieu est donc globalement absorbant. Au contraire, si  $N_2 > N_1$ , il y a plus d'émission induite que d'absorption : le milieu fournit de l'énergie au champ et il y a donc amplification du flux de photons ( $\dot{\mathcal{F}} > 0$ ). C'est ce phénomène qui est à la base de fonctionnement du laser. Dans ces conditions, le milieu est dit en état d'inversion de population, car la situation  $N_2 > N_1$  est inverse de celle de l'équilibre thermodynamique.

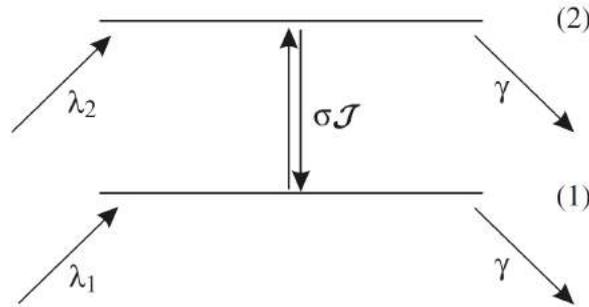
Il apparait donc ici que la variable représentative de l'oscillation laser est davantage la différence de population que les populations des deux niveaux. Il est donc commode d'introduire cette différence sous la forme :

$$D = N_2 - N_1 \quad (41)$$

L'inversion de population est alors effectivement réalisée quand  $D > 0$  et les équation deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{D} &= -2\sigma\mathcal{F}D \\ \dot{\mathcal{F}} &= c\sigma\mathcal{F}D \end{aligned} \quad (42)$$

### Sous l'effet du pompage et de la relaxation



Ainsi l'amplification lumineuse ne se produit que dans un milieu en état d'inversion de population ( $N_2 > N_1$ ). Il est donc nécessaire d'augmenter la population du niveau 2 par rapport à celle du niveau 1. Ceci est réalisé par des processus dits de pompage qui excitent des atomes à partir d'autres états d'énergie, comme par exemple le niveau fondamental, vers l'état d'énergie  $E_2$ . Cette opération implique bien évidemment un apport extérieur d'énergie. Nous ne détaillerons pas les différents mécanismes de pompage, mais introduisons, dans le cadre d'une description simplifiée, des termes de source accroissant pendant le temps  $dt$  les populations  $N_1$  et  $N_2$  d'une quantité :

$$dN_2 = \lambda_2 dt \text{ et } dN_1 = \lambda_1 dt$$

Les termes sources  $\lambda_i$  traduisent les apports extérieurs d'atomes sur les niveaux de la transition laser et contribuent à leur peuplements. Nous devons considérer les processus de dépeuplement par relaxation de ces niveaux : on suppose, pour la simplicité, qu'ils possèdent le même taux de relaxation  $\gamma$ . L'émission spontanée du niveau haut vers le bas n'est pas pris en compte : dans le bilan des photons, elle est négligeable devant l'émission induite et dans le bilan des populations on la suppose petite devant les autres processus de relaxation.

La variation des populations au cours du temps vérifie :

$$\begin{aligned} \dot{N}_2 &= -\gamma N_2 + \lambda_2 \\ \dot{N}_1 &= -\gamma N_1 + \lambda_1 \end{aligned} \quad (43)$$

A l'équilibre et en absence de champ ( $\dot{N}_1 = \dot{N}_2 = 0$ ), les populations tendent vers leur valeur stationnaire  $\hat{N}_i = \lambda_i/\gamma$ . Alors :

$$\dot{D} = -\gamma(D - \hat{D}) \quad (44)$$

avec  $\hat{D} = \hat{N}_2 - \hat{N}_1$ , et on a :

$$D(t) = \hat{D}(1 - \exp(-\gamma t)) \quad (45)$$

## b) Équations du laser

L'évolution de l'inversion de population obéit donc :

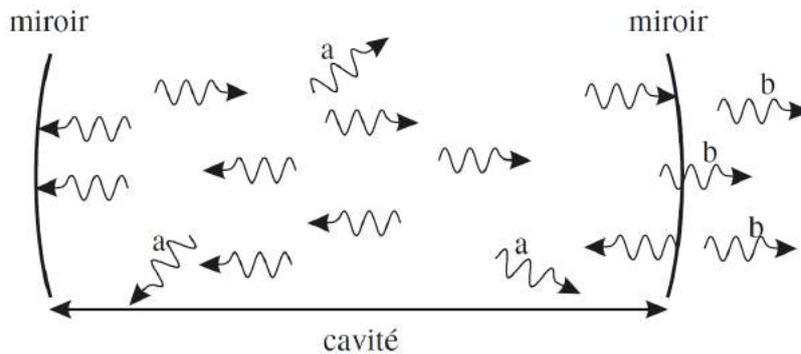
$$\dot{D} = \underbrace{-\gamma(D - \hat{D})}_{\text{relaxation}} \quad \underbrace{-2\sigma\mathcal{F}D}_{\text{interaction matiere-rayonnement}} \quad (46)$$

Il apparait donc comme un couple non linéaire entre ces deux variables.

Pour décrire l'évolution globale du flux de photons, il nous faut tenir compte des pertes de photons (ou perte de cavité) introduites par un taux de relaxation noté  $\kappa$ . Ce taux exprime la décroissance par unité de temps du nombre de photons dans la cavité (due à l'absorption ou la diffusion sur les optiques). De plus il est indispensable de prélever une partie du rayonnement sinon aucune lumière ne sortirait de la cavité et il y aurait aucune utilité. Des pertes sont donc introduites volontairement en réalisant des cavités formées de miroirs particulièrement réfléchissants. L'équation d'évolution du flux de photons dans la cavité est :

$$\dot{\mathcal{F}} = \underbrace{-\kappa\mathcal{F}}_{\text{pertes}} \quad \underbrace{+c\sigma\mathcal{F}D}_{\text{gain non lineaire}} \quad (47)$$

On a établi les équations dites du laser.



## c) Seuil d'oscillation et régimes stationnaires

### Seuil d'oscillation

On a montré que le flux de photon  $\mathcal{F}$  du laser est gouverné par deux effets antagonistes cas de signes opposés : les pertes diminuent  $\mathcal{F}$  tandis que les transitions induites engendrent un gain si  $D$  est positif. Si les pertes l'emportent,  $\dot{\mathcal{F}}$  est négatif et  $\mathcal{F}$  diminue asymptotiquement jusqu'à la valeur nulle : le laser ne fonctionne plus.

Inversement le laser démarre et  $\mathcal{F}$  tend vers une valeur stationnaire obtenue quand il y a égalité entre les deux termes, c.a.d. quand le gain égale les pertes. Cette condition est appelée le seuil du laser :

$$D\sigma c = \kappa \quad (48)$$

Elle exprime une inversion de population au seuil  $D_s$  :

$$D_s = \frac{\kappa}{\sigma c} \quad (49)$$

Il faut donc pour que le laser fonctionne que  $\widehat{D} > D_s$ . Les équations de laser se réécrivent :

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{F}} &= -\kappa\mathcal{F}\left(1 - \frac{D}{D_s}\right) \\ \dot{D} &= -\gamma D_s\left(\frac{D}{D_s} - A\right) - 2D\sigma\mathcal{F}\end{aligned}\tag{50}$$

où le paramètre de pompage  $A$  est égale à  $A = \widehat{D}/D_s$ . La condition de seuil est alors  $A = 1$ .

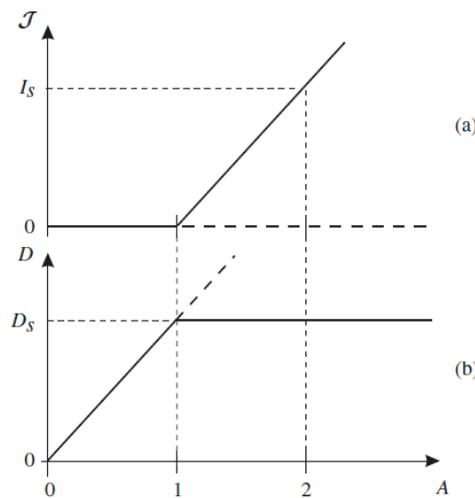
### Régimes stationnaires

En régime stationnaire, les dérivées temporelle sont nulles et on a alors :

$$\begin{aligned}\text{solution (1)} &: \begin{cases} \mathcal{F} = 0 \\ D/D_s = A \end{cases} \\ \text{solution (2)} &: \begin{cases} \mathcal{F} = \frac{\gamma}{2\sigma}(A - 1) \\ D/D_s = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

La première existe toujours, alors que la deuxième n'a de sens physique que pour  $A \geq 1$ . L'analyse de stabilité des solutions stationnaires du laser aboutit à :

- sous le seuil  $A < 1$  ( $\widehat{D} < D_s$ ), seule la solution (1) existe et est stable.  $D$  suit linéaire la pompe. Sous le seuil, les pertes l'emportent sur le gain et le laser n'oscille pas (il ne délivre aucune intensité).
- au-dessus du seuil :  $A \geq 1$  la solution (1) est instable : la moindre perturbation est amplifiée et conduit le laser à s'en éloigner en fonction du temps. En revanche a solution (2) est stable :  $D$  est une constante tandis que  $\mathcal{F}$  croît linéairement avec la pompe. C'est le régime de fonctionnement stationnaire du laser.



Régime stationnaire du laser : évolution de (a) l'intensité et (b) l'inversion de population en fonction du paramètre de pompe  $A$ . La solution instable est représentée en pointillés.

La figure illustre ces régimes. Au dessus du seuil la relation entre le flux de photon et le paramètre de pompage est :

$$\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_s} = A - 1\tag{51}$$

où l'on introduit  $\mathcal{F}_s = \gamma/2\sigma$  intensité de saturation. Ce paramètre apparait comme la valeur du flux de photons lorsque  $A = 2$ .

## d) Gain du laser

D'après l'équation (43) on peut écrire :

$$\frac{d\mathcal{F}}{dz} = \dot{\mathcal{F}} \frac{dt}{dz} = D\sigma\mathcal{F} \quad (52)$$

On appelle  $\alpha = (1/\mathcal{F})(d\mathcal{F}/dz) = \sigma D$  le coefficient de gain ou gain par unité de longueur du laser ( $m^{-1}$ ). Le gain est proportionnel à l'inversion de population. La constante de proportionnalité est la section efficace de la transition.

En l'absence de champ, le gain est donnée par :

$$\alpha_0 = \sigma\hat{D} \quad (53)$$

où le gain non saturé est  $\alpha_0$ . Une fois l'oscillation établie, le gain devient égal à  $\alpha_s = \sigma D_s \alpha_s$  porte le nom de gain saturé. On en déduit :

$$\alpha_s = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_f}} \quad (54)$$

En régime stationnaire c'est à dire pour  $\dot{\mathcal{F}} = 0$  alors on a  $\alpha_s c = \kappa$ . En faisant intervenir la vitesse de la lumière, on peut alors définir un coefficient de pertes  $p$  de même dimension que le gain et représentant la fraction du nombre de photons perdus par unité de longueur  $p = \kappa/c$ . On a alors  $\alpha_s = p$  et le régime stationnaire du laser vérifie la condition déjà établie :

$$\text{gain} = \text{pertes} \quad (55)$$

**Rq :** Voir page 496 sur le pompage optique pour système à 3 niveaux si on veut changer le contenu de cette partie.

**Rq :** Voir page 16 du Hennequin pour la conclusion de cette partie.

**Rq :** Voir page 19 du Hennequin pour laser à 3 niveaux et plus.

**Rq :** Pour avoir des équivalences en automatique pour le laser voir page 1108 du Sanz.

## Conclusion

Nous avons présenté les trois phénomènes d'absorption et d'émission de la lumière dont un très original qu'est l'émission stimulée. La fluorescence est un phénomène aussi spectaculaire qui sera étudié dans une prochaine leçon.

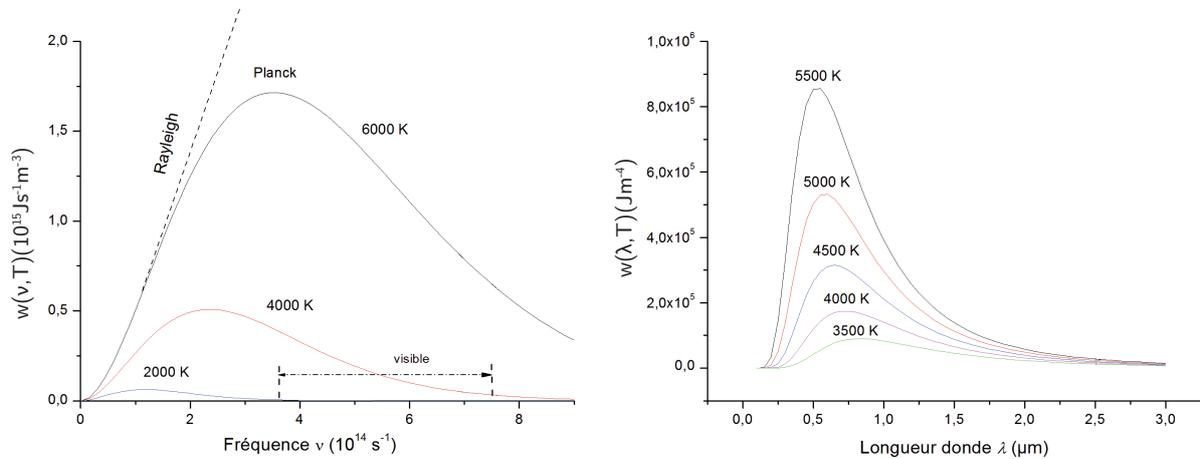
**Rq :** Pour plus d'explications sur le laser on peut aller voir le BUP.

**Rq :** Pour plus d'explications sur la fluorescence on peut jeter un œil sur le Cagnac ou bien Perez page 82.

**Rq :** Pour le refroidissement laser voir page 504 du Perez.

# MANIP : Absorption par KMnO4

On peut se fier au Duffait page 130.



On utilise le montage suivant. Il faut penser à faire le blanc c'est à dire faire traverser le faisceau à travers une cuve remplie d'eau. Puis on met la cuve d'eau + KMnO4. Attention il faut mettre très très peu de KMnO4.

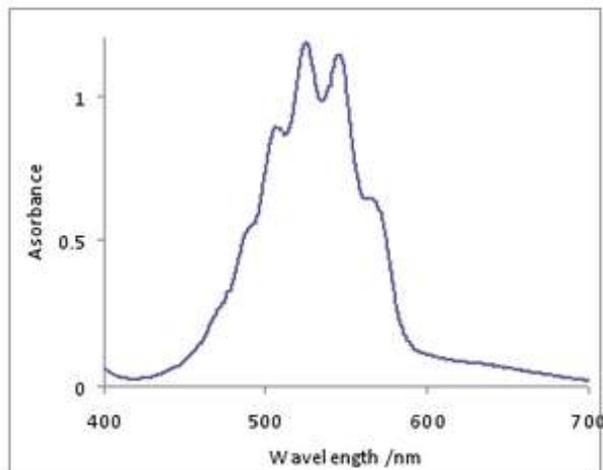
Le but de cette manip est de vérifier la loi de Beer Lambert :

$$I = I_0 \exp(-\kappa x) \quad (56)$$

avec  $\kappa = \epsilon c$  le coefficient d'absorption et  $\epsilon$  le coefficient d'extinction molaire et  $c$  la concentration molaire. Ainsi le but est de vérifier que l'on a plusieurs pic d'absorption comme le décrit la théorie et de voir que selon l'épaisseur de cuve traversé ou la concentration de l'espèce d'absorbance mesurée diffère. En effet l'appareil mesure directement :

$$A = -\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad (57)$$

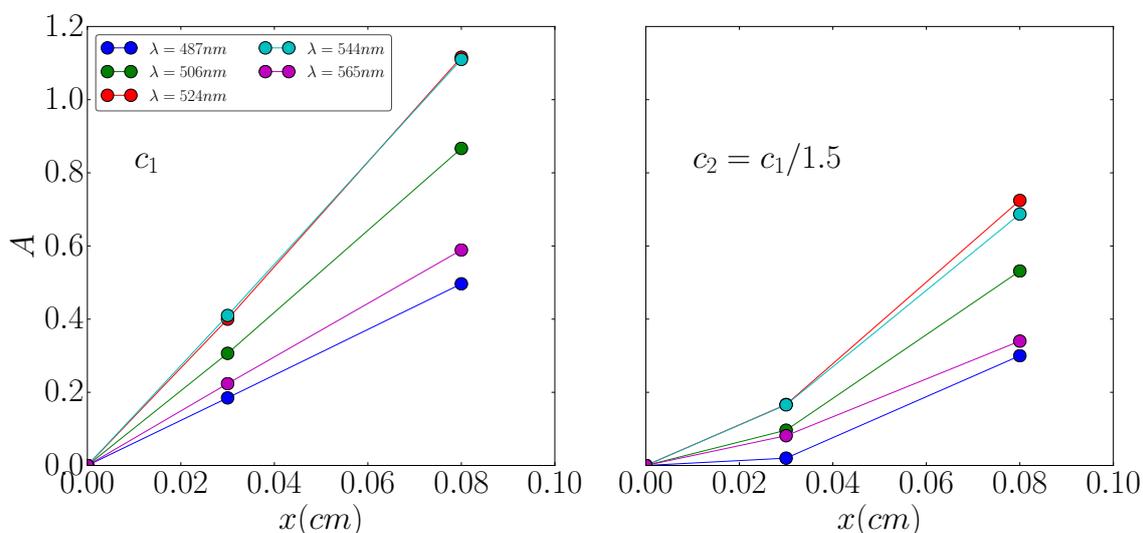
Ainsi il suffit de tracer  $A$  en fonction de  $x$  pour avoir directement  $k$  pour les différentes valeurs de longueurs d'onde absorbée. Pour changer l'épaisseur on peut tourner la cuve dans l'autre sens.



On récupère les coordonnées de chaque pic (5 pics dans notre cas).  
 On obtient les points suivants avec l'indice 1 correspondant à l'épaisseur de cuve  $e = 3cm$  et 2 à  $e = 8cm$  :

$\lambda(nm)$	487	506	524	544	565
$A_1$	0,1848	0,3065	0,4137	0,404	0,2237
$A_2$	0,4965	0,8667	1,164	1,11	0,589

On peut déjà voir que plus l'épaisseur est grande plus l'absorption est importante : c'est normal! De même quand on diminue la concentration la valeur de l'absorbance diminue de façon linéaire en principe.



En calculant la pente de chacune des courbes on peut obtenir le coefficient d'absorption qui dépend de la longueur d'onde.

**Rq** : Essayer de creuser concernant le fonctionnement des spectromètres à fibres.

**Rq** : La précision pour notre appareil est  $\Delta\lambda = 0.5nm$ . Vérifier celle de l'appareil qu'on utilisera pour pouvoir faire un calcul d'erreur sur  $\kappa$ .

## MANIP : Lampe à filament, émission corps noir

Un corps noir est un corps qui absorbe l'intégralité du flux incident. A l'équilibre, il émet donc un flux total maximal, égal au flux incident. On peut vérifier quantitativement la loi de Stefan-Boltzmann en  $T^4$  :

$$P = S\sigma T^4 \quad (58)$$

où  $P$  est la puissance émise dans un demi-espace. On ne va pas mesurer  $P$  mais plutôt  $P_e$ , la puissance électrique absorbée par la lampe à filament. L'utilisation d'un Wattmètre en amont de la lampe permet de gagner du temps car on peut y lire directement  $P_e$ . On peut également y lire  $U$ , duquel on déduit  $T$  puisque la lampe est étalonnée. Les termes de conduction et de convection étant linéaires en température, le terme de rayonnement va l'emporter à haute température et on aura alors  $P \approx P_e$ . En traçant le rapport  $UI =$

$T^4$ , on montre qu'il tend en effet vers une constante lorsque  $T$  devient grand. Suivre la procédure expérimentale du BUP Gitton. Dans cette expérience, par rapport à ce qui est présenté dans le BUP, on gagne du temps en utilisant une ampoule étalonnée (on connaît la température du filament pour une tension appliquée donnée). La température a en effet été déterminée préalablement avec un pyromètre à disparition de filament.

## MANIP : Spectre de l'hydrogène

Voir page 134 du Duffait.

On utilise dans ce cas un spectromètre à fibre optique de résolution  $\Delta\lambda = 0,5nm$ . On a alors la résolution  $R = \lambda/\Delta\lambda \approx 1000$ . On récupère les trois pics :

$\lambda_m(\text{nm})$	$n$	$m$
657,6	3	2
486,5,6	4	2
434,5	5	2

On peut alors tracer  $1/\lambda_m$  en fonction de  $(1/m^2 - 1/n^2)$ . La constante de proportionnalité nous donne la constante de Rydberg.

# L.P. 46 - Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Électromagnétisme
- Électronique (filtres)

## Bibliographie

- Électromagnétisme 4, Bertin, *Dunod*
- Électrotechnique PSI, Brenders, *Breal*
- Dict. de phys. exp. II Thermo., Quaranta, *Pierron*
- La physique par les objets quotidiens, Ray, *Belin*
- Magnétisme I, du Tremolet, *PUG*
- Dict. de phys. exp. IV Elec., Quaranta, *Pierron*
- H-prepa Électromagnétisme PC, Brébec, *Hachette*

Un peu de répétition pour la courbe de première aimantation mais c'est bien d'appuyer les propos et détailler les phénomènes.

## Introduction

Nous allons dans cette leçon essayer d'étudier les propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques.

Pour commencer il est important de rappeler qu'une propriété macroscopique est une caractéristique d'un corps qui peut être observée en l'observant globalement. C'est une propriété à grande échelle, par opposition aux « propriétés microscopiques » qui caractérisent les plus petits constituants du corps ( $\sim 1mm$ ).

Certains matériaux acquièrent sous l'effet d'une excitation magnétique des propriétés remarquables : ils s'aimantent forment et conservent une mémoire de cette aimantation lorsque l'excitation a cessé : nous avons tous utilisé ou joué avec des aimants, nous nous servons depuis une cinquantaine d'années de bandes magnétiques pour conserver des données (audio et vidéo ...

Ces matériaux, dit ferromagnétiques, ont des applications pratiques très importantes et nous sont devenus indispensables : on les trouve dans les moteurs et les générateurs électriques, les transformateurs domestiques et industriels, les disques durs d'ordinateurs<sup>8</sup>.

Dans cette leçon nous verrons qualitativement le principe de l'aimantation de ces milieux et comment étudier expérimentalement leurs propriétés.

Définir ce qu'est macroscopique, puis ce qu'est un corps ferromagnétique

---

8. On produit pour les disques durs des matériaux capables de stocker jusqu'à 1 Gbit par  $cm^2$

# 1. Caractérisation du ferromagnétisme

## a) Loi de l'électromagnétisme dans les milieux aimantés

Dans la matière, la définition des champs statiques  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , vue dans le vide en statique en première année et en dynamique en deuxième année, doit être revue en raison de la contribution du milieu qui engendre deux vecteurs champs :

- l'un est la polarisation électrique  $\vec{P}$  ;
- l'autre est l'aimantation  $\vec{M}$ .

La seule connaissance du champ  $\vec{E}$  nommé  $\vec{E}_{ext}$  ou du champ  $\vec{B}$  nommé  $\vec{B}_{ext}$ , n'est plus suffisante. Il faut maintenant définir les champs  $\vec{B}_{ext}$  et  $\vec{M}$ , respectivement  $\vec{E}_{ext}$  et  $\vec{P}$ . Nous serons amenés à introduire alors deux autres champs associés à ces couples de champs :

- $\vec{H}$ , l'induction magnétique liée à  $\vec{B}_{ext}$  et  $\vec{M}$  ;

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_{ext}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (1)$$

- $\vec{D}$  le vecteur déplacement électrique lié à  $\vec{E}_{ext}$  et  $\vec{P}$  ;

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{ext} + \vec{P}$$

Or, le vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$  n'est pas à l'origine du fonctionnement des dispositifs de l'électrotechnique... C'est pourquoi nous ne prendrons pas en compte les phénomènes de polarisation par la suite.

### Le vecteur aimantation

**Rq** : Petit historique p.49 Bréal.

Un milieu magnétique peut être considéré comme une collection de particules organisées possédant chacun un moment magnétique, qu'il soit orbital et/ou spin ; ces particules vont orienter leur moment magnétique pour minimiser leur énergie d'interaction avec un champ magnétique extérieur. C'est là le premier mode d'interaction entre ces particules possédant un moment magnétique. Il est le plus classique et, pour fixer les idées, il correspond à l'interaction qu'aurait un aimant sur un autre aimant.

Un milieu magnétique, c'est aussi un ensemble de charges liées, par exemple les électrons, dont le mouvement va être modifié en présence d'un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$ , par application de la loi de Lenz, avec pour conséquence une modification du moment cinétique des particules. Il y a alors apparition d'une aimantation dans le sens opposé à  $\vec{B}_{ext}$  ; cette propriété est le diamagnétisme des matériaux mais ce phénomène est largement négligeable devant les autres phénomènes d'aimantation que nous rencontrerons.

Dans d'autres milieux magnétiques, dits ferromagnétiques, il existe une aimantation "spontanée" qui provient d'une seconde interaction, dite interaction d'échange, des moments magnétiques atomiques du milieu, qui se dispose de manière régulière, à courte échelle, dans la matière, additionnant ou soustrayant leurs effets magnétiques, selon la substance considérée et ses conditions d'utilisation (champ  $B$ , température  $T$  par exemple).

Ces couplages entre moments magnétiques sont naturellement perturbés par l'agitation thermique du milieu et il y a compétition entre ordre et désordre des moments magnétiques sous l'action de l'agitation thermique.

Il existe donc une aimantation, notamment dans les milieux ferromagnétiques, sans qu'il y est besoin de sollicitation de la part d'un champ extérieur mais cette organisation est à courte échelle, en domaines séparés par des parois.

Cette aimantation ne s'étend pas spontanément en tant qu'organisation à grande échelle, ce qui fait que les matériaux naturellement magnétiques sont rares (cas exceptionnel de la magnésite).

Pour obtenir des matériaux ferromagnétiques aimantés de manière significative à grande échelle, il faudra exercer sur le matériau une action extérieure, sous forme d'un champ  $\vec{B}_{ext}$ .

Il est donc raisonnable de définir le vecteur aimantation  $\vec{M}$  en un point  $P$  la substance aimantée sous la forme :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV} \quad (2)$$

où  $d\vec{m}$  est le moment magnétique résultant dans un volume élémentaire  $dV$  autour du point  $P$  du milieu magnétique. L'unité est  $A.m^{-1}$ .

**Rq :** Pour un électron parcourant une orbite circulaire de vitesse angulaire  $\omega$  peut être assimilé à une boucle de courant d'intensité  $I = -e/T$  où  $T = 2\pi/\omega$  et le système possède donc un moment magnétique  $\vec{m} = I\vec{S}$ , soit :

$$\vec{m} = -\frac{e\omega}{2}R^2\vec{n} \quad (3)$$

### Les courants d'aimantation

Nous avons vu en 1er année que nous pouvions associer un moment magnétique à une boucle de courant. Or le vecteur aimantation  $\vec{M}$  est un moment magnétique volumique. Nous associons donc à cette aimantation une distribution de courants de densité volumique  $\vec{j}_{lies}$  telle que :

$$\vec{j}_{lies} = \text{rot}(\vec{M}) \quad (4)$$

### Le vecteur excitation magnétique

Nous considérons des milieux non polarisés. Dans ce cas, l'équation de Maxwell-Ampère dans le milieu s'écrit :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{j}_{libre} + \mu_0 \vec{j}_{li} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5)$$

En remplaçant par  $\vec{M}$  on obtient :

$$\text{rot}(\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{j}_{libre} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6)$$

On introduit ainsi le vecteur excitation magnétique du milieu :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{j}_{\text{libre}} \quad (7)$$

### Théorème d'Ampère

Soit  $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{j}_{\text{libre}}$  intégrée sur une surface  $S$  s'appuyant sur un contour fermé  $C$  donné il vient :

$$\int \int_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) \cdot \vec{dS} = \int \int_S = nI \quad (8)$$

En utilisant le théorème de Stokes on obtient le théorème d'Ampère :

$$\int \int_S \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) \cdot \vec{dS} = \oint_C \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = I_{\text{libre}} = nI \quad (9)$$

### Loi de Faraday

L'équation de Maxwell-Faraday n'est jamais modifiée par le type de milieu considéré : elle lie les champs électrique et magnétique indépendamment des sources :

Dans un milieu aimanté :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10)$$

Donc la forme intégrale de cette loi est inchangée, est la loi de Faraday s'écrit :

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{d\ell} = -\frac{d}{dt} \left( \int \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS} \right) \quad (11)$$

**Rq :** l'équation de Maxwell-Thomson reste inchangée. En revanche l'équation de Maxwell-Gauss pour tenir compte de l'action d'un champ électrique sur les charges du milieu (électrons libres, ions libres ou aux nœuds de réseaux cristallins, doublets électroniques des liaisons chimiques, etc...), phénomène que nous connaissons sous le nom de polarisation.

## b) Types de comportements magnétiques

Dans le cas où le milieu étudié est linéaire et isotropes, le vecteur aimantation  $\vec{M}$  est toujours celle du champ magnétique extérieur  $\mu_0 \vec{H}$ . Alors on peut écrire<sup>9</sup> :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (12)$$

où  $\chi_m$  est la susceptibilité magnétique du milieu magnétique. Il en résulte que :

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} \quad (13)$$

$\|\vec{B}\|$  et  $\|\vec{H}\|$  ont la même unité, alors on en déduit que  $\chi_m$  est une grandeur sans dimension.

Or,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ , où  $\mu = \mu_0 \mu_r$  est la perméabilité magnétique absolue du milieu. Nous obtenons alors le lien entre  $\chi_m$  et  $\mu$  :

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (14)$$

9. Dans le cas d'un milieu non isotrope  $\chi$  est une matrice  $3 \times 3$  pour prendre en compte les trois directions de l'espace (p.49 Magnétisme I)

où  $\mu_r = 1 + \chi_m$ .

Un milieu magnétique est linéaire si la relation  $B(H)$  est linéaire, c'est à dire si  $\mu$  ne dépend pas de  $H$ .

C'est le cas des milieux diamagnétiques ou paramagnétiques dans le cas de faibles aimantations.

### Les milieux diamagnétiques

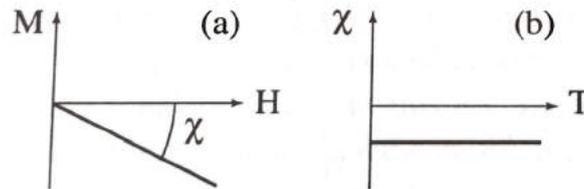


FIGURE 29 – (a) Variations sous champ magnétique de l'aimantation et (b) variation thermique de la susceptibilité magnétique pour une substance diamagnétique.

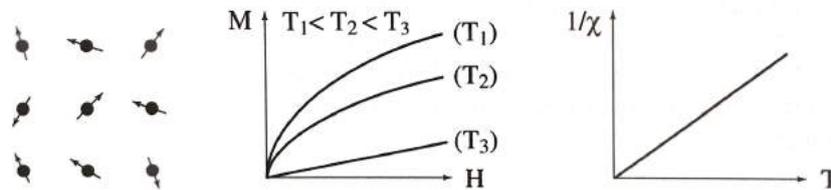
Un milieu diamagnétique est le siège d'une aimantation opposée à celle du champ  $\vec{B}_{ext}$  et lui est proportionnelle :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (15)$$

avec  $\chi_m < 0$ . La susceptibilité magnétique  $\chi_m$  reste petite :  $|\chi_m| < 10^{-4}$ . Nous avons donc  $\mu_r < 1$  et peu différent de 1.

Le diamagnétisme étant une propriété due à l'interaction des électrons, elle concerne toute la matière/  $\chi_m$  ne dépend pratiquement pas de la température des solides ou des liquides diamagnétiques.

### Les milieux paramagnétiques



Un milieu paramagnétique est le siège d'une aimantation de même sens à celle du champ  $\vec{B}_{ext}$  et lui est proportionnelle :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (16)$$

avec  $\chi_m > 0$ . L'état paramagnétique, qui existe pour certains solides, liquides ou gaz, est un état de couplage lâche des moments magnétiques individuels qui cette fois existent en l'absence de champ magnétique extérieur : le faible couplage permet de modéliser le milieu paramagnétique comme une population de moments indépendants. Ceci permet une aimantation si un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_{ext}$  existe, puisque ces moments tendent à s'orienter dans le sens du champ extérieur appliqué.  $\chi_m$  est donc une quantité

positive qui reste petite et qui dépend de la température.

Typiquement,  $10^{-6} < \chi_m < 10^{-3}$  : on a donc  $\mu_r > 1$  et peu différent de 1. Plus  $\vec{B}_{ext}$  est fort, plus l'orientation des moments magnétiques est importante. Il existe cependant un maximum lorsque les moments magnétiques sont orientés dans le sens de  $\vec{B}_{ext}$ . Le matériau est alors à saturation magnétique ; le champ magnétique  $\vec{B}$  dans le matériau et l'aimantation  $\vec{M}$  restent constants même si  $\vec{H}$ , et donc  $\vec{B}$ , augmentent encore. En raison du couplage lâche, l'aimantation de ces corps disparaît lorsque  $\vec{B}_{ext}$  cesse.

## Les milieux ferromagnétiques

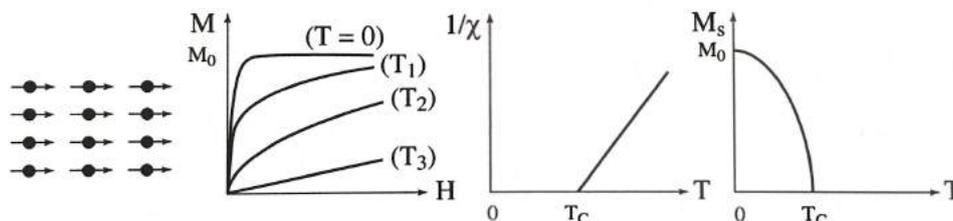


FIGURE 30 - (a) Réseau de spins - (b) Variation sous champ de l'aimantation ( $T_1 < T_c < T_2 < T_3$ ) - (c) Variation thermique de  $1/\chi$  - (d) Variation thermique de l'aimantation spontanée.

Les milieux ferromagnétiques ont le même comportement que les milieux paramagnétiques avec quatre différences fondamentales :

- $\mu_{r-ferro} \gg \mu_{r-para}$  ;
- $\mu_{r-ferro}$  dépend de  $H$  ;
- $\mu_{r-ferro}$  dépend de l'état magnétique antérieur de la substance ;
- le ferromagnétisme n'existe que dans des corps à structure cristalline essentiellement des solides (Fe, Co, Ni, leurs alliages).

Il en résulte que pour un noyau ferromagnétique soumis à un champ magnétique :

- ce noyau est attiré par ce champ (électroaimants) ;
- le champ dans le matériau et au voisinage du noyau est beaucoup plus intense que si le champ extérieur agissait dans l'air (inductance élevée des bobines à noyau) ;

**MANIP** : On place dans un solénoïde un barreau d'aluminium, puis un barreau de fer et on mesure à l'aide d'un Teslamètre la valeur du champ magnétique et on compare.

- les champs dans le matériau et à l'extérieur du matériaux persistent lorsque le champ extérieur cesse (aimants permanents) ;
  - en raison des interactions magnétiques, la susceptibilité - au lieu de devenir infini à 0K comme dans un paramagnétique - devient infinie à une température caractéristique, appelée température de Curie  $T_C$ . En dessous de cette température, les interactions dominent l'agitation thermique et un aimantation spontanée ( $M_S$ ) apparaît en l'absence de champ appliqué, aimantation qui atteint à température nulle sa valeur maximale  $M_0$ , correspondant au parallélisme de tous les moments individuelles.
- MANIP** : Transition ferromagnétique-paramagnétique (Quaranta II Thermo p.459). On chauffe à la lampe à souder un petit cylindre de fer dans lequel un petit trou à été percé pour y introduire un thermomètre. Ce cylindre est maintenu en contact avec une surface jouant le rôle de bouclier thermique au dos duquel on a placé un aimant suspendu par un fil. On doit retrouver le point de Curie  $T_C = 770C^\circ$ . En réalité la température mesurée devrait être un peu inférieure à la température de

Curie car l'aimant sera libéré dès que la force attractive est suffisamment faible et ceci se produit avant que cette force soit nulle ( $\dot{a}T = T_C$ ).

Une substance ferromagnétique présente un ordre plus grand pour les moments magnétiques dont les spins fortement couplés s'alignent dans des domaines d'aimantation appelés domaines de Weiss, contenant de  $10^4$  à  $10^6$  atomes, limités par des parois dites de Bloch (suite voir Bréal page 54 ou p176 Bertin).

## 2. Aimantation d'un corps ferromagnétique

### a) Courbe de première aimantation

On désire étudier l'aimantation volumique  $M$  d'un échantillon en fonction du champ magnétique appliqué. Cette aimantation dépend de l'histoire antérieure de l'échantillon ; il est donc essentiel, pour obtenir des résultats reproductibles et interprétables, que les conditions d'aimantation soient très bien précisées. Nous nous intéressons ici à un échantillon qui n'a jamais été aimanté, ou, ce qui est plus fréquent, qui a été soigneusement désaimanté ; pour ce faire, on le soumet à un champ magnétique alternatif, par exemple de fréquence 50 Hz, d'abord très intense et que l'on réduit progressivement jusqu'à zéro. L'aimantation que l'on mesurera dans ces conditions, est appelée "première aimantation".

Par ailleurs nous savons que la forme de l'échantillon joue un rôle important dans l'aimantation d'une substance. Aussi utilise-t-on un échantillon en forme de tore pour lequel il n'y a pas d'effets de surface. Dans cette géométrie particulière le champ  $H$  est entièrement contrôlé et imposé par l'expérimentateur à l'aide du courant  $I$  dans la bobine torique qui crée l'aimantation. C'est la raison de caractère pratique pour laquelle les mesures concernant les matériaux magnétiques sont données avec  $H = ||H||$  comme paramètre en  $A.m^{-1}$ .

On peut utiliser avantageusement comme paramètre  $\mu_0 H$ , exprimé en Tesla, qui, dans la géométrie torique est simplement le champ  $B_0$  créé par le courant de la bobine torique. On obtient point par point la courbe  $B(H)$  : on en déduit aisément :

$$M(H) = \frac{1}{\mu_0} B(H) - H$$

D'un point de vue expérimentale on peut obtenir la courbe de première aimantation d'un ferromagnétique (**Manip possible Quanranta IV Elect p185**).

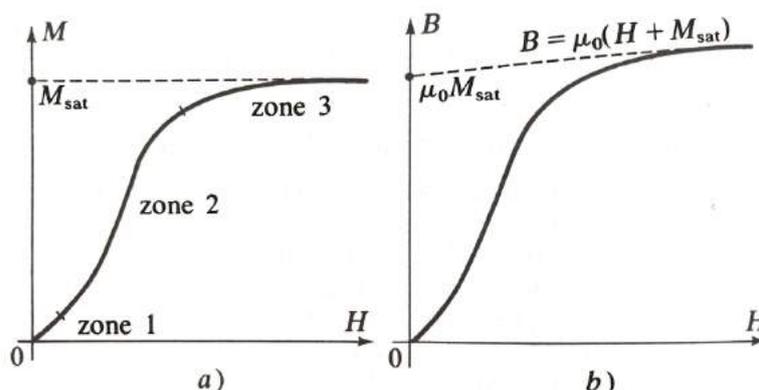


FIGURE 31 – Courbe de première aimantation.

La courbe comporte d'abord pour les faibles valeurs de  $H$  une courte portion sensiblement rectiligne (zone 1), suivie d'une partie à croissance nettement plus rapide (zone 2); enfin, pour des valeurs élevées de  $H$ , elle tend vers une asymptote horizontale (zone 3). Cette limite  $M_{sat}$ , appelée "aimantation à saturation", est spécifique du matériau, très sensible à l'état de pureté de l'échantillon et dépend de sa température.

Pour obtenir la saturation de ces trois éléments, il faut à la température ordinaire, que  $H$  atteigne environ  $10^5$  à  $10^6$  A.m<sup>-1</sup>, soit  $B_0 = \mu_0 H$  de l'ordre de  $1T$ . Par contre pour certains alliages comme le Mumétal, la saturation est obtenue pour  $H \approx 10A.m^{-1}$  soit  $\mu_0 H$  de l'ordre de  $10^{-5}T$ , ce qui est faible.

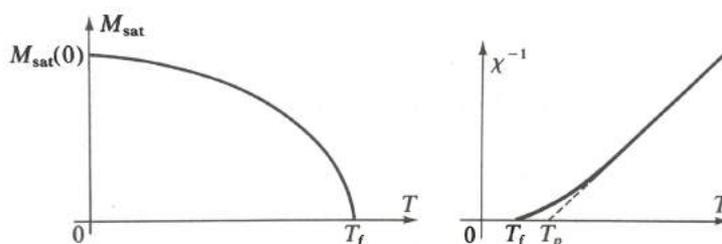
La courbe représentant  $B(H)$  se déduit de la courbe  $\mu_0 M(H)$  en y ajoutant la variation linéaire  $\mu_0 H$ ; pour les grandes valeurs de  $H$ , elle tend vers une asymptote inclinée d'équation :

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M_{ext} \quad (17)$$

	$M_{sat}$ (A.m <sup>-1</sup> )	$\mu_0 M_{sat}$ (T)	$T_C$ ou $T_f$ (K)	$T_p$ (K)
Fer	1,7 10 <sup>6</sup>	2,14	1043	1101
Cobalt	1,4 10 <sup>6</sup>	1,76	1393	1410
Nickel	0,48 10 <sup>6</sup>	0,6	631	650

TABLE 3 - Données pour 20°C

L'aimantation de saturation dépend de la température; elle décroît régulièrement si l'on chauffe le matériau, puis diminue rapidement et s'annule pour une température  $T_C$ , comme on l'a vu toute à l'heure, au-delà de laquelle le matériau n'est plus ferromagnétique mais paramagnétique.



Pour des températures nettement supérieures à  $T_C$ , la susceptibilité paramagnétique  $\chi$  suit une loi de Curie-Weiss :

$$\chi = \frac{C}{T - T_p} \quad (18)$$

où  $C$  est une constante et  $T_p$  une température appelée "température de Curie paramagnétique"; elle est légèrement supérieure à  $T_f$ .

## b) Hystérésis

**MANIP p.55 Breal : Faire la manip et avant et constater l'hystérésis !**

Reprenons l'étude expérimentale de l'aimantation d'un échantillon torique. Après avoir décrit la courbe de première aimantation jusqu'à la saturation, faisons décroître l'intensité

du courant électrique dans la bobine magnétisante ;  $H$  décroît et l'on constate que le champ  $B$ , donc aussi l'aimantation  $M$ , ne reprennent pas, pour un même champ  $H$ , les valeurs obtenues en champ  $H$  croissant. Elles sont supérieures et la courbe de désaimantation  $B(H)$  est différente. On dit qu'il y a **hystérésis**. Ce retard à la désaimantation est la conséquence de l'irréversibilité du déplacement des parois entre domaines.

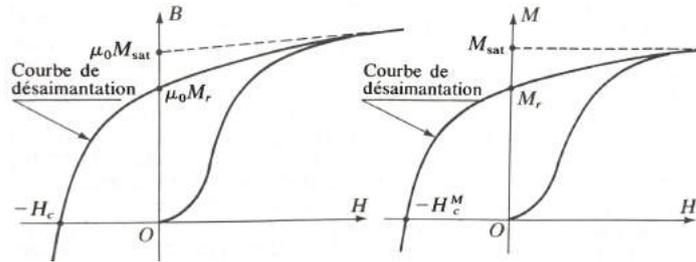


FIGURE 32 – Courbes de désaimantation après saturation, appelées aussi "courbes de recul".

Lorsque le courant est redevenu nul, il en est de même pour  $H$ , mais il subsiste une aimantation résiduelle non nulle  $M_r$ , appelée "aimantation rémanente", et le champ magnétique correspondant, dit "champ rémanent" a alors la valeur  $B_r = \mu_0 M_r$ . Pour diminuer encore l'aimantation, il faut inverser le sens de  $H$ , en inversant le sens du courant dans la bobine ; on constate que le champ magnétique  $B$  s'annule pour une valeur de  $H$ , négative :  $-H_c$ , où  $H_c$  est appelé le "champ coercitif". L'aimantation ne s'annule que pour un champ  $H$  encore un peu plus négatif :  $H_c^M$  (avec  $H_c^M > H_c$ ). La différence entre  $H_c$  et  $H_c^M$  est faible pour de nombreux matériaux ; la distinction doit cependant être faite pour les matériaux modernes qui servent à la fabrication des aimants permanents, et dont le champ coercitif  $H_c$  est élevé.

Application au transformateur réel. p66 Breal

### c) Ferromagnétiques "doux" et "durs"

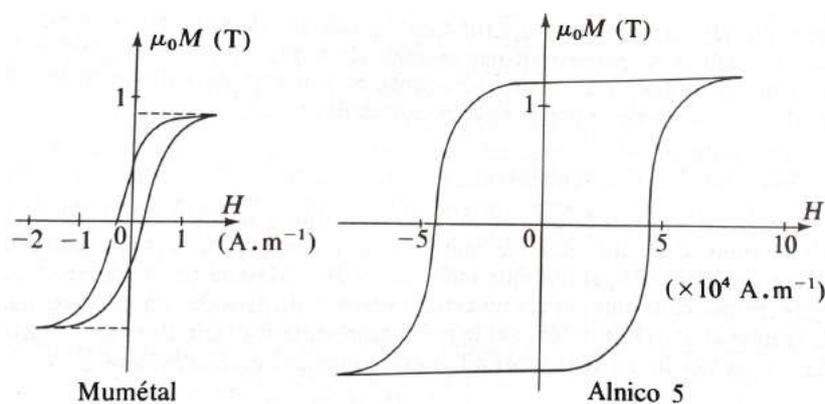


FIGURE 33 – Exemples de cycles d'hystérésis (à saturation). Notez la différence entre les échelles horizontales de ces deux graphes (facteur 20000) typique entre un matériau doux le Mumetal et un matériau dur l'Alnico 5.

L'étude de l'hystérésis magnétique permet de classer les substances ferromagnétiques en deux grandes catégories :

- **Les matériaux ferromagnétiques "doux"** sont caractérisés par un faible champ coercitif inférieur à  $100 \text{A}\cdot\text{m}^{-1}$  et parfois  $1 \text{A}\cdot\text{m}^{-1}$  ; leur aimantation peut donc être

facilement modifiée. Ils possèdent en général une grande perméabilité, en particulier une forte perméabilité initiale. Lors d'aimantations et de désaimantations successives, l'hystérésis est cause de pertes énergétiques ; minimiser les pertes est essentiel pour de nombreux appareils où le champ magnétique varie, tels que les transformateurs, électro-aimants, relais, écrans magnétiques, bobines téléphoniques, etc... d'où l'emploi pour ces applications de matériaux doux.

- **Les matériaux ferromagnétiques "durs"** sont caractérisés par un fort champ coercitif supérieur à  $10^3 A.m^{-1}$  et qui atteint  $10^6 A.m^{-1}$  ; leur magnétisme rémanent est alors assez difficile relativement à supprimer et ces matériaux sont donc utilisés pour faire des aimants permanents. Les plus simples et les plus anciens sont les aciers (fer à 1% de carbone), avec éventuellement du tungstène, du cobalt ou du manganèse.

Un matériau doux a des cycles étroits, un matériau dur des cycles larges. Pour un matériau doux on atteint l'aimantation à saturation avec un champ  $B_0 = \mu_0 H$  facilement réalisable en utilisant une bobine torique ou un solénoïde allongé entourant le matériau, alimentés par exemple par une tension sinusoïdale à 50Hz.

Pour un matériau dur, si l'on veut tracer un cycle d'hystérésis à saturation, il est difficile d'obtenir le champ  $H_m$  nécessaire avec une bobine ; on utilise un échantillon en forme de barreau que l'on place dans l'entrefer d'un électro-aimant ; la bobine entourant le barreau permet d'atteindre  $dB/dt$  à l'intérieur de l'échantillon ; une bobine voisine, d'axe parallèle, donne un signal proportionnel à  $dB_0/dt$ , avec  $B_0 \approx \mu_0 H$  ; on obtient le cycle, point par point, à l'aide de deux circuits intégrateurs.

Certains matériaux comme les ferrites ont des cycles d'hystérésis "carrés", c'est à dire que l'aimantation est toujours voisine de l'aimantation à saturation, la transition d'un sens à l'autre s'effectuant brusquement dès que  $|H|$  atteint la valeur de  $H_c$ . Cette propriété permet de réaliser des systèmes bistables (à deux états stables), utilisés en particulier dans les mémoires d'ordinateurs, où des centaines de milliers de tores en ferrite permettent de stocker de l'information sous forme binaire ; cette application tend cependant à disparaître au profit de mémoires à semi-conducteurs intégrés.

**Rq** : aspects microscopiques du magnétisme p.189 Bertin

### 3. Application : le disque dur

#### a) Principe d'écriture

Imaginons une surface recouverte d'une couche de matériau ferromagnétique. Initialement, le matériau n'a été exposé à aucun champ magnétique et les petits domaines qui le composent ne présentent aucune aimantation commune. Appliquons un champ magnétique : les domaines vont d'aimanter dans la direction du champ imposé créant ainsi des zones magnétiques où l'aimantation est unique. Ainsi, pour écrire des données sous binaire, il suffit de disposer d'un dispositif capable de produire un champ magnétique de direction constante mais dont on peut choisir le sens. En imposant l'un des deux sens à différentes zone de la couche de matériau magnétique, on y enregistre les données, le 0 correspondant à un sens et le 1 à l'autre.

Comment produire un champ magnétique ? Par exemple en faisant circuler un courant électrique dans une bobine (le champ magnétique qui en résulte sera plus intense si l'on met un morceau de fer doux au centre de l'enroulement) : c'est le principe de l'électroaimant. Si l'on inverse le sens du courant dans le bobinage, le champ magnétique change

de sens. On peut ainsi définir une orientation d'aimantation spécifique pour chaque zone de la couche en fonction du sens du courant dans l'électroaimant. C'est le principe du système d'écriture adopté pour tous les disques durs.

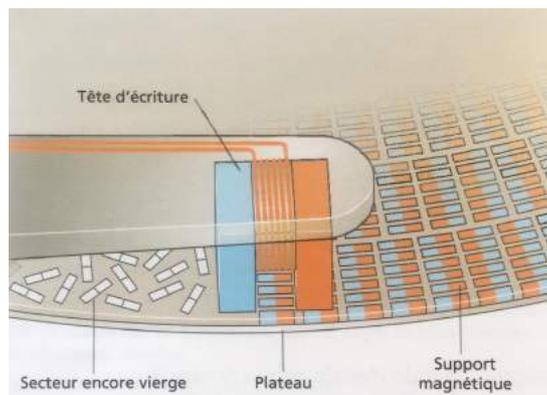


FIGURE 34 – Principe de l'écriture des données sur un matériau ferromagnétique. La direction de l'aimantation à l'intérieur des différentes zones magnétiques est symbolisée par un code couleurs : en gris sont représentés les domaines dont l'aimantation possède une orientation quelconque, ce qui correspond aux secteurs vierges du disque dur ; la couleur indique les domaines dont l'aimantation a été modifiée par la tête d'écriture pour y enregistrer des données.

## b) Principe de lecture

Le système de lecture des données d'un disque dur a beaucoup évolué. Initialement, les têtes de lecture exploitaient l'effet inverse de celui à l'œuvre pour l'écriture : le passage de la tête au-dessus d'une zone aimantée provoque la création d'un courant dans la bobine servant à l'écriture. Malheureusement, ce courant induit est très faible, et la taille des zones enregistrées doit être grande, ce qui limite la quantité d'informations qu'on peut stocker.

On fit alors appel à un principe un peu différent : la variation de la résistance de certains matériaux avec l'intensité du champ magnétique dans lequel ils sont plongés. La mesure de courant fut remplacée par une mesure de résistance, techniquement plus facile. On put ainsi diminuer la taille des zones à aimanter et augmenter la densité d'information.

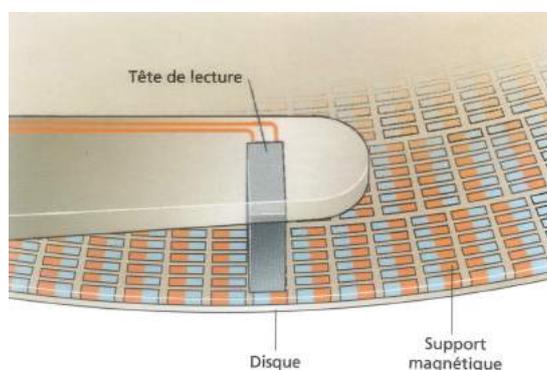


FIGURE 35 – Principe de la lecture des données. La résistance d'un circuit électrique se déplaçant à proximité d'une zone magnétique varie lorsque l'orientation de l'aimantation de la zone change brusquement. Cet effet permet de lire les données inscrites sur le support magnétique.

En 1988, des chercheurs découvrirent un effet révolutionnaire : la "magnétorésistance géante" (GMR) qui a récompensé le prix Nobel 2007., et qui fut l'acte de naissance de la prometteuse électronique de spin ou "spintronique". Expliquer cet effet dépasserait le cadre de cette leçon mais signalons que les têtes de lecture exploitent toutes désormais l'effet GMR. Il est intéressant de souligner que l'application fut extrêmement rapide, puisque cette nouvelle génération de tête de lecture apparut en 1997, soit seulement 7 ans après une découverte qui relevait strictement de la physique fondamentale.

**Rq : Définition d'après Wikipedia :**La magnétorésistance géante (en anglais, Giant Magnetoresistance Effect ou GMR) est un effet quantique observé dans les structures de films minces composées d'une alternance de couches ferromagnétiques et de couches non magnétiques communément appelées multi-couches. Elle se manifeste sous forme d'une baisse significative de la résistance observée sous l'application d'un champ magnétique externe. Dans la découverte initiale, les deux couches ferromagnétiques adjacentes ont en l'absence de champ magnétique appliqué une aimantation antiparallèle qui résulte d'un couplage antiferromagnétique. Un champ magnétique externe induit un renversement d'aimantation : les aimantations respectives des deux couches s'alignent et la résistance de la multi-couche décroît brutalement.

L'effet se produit parce que le spin des électrons du métal non magnétique se répartit équitablement de façon parallèle et antiparallèle, et subit ainsi une diffusion magnétique moins importante lorsque les couches ferromagnétiques sont aimantées de façon parallèle.

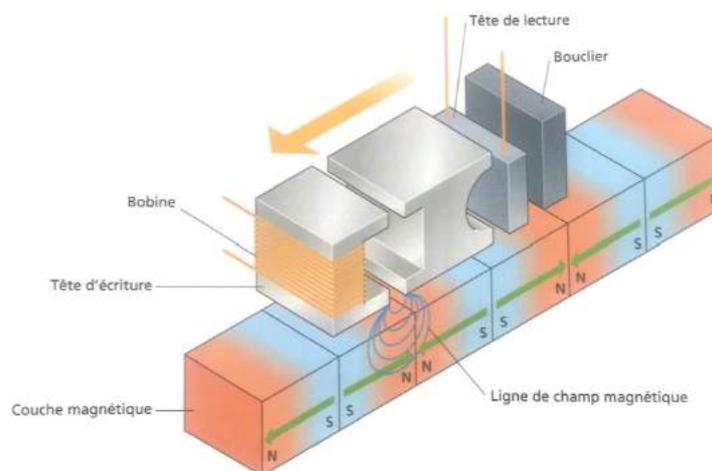


FIGURE 36 – *Détail de la tête de lecture/écriture. La tête d'écriture est constituée d'une bobine qui produit un champ magnétique suffisamment intense pour orienter les zones de la couche magnétique. La tête de lecture mesure la variation de résistance provoquée par le changement d'orientation de l'aimantation à l'intérieur de zones contiguës. Le bouclier magnétique limite les interférences avec les zones précédentes lors de la lecture des données.*

**Rq :**Résistance magnétique :  $R_m = \Phi \cdot t/m$  avec  $\Phi$  le flux d'induction et  $m$  le moment magnétique.

## Conclusion

On a pu voir dans cette leçon comment pouvait on reconnaître de composé ferromagnétique à l'aide de mesure expérimentale et en se servant des équations de Maxwell. On a ainsi pu voir une des applications utilisant les propriétés de ces corps : le disque dur. La liste des applications basées sur le ferromagnétisme est très longue, tant en conversion de

puissance (transformateurs, moteurs), que pour réaliser des bobines à forte inductance ou des sondes de courant à flux nul, en stockage de données, en médecine (ferrofluide pour l'imagerie médicale par exemple), ou aussi en géologie (avec le paléomagnétisme, c'est à dire l'étude de l'aimantation des couches sédimentaires) etc... En parallèle sont inventés régulièrement des alliages ferromagnétiques de plus en plus performants.

# Manipulation : Étude de l'aimantation d'un matériau ferromagnétique constitué par les tôles d'un transformateur torique

Quanrata IV p.491 et Bréal p.55

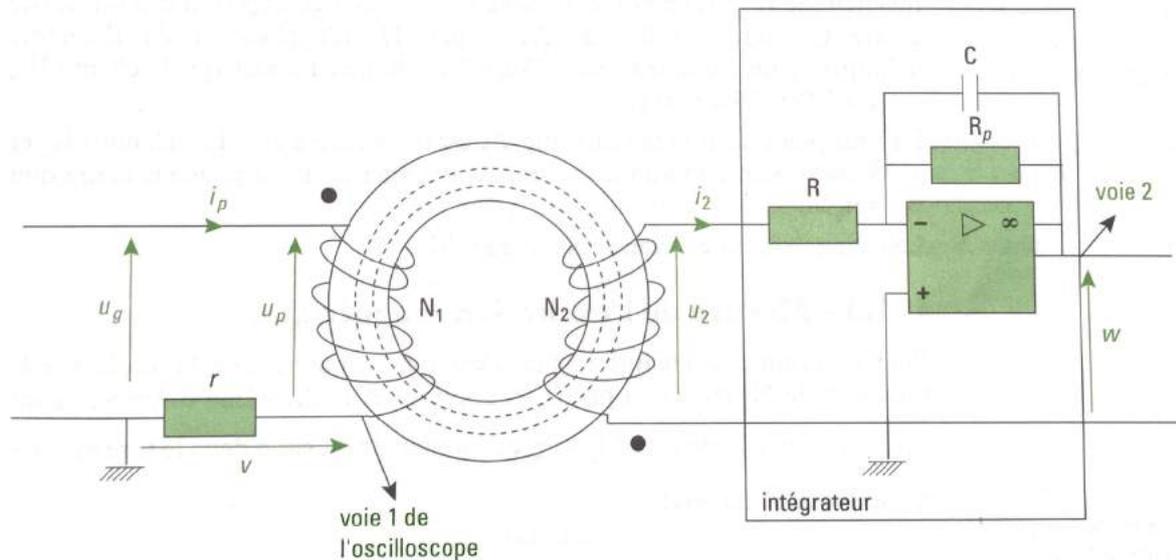


FIGURE 37 – Montage pour le tracé de  $B(H)$ . On choisit une convention récepteur à l'entrée ou primaire ( $u_p, i_p$ ) et une convention générateur en sortie ou secondaire ( $u_2, i_2$ ), ce qui correspond au fonctionnement normal du transformateur.

## Choix théorique et pratique

### Présentation du problème

Pour étudier l'aimantation, il nous faut créer une excitation  $\vec{H}$  facilement mesurable en tous points du milieu ferromagnétique que nous supposons isotrope et homogène : nous utiliserons le théorème d'Ampère pour déterminer  $H$ .

Pour mesurer le champ magnétique  $\vec{B}$  dans la matière, nous utiliserons un milieu à géométrie particulière qui nous permettra de connaître en tous points du milieu la direction et le sens de ce champ. Pour la norme de  $\vec{B}$ , nous utiliserons le flux  $\Phi$  de ce champ dans un ensemble de spires aux bornes duquel nous mesurerons une tension qui, si la sortie des spires est à vide, se confond avec la force électromotrice  $e$  donnée par la loi de Faraday. L'intégration temporelle  $e(t)$  conduira à la mesure de  $B$ .

L'aimantation  $\vec{M}$  se déduira au champ  $\vec{B}$  par la relation  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$  avec :

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m(H))\vec{H} = \mu_0\mu_r(H)\vec{H} = \mu(H)\vec{H} \quad (19)$$

Nous voyons que la connaissance de  $\mu(H)$  (ou  $\mu_r(H)$  ou  $\chi_m(H)$ ) est donc fondamentale pour caractériser le matériau magnétique. Pour obtenir l'allure de  $\mu(H)$ , nous traçons d'abord la courbe  $B(H)$ .

### Paramètres pris pour l'expérience

Pour la manipulation on prend :

- $R_p \approx 100k\Omega$
- $C = 20\mu F$
- $R = 20k\Omega$
- $r = 10\Omega$
- $N_1 = 250$
- $N_2 = 1000$

On a également pour la section du tore :  $A = 16mm^2$  et pour la longueur moyenne du tore  $\ell = 50cm$ . L'intégrateur au secondaire du transformateur permet de passer de la fem d'induction au flux et donc au champ magnétique  $B$  dans le fer. Cet intégrateur comporte une résistance en parallèle sur la capacité  $C$  de manière à s'affranchir du problème de dérive.

Sous peine de danger grave, en aucun cas nous ne pouvons raccorder le secteur 220 V à l'entrée  $u_p(t)$  d'un tel montage. Il faut recourir soit à un transformateur d'isolement, soit à un générateur basse fréquence reliée à un étage de puissance qui délivre  $u_p(t)$  : nous avons choisi cette dernière solution en travaillant à la fréquence 50 Hz. L'étage de puissance ne sera pas représenté dans les schémas des montages. Lorsque l'on cherche à connecter deux circuits, il arrive que leurs masses soient distinctes et que le raccordement soit problématique. Le transformateur d'isolement permet de relier les deux circuits sans qu'un conducteur ne les relie. C'est une isolation galvanique.

**Rq :** Il faut penser à bien serrer le tore car la force est homogène à  $(\partial E_{electromag}/\partial x)_i \leftrightarrow$  vibrations.

Loi des nœuds appliquée à l'entrée inverseuse donne :

$$\frac{V_e - V_-}{R_p} + C \frac{d(V_s - V_-)}{dt} + \frac{V_s - V_-}{R'} = 0 \quad (20)$$

Soit en régime linéaire avec  $V_- = 0$  :

$$\frac{dV_s}{dt} + \frac{V_s}{R'C} = \frac{V_e}{RC} \quad (21)$$

Pour un signal d'entrée périodique de période  $T$ , on aura en régime permanent en sortie :

- Si  $T \gg R'C$  :  $V_s = -(R'/R)V_e$
- Si  $T \ll R'C$  :  $V_s = (1/RC) \int V_e dt$

En choisissant les valeurs des composants du Dico IV,  $R'C = 10^5 \times 20 \cdot 10^{-6} = 2s \gg 1/50s$  : on a bien un intégrateur.

## Mesure de l'excitation magnétique

Appliquons le théorème d'Ampère pour l'excitation magnétique créée par le bobinage  $N_1$  :

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{d\ell} = H\ell = N_1 i_p \quad (22)$$

avec  $N_1$  le nombre de spires et en supposant  $N_2 i_2$  négligeable devant  $N_1 i_p$ . On obtient donc  $H$  en relevant à l'oscilloscope la tension  $v = r i_p$  et en appliquant ensuite la relation :

$$H(t) = \frac{N_1}{\ell} \frac{v(t)}{r} \quad (23)$$

$v(t)$  est donc l'image de l'induction magnétique  $H(t)$  à un coefficient multiplicatif près. le montage permet d'obtenir, grâce à un système électronique, une image amplifiée du

courant  $i_p$  qui traverse alors la résistance  $r$ . Ceci permet d'obtenir une tension  $v = ki_p$  de valeur facilement mesurable.

### Mesure du champ magnétique

Pour déterminer à chaque instant le champ magnétique  $B$  dans le tore, nous utilisons un deuxième enroulement  $N_2$  spires au secondaire. Le flux  $\vec{B}$  à travers cette bobine dépend du temps : il y a induction. Il existe donc aux bornes du secondaire une force électromotrice  $e_2(t)$  liée à la variation de flux dans la bobine par la relation :

$$e_2(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (24)$$

Remarquons que dans le dispositif d'étude, le courant  $i_2$  au secondaire est très petit, en tous cas négligeable devant les autres courants. Nous considérerons le secondaire ouvert :  $i_2 = 0$ .

Ainsi nous avons  $u_s(t) = u_2(t) = e_2(t)$ . Or, comme  $\Phi(t) = N_2 B(t) A$ , alors :

$$u_s(t) = u_2(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -N_2 A \frac{dB(t)}{dt} \quad (25)$$

Nous comprenons le rôle de l'intégrateur puisque :

$$w(t) = -\frac{1}{RC} \int u_2(t) dt = -\frac{1}{RC} \int \left( -N_2 A \frac{dB(t)}{dt} \right) = \frac{N_2 A}{RC} B(t) + cste \quad (26)$$

La constante d'intégration est nulle si  $w(t)$  et  $B(t)$  sont des fonctions sinusoïdales, ce qui est généralement le cas. Dans le cas contraire, vu l'imperfection de l'amplificateur opérationnel qui conduit à une charge progressive du condensateur, il y a souvent un réglage constructeur permettant d'ajuster la dérive de sortie du montage.

Nous obtenons donc  $B$  en relevant à l'oscilloscope la tension  $w(t)$  et en appliquant ensuite la relation :

$$B(t) = \frac{RC}{N_2 A} w(t) \quad (27)$$

$w(t)$  est donc une image du champ magnétique total créé dans le matériau magnétique, à un facteur multiplicatif près.

### Résultats

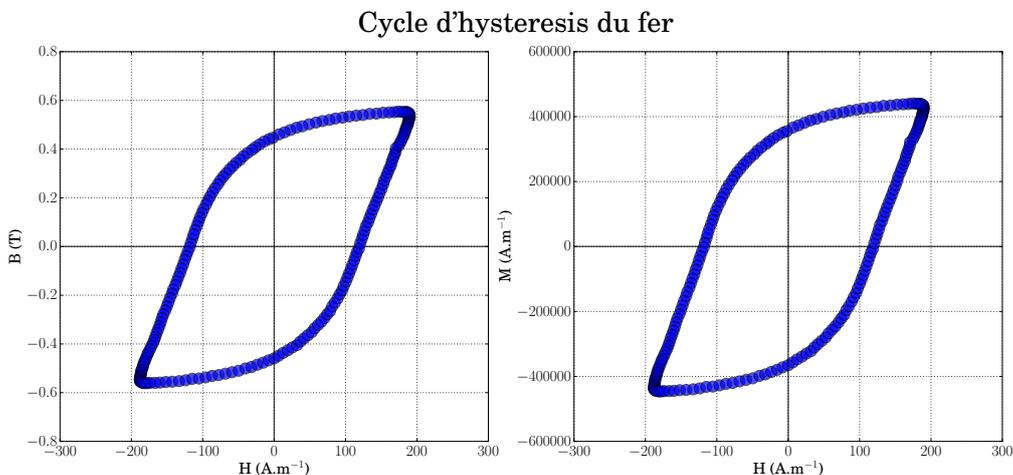
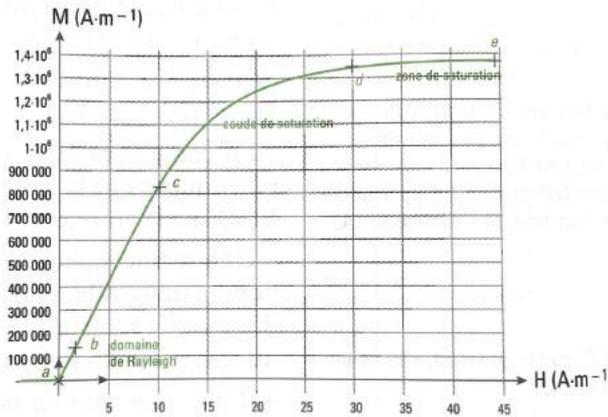


FIGURE 38 – Cycle d'hystérésis.  $w$  en fonction de  $v$  et  $B$  en fonction de  $H$ .

On voit bien sur le graphe le cycle. On peut ainsi retrouver expérimentalement les valeurs  $M_{sat} = 4,5.10^6 A.m^{-1}$  et  $\mu_0 M_{sat} = 0.5$ . On a une différence avec les valeurs théoriques du fer mais on reste dans le même ordre de grandeur. On est probablement pas encore à la saturation, le noyau de fer est gros et difficile à saturer. On peut donc utiliser cet outils expérimental pour pouvoir caractériser un matériaux dont on ignorera la composition. Il est important de noter que plus fréquence, pour des paramètres identiques, diminue plus le cycle d'hystérésis se rétrécis.



On remarque bien la cour be de première aimantation. On remarque ainsi quatre zones différentes :

- de  $a$  vers  $b$ , une zone en fore de parabole dit domaine de Rayleigh ;
- de  $b$  vers  $c$ , une zone linéaire d'augmentation rapide de  $B$  qui montre que la perméabilité et la susceptibilité dépendent de  $H$  ;
- de  $c$  vers  $d$ , une zone de courbure appelée coude de saturation ;
- de  $d$  vers  $e$ , une zone de saturation dans laquelle la relation  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$  se réduit à  $\vec{B}_{sat} = \mu_0\vec{M}_{sat}$  puisque la variation de  $H$  est sans effet sur celle de  $B$ .

On peut également remonter à la puissance dissipé par le matériaux. On sait que la puissance instantanée consommée au primaire du transformateur est :

$$\mathcal{P}_p(t) = u_p(t)i_p(t), \text{ avec } u_p(t) = R_1 i_p(t) - e_1 = R_1 i_p(t) + N_1 \frac{d\phi_1}{dt}$$

Donc,

$$\mathcal{P}_p(t) = R_1 i_p^2(t) + N_1 i_p(t) \frac{d\phi_1}{dt}$$

Or :

$$i_p(t) = \frac{\ell H(t)}{N_1} \text{ et } N_1 = \frac{d\phi_1}{dt} = N_1 A \frac{dB(t)}{dt}$$

alors,

$$\mathcal{P}_p(t) = R_1 i_p^2(t) + \ell A H(t) \frac{dB(t)}{dt}$$

La puissance moyenne est donc,

$$\langle \mathcal{P}_p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}_p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T R_1 i_p^2(t) dt + \ell A \frac{1}{T} \int_0^T H(t) dB(t) \quad (28)$$

où  $T$  est la période de la tension excitatrice  $u_p(t)$ .

**Rq :**  $\int H(t)dB(t)$  a les dimensions d'une puissance volumique multipliée par une durée ; c'est donc une énergie volumique ( $J.m^{-3}$ ).

Le premier terme du bilan de puissance n'est autre que la puissance Joule  $\mathcal{P}_j$  consommée dans la résistance d'entrée qui s'écrit :

$$\mathcal{P}_j = R_1 I_p^2 \quad (29)$$

où  $I_p$  est la valeur efficace du courant  $i_p(t)$ .

Dans le second terme, nommé pertes fer,  $\ell A$  est le volume du tore, donc du matériau magnétique concerné. Le produit  $H(t)dB(t)$  est l'aire sous la courbe  $H(B)$ , égale à l'aire sous la courbe  $B(H)$ .

Ainsi  $S = \int_0^T H(t)dB(t)$  est l'aire comprise à l'intérieur du cycle. De la sorte :

$$\mathcal{P}_f = \frac{V_e S}{T} \quad (30)$$

On trouve dans notre cas  $\mathcal{P}_f = ??$ . On peut calculer la perte massique pour le fer qui doit être :

$$\mathcal{P}_m = \frac{\mathcal{P}_f}{V_e \rho} \approx 1W/kg \quad (31)$$

**Rq :** Nature des pertes : voir Bréal p65.

# L.P. 47 - Mécanismes de la conduction électrique dans les solides

Niveau : L2

## Pré-requis

- Électromagnétisme
- Mécanique
- Théo. cin. des gaz

## Bibliographie

- Physique tout en un PC-PC\*, Sanz, *Dunod*
- Électromagnétisme, J-P. Perez, *Dunod*
- H-prépa Électromagnétisme PC, Brébec, *Hachette*
- Dico Elec. III et IV, Quaranta (1996) et (2002), *Pierron*
- BUP n.550, Guinier (1972)
- Électromagnétisme, Bertin, *Dunod*
- Physique de l'état solide, Kittel, *Dunod*
- Physique des solides, Ashcroft, *EDP Sciences*

Leçon qui est progressive tout le long donc c'est plutôt intéressant. Il est important d'être au point sur les concepts qu'il y a derrière chaque partie, c'est pour cela qu'il est primordiale d'être au point avec les remarques qu'il y a pour éviter une coquille aux questions. Bien faire la manip car il n'y en a qu'une dans cette leçon !

## Introduction

Certains corps possèdent la propriété de permettre le passage de charges électriques, ce sont les conducteurs, alors que d'autres l'interdisent, ce sont les isolants. La notion de conducteurs a déjà été donnée : un conducteur est un corps à l'intérieur duquel des charges électriques peuvent se déplacer librement sous l'action d'une force aussi petite soit-elle. On dit encore qu'un conducteur contient des porteurs de charge, c'est à dire des particules ou groupements de particules chargées, susceptibles de se déplacer en transportant de l'électricité.

On a vu dans des leçons précédentes que pour étudier les milieux conducteurs, on introduit les grandeurs nivelées que sont la charge volumique  $\rho$  et le vecteur courant volumique  $\vec{j}$ , qui peuvent s'écrire à travers la conservation de la charge électrique locale :  $\partial\rho/\partial t = -\text{div } \vec{j}$ . On sait également que dans un milieu conducteur, homogène isotrope la loi d'Ohm est une relation constitutive linéaire qui permet de caractériser ce milieu par sa conductivité  $\gamma$  tel que :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (1)$$

On va essayer dans cette leçon d'interpréter cette loi à partir de mécanisme microscopiques afin d'expliquer des valeurs aussi différentes de la conductivité. On va ainsi voir l'influence de certains paramètres tel que la structure, composition, température du milieu et à cerner les limites de validité de l'approximation linéaire.

**Rq :** On peut aussi faire une introduction rapide sur la densité de courant qui est plus un rappel.

## 1. Le modèle de Drude

### a) Hypothèses

La découverte de l'électron en 1897 par Thomson eut un impact immédiat sur les théories de structure de la matière et suggéra un mécanisme évident de la conductivité dans les métaux. Quelques années plus tard Drude construisit sa théorie de la conductivité électrique et thermique par application de la théorie cinétique des gaz à un métal, vu comme un gaz d'électrons. Il supposa pour un métal, qu'il doit être composé d'au moins deux types de particules, puisque les électrons possèdent une charge négative, alors que le métal est neutre. Ainsi dans ces derniers on peut supposer que lorsque les atomes d'un élément métallique se rassemblent pour former un métal, les électrons de valence se détachent et se déplacent librement dans le métal, pendant que les ions métalliques restent intacts et jouent le rôle des particules immobiles de charge positive de la théorie de Drude.

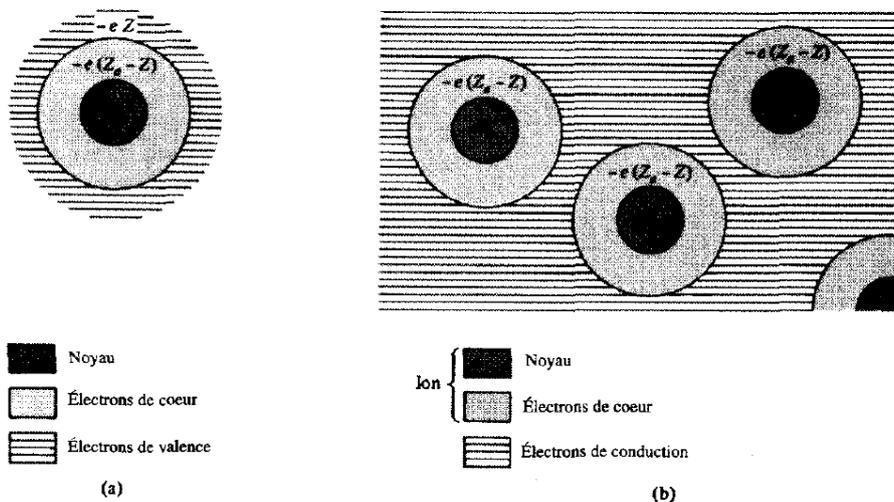


FIGURE 39 – (a) Atome isolé. (b) Dans un métal, le noyau et le cœur ionique maintiennent la configuration de l'atome libre, mais les électrons de valence quittent l'atome pour former un gaz d'électrons.

Il proposa, en utilisant les méthodes de la théorie cinétique d'un gaz dilué neutre, une approche phénoménologique de la conductivité des solides en considérant que les électrons qui participent à la conduction évoluent dans un réseau de charges quasiment immobiles, leur mouvement n'étant limité que par les surfaces infranchissables et des collisions. Néanmoins il dut faire quelques hypothèses :

1. Entre deux collisions, l'interaction d'un électron donné avec les autres électrons et les ions est négligée : en l'absence de tout champ électromagnétique externe,

les électrons se déplacent selon un mouvement rectiligne uniforme. En présence de champs extérieurs, le mouvement de chaque électron est déterminé par le principe fondamental de la dynamique en tenant compte de ces champs, mais en négligeant les autres champs provenant des interactions entre électrons (approximation des électrons indépendants) et entre les électrons et ions (approximation des électrons libres) ;

2. Les collisions sont des événements instantanés qui changent de manière abrupte la vitesse d'un électron.
3. Un électron prend part à une collision avec une probabilité par unité de temps  $1/\tau$ . Ce qui signifie que la probabilité pour qu'un électron subisse une collision dans un intervalle de temps infinitésimal  $dt$  est simplement  $dt/\tau$ . Le temps  $\tau$  est connu sous le nom de temps de relaxation ou temps de collision ou temps de libre parcours moyen. Ce temps est supposé indépendant de la position et de la vitesse de l'électron.
4. Les électrons établissent un équilibre thermique avec leur entourage uniquement par le biais des collisions. Ces collisions sont supposées maintenir l'équilibre thermodynamique local de manière particulièrement simple : immédiatement après chaque collision, l'électron est animé d'une vitesse indépendante de sa vitesse avant collision et ayant une direction aléatoire et une vitesse correspondant à la température dominante au lieu où a eu lieu la collision.

## b) Établissement du modèle

D'après les hypothèses formulées, on peut alors supposer qu'à l'équilibre thermodynamique les vitesses  $\vec{v}_i$  des  $N$  électrons contenus dans tout élément de volume macroscopique sont dirigées au hasard et le vecteur vitesse moyen  $\vec{v}$  est nul :

$$\vec{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i = 0 \quad (2)$$

Sous l'action d'un champ électrique  $\vec{E}$ , l'isotropie de la distribution des vitesses est rompue et une vitesse de dérivé apparaît : c'est la conduction électrique. Notons que, sous le seul effet de  $\vec{E}$  supposé constant, une charge mobile ( $q$ ) acquerrait une accélération constante :

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (3)$$

Considérons des porteurs mobiles, de charge volumique  $\rho_m$  et de masse volumique  $\rho^*$ , contenues dans un élément de volume  $d\mathcal{V}$ , la force de frottement visqueux est linéaire de type Stoke. Cette force opposée à la vitesse de dérive  $\vec{v}$  s'écrit :

$$d\vec{F} = -\alpha \vec{v} d\mathcal{V} \quad (4)$$

avec  $\alpha > 0$ . En admettant que le mouvement de ces charges est provoqué par un champ électrique macroscopique  $\vec{E}$  à l'intérieur du milieu, la loi fondamentale de la mécanique, appliquée à l'élément de volume  $d\mathcal{V}$  donne :

$$\rho^* d\mathcal{V} \frac{d\vec{v}}{dt} = d\vec{F}_e + d\vec{F} \quad (5)$$

avec  $d\vec{F}_e = \rho_m \vec{E} d\mathcal{V}$  la force électrique. Si  $m$  et  $q$  désignent respectivement la masse et la charge du type de porteurs considéré et si  $n_v$  représente leur densité volumique, on a :

$$\rho^* = n_v m \text{ et } \rho_m = n_v q$$

Alors l'équation devient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q\vec{E}}{m} - \frac{\alpha\vec{v}}{n_v m} \quad (6)$$

On remarque alors que  $(\alpha/(n_v m))^{-1}$  à la dimension d'un temps, on pose alors  $\tau = \rho^*/\alpha$ , qui est le temps entre chaque collision. Il vient alors :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (7)$$

La solution de cette équation est :

$$v(t) = \frac{q\tau E}{m} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad (8)$$

Après un régime transitoire dont la durée caractéristique est  $\tau$ , le porteur mobile atteint une vitesse limite :

$$\vec{v}_{lim} = \frac{q\tau\vec{E}}{m} = \mu\vec{E} \quad (9)$$

avec  $\mu$  est la mobilité, il caractérise un type de porteur déterminé dans le milieu ; il peut être négatif ou positif. On sait que le courant volumique s'écrit  $\vec{j} = n_v q \vec{v}_{lim}$  en régime permanent, alors :

$$\vec{j} = \frac{n_v q^2 \tau}{m} \vec{E} = \gamma \vec{E} \quad (10)$$

où  $\gamma$  est la conductivité électrique statique. Le modèle de Drude permet donc d'établir la loi d'Ohm.

Lorsque l'on a plusieurs porteurs on a :

$$\vec{v}_\alpha = \frac{q_\alpha \tau_\alpha}{m_\alpha} \vec{E} = \mu_\alpha \vec{E} \quad (11)$$

Le courant volumique qui en résulte est :

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mu_{\alpha} \vec{E} = \gamma \vec{E} \quad (12)$$

avec  $\gamma = \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}^2 \tau_{\alpha}}{m_{\alpha}} > 0$ .

Ainsi la loi d'Ohm peut être interprétée par la limitation de la vitesse de dérive des porteurs, limitation due aux interactions avec le milieu ; la conductivité, qui est toujours positive, dépend, pour chaque type de porteurs présents dans le milieu de leur mobilité et de leur densité volumique.

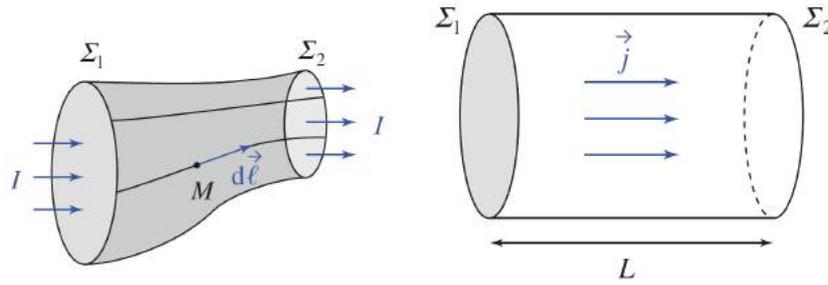
Dans un métal, le courant électrique est dû au mouvement d'ensemble des électrons de conduction (masse  $m_e$ ), de densité volumique  $n_e$ . Par conséquent on a :

$$\mu = -\frac{e\tau}{m_e} \text{ et } \gamma = \frac{n_e e^2 \tau}{m_e}$$

**Rq** : Interprétation collisionnelle page 111 Perez.

**Rq** : Limite de validité de la loi d'Ohm page 115 Perez.

### c) Loi d'Ohm intégrale



Considérons un régime permanent de conduction électrique dans un milieu ohmique de conductivité  $\gamma$ , une portion d'un tube de courant comprise entre deux sections  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .

En régime permanent, l'intensité électrique, comptée de  $\Sigma_1$  vers  $\Sigma_2$ , est la même à travers toute section (orientée) du tube de courant :

$$I = \iint_{\Sigma_1} \vec{j}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{\Sigma_2} \vec{j}_2 \cdot d\vec{S}_2 \quad (13)$$

Le champ électrique permanent dérive d'un potentiel scalaire  $V$  :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \quad (14)$$

Le vecteur  $\vec{j}$  est parallèle au champ  $\vec{E}$ , et les deux sections  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  perpendiculaires aux lignes de courant constituent des surfaces équipotentielles. La différence de potentiel  $U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$  peut alors être calculée sur tout chemin menant de la section  $\Sigma_1$  du tube à la section  $\Sigma_2$ .

Les vecteurs densité de courant  $\vec{j}$  et champ électrique  $\vec{E}$  sont proportionnels et de même sens. Nous pouvons donc définir le rapport :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{\iint_{\Sigma_1/\Sigma_2} \vec{j} \cdot d\vec{S}} = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}}{\gamma \iint_{\Sigma_1/\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}} = \frac{EL}{jS} = \frac{L}{\gamma S} = \frac{\rho_R L}{S} \quad (15)$$

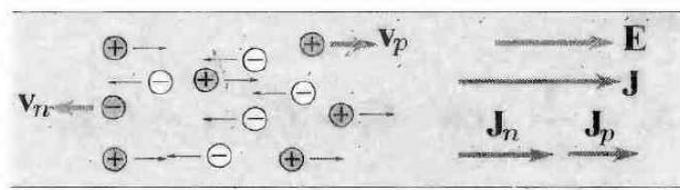
où  $\rho_R = 1/\gamma$  est la résistivité du milieu en  $\Omega.m$ . Ce rapport nous permet de définir la résistance  $R$  de cet élément du milieu ohmique et permet de retrouver la relation usuelle  $U = RI$ .

### d) Semi-conducteurs et isolants

Dans les solides, l'échelle des conductivités permet de classer les différents matériaux. Les meilleurs conducteurs sont les métaux dans lesquels  $\gamma$  est supérieur à  $10^4 S.m^{-1}$ , à température ambiante. Les semi-conducteurs, comme le germanium ou le silicium, sont des matériaux de conductivité plus faible :  $10^{-6} < \gamma < 10^4 S.m^{-1}$ . Enfin les meilleurs isolants sont certains verres ou matières plastiques pour lesquels la conductivité est inférieure à  $10^{-6} S.m^{-1}$ .

Cependant, cette classification est imprécise car, pour un même matériau,  $\gamma$  dépend de façon spectaculaire de la nature cristalline, de la pureté et de la température. En fait, la véritable distinction entre un métal, un semi-conducteur ou un isolant réside dans les

mécanismes responsables de la conduction, car ce sont eux qui permettent d'expliquer les différentes variations de la conductivité avec la température ou avec l'introduction d'impuretés.



Dans un semi-conducteur, deux types de porteurs sont pris en compte : les électrons et les trous. Si  $n_e$  et  $n_p$  désignent les densités volumiques respectives des électrons et des trous,  $\mu_e$  et  $\mu_p$  les mobilités associées, les vitesses de dérive s'écrivent :

$$\vec{v}_n = \mu_e \vec{E} \text{ et } \vec{v}_p = \mu_p \vec{E}$$

Notons que  $\mu_e$  est négatif et donc que les vecteurs  $\vec{j}_p$  et  $\vec{j}_n$  sont de même sens :

$$\vec{j}_n = n_e(-e)\mu_e \vec{E} \text{ et } \vec{j}_p = n_p e \mu_p \vec{E}$$

Il en résulte :

$$\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_p = e(-n_e\mu_e + n_p\mu_p) \vec{E} = \gamma \vec{E} \text{ avec } \gamma = e(-n_e\mu_e + n_p\mu_p) = e(n_e|\mu_e| + n_p\mu_p)$$

Si le semi-conducteur est pur, les trous et les électrons qui assurent la conduction proviennent de la création de paires ; il s sont ainsi en quantité égales :  $n_e = n_p = n_i$ . La conductivité intrinsèque  $\gamma_i$  vaut donc :

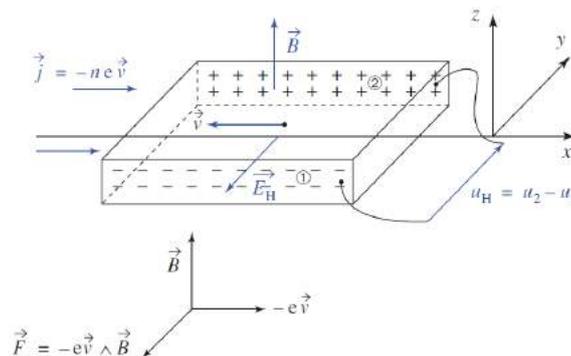
$$\gamma_i = n_i e (|\mu_e| + \mu_p) \tag{16}$$

**Rq :** Pour avoir la théorie de Drude appliqué à un électrolyte voir page 114 du Perez ou page 170 du Bertin-Faroux.

## 2. Application à la mesure de champ : Effet Hall

### a) Effet Hall

L'effet Hall a été découvert par Edwin Herbert Hall en 1879, lors de sa thèse de doctorat. Il a mis en évidence l'apparition d'une différence de potentiel dans un ruban de feuille d'or soumis à l'action d'un champ magnétique perpendiculairement au ruban, parcourue par un courant d'intensité  $I$ , dans une direction perpendiculaire à la fois au courant et au champ magnétique.



Considérons un fil conducteur dont nous modélisons la section par un rectangle de côtés de longueurs  $a$  et  $b$ . Ce fil, soumis à un champ électrique  $\vec{E}_0$ , est le siège d'un courant de conduction dirigé selon  $(Ox)$ .

Dans le fil contenant  $n$  porteur de charges mobiles, de vitesse de dérive  $\vec{v}$  et charge  $q$  ( $q = -e$ ), la densité volumique de courant électrique est :

$$\vec{j} = nq\vec{v} \quad (17)$$

L'effet d'un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ , appliqué au conducteur, se traduit par l'apparition d'une force de Lorentz supplémentaire :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = -qvB\vec{e}_y \quad (18)$$

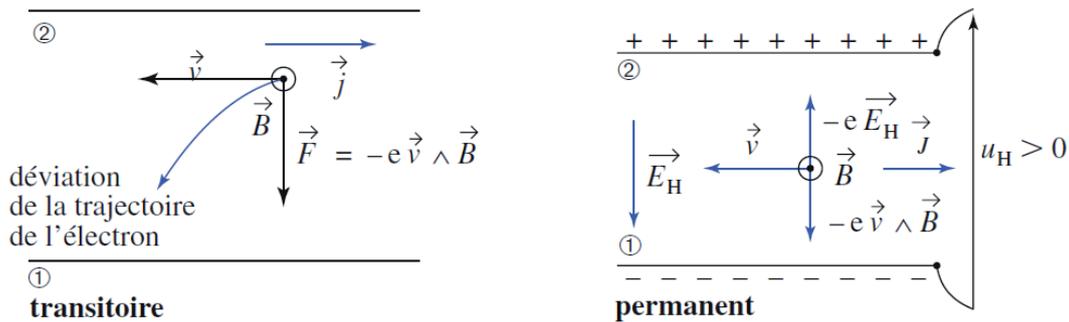


FIGURE 40 - (a) régime transitoire ; (b) régime permanent

### Régime transitoire

Cette force (moyenne, car nous nous intéressons au comportement collectif des porteurs de charge mobiles) tend à dévier le porteur de charge de sa trajectoire dans la direction de l'axe  $(Oy)$ . Si les charge de conduction sont des électrons, de vitesse  $\vec{v}$  dirigée à l'opposée du vecteur densité de courant  $\vec{j}$ , cette force tend à les déplacer vers la face 1. Celle-ci se charge négativement alors que la face 2 accuse un défaut électronique.

Les charges surfacique qui apparaissent créent à leur tour un champ électrique, appelé champ de Hall, qui agit à son tour sur les électrons de conduction.

### Régime permanent

Ce champ de Hall s'oppose à la force de déviation précédente. le système doit tendre vers un nouveau régime permanent, où la force de déviation et la force créée par le champ de Hall se compensent, le mouvement des charges de conduction étant le même qu'en l'absence de champ magnétique :

$$\begin{aligned} q\vec{E}_H + q\vec{v} \wedge \vec{B} &= \vec{0} \\ \Rightarrow \vec{E}_H &= -\vec{v} \wedge \vec{B} = R_H \vec{B} \wedge \vec{j} \end{aligned} \quad (19)$$

où  $R_H = 1/(nq)$  est la constante de Hall du milieu.

## b) Tension de Hall

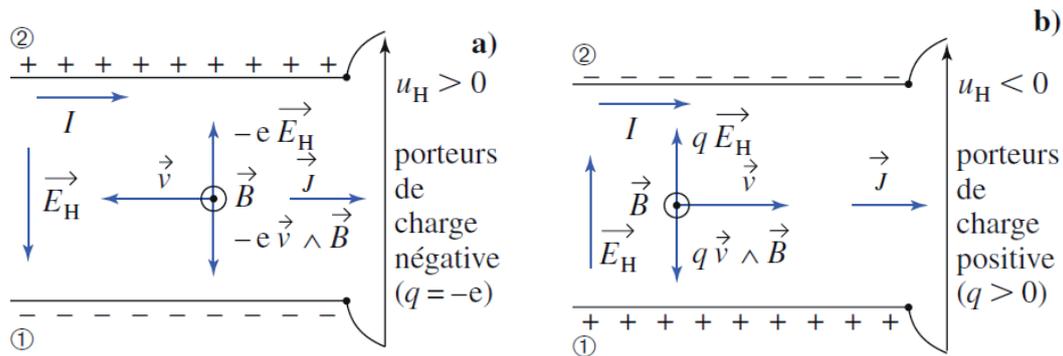


FIGURE 41 – (a) porteurs de charge négative ; (b) porteurs de charge positive

Le modèle que nous venons de présenter est trop simpliste pour qu'il soit possible de lui accorder un crédit illimité, mais il permet de rendre compte de l'apparition, entre les faces 1 et 2, d'une tension de Hall :

$$U_H = \int_1^2 -\vec{E}_H \cdot d\vec{\ell} = -bE_H = -\frac{jb}{nq}B = -\frac{1}{nqa}IB \quad (20)$$

car  $I = j ab$ .

Le signe de la tension de Hall est lié au signe des porteurs de charges mobile. Pour un même courant  $I$ , les tensions de Hall données par :

- un ruban conducteur où les porteurs de charges sont des électrons ( $q = e$ ) ;
- et un ruban semi-conducteur dont les porteurs de charges sont majoritairement des trous (lacunes électroniques  $q = +e$ ) ;

seront de signe opposées. Nous pouvons aussi nous en convaincre en observant que l'effet de déviation du champ magnétique est semblable pour un porteur " $+q, \vec{v}$ " ou un porteur " $-q, -\vec{v}$ ", alors que les champs de Hall seront opposés.

Pour un courant  $I$  et un ruban (de facteur  $1/(nqa)$ ) donnés, la tension de Hall permet une détermination de la valeur du champ magnétique : c'est le principe de fonctionnement d'une sonde de Hall.

**Rq :** Pour le modèle et Hall des forces de Laplace voir page 25 du H-prépa ou page 595 du Sanz.

**Rq :** Pour l'aspect énergétique voir page 595 du Sanz.

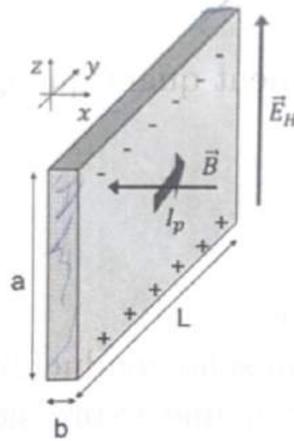
## c) Expérimentation

**MANIP :** page 139 du Quaranta nouvelle édition.

Lorsqu'un morceau de semi-conducteur parcouru par un courant  $I$  selon  $(Ox)$  est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  suivant  $(Oz)$ , la force de Lorentz  $q\vec{v} \wedge \vec{B}$  entraîne les porteurs dans la direction perpendiculaire. Il apparaît un champ électrique transversale parallèle à  $Oy$ , dit champs de Hall, qui compense exactement la force de Lorentz :  $\vec{E}_H =$

$-\vec{v} \wedge \vec{B}$ . Les charges s'accumulent aux limites du semi-conducteur donnant lieu à la tension de Hall  $V_H$ . Le courant  $I_p$  circulant donne la vitesse des porteurs :  $j = I_p/S = nqv$  où  $S = a \times b$  est la section transverse de la plaquette. On en déduit :

$$E_H = \frac{I_p B}{abnq} \Rightarrow V_H = \frac{I_p B}{bnq} \quad (21)$$

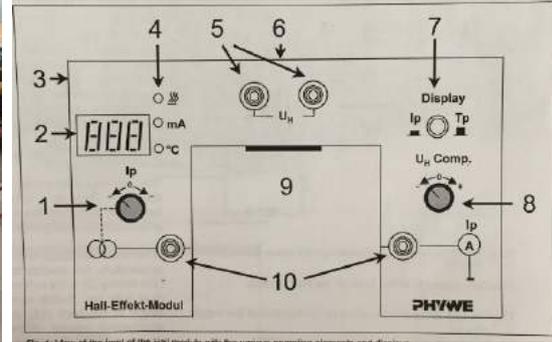


La tension de Hall permet ainsi de remonter au dopage, n (ou p) et à la mobilité du matériau étudié.

Le champ magnétique  $B$  est créé par un électroaimant parcouru par un courant d'intensité  $I_B$ .



Dans un premier temps il faut établir la courbe d'étalonnage  $B(I_B)$ , du champ magnétique  $B$  mesuré par une sonde de Hall en fonction du courant  $I_B$  circulant dans les bobines (ici nous avons  $1mV = 0.1T$  pour la sonde). On place les barres de l'entrefer en sens opposé pour avoir un champ magnétique le plus homogène possible dans l'entrefer. On récupère le coefficient directeur de la pente de la représentation graphique.



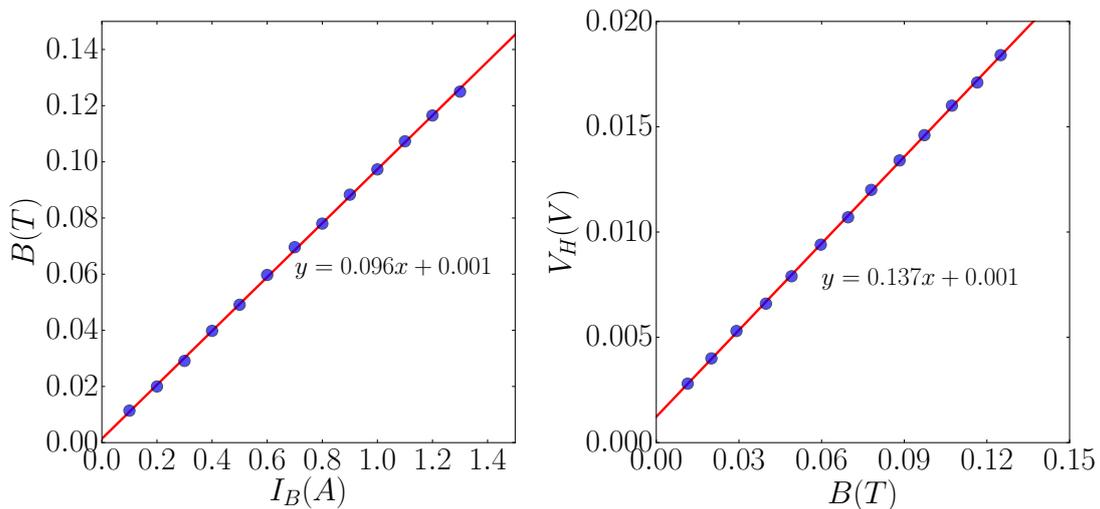
Puis on place la plaquette dans l'entrefer de l'électroaimant. On fixe le courant traversant le semi-conducteur autour de  $I_p = 20mA$  en alimentant la plaquette par une tension alternative de 12eV, car la tension alternative permet aussi de faire des mesures de température. On mesure ainsi la tension de Hall à l'aide d'un voltmètre pour différentes valeurs du champ magnétique (en fixant les valeurs de  $I_B$ ). On sait que  $U_H = \alpha B$ , avec  $\alpha = I_p/(bnq)$ . On trouve  $\alpha = 0,14SI$ . Puis on mesure la tension sur les bornes 10 de la plaquette sans champ magnétique, ni courant traversant les bobines. On trouve  $U = 0,76V$ . On a  $I_p = 20mA$ , alors on trouve  $R = U/I = 38\Omega$ . On en déduit alors la conductivité :

$$\gamma = \frac{L}{R\gamma} = 51,8 \Omega^{-1}.m^{-1} \quad (22)$$

Connaissant la conductivité et  $ne = I_p/(\alpha b)$ , on en déduit la mobilité :

$$\mu = \frac{\gamma}{ne} = 3625,93 \text{ cm}^2V^{-1}s^{-1} \quad (23)$$

Ces valeurs sont à comparer avec les valeurs théoriques.



### 3. Limites du modèle de Drude

#### a) Limites

Pour montrer les limites d'une description classique de la conductivité des solides, estimons la vitesse quadratique moyenne  $v_q$  d'un gaz parfait d'électrons à température

ambiante ( $T = 300K$ ). Compte tenu de l'énergie cinétique moyenne d'un électron  $U = m_e v_q^2/2$  et de la définition de la température, il vient :

$$\frac{1}{2}m_e v_q^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

$$\Leftrightarrow v_q = \left( \frac{3k_B T}{m_e} \right)^{1/2} = 0,12 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$$
(24)

Il en résulte que dans le cuivre, le libre parcours moyen  $\ell$  entre deux collisions aurait pour valeur :

$$\ell = v_q \tau \sim 2,8 \text{ nm}$$

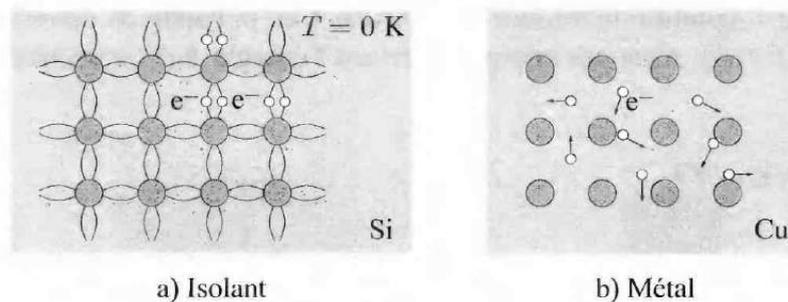
Cette valeur est très supérieure, d'au moins un ordre de grandeur, aux distances interatomiques ( $\approx 0,2 \text{ nm}$ ). D'ailleurs les mesures expérimentales de ce libre parcours moyen montrent qu'il est encore plus élevé et qu'il augmente avec un abaissement de la température, deux résultats incompatibles avec une description classique du gaz d'électrons. Il en résulte que ce ne sont pas les collisions sur les ions du réseau qui sont responsables de la loi d'Ohm. En effet expérimentalement on a  $\gamma \propto 1/T$  et avec le modèle de Drude  $\gamma \propto 1/\sqrt{T}$ .

En outre le modèle de Drude s'avère incapable de rendre compte des différences essentielles entre métaux, semi-conducteurs et isolants. La conductivité des solides ne peut être interprétée que dans le cadre de la mécanique quantique.

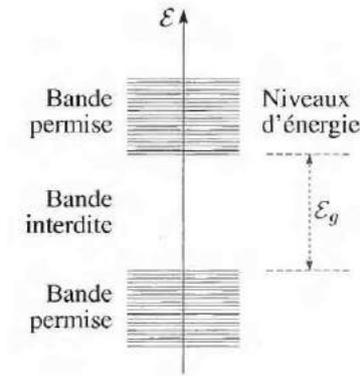
## b) Théorie des bandes

### Structure de bande

Un solide peut être décrit comme un ensemble rigide d'atomes, dont la stabilité est assurée par des liaisons. Si les matériaux sont constitués d'un seul élément chimique, comme le cuivre ou le silicium, ces liaisons sont soit métalliques soit covalentes. Ces deux types de liaisons correspondent aux deux catégories principales de solides, relativement à la conduction électrique : les conducteurs et les isolants.



Dans un isolant, tous les électrons des couches atomiques externes sont liés car ils participent aux liaisons. En revanche, dans un métal, certains électrons sont libres d'évoluer dans tout le réseau, ce qui leur permet d'assurer la conduction électrique.



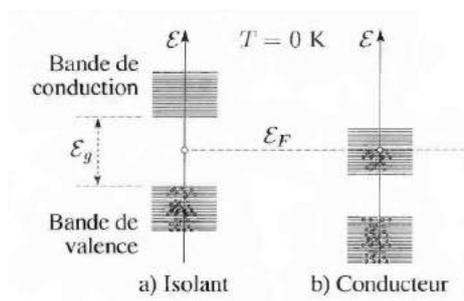
En physique quantique, on montre que, dans un atome, l'énergie d'un électron est quantifiée, c'est à dire qu'elle ne peut prendre que des valeurs déterminées appelées niveaux d'énergie. Dans un solide, sous l'effet combiné des interactions et de la périodicité ces niveaux se rassemblent et forment des bandes d'énergie à l'intérieur desquelles la différence entre les niveaux successifs est si faible que l'on peut considérer que l'énergie varie de manière continue. En revanche, entre différentes bandes d'énergie, existe un large domaine d'énergies interdites, appelé bande interdite ou gap.

### Niveau de Fermi dans les isolants et les conducteurs

La répartition des électrons sur les différents niveaux d'énergie obéit au principe d'exclusion de Pauli, selon lequel un état quantique ne peut être occupé par plus d'un électron. De ce fait, elle suit une loi statistique, établie en 1926 par Fermi et Dirac, qui donne la probabilité d'occupation  $p(\mathcal{E})$  d'énergie  $\mathcal{E}$ .

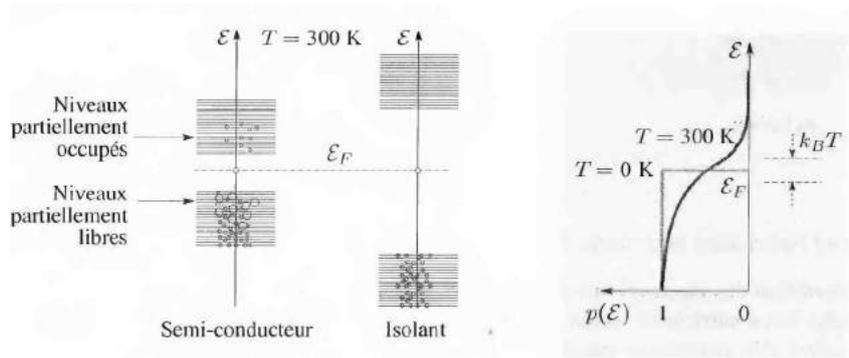
A basse température ( $T \approx 0K$ ) seuls les niveaux d'énergie inférieur à une certaine valeur  $\mathcal{E}_F$ , appelée énergie de Fermi, sont occupés. La distinction entre isolant et conducteur n'est finalement liée qu'à la position du niveau de Fermi dans le diagramme énergétique des bandes :

- Si le niveau de Fermi est situé dans une bande interdite, tous les niveaux de la bande permise d'énergie inférieure, appelée bande de valence, sont occupés. Tous ceux de la bande permise d'énergie supérieure, appelée bande de conduction, sont libres. Il est alors impossible de modifier cette répartition sans fournir une énergie importante. En effet, cette énergie doit être supérieure au gap  $\mathcal{E}_g$  pour qu'un électron de la bande de valence accède à la bande de conduction. Comme un champ électrique usuel est insuffisant pour réaliser une telle transition, les électrons restent tous liés et le matériau est isolant.
- Si le niveau de Fermi est situé dans une bande permise, des électrons peuvent, sous l'action d'un champ électrique, acquérir de l'énergie et occuper des niveaux d'énergie supérieure inoccupés en l'absence du champ : le matériau est alors conducteur.



## Semi-conducteurs

Un semi-conducteur ne se distingue d'un isolant que par une largeur de la bande interdite  $\mathcal{E}_g$  plus faible. Cette distinction apparaît clairement si l'on examine l'action de la température sur la probabilité d'occupation  $p(\mathcal{E})$ . Lorsque la température est différente de 0K la transition de la valeur 1 à 0 de cette probabilité, au voisinage de  $\mathcal{E}_F$ , n'est pas abrupte. Certains niveaux, d'énergie  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_F$ , peuvent être occupés, l'énergie supplémentaire pour que des électrons y accèdent étant fournie par l'agitation thermique. Des niveaux de la bande de conduction peuvent être ainsi occupés, si l'écart  $\mathcal{E} - \mathcal{E}_F$  n'est pas trop grande devant l'énergie  $k_B T$ , caractéristique de l'agitation thermique.



Alors que, dans un métal, l'influence de la température sur la répartition des électrons dans la bande de conduction est sans effet particulier, dans un semi-conducteur, l'effet est spectaculaire : isolant parfait à 0K le semi-conducteur devient conducteur à température ambiante. À cette température les électrons qui sont dans la bande de conduction peuvent occuper, sous l'action d'un champ électrique, des niveaux d'énergie immédiatement supérieure ; la conductivité électrique par des électrons de conduction est ainsi possible. En outre, certains niveaux du haut de la bande de valence sont également disponibles en raison du transfert dans la bande de conduction des électrons qui s'y trouvaient. Les trous ainsi créés peuvent être ensuite comblés par d'autres électrons de valence ; on peut alors décrire le déplacement de ces électrons sous l'action d'un champ électrique comme un déplacement de trous en sens inverse.

L'énergie d'agitation thermique n'étant que de quelques dizaines de meV, à température ambiante, les propriétés des semi-conducteurs ne sont observées que pour des matériaux dont la largeur de bande interdite n'est pas très élevée ( $\mathcal{E}_g \sim 1\text{eV}$ ). Si cette largeur est très grande (plusieurs eV), le matériau reste isolant à température ambiante.

	Ge	Si	Diamant	Silice
$\mathcal{E}_g$ (eV)	0,67	1,14	5,4	$\sim 10$

**Rq :** L'énergie nécessaire à un électron pour passer de la bande de valence à la bande de conduction peut lui être fournie par un rayonnement dans le cadre de l'absorption de lumière où l'énergie  $h\nu$  du photon doit être suffisante pour créer une paire électron-trou :  $h\nu \geq \mathcal{E}_g$ . Propriété de photoconductivité.

## Paramètres influant

Les paramètres influant sur la conductivité d'un matériau peuvent être :

- La température : Pour un conducteur, lorsque  $T$  augmente, les vibrations du réseau augmentent, les collisions électrons-phonons augmentent,  $v$  diminue et au final,  $\gamma$  diminue. Pour un semi-conducteur, lorsque  $T$  augmente,  $v$  diminue aussi, mais surtout  $n$  augmente (franchissement du gap par les  $e^-$ ) et au final,  $\gamma$  augmente.
- Les impuretés : la présence d'atomes étrangers dans le réseau d'un semi-conducteur rompt la symétrie de translation du cristal et donc diminue la mobilité des porteur :  $v$  et  $\gamma$  diminuent pour un porteur. Pour un semi-conducteur, certains types d'impuretés permettent d'augmenter  $n$  : c'est le dopage. Par exemple, dans un cristal de silicium (tétravalent), cela consiste en le remplacement d'un atome de Si par un atome de phosphore (pentavalent) ou de bore (trivalent). Dans le premier cas, il y a un électron en trop pour assurer la liaison : il est faiblement lié et une faible agitation thermique va suffire à le faire passer dans la bande de conduction : on parle de dopage n car le porteur est un électron négatif. Dans le deuxième cas, il manque un électron pour assurer les liaisons, ce manque peut facilement être comblé par un autre électron, mais un trou se crée là où l'électron se trouvait, et c'est ce trou qui se déplace de proche en proche : on parle de dopage p car le porteur est un trou positif. De très faibles taux d'impuretés (ppm) peuvent modifier considérablement la conductivité, et, pour le dopage à température ambiante, on peut considérer que celle-ci est uniquement due aux impuretés (on est alors en régime extrinsèque, par opposition au régime intrinsèque).

**Rq :** Pour plus de détails et la mise en équation de ces facteurs influant voir page 119-121 du Perez et page 167 du Bertin.

**Rq :** On peut regarder des idées de manip dans le Quaranta ancienne version page 432 sur les thermistances pour déduire  $\mathcal{E}_g$  du semi-conducteur la constituant.

## Conclusion

Nous avons pu voir dans cette leçon que la conductivité est un paramètre qui caractérise la réponse que donne un milieu matériel lorsqu'on le soumet à l'action d'un champ électrique macroscopique.

L'interprétation microscopique du phénomène permet de rendre compte du large éventail des valeurs de conductivité. Deux paramètres essentiels caractérisent les différentes charges mobiles dans un milieu donné : leur mobilité  $\mu$  et leur densité volumique  $n$ . Ces paramètres sont directement liés à la structure, à la nature des constituants et à la température.

Ainsi via le phénomène de conduction électrique on peut discerner différents types de milieu :

- les métaux ( $\gamma$  élevé) la conduction est assurée par des électrons ;  $\gamma$  diminue avec la température ;
- les isolants ( $\gamma$  presque nul) toutes les charges (ions et électrons) sont liées et assurent les liaisons chimiques ;
- semi-conducteurs ( $\gamma$  faible ou moyen) la conduction est assurée par les électrons et les trous ;  $\gamma$  augmente rapidement avec la température et la présence d'impuretés dopantes.

Il y a aussi les électrolytes et plasma qui peuvent être discernés. (voir page 114-115 du Perez).

Ces phénomènes de conduction sont très utiles pour la transmission de données, mais aussi pour effectuer des mesures. En effet, les semi-conducteurs sont présents dans bien des capteurs comme les photo-diodes ou en électronique pour effectuer des opérations logiques.

**Rq :** Voir sur les diodes, transistor et supraconductivité voir BUP.

**Rq :** Voir sur la conductivité thermique page 23 du Ashcroft.

**Rq :** Voir le rapport des conductivités thermiques et électrique page 147 du Kittel, important d'avoir une idée sur la loi de Wiedemann-Franz ou bien page 27 du Ashcroft.

**Rq :** Avoir des infos sur la théorie de Sommerfeld page 33 du Ashcroft.

**Rq :** Savoir ce qu'il se passe en régime variable, c.a.d la conductivité en régime alternatif, page 18 du Ashcroft et page 589 du Sanz.

# L.P. 48 - Phénomène de résonance dans différents domaines de la physique

Niveau : 2eme année CPGE

## Pré-requis

- Écritures complexe
- Mécanique du point
- Électronique
- Optique ondulatoire
- Physique des ondes
- Représentation de Fresnel

## Bibliographie

- Mécanique, José-Philippe Perez, *Dunod*
- Optique, José-Philippe Perez, *Dunod*
- Physique Tout en un MPSI-PSI, Sanz, *Dunod*
- BUP n.851 (2003)

## Introduction

Le phénomène de résonance est omniprésent dans l'ensemble de la physique. Parfois c'est un phénomène que l'on cherche à favoriser, tandis que dans certains cas, on essaye justement de s'en affranchir.

La définition générale de résonance serait : qui passe par un maximum. On ne sait pas trop de quoi on parle, ça peut être une amplitude, une puissance, une vitesse...etc... Mais en général, on va s'intéresser à une amplitude. C'est dans tous les cas une réponse à une excitation.

**Ex :** Manip avec un pendule simple : faire des excitations de différentes amplitude pour montrer qu'à certaines fréquence le pendule bouge.

On va donc s'occuper de systèmes physiques, que l'on considèrerai au final comme des boîtes noires, soumis à une excitation de type sinusoïdale à une pulsation donnée, et on cherchera la réponse de ce système. Dans cette leçon, on ne parlera que de systèmes linéaires, dont la réponse est alors également de type sinusoïdale, à même pulsation.

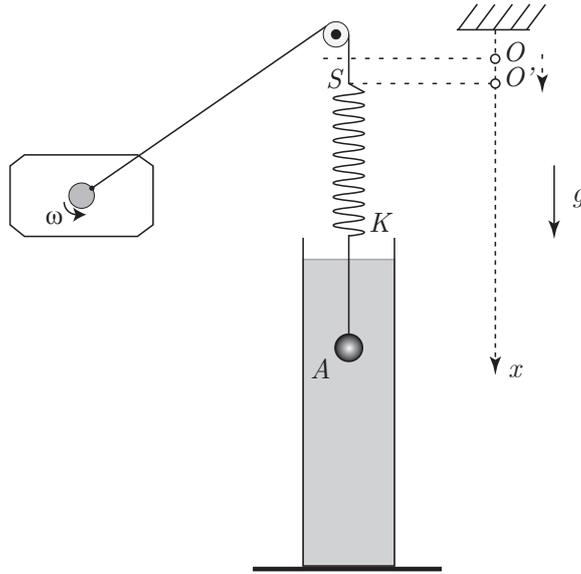
On adoptera la notation complexe, et la notion de fonction de transfert, qui permet ainsi de caractériser entièrement la réponse du système à toute excitation (par décomposition spectrale). Plan : on étudiera en détail ce système mécanique résonant pour dégager les caractéristiques générales du phénomène de résonance ; ensuite, nous soulignerons les analogie avec le domaine de l'électrocinétique, puis nous généraliserons à tout système physique ; enfin, nous verrons quelques applications lors d'une propagation.

# 1. Le pendule élastique

## a) Présentation

On peut provoquer des oscillations forcées d'un pendule élastique en lui imposant un déplacement sinusoïdal. Ce cas fréquence dans la pratique peut être illustré par l'exemple qui suit.

Soit un oscillateur constitué par un pendule élastique vertical A (masse  $m$  et raideur  $K$ ) dont l'extrémité supérieure  $S$  a un mouvement oscillatoire harmonique, de pulsation  $\omega$ , imposé par un moteur.



On détecte le mouvement, de  $A$ , par rapport au référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ , supposé galiléen, en mesurant la variation de la tension entre une borne de référence et l'extrémité d'une tige conductrice liée à la masselotte en mouvement dans l'électrolyte.

Écrivons l'équation différentielle du mouvement du pendule, en introduisant une force de frottement de Stokes  $F_S = \alpha v$ , proportionnelle à la vitesse  $v$ . L'axe  $Ox$  étant orienté suivant la vertical descendante, il vient :

$$m \vec{a} = m \vec{g} - K(x - x_S - l_0) \vec{e}_x - \alpha \vec{v} \quad (1)$$

où  $x_S = \overline{OS}$  désigne la coordonnée de l'extrémité supérieur du ressort.

※ **Warning** : Dans ce problème on néglige les forces d'Archimède, car en réalité on considère la masse  $m$  comme étant une masse comprenant la masse de la bille et la masse de liquide déplacé.

Comme  $x_S = D_m \cos(\omega t + \phi_e)$ , on a

$$m \ddot{x} = -K(x - l_0) - \alpha \dot{x} + mg + K D_m \cos(\omega t + \phi_e) \quad (2)$$

soit en introduisant  $l_e = l_0 + mg/K$  et en procédant au changement de variable  $X = x - l_e$  :

$$m \ddot{X} + \alpha \dot{X} + K X = K D_m \cos(\omega t + \phi_e) \quad (3)$$

En divisant par la masse, on fait apparaître la pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{K/m}$  et la durée de relaxation en énergie  $\tau_e = m/\alpha$ . L'équation précédente prend alors la forme canonique suivante :

$$\ddot{X} + \frac{\dot{X}}{\tau_e} + \omega_0^2 X = E_m \cos(\omega t + \phi_e) \quad (4)$$

avec  $E_m = \frac{KD_m}{m} = \frac{F_m}{m}$  en posant  $F_m = KD_m$ .  $E_m$  amplitude du terme d'excitation.

## b) Oscillations forcées

La solution de cette équation différentielle est la somme de deux termes :

– La solution générale de l'équation sans second membre :

$$x(t) = A \exp\left(-\frac{t}{2\tau_e}\right) \cos(\omega_a t + \phi_a)$$

– La solution particulière de l'équation totale :

$$B \cos(\omega t + \phi_x)$$

Entre l'instant initial et une certaine durée, qui dépend de  $\tau_e$ , au delà de laquelle le premier terme est négligeable devant le second, le régime est transitoire.

Une fois le régime transitoire achevé, on observe le régime forcé ou établi de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi_x) \quad (5)$$

Dans la suite, nous étudierons uniquement ce régime forcé.

## c) Élongation de l'oscillateur

Afin de déterminer la solution particulière de l'équation différentielle canonique, nous allons utiliser la méthode complexe qui consiste à associer, à l'équation différentielle précédente, l'équation différentielle suivant à laquelle satisfait la grandeur complexe :  $\underline{x} = x + jy$  avec  $j^2 = -1$  :

$$\ddot{\underline{x}} + \frac{\dot{\underline{x}}}{\tau_e} + \omega_0^2 \underline{x} = E_m \exp[j(\omega t + \phi_e)] \quad (6)$$

La solution réelle  $x(t)$  s'obtient alors en prenant la partie réelle de  $\underline{x}(t)$ . Cherchons une solution de la forme :

$$\underline{x}(t) = \underline{X}_m \exp(j\omega t) \text{ où } \underline{X}_m = X_m \exp(j\phi_x)$$

est l'amplitude complexe de l'élongation. Comme  $\ddot{\underline{x}} = -\omega^2 \underline{x}$  et  $\dot{\underline{x}} = j\omega \underline{x}$ , on a :

$$\left(-\omega^2 + j\frac{\omega}{\tau_e} + \omega_0^2\right) \underline{X}_m = E_m \exp[j(\omega t + \phi_e)] = \underline{E}_m \exp(j\omega t) \quad (7)$$

$E_m \exp(j\phi_e)$  étant l'amplitude complexe de l'excitation. On en déduit en introduisant le facteur de qualité  $Q = m\omega_0/\alpha$  :

$$\underline{X}_m = \frac{\underline{E}_m}{(-\omega^2 + \omega_0^2) + j(\omega/\tau_e)} \text{ soit } X_m = \frac{QE_m/\omega_0^2}{u[Q(1/u - u) + j]}$$

En introduisant le rapport des pulsations  $u = \omega/\omega_0$ . Il en résulte que  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi_x)$  avec :

$$X_m = \frac{E_m}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau_e^2]^{1/2}} = \frac{QE_m/\omega_0^2}{u [1 + Q^2(u - 1/u)^2]^{1/2}}$$

et

$$\tan(\phi_x - \phi_e) = \frac{\omega/\tau_e}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{1}{Q(u - 1/u)} = \frac{u}{Q(u^2 - 1)}$$

#### d) Vitesse l'oscillateur

Comme la vitesse de l'oscillateur est donnée par  $\dot{x}$ , écrivons  $\underline{\dot{x}}$  sous la forme :

$$\underline{\dot{x}} = \frac{dx}{dt} = \underline{V}_m \exp(j\omega t) = V_m \exp[j(\omega t + \phi_v)]$$

$\underline{V}_m$  étant l'amplitude complexe de la vitesse,  $V_m$  son amplitude et  $\phi_v$  sa phase à l'origine. Or, d'après ce qui précède :

$$\underline{\dot{x}} = j\omega \underline{X}_m \exp(j\omega t) = j\omega \frac{QE_m/\omega_0^2}{u[Q(1/u - u) + j]} \exp(j\omega t)$$

En identifiant on obtient :

$$\underline{V}_m = \frac{\underline{E}_m \tau_e}{1 + jQ(u - 1/u)}$$

On en déduit :

$$V_m = \omega X_m = \frac{E_m \tau_e}{[1 + Q^2(u - 1/u)^2]^{1/2}}$$

et :

$$\tan(\phi_v - \phi_e) = -Q \left( \frac{u - 1}{u} \right)$$

La vitesse  $\dot{x}$  est ainsi en avance de phase  $\pi/2$  par rapport à l'élongation  $x$  :

$$\phi_v = \phi_x + \frac{\pi}{2} \text{ soit } \phi_v - \phi_e = \phi_x - \phi_e + \frac{\pi}{2}$$

#### e) Admittance généralisée - Résonance

##### Admittance généralisée

Par définition, on appelle admittance généralisée  $Y_g$  le rapport de l'amplitude complexe de la "sortie/vitesse" sur celle de "l'entrée/excitation" :

$$Y_g = \frac{\underline{V}_m}{\underline{E}_m} \text{ soit } Y_g = \frac{\tau_e}{1 + jQ(u - 1/u)}$$

Ainsi définie,  $Y_g$  a la dimension d'une durée. On en déduit le module et sa phase :

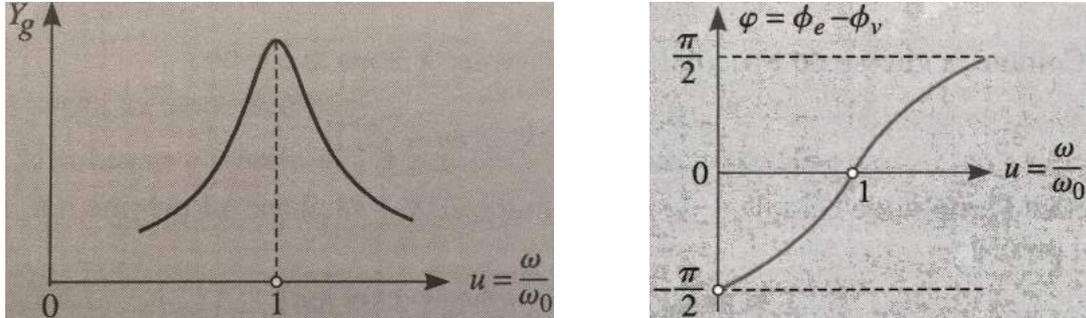
$$Y_g = |Y_g| \exp(j\phi_y) \text{ avec } |Y_g| = \frac{\tau_e}{[1 + Q^2(u - 1/u)^2]^{1/2}} \text{ et } \phi_y = \phi_v - \phi_e$$

Conventionnellement, on introduit la différence de phase, noté  $\varphi$ , entre la phase de l'excitation et celle de la vitesse :

$$\varphi = -\phi_y = \phi_e - \phi_v \text{ avec } \tan(\varphi) = Q(u - \frac{1}{u})$$

## Résonance

Sur la figure est représenté  $|Y_g|$  et  $\varphi$  en fonction de  $u$  et  $Q$ . On voit que, pour  $u = 1$ , c'est à dire pour une pulsation de l'excitation égale à la pulsation propre du système, le module de l'admittance généralisée passe par un maximum, qui vaut  $\tau_e$  : en outre la vitesse est en phase avec l'excitation. Notons que l'admittance prend une valeur infinie dans le cas limite ou il n'y a pas d'amortissement.



On appelle résonance le phénomène d'exaltation de l'admittance généralisée d'un système qui fait correspondre un signal de sortie à un signal d'entrée, que l'on observe pour :

$$\omega = \omega_0$$

### f) Excitation maximale indépendante de la pulsation

On admet ici que l'amplitude de l'excitation est indépendante de la pulsation  $\omega$ , ce qui est fréquemment réalisé. On a alors :

$$E_m = \frac{F_m}{m}$$

On définit l'impédance de l'oscillateur comme étant :

$$Z_m = \frac{F_m}{V_m} = \frac{m}{Y_g} = \alpha \left[ 1 + jQ \left( u - \frac{1}{u} \right) \right]$$

Il vient alors ( $Q = m\omega_0/\alpha$ ,  $u = \omega/\omega_0$  et  $m\omega_0^2 = K$ ) :

$$Z_m = \alpha + j \left( m\omega - \frac{K}{\omega} \right)$$

On en déduit le module et la phase :

$$Z_m = |Z_m| \exp(j\varphi) \text{ avec } |Z_m| = \left[ \alpha^2 + \left( m\omega - \frac{K}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2}$$

et

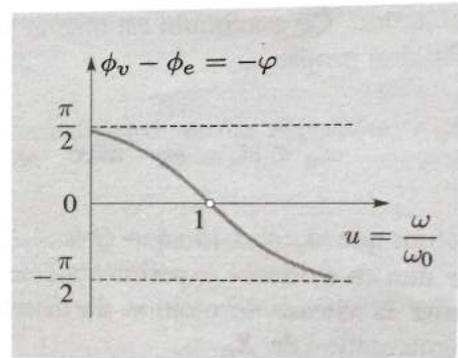
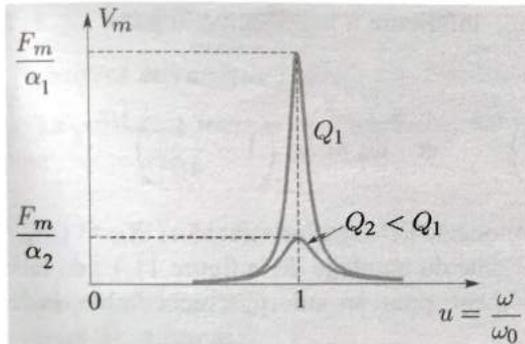
$$\varphi = \phi_e - \phi_v \text{ tel que } \tan(\varphi) = \frac{m\omega - K/\omega}{\alpha}$$

### Vitesse ou intensité au voisinage de la résonance

L'amplitude de la vitesse s'écrit, en fonction de  $u$  et  $Q$  :

$$V_m = \frac{F_m/\alpha}{[1 + Q^2(u - 1/u)^2]^{1/2}} \quad (8)$$

Pour  $u = 1$ ,  $V_m$  est maximal et vaut  $F_m/\alpha$ . Ainsi, comme l'admittance généralisée, l'amplitude de la vitesse passe par un maximum pour  $\omega = \omega_0$ , quel que soit l'amortissement et donc  $Q$ . Il en résulte qu'un moyen d'analyser le phénomène de résonance est d'étudier la variation de la vitesse du système considéré en fonction de la pulsation  $\omega$  : on dit qu'il y a résonance de vitesse.



Cette variation de la vitesse en fonction de la fréquence peut être mise en évidence dans l'expérience initiale faite avec le pendule élastique. Il suffit d'utiliser un circuit dérivateur qui permet d'avoir la dérivée par rapport au temps du signal électrique proportionnel à l'élongation. On constate bien que l'amplitude de la vitesse est maximale pour  $\omega = \omega_0$  quel que soit l'amortissement.

Quant à la différence entre la phase de la vitesse et celle de la force excitatrice, on l'obtient directement à partir de  $\varphi$  puisque :

$$\phi_v - \phi_e = -\varphi$$

Il en résulte que la vitesse et la force excitatrice sont en phase à la résonance. Lorsque  $u$  varie de 0 jusqu'à l'infini, la différence de phase passe de  $\pi/2$  à  $-\pi/2$ . Si l'amortissement est nul, l'amplitude de la vitesse est infinie ; la phase, elle, vaut  $\pi/2$  pour  $\omega < \omega_0$  et  $-\pi/2$  pour  $\omega > \omega_0$ .

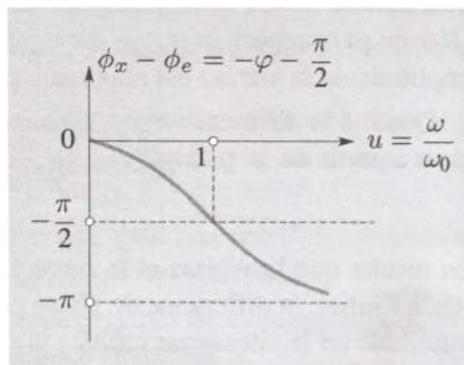
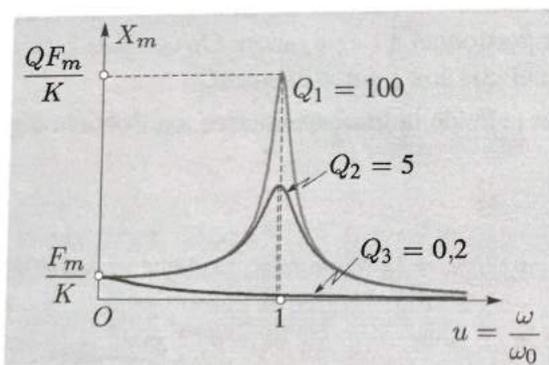
Ces résultats sur la vitesse se transposent directement à l'intensité dans le circuit série RLC excité par un générateur de tension sinusoïdale. On obtient alors la résonance d'intensité.

### Élongation au voisinage de la résonance

L'amplitude réelle  $X_m$  de l'élongation s'écrit, en fonction de  $u$  et  $Q$  :

$$X_m = \frac{QE_m/\omega_0^2}{u[1 + Q^2(u - 1/u)^2]^{1/2}} = \frac{QF_m/K}{u^2 + Q^2(u^2 - 1)^2]^{1/2}} \quad (9)$$

Notons que  $u_m \approx 1$  lorsque  $Q \gg 1$ . L'amplitude de l'élongation vaut alors  $X_m \approx QF_m/K$ . On met en évidence expérimentalement ce maximum à l'aide du montage en faisant varier la vitesse de rotation du moteur, on observe aisément, pour un amortissement faible, la forte augmentation de  $X_m$ .



En ce qui concerne la différence de phase ( $\phi_x - \phi_e$ ), on l'obtient immédiatement en retranchant  $\pi/2$  à la différence de phase ( $\phi_v - \phi_e$ ) :

$$\phi_x - \phi_e = -\varphi - \frac{\pi}{2}$$

Elle varie donc entre 0 et  $-\pi$  lorsque  $u$  passe de 0 à l'infini. Ainsi l'élongation de l'oscillateur est toujours en retard sur l'excitateur et ce retard vaut  $\pi/2$  à la résonance. Lorsque l'amortissement est nul, le maximum est infini et se produit pour  $\omega = \omega_0$ ; la phase vaut alors 0 si  $\omega < \omega_0$  et  $\pi$  si  $\omega > \omega_0$ .

## g) Étude énergétique

### Puissance mécanique fournie par l'excitateur à l'oscillateur

La puissance fournie par l'excitateur à l'oscillateur, par l'intermédiaire du terme  $F_m \cos(\omega t + \phi_e)$  a pour expression :

$$\mathcal{P} = F \cdot v = F_m \cos(\omega t + \phi_e) \cdot V_m \cos(\omega t + \phi_v) = \frac{F_m^2}{2|Z_m|} [\cos(2\omega t + \phi_e + \phi_v) + \cos(\varphi)] \quad (10)$$

Puisque  $V_m = F_m/|Z_m|$ . La puissance varie donc sinusoidalement avec le temps autour de la valeur moyenne  $\langle \mathcal{P} \rangle$  suivante :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\dot{X}} \cdot \underline{F}) = \alpha \frac{V_m^2}{2}$$

D'après la relation  $\cos(\varphi) = \alpha/|Z_m|$ , que l'on établit à l'aide de la représentation de Fresnel de l'impédance. En remplaçant  $V_m$  par son expression, on trouve :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\alpha}{2m^2} \frac{\omega^2 F_m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau_e^2} = \frac{F_m^2}{2\alpha} \frac{1}{1 + Q^2(u - 1/u)^2} \quad (11)$$

### Variation de la puissance mécanique fournie par l'excitateur en fonction de la pulsation

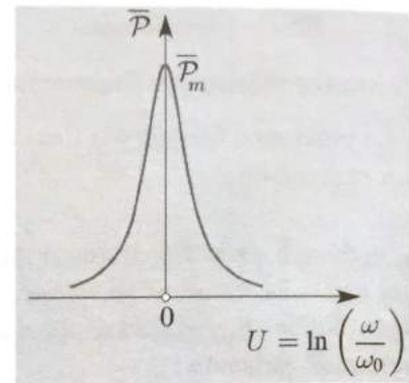
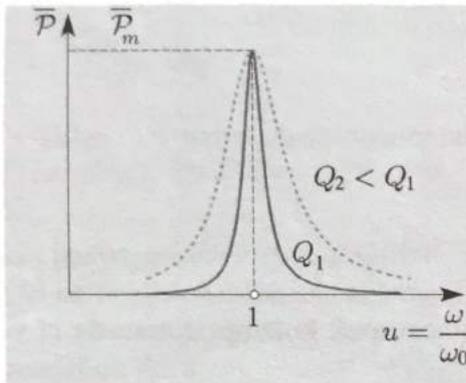
Étudions, en fonction de  $u = \omega/\omega_0$ , l'expression de la puissance moyenne  $\langle \mathcal{P} \rangle$  transférée par la force excitatrice à l'oscillateur. Cette puissance s'annule pour les valeurs extrêmes de  $u$  et passe par un maximum pour  $u = 1$  :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\langle \mathcal{P}_{max} \rangle}{1 + Q^2(u - 1/u)^2} \text{ avec } \langle \mathcal{P}_{max} \rangle = \frac{F_m^2}{2\alpha}$$

Si l'on représente cette puissance moyenne en fonction, non de  $u$ , mais de  $U = \ln(u)$ , on obtient une courbe symétrique d'équation :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\langle \mathcal{P}_{max} \rangle}{1 + Q^2[\exp(U) - \exp(-U)]^2} = \frac{\langle \mathcal{P}_{max} \rangle}{1 + 4Q^2 \sinh^2(U)} \quad (12)$$

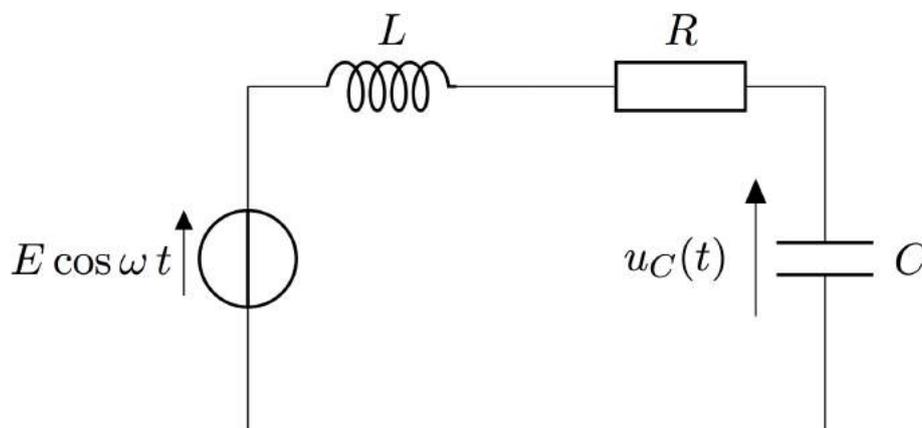
On voit que transfert maximal de la puissance moyenne de l'excitateur vers l'oscillateur est maximale à la résonance. C'est la raison pour laquelle, en physique moderne où l'aspect énergétique s'exprime plus simplement, on définit souvent la résonance par le transfert maximal d'énergie moyenne entre l'excitateur et l'oscillateur.



## 2. Généralisation au circuit R, L, C

Il existe une analogie formelle très intéressante entre la mécanique et l'électrocinétique. La position  $x$  est l'équivalent de la charge  $q$ , et ensuite, toutes les grandeurs classiques de mécanique ont un équivalent en électrocinétique qui assure la compatibilité des équations.

※ **Warning** : La bobine possède une résistance interne. Si on se place à haute fréquence les effets capacitifs sont supérieurs aux effets inductifs donc on fait des manipulations avec des fréquences assez basses (<math>< 5\text{kHz}</math>).



### Résonance en intensité

Connaissant :

– la tension aux bornes du condensateur :  $u_C = q/C$  ;

– la tension aux bornes de la résistance :  $u_R = Ri$  ;

– la tension aux bornes de la bobine :  $u_L = L \frac{di}{dt}$  ;

On peut en déduire l'équation en application la loi des mailles en supposant qu'on impose une tension de la forme  $e(t)$  et sachant que  $i = C \frac{du_C}{dt}$  :

$$\begin{aligned} e(t) &= L \frac{di}{dt} + Ri + u_C \\ \frac{1}{L} \frac{de(t)}{dt} &= \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} \end{aligned} \quad (13)$$

En notation complexe on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L}(j\omega)\underline{e} &= (j\omega)^2\underline{i} + \frac{R}{L}j\omega\underline{i} + \frac{\underline{i}}{LC} \\ \Rightarrow \underline{i} &= \frac{\underline{e}}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} \end{aligned} \quad (14)$$

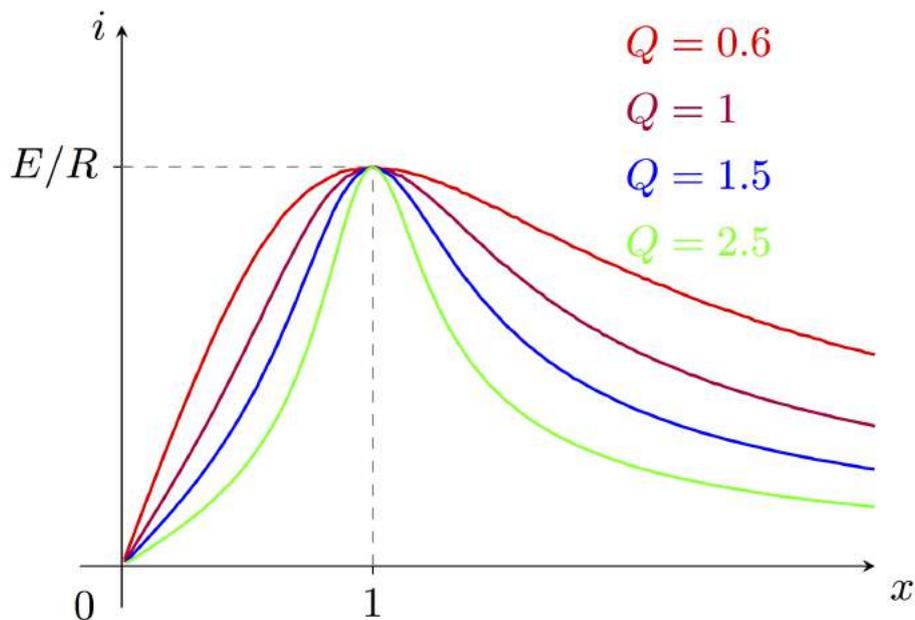
On a l'habitude d'introduire la pulsation  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  et le facteur de qualité  $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ . L'expression devient alors :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R(1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}))} \quad (15)$$

L'amplitude est le module de l'intensité complexe soit en posant  $x = \omega/\omega_0$  :

$$I = |\underline{i}| = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{E/R}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}} \quad (16)$$

$\Rightarrow$  Il y a toujours résonance en intensité quelque soit la valeur du facteur de qualité, cette résonance a toujours lieu pour  $\omega = \omega_0$  et le maximum atteint a toujours la valeur de  $E/R$ .



## Résonance aux bornes de la capacité

La tension aux bornes de la capacité vaut :

$$\underline{u}_C = \frac{i}{jC\omega} = \frac{\underline{e}}{jC\omega(R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}))} = \frac{\underline{e}}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} \quad (17)$$

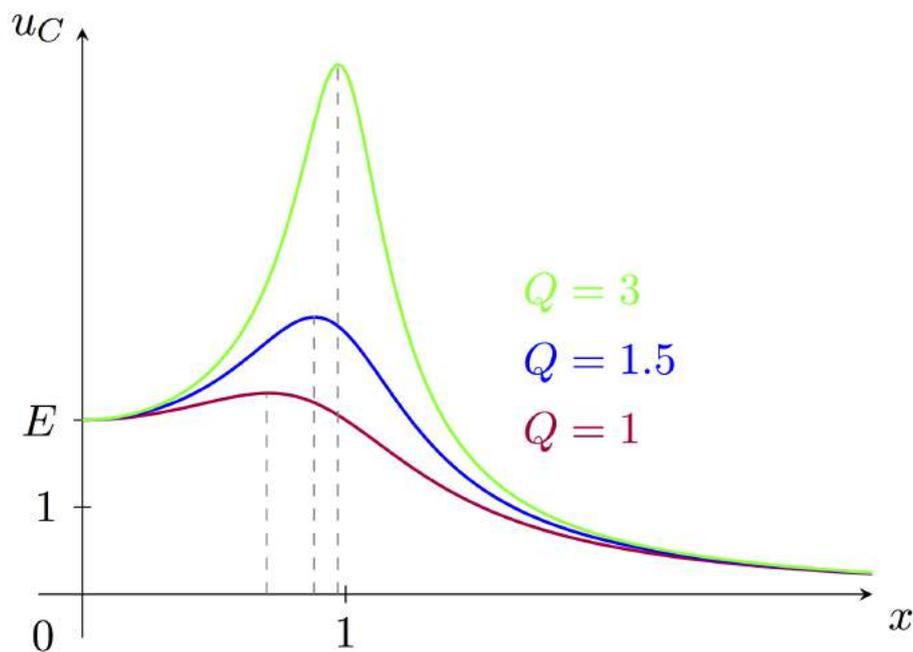
Soit en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$  :

$$\underline{u}_C = \frac{\underline{e}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} \quad (18)$$

L'amplitude est donc :

$$|\underline{u}_C| = \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \quad (19)$$

On remarque que la résonance aux bornes du condensateur n'existe pas toujours contrairement à la résonance en intensité. D'autre part, la fréquence de résonance aux bornes du condensateur n'est pas la même que celle obtenue pour la résonance en intensité.



De plus on observe que :

- La résonance est d'autant plus aigüe (pic étroit) que le facteur de qualité est grand ;
- Plus ce facteur est grand, plus la pulsation de résonance tend vers la pulsation propre du circuit ;
- La surtension est d'autant plus grande que le facteur de qualité est grand.



$$y(x, t) = 2a \sin(kx) \cos(\omega t)$$

On sait aussi que  $y(L, t) = 0$ , alors :

$$\begin{aligned} 2a \sin(kL) &= 0 \\ \Leftrightarrow kL &= p\pi = \frac{2\pi L}{\lambda} \\ \Leftrightarrow L &= \frac{p\lambda}{2} \end{aligned} \quad (22)$$

C'est la condition pour avoir des ondes stationnaires ou autrement dit être en résonance. Considérons maintenant avec un vibreur en  $x = L$ . Alors les conditions aux limites sont :

$$y(L, t) = A \cos(\omega t) \text{ et } y(0, t) = 0$$

Alors  $y(L, t) = A \cos(\omega t) = 2a \sin(kL) \cos(\omega t)$ . Et on en déduit :

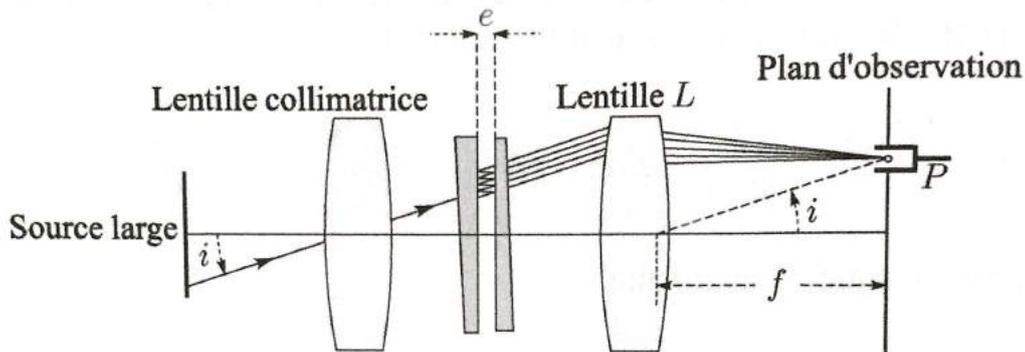
$$y(x, t) = \frac{A}{\sin(kL)} \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (23)$$

Si  $\sin(kL) = 0$  alors  $kL = p\pi$  de même que toute à l'heure.

$$L = \frac{p\lambda}{2} \quad (24)$$

On est sur les modes propres et on a des fuseaux bien distinct (ondes stationnaires).

## b) La cavité de Fabry-Pérot



L'interféromètre de Fabry-Pérot, construit par les physiciens français Fabry et Pérot est très largement utilisé comme spectromètre à haute résolution, ainsi que comme cavité optique dans les lasers.

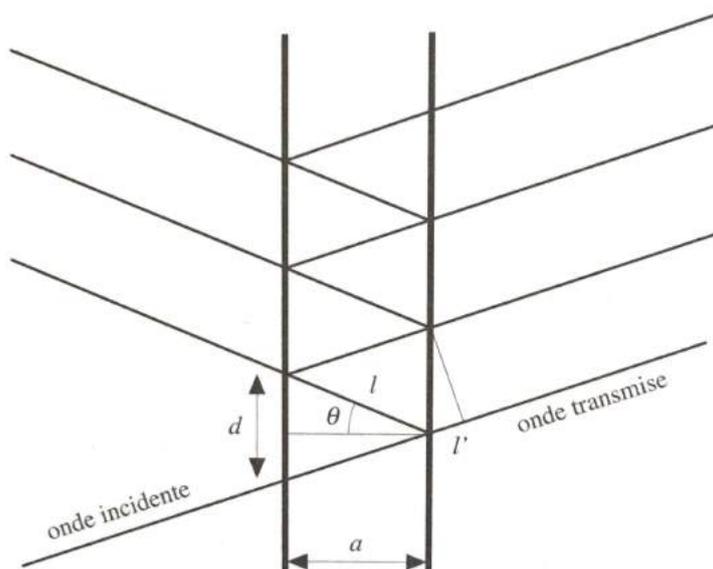
Cet appareil est constitué de deux miroirs semi-réfléchissants plans et parallèles à hauts coefficients de réflexion. La lumière entrante effectue de multiples aller-retour à l'intérieur de cette cavité optique et ressort partiellement à chaque réflexion. Les rayons sortants interfèrent entre eux et produisent des anneaux d'interférence localisés à l'infini.

L'interféromètre est constitué d'une paire de lames semi-réfléchissantes. Les lames sont en généralement en coin, pour éviter des franges d'interférence due aux faces arrières ; les dites faces arrières ont en général un traitement antireflet. Le système peut comporter en sortie une lentille de focalisation.

Le système est éclairé par un faisceau collimaté.

Pour simplifier l'étude, on suppose que l'interféromètre est éclairé par une source de lumière monochromatique. On peut représenter, comme sur la figure, un rayon en particulier, et calculer sa contribution à la lumière sortante.

※ **Warning** : Du fait de la multitude de réflexion il règne dans la cavité un champ électrique très important !



Chaque faisceau sortant de la cavité présente un déphasage  $\phi$  les uns par rapport aux autres, dépendant de l'angle  $\theta$ , l'angle entre la normale sortante à la lame et le faisceau pénétrant dans la lame.

Ces rayons interfèrent entre eux et on peut alors montrer que, selon la valeur de  $\theta$ , le rayon est transmis ou pas.

On s'aperçoit en fait que seules quelques valeurs de  $\theta$  permettent de transmettre la lumière du rayon incident. Chacune de ces valeurs peut être directement visualisée : elles correspondent à une série d'anneaux concentriques observés sur la figure d'interférence. En effet, en place une lentille convergente à la sortie de l'interféromètre, tous les rayons faisant le même angle  $\theta$  par rapport à l'axe central de la lentille formeront un anneau.

Le déphasage entre deux rayons successifs est donné par :  $\phi = \phi(\theta) = 2kna \cos(\theta)$  où  $n$  est l'indice de réfraction de la couche,  $a$  son épaisseur,  $\theta$  l'angle de réfraction et  $k = 2\pi/\lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde. La phase du  $m$ -ième rayon est alors :  $\phi_m = \phi_{m-1} + \phi = \phi_0 + m\phi$ .

En utilisant le théorème de Malus (Démonstration à la fin) on arrive à calculer la différence de marche entre deux ondes successives. :

$$\delta = 2na \cos(\theta) \quad (25)$$

Or comme  $\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$  on a :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2na \cos(\theta) \quad (26)$$

Soit  $\underline{\psi}_0$  l'amplitude complexe d'une onde plane incidente. Alors les amplitudes complexes des ondes transmises successivement ont pour expressions respectives :

$$\underline{\psi}_1 = \underline{\psi}_0 T \quad \underline{\psi}_2 = \underline{\psi}_0 T R \exp(i\phi) \quad \underline{\psi}_3 = \underline{\psi}_0 T R^2 \exp(i2\phi) \quad \underline{\psi}_4 = \underline{\psi}_0 T R^3 \exp(i3\phi) \dots$$

L'amplitude complexe de l'onde transmise au point  $P$  du plan focal de  $L$  est la somme des amplitudes complexes des ondes transmises :

$$\underline{\psi}_t(P) = \sum_i \underline{\psi}_i = \underline{\psi}_0 T [1 + R \exp(i\phi) + R^2 \exp(i2\phi) + R^3 \exp(i3\phi) + \dots R^m \exp(im\phi) + \dots]$$

Comme la raison de cette progression géométrique est  $R \exp(i\phi)$  et que  $R < 1$ , on trouve, après sommation :

$$\underline{\psi}_t(P) = \underline{\psi}_0 T \frac{1}{1 - R \exp(i\phi)} \quad (27)$$

L'intensité de l'onde résulte directement de ce qui précède :

$$I_t(P) = |\underline{\psi}_t(P)|^2 = |\underline{\psi}_0|^2 T^2 \frac{1}{|1 - R \exp(i\phi)|^2} \quad (28)$$

En introduisant l'intensité de l'onde incidente  $I_0 = |\underline{\psi}_0|^2$  et en développant, cette expression devient :

$$I_t(P) = I_0 \frac{T^2}{(1 - R \cos(\phi))^2 + R^2 \sin^2(\phi)} = I_0 \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos(\phi)} \quad (29)$$

Soit encore :

$$I_t(P) = I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + M \sin^2(\phi/2)} \quad (30)$$

avec  $M = 4R/(1 - R)^2$ .

La fonction est max si  $\phi = 2\pi p$  et vaut  $I_{max} = I_0 (T/(1 - R))^2$ .

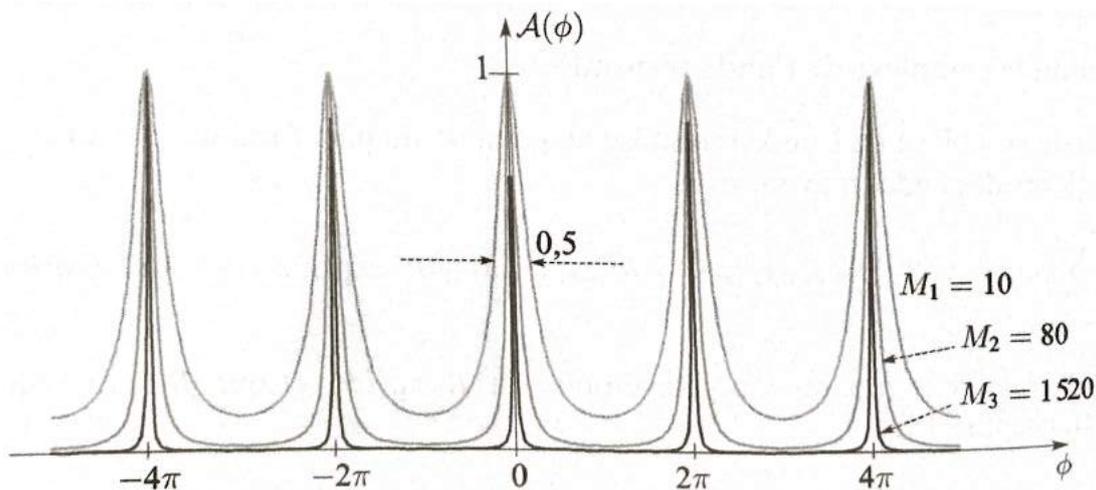
Soit :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2a = \frac{4\pi\nu a}{c} \quad (31)$$

On en déduit les mode propres pour  $\nu = pc/2a$  et l'intervalle spectrale  $\Delta\nu = c/2a$  (distance en fréquence séparant deux pics de la fonction d'Airy) . Seul ces fréquences émergent de la cavité, les autres sont atténuées.

Fonction d'Airy :

$$A(\phi) = \frac{I_t(P)}{I_{max}} = \frac{1}{1 + M \sin^2(\phi/2)} \quad (32)$$



## Conclusion

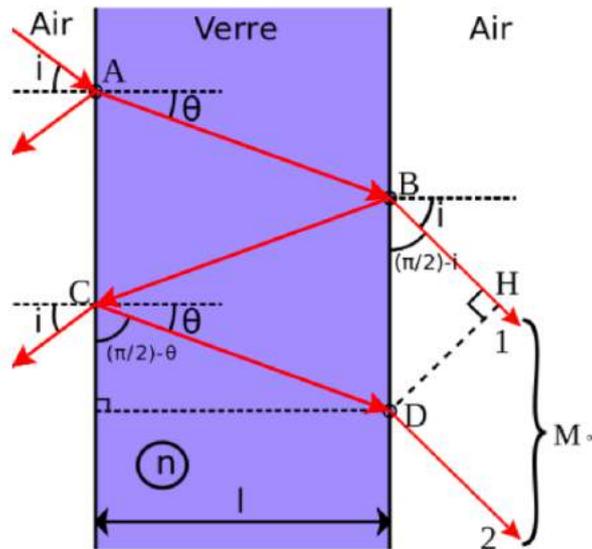
On a pu voir dans cette leçon ce qu'était le phénomène de résonance et la diversité des domaines dans lequel on peut le retrouver. La résonance est une réponse maximale d'un système à une excitation : à la résonance il absorbe le maximum d'énergie, on a le maximum de transfert énergétique.

Le phénomène de résonance est présent dans la quasi-totalité des domaines de la physique.

\* Il est également présent dans des phénomènes microscopique, comme durant l'absorption ou l'émission de photon : la fréquence est tel que l'énergie  $h\nu$  est égale à l'énergie de transition entre deux niveaux d'énergie, ou bien en RMN dans le domaine de la chimie.

Il permet notamment, dans le modèle de l'électron élastiquement lié, d'expliquer les pics d'absorptions atomiques. On peut l'observer tous les jours en regardant se balancer des branches d'arbres. C'est parfois un phénomène que l'on cherche à favoriser (ex : RMN, laser...) mais qui peut aussi être néfaste dans d'autres cas (ex : du pont Tacoma qui est enté en résonance avec le sillage qu'il a crée dans un vent fort auto-destruction du pont.).

## Démo différence de marche



$\delta = (AM)_2 - (AM)_1 = (BM)_2 - (BM)_1 = (BC) + (CD) - (BH)$ , d'après le théorème de Malus.

Or :

$$\cos(\pi/2 - i) = BH/BD = \sin(i) \text{ donc } BH = BD \sin(i)$$

$$\sin(\pi/2 - \theta) = l/BC = \cos(\theta) \text{ donc } BC = CD = l/\cos(\theta)$$

Donc :

$$\delta = (BC) + (CD) - (BH) = \frac{nl}{\cos(r)} + \frac{nl}{\cos(r)} - BD \sin(i)$$

Or :

$$\tan(\pi/2 - \theta) = \frac{l}{BD/2} = \frac{2l}{BD}$$

Donc :

$$BD = \frac{2l}{\tan(\pi/2 - \theta)} = \frac{2l \cos(\pi/2 - \theta)}{\sin(\pi/2 - \theta)} = \frac{2l \sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Ainsi :

$$\delta = \frac{2nl}{\cos(\theta)} - \frac{2l \sin(\theta)}{\cos(\theta)} \sin(i)$$

Or d'après la lois de Descartes sur la réfraction :

$$\sin(i) = n \sin(\theta)$$

Donc :

$$\delta = \frac{2nl - 2nl \sin^2(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{2nl(1 - \sin^2(\theta))}{\cos(\theta)} = \frac{2nl \cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}$$

D'où :

$$\delta = 2nl \cos(\theta)$$

# L.P. 49 - Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarité

Niveau : L3

## Pré-requis

- Oscillateur harmonique
- Mécanique du point
- Électronique

## Bibliographie

- Mécanique, José-Philippe Perez, *Dunod*
- BUP n.804 (1998)
- BUP n.744 (1992)
- H-prépa Mécanique I, Brébec, *Hachette*
- Expériences de phys. (Méca.), Bellier, *Dunod*
- Expériences de phys. (Elec.), Bellier, *Dunod*
- La physique par la pratique, Portelli, *HK*

## Introduction

Quoi de plus banal que le battement d'un cœur, la course des aiguilles d'une montre, la vibration d'une corde de violon ou encore les incessants allers-retours du balancier d'une horloge. Pourtant tous ces phénomènes ont un point commun des plus fondamentaux pour la physique : ce sont des oscillateurs.

Pour les étudier, des premiers modèles simples ont été développés qui rendent compte des petits mouvements d'un pendule ou d'un ressort. On entre ici dans le domaine de la physique des systèmes linéaires dont l'oscillateur harmonique constitue le modèle universel. Toutefois, les oscillateurs linéaires ne permettent pas d'expliquer la régulation du rythme cardiaque, l'entretien des oscillations d'une balançoire ou la convection de Rayleigh-Bénard. Il devient alors nécessaire de développer une physique non-linéaire dont le paradigme des oscillateurs est certainement l'oscillateur de Van der Pol.

Pour analyser les oscillateurs les physiciens utilisent le concept de portrait de phase. Dans cette leçon on va se restreindre à la description de systèmes à un seul degré de liberté. Pour un système dont l'évolution au cours du temps  $t$  décrit par la fonction à valeurs réelles  $x(t)$ , on appelle trajectoire de phase une représentation géométrique cartésienne dans laquelle on reporte les positions au cours du temps  $t$  d'un point représentatif  $M$  d'abscisse  $x$  et d'ordonnée  $\dot{x} = dx/dt$ .

Une trajectoire de phase donnée est décrite à partir d'un point  $M_0(x_0, y_0)$  représentatif des conditions initiales de l'évolution considérée. L'ensemble des trajectoires de phase

décrites par le système à partir de toutes les conditions initiales réalisables est le portrait de phase de celui-ci.

## 1. Oscillateurs non amortis

### a) L'oscillateur harmonique

Un pendule élastique (masse  $m$  à l'extrémité d'un ressort de raideur  $k$ ) a pour équation d'évolution :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (1)$$

d'où, avec  $\omega^2 = k/m$ , l'équation différentielle du second ordre qui régit tout oscillateur harmonique (non amorti) :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (2)$$

dont la solution générale peut s'écrire :

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \text{ et } \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

ce qui établit que les trajectoires de phase d'un oscillateur harmonique sont des ellipses centrées sur l'origine. Avec un choix convenable des unités adoptées sur les axes des coordonnées (en représentant  $\dot{x}/\omega$  en fonction de  $x$ , ce qui a du reste l'avantage de faire figurer en abscisse et en ordonnée des grandeurs de même dimension), ces trajectoires sont des cercles dont les rayons représentent l'amplitude  $A$  des oscillations :

- le portrait de phase d'un oscillateur harmonique est un ensemble de cercles concentriques centrés sur l'origine des coordonnées.

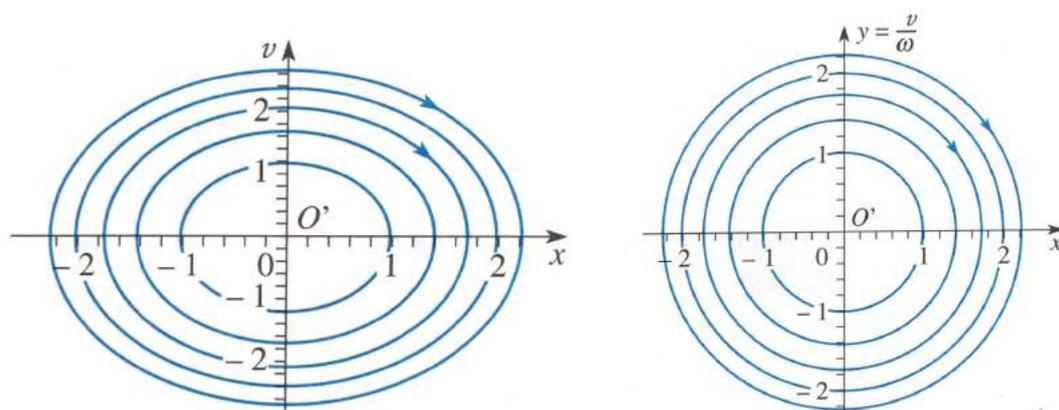
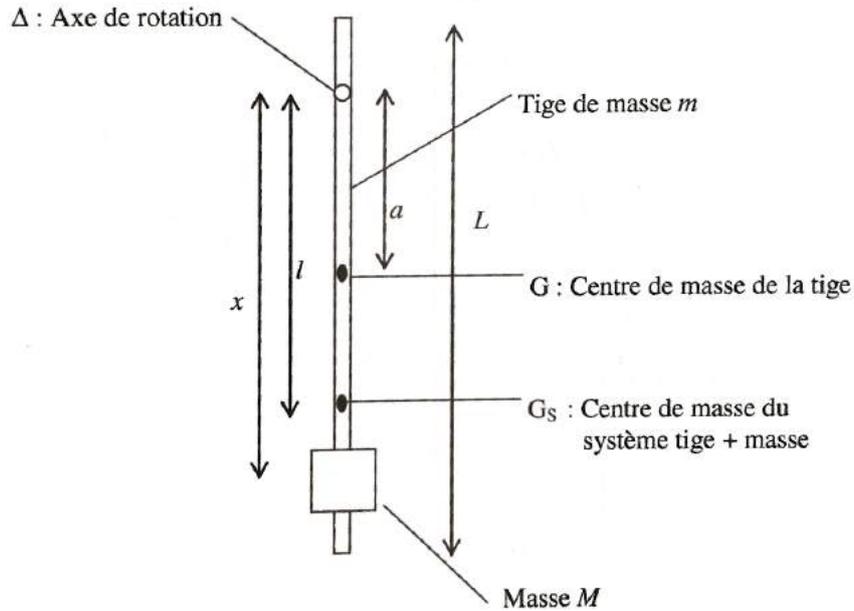


FIGURE 42 - (A gauche) Les trajectoires de phase d'un oscillateur harmonique non amorti sont des ellipses. (A droite) Dans le plan de phase  $(x, y = \dot{x}/\omega)$  les trajectoires de phase d'un oscillateur harmonique sont des cercles

Ce résultat très simple met en évidence un premier intérêt du portrait de phase : la représentation de celui-ci permet de tester avec précision le caractère sinusoïdal de l'évolution d'un oscillateur.

### b) Le pendule pesant

MANIP Pendule Pesant Bellier Mécanique p.351



Soit un pendule de masse  $M$ , supposée ponctuelle, placée sur une tige de longueur totale  $L$  et de masse  $m$ . Ce pendule oscille autour de l'axe de rotation  $\Delta$ . On nomme :

- $x$  : position du centre de masse de la masse  $M$  par rapport à l'axe de rotation ;
- $a$  : distance entre le centre de masse de la tige et l'axe de rotation ;
- $L$  : longueur totale de la tige ;
- $l$  : distance entre le centre de masse du système (tige + masse) et l'axe de rotation.

Déterminons le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation  $\Delta$ . Il se décompose en deux parties. Une notée  $J_{\Delta/M}$  pour la masse  $M$  que l'on supposera ponctuelle et une notée  $J_{\Delta/m}$  pour la tige de masse  $m$  :

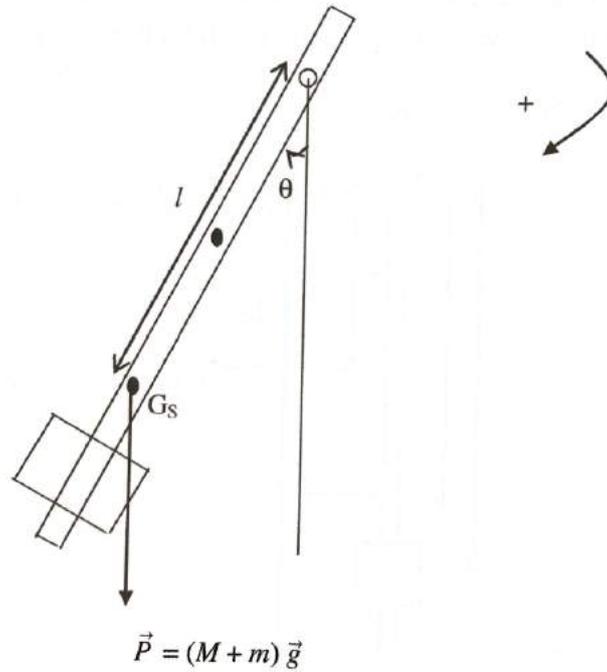
$$J_{\Delta/M} = Mx^2 \text{ et } J_{\Delta/m} = \frac{1}{12}mL^2 + ma^2$$

Donc  $J_{\Delta} = Mx^2 + \frac{1}{12}mL^2 + ma^2$ .

Déterminons maintenant le centre de masse  $G_S$  du système (tige+masse). Par définition on a :

$$\overline{\Delta G_S} = \frac{ma + Mx}{M + m} = l \quad (3)$$

Le système est écarté de sa position d'équilibre et on note  $\theta(t)$  l'angle de la tige avec la verticale.



Si on néglige toutes les autres forces, seul le poids a un moment non nul par rapport à  $\Delta$ . Le théorème du moment cinétique s'écrit donc :

$$J_{\Delta} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -(M+m)gl \sin(\theta) \quad (4)$$

Ainsi en posant  $\omega^2 = (M+m)gl/J_{\Delta}$  on a l'équation :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) = 0 \quad (5)$$

La période propre de cet oscillateur est indépendante de l'amplitude, il y a isochronisme des petites oscillations :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{(m+M)gl}} \quad (6)$$

Ce résultat approximatif peut être amélioré en allant au second ordre au niveau du développement limité. Partons pour cela de la conservation de l'énergie mécanique du pendule pesant. Supposons, qu'à l'instant initial, on lâche le pendule d'un angle  $\theta_0$  sans vitesse initiale, son énergie mécanique à cet instant se réduit à l'énergie potentielle  $E_p = (M+m)gl(1 - \cos(\theta_0)) = E_m$ , en prenant comme référence l'énergie potentielle nulle en  $\theta = 0$ . A un instant quelconque, la vitesse du pendule est non nulle et son énergie mécanique est de la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + (m+M)gl(1 - \cos(\theta)) \quad (7)$$

En égalisant les relations, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + (M+m)gl(1 - \cos(\theta)) &= (M+m)gl(1 - \cos(\theta_0)) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 &= (M+m)gl(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) \\ \Leftrightarrow \dot{\theta}^2 &= 2\omega^2(\cos(\theta_0) - \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (8)$$

Sachant que  $\cos(\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta/2)$ , alors :

$$\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 = 2(M + m)gl(\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)) \quad (9)$$

Donc,

$$dt = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{(M + m)gl}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} \quad (10)$$

En intégrant sur un quart de période et connaissant la relation donné par  $T_0$ , il vient :

$$T = \frac{T_0}{2\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} \quad (11)$$

Posons le changement de variable suivant  $\sin(\theta/2) = \sin(\theta_0/2) \cdot \sin(u)$ . Si  $\theta = 0$  alors  $u = 0$  et si  $\theta = \theta_0$  alors  $u = \pi/2$ . De plus  $d\theta = 2 \frac{\sin(\theta_0/2)}{\cos(\theta/2)} \cos(u) \cdot du$  donc l'intégrale avec la nouvelle variable  $u$  devient :

$$T = 2 \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2(u)}} \quad (12)$$

Si  $\theta_0$  est très faible alors, au premier ordre, l'intégrale devient :

$$T = 2 \frac{T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} du = T_0 \quad (13)$$

Si on va au second ordre en  $\theta_0$  alors

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2(u)}} \approx 1 + \frac{1}{2} \sin^2(\theta_0/2) \sin^2(u) \quad (14)$$

et l'intégral devient  $T = T_0 + \frac{T_0}{\pi} \sin^2(\theta_0/2) \int_0^{\pi/2} \sin^2(u) du$ . Or  $\sin^2(u) = (1/2)(1 - \cos(2u))$  donc  $T = T_0 + \frac{T_0}{2\pi} \sin^2(\theta_0/2) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2u)) du = T_0 + \frac{T_0}{4} \sin^2(\theta_0/2)$ . En assimilant de nouveau le sinus à l'angle il vient la formule de Bordas, qui montre que la non-linéarité modifie la période selon :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\theta_0^2}{16} \quad (15)$$

**Voir Méthode plus rapide dans le Perez p.170**

**Rq :** Cette formule est importante ; elle montre la correction qu'il faut apporter à la période propre du pendule pour tenir compte de l'angle initial. En fait, cet angle doit toujours rester petit car dans la dernière étape du calcul, on a assimilé le sinus à l'angle. Si on souhaite une erreur relative inférieure à  $10^{-3}$  il faut que  $(T - T_0)/T_0 = \theta_0^2/16 \leq 10^{-3}$  donc  $\theta_0 \leq 7.4^\circ$ . Donc pour pouvoir approximer la période du pende à la période propre avec une précision de 0.1% il faut que l'angle de départ soit inférieur à  $7.4^\circ$ .

Cette non-linéarité peut être observée en traçant le portrait de phase comme un réseau de courbes en utilisant la relation finale de l'équation (8) :

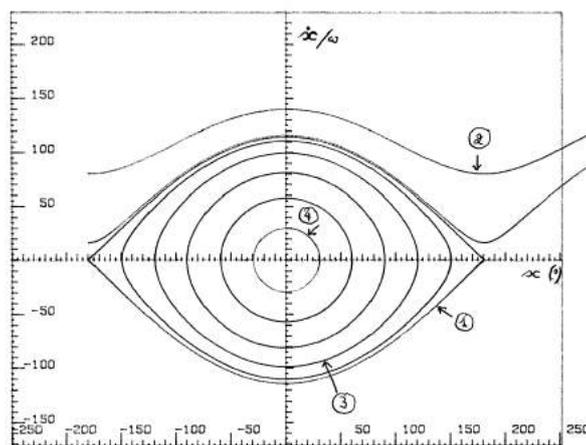


FIGURE 43 – Portrait de phase d'un pendule pesant non amorti.

On voit apparaître le rôle critique de la trajectoire de phase (1) qui correspond à la valeur  $\theta_0 = \theta$ . Cette trajectoire est appelée séparatrice car elle délimite deux domaines du portrait de phase :

- pour  $\cos(\theta) > \cos(\theta_0)$ ,  $\dot{x}$  ne s'annule jamais et  $x$  peut prendre des valeurs quelconques. Une trajectoire telle que (2) de ce type caractérise un mouvement révolutif;
- pour  $\cos(\theta) < \cos(\theta_0)$ ,  $x$  évolue entre  $-\theta$  et  $\theta$ , valeurs pour lesquelles  $\dot{x}$  s'annule. Une trajectoire, telle que (3) ou (4), de ce type caractérise un mouvement oscillatoire d'amplitude  $\theta$ .

Ce portrait illustre tout d'abord très simplement un fait bien connu : les trajectoires quasi-circulaires telles que (4) correspondent à des oscillations de faible amplitude ; le caractère non sinusoïdal des oscillations de forte amplitude apparaît tout de suite en examinant une trajectoire telle que (3).

Nous venons de mettre en évidence une propriété qui suffirait à elle seule à justifier l'intérêt pratique du portrait de phase : en vérifiant sur un graphe le caractère cyclique d'une trajectoire de phase, on dispose d'un test du caractère périodique de l'évolution beaucoup plus précis que l'observation de l'allure de la représentation  $x(t)$ .

## 2. Oscillateurs amortis

Dans la nature, il n'existe aucun système physique dont l'évolution puisse être modélisée par l'équation (2). Les oscillations finissent toujours par s'amortir. C'est pourquoi il est nécessaire de la modifier au profit d'une autre qui rende compte de ces amortissements.

### a) Oscillateur harmonique amorti (par frottement fluide)

Ajoutant un terme de frottement fluide dans l'équation (1) du mouvement du pendule élastique, il vient :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} \quad (16)$$

d'où en posant  $\omega^2 = k/m$  et en introduisant le facteur de qualité  $Q = m\omega/h$ , l'équation normalisée de tout oscillateur harmonique amorti :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\omega}{Q}\dot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2 x &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

avec  $\xi = 1/(2Q)$ .

Cette dernière équation est encore invariante par dilatation mais n'est plus invariante par renversement du temps. Elle décrit donc un phénomène irréversible. Cette irréversibilité due à la présence du terme en  $\dot{x}$  est étroitement liée à une dissipation d'énergie. En effet, nous pouvons déduire l'expression :

$$\frac{de}{dt} = -2\xi\omega\dot{x} \quad (18)$$

avec,

$$e = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2} \right) \quad (19)$$

Ce résultat nous précise que le sens de variation de l'énergie dépend directement du signe du coefficient  $\xi$  :

- si  $\xi > 0$ , l'énergie décroît inéluctablement vers 0 ;
- si  $\xi < 0$ , l'énergie croît.

Dans ce dernier cas, la croissance de l'énergie ne pouvant s'opérer indéfiniment, le système ainsi décrit n'est pas physique. En revanche, le premier cas est celui que l'on retrouve dans l'étude traditionnelle de l'oscillateur amorti. Notons que pour  $\xi = 0$ , nous retrouvons notre oscillateur harmonique, système conservatif.

La conséquence de cette discussion est qu'irréversibilité des phénomènes physiques et dissipation de l'énergie sont des notions étroitement liées. Ce résultat est général et fondamental en physique.

Les solutions de l'équation (17) dépendent du signe de  $\xi$  (oscillateur amorti ou amplifié) et du signé de  $\xi^2 - 1$ .

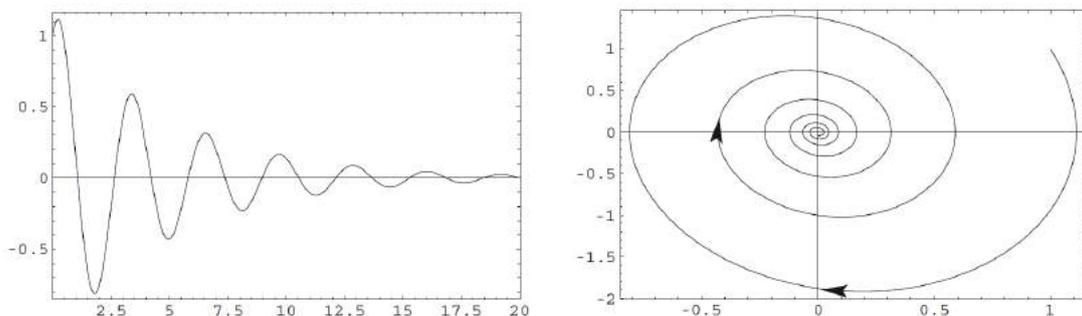
Si l'on se place dans une situation de faible amortissement ( $\xi^2 - 1 < 0$ ), les solutions obtenues sont de la forme :

$$x(t) = X_0 \exp(-\xi\omega t) \sin(\Omega t + \phi) \quad (20)$$

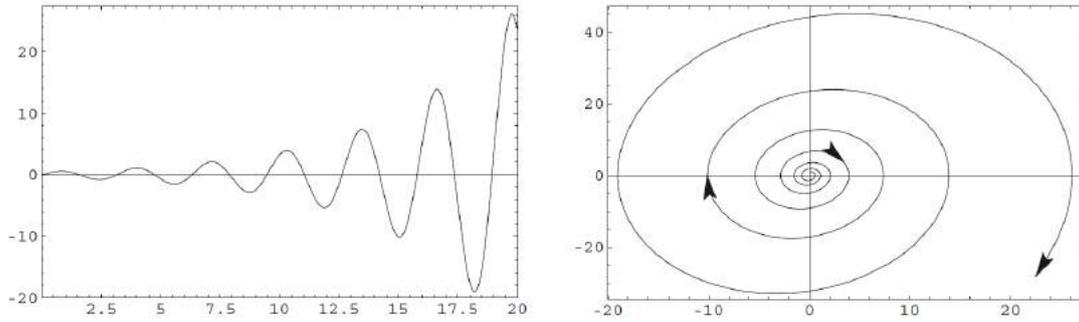
avec  $\Omega = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$ .

Nous pouvons facilement calculer  $\dot{x}(t)$  puis tracer le portrait de phase de l'oscillateur :

- si  $\xi > 0$ , il y a amortissement



- si  $\xi < 0$ , il y a amplification



Les courbes de l'espace de phase ne sont plus des courbes fermées mais des spirales. Ceci nous permet immédiatement de conclure que les oscillations ne sont plus périodiques (ici elles sont pseudo-périodique). D'autre part, l'irréversibilité est clairement présente puisque parcourir une spirale dans un sens n'est pas identique à la parcourir dans l'autre sens.

Ajoutons que l'origine de l'espace de phase est un point d'équilibre. Toutefois, s'il est stable pour  $\xi > 0$ , il est instable pour  $\xi < 0$ . Dans le premier cas, le point d'équilibre porte le nom d'attracteur.

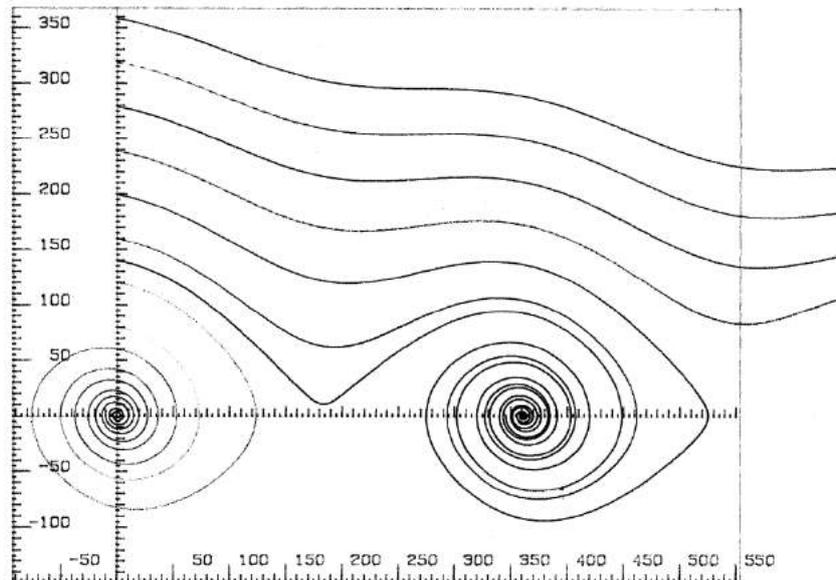
**Rq :** Le facteur de qualité  $Q$  donne l'ordre de grandeur du nombre d'oscillations pratiquement observables avant la relaxation vers l'état d'équilibre.

## b) Le pendule pesant

L'équation d'évolution se déduit immédiatement :

$$\ddot{x} + \frac{\omega}{Q}\dot{x} + \omega^2 \sin(x) = 0 \quad (21)$$

On peut alors représenter le portrait de phase :



On constate l'existence d'une infinité d'attracteurs ponctuels de positions  $(2n\pi, 0)$ . Ces attracteurs correspondent à la position d'équilibre stable du pendule :  $x = 0$  à  $2n\pi$  près. A partir de tout point  $M_0$  situé dans le bassin d'attraction d'un attracteur de rang

$n$ , la trajectoire de phase spirale vers le point  $(2n\pi, 0)$ . Qualitativement, ceci correspond à la possibilité d'observer un mouvement oscillatoire amorti précédé d'une phase révolutive pendant  $n$  tours.

**Rq :** les trajectoires de phase ne se recoupent pas. Cette propriété est une conséquence du déterminisme mécanique : deux trajectoires issues d'un point d'intersection  $M_0$  correspondraient à deux évolutions différentes possibles à partir d'un même jeu  $(x_0, \dot{x}_0)$  de conditions initiales, ce qui est exclu.

### 3. Oscillateurs forcés

#### facultatif

Considérons un oscillateur linéaire soumis à une force excitatrice sinusoïdale  $f(t) = F \cos(\omega t)$ . Son équation s'obtient en ajoutant ainsi ce terme source :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F \cos(\omega t) \quad (22)$$

Posons  $\omega^2 = k/m$  et  $2\xi = h/m$ . Avec ces notations, l'équation d'évolution du système s'écrivent :

$$\dot{x} = v, \text{ et } \dot{v} = -\omega^2 x - 2\xi v + \frac{F}{m} \cos(\omega t)$$

L'examen du portrait de phase de cet oscillateur (figure de gauche) conduit aux remarques suivantes :

- En présence d'une excitation extérieure, les trajectoires de phase peuvent se couper. Cette situation n'est nullement en contradiction avec le principe du déterminisme mécanique. En effet, au point d'intersection les deux points de phase ne correspondent pas à la même date et les excitations appliquées au système ne sont pas les mêmes. Bien que le système se retrouve au point d'intersection avec le même état dynamique, il peut, sous des excitations extérieures distinctes, avoir des évolutions ultérieures différentes.
- Les trajectoires de phase tendent vers un cycle limite dont les caractéristiques sont indépendantes des conditions initiales.

Ce cycle limite correspond au régime forcé de l'oscillateur et sa géométrie n'est déterminée que par les propriétés du système et celles de l'excitation. C'est un nouveau type d'attracteur.

Le portrait de phase de la figure du milieu, est le portrait de phase d'un oscillateur linéaire d'équation :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F \cos^2(\omega t) \quad (23)$$

Soumis à une force excitatrice différente, on vérifie que le cycle limite n'a pas la même géométrie.

Le portrait de phase de la figure de droite est celui d'un oscillateur non linéaire excité sinusoïdalement :

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0)^3 - h\dot{x} + F \cos(\omega t) \quad (24)$$

Le cycle limite est différent de celui de l'excitateur linéaire sous la même excitation.

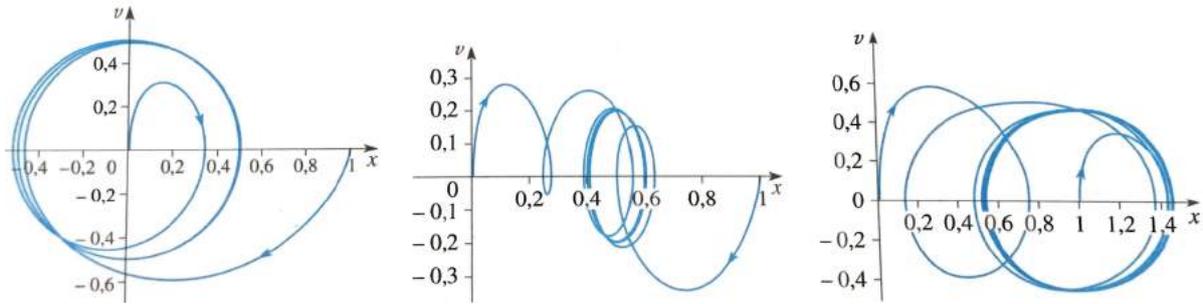


FIGURE 44 – Portrait de phase d'un oscillateur : linéaire excité sinusoidalement (gauche), linéaire excité non sinusoidalement (milieu) et non linéaire excité sinusoidalement (droite).

## 4. Oscillateurs auto-entretenus

Un système qui, tel une horloge, évolue indéfiniment de façon périodique doit recevoir de l'énergie pour compenser les phénomènes dissipatifs inévitables qui accompagnent son fonctionnement. Un tel système est appelé oscillateur entretenu.

### a) Le modèle de Van der Pol

Tentons de proposer un modèle mathématique, le plus simplement possible, décrivant un oscillateur entretenu. Il est tout d'abord évident que ce modèle ne saurait être linéaire : la trajectoire de la phase souhaitée doit être un cycle  $C$  bien défini ; si le système était décrit par une équation différentielle linéaire, tout cycle homothétique  $\lambda C$  serait également solution. Au cours de l'étude de l'oscillateur harmonique amorti, nous avons vu que, dans l'équation différentielle (17), c'est le signe du coefficient de  $\dot{x}$  qui régit le sens des échanges énergétiques de l'oscillateur. Le modèle le plus simple consiste à remplacer ce coefficient constant par une expression parabolique :

$$\xi = -\xi_0 \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 \right]$$

et l'équation dynamique de l'oscillateur est :

$$\ddot{x} - \xi_0 \left[ 1 - \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 \right] \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (25)$$

appelée équation de Van der Pol.

Il est possible de lui donner une autre forme en introduisant des variables adimensionnées :

$$x \rightarrow \frac{x}{x_0} \sqrt{\xi_0} \text{ et } t \rightarrow \omega t$$

D'où la forme :

$$\ddot{x} - (\epsilon - x^2) \dot{x} + x = 0 \quad (26)$$

avec  $\epsilon = \xi_0 > 0$ .

Bien qu'il ne soit pas possible d'intégrer cette équation autrement que par des méthodes numériques, on peut prévoir qualitativement le comportement des solutions : si la valeur initiale  $x_0$  de  $x$  est faible, le coefficient de  $\dot{x}$  est négatif ce qui correspond à une tendance à l'amplification des oscillations ; inversement quand  $x$  prend des valeurs importantes, ce coefficient devient positif ce qui doit tendre à réduire l'amplitude des oscillations.

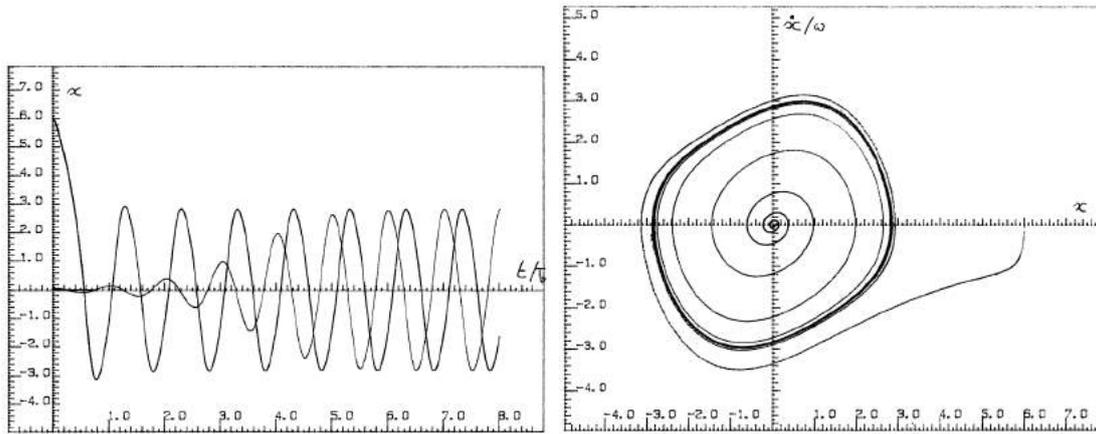


FIGURE 45 – Oscillateur de Van der Pol pour  $\epsilon = 2$ .

L'effet de régularisation des oscillations qui était souhaité est bien obtenu : quelles que soient les conditions initiales, on tend vers un régime permanent d'amplitude bien définie. Un tel diagramme  $x(t)$  ne permet pas toutefois de constater avec précision si ce régime est ou non périodique ( et encore moins s'il est sinusoïdal : il est très difficile de distinguer "à vue" une sinusoïde d'une autre courbe oscillante). Pour conclure, il faut tracer le portrait de phase.

On vérifie cette fois avec une excellent précision l'existence d'un cycle limite (nouveau cas particulier de l'attracteur) ce qui atteste le caractère périodique du régime permanent. Ce cycle n'étant visiblement pas circulaire (sauf pour  $\epsilon \ll 1$ ), on peut affirmer que le régime permanent de l'oscillateur de Van der Pol est non-sinusoïdal (ce caractère accrue lorsqu'on augmente  $\epsilon$ ).

**Rq :** Ce cycle est le même pour toutes trajectoires de phase, il est indépendant des conditions initiales. L'attracteur est entièrement déterminé par la nature de l'oscillateur (c.a.d ici par le choix de  $\epsilon$ ).

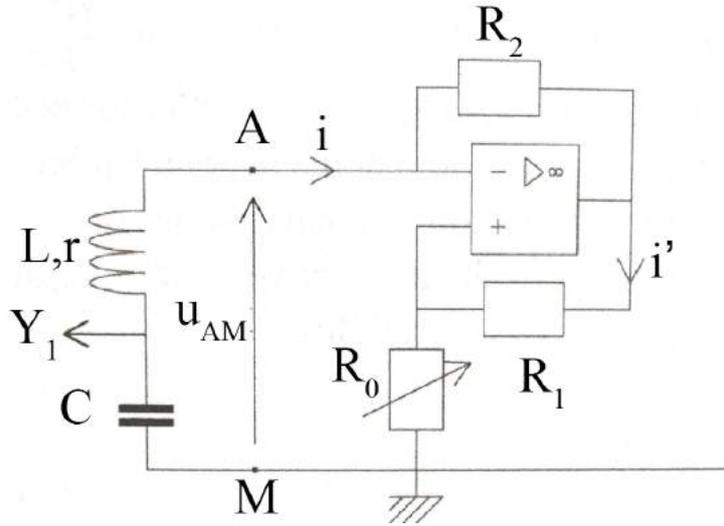
## b) L'oscillateur à résistance négative

**MANIP Oscillateur à résistance négative Bellier Elect p.326 et Portelli p.245**

**Manipuler en même temps que la présentation**

Dans ce type d'oscillateurs, il faut parvenir à compenser les pertes dues aux amortissements. Pour cela on utilise une compensation par une résistance négative.

On prend  $R_1 = R_2 = 1000\Omega$  ;  $L = 16mH$ ,  $r = 20\Omega$  et  $C = 100nF$ .  $R_0$  est une résistance variable initialement nulle.



### Régime linéaire

En régime linéaire, on a  $\epsilon = V^+ - V^- = 0$  d'où  $R_2 i + R_1 i' = 0$ , soit :

$$i' = -i \frac{R_2}{R_1} \text{ et } u_{AM} = -i \frac{R_0 R_1}{R_2}$$

On suppose par la suite que  $R_1 = R_2$ , d'où  $u_{AM} = -R_0 i$ .

La loi des mailles donne :

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + r i + \frac{q}{C} + u_{AM} &= 0 \\ \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + (r - R_0) i + \frac{q}{C} &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Par dérivation on obtient :

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 i}{dt^2} + (r - R_0) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + 2\lambda \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

avec  $2\lambda = (r - R_0)/L$  et  $\omega_0^2 = 1/LC$ .

La résolution de cette équation conduit à une solution du type :

$$i(t) = I_{max} \exp(-\lambda t) \sin(\omega t + \phi)$$

où  $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$ .

On constate que, si l'on ajuste  $R_0$  pour obtenir  $R_0 = r$ , alors le terme d'amortissement  $\lambda$  s'annule et des oscillations sinusoïdales apparaissent dans le circuit avec  $\omega^2 = \omega_0^2 = 1/LC$ . Ces oscillations naissent des petits courants de polarisation de l'amplificateur opérationnel qui ne sont pas tout à fait nuls.

En pratique, la condition  $R_0 = r$  est difficile à réaliser et le montage commence à osciller si  $R_0$  est légèrement supérieure à  $r$  ( $\lambda < 0$ ). Dans ce cas, on a un accroissement exponentiel de l'amplitude du courant avec le temps. Mais, l'amplitude du courant ne peut décroître indéfiniment, car lorsque  $i$  atteint sa valeur limite alors l'A.O. sature en tension et le montage ne joue plus alors son rôle de résistance négative :

$$i_{lim} = \frac{V_{sat}}{(R_0 + R_1)} \quad (29)$$

Pour des amplitudes telles que  $|i| > i_{lim}$ , l'A.O. fonctionne en régime saturé

## Régime saturé

En régime saturé, on a :

$$- u_{AM} = R_1 i + V_{sat} \text{ pour } i < -i_{lim}$$

$$- u_{AM} = R_1 i - V_{sat} \text{ pour } i > i_{lim}$$

Ainsi la loi des mailles donne :

$$L \frac{di}{dt} + (r + R_1)i + \frac{q}{C} = \pm V_{sat} \quad (30)$$

Par dérivation on obtient :

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + (r + R_1) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (31)$$

Le terme du premier ordre est à nouveau un terme d'amortissement et  $i$  décroît, on repasse alors en régime linéaire et  $i$  croît à nouveau, etc... En bref, si  $R_0$  est légèrement supérieur à  $r$ , après un régime transitoire où naissent les oscillations (l'A.O. est alors en régime linéaire, l'A.O. passe ensuite alternativement du régime linéaire au régime saturé et l'amplitude des oscillations se stabilise.

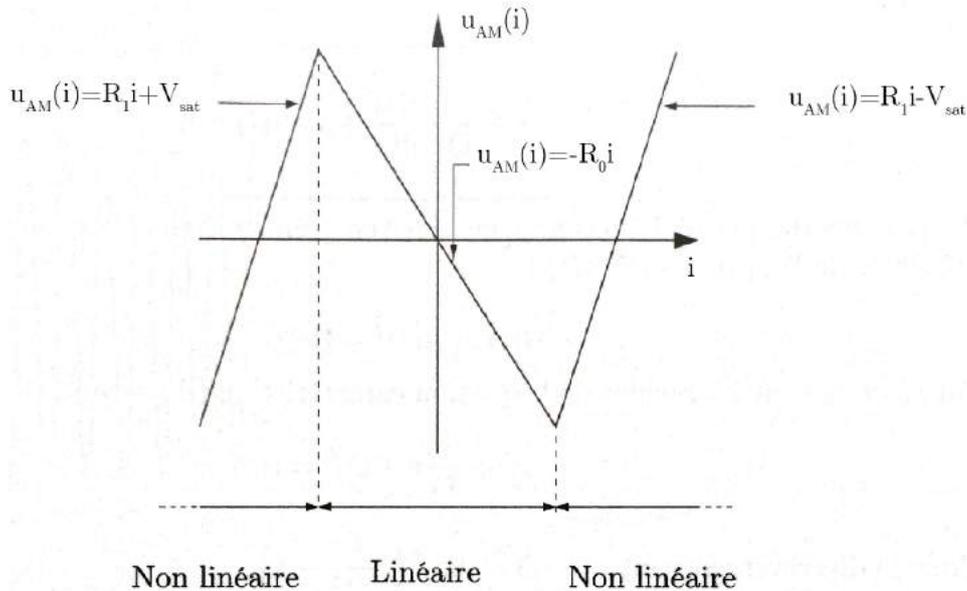


FIGURE 46 – Caractéristique  $u_{AM}$  du dipôle à résistance négative.

La caractéristique  $u_{AM}$  montre qu'il est légitime de modéliser celle-ci par une équation cubique de la forme  $u_{AM}^{test}(i) = -R_0 i + \alpha i^3$  ; le paramètre  $\alpha$  est ajusté de telle façon que les extrema de  $u_{AM}^{test}(i)$  coïncident avec ceux de  $v(i)$ .

$$\frac{du_{AM}}{di} = 0 \implies \alpha = \frac{R_0}{3i^2}$$

Les extrema coïncident lorsque  $i = i_{lim} = V_{sat}/(R_0 + R_2)^2$ , donc

$$\alpha(R_0) = \frac{R_0}{3V_{sat}^2} (R_0 + R_2)^2$$

## Équation différentielle dans le régime non-linéaire

Ainsi pour obtenir l'équation différentielle de  $i(t)$  dans le régime non linéaire, il suffit de remplacer  $u_{AM} = -R_0 i$  par  $u_{AM}(i) = -R_0 i + \alpha i^3$  dans la loi des mailles. Il vient :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} \frac{1}{L} (3\alpha i^2 - (R - R_0)) \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \quad (32)$$

soit encore :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \epsilon \left[ \left( \frac{i}{i_0} \right)^2 - 1 \right] \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad (33)$$

où  $\epsilon = (R_0 - r)/L = -\omega_0/|Q|$  et  $i_0 = \sqrt{(R_0 - r)/3\alpha}$ .

Nous avons ainsi montré que le montage à résistance négative, couplé à un circuit RLC, permet d'obtenir des oscillations dont l'amplitude évolue dans une bonne approximation suivant l'équation différentielle non linéaire de Van der Pol.

**Rq :** Soit le facteur de dilatation  $\lambda$  qui permet de réécrire l'équation de Van der Pol sous la forme canonique. L'éq. différentielle satisfait par la variable  $x(t) = \lambda i(t)$  s'écrit :

$$\ddot{x}(t) + \epsilon \left( \frac{x^2}{i_0^2 \lambda^2} - 1 \right) \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Ainsi pour que  $x(t)$  soit solution de

$$\ddot{x}(t) + (x^2 - \epsilon) \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

il faut que  $\lambda = \frac{\sqrt{\epsilon}}{i_0}$ .

## Étude des diagrammes de phase

Si on réécrit les équations obtenues pour le régime linéaire et saturé avec  $\omega_0^2 = 1/LC$ ,  $(r - R_0)/L = \omega_0/Q$  et  $(r + R_1)/L = 1/\tau$ . Introduisant la variable réduite  $x = i/i_{lim}$ , on obtient les formes normalisées des équations précédentes :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 ; |x| < 1 \quad (34)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 ; |x| > 1 \quad (35)$$

Il est facile de prévoir le comportement du système :  $x = 0$  est une position d'équilibre instable ; partant d'une valeur de  $x_0$  même très faible, il effectue des oscillations amplifiées (34) jusqu'à ce que  $x$  dépasse la valeur 1. Pour  $x > 1$ , le système a un comportement d'oscillateur amorti (35) qui fait redescendre rapidement au-dessous de la valeur de saturation... Le système passant ainsi, tel l'oscillateur de Van der Pol, alternativement par des phases d'amplification et d'amortissement, on conçoit que son comportement soit analogue.

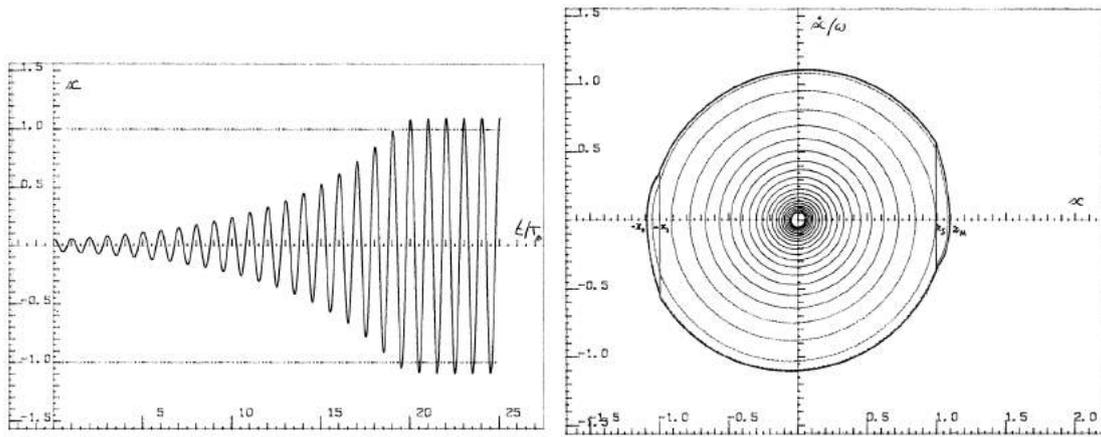


FIGURE 47 – Oscillateur à résistance négative  $Q = -20$  et  $\tau = 0.2$

Cette analyse est confirmée par les figures obtenues par simulation numérique (avec  $Q = -20$ ,  $\tau = 0.2$ ,  $x_0 = 0.05$ ). A la seule vue de la représentation  $x(t)$  de la figure on serait tenté d'affirmer le caractère sinusoïdale des oscillations entretenues (régime permanent). Le portrait de phase correspondant montre que l'on obtient bien des oscillations périodiques (existence d'un cycle limite) mais que celles-ci ne sont pas exactement sinusoïdales (caractère légèrement non circulaire du cycle).

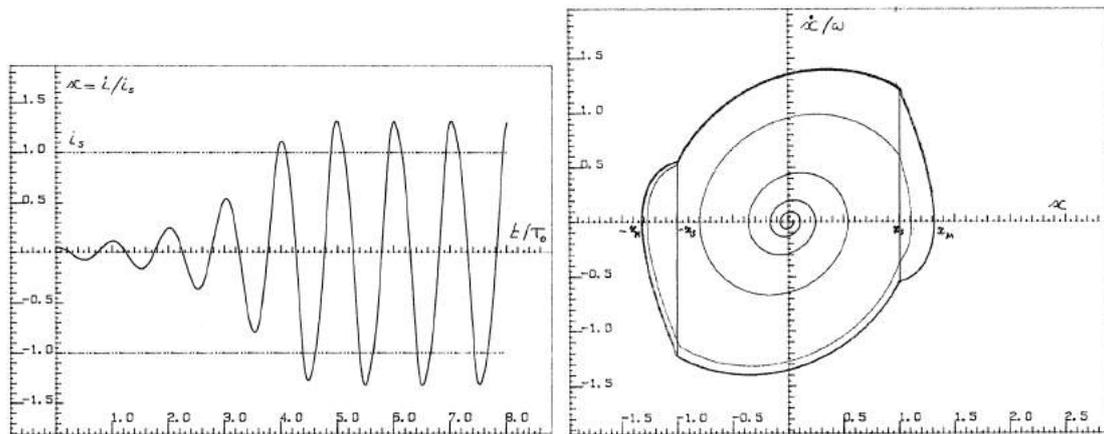


FIGURE 48 – Oscillateur à résistance négative  $Q = -4$  et  $\tau = 0.2$

On vérifie toutefois que, s'il est légitime, dans les conditions expérimentales usuelles ( $Q$  de module grand devant 1), de qualifier les oscillations entretenues de quasi-sinusoïdales, les figures (réalisées avec  $Q = -4$ ) montrent que le caractère non-sinusoïdal peut devenir très net pour des valeurs de  $Q$  de module plus faible.

### Propriétés communes des oscillateurs entretenus

Il est possible de donner aux équations de Van der Pol et (34)-(35) la forme commune :

$$\ddot{x} + A(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (36)$$

- pour l'oscillateur de Van der Pol :  $A(x) = x^2 - \epsilon$ , expression qui change de signe pour  $x = \pm x_S = \pm\sqrt{\epsilon}$
- pour l'oscillateur à résistance négative :  $A(x) = \omega/Q < 0$  pour  $|x| < x_S = 1$  et  $A(x) = 1/\tau > 0$  pour  $|x| \geq 1$ .

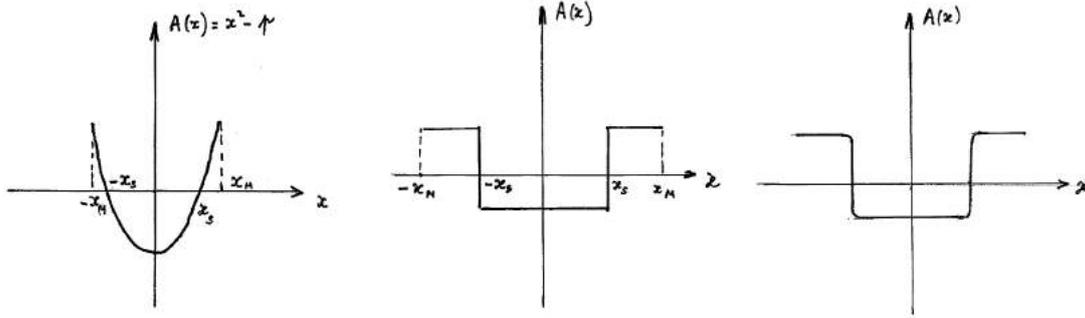


FIGURE 49 - (A gauche) Oscillateur de Van der Pol. (Au centre) Oscillateur à résistance négative. (A droite)  $A(x)$

Les figures donnent l'allure de la fonction  $A(x)$ . En fait, dans le cas de l'oscillateur à résistance négative, nous avons utilisé une caractéristique idéalisée pour l'amplificateur opérationnel ; dans la pratique la fonction  $A(x)$  ne présente pas de discontinuités de pente.

L'analogie des profils est évidente : sur les cycles limites, on distingue des phases alternées d'amplification dominante ( $|x| < x_S$ ) et d'amortissement dominant ( $|x| > x_S$ ). Sur la figure on peut repérer aisément ces phases successives grâce aux discontinuités de pente (bosses) pour  $|x| = x_S$  introduites par les discontinuités du modèle adopté.

En multipliant (36) par  $\dot{x}dt$  et en intégrant sur une période il vient :

$$\int_0^T d\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) + \int_0^T A(x)\dot{x}^2 dt + \int_0^T \left(\frac{\omega_0^2 x^2}{2}\right) = 0 \quad (37)$$

le premier terme et le troisième sont nuls, de sorte que :

$$\int_0^T A(x)\dot{x}^2 dt = 0 \quad (38)$$

relation qui exprime la compensation sur un cycle des phases d'amortissement et des phases d'amplification dominante. La relation va nous servir à estimer la valeur de l'amplitude  $x_M$  des oscillations de Van der Pol. Dans ce cas, pour  $\epsilon$  petit, les oscillations sont quasi-sinusoïdales :

$$x = x_M \cos(\omega_0 t)$$

et, en reportant dans l'équation on obtient :

$$x_M = 2\sqrt{\epsilon} = 2x_S$$

Finalement on constate que sur les cycles limites obtenus pour différentes valeurs de  $\epsilon$  que cette propriété demeure très bien vérifiée, même pour  $\xi$  grand, c'est à dire pour des oscillateurs fortement non-linéaires engendrant des oscillations nettement non-sinusoïdales.

Enfin soulignons à nouveau que les cycles limites, ou attracteurs, sont indépendants des conditions initiales. Ce comportement est propre à tout système dissipatif non chaotique dont on montre qu'il évolue nécessairement vers un état indépendant des conditions initiales. Si on considère, par exemple, un ensemble de conditions initiales représentées sur le diagramme de phase par des points voisins occupant un domaine continu d'air  $dA$ , on établit qu'à des dates  $t$  successives l'aire du domaine occupé par les points représentatifs

correspondants va en décroissant jusqu'à s'annuler lorsqu'on atteint précisément le cycle limite.

**Rq :** Calcul de la période dans le cadre d'un régime fortement non linéaire. Si on analyse l'ordre de grandeur de l'équation de Van der Pol pour l'oscillateur à résistance négative (p.260 Portelli) on peut en première approximation négliger le terme  $\ddot{x}$ . Nous calculons la période des oscillations dans ce cadre :

$$(x^2 - \epsilon)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \implies \dot{x} = f(x) = \frac{\omega_0 x}{\epsilon - x^2}$$

d'où le calcul de la période des oscillations :

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\omega_0^2} \int_{x_M}^{x_S} dx \left( \frac{\epsilon}{x} - x \right)$$

soit :

$$T = \frac{2}{\omega_0^2} \left( \epsilon \ln \left( \frac{x_M}{x_S} \right) - \frac{1}{2} (x_M^2 - x_S^2) \right)$$

Si l'on admet que l'on a  $x_M \approx 2x_S = 2\sqrt{\epsilon}$ , alors :

$$T \approx \frac{\epsilon}{\omega_0^2} (3 - 2 \ln(2)) \quad (39)$$

Cette période augmente avec  $\epsilon$  de façon linéaire dans le régime  $\epsilon \gg 1$ .

## Conclusion

On a pu voir dans cette leçon la richesse en terme de connaissance que peut nous apporter le portrait de phase dans le cadre d'oscillateur. En régime linéaire et non-linéaire il s'avère que cet outils reste fiable et efficace afin de caractériser notre système. Nous avons finis cette leçon par l'oscillateur de Van der Pol qui peut constituer une illustration plus réaliste de certains phénomènes physique. Bien entendu le but ultime serait de se rapprocher le plus près des phénomènes chaotiques qui sont présents autour de nous comme dans le domaine météorologique où les écoulements turbulents qui occupent les hautes couches atmosphérique sont caractérisés par des phénomènes stochastiques. Ainsi par cette leçon la question de l'impossibilité de prévoir le temps à moyen ou long terme peut recevoir une réponse partielle. Enfin, la sensibilité aux conditions initiales peut expliquer ce qu'Edward Lorenz a poétiquement appelé l'effet papillon.

**-FIN-**