

Approche expérimentale.

Nous disposons, en ce tournant du siècle, d'un grand nombre d'observations astronomiques et de résultats expérimentaux fiables qui donnent à la théorie de la Relativité Restreinte une base extrêmement solide. Deux catégories de phénomènes sont concernées : d'une part les propriétés de la vitesse de la lumière dans le vide, et d'autre part les relations entre vitesse, énergie et masse d'un objet.

1. La vitesse de la lumière dans le vide ne dépend pas de la fréquence.

Pour étudier les propriétés de la lumière, on a au fil des âges, utilisé deux méthodes: la plus ancienne consiste à lire dans les astres, la plus récente est d'effectuer des expériences de laboratoire.

Un exemple contemporain de la première est l'observation des pulsars. Ces objets célestes, découverts en 1968 par Jocelyn Bell, sont le résidu d'explosion de Supernovas. De petite taille, ils sont extrêmement denses: la masse du soleil dans une sphère de 10 km de diamètre, et possèdent un fort moment dipolaire magnétique. L'axe du dipôle ne coïncide pas avec l'axe de rotation de l'astre dont le rayonnement parvient jusqu'à nous, à la manière de la lumière d'un phare, sous forme d'impulsions régulièrement espacées.

Célébrissime est le pulsar de la nébuleuse du Crabe, vestige d'une explosion qui fut observée en 1054. Il a la particularité d'émettre sur un très large spectre électromagnétique encadrant le domaine visible. Le spectre s'étend sur au moins 13 décades: des ondes radios aux rayons γ , reçus simultanément sous la forme d'impulsions de durée Δt inférieure à 3 millisecondes (Figure I-1). La variation relative de vitesse des ondes électromagnétiques sur tout le spectre observé, a une limite supérieure:

$$\frac{\Delta v}{c} \leq \frac{c \Delta t}{D}$$

où D est la distance de l'astre. Les données du pulsar du Crabe sont :

$$\Delta t = 2.6 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

$$D = 2 \text{ kiloparsecs} = 6 \cdot 10^{19} \text{ m.}$$

Il en résulte l'inégalité :

$$\frac{\Delta v}{c} \leq 1.3 \cdot 10^{-14}$$

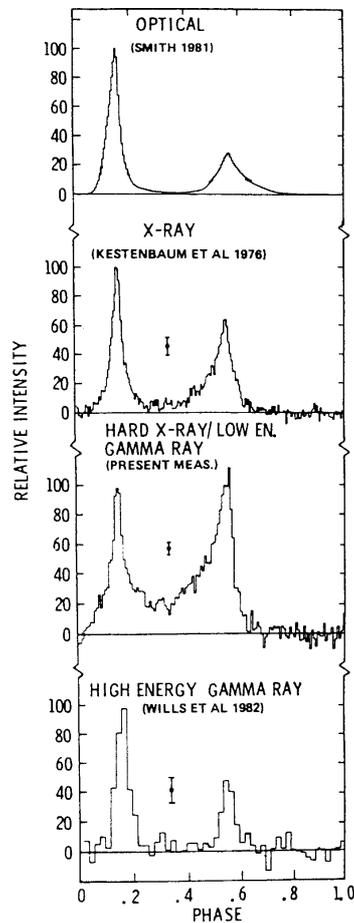


Figure I-1

Courbes de luminosité pour différentes fréquences du rayonnement détecté. (G.J. Fishman in Frontiers in Cosmic Physics, R.B. Mendell, A.I. Mincer ed. Ann. N.Y. Academy of Sciences, 655-1992-309). Le parfait synchronisme entre les signaux reçus montre l'indépendance de la vitesse de la lumière vis à vis de la fréquence.

Les grands accélérateurs offrent une autre façon de faire des comparaisons entre les vitesses que des rayonnements à des fréquences différentes ont dans le vide. Le principe est de mesurer le temps écoulé entre le départ à une extrémité d'une base de temps de vol de longueur connue et l'arrivée à l'autre extrémité. Un accélérateur linéaire comporte toujours un long tube à vide qui se prête bien à une telle expérience. En voici un exemple:

Le S.L.A.C. (Stanford Linear Accelerator) est un accélérateur linéaire d'électrons de près de 4 km de long. En 1972 (B.C. Brown, G.E. Masek, T. Maung, E.S. Miller, H. Ruderman,

W. Vernon, *Phys. Rev. Lett.* **30**-1973-763) on a utilisé des paquets d'électrons de 11 G.e.V.¹ qui produisent soit des γ de 7 G.e.V. au moins par bombardement d'une cible de cuivre escamotable, soit de la lumière visible (2 e.V.) par rayonnement synchrotron lorsqu'ils sont défléchis par un aimant, une fois la cible retirée (figure I-2).

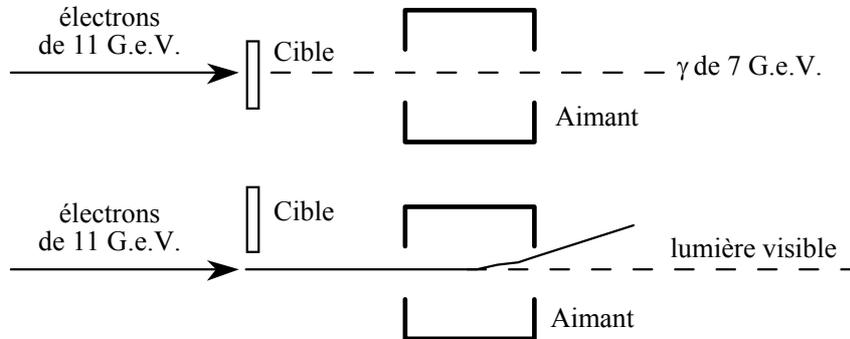


Figure I-2. Schéma des dispositifs créateurs de photons.

L'aimant défecteur placé après la cible sert à éjecter les particules chargées hors du tube qui n'est plus alors parcouru que par du rayonnement. La détection est placée à 1433 m de la source.

Les γ sont détectés par créations de paires électrons positrons dans une 2ème cible de cuivre. Les positrons de haute énergie sont dirigées par un 2ème aimant défecteur vers un compteur Cerenkov à gaz, émetteur de lumière visible, qu'un miroir renvoie sur une photocathode suivie d'un multiplicateur d'électrons (tube P.M.).

Pour détecter le rayonnement synchrotron visible, on escamote la 2ème cible et on la remplace par un prisme qui envoie cette lumière vers le même dispositif miroir/détecteur (figure I-3).

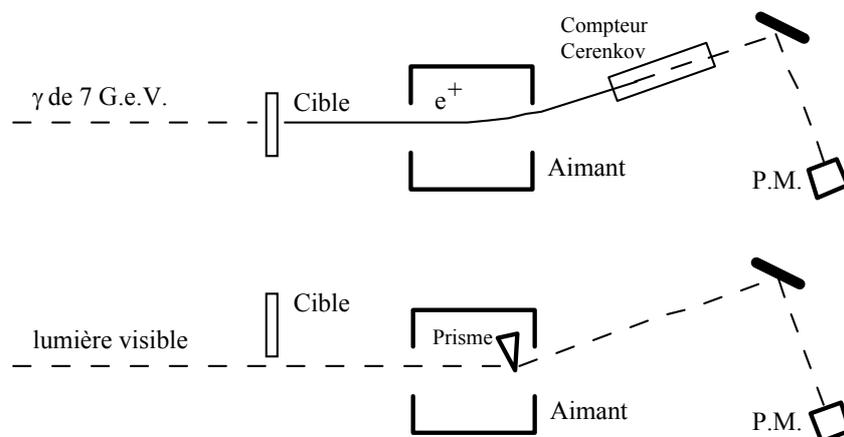


Figure I-3. Schéma des dispositifs détecteurs de photons.

¹ L'énergie est le produit de la tension d'accélération par la charge élémentaire. On l'exprime en multiples de l'unité électron-Volt (1 e.V.= $1.6 \cdot 10^{-19}$ J., 1 G.e.V = 10^9 e.V.).

Un jeu de caches amovibles stratégiquement placés permet de n'avoir ni γ de 7 G.e.V. ni lumière synchrotron dans le tube à vide, afin de mesurer le bruit de fond de l'installation.

La technique même de l'accélérateur linéaire procure les moyens de repérer avec précision, par rapport à une base de temps commune, les instants d'émission et de détection des deux sortes de rayonnement. On a ainsi obtenu des temps de vol identiques aux erreurs de mesure près : $4.3 \cdot 10^{-6} \text{ s.} \pm 2.5 \cdot 10^{-11} \text{ s.}$ sur 1433 m, ce qui donne

$$\frac{\Delta c}{c} = 6 \cdot 10^{-6}$$

précision qui reste inférieure à celle des observations astronomiques. Mais la concordance est suffisante pour affirmer que dans tous les cas d'observation ou de mesure, on a trouvé une vitesse de la lumière dans le vide indépendante de la fréquence.

2. La vitesse de la lumière dans le vide n'obéit pas à la règle habituelle de composition des vitesses.

En 1810, Arago eut la surprise de constater qu'un prisme dispersait avec les mêmes angles pour les mêmes couleurs (longueur d'onde) la lumière d'une source proche et immobile et la lumière d'une étoile lointaine. Il s'attendait à ce que le mouvement d'entraînement (orbital) de la terre modifie la vitesse de phase v_φ des ondes donc l'indice de réfraction $\eta = \frac{c}{v_\varphi}$.

L'observation des étoiles doubles, sur une suggestion de De Sitter (*Proc. Amsterdam Acad.* 16-1913-395), apporte des éléments chiffrés. Dans un tel système, deux astres brillants tournent autour de leur centre d'inertie. Lorsque la terre se trouve dans le plan des orbites, il est possible de déterminer la vitesse de l'un ou l'autre des partenaires en mesurant le déplacement Doppler des raies spectrales de la lumière émise par chacun d'eux.

L'effet Doppler concerne la fréquence d'une source en mouvement par rapport à un observateur. Soit une onde plane monochromatique émise par cette source. La phase

$$\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$$

ne dépend pas du référentiel dans lequel on observe la propagation de l'onde: invariance par changement de repère. Admettons que l'écriture précédente de la phase corresponde au référentiel R d'un observateur immobile. La source a dans ce référentiel, une vitesse instantanée située dans le plan xOy et dont la composante suivant la ligne de visée prise pour axe des x est u. Les ondes se propagent dans la direction de Ox.

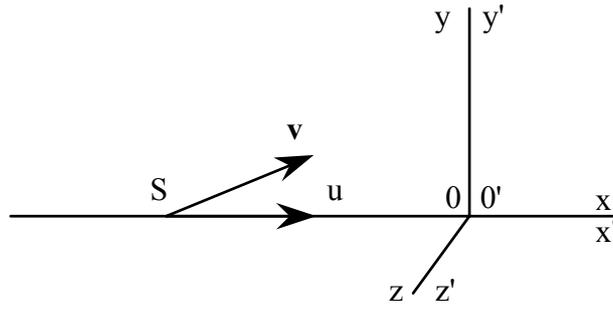


Figure I-4.

Dans le référentiel R' qui se déplace par rapport à R avec la vitesse u suivant Ox et dont l'origine O' coïncide avec O à l'instant t ,

$$\phi = k'x' - \omega't = kx - \omega t.$$

Or passant de R' à R au moyen de la transformation de Galilée, on obtient

$$x' = x - ut, \quad y' = y,$$

de sorte que

$$\phi = k'x' - \omega't = k'x - k'ut - \omega't = k'x - \omega'(1 + k'u/\omega')t = kx - \omega t.$$

La dernière égalité est vérifiée pour

$$k = k', \quad \omega = \omega'(1 + \varepsilon_{\pm}u/v'_{\phi})$$

où $v'_{\phi} = \frac{\omega'}{k}$ est la vitesse de phase dans le référentiel R' et

$\varepsilon_{\pm} = 1$ si k et u sont de même signe, la source se rapproche de l'observateur,
 $\varepsilon_{\pm} = -1$ si k et u sont de signes contraires, la source s'éloigne de l'observateur.

Revenons à l'étoile double, plus précisément à celui des deux astres situé le plus loin du centre d'inertie. En A sur la figure I-5, il s'éloigne d'un observateur terrestre ce qui provoque un déplacement vers le rouge, en B diamétralement opposé, il se rapproche : déplacement vers le bleu.

Par rapport à la pulsation ω_S de la source, la pulsation ω_T reçue par un observateur terrestre est :

$$\omega_T = \omega_S \left(1 + \frac{u}{c} \right)$$

où u est la composante algébrique de la vitesse suivant l'axe étoile-double \rightarrow Terre. Soit R le rayon de l'orbite et Ω la vitesse angulaire, alors

$$u = -\Omega R \sin \Omega t.$$

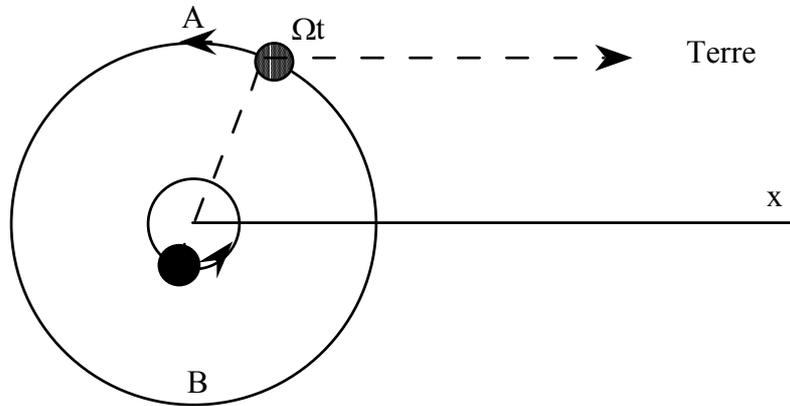


Figure I-5.

Si la vitesse de la lumière dépend du mouvement de la source, le trajet étoile double \rightarrow Terre sur la distance d prend un temps : $\frac{d}{c+u}$, plus long lorsque la source s'éloigne de la Terre que lorsqu'elle s'en approche. Si t_S est l'instant d'émission, l'observateur terrestre reçoit la lumière au temps:

$$t_T = t_S + \frac{d}{c+u} = t_S + \left(1 - \frac{u}{c}\right) \frac{d}{c}$$

lorsque, cas général, on a $u \ll c$. La fréquence reçue par l'observateur terrestre est alors :

$$\omega_T = \omega_S \left(1 - \frac{\Omega R}{c} \sin \Omega t_S\right) = \omega_S \left[1 - \frac{\Omega R}{c} \sin \Omega \left(t_T - \frac{d}{c} - \frac{\Omega R d}{c^2} \sin \Omega t_S\right)\right].$$

Posant

$$\tau = t_T - \frac{d}{c},$$

et négligeant les termes d'ordre supérieur, le déplacement Doppler relatif s'écrit:

$$- \frac{\Omega R}{c} \sin \left(\Omega \tau - \frac{\Omega^2 R d}{c^2} \sin \Omega \tau \right)$$

La modulation de la fréquence par $\frac{\Omega^2 R d}{c^2} \sin \Omega \tau$ produit une déformation caractéristique de la sinusoïde comme le montre la figure I-6:

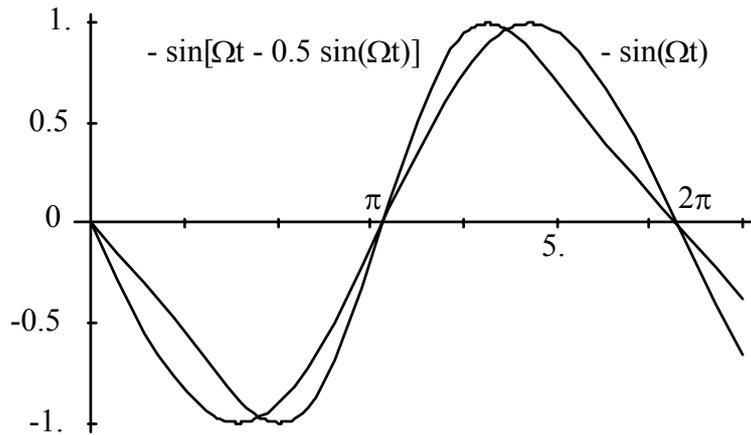


Figure I-6.

L'exemple fourni par les deux partenaires de l'étoile double Castor C (figure I-7) est une des nombreuses observations astronomiques qui n'ont jamais permis de mettre en évidence un écart significatif à la sinusoïde (A.H. Joy, R.F. Sanford, *Astrophys. J.* **64**-1926-250). On conclut qu'à 10^{-6} près la vitesse de la lumière est indépendante de celle de la source.

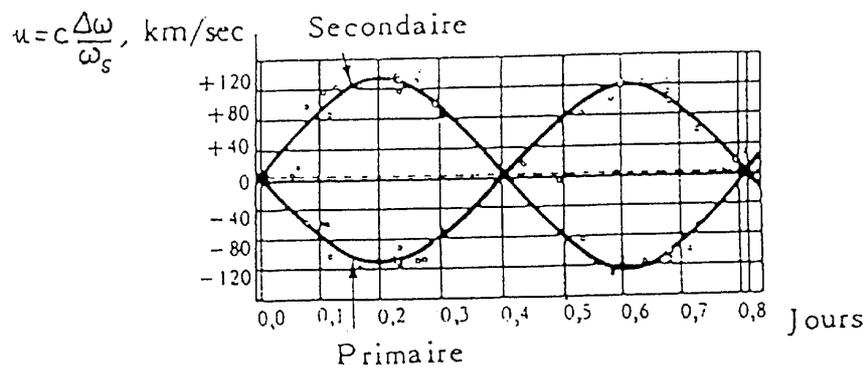


Figure I-7.

Des expériences faites auprès des grands accélérateurs de particules confirment ce résultat. La technique est encore celle du temps de vol. Au CERN (Centre Européen de Recherches Nucléaires à Genève) par exemple, on a mesuré la vitesse de rayons γ provenant de la désintégration de pions neutres (T. Alväger, F.J.M. Farley, J. Kjellman, I. Wallin, *Phys. Lett.* **12**-1964-260). Ces particules produites dans l'impact de protons de haute énergie, 19 G.e.V., sur des cibles en Béryllium, donnent naissance avec une probabilité de 99% à deux γ

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma.$$

Les pions neutres ont un temps de décroissance moyen de $0.84 \cdot 10^{-16}$ s. On observe les γ dans une direction faisant un angle de 6° avec celle des protons incidents. Des aimants sont placés sur leur trajet afin de d'éliminer les particules chargées. Les protons sont répartis en paquets (bunches) de quelques nanosecondes ($1 \text{ ns} = 10^{-9}\text{s}$) toutes les 105 ns. Les π^0 , d'énergie supérieure à 6 G.e.V., et les γ sont émis avec cette même périodicité temporelle ce qui permet

des mesures de vitesse par temps de vol entre deux détecteurs situés aux points A et B, loin ($\approx 100\text{m}$) de la source, et à 31,45 m l'un de l'autre distance telle que le temps mis pour la parcourir à la vitesse c soit égal à celui qui sépare deux paquets de protons, et que l'on déplace ensuite en A' et B' ($AA'=B'B$).

La vitesse de la source est égale à $0.99975 c$. La vitesse de la lumière (γ de 6 G.e.V.) qu'elle émet est égale à 10^{-5} près à celle mesurée lorsque la source est fixe.

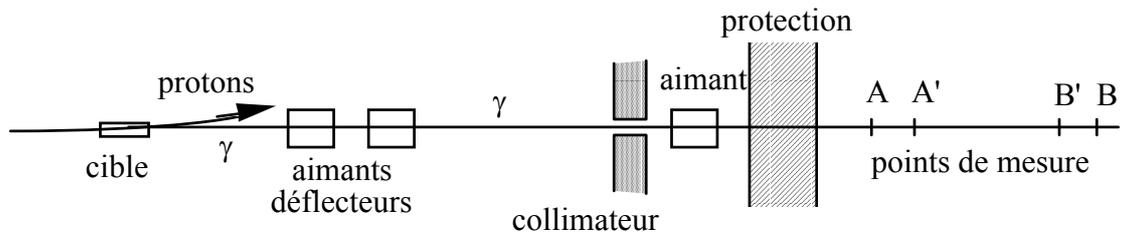


Figure I-8.

Schéma du dispositif expérimental de la mesure de la vitesse de la lumière émise par une source mobile.

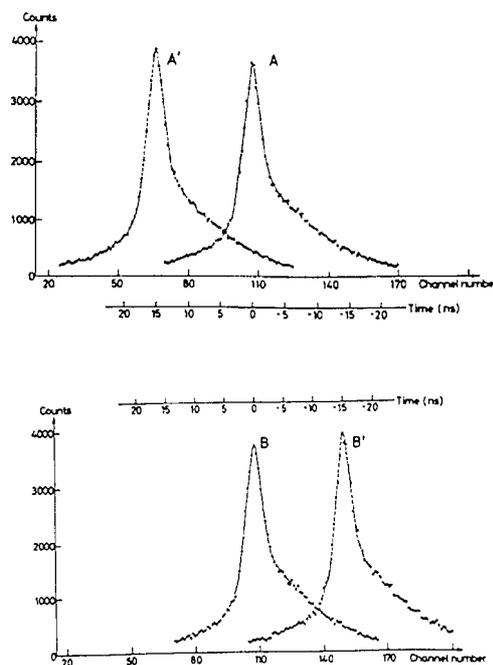


Figure I-9.

Comptages en fonction du temps aux points de mesure A, A', B, B'.

La distance AB fait que les γ reçus en B en provenance de l'interaction d'un certain paquet d'électrons arrivent en même temps qu'en A ceux résultant de l'interaction du paquet suivant (zéro de l'échelle des temps).

Ainsi, mesures en laboratoires et observations astronomiques concordent aussi sur l'indépendance de la vitesse de lumière vis à vis des changements de référentiel. Les étoiles doubles observées étant réparties de façon quelconque dans le ciel, on en conclut que la vitesse de la lumière ne dépend pas non plus de la direction (isotropie).

3. Energie et vitesse d'un objet matériel.

Energie et quantité de mouvement (impulsion) sont des grandeurs importantes en mécanique en raison des lois de conservations qui leurs sont associées. Jusqu'en 1905, on admettait que la masse m (inerte) d'un objet en mouvement est une constante, énergie cinétique E_C et impulsion p étant reliées entre elles par:

$$(3-1) \quad E_C = \frac{p^2}{2m}.$$

Or il existe des expériences dans lesquelles on mesure indépendamment énergie cinétique et impulsion.

Lorsqu'on dispose d'accélérateurs de particules il est relativement facile de mesurer par temps de vol la vitesse des objets accélérés. Les électrons, très légers, se prêtent bien à ce genre d'expérience.

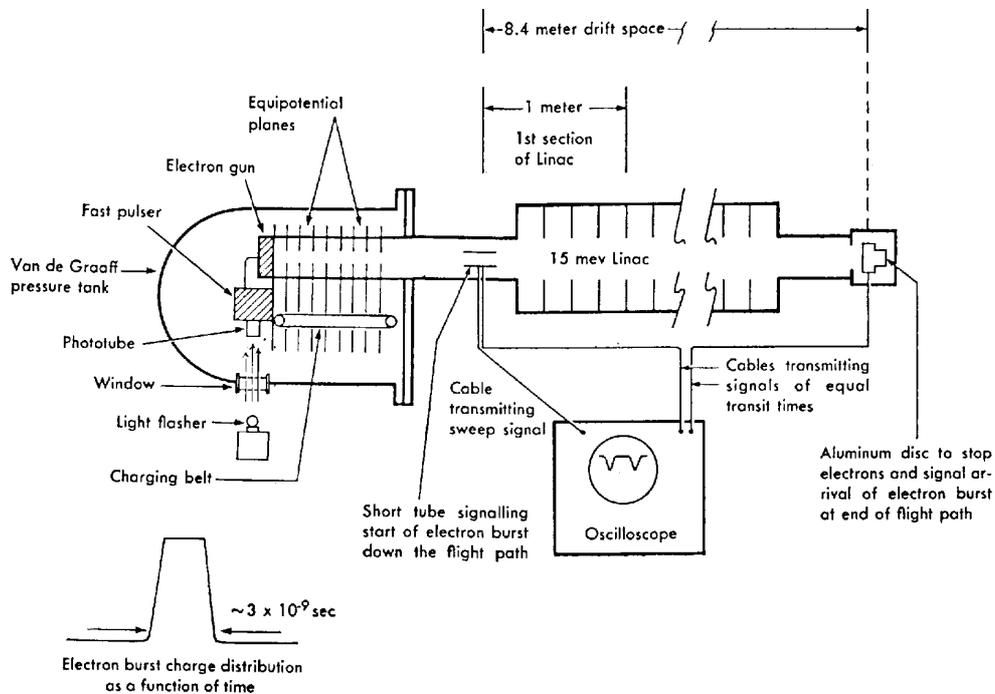


Figure I-10.

Mesure de la vitesse d'électrons accélérés.

La figure I-10 représente un dispositif (W. Bertozzi, *Am. J. of Phys.* **32**-1964-551), permettant de déterminer à la sortie d'un accélérateur de type Van de Graaff, le temps de vol donc la vitesse de paquets de courte durée ($3 \cdot 10^{-9}$ s) d'électrons d'énergie donnée. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau I-1 et comparés, pour chaque énergie, à la vitesse v_N calculée à partir de la formule habituelle de l'énergie cinétique:

$$(3-2) \quad E_C = \frac{mv_N^2}{2}.$$

On ne trouve pas la proportionnalité, prévue par la mécanique newtonienne, entre l'énergie cinétique, connue par la tension d'accélération, et le carré de la vitesse, mais celle ci tend asymptotiquement vers c lorsque l'énergie augmente. Les lois ordinaires de la mécanique ne s'appliquent donc pas lorsque les énergies particulières sont élevées.

Tableau I-1.

<i>Energie</i>	<i>vitesse mesurée</i>	<i>vitesse calculée par (3-1)</i>
M.e.V. (10^6 e.V.)	u/c	v_N/c
0.5	0.867	1.4
1	0.910	2
1.5	0.960	2.4
4.5	0.987	4.4
15	1.	8

Les techniques utilisées dans l'expérience précédente ne permettent pas d'accélérer les électrons au delà de 15 M.e.V. Il existe des machines beaucoup plus puissantes comme le SLAC. Le montage décrit au § 1 pour mesurer la vitesse de la lumière, peut aussi servir à mesurer celle des électrons. Les aimants disposés aux deux extrémités de la base de temps de vol courbent les trajectoires des électrons qui émettent alors du rayonnement synchrotron. La comparaison des temps d'émission fournit une détermination de la différence entre la vitesse de la lumière et celle des électrons. On a trouvé ainsi

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{u_e - c}{c} \sim -1.3 \cdot 10^{-6}$$

pour des électrons de 11 G.e.V.

Pour préciser la relation entre énergie et impulsion, un montage simple et compact (Sherwood Parker, *Am. J. of Phys.* **40**-1972-241) utilise comme objets en mouvement les électrons d'assez grande énergie, émis par une source radioactive β : du Strontium 90. Un champ magnétique uniforme oblige ces particules chargées à décrire des demi-cercles au bout desquels on les compte par un dispositif qui mesure en même temps leur énergie cinétique.

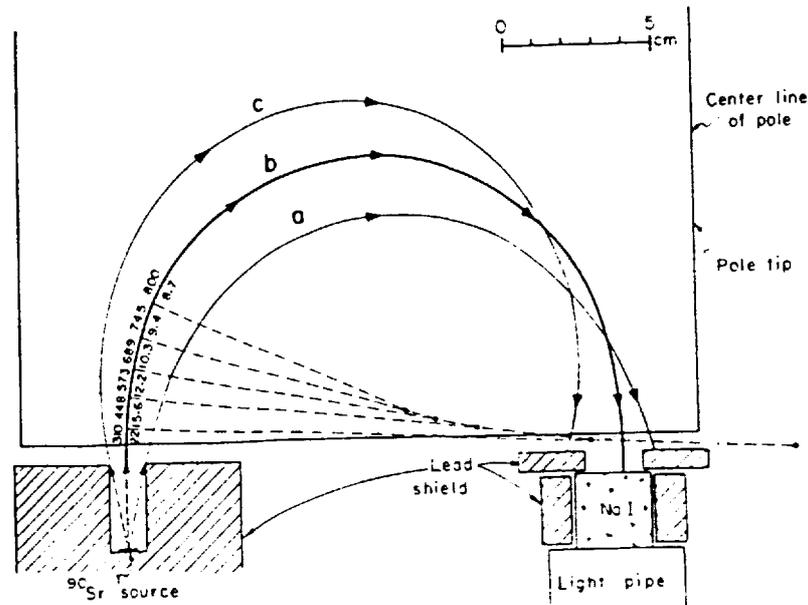


Figure I-11.

Une particule chargée dans un champ magnétique \mathbf{B} a une trajectoire circulaire de rayon

$$R = \frac{p}{qB} = \frac{mv}{qB}$$

où q est la charge, et dont le plan est orthogonal à la direction de \mathbf{B} . Dans l'expérience, les électrons sont collimatés de façon à donner à leur vitesse initiale une direction orthogonale à celle du champ magnétique. Le détecteur est disposé à une distance d (variable) de la source dans une direction également orthogonale au champ.

Fixer d revient à fixer R ($=d/2$) donc p par $p = qBR$. On mesure la hauteur des signaux, proportionnelle à l'énergie cinétique de l'électron incident, en fonction de la distance d entre source et détecteur, ce qui revient à mesurer E_c en fonction de p . Le résultat de cette expérience est présenté sur la figure I-12.

Lorsque l'énergie dépasse 2 Mev, la variation expérimentale (cercles pleins avec barres d'erreur) est plutôt :

$$E_c = pc - 0.5 \text{ M.e.V.}$$

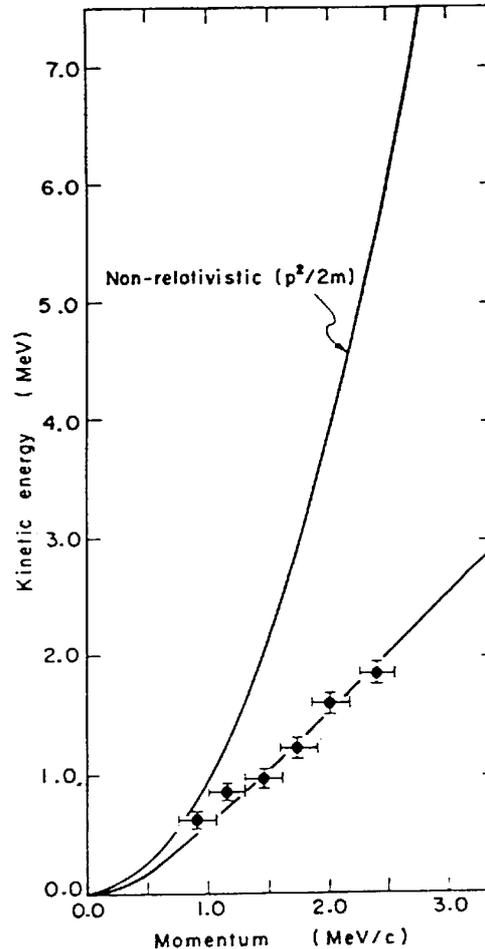


Figure I-12.

Cette relation, associée à l'existence d'une vitesse limite égale à c , n'est pas compatible avec une masse indépendante de la vitesse. Dans de telles expériences la masse apparaît comme le seul paramètre libre. Dépendrait elle de la vitesse?

Les expériences décrites dans les §§ 1 et 2 incitent à compléter le principe très ancien (Galilée), de l'égalité des référentiels d'inertie devant les lois de la physique par un principe d'invariance de la vitesse de la lumière. Comme on va le voir dans le chapitre suivant, une conséquence naturelle en est la transformation de Lorentz qui régit les changements de coordonnées entre référentiels en mouvement uniforme.

II.

L'espace-temps de la relativité restreinte.

L'invariance de la vitesse de la lumière, donnée d'expérience, conduit à établir les formules de transformation de Lorentz entre les coordonnées d'espace et de temps de référentiels en mouvement de translation uniforme les uns par rapport aux autres. Ainsi l'espace et le temps apparaissent indissociables et le temps, dépendant du référentiel galiléen dans lequel on le mesure, perd son caractère absolu. Les phénomènes physiques doivent donc être étudiés dans un espace-temps à 4 dimensions dont il importe alors de connaître les propriétés géométriques et d'invariance qui peuvent également servir de point de départ à la théorie.

4. Lignes d'univers, invariance.

Un objet ponctuel parcourt une *ligne d'univers* dans l'espace temps à 4 dimensions. La flèche du temps est orientée du passé vers l'avenir. τ (mesuré en unités de longueur) est toujours croissant le long d'une ligne d'univers qui ne peut revenir en arrière ni effectuer de boucle.

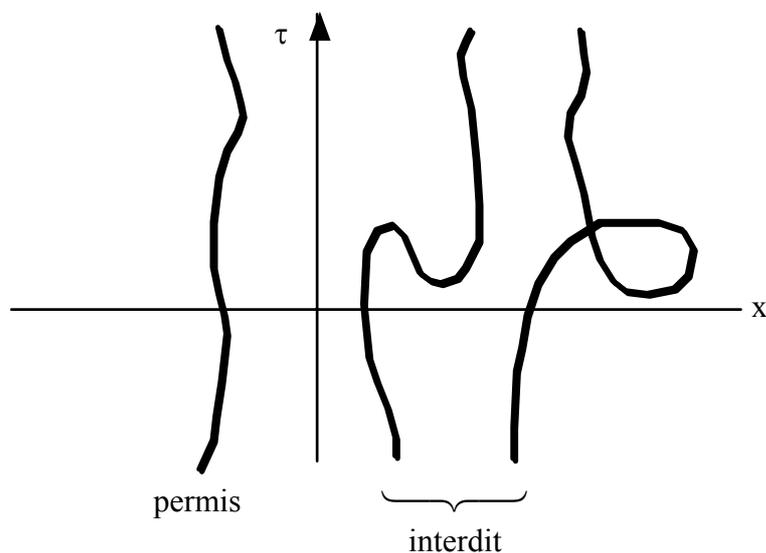


Figure II-1. *Lignes d'univers*

Un objet en mouvement dans l'espace physique à 3 dimensions est animé d'une vitesse instantanée de grandeur

$$\frac{ds}{d\tau} \quad \text{avec} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

Il existe en mécanique deux *principes démocratiques* d'invariance:

- ◆ la forme des équations reste inchangée par changement de position du référentiel spatial;
- ◆ elle est aussi inchangée par changement de référentiel en mouvement uniforme.

Ces deux principes étant respectés, la flèche du temps peut-elle à partir d'un point d'espace-temps, être pointée dans toutes les directions du demi espace $\tau > 0$?

La réponse est positive dans le cadre de la mécanique newtonnienne. Elle est négative si l'on étend les principes aux lois de l'électromagnétisme (équations de Maxwell). Alors la transformation linéaire entre coordonnées d'espace et de temps dans un changement de référentiel en mouvement uniforme doit impliquer a priori l'*invariance de la vitesse c de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide*.

Un raisonnement sur un exemple simple montre que cette invariance entraîne celle d'un certain intervalle d'espace-temps. Soit en effet un mobile qui se déplace dans la direction Ox à partir d'une origine O avec une vitesse constante par rapport au référentiel R_0 . Au départ en O, il émet une impulsion lumineuse de vitesse prise pour unité, réfléchi par un miroir M situé dans la direction Oy à une distance D, et qui rencontre à nouveau l'axe des x en un point P_0 d'abscisse positive Δx_0 dans R_0 .

Imaginons 2 cas de déplacement d'un mobile constitué d'une fusée qui porte l'émetteur de lumière et le long de laquelle peut se déplacer un détecteur. La vitesse de la fusée n° 1 est telle que dans le référentiel R_1 où elle est immobile, émetteur et détecteur sont situés au même point O_1 . La vitesse de la fusée n° 2 est encore plus grande de sorte que dans le référentiel R_2 où elle est immobile, il faut placer le détecteur en P_2 à une abscisse négative Δx_2 (figure II-2).

Evaluons le temps $\Delta\tau$ mis par la lumière pour aller de l'émetteur au détecteur dans chacun des 3 référentiels:

$$\begin{aligned} \text{◆ } R_0 : \Delta\tau_0 &= 2 \sqrt{D^2 + \left(\frac{\Delta x_0}{2}\right)^2} & \text{soit } \Delta\tau_0^2 &= 4D^2 + \Delta x_0^2, \\ \text{◆ } R_1 : \Delta\tau_1 &= 2D & \text{soit } \Delta\tau_1^2 &= 4D^2, \\ \text{◆ } R_2 : \Delta\tau_2 &= 2 \sqrt{D^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{2}\right)^2} & \text{soit } \Delta\tau_2^2 &= 4D^2 + \Delta x_2^2. \end{aligned}$$

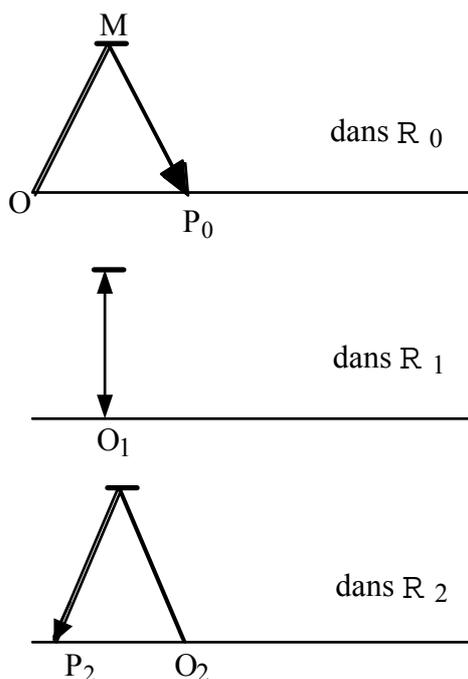


Figure II-2.

Il est clair que dans tous les référentiels l'identité suivante est vérifiée

$$\Delta\tau^2 - \Delta x^2 = 4D^2$$

On conclut donc à l'invariance de $\Delta\tau^2 - \Delta x^2$ par changement de référentiel.

La relation d'invariance se généralise en incluant les coordonnées passives y et z à l'intervalle d'espace-temps:

$$d\tau^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \text{cte.} \quad (5-1)$$

Cette invariance implique l'existence d'une vitesse limite pour tout objet matériel.

En effet l'axiome de Minkowski énonce: *Tout objet matériel en un point d'espace-temps (d'univers) peut toujours être considéré comme au repos moyennant une définition appropriée de l'espace et du temps.*

La constante est égale au carré de l'intervalle de temps dans le référentiel correspondant ce qui entraîne que la constante est alors positive. A vitesse $\frac{ds}{d\tau}$ constante, la relation

$$\tau^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \text{cte} > 0$$

généralise l'équation d'un hyperboloïde de révolution à 2 nappes. Si tous les mouvements s'effectuent suivant Ox , elle se réduit à

$$\tau^2 - x^2 = \tau_0^2$$

équation d'une hyperbole H dans le plan τ, x dont on ne retiendra que l'arc situé dans le demi plan $\tau > 0$. La vitesse d'un objet matériel par rapport au référentiel R d'espace-temps défini par les axes $Ox, O\tau$ est donnée par le quotient x/τ (appelé ici pente) relatif à l'extrémité sur H d'un vecteur (*quadrivecteur*) dont l'origine est en O . Pour l'objet immobile cette extrémité se situe sur l'axe des temps au point d'ordonnée τ_0 . Il est clair que la grandeur de la vitesse est toujours inférieure à 1, grandeur de la pente des asymptotes.

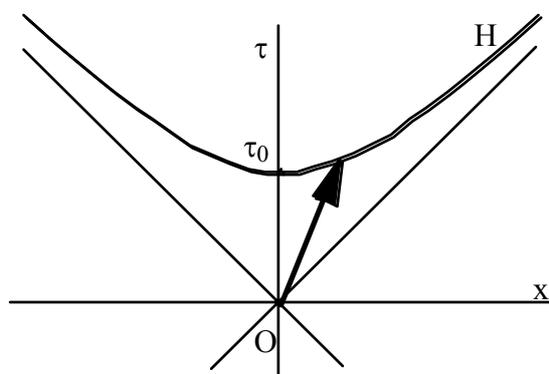


Figure II-3. *Quadrivecteur du genre temps.*

La ligne d'univers d'un objet matériel partant de O est toujours contenue à l'intérieur du cône généralisé dont l'intersection avec le plan $Ox, O\tau$ est constituée par ces asymptotes. L'axe des temps est la ligne d'univers d'un objet immobile dans R . L'intervalle d'espace-temps correspondant à une constante positive est appelé *intervalle du genre temps*.

Le cône lui même correspond à un invariant nul: *intervalle du genre lumière*.

Un quadrivecteur dont l'extrémité est à l'extérieur du cône correspond à un invariant négatif: *intervalle du genre espace*. Il ne peut se confondre avec la ligne d'univers d'un objet matériel.

5. Simultanéité.

Considérons le cas très simple d'un référentiel R' qui se déplace, par rapport au référentiel R , d'un mouvement uniforme suivant Ox avec la vitesse u . Les directions Oy

(O'y') et Oz (O'z') n'ayant qu'un rôle passif, il suffit de représenter, dans chacun des référentiels, les abscisses Ox (O'x') en fonction des temps: τ (τ').

A l'instant 0, les origines des deux référentiels coïncident (*synchronisation des horloges*): deux signaux lumineux sont émis depuis l'origine commune, l'un vers les x positifs, l'autre vers les x négatifs. Dans R', ces signaux atteignent les points d'abscisses $-x'_0$ et x'_0 au même instant $\tau'_0 = x'_0$. Au point P' ($-x'_0, \tau'_0$) dans un diagramme x', ct' , se situe un évènement: la réception d'un signal lumineux. Dans R, ce même évènement a lieu au point P situé à l'intersection des droites

$$x = -\tau \quad (\text{invariance de } c) \quad \text{et} \quad x = \beta\tau - x_0$$

où l'on a introduit la vitesse sans dimensions β . Les coordonnées de P sont donc

$$x_P = -\frac{x_0}{1 + \beta}, \quad \tau_P = \frac{x_0}{1 + \beta}.$$

De la même façon, l'évènement qui dans R' a lieu en Q' a lieu dans R au point Q dont les coordonnées sont

$$x_Q = \frac{x_0}{1 - \beta}, \quad \tau_Q = \frac{x_0}{1 - \beta}.$$

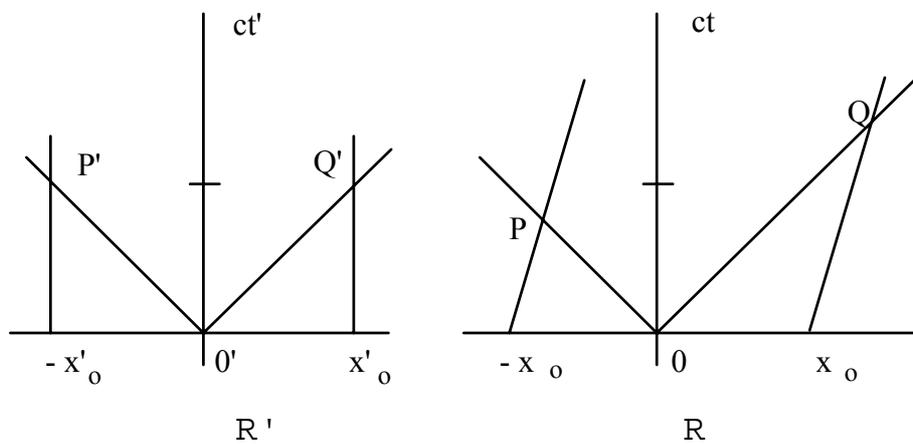


Figure II-4.

La réception des signaux qui était simultanée en P' et Q' dans R', ne l'est plus en P et Q dans R. Ainsi, l'invariance de c (résultat d'expérience) entraîne que *le temps n'est pas un absolu. La simultanéité ou son absence dépendent du référentiel galiléen dans lequel on mesure le temps*. Il convient donc d'affecter un temps différent à chaque référentiel galiléen. Ainsi dans R' on aura un temps τ' (différent de τ).

6. Structure de l'espace-temps, transformation de Lorentz

La relation d'invariance,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{cte},$$

satisfaite par toutes les rotations autour de l'origine, structure l'espace physique isotrope à 3 dimensions. Elle contient les formules usuelles de changement d'axe par rotation. Soit en effet à 2 dimensions

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = 1.$$

On passe des x aux x' par une transformation linéaire

$$\begin{aligned} x &= ax' + by', \\ y &= ex' + fy', \end{aligned} \quad (6-1)$$

dont les coefficients doivent satisfaire la relation d'invariance ce qui entraîne

$$a^2 + e^2 = b^2 + f^2 = 1, \quad \text{et} \quad ab + fe = 0.$$

Le premier groupe de ces relations incite à poser :

$$a = \cos\theta, \quad e = \sin\theta, \quad b = \sin\varphi, \quad f = \cos\varphi ;$$

portant dans la dernière, il vient

$$\cos\theta \sin\varphi + \sin\theta \cos\varphi = \sin(\varphi + \theta) = 0 .$$

Alors

$$\begin{aligned} a &= f = \cos\theta \\ b &= -e = -\sin\theta . \end{aligned}$$

On retrouve ainsi les formules habituelles de changement d'axe par rotation d'un angle θ autour de l'origine, conséquences ici de la seule invariance.

De la même façon, la relation d'invariance

$$\tau^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = \text{cte}$$

structure l'espace-temps. Laissant de côté les coordonnées passives y et z ($y = y'$, $z = z'$), les coefficients de la transformation linéaire entre coordonnées d'espace-temps des référentiels R et R' soit

$$\begin{aligned}x &= ax' + b \tau', \\ \tau &= ex' + f \tau',\end{aligned}\quad (6-2)$$

et respectant l'invariance

$$\tau^2 - x^2 = 1,$$

vérifient les relations

$$a^2 - e^2 = f^2 - b^2 = 1, \quad \text{et} \quad ab = ef,$$

qui entraînent

$$a = f, \quad b = e.$$

La transformation inverse

$$\begin{aligned}x' &= \frac{a}{a^2 - b^2} x - \frac{b}{a^2 - b^2} \tau, \\ \tau' &= -\frac{b}{a^2 - b^2} x + \frac{a}{a^2 - b^2} \tau.\end{aligned}$$

doit en vertu de la démocratie être de même forme que (6-2) aux changements de signe près entraînés par le changement de sens de la vitesse (renversement du temps). Alors les dénominateurs doivent être égaux à 1. Prenant

$$\begin{aligned}a &= \operatorname{ch}\psi \\ b &= \operatorname{sh}\psi,\end{aligned}$$

invariance et démocratie sont maintenant satisfaites. Alors, posant

$$\beta = \operatorname{th}\psi < 1,$$

il vient

$$\begin{aligned}a = \operatorname{ch}\psi &= \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma, \\ b = \operatorname{sh}\psi &= \frac{\operatorname{th}\psi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\psi}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \beta\gamma.\end{aligned}$$

La transformation linéaire (6-2) s'écrit ainsi

$$\begin{aligned}x &= \gamma (x' + \beta\tau'), \\ \tau &= \gamma (\beta x' + \tau').\end{aligned}$$

L'origine du référentiel R' est en $x' = 0$. Il est clair que $\beta (= x/\tau)$ est la vitesse de translation de R' par rapport à R . On a obtenu la *transformation de Lorentz* dans un système d'unités où la vitesse de la lumière dans le vide c est prise comme unité. On passe au système S.I. en prenant

$$\tau = ct, \quad \text{avec} \quad c = 299\,792\,458 \text{ m/s.}$$

et la transformation de Lorentz se met sous sa forme habituelle

$$\begin{aligned} x &= \gamma (x' + \beta ct'), \\ ct &= \gamma (\beta x' + ct'), \end{aligned} \quad (6-3)$$

avec pour inverse

$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - \beta ct), \\ ct' &= \gamma (-\beta x + ct). \end{aligned} \quad (6-4)$$

7. Quadrivecteurs contravariants et covariants.

Désignant par X la projection d'un quadrivecteur dans l'espace physique on note (ct, X) les quadrivecteurs obéissant à la transformation de Lorentz sous la forme (6-3) (6-4) lorsque le déplacement s'effectue suivant Ox . Les composantes de ces quadrivecteurs appelés *contravariants* sont notées x^μ où μ prend les valeurs 0,1,2 et 3, avec:

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z.$$

On associe à un tel quadrivecteur contravariant un quadrivecteur *covariant* de composantes notées x_μ , avec

$$x_0 = ct, x_1 = -x, \quad x_2 = -y, \quad x_3 = -z,$$

de sorte que la relation d'invariance prend la forme

$$x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 = x^\mu x_\mu = cte$$

où dans l'expression $x^\mu x_\mu$ on fait la convention de *somme sur les indices répétés* (Einstein). Ainsi

$$x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2 t^2 - X^2.$$

Pour savoir comment se transforment les quadrivecteurs covariants lors des changements de référentiel galiléens, on écrit pour une seule dimension spatiale

$$x'_1 = a x_1 + b \tau_0,$$

$$\tau'_0 = e x_1 + f \tau_0.$$

Substituant dans la relation d'invariance et faisant usage de (6-3)(6-4) pour les x^μ , on trouve entre les coefficients:

$$b = \beta e, d = \beta a,$$

$$\gamma a(1-\beta^2) = 1, \quad \gamma e(1-\beta^2) = 1$$

de sorte que

$$a = e = \gamma, \quad b = d = -\beta\gamma.$$

Finalement, la transformation pour les quadrivecteurs covariants s'écrit

$$x'_1 = \gamma (x_1 + \beta \tau_0),$$

$$\tau'_0 = \gamma (\beta x_1 + \tau_0),$$

et inversement

$$x_1 = \gamma (x'_1 - \beta \tau'_0),$$

$$\tau_0 = \gamma (-\beta x'_1 + \tau'_0).$$

Ainsi la transformation est différente par les signes de celle des quadrivecteurs contravariants. Mais elle est identique à celle que l'on obtient pour les opérateurs différentiels (C.F chapitre VII).

8. Représentation de l'espace-temps, causalité.

Faute de pouvoir visualiser un espace à 4 dimensions, on doit se contenter le plus souvent de 2 ou 3 dimensions. Mais on gardera le terme quadrivecteur à cause de l'invariance qui lui est associée.

L'équation $r=ct$ est celle d'un cône dont l'axe est l'axe des temps. Les quadrivecteurs ayant leur origine au sommet et leur extrémité à l'intérieur du cône sont du genre temps. Le cône lui même est le **CONE DE LUMIERE**. Chaque point de l'espace-temps est le sommet d'un cône de lumière. La figure suivante montre un espace-temps à trois dimensions dont deux d'espace

Soit à un instant choisi comme origine des temps, un objet matériel ponctuel en un point de l'espace-temps. Choisissons ce point comme origine du référentiel d'espace-temps R . Si l'objet est au repos dans R , il se déplacera le long de l'axe des temps. S'il est en mouvement, nécessairement à une vitesse u inférieure à c , le déplacement aura lieu à l'intérieur du cône de lumière ayant l'origine pour sommet. La surface du cône est réservée à la représentation de la propagation des signaux lumineux émis par l'objet occupant sa position initiale. Déplacement et propagation des signaux lumineux s'effectuent dans le sens des t croissants. L'intérieur du cône de lumière du côté des ct positifs représente donc l'**AVENIR** par rapport à l'origine: **ICI et MAINTENANT**. Cette position initiale est elle même le résultat d'un état de repos ou de mouvement qui ont eu lieu aussi à l'intérieur du cône de lumière mais du côté des ct négatifs: cette région de l'espace-temps représente donc le **PASSE**. Quant à l'extérieur du cône, il n'est pas accessible par un mouvement ou la propagation d'un signal lumineux à partir de la position initiale, ni ne peut être à l'origine d'un mouvement ou de la propagation d'un signal lumineux y aboutissant: c'est **AILLEURS**.

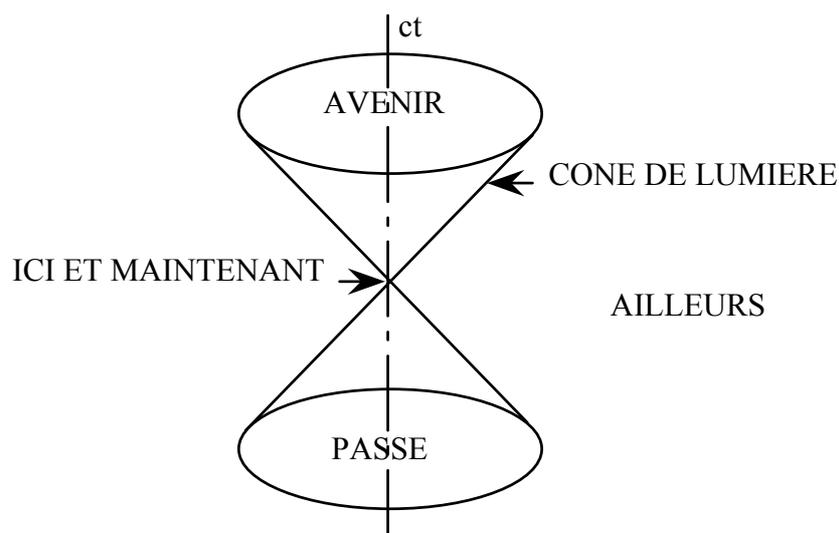


Figure II-5.

Admettons que tous les mouvements s'effectuent suivant l'axe des x : la section du cône par le plan méridien contenant Ox , fournit une représentation à deux dimensions que nous utiliserons abondamment dans la suite:

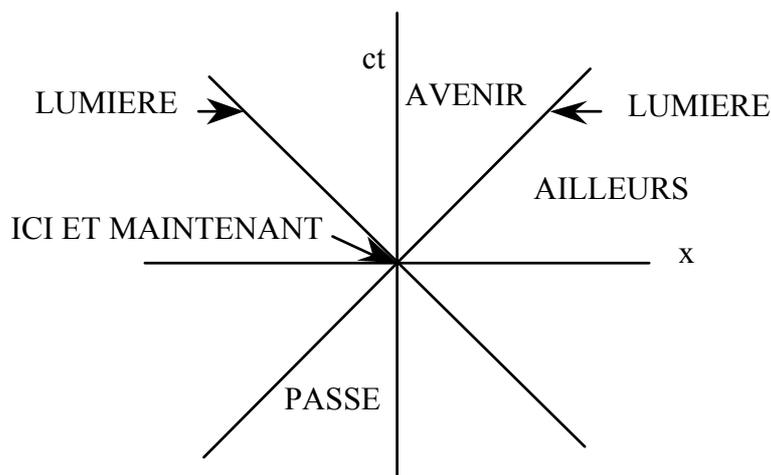


Figure II-6.

Un cône de lumière donc un passé, un avenir et un ailleurs sont attachés à chaque point de l'espace-temps. La causalité comme la communication entre deux observateurs ne s'exerce qu'à l'intérieur d'un cône de lumière.

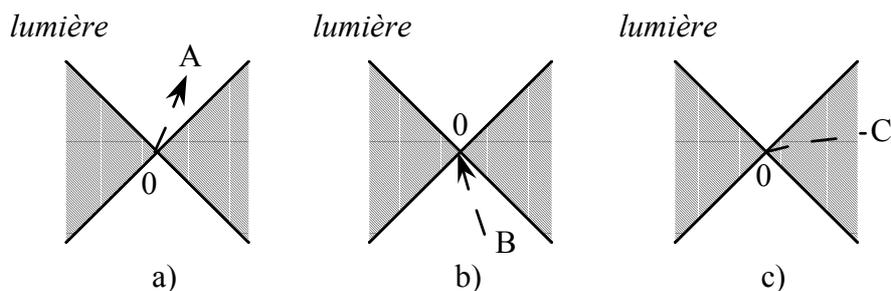


Figure II-7.

- a) *O* envoie de l'information vers *A*; b) *O* reçoit de l'information depuis *B*;
c) *O* et *C* ne communiquent pas.

Revenons à la transformation de Lorentz entre les coordonnées dans deux référentiels d'espace-temps R et R' , le second ayant par rapport au premier un mouvement de translation uniforme à la vitesse u suivant Ox .

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma(-\beta x + ct).\end{aligned}$$

Les points tels que $x'=0$, sont représentés par la droite :

$$x = \beta ct = ut$$

tracé usuel dans le plan x,t d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse u . Puisqu'on doit avoir $u < c$, ce tracé n'est permis qu'à l'intérieur du cône de lumière.

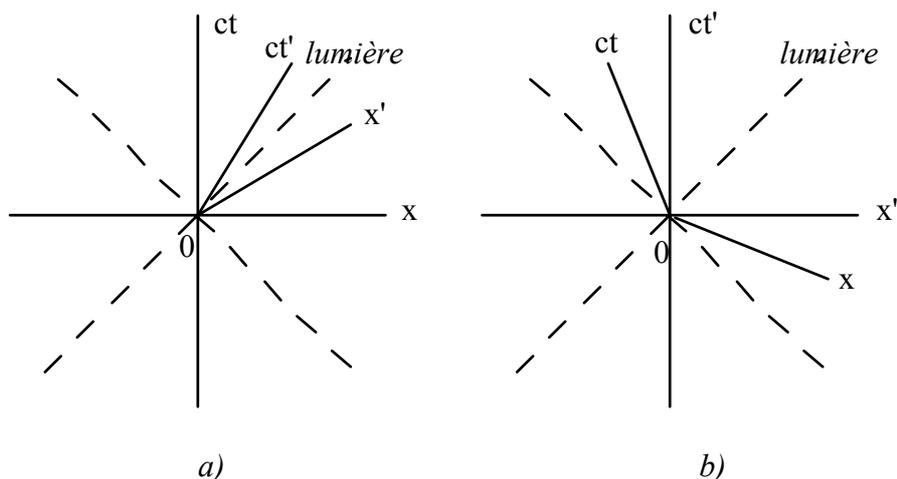


Figure II-8.

Les points tels que $t'=0$ sont eux représentés par la droite:

$$x = \frac{c t}{\beta}$$

symétrique de la précédente dans le plan x, ct par rapport à la première bissectrice et donc extérieure au cône de lumière. Dans ce diagramme (dit de Minkowski), les axes de coordonnées du référentiel d'espace-temps R' en mouvement de translation uniforme par rapport à R avec la vitesse u suivant Ox sont les deux axes obliques Ox', Oct' . Inversement R est en mouvement par rapport à R' avec la vitesse $-u$ selon le schéma de la figure II-8, b.

10. Contraction de Fitzgerald-Lorentz.

Soient deux points A_1 et A_2 d'un espace-temps à deux dimensions. Leurs abscisses dans R' sont calculées à partir des coordonnées dans R au moyen de la transformation de Lorentz :

$$x'_2 = \gamma (x_2 - \beta ct_2)$$

$$x'_1 = \gamma (x_1 - \beta ct_1).$$

Supposons $t_2 = t_1$: A_1 et A_2 correspondent à des événements simultanés dans R . On trouve alors

$$x_1 - x_2 = \frac{x'_1 - x'_2}{\gamma}$$

ce qui montre que la distance (différence des abscisses) entre A_1 et A_2 est plus courte dans R que dans R' par un facteur $\frac{1}{\gamma}$. Supposons que les abscisses x'_1 et x'_2 soient constantes dans R' . Si A_1 et A_2 correspondent à une succession d'évènements simultanés (t variable) dans R , le quadrivecteur $A_1(t)A_2(t)$ est du genre espace et ses extrémités se déplacent dans R avec la vitesse u :

$$x_2 = ut + \frac{x'_2}{\gamma}$$

$$x_1 = ut + \frac{x'_1}{\gamma}$$

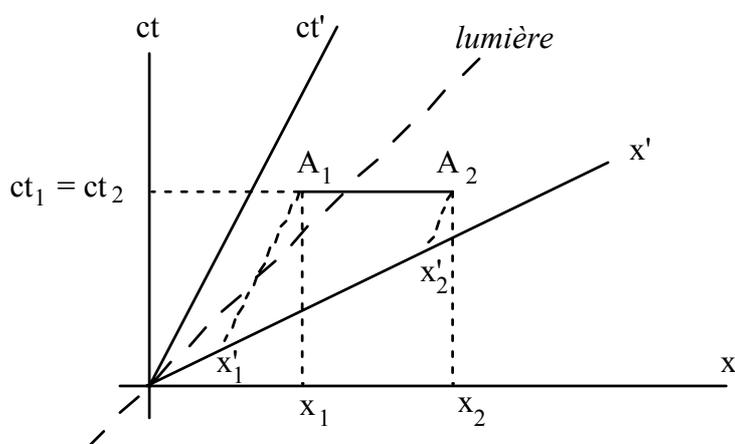


Figure II-9.

Les équations précédentes décrivent aussi le mouvement d'un objet rigide (règle) qui glisse parallèlement à lui-même le long de l'axe des x . $|x'_2 - x'_1|$ représente la longueur L' (différence des abscisses des extrémités) de cet objet dans le référentiel d'espace-temps R' . Dans R la longueur L' est divisée par γ à condition que les deux extrémités soient observées simultanément.

Une façon d'y parvenir est de disposer en A_1 et A_2 des miroirs qui réfléchissent simultanément des signaux lumineux émis à l'instant t_e , puis reçus non moins simultanément à t_r par un observateur Ω immobile dans R et qui ne peut faire cette mesure qu'une seule fois (figure II-10).

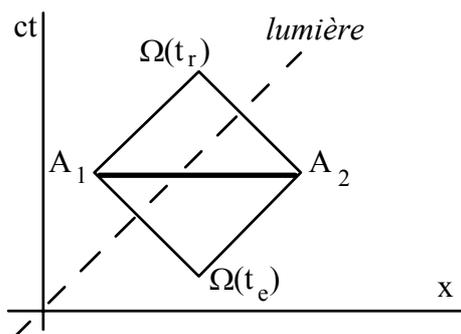


Figure II-10.

La contraction des longueurs, dite de Fitzgerald-Lorentz, fut introduite à l'origine (1892) comme une hypothèse "ad-hoc" pour expliquer le résultat négatif de l'expérience de Michelson et Morley (C.F. § 22). La longueur L dans R tend vers zéro lorsque u se rapproche de c par valeurs inférieures. On retrouve ici le rôle de limite que joue la vitesse de la lumière dans le vide.

10. Temps propre et privatisation du temps.

La ligne d'univers, succession des positions d'un objet dans l'espace temps, est une ligne droite en l'absence d'accélération, une ligne brisée ou courbe dans le cas contraire:

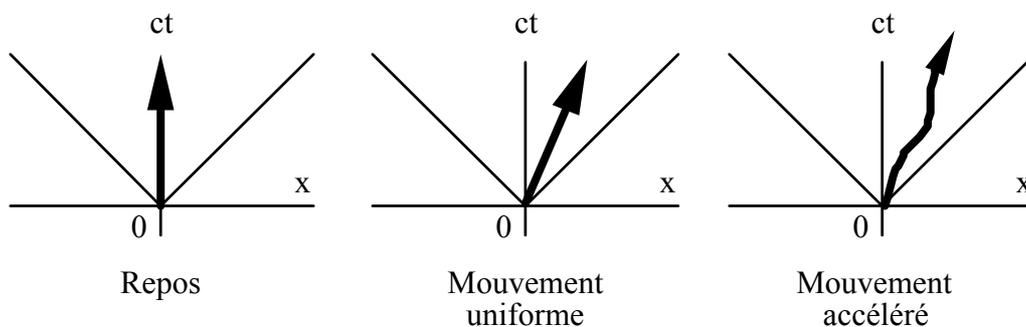


Figure II-11.

Considérons le déplacement élémentaire d'un objet matériel le long de sa ligne d'univers. Il correspond à ce déplacement, un quadrivecteur qui pointe vers l'avenir à l'intérieur du cône de lumière de son origine. Ce quadrivecteur est donc du genre temps. Sa norme invariante est

$$c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2 dt_0^2.$$

L'intervalle de temps élémentaire dt_0 est mesuré dans le référentiel R_0 où l'objet est au repos. Plus précisément, R_0 est le référentiel d'inertie tangent, à l'origine du quadrivecteur, au mouvement réel. On appelle dt_0 l'intervalle élémentaire de *temps*

propre. L'origine et l'extrémité du quadrivecteur représentent aussi bien deux événements ayant lieu au même endroit dans R_0 .

Dans le référentiel R par rapport auquel R_0 est en mouvement de translation uniforme, $dx^2+dy^2+dz^2$ est strictement positif: dt_0 est inférieur à dt (appelé souvent intervalle de temps impropre). On a

$$dt_0 < dt \quad \text{pour tout } R \text{ en mouvement par rapport à } R_0.$$

Pour préciser ce point, considérons un mouvement rectiligne et uniforme le long de l'axe des x à la vitesse u . Alors d'après l'invariance de la norme et utilisant la transformation de Lorentz:

$$(dt_0)^2 = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(dt)^2, \quad \text{ce qui entraîne} \quad \Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma}.$$

C'est l'effet de *ralentissement des horloges* qui a fait couler beaucoup d'encre.

L'intervalle de temps propre est associé à un arc élémentaire d'une ligne d'univers. Non seulement le temps n'est plus un absolu, mais il existe autant de temps propres que d'objets matériels se déplaçant dans l'espace temps. Ainsi, les lois de la relativité impliquent la **privatisation du temps**.

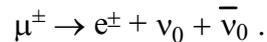
Dans l'espace-temps, deux lignes d'univers peuvent se rencontrer en plusieurs points. Il n'y a aucune raison en général pour que les intervalles de temps propre entre deux points de rencontre soient les mêmes le long de lignes d'univers différentes (telle est l'origine du célèbre paradoxe des jumeaux).

Une horloge est un dispositif de comptage de périodes sur un phénomène répétitif: mécanique (oscillations d'un diapason ou d'un pendule), électrique (oscillations d'un quartz), atomique (émission lumineuse) ou encore biologique (circulation du sang). Un intervalle de temps propre est mesuré en comptant un certain nombre de périodes dans le référentiel où l'horloge est au repos. Dans un référentiel où l'horloge est en mouvement, ce même nombre de périodes définit un intervalle de temps dont la transformation de Lorentz nous apprend qu'il est plus long par un facteur γ que l'intervalle de temps propre.

11. Un exemple de dilatation du temps

La dilatation du temps par changement de référentiel est un phénomène bien établi expérimentalement depuis 1941 (B. Rossi & D.B. Hall, *Phys. Rev.* **59**-1941-223), à

partir de la mesure, au laboratoire et dans le rayonnement cosmique, des temps de décroissance de particules transitoires, les muons (μ). Ces particules (électrons lourds) se désintègrent en un électron de même charge que le muon, un neutrino mésique et un anti neutrino:



Lorsque les mesures sont effectuées au laboratoire où les μ ont une vitesse négligeable devant c , on note que la moitié de la population initiale a disparu au bout d'un temps $\tau_0 = 2.20 \cdot 10^{-6}$ s. appelé *demi-vie*.

Les muons du rayonnement cosmique résultent de l'interaction de protons de haute énergie avec l'atmosphère terrestre. Ils sont créés à une soixantaine de kilomètre d'altitude et ont une vitesse proche de celle de la lumière. A cette vitesse, la demi-vie permet de parcourir une distance de

$$2.20 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^8 = 660 \text{ m}$$

soit environ le centième de l'altitude de création des μ . Au sol, il ne devrait rester qu'une fraction $\frac{1}{2^{100}}$, parfaitement négligeable de la population initiale. Dans la réalité, le rapport, déduit de mesures effectuées vers 60 km d'altitude et au sol, est de $\frac{1}{8}$ soit $\frac{1}{2^3}$.

Dans un référentiel lié à la terre la demi-vie est ainsi

$$\tau_T = \frac{h}{3c} - \frac{1}{3} \frac{6 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^8} = 6.6 \cdot 10^{-5} \text{ S.} = 30 \tau_0 .$$

On en déduit le rapport de la vitesse des muons cosmiques à la vitesse de la lumière

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau_T}\right)^2} = 0.9994 .$$

On fait au laboratoire le même type d'expériences sur des mésons π (appelés aussi pions) produits lors d'impacts de faisceaux de protons de haute énergie sur des cibles. La demi-vie des pions est de $1.8 \cdot 10^{-8}$ s. permettant d'effectuer des mesures significatives sur quelques dizaines de mètres seulement (R.P. Durbin, H.H. Loar and W.W. Havens, *Phys. Rev.* **88**-1952-179). Ces particules étant créées avec une vitesse proche de c , il en disparaîtrait la moitié au bout de 5.4 m. sans l'effet de dilatation du temps. On constate que les faisceaux de pions très énergiques peuvent se propager sans beaucoup de pertes sur des distances assez grandes (circonstance heureuse pour les physiciens des hautes énergies!). Ainsi au laboratoire Fermi près de

Chicago, le facteur de Lorentz γ des pions étant d'environ 200, la distance au bout de laquelle la moitié d'entre eux disparaît est portée à près de 11 km.

III

Transformation des vitesses

La transformation de Lorentz entraîne de profondes modifications des règles de cinématique: composition des vitesses, transformation des accélérations.

12. Règle de composition des vitesses.

Soit un objet animé d'une vitesse \mathbf{v} (v_x, v_y, v_z) dans le référentiel R. Il a dans R' une vitesse \mathbf{v}' (v'_x, v'_y, v'_z) dont nous allons calculer les composantes. On passe des coordonnées dans R à celles dans R' au moyen de la transformation de Lorentz:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - \beta ct) \\y' &= y \\z' &= z \\ct' &= \gamma(-\beta x + ct)\end{aligned}$$

Une composante de la vitesse est la dérivée de la coordonnée correspondante par rapport au temps. Dans R:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Pour obtenir dans R', les composantes de la vitesse en fonction de v_x, v_y, v_z et c , on différencie d'abord la transformation de Lorentz:

$$\begin{aligned}dx' &= \gamma(dx - \beta cdt) \\dy' &= dy \\dz' &= dz \\cdt' &= \gamma(-\beta dx + cdt).\end{aligned}$$

D'où en divisant chacune des trois premières équations précédentes, membre à membre, par la dernière

$$\frac{v'_{x'}}{c} = \frac{dx'}{cdt'} = \frac{dx - \beta cdt}{-\beta dx + cdt} = \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{-\beta \frac{dx}{dt} + c}$$

$$\frac{v'_{y'}}{c} = \frac{dy'}{cdt'} = \frac{dy}{\gamma(-\beta dx + cdt)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma(-\beta \frac{dx}{dt} + c)}$$

$$\frac{v'_{z'}}{c} = \frac{dz'}{cdt'} = \frac{dz}{\gamma(-\beta dx + cdt)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma(-\beta \frac{dx}{dt} + c)}$$

puis en réarrangeant,

$$(12-1) \quad \begin{aligned} v'_{x'} &= \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \\ v'_{y'} &= \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}, \\ v'_{z'} &= \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}. \end{aligned}$$

Pour la transformation inverse, on peut partir de la transformation inverse de Lorentz et faire le même type de calcul. On peut aussi procéder à partir des formules précédentes. On obtient ainsi directement, en vertu de la démocratie des référentiels d'inertie et après changement de u en $-u$:

$$(12-2) \quad \begin{aligned} v_x &= \frac{v'_{x'} + u}{1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}}, \\ v_y &= \frac{v'_{y'}}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)}, \\ v_z &= \frac{v'_{z'}}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)}. \end{aligned}$$

Il est clair que la transformation obtenue pour les vitesses **n'est pas** celle de Lorentz.

13. Relations entre facteurs de Lorentz.

Dans R' , le carré du module du vecteur vitesse v' est:

$$|\mathbf{v}'|^2 = v'^2_{x'} + v'^2_{y'} + v'^2_{z'} = \frac{1}{\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2} \left[(v_x - u)^2 + \frac{v_y^2 + v_z^2}{\gamma^2} \right].$$

Or, utilisant l'identité:

$$\frac{u^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} = 1$$

on calcule:

$$(v_x - u)^2 = v_x^2 + u^2 - 2uv_x = \frac{v_x^2}{\gamma^2} + \frac{v_x^2 u^2}{c^2} + u^2 - 2uv_x = \frac{v_x^2 - c^2}{\gamma^2} + c^2 \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2 .$$

Il vient alors:

$$v'^2 = \frac{v^2 - c^2}{\gamma^2 \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2} + c^2 = c^2 \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2} \right] .$$

Cette relation se met sous une forme plus symétrique:

$$(13-1) \quad 1 - \frac{v'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)^2} .$$

C'est aussi, sous forme compacte:

$$(13-2) \quad \gamma_{v'} = \gamma_u \gamma_v \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)$$

avec :

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \gamma_{v'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} .$$

On associe de la sorte un facteur de Lorentz γ à chacune des vitesses intervenant dans la loi de composition. Inversement:

$$(13-3) \quad \gamma_v = \gamma_u \gamma_{v'} \left(1 + \frac{uv'_x}{c^2}\right) .$$

En remarquant que uv_x et uv'_x sont les produits scalaires $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ et $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$ respectivement, on écrit les relations suivantes, indépendantes des directions des vitesses,

$$\gamma_{v'} = \gamma_u \gamma_v \left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right),$$

$$\gamma_v = \gamma_u \gamma_{v'} \left(1 + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'}{c^2}\right).$$

Les formules de transformation des vitesses n'impliquent aucune hypothèse particulière sur les vitesses v et v' . Mais, en établissant la relation (13-2) entre facteurs de Lorentz, nous avons au passage trouvé l'égalité (13-1). Notant que pour les déplacements de référentiels d'inertie on a toujours $u < c$, il en résulte que $1 - \frac{v'^2}{c^2}$ a toujours le signe de $1 - \frac{v^2}{c^2}$, ce qui entraîne les effets suivants:

- i) Un objet matériel (massif) se déplace dans R avec une vitesse $v < c$. Sa vitesse v' dans tout autre référentiel R' est donc également inférieure à c .
- ii) Il existe des vitesses de phase ou de balayage qui ne sont pas liées au déplacement d'un objet massif. Si une telle vitesse est supérieure à c dans un certain référentiel d'inertie (ce que rien n'interdit) il en sera de même dans tous les autres.
- iii) Enfin, pour un signal lumineux émis par exemple dans R ($v = c$), la loi de composition des vitesses entraîne automatiquement que dans tout autre référentiel R' , $v' = c$, résultat attendu puisque la transformation de Lorentz découle précisément de l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel d'inertie.

14. Quadrivitesse.

Revenons à (13-3). Éliminant $1 + \frac{uv'_x}{c^2}$ entre cette relation et l'expression, obtenue en (13-2), de v_x en fonction de v'_x , on trouve lorsque la vitesse v est inférieure à c :

$$\gamma_v v_x = \gamma_u (\gamma_{v'} v'_x + \beta_u \gamma_{v'} c).$$

D'autre part :

$$\gamma_v c = \gamma_u (\beta_u \gamma_{v'} v'_x + \gamma_{v'} c).$$

Ainsi, $\gamma_v \mathbf{v}$ et $\gamma_v c$ obéissent à la transformation de Lorentz. Elles forment un quadrivecteur (quadrivitesse) de norme invariante :

$$\gamma_v^2 c^2 - \gamma_v^2 v^2 = c^2.$$

En mécanique non relativiste la vitesse est un vecteur dont les trois composantes sont obtenues par dérivation des coordonnées par rapport au temps

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{avec} \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

où \mathbf{v} , \mathbf{r} et t sont mesurés dans le même référentiel d'espace-temps R . Pour les composantes de la quadrivitesse, t_0 étant le temps propre,

$$\begin{aligned}v^1 &= \gamma_v v_x = \gamma_v \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt_0}, \\v^2 &= \gamma_v v_y = \gamma_v \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt_0}, \\v^3 &= \gamma_v v_z = \gamma_v \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt_0}, \\v^0 &= \gamma_v c = \gamma_v \frac{dct}{dt} = \frac{dct}{dt_0}.\end{aligned}$$

Ainsi la quadrivitesse généralise la vitesse de la mécanique non relativiste: elle a pour composantes les dérivées, par rapport au temps propre, des composantes du quadrivecteur position dans l'espace-temps.

15. Accélération.

On peut définir dans la foulée une quadri-accélération au moyen d'une dérivation supplémentaire

$$\begin{aligned}a^1 &= \frac{dv^1}{dt_0}, \\a^2 &= \frac{dv^2}{dt_0}, \\a^3 &= \frac{dv^3}{dt_0}, \\a^0 &= \frac{dv^0}{dt_0},\end{aligned}$$

avec la propriété, déduite de la relation d'invariance de la quadrivitesse,

$$a^0 v^0 - (a^1 v^1 + a^2 v^2 + a^3 v^3) = 0,$$

ce qui est aussi la «relation d'orthogonalité»

$$a^\mu v_\mu = 0.$$

Mais revenons aux relations de transformation (12-2). Il vient en les différenciant

$$\begin{aligned}dv_x &= \frac{dv'_{x'}}{1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}} - \frac{v'_{x'} + u}{\left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^2} \frac{u dv'_{x'}}{c^2} = \frac{dv'_{x'}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^2}, \\dv_{y/z} &= \frac{dv'_{y'/z'}}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)} - \frac{v'_{y'/z'}}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^2} \frac{u dv'_{x'}}{c^2},\end{aligned}$$

ce qui permet de calculer les relations entre les accélérations par

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^2} \frac{dv'_{x'}}{dt'} \frac{dt'}{dt},$$

$$\frac{dv_{y/z}}{dt} = \left[\frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)} \frac{dv'_{y'/z'}}{dt'} - \frac{v'_{y'/z'}}{\gamma \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^2} \frac{u}{c^2} \frac{dv'_{x'}}{dt'} \right] \frac{dt'}{dt}.$$

Or, $c dt = \gamma (\beta dx' + c dt')$ entraîne

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{u v'_{x'}}{c^2}\right)},$$

d'où finalement les formules cherchées

$$(15-1) \quad a_x = \frac{1}{\gamma^3 \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^3} a'_{x'},$$

$$a_{y/z} = \frac{a'_{y'/z'}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^2} - \frac{uv'_{y'/z'}}{c^2} \frac{a'_{x'}}{\gamma^2 \left(1 + \frac{uv'_{x'}}{c^2}\right)^3}.$$

Rappelons qu'elles s'appliquent uniquement lorsque les mouvements des référentiels sont de translation uniforme.

Si l'on considère à un instant donné, dans le référentiel propre R_0 d'un objet en mouvement les deux composantes de l'accélération, l'une $a_{//0}$ parallèle à la direction de la vitesse, l'autre $a_{\perp 0}$ qui lui est orthogonale, les composantes de l'accélération dans un référentiel galiléen quelconque sont en toute généralité

$$(15-2) \quad a_{//} = \frac{1}{\gamma^3} a_{//0},$$

$$a_{\perp} = \frac{a_{\perp 0}}{\gamma^2}.$$

16. L'expérience de Fizeau.

La loi de composition des vitesses, telle qu'elle résulte de l'application de la transformation de Lorentz aux changements de référentiels d'inertie, avait fait l'objet d'une vérification avant la lettre dans une expérience célèbre effectuée par H.L. Fizeau en 1850 (*C.R. Acad. Sciences Paris*, **XXXIII**-1851, p. 349). Il s'agissait de mesurer

l'entraînement des ondes lumineuses dans un milieu transparent dont l'indice de réfraction est:

$$\eta = \frac{c}{v_\phi}$$

où v_ϕ est la vitesse de phase des ondes lumineuses.

Si ce milieu est animé d'une vitesse algébrique u dans la direction de propagation des ondes, la vitesse de phase de celles-ci dans un référentiel fixe est d'après la loi de composition des vitesses relativiste:

$$v_{//} = \frac{v_\phi + u}{1 + \frac{uv_\phi}{c^2}} = (v_\phi + u) \left(1 - \frac{uv_\phi}{c^2}\right) \text{ lorsque } \frac{u}{c} \ll 1.$$

A l'ordre le plus bas en $\frac{u}{c}$:

$$\frac{v_{//}}{c} = \left(\frac{v_\phi}{c} + \frac{u}{c}\right) \left(1 - \frac{uv_\phi}{c^2}\right) = \frac{v_\phi}{c} + \frac{u}{c} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right).$$

Un montage interférométrique permet de mettre en évidence la différence entre les deux vitesses $v_{//}$ et $v_{a//}$ correspondant à des valeurs de u opposées. Dans sa version traditionnelle, l'expérience utilise un double courant d'eau obtenu par circulation dans un tube en U.

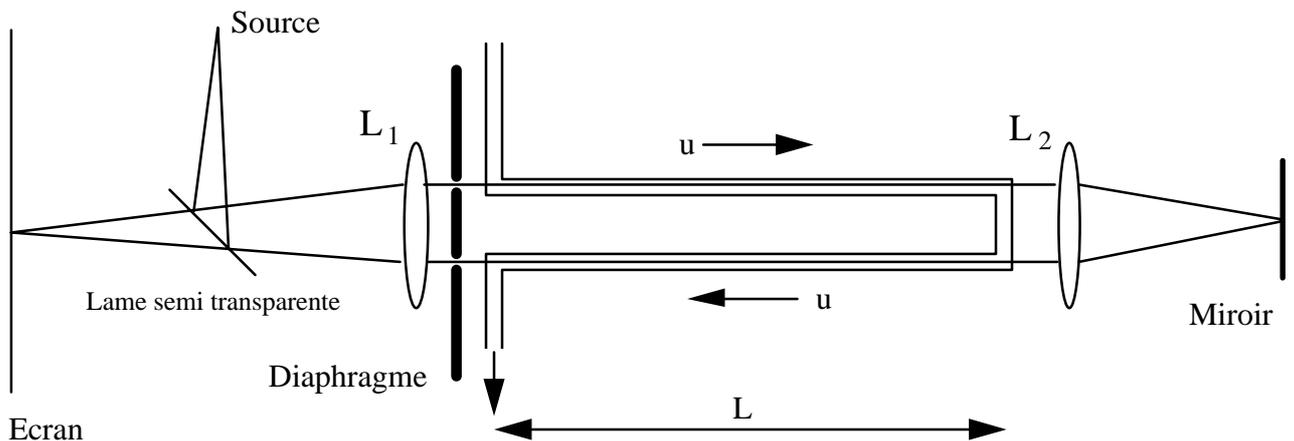


Figure III-1.
Montage originel de l'expérience de Fizeau.

Deux pinceaux lumineux issus d'une même source, parcourent le dispositif en sens inverse, chacun voyageant dans l'eau sur une longueur $2L$, et après passage par deux trous de petites dimensions, viennent interférer au voisinage du foyer de la lentille L_1 : la

position des franges sur l'écran est différente selon que l'eau est immobile, ou circule avec la vitesse u .

Dans ce dernier cas, un déphasage résulte de la différence entre les temps de parcours:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{2L}{v_{//}} - \frac{2L}{v_{a//}} = 2L \left[\frac{1}{v_{\phi} + u \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right)} - \frac{1}{v_{\phi} - u \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right)} \right] \\ &= 2L \frac{-2u \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right)}{v_{\phi}^2 - u^2 \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right)^2} = \frac{4Lu}{v_{\phi}^2} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right). \end{aligned}$$

Dans le montage originel de Fizeau, les interférences se produisent au voisinage du foyer d'une lentille selon le schéma suivant:

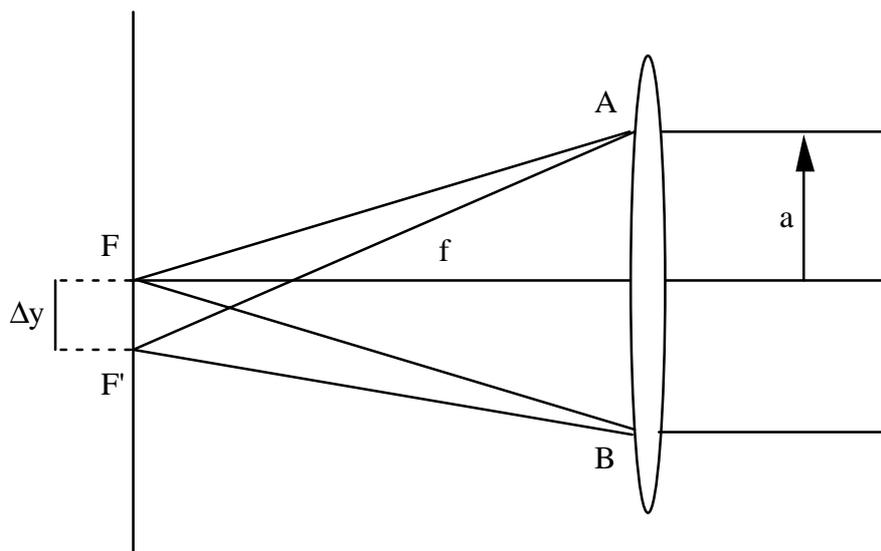


Figure III-2.

Déplacement des franges d'interférence dans l'expérience de Fizeau.

La frange centrale se déplace d'une quantité Δy telle que la différence de marche entre les rayons AF' et BF' compense exactement le déphasage induit par le mouvement de l'eau:

$$\sqrt{f^2 + (a + \Delta y)^2} - \sqrt{f^2 + (a - \Delta y)^2} = c \Delta t.$$

Δy étant petit, on développe au 1er ordre:

$$\sqrt{f^2 + a^2} \left[\sqrt{1 + \frac{2a\Delta y}{f^2 + a^2}} - \sqrt{1 - \frac{2a\Delta y}{f^2 + a^2}} \right] - \frac{2a\Delta y}{\sqrt{f^2 + a^2}} = c \Delta t.$$

On trouve ainsi un déplacement proportionnel à u :

$$\Delta y = 2 \frac{cu}{v_{\varphi}^2} L \sqrt{1 + \frac{f^2}{a^2} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right)}.$$

L'expérience montre que le déplacement des franges est bien conforme à cette formule.

Une version moderne de l'expérience de Fizeau fait appel à un laser en anneau et au lieu d'interférences, on observe le spectre de l'émission laser. Dans un tel dispositif, un mode de pulsation ω appartenant à la raie d'émission est amplifié si la distance finie parcourue par la lumière à chaque tour contient un nombre entier de fois la longueur d'onde λ correspondante. Ainsi λ ou le nombre d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ sont imposés.

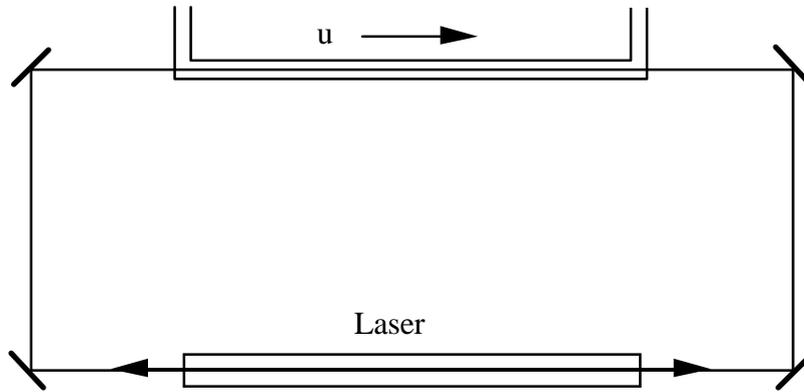


Figure III-3.
Version moderne de l'expérience de Fizeau.

Dans la partie du trajet optique traversant le liquide immobile

$$\frac{\omega}{k} = v_{\varphi} = \frac{c}{\eta}.$$

En présence de l'écoulement de vitesse $u \ll c$, la pulsation est

$$\omega_{//} = kv_{//} = k \left[v_{\varphi} + \frac{u}{c} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) \right],$$

pour les ondes lumineuses de même sens que l'écoulement et

$$\omega_{a//} = kv_{a//} = k \left[v_{\varphi} - \frac{u}{c} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) \right],$$

pour les ondes de sens contraire. Deux modes sont ainsi amplifiés dont l'écart en fréquence est

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{ku}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right),$$

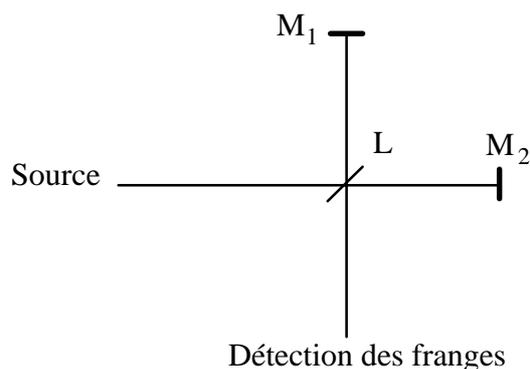
proportionnel à la vitesse u .

La sensibilité de ces techniques a permis d'étendre l'expérience à des jets de gaz ou à des solides en mouvement (W.M. Macek, J.R. Schneider and R.M. Salamon, *J. of Appl. Phys.*, **35**-1964-2556).

17. Cent ans de tables tournantes: l'expérience de Michelson-Morley.

La grande majorité des observations et des expériences décrites au chapitre premier, sont largement postérieures à la publication par Einstein de la théorie de la relativité restreinte. Sur quoi étaient donc basées les réflexions des physiciens de la charnière entre le XIX^{ème} et le XX^{ème} siècle? Ils avaient eu deux sujets de méditation: l'incompatibilité apparente entre les équations de Maxwell et les principes de la mécanique d'une part, et d'autre part les résultats désespérément négatifs d'une expérience de composition des vitesses impliquant la lumière. Cette expérience réalisée pour la première fois par Michelson et Morley en 1887 après une première tentative du seul Michelson en 1881, puis répétée de nombreuses fois, a une grande importance historique.

L'idée était de mettre en évidence la composition de la vitesse des ondes lumineuses ($3 \cdot 10^5$ km/s.) et de celle (déjà respectable de 30 km/s) du mouvement de révolution de la Terre autour du Soleil. Pour cela il fallait comparer les temps que la lumière met pour parcourir des longueurs égales dans deux directions: l'une parallèle à celle du mouvement et l'autre, orthogonale à celui-ci. L'interféromètre de Michelson est bien adapté à cette entreprise. Le faisceau lumineux émis par une source est séparé, au moyen d'une lame L, en deux faisceaux orthogonaux qui après réflexion sur deux miroirs M_1 et M_2 reviennent sur la lame qui reconstitue un faisceau unique. Un léger déplacement angulaire de l'un des miroirs conduit les deux faisceaux, recombinaison après le deuxième passage par L, à donner naissance à des interférences. Les deux bras LM_1 et LM_2 sont d'égale longueur.



Direction du mouvement de l'appareil →

Figure III-4.

Schéma de principe de l'expérience de Michelson-Morley.

Il résulte de l'invariance de la vitesse de la lumière par changement de référentiel, que pour tout mouvement de l'interféromètre, et quelle que soit l'orientation des bras, le trajet aller et retour suivant LM_1 ou LM_2 prend exactement le même temps. La figure d'interférence n'est pas affectée par le mouvement ni par l'orientation de l'appareil.

Effectuant l'expérience à midi ou à minuit, ce qui permet d'avoir un des bras parallèle au mouvement orbital de la Terre, on fait tourner le support afin de mettre alternativement le bras LM_1 puis le bras LM_2 dans le sens de ce mouvement.

Cette expérience a été souvent répétée depuis 1887, avec diverses améliorations pour en accroître la sensibilité (C.F. la revue de R.S. Shankland, S.W. McCuskey, F.C. Leone & G. Kuerti, *Rev. Mod. Phys.* **27**-1955-167). Depuis 1963, on utilise des masers (T.S. Jaseja, A. Javan, J. Murray, and C. Townes, *Phys. Rev.* **133**-1964-A1221) ou des lasers (A. Brillet & J.L. Hall, *Phys. Rev. Lett.* **42** —1978— 549): disposant de deux sources identiques, on en place une le long de chaque bras et on cherche à mettre en évidence des écarts en fréquence.

Aucun effet attribuable au mouvement orbital de la Terre, encore moins au mouvement du système solaire par rapport au bruit de fond cosmique (400 km/s), n'a pu être observé en cent ans d'expériences à la Michelson-Morley.

IV

Optique

18. Le quadrivecteur fréquence-vecteur d'onde.

Il est courant de représenter la lumière sous la forme idéalisée d'une onde plane monochromatique. La phase de cette onde plane est une grandeur sans dimensions invariante par changement de référentiel. Elle est en effet "mesurée" par 2π fois le nombre de périodes qui ont défilé devant un observateur à partir d'un instant zéro. Cette simple opération de comptage ne dépend pas du référentiel où elle a lieu. Etant donnés les deux référentiels R et R' , l'invariance de la phase se traduit par les égalités.

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}' = \phi = \text{cte.}$$

Admettons que R' ait par rapport à R un mouvement de translation uniforme de vitesse u suivant Ox . Choisissons une direction de propagation des ondes (\mathbf{k}) parallèle à l'axe des x commun aux deux référentiels. Dans ces conditions :

$$\phi = \omega t - kx = \omega' t' - k' x'$$

La transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma(-\beta x + ct) \end{aligned}$$

permet la substitution :

$$\omega t - kx = \omega' \frac{\gamma}{c} (-\beta x + ct) - k' \gamma (x - \beta ct) = \gamma (\omega' + \beta ck') t - \gamma \left(\frac{\omega'}{c} \beta + k' \right) x .$$

En identifiant terme à terme il vient :

$$\begin{aligned} ck &= \gamma (ck' + \beta \omega') \\ \omega &= \gamma (\beta ck' + \omega') \end{aligned}$$

ce qui montre que $c\mathbf{k}$ et ω obéissent à la transformation de Lorentz et forment un quadrivecteur. Ce résultat est indépendant de la nature de l'onde. Il entraîne

$$\frac{\omega}{ck} = \frac{\omega' + \beta ck'}{ck' + \beta \omega'}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\frac{\omega'}{k'} + u}{1 + \frac{u}{c^2} \frac{\omega'}{k'}}$$

La vitesse de phase se transforme par la règle relativiste de composition des vitesses.

Dans le cas de la propagation d'une onde électromagnétique, les champs électrique et magnétique obéissent aux équations de Maxwell. Ecrivons parmi celles-ci les deux qui nous sont immédiatement utiles

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

et qui se combinent pour donner naissance à l'équation de propagation

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + c^2 \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}) + \mu_0 c^2 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \nabla^2 \mathbf{E} + c^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mu_0 c^2 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0.$$

Dans le vide ($\mathbf{j} = 0$), et pour un champ transverse ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$) sinusoïdal $\mathbf{E} = e^{i\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, l'équation de propagation se réduit à

$$(-\omega^2 + c^2 k^2) \mathbf{E} = 0.$$

La condition pour éviter la solution triviale fournit

$$\omega^2 - c^2 k^2 = 0,$$

relation de dispersion qui montre en même temps que la norme invariante est nulle: quadrivecteur du genre lumière.

19. Effets Doppler longitudinal et transversal.

Soit maintenant une onde électromagnétique plane qui se propage dans une direction faisant un angle θ avec celle de l'axe des x:

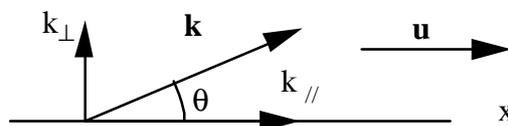


Figure IV-1.

Le vecteur d'onde \mathbf{k} , suivant Ox, a une composante: $k_{//} = k \cos \theta$, et dans le sens transversal: $k_{\perp} = k \sin \theta$.

La phase invariante est

$$\phi = \omega t - k_{//}x - k_{\perp}y = \omega' t' - k'_{//}x' - k'_{\perp}y'.$$

La transformation de Lorentz pour le quadrivecteur \mathbf{x}, ct permet d'obtenir celle qui concerne \mathbf{k}, ω sous la forme :

$$\begin{aligned} c k'_{//} &= \gamma (c k_{//} - \beta \omega) \\ \omega' &= \gamma (-\beta c k_{//} + \omega). \end{aligned}$$

Cette dernière équation est aussi :

$$(19-1) \quad \omega' = \gamma (\omega - \beta c k \cos \theta) = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta)$$

puisque dans le vide $\omega = ck$. On a ainsi obtenu la formule de l'effet Doppler relativiste qui diffère de celle de l'effet Doppler ordinaire par le facteur γ .

Il est remarquable de constater que pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, il existe, grâce à ce même facteur, un effet du second ordre en $\frac{u}{c}$: **effet Doppler transversal**.

L'**effet Doppler longitudinal** correspond à $\theta = 0$. On trouve alors :

$$(19-2) \quad \omega' = \gamma \omega (1 - \beta) = \omega \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}.$$

20. Effet Doppler et dilatation du temps.

Une autre façon d'obtenir la relation (24-2) consiste à examiner l'émission lumineuse d'une horloge atomique (standard de fréquence très précis) en mouvement: une telle horloge émet des ondes de période nominale T_0 (celle des tables) mesurée dans le référentiel où cette source est au repos.

Lorsque l'horloge est transportée jusqu'en x_0 à la vitesse u , le temps propre écoulé s'exprime en fonction de T_0 par

On a bien retrouvé la formule de l'effet Doppler longitudinal.

Imaginons que la source revienne vers l'origine à partir de x_0 toujours à la même vitesse u . L'origine est atteinte au temps $t_A=2t_0$ dans R et:

$$c(t_A - t_S) = \gamma(1 - \beta) ct'_0.$$

Pendant ce temps, on a reçu dans R le même nombre n de périodes avec la pulsation apparente:

$$\Omega = \frac{2\pi n}{t_A - t_S} = \frac{\omega_0}{\gamma(1 - \beta)} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Entre le départ et l'arrivée de l'horloge, l'observateur a compté dans R le nombre exact de périodes: $2n$, émises dans les référentiels R' où l'horloge est au repos. Ceci constitue une "mesure" à distance de l'intervalle de temps propre de la source entre le départ et l'arrivée (croisement des deux lignes d'univers). Supposons qu'une source identique soit restée au repos dans R . Elle a émis, pendant l'intervalle de temps t_A , un nombre de périodes $2n_A$ tel que:

$$2n_A = \frac{\omega_0 t_A}{2\pi} = \frac{\omega_0 t_0}{\pi} = \frac{\gamma \omega_0 t'_0}{\pi} = 2\gamma n.$$

Cet exemple montre l'étroite parenté entre l'effet Doppler relativiste et la dilatation du temps.

21. L'aberration des étoiles.

Lors d'un changement de référentiel d'inertie, la règle de composition des vitesses laisse naturellement invariante la vitesse c de la lumière dans le vide. Mais, la direction de propagation de la lumière est différente dans différents référentiels d'inertie. Pour préciser cet effet, prenons de la lumière dont la direction de propagation, dans le plan xOy du référentiel R , fait un angle $\theta+\pi$ avec l'axe des x .

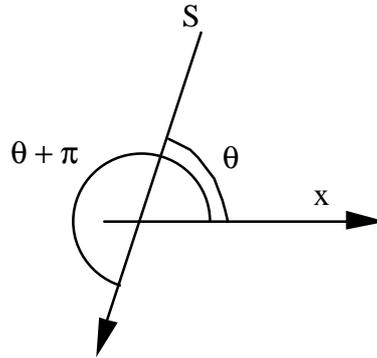


Figure IV-3.

Dans un référentiel R' en mouvement de translation uniforme avec la vitesse u suivant Ox , la direction de propagation fait, avec cet axe, l'angle $\theta'+\pi$. Les composantes de la vitesse de cette lumière dans R sont

$$v_x = -c \cos\theta$$

$$v_y = -c \sin\theta.$$

Dans R' , on a

$$v'_x = -c \cos\theta' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} = c \frac{-\cos\theta - \beta}{1 + \beta \cos\theta}$$

$$v'_\perp = -c \sin\theta' = \frac{v_\perp}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} = c \frac{-\sin\theta}{\gamma(1 + \beta \cos\theta)}.$$

d'où la relation entre les angles θ' et θ

$$(21-1) \quad \text{tg}\theta' = \frac{v'_\perp}{v'_x} = \frac{\sin\theta}{\gamma(\beta + \cos\theta)}.$$

Cette formule s'applique à l'observation des étoiles. Ces astres sont situés très au delà du système solaire. Sources lumineuses lointaines, auxquelles on attribue une quasi immobilité, ils envoient vers nous du rayonnement dont la direction d'émission apparaît modifiée par le mouvement orbital de la Terre. θ' est l'angle de visée et soit

$$\alpha = \theta - \theta'$$

l'écart angulaire que l'ordre de grandeur de la vitesse de déplacement de la Terre ($3 \cdot 10^4$ m/s, $\frac{u}{c} \sim 10^{-4}$) nous autorise à considérer comme petit. Alors

$$\text{tg}\theta' = \frac{\sin\theta - \alpha \cos\theta}{\cos\theta + \alpha \sin\theta}$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \frac{\sin\theta [\beta\gamma + (\gamma-1)\cos\theta]}{1 + \beta\gamma \cos\theta + (\gamma-1)\cos^2\theta} - \frac{\beta\gamma \sin\theta}{1 + \beta\gamma \cos\theta},$$

le terme $(\gamma-1)$ étant d'ordre 2 en β . Dans la limite des β très faibles

$$\alpha \sim \beta\gamma \sin\theta \sim \beta \sin\theta.$$

Lorsqu'à partir de la Terre, on pointe une étoile au moyen d'un télescope, l'angle de visée fait avec la direction réelle, un écart α proportionnel à la vitesse orbitale autour du Soleil.

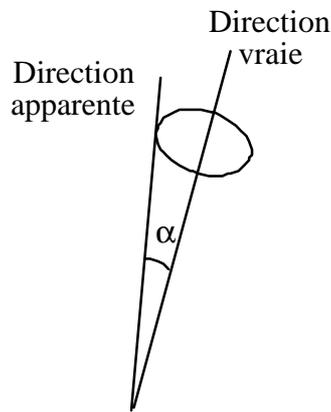


Figure IV-4.

Au cours de l'année, α (qui d'après la formule précédente peut atteindre 20 secondes d'arc ce qui est parfaitement mesurable) reste constant mais la direction du mouvement orbital fait un tour complet. Il en va de même de l'orientation du télescope autour de la direction réelle de l'astre. Ce phénomène appelé aberration des étoiles "fixes" a été découvert par Bradley en 1727 et n'avait pas reçu d'explication satisfaisante avant l'apparition de la théorie de la relativité.

27. Effets du mouvement de la source sur la direction de la lumière émise et sur l'apparence des objets.

Reprenons le problème du § précédent: une source au repos dans le référentiel R émet de la lumière dont la direction de propagation dans le plan xOy , fait un angle $\theta+\pi$ avec l'axe des x . Pour un observateur au repos dans un référentiel R' en mouvement de translation uniforme par rapport à R avec la vitesse u suivant Ox , la direction de propagation fait avec cet axe, l'angle $\theta'+\pi$. Nous avons établi la formule (26-1) qui relie les angles θ et θ'

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{v'_{\perp}}{v'_{x}} = \frac{\sin \theta}{\gamma(\beta + \cos \theta)}.$$

Cette relation montre que θ' est toujours inférieur à θ . En effet si par exemple $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} \theta' = \frac{1}{\beta\gamma}$, valeur finie et petite si γ est grand. De même $\operatorname{tg} \theta'$ diverge ($\theta' = \frac{\pi}{2}$) lorsque $\cos \theta = -\beta$.

Beaucoup de sources émettent uniquement dans un demi espace: $-\frac{\pi}{2} < (\pi - \theta) < \frac{\pi}{2}$. Un tel objet présente pour l'observateur en mouvement vers la source, un lobe d'émission plus resserré dont le demi angle d'ouverture au sommet est $\operatorname{Arctg}(\frac{1}{\beta\gamma})$ ($\sim \frac{1}{\beta\gamma}$ aux plus grandes vitesses). L'effet est le même pour un observateur fixe, par rapport auquel une source se déplace à grande vitesse.

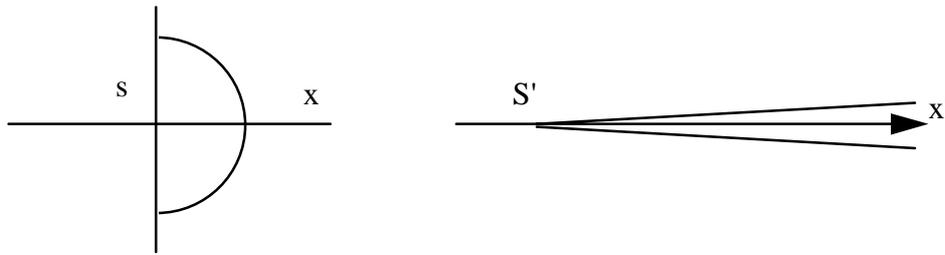


Figure IV-5.

A partir de la relation (26-1), on montre que, contrairement à une image naïve (mais fort répandue) la contraction de Fitzgerald-Lorentz ne se manifeste pas visuellement par une réduction des longueurs dans le seul sens du mouvement. La forme et les proportions du contour d'un objet en déplacement rapide ne sont pas modifiés pour un observateur fixe, mais l'angle solide sous lequel est vu cet objet a diminué (J. Terrel, *Physical Review*, **116** —1959— 1041).

Comparons en effet les éléments d'angle solide à un instant donné tel que les origines de R et R' coïncident au point d'observation. En coordonnées sphériques on a les schémas de la figure IV-6.

Les angles φ et φ' ne sont pas affectés par le mouvement: $\varphi = \varphi'$. Mais

$$\begin{aligned} d\Omega &= R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi / R^2 = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ d\Omega' &= \sin \theta' \, d\theta' \, d\varphi' \end{aligned}$$

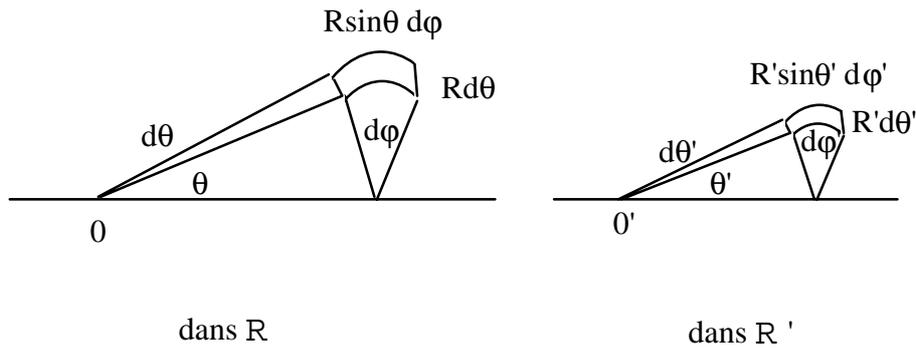


Figure IV-6.

Or, dérivant la relation donnant $\cos\theta'$ en fonction de θ , il vient :

$$\sin\theta' d\theta' = \frac{\sin\theta d\theta}{1 + \beta \cos\theta} - \frac{\beta (\beta + \cos\theta) \sin\theta d\theta}{(1 + \beta \cos\theta)^2} = \frac{\sin\theta d\theta}{\gamma^2 (1 + \beta \cos\theta)^2} = \frac{\sin^2\theta' d\theta}{\sin\theta}$$

Finalement on obtient:

$$\frac{d\theta}{d\theta'} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'}$$

Il en résulte que les arcs de longueur $R'd\theta'$ et $R'\sin\theta'd\phi'$ varient dans les mêmes proportions. Ainsi pour un voyageur spatial dont la fusée se déplace à une vitesse proche de c , les constellations gardent leur apparence mais à l'intérieur d'un angle solide différent. Elles semblent s'accumuler autour du point visé par la direction du mouvement.

S'agissant d'objets étendus proches en mouvement rapide, le problème est en général plus compliqué. Par exemple, un cube sera toujours vu comme un cube, mais sous différents angles selon la vitesse relative entre l'observateur et cet objet.

Autre exemple: dans les mêmes conditions, une sphère sera toujours vue avec un contour circulaire, quel que soit l'angle de visée. Le diamètre apparent subira cependant une réduction par un facteur

$$\frac{1}{\gamma^2 (1 + \beta \cos\theta)^2},$$

tandis que les méridiens et les parallèles tracés sur la surface apparaîtront déformés.

Masse et Energie

Les lois de la mécanique non relativiste expriment des principes de conservation. En particulier la relation fondamentale de la dynamique tire son origine d'un fait expérimental: pour un système isolé de toute influence extérieure, la somme (vectorielle) des produits des masses des différents objets du système par leurs vitesses, est une constante. Ce produit de la masse par la vitesse est appelé impulsion ou quantité de mouvement.

Dans le passage à la mécanique relativiste, on va garder le principe de la conservation de l'impulsion pour un système isolé ainsi que la définition de la force qui en découle: on appelle force tout ce qui, appliqué à un objet matériel, modifie son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme (Newton). Il n'y a pas de raison particulière d'abandonner ce principe qui, de plus, doit être vérifié dans la limite des vitesses petites devant c . L'ensemble des conséquences obtenues et leur accord avec l'expérience justifient ce point de vue.

23. Les variations de la masse inerte.

Imaginons une collisions frontale entre deux objets identiques ayant dans le référentiel R_0 des vitesses opposées. On suppose que cette collision est *élastique*, c'est à dire que l'énergie cinétique et l'impulsion totales sont conservées. Avant le choc, les composantes des vitesses sont:

$$u_1 \quad \text{et} \quad v_1, \quad u_2 = -u_1 \quad \text{et} \quad v_2 = -v_1.$$

Après le choc on a:

$$u_1' = u_1 \quad \text{et} \quad v_1' = -v_1, u_2' = -u_1 \quad \text{et} \quad v_2' = -v_2 = v_1.$$

Dans un référentiel R qui se déplace par rapport à R_0 avec la vitesse u_1 suivant Ox , les composantes des vitesses sont avant choc:

$$U_1 \quad \text{et} \quad V_1, \quad U_2 \quad \text{et} \quad V_2$$

après choc :

$$U_1' \quad \text{et} \quad V_1', \quad U_2' \quad \text{et} \quad V_2'.$$

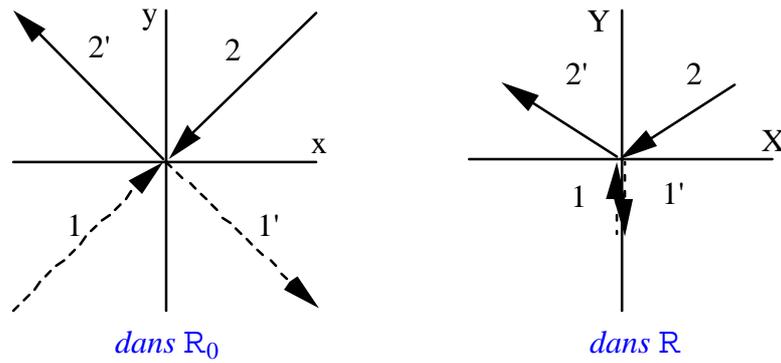


Figure V-1.

Les composantes U et V se calculent à partir de u et v à l'aide de la loi de composition des vitesses:

$$U = \frac{u - u_1}{1 - \frac{uu_1}{c^2}}, \quad V = \frac{v}{\gamma_1} \frac{1}{1 - \frac{uu_1}{c^2}}, \quad \text{avec} \quad \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}}.$$

Ainsi:

$$U_1' = U_1 = 0, \quad V_1' = -V_1, \quad U_2' = U_2, \quad V_2' = -V_2,$$

$$U_2 = \frac{u_2 - u_1}{1 - \frac{u_2 u_1}{c^2}} = -\frac{2u_1}{1 + \frac{u_1^2}{c^2}}, \quad V_1 = \frac{v_1}{\gamma_1} \frac{1}{1 - \frac{u_1^2}{c^2}} = v_1 \gamma_1, \quad V_2 = \frac{v_2}{\gamma_1} \frac{1}{1 - \frac{u_2 u_1}{c^2}} = -\frac{v_1}{\gamma_1} \frac{1}{1 + \frac{u_1^2}{c^2}}.$$

En passant de R_0 à R , la composante suivant OY de la quantité de mouvement totale reste nulle. Or,

$$V_1 + V_2 = \frac{v_1}{\gamma_1} \frac{1}{1 - \frac{u_1^2}{c^2}} - \frac{v_1}{\gamma_1} \frac{1}{1 + \frac{u_1^2}{c^2}} \neq 0,$$

ne l'est pas. Pour sortir de cette impasse, il faut admettre que les masses respectives M_1 et M_2 des objets 1 et 2 ne peuvent être identiques dans R . Alors,

$$|M_1 V_1| = \frac{M_1 v_1}{\gamma_1} \frac{1}{1 - \frac{u_1^2}{c^2}} = |M_2 V_2| = \frac{M_2 v_1}{\gamma_1} \frac{1}{1 + \frac{u_1^2}{c^2}},$$

entraîne:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{1 + \frac{u_1^2}{c^2}}{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}.$$

Dans R , les normes des vitesses des deux objets sont:

$$U_1^2 + V_1^2 = V_1^2 = v_1^2 \gamma_1^2$$

$$U_2^2 + V_2^2 = \frac{4u_1^2 + v_1^2 \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2} = \frac{4u_1^2 + V_1^2 \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2}.$$

La dernière relation peut s'écrire:

$$\frac{U_2^2 + V_2^2}{c^2} \left(1 + \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2 = 4\frac{u_1^2}{c^2} + \frac{V_1^2}{c^2} \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2 = \left(1 + \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2 + \frac{V_1^2}{c^2} \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2.$$

de sorte que:

$$\frac{\left(1 + \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)^2} = \frac{1 - \frac{V_1^2}{c^2}}{1 - \frac{U_2^2 + V_2^2}{c^2}} = \frac{\Gamma_2^2}{\Gamma_1^2},$$

où l'on a posé:

$$\Gamma_1^2 = \frac{1}{1 - \frac{V_1^2}{c^2}}, \quad \text{et} \quad \Gamma_2^2 = \frac{1}{1 - \frac{U_2^2 + V_2^2}{c^2}}.$$

On trouve ainsi:

$$\frac{M_2}{\Gamma_2} = \frac{M_1}{\Gamma_1} = M(\Gamma=1) = m_0,$$

où m_0 est évidemment la masse au repos de l'un ou l'autre des objets identiques 1 et 2.

Le raisonnement que nous venons de faire sur un exemple simple, montre que la masse d'un objet dépend de sa vitesse v dans un référentiel donné. D'une façon générale, m_0 étant la masse au repos,

$$(23-1) \quad m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

La masse tend vers l'infini lorsque la vitesse tend vers la vitesse c de la lumière dans le vide. C'est une raison supplémentaire pour affirmer que c est la limite supérieure assignée à la vitesse de tout objet matériel, ce qui est conforme à la fois à l'expérience et aux conséquences déjà formulées de la transformation de Lorentz.

24. Dynamique.

La relation fondamentale garde la forme que lui a donné Newton

$$(24-1) \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

valable dans tout référentiel d'inertie. La masse étant variable, c'est aussi:

$$(24-2) \quad \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt}$$

qui montre qu'en général, force et accélération ne sont pas colinéaires. \mathbf{F} , m , \mathbf{v} et t n'ont aucun caractère absolu et dépendent tous du référentiel d'inertie considéré.

Aux faibles vitesses, c'est à dire pour $v \ll c$ lorsque les variations de la masse sont négligeables, on retrouve la formulation habituelle.

γ étant fonction de la vitesse, les 3 équations du mouvement obtenues après projections sur les axes, suffisent à la dynamique relativiste. Mais cette mécanique concerne un espace-temps à quatre dimensions. Par souci d'établir une formulation cohérente avec les quatre dimensions de l'espace-temps, on fait souvent intervenir une quatrième relation décrivant la variation de la masse (ou de γ). Nous verrons dans la suite comment apparaît l'équation correspondante.

25. Travail d'une force.

Le travail élémentaire d'une force s'exprime, comme en mécanique non relativiste par le produit scalaire de la force par le déplacement élémentaire:

$$dT = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt.$$

Reprenant l'expression (24-2) de \mathbf{F} en fonction de l'accélération et de la variation de la masse:

$$dT = m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2 dm.$$

Or la variation de la masse est donnée par (23-1) soit

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

ce qui entraîne:

$$dm = \frac{m_0 v dv}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}.$$

Substituant dans le travail élémentaire:

$$dT = \frac{m_0 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{m_0 v^2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{m_0 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}.$$

Lorsque le point d'application de la force se déplace d'une position \mathbf{r}_1 (vitesse \mathbf{v}_1) à une position \mathbf{r}_2 (vitesse \mathbf{v}_2)

$$\Delta T (\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2) = m_0 \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \right).$$

En mécanique non relativiste, le travail de la force est égal à la variation d'énergie cinétique. En mécanique relativiste, on trouve que le travail est égal à la variation de

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

grandeur qui, comme nous allons le voir au § suivant, **n'est pas l'énergie cinétique.**

Notons enfin que la relation de définition du travail élémentaire fournit une quatrième équation pour la dynamique relativiste. On écrit en effet

$$(25-1) \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dT}{dt} = m_0 c^2 \frac{d\gamma}{dt}.$$

26. Energie cinétique, équivalence masse énergie.

Le travail élémentaire vient d'être calculé en termes de variation de vitesse. Compte tenu de la relation entre masse et vitesse on peut aussi écrire :

$$dT = c^2 dm = m_0 c^2 d\gamma.$$

Par intégration à partir du repos (vitesse nulle, $\gamma=1$)

$$(26-1) \quad \Delta T = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

Cette expression incite à considérer que ΔT est égal à l'**énergie cinétique** E_C acquise par un objet de masse au repos m_0 lorsqu'il est mis en mouvement et atteint la vitesse v . Alors

$$(26-2) \quad \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 c^2 = mc^2 ,$$

est par définition l'**énergie totale**, composée de l'énergie cinétique (26-1) et de l'énergie équivalente à la masse au repos :

$$(26-3) \quad E_0 = m_0 c^2 .$$

D'une façon générale, on a pour l'énergie totale d'un objet matériel:

$$(26-4) \quad \boxed{E = mc^2}$$

où $m = \gamma m_0$, formule valable quel que soit l'état de repos ou de mouvement de l'objet massif.

Pour obtenir l'équation la plus célèbre de la physique, à laquelle le nom d'Einstein est indissolublement attaché, on a étendu la conservation de l'impulsion à la dynamique relativiste, puis analysé le travail d'une force en termes d'énergie. Il convient à ce stade de vérifier le caractère raisonnable du résultat obtenu.

Dans la limite des faibles vitesses, il doit se confondre avec le résultat de la mécanique non relativiste. Or pour $\left(\beta = \frac{v}{c} \ll 1\right)$, on développe γ en se limitant à l'ordre 2 en $\frac{v}{c}$ soit :

$$(26-5) \quad E = \gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{8} \beta^4 + \dots\right) = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} .$$

On trouve ainsi en première approximation la somme de l'énergie au repos et de l'énergie cinétique habituelle. Dans ces conditions le travail de la force entre deux positions est

$$\Delta T (\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2) = \frac{m_0 v_2^2}{2} - \frac{m_0 v_1^2}{2} .$$

On a bien obtenu l'égalité entre la variation d'énergie cinétique et le travail de la force, énoncée dans le cadre de la mécanique non relativiste.

Dans l'expression de la masse $\gamma m_0 c^2$, γ dépend du mouvement, tandis que $m_0 c^2$ est une grandeur invariante. On restreint souvent l'emploi du mot masse (et du concept) à cet invariant. C'est en particulier l'usage adopté par les physiciens des particules.

La relation d'Einstein (33-4) établit une équivalence entre masse et énergie. On est donc conduit à admettre que de la masse peut se transformer en énergie et vice versa. On vérifie tous les jours qu'il en est bien ainsi. Les réactions nucléaires, celle des réacteurs à fission comme celles du soleil et des autres étoiles, les expériences faites sur les particules élémentaires au moyen des grands accélérateurs, sont là pour nous le prouver: le bilan des masses (au repos) entre partenaires et produits de la réaction donne grâce à (26-4) la valeur de l'énergie libérée ou absorbée.

Ainsi, dans les recueils de données, les masses au repos des particules atomiques et subatomiques sont écrites en unités d'énergie et non de masse. Le tableau suivant V-1 montre quelques exemples.

Le développement limité (26-5) que nous avons utilisé pour les vitesses les plus faibles permet aussi de fixer une limite au domaine d'application de la mécanique non relativiste. Le terme d'ordre β^4 représente l'erreur commise en assimilant l'énergie cinétique relativiste à $\frac{m_0 v^2}{2}$.

Tableau V-1

<i>Particule</i>	<i>Symbole</i>	<i>Masse (M.e.V.)</i>	<i>Temps de décroissance (s.)¹</i>
Electron	e^\pm	0.511	
Muon	μ	105.7	$2.2 \cdot 10^{-6}$
Pion chargé	π^\pm	139.6	$2.6 \cdot 10^{-8}$
Pion neutre	π_0	135	$0.87 \cdot 10^{-16}$
Proton	p	938.3	?
Neutron	n	939.6	898

En valeur relative

$$\frac{2\Delta E}{m_0 v^2} = \frac{3}{4} \beta^2.$$

Fixant à 1% l'écart tolérable on arrive à la condition

$$\beta^2 \leq \frac{4}{3} 10^{-2} \quad \text{ou} \quad \beta \leq \frac{0.2}{\sqrt{3}} \approx 0.12$$

¹ Temps au bout duquel la population des particules est une fraction 1/2 de celle existant à un instant zéro.

A la limite (signe =), le rapport de l'énergie cinétique à la masse au repos est

$$\frac{\beta^2}{2} = \frac{2}{3} 10^{-2}.$$

On trouve ainsi que la mécanique newtonnienne est applicable jusqu'à des énergies cinétiques de

$$\begin{array}{ll} 7 \text{ M.e.V.} & \text{pour les protons} \\ 3 \text{ K.e.V.} & \text{pour les électrons.} \end{array}$$

Cette limite est, pour les électrons, assez basse. Elle est aisément franchie dans le cas d'objets d'usage courant. Ainsi, pour calculer à mieux que 1% les trajectoires des électrons, accélérés à 15 K.e.V. (1 K.e.V. = 10^3 e.V.), d'un tube de télévision à "coins carrés", il convient de tenir compte de la relativité.

27. Le quadrivecteur impulsion-énergie.

L'énergie totale d'un objet massif (énergie cinétique augmentée de l'équivalent de la masse au repos) est:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 c^2 = m c^2 .$$

Elevant au carré on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} &= \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 c^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= m_0^2 c^4 + \gamma^2 m_0^2 c^2 v^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = m^2 c^4 . \end{aligned}$$

La dernière égalité, recopiée

$$(27-1) \quad E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4,$$

est une relation d'une extrême importance entre l'énergie et la quantité de mouvement d'un objet massif. On remarque au passage qu'elle rend compte du résultat expérimental décrit au § 3 (premier chapitre).

Elle est de même forme que la relation d'invariance d'un quadrivecteur. Il convient donc de vérifier que lors d'un changement de référentiel d'inertie, E et pc se transforment bien par les formules de Lorentz.

Soit v la vitesse suivant Ox dans un certain référentiel d'espace-temps R . Dans un autre référentiel R' qui se déplace par rapport au premier avec la vitesse u également suivant Ox ,

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \gamma_{v'} m_0 ,$$

avec, d'après la loi de composition des vitesses:

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}} .$$

Utilisant la relation (13-2):

$$\gamma_{v'} = \gamma_v \gamma_u \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right)$$

il vient

$$m' = m_0 \gamma_v \gamma_u \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right) .$$

Dans ces conditions:

$$m' c^2 = \gamma_u \left(- \gamma_v m_0 uv + \gamma_v m_0 c^2 \right) = \gamma_u \left(- \beta_u pc + mc^2 \right) ,$$

tandis que:

$$p'c = m'v'c = m_0 \gamma_v \gamma_u \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right) \frac{c(v - u)}{1 - \frac{uv}{c^2}} = \gamma_u \left(\gamma_v m_0 vc - \gamma_v m_0 uc \right) = \gamma_u \left(pc - \beta_u mc^2 \right) .$$

Ainsi (pc, mc^2) obéit à la transformation de Lorentz lors d'un changement de référentiel. Quantité de mouvement (impulsion), multipliée par c , et énergie forment donc un quadrivecteur de norme invariante :

$$m^2 c^4 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 .$$

Dans un diagramme mc^2 (énergie), pc (impulsion), l'impulsion-énergie d'un objet matériel en mouvement est représentée par un point de l'arc d'hyperbole dont l'équation est la relation précédente (Figure V-2).

Pour cet objet en mouvement à la vitesse v , on a:

$$\frac{pc}{mc^2} = \frac{v}{c} = \beta_v < 1 .$$

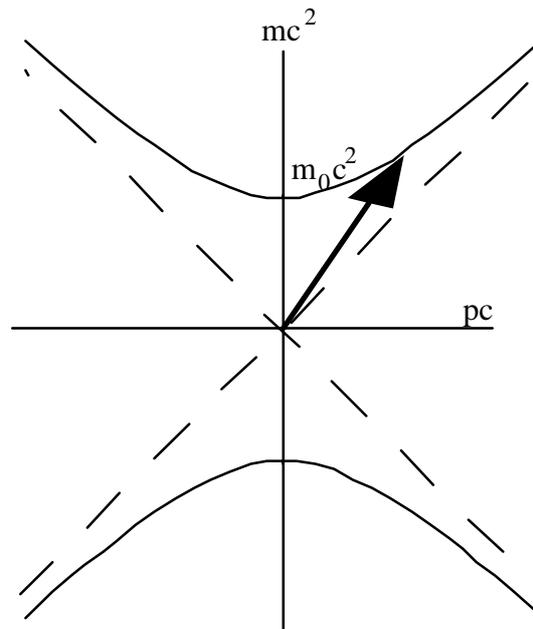


Figure V-2.

Quadrivecteur impulsion-énergie.

Il existe une façon plus directe d'obtenir le quadrivecteur impulsion énergie à partir de la quadrivitesse $(\gamma_{\mathbf{v}}, \gamma_{\mathbf{v}}\mathbf{c})$. Multipliant chaque composante par $m_0 c$, il vient immédiatement :

$$\begin{aligned}\gamma_{\mathbf{v}} m_0 \mathbf{v} c &= \mathbf{p} c \\ \gamma_{\mathbf{v}} m_0 c^2 &= m c^2 .\end{aligned}$$

28. Transformation de la force.

Selon la deuxième loi de Newton (relation fondamentale de la dynamique), la force est la dérivée par rapport au temps du vecteur impulsion de la même façon que la vitesse est la dérivée par rapport au temps du vecteur position. On peut donc procéder comme pour les vitesses, par différenciation de la transformation de Lorentz appliquée cette fois aux deux quadrivecteurs position-temps et impulsion-énergie.

position-temps

$$dx' = \gamma (dx - \beta c dt)$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$cdt' = \gamma (-\beta dx + c dt)$$

impulsion-énergie

$$cdp'_{x'} = \gamma (cdp_x - \beta dE)$$

$$cdp'_{y'} = cdp_y$$

$$cdp'_{z'} = cdp_z$$

$$dE' = \gamma (-\beta cdp_x + dE).$$

On va trouver ainsi une transformation de même forme que celle qui concerne les vitesses. Ce n'est donc pas la transformation de Lorentz.

La force n'est pas un quadrivecteur. Mais de même qu'on a introduit la quadrivitesse, on peut construire un quadrivecteur incluant la force à partir de la relation de la dynamique écrite en quatre équations. On a en effet:

$$\begin{aligned} c\mathbf{F} &= \frac{d\mathbf{pc}}{dt} , \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} &= \frac{dmc^2}{dt} . \end{aligned}$$

Une autre écriture est

$$(28-1) \quad \begin{aligned} \gamma_v c\mathbf{F} &= \gamma_v \frac{d\mathbf{pc}}{dt} = \frac{d\mathbf{pc}}{dt_0} , \\ \mathbf{F} \cdot \gamma_v \mathbf{v} &= \gamma_v \frac{dmc^2}{dt} = \frac{dmc^2}{dt_0} , \end{aligned}$$

où t_0 est le temps propre. Généralisant la loi de Newton, les équations (34-1) font intervenir un quadrivecteur force-travail ($\gamma_v \mathbf{F}c$, $\gamma_v \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$) égal à la dérivée du quadrivecteur impulsion-énergie par rapport au temps propre.

VI

Exemples de physique relativiste : lumière et particules.**29. Le photon: son énergie, son impulsion et sa masse.**

Une réflexion sur le spectre d'émission du corps noir avait conduit Planck (1900) à postuler que les échanges d'énergie par rayonnement électromagnétique ne peuvent se faire que par quantités discrètes : toute énergie échangée à la fréquence ν est multiple entier de $h\nu$ où h est une constante universelle égale à $6.6262 \cdot 10^{-34}$ J.s. en unités S.I. A partir de là, on passe facilement à l'idée d'une lumière constituée de "grains" appelés photons ayant cette énergie:

$$h\nu = \hbar \omega \quad \text{avec} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.0546 \cdot 10^{-34} \text{ J.s.}$$

Dans un changement de référentiel, l'énergie est calculée à partir de la transformation de Lorentz :

$$E' = \gamma (-\beta pc + E).$$

Prenant :

$$E' = \hbar \omega', \quad E = \hbar \omega$$

il vient:

$$\hbar \omega' = \hbar \omega \gamma (1 - \beta) = -\gamma \beta pc + \gamma \hbar \omega,$$

ce qui donne pour l'impulsion (quantité de mouvement) du photon

$$p = \frac{\hbar \omega}{c} = \hbar k.$$

On retrouve bien l'invariant du quadrivecteur fréquence vecteur d'onde (C.F. § 18):

$$E^2 - p^2 c^2 = \hbar^2 \omega^2 - \hbar^2 k^2 c^2 = 0.$$

On en conclut que le photon ne peut pas avoir de "masse au repos". En effet, pour une particule matérielle (massive), on avait obtenu (C.F. chapitre V):

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 - m^2 v^2 c^2 = m^2 c^2 (c^2 - v^2) = m_0^2 c^4,$$

relation qui impose une vitesse de déplacement inférieure à c . Seuls des objets sans masse, comme les photons, peuvent se propager à la vitesse c de la lumière dans le vide.

30. Ensembles d'objets : référentiel du centre d'inertie

En mécanique non relativiste, on utilise le centre de masse d'un ensemble d'objets matériels en mouvement. Cette notion perd de son intérêt en mécanique relativiste à cause de la variation de la masse en fonction de la vitesse. Tout objet matériel ou non, possède énergie et quantité de mouvement. Deux grandeurs sont associées à un ensemble de particules et de photons: une quantité de mouvement (impulsion) globale, somme géométrique des impulsions individuelles:

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i,$$

et une énergie totale:

$$E = \sum_i E_i.$$

Ces grandeurs sont définies dans un référentiel R donné. Dans un autre référentiel les mêmes grandeurs seront reliées aux précédentes par la transformation de Lorentz (linéaire) pour le quadrivecteur impulsion-énergie. Supposons \mathbf{P} dirigée suivant Ox . Dans R' , animé par rapport à R , de la vitesse u suivant Ox :

$$\begin{aligned} P'c &= \gamma_u (Pc - \beta_u E) \\ E' &= \gamma_u (-\beta_u Pc + E). \end{aligned}$$

On peut donc toujours trouver un référentiel où l'impulsion résultante est nulle: **référentiel du centre d'inertie**. Soit donc $P'_0=0$ dans R'_0 . Alors:

$$E = Pc/\beta_u$$

ce qui entraîne

$$E = \gamma_u E_0' \quad \text{et} \quad Pc = \gamma_u \beta_u E_0'.$$

La norme invariante du quadrivecteur impulsion-énergie d'un ensemble d'objets en mouvement est:

$$E^2 - P^2c^2 = E_0'^2.$$

égale donc à l'opposé du carré de l'énergie totale dans le référentiel R_0' où $P'_0=0$.

On obtient en général la vitesse \mathbf{u} par rapport à R , du référentiel R_0' du centre d'inertie, au moyen de la relation:

$$\frac{\mathbf{u}}{c} = \beta_u = \frac{\mathbf{P}c}{E}.$$

Pour des objets matériels massifs,

$$\frac{\mathbf{u}}{c} = \beta_u = \frac{\mathbf{P}c}{E} = \frac{\sum_i m_i \beta_i c^2}{\sum_i m_i c^2} = \frac{\sum_i m_{0i} \gamma_i \beta_i}{\sum_i m_{0i} \gamma_i}.$$

Dans le cas d'objets identiques, (même masse au repos m_0):

$$\frac{\mathbf{u}}{c} = \beta_u = \frac{\sum_i \gamma_i \beta_i}{\sum_i \gamma_i}.$$

En l'absence de toute force extérieure à l'ensemble des objets en mouvement, le référentiel de centre d'inertie a un mouvement de translation uniforme par rapport à tout autre référentiel.

31. Lois de conservation pour une collision.

Soit un état initial d'un système isolé de toute influence extérieure. Chacun des partenaires a une impulsion et une énergie bien définies dans R . Une collision conduit à un état final où les impulsions et les énergies sont différentes de celles de l'état initial. Le calcul complet de ce qui se passe au cours de la collision, nécessite la connaissance de la loi de force entre les protagonistes. Mais il est en général possible de relier en partie l'état final à l'état initial sans connaître précisément la loi de force.

On utilise pour cela des lois de conservation: des grandeurs ont la même valeur avant et après la collision. Il en est évidemment ainsi de la norme du quadrivecteur impulsion totale - énergie totale. L'invariance de celle-ci fournit donc une première loi de conservation. Dans le référentiel R_0' du centre d'inertie, cette norme invariante se réduit à l'énergie totale. Dans ce référentiel, l'impulsion est nulle et l'énergie totale est conservée. Une transformation de Lorentz permet de calculer impulsion totale et énergie totale dans un autre référentiel R . La transformation est linéaire avec des coefficients qui ne dépendent que de la vitesse relative entre les deux référentiels, la même avant et après la collision pour un système isolé. Les valeurs trouvées pour l'impulsion totale et l'énergie totale dans R sont donc séparément conservées.

On se servira de la conservation de l'impulsion et de l'énergie en écrivant les relations correspondantes dans le référentiel où elles sont les plus simples. Le référentiel du centre d'inertie est souvent un choix judicieux.

Dans la suite nous nous limiterons aux collisions binaires. Toutes les vitesses sont alors dans un même plan (impulsion nulle et qui le reste dans la direction orthogonale à celui-ci). Etant donné un état initial, on doit rechercher 4 composantes de vitesse et deux masses dans l'état final. Les lois de conservation fournissent 3 équations: deux pour les composantes de l'impulsion, une pour l'énergie. Il subsiste donc toujours une indétermination qui ne sera que partiellement levée.

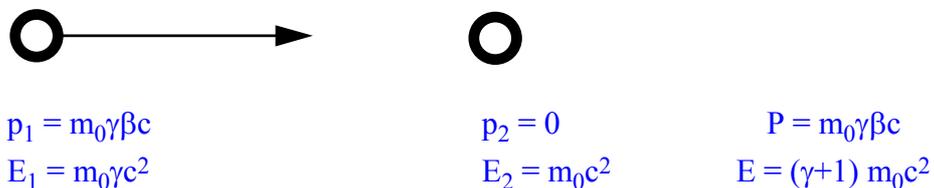
Lorsque le processus est **élastique**, on retrouve à la sortie de la collision les mêmes protagonistes qu'à l'entrée mais leurs vitesses ont changé de directions. Seules sont à déterminer les 4 composantes des vitesses: les trois équations ne suffisent évidemment pas mais l'indétermination ne porte plus que sur un seul paramètre: le plus souvent on choisit un angle.

Toute autre collision est dite **inélastique**.

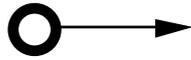
32. Cibles et projectiles.

Le cas simple de deux particules matérielles identiques auxquelles on fait subir une collision frontale, est d'une grande importance pratique en physique des hautes énergies. La collision peut être décrite soit dans un référentiel R où l'un des objets est au repos (interaction projectile cible) soit dans un référentiel R' (en l'occurrence celui R'_0 du centre d'inertie) où les deux objets ont des impulsions opposées.

Dans R , on a le schéma:

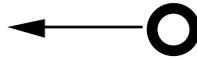


tandis que dans R'_0 :



$$p'_1 = m_0 \gamma' \beta' c$$

$$E'_1 = m_0 \gamma' c^2$$



$$p'_2 = -m_0 \gamma' \beta' c$$

$$E'_2 = m_0 \gamma' c^2$$

$$P' = 0$$

$$E' = 2m_0 \gamma' c^2$$

On écrit l'invariance de la norme du quadrivecteur impulsion totale - énergie totale pour l'ensemble des deux objets:

$$-m_0^2 \gamma^2 \beta^2 c^4 + m_0^2 \gamma^2 c^4 + m_0^2 c^4 + 2m_0^2 \gamma c^4 = 4m_0^2 \gamma'^2 c^4$$

$$-\gamma^2 \beta^2 + \gamma^2 + 2\gamma + 1 = 4\gamma'^2$$

$$2(\gamma + 1) = 4\gamma'^2 .$$

Cette dernière relation, résolue pour γ , soit

$$(32-1) \quad \gamma = 2\gamma'^2 - 1,$$

permet de comprendre l'intérêt des collisionneurs par rapport aux accélérateurs envoyant des particules sur des cibles. Dans un collisionneur on lance les unes contre les autres des particules identiques. Lorsqu'on fournit à chaque particule une énergie

$$E_{\text{Coll}} = m_0 \gamma_C c^2$$

il faudrait, pour avoir la même énergie dans le référentiel du centre d'inertie, donner une énergie :

$$(32-2) \quad E_A = m_0 \gamma_A c^2 = (2\gamma_C^2 - 1)m_0 c^2$$

au projectile expédié sur une cible fixe. Le tableau VI-1 montre pour deux exemples représentatifs d'installations actuellement en service (Tevatron au Fermilab près de Chicago, LEP au CERN à Genève) le gain en énergie apporté par le principe des collisionneurs.

Tableau VI-1.

	Projectile	$m_0 c^2$ M.e.V.	E_{Coll} M.e.V.	γ_C	E_A M.e.V.
Tévatron	protons	938.2	10^6	$1.1 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^9$
L.E.P.	électrons	0.511	$5 \cdot 10^4$	10^5	10^{10}

33. Collision élastique entre deux objets matériels identiques.

Dans le référentiel R'_0 du centre d'inertie, les deux objets sont toujours animés d'impulsions opposées. On peut définir un état précédant la collision et un état postérieur à celle-ci dans lesquels les mouvements sont rectilignes et uniformes. Dans les deux états, l'invariant relativiste se réduit à l'énergie totale conservée. On a donc :

$$2m_0\gamma'c^2|_{\text{avant}} = 2m_0\gamma'c^2|_{\text{après}} .$$

γ' est conservé, les objets ont des impulsions de même module selon le schéma:

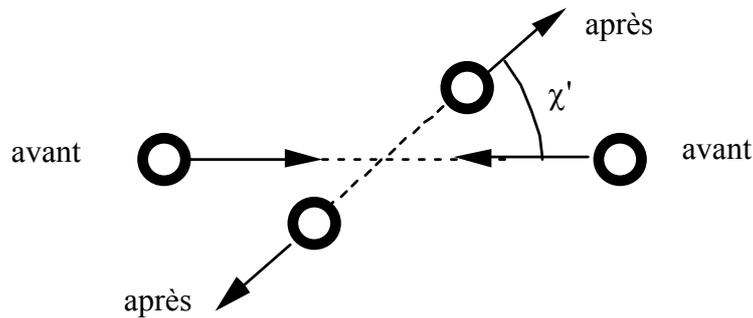


Figure VI-1. Collision dans R'_0 .

L'angle χ' est déterminé par les détails de la collisions dans lesquels nous n'allons pas entrer.

Revenons au référentiel R dans lequel l'un des objets est au repos avant la collision. En mécanique non relativiste, les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie d'une part, et de la masse d'autre part, imposent que les impulsions après la collision forment entre elles un angle de $\frac{\pi}{2}$:

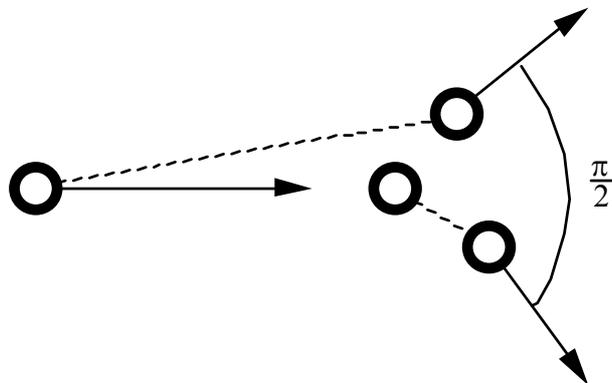


Figure VI-2. Collision non relativiste dans R .

En mécanique relativiste, la masse n'est pas conservée dans R. L'angle θ entre les directions des impulsions après choc va être différent de $\frac{\pi}{2}$. Il est la somme de deux angles χ_1 et χ_2 qu'il est possible de calculer à partir de la loi de composition des vitesses.

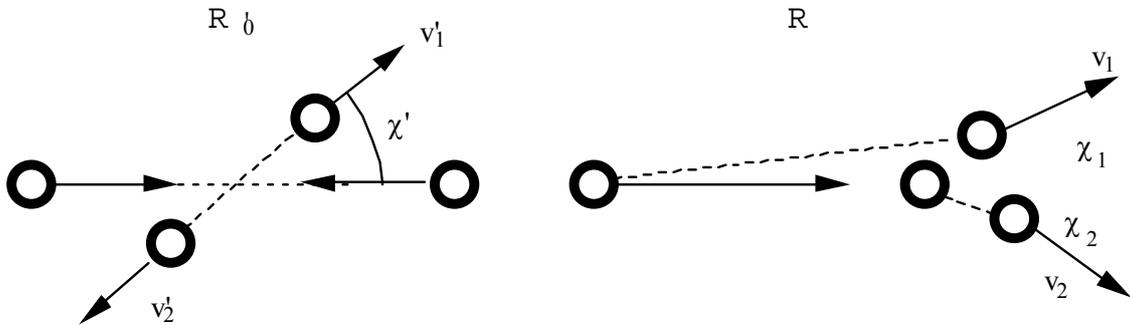


Figure VI-3.

On trouve pour les angles χ_1 et χ_2 que font dans R avec la direction incidente, les directions des objets après collision.

$$\operatorname{tg}\chi_1 = \frac{\sin\chi'}{\gamma_u(\cos\chi' + 1)}, \quad \operatorname{tg}\chi_2 = \frac{\sin\chi'}{\gamma_u(\cos\chi' - 1)},$$

où χ' est dans R'_0 l'angle entre les directions des objets avant et après collision.

L'angle $\chi_1 - \chi_2$ est toujours inférieur à $\pi/2$ ¹. Cet effet a été mis en évidence de façon spectaculaire au C.E.R.N. dans des expériences de collisions élastiques entre des protons (projectiles) et d'autres protons (cibles) appartenant au liquide d'une chambre à bulles.

34. Un exemple de collision inélastique.

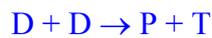
Une réaction nucléaire de fusion transforme des noyaux légers (hydrogène et ses isotopes) en noyaux plus lourds (hélium). La réaction du deutérium (hydrogène lourd stable) sera peut être un jour d'une grande importance pratique (fusion thermonucléaire contrôlée). Elle nous intéresse ici car elle a servi à valider les lois de conservation dans les collisions, énoncées au § 32.

Elle concerne les noyaux suivants:

¹ Il est d'autant plus aigu que l'énergie du projectile est plus grande.

	<i>symboles</i>	<i>composition</i>	<i>masse (M.e.V.)</i>
proton	P (^1H)	1 proton	938.2796
neutron	N	1 neutron	939.5731
deutéron	D (^2H)	1 proton + 1 neutron	1876.092
triton	T (^3H)	1 proton + 2 neutrons	2809.384
hélium 3	^3He	2 protons + 1 neutron	2808.413

et présente deux branches également probables



Il convient d'abord de noter que la somme des masses au repos des noyaux produits dans l'une ou l'autre de ces deux réactions, est inférieure à la somme des masses au repos des noyaux qui réagissent. En vertu de l'équivalence entre masse et énergie, ces réactions où de la masse disparaît fournissent de l'énergie. C'est bien ce que montre l'expérience et c'est bien pourquoi on pense utiliser des réactions de fusion telles que celles-là dans une éventuelle source d'énergie de l'avenir.

La première réaction a été utilisée comme test des lois de conservation. Dans un montage faisceau cible, des deutérons d'énergie cinétique 1.808 M.e.V. rencontrent des deutérons immobiles, et on détecte le proton émis à 90° de la direction d'incidence.

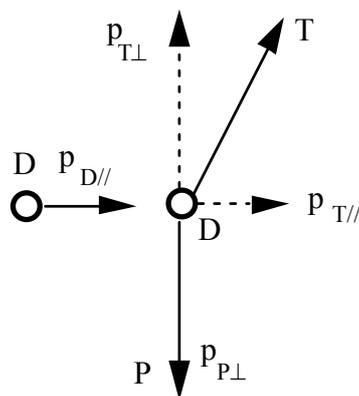


Figure VI-4.

On mesure l'énergie cinétique de ces protons trouvée égale à 3.467 M.e.V.

L'impulsion et l'énergie totales sont respectivement avant la collision:

$$p_{D//} \quad \text{et} \quad (\gamma_D + 1)m_{0D}c^2$$

et après la collision:

$$p_{T//}, p_{P\perp} + p_{T\perp} \quad \text{et} \quad \gamma_P m_{0P} c^2 + \gamma_T m_{0T} c^2 .$$

Les lois de conservation entraînent

$$\begin{aligned} p_{T//} &= p_{D//} \\ p_{T\perp} &= - p_{P\perp} \\ \gamma_T m_{0T} &= (\gamma_D + 1) m_{0D} - \gamma_P m_{0P} , \end{aligned}$$

tandis que pour le triton

$$(\gamma_T m_{0T} c^2)^2 = (p_{T//}^2 + p_{T\perp}^2) c^2 + (m_{0T} c^2)^2 .$$

Cet ensemble de relations fournit la masse du triton en fonction de grandeurs qui sont toutes connues:

$$(m_{0T})^2 c^4 = [(\gamma_D + 1) m_{0D} - \gamma_P m_{0P}]^2 c^4 - (p_{D//}^2 + p_{P\perp}^2) c^2 .$$

La valeur trouvée dans cette expérience est égale à $2 \cdot 10^{-6}$ près à celle qui est mesurée directement par spectrométrie de masse.

35. Matérialisation, dématérialisation.

En vertu des lois de conservation et de la célèbre relation d'équivalence entre la masse et l'énergie

$$E = mc^2 ,$$

chaque fois que du rayonnement est émis, l'émetteur doit subir une perte de masse. Inversement, l'absorption de rayonnement s'accompagne, pour l'absorbeur, d'une augmentation de masse. Ces variations de masse sont complètement négligeables dans le cas des réactions chimiques. Elles prennent toute leur importance dans le cas des réactions nucléaires et des processus entre particules élémentaires.

Une étoile comme le Soleil est un réacteur nucléaire au centre duquel se produisent des réactions de fusion entre noyaux légers. De l'hydrogène est ainsi transformé en hélium avec un abondant dégagement d'énergie. Celle-ci transite jusqu'à la surface de l'astre d'où elle s'échappe sous la forme d'un rayonnement de corps noir à la température de 5780 °K. La puissance totale rayonnée est de $3.86 \cdot 10^{26}$ W ce qui correspond à une perte de masse de

$$\frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt} = 4 \cdot 10^9 \text{ Kg/s.} = 4 \cdot 10^6 \text{ tonnes par seconde.}$$

Les interactions des objets subatomiques (électrons et autres particules élémentaires) sont complexes. Les lois de conservation permettent cependant d'établir des règles de portée générale.

Ainsi par exemple, considérons un objet ponctuel de masse au repos m_0 : son énergie cinétique et son impulsion varient en respectant l'invariance du quadrivecteur impulsion-énergie. Dans le diagramme $E (=mc^2)$, pc , il est impossible de relier deux points différents A et B de l'hyperbole d'équation

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4,$$

par un segment de droite de pente 1 ce qui permettrait de passer d'un état à un autre par émission ou absorption d'un photon (figure VI-5a). La seule possibilité est une dématérialisation sous la forme de deux photons dont les impulsions vont en sens opposés (figure VIII-5b). Des particules stables comme l'électron ne peuvent disparaître ainsi. Mais on a rencontré au §2 des mésons instables, les pions neutres π^0 , qui en effet se désintègrent en donnant naissance à deux photons.

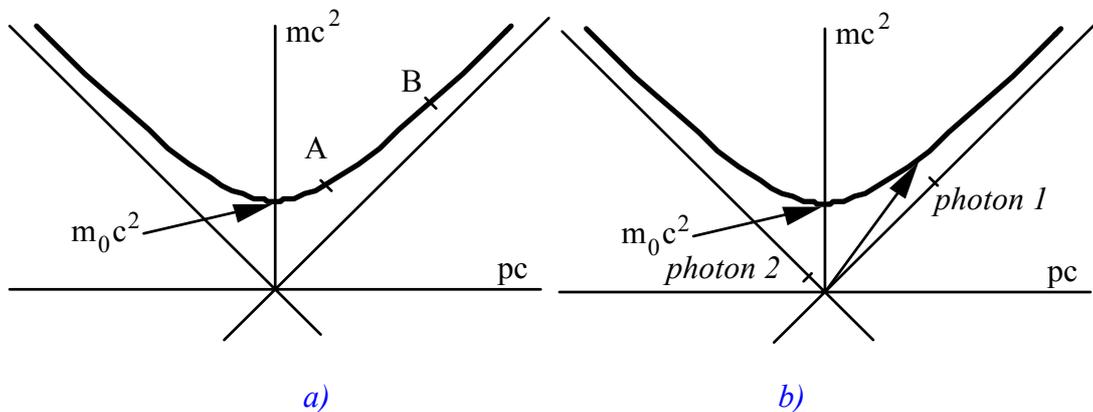


Figure VI-5.

Obéissant aux mêmes lois de conservation, les processus de matérialisation et de dématérialisation se calculent comme des collisions entre particules matérielles. Il est possible d'analyser un tel événement sur un diagramme impulsion-énergie lorsque toutes les quantités de mouvement sont parallèles à un même axe. On convient de compter négativement les énergies des particules qui disparaissent pendant la collision, positivement celles des photons produits. C'est une façon de tenir compte du sens

d'écoulement du temps, l'événement lui-même coïncidant avec l'origine des coordonnées.

Considérons deux exemples classiques de ces processus de matérialisation et de dématérialisation.

Exemple 1: annihilation d'une paire électron-positron.

Il existe des anti-électrons (positrons) de même masse que les électrons mais de charge opposée soit $+e$ ($e=1.6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb). Quand un anti-électron rencontre un électron, la rencontre est fatale à ces deux particules. Aux énergies disponibles les plus basses, cette dématérialisation conjointe produit deux photons. Dans une collision frontale, les photons partent dans des directions opposées: la somme de leurs énergies est égale à l'énergie totale (masse au repos plus énergie cinétique) des particules, et l'impulsion totale est conservée.

On obtient ainsi, dans le diagramme impulsion énergie, le schéma de la figure VI-6 qui montre clairement que la production d'un seul photon ne satisfait pas à la fois la conservation de l'impulsion et celle de l'énergie.

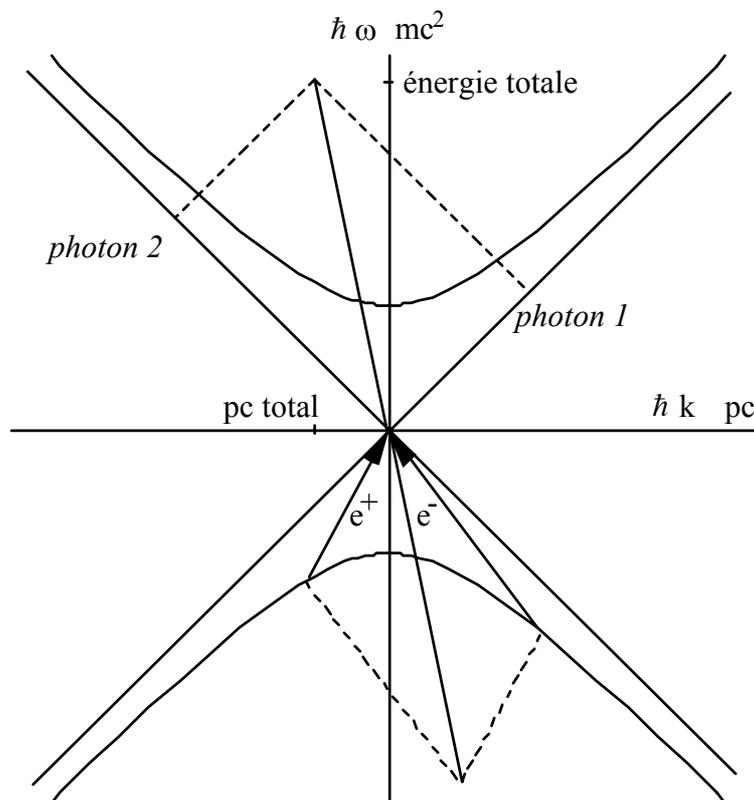


Figure VI-6.

Exemple 2: matérialisation d'un photon.

Il est facile de voir sur le diagramme impulsion-énergie qu'il est impossible de produire une particule massive ou une paire particule antiparticule à partir d'un seul photon même si son énergie est au moins égale à la somme des masses au repos. La présence d'un objet matériel qui emporte une partie de l'énergie et de l'impulsion disponibles est absolument nécessaire à la transformation d'un photon en particules massives. Alors par exemple, si son énergie est supérieure à 1.022 M.e.V., un photon donne naissance à une paire électron-positron.

La figure VI-7 schématise un tel événement lorsque tous les partenaires ont leur impulsion suivant Ox. Le quadrivecteur impulsion totale - énergie totale de la paire est OE. Un troisième objet matériel de masse au repos M_0 (quadrivecteur OA) acquiert le reste de l'impulsion disponible (quadrivecteur OB) assurant par là même, la conservation de l'énergie et de l'impulsion entre l'état initial: photon plus objet au repos, et l'état final: paire électron positron plus objet en mouvement.

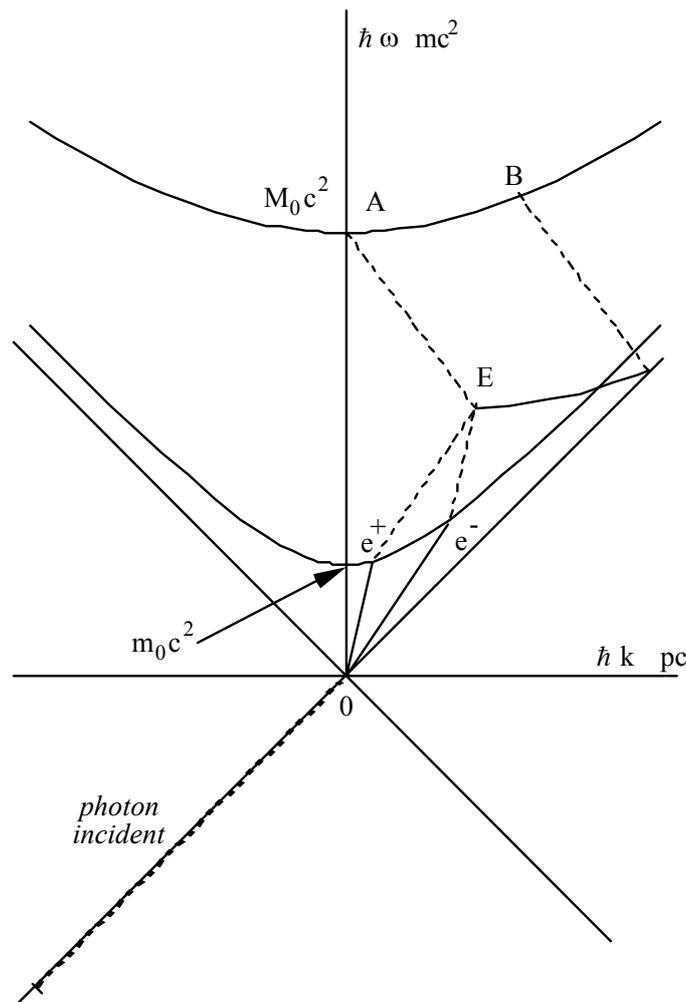


Figure VI-7.

36. L'effet Compton.

On peut considérer le processus de diffusion de la lumière comme une collision élastique entre un photon et une particule. C'est un des rares exemples d'interaction entre du rayonnement et un objet matériel qui ne puisse être expliqué autrement que par la nature particulaire des photons.

Le cas particulier de la diffusion d'un photon par un électron libre, est connu sous le nom d'effet Compton. Dans un diagramme plan impulsion énergie, on ne peut représenter que des collisions où tous les partenaires ont leur impulsion suivant Ox (figure VI-8).

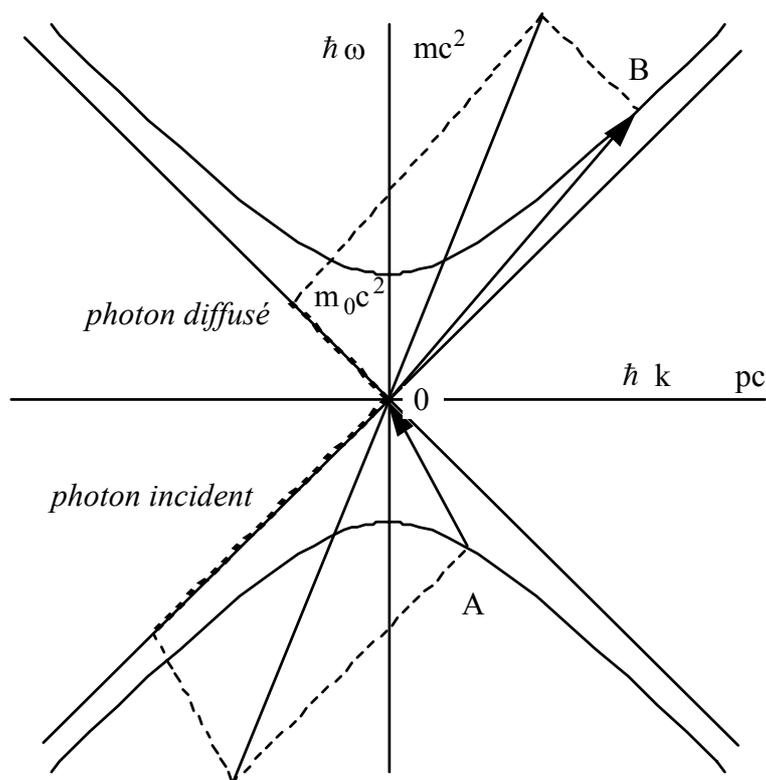


Figure VI-8.

Le photon incident sur un électron dans l'état initial correspondant au quadrivecteur AO, disparaît pour donner naissance à un photon diffusé tandis que l'électron se retrouve dans un état d'énergie impulsion différent: quadrivecteur OB. En raison de la participation de deux photons à ce processus, la transition peut concerner deux états quelconques d'énergie impulsion de l'électron.

En général, le photon diffusé a une direction différente de celle du photon incident. Supposons l'électron initialement au repos. Le photon incident a pour énergie et pour impulsion respectivement:

$$E = \hbar \omega, \quad p = \frac{\hbar \omega}{c},$$

\mathbf{p} étant dirigée suivant Ox.

Le photon diffusé a pour énergie et impulsion

$$E' = \hbar \omega', \quad p' = \frac{\hbar \omega'}{c},$$

où \mathbf{p}' est dans une direction faisant un angle θ avec l'axe des x. L'électron acquiert une énergie E_e et une impulsion \mathbf{p}_e suivant le schéma:

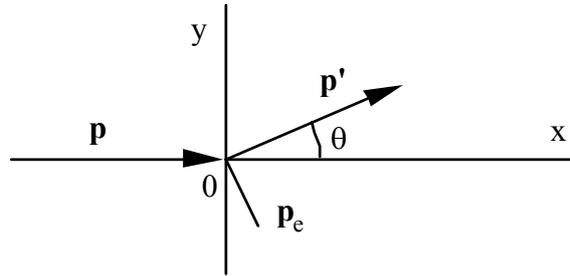


Figure VI-9.

Comme pour toute collision, on écrit la conservation de l'énergie:

$$E + m_0 c^2 = E' + E_e,$$

et la conservation de l'impulsion en projetant sur les axes:

$$p_{ex} = \frac{\hbar \omega}{c} - \frac{\hbar \omega'}{c} \cos \theta,$$

$$p_{ey} = - \frac{\hbar \omega'}{c} \sin \theta,$$

d'où:

$$c^2 p_e^2 = \hbar^2 (\omega^2 - 2\omega\omega' \cos \theta + \omega'^2).$$

L'invariance de la norme du quadrivecteur impulsion-énergie de l'électron permet d'écrire:

$$E_e^2 = m_0^2 c^4 + p_e^2 c^2.$$

Calculant E_e à partir de l'énergie des photons, l'équation précédente devient:

$$(E - E' + m_0 c^2)^2 = \hbar^2 (\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega') + 2\hbar m_0 c^2 (\omega - \omega') + m_0^2 c^4$$

$$= m_0^2 c^4 + p_e^2 c^2$$

ce qui fournit

$$c^2 p_e^2 = \hbar^2(\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega') + 2\hbar m_0 c^2(\omega - \omega').$$

En égalant les deux expressions de p_e^2 que nous avons obtenues, on trouve:

$$\hbar \omega \omega' - m_0 c^2 (\omega - \omega') = \hbar \omega \omega' \cos \theta .$$

On résout pour ω'

$$(36-1) \quad \omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\hbar \omega}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)} = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{\omega_c} (1 - \cos \theta)},$$

avec

$$(36-2) \quad \omega_c = \frac{m_0 c^2}{\hbar}.$$

On écrit d'habitude cette formule pour les longueurs d'onde (grandeurs mesurées en pratique) en substituant:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad \omega' = \frac{2\pi c}{\lambda'}.$$

On trouve ainsi:

$$(36-3) \quad \lambda' = \lambda + \frac{2\pi \hbar}{m_0 c} (1 - \cos \theta) = \lambda + \lambda_c (1 - \cos \theta)$$

où:

$$(36-4) \quad \lambda_c = \frac{h}{m_0 c},$$

est la **longueur d'onde de Compton**. C'est la longueur d'onde d'un rayonnement dont chaque photon à une énergie égale à l'équivalent de la masse au repos de l'électron.

Cet effet a été observé pour la première fois en 1923, dans l'interaction du rayonnement X avec la matière, sous forme d'une raie diffuse de longueur d'onde plus grande que la longueur d'onde incidente.

37. Ondes et particules matérielles.

Dans un milieu dispersif du type gaz d'électrons (de masse individuelle m):

$$\mathbf{j} = -nev, \quad \text{et, en première approximation} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}.$$

Le champ électrique transverse d'une onde plane ne modifie pas la densité particulaire n , de sorte que la combinaison entre équations de Maxwell déjà utilisée au § 18 fournit maintenant

$$(37-1) \quad \omega^2 - c^2k^2 = \omega_p^2$$

où ω_p est la fréquence (ou plus exactement la pulsation) de plasma de carré

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}.$$

C'est manifestement un invariant relativiste. En effet, dans un changement de référentiel d'inertie, n (contraction de Fitzgerald-Lorentz) et m sont multipliés par le même facteur γ . La relation (37-1) traduit aussi l'invariance du quadrivecteur $(\mathbf{k}c, \omega)$. Multipliant les deux membres par \hbar :

$$\hbar^2 \omega^2 - \hbar^2 k^2 c^2 = \hbar^2 \omega_p^2.$$

La norme invariante du quadrivecteur impulsion-énergie du photon dans un tel milieu est :

$$E^2 - p^2 c^2 = \hbar^2 \omega_p^2$$

formellement identique à celle d'une particule matérielle massive :

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4.$$

On prolonge cette analogie en attribuant à une particule matérielle une fréquence et un vecteur d'onde au moyen des relations:

$$\omega = \frac{E}{\hbar}, \quad \text{et} \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar},$$

d'où une longueur d'onde

$$(38-2) \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p},$$

(L. de Broglie, 1923). Mais on se heurte à la difficulté suivante illustrée par la figure VI-10: dans le diagramme E, pc , la vitesse ($<c$) est donnée par la "pente"² de la droite qui joint l'origine au point A (E, pc) selon:

$$\frac{u}{c} = \beta = \frac{E}{pc} = \operatorname{tg}\theta .$$

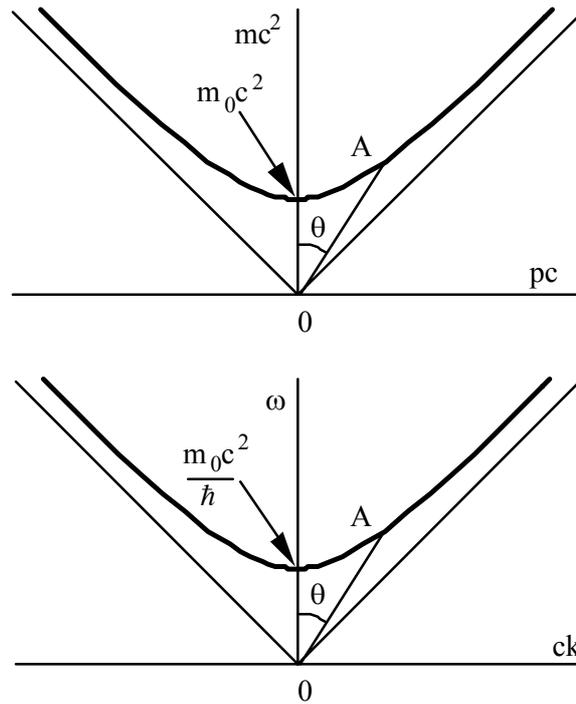


Figure VI-10 .

Dans le diagramme ω, ck , cette même droite OA est telle que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{ck}{\omega} = \frac{c}{v_\varphi} ,$$

où v_φ est la vitesse de phase de l'onde associée à la particule.

Or,

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{h^2 \omega^2}}} > c .$$

Ainsi, à une particule matérielle de vitesse u évidemment inférieure à c , on fait correspondre une onde plane monochromatique de vitesse de phase supérieure à c . Une

² Inversée par rapport à la définition usuelle.

particule matérielle ne saurait donc être assimilée à une telle onde. Si par contre on calcule la vitesse de groupe (celle d'un paquet d'ondes), on trouve:

$$\frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c^2}{v_\phi} = v_g < c .$$

C'est bien conforme au résultat sur les ondes électromagnétiques: la vitesse de groupe est celle de la propagation d'une énergie (ou d'une masse). La particule matérielle est donc comparable à un paquet d'ondes autour de la fréquence $\omega = \frac{mc^2}{\hbar}$.

Les propriétés ondulatoires des particules se manifestent au cours d'expériences comme la diffraction des électrons. A l'inverse les propriétés particulières du rayonnement apparaissent dans tous les comptages photon par photon.

VII.

Petit intermède mathématique.**38. Quadrivecteurs 2.**

Généralisant le contenu du § 7, on désigne par μ un indice qui prend les valeurs 0, 1, 2 ou 3. 0 désigne la composante temporelle et l'indice 1 se réfère à la composante spatiale suivant laquelle s'effectuent les mouvements de translation uniforme entre référentiels¹. Le quadrivecteur contravariant A^μ se transforme par changement de référentiel suivant

$$A'^\mu = L^\mu_\nu A^\nu,$$

(sommation sur les indices répétés) où

$$L^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

désigne la transformation de Lorentz. Le quadrivecteur covariant A_μ défini par

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3,$$

se transforme par

$$A'_\mu = \bar{L}_\nu^\mu A_\nu,$$

où

$$\bar{L}_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir que le *produit scalaire* de deux quadrivecteurs

¹ Cette restriction est introduite ici par souci de simplifier l'écriture des formules. Les considérations qui vont suivre s'appliquent au cas de référentiels qui se déplacent suivant des directions quelconques. Les L_μ^ν prennent alors une forme plus compliquée: généralisation de la transformation de Lorentz appelée transformation de Poincaré, évidemment toujours linéaire.

$$A^\mu B_\mu$$

est invariant par changement de référentiel. Il en va évidemment de même pour

$$A^\mu A_\mu$$

« norme » du quadrivecteur.

39. Tenseurs

Parmi tous les objets que l'on peut construire avec des (quadri) vecteurs, figure le produit tensoriel de composantes

$$T^{\mu\nu} = (A \otimes B)^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu .$$

Pour chacune des 16 composantes d'un tel objet, la transformation de Lorentz s'applique 2 fois soit

$$T'^{\mu\nu} = L^\mu_\sigma L^\nu_\tau T^{\sigma\tau} .$$

Généralisant ce résultat on appelle tenseur du second ordre deux fois contravariant, tout objet obéissant à cette règle de transformation. Il existe également des tenseurs 2 fois covariants et des tenseurs mixtes définis par leurs règles de transformation soit

$$T'_{\mu\nu} = \bar{L}_\mu^\sigma \bar{L}_\nu^\tau T_{\sigma\tau} , \quad \text{et} \quad T'^\mu_\nu = L^\mu_\sigma \bar{L}_\nu^\tau T^\sigma_\tau ,$$

respectivement. Les éléments de ces différents tenseurs peuvent être rangés dans des tableaux carrés où l'indice μ désigne une ligne et l'indice ν une colonne. Le nombre de lignes ou de colonnes, égal au nombre de dimension de l'espace considéré, est le rang du tenseur. On utilise souvent des indices latins pour noter les composantes d'un tenseur de rang 3 dans l'espace physique ordinaire.

On généralise encore avec des tenseurs d'ordre quelconque égal au nombre d'indices. Les règles de transformation mettent en jeu un facteur L^μ_ν par indice supérieur et un facteur \bar{L}_μ^ν par indice inférieur. Dans cet échafaudage, un scalaire est un tenseur d'ordre zéro, un quadrivecteur est un tenseur d'ordre 1.

A partir des composantes du tenseur $T^{\mu\nu}$, on peut construire un scalaire en formant la somme

$$T^\mu_\mu = T_\mu^\mu = T^0_0 + T^1_1 + T^2_2 + T^3_3 ,$$

appelée *trace* du tenseur. Cette opération est un cas particulier de *contraction* d'un tenseur, sommation au moyen de laquelle on forme un tenseur de rang deux fois inférieur à celui du tenseur de départ.

Il existe des tenseurs remarquables:

- ◆ Par exemple le tenseur mixte δ_v^μ qui vérifie l'égalité

$$\delta_v^\mu A^\mu = A^v,$$

quel que soit A^μ , a pour éléments

$$\delta_v^\mu = \begin{cases} 1, & \text{pour } \mu = v, \\ 0, & \text{pour } \mu \neq v. \end{cases}$$

De l'invariance de $A^\mu A_\mu$ découle:

$$L^\sigma_\nu \bar{L}_0^\mu = \delta_\nu^\mu.$$

- ◆ Le *tenseur métrique* se déduit du précédent par élévation ou abaissement d'un indice, d'où sa définition

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'application du tenseur métrique abaisse ou élève un indice. Ainsi:

$$\begin{aligned} A_\mu &= g_{\mu\nu} A^\nu, & A^\mu &= g^{\mu\nu} A_\nu, \\ A^\mu B_\nu &= g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu, \\ \delta_\mu^\sigma &= g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma}, \\ T^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} T^\mu_\nu, \\ T_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} T_\mu^\nu. \end{aligned}$$

- ◆ Les éléments d'un *tenseur symétrique* vérifient

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}.$$

- ◆ Ceux d'un tenseur *antisymétrique* vérifient

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu},$$

ce qui entraîne que les $T^{\mu\mu}$, éléments de la diagonale principale, sont tous nuls.

Etant donnés deux tenseur ($A^{\mu\nu}$) et ($B^{\mu\nu}$), leur somme est le tenseur formé en additionnant élément par élément

$$S^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} + B^{\mu\nu} .$$

Tout tenseur du second ordre peut être décomposé en la somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique:

$$T^{\mu\nu} = \frac{T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}}{2} + \frac{T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}}{2} ,$$

$$T^{\nu\mu} = \frac{T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}}{2} - \frac{T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}}{2} .$$

On définit aussi le produit dont le rang est égal à la somme des rang des facteurs.

40. Transformation de Lorentz pour les opérateurs différentiels.

Pour connaître la façon dont se transforment des équations aux dérivées partielles lors d'un changement de référentiel galiléen, nous avons besoin de connaître les relations entre les opérateurs différentiels dans R et R' . Partant de la transformation de Lorentz écrite en clair,

$$x' = \gamma (x - ut)$$

$$t' = \gamma \left(-\frac{ux}{c^2} + t \right)$$

on calcule les dérivées par rapport à x et t selon la règle des fonctions de fonctions. Au premier ordre

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{u}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\gamma u \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial t'} .$$

Ces relations peuvent aussi s'écrire:

$$(40-1) \quad c \frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left(c \frac{\partial}{\partial x'} - \beta \frac{\partial}{\partial t'} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left(-\beta c \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right)$$

et inversement

$$(40-2) \quad \begin{aligned} c \frac{\partial}{\partial x'} &= \gamma \left(c \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= \gamma \left(\beta c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) . \end{aligned}$$

On notera la place de c et celle du signe $-$: ce dernier apparaît lorsqu'on passe de R' à R comme dans le cas d'un quadrivecteur covariant.

Au second ordre de dérivation,

$$(40-3) \quad \begin{aligned} c^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} &= \gamma^2 \left(c^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\beta c \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial t'^2} &= \gamma^2 \left(\beta^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\beta c \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) . \end{aligned}$$

Dans les équations de Maxwell, ou plutôt dans l'équation de propagation du champ électrique dans le vide qui a les mêmes propriétés d'invariance, on rencontre l'opérateur:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

En substituant les expressions (40-3), il vient:

$$(40-4) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2}$$

qui montre qu'une transformation de Lorentz laisse invariant cet opérateur.

41. Dérivations.

Les résultats du § précédent sur la transformation des opérateurs différentiels se mettent sous la forme générale :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)' = \bar{L}_\nu{}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} .$$

C'est la règle de transformation du quadrivecteur covariant $(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla)$. On note

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} ,$$

cette *dérivation covariante*.

De la même façon, les dérivées partielles $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ sont les composantes du quadrivecteur $(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla)$. A noter que, dans le cas des dérivées par rapport aux coordonnées d'espace:

$$\partial^j = - \partial_j .$$

On généralise la notion de *divergence* à un quadrivecteur selon la définition

$$\partial^\mu A_\mu = \partial_\mu A^\mu = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \nabla \cdot \mathbf{A} ,$$

où \mathbf{A} est la partie spatiale. Elle est invariante par changement de référentiel. En effet, soit (cT, \mathbf{R}) un quadrivecteur dans R . Pour une translation uniforme le long de la composante X de \mathbf{R} , la transformation de Lorentz s'écrit en ignorant les coordonnées passives Y et Z ,

$$\begin{aligned} cT &= \gamma (\beta X' + cT') , \\ X &= \gamma (X' + \beta cT') . \end{aligned}$$

Dans la divergence de ce quadrivecteur soit

$$\frac{\partial cT}{\partial ct} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{R} ,$$

le groupement passif $\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ est évidemment invariant. Pour les deux autres termes, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} &= \frac{\partial \gamma (\beta X' + cT')}{\partial ct} + \frac{\partial \gamma (X' + \beta cT')}{\partial x} \\ &= \gamma \left(\beta \frac{\partial X'}{\partial ct'} + \frac{\partial cT'}{\partial ct'} \right) \frac{\partial t'}{\partial t} + \gamma \left(\beta \frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial cT'}{\partial x'} \right) \frac{\partial x'}{\partial x} \\ &\quad + \gamma \left(\frac{\partial X'}{\partial ct'} + \beta \frac{\partial cT'}{\partial ct'} \right) \frac{\partial t'}{\partial t} + \gamma \left(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \beta \frac{\partial cT'}{\partial x'} \right) \frac{\partial x'}{\partial x} . \end{aligned}$$

Or, les relations de base de la transformation de Lorentz

$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - \beta ct) , \\ ct' &= \gamma (-\beta x + ct) . \end{aligned}$$

entraînent

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma, \quad \frac{\partial x'}{\partial ct} = \frac{\partial ct'}{\partial x} = -\beta\gamma.$$

Les termes en $\frac{\partial X'}{\partial ct'}$ et $\frac{\partial c\Gamma}{\partial x'}$ s'éliminent et il reste

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = \gamma^2 (1 - \beta^2) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t'} + \frac{\partial X'}{\partial x'} \right).$$

Si en particulier la divergence d'un quadrivecteur est nulle dans un référentiel galiléen, elle est nulle dans tous les autres.

La divergence d'un tenseur du second ordre est un quadrivecteur de composantes

$$\partial_\mu A^{\mu\nu}.$$

Autre résultat du § précédent, l'opérateur du second ordre

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu 2}} - \nabla^2,$$

est également invariant par changement de référentiel.

VIII

Le champ électromagnétique**42. Le quadrivecteur densité de charge, densité de courant.**

Les équations de Maxwell peuvent être divisées en deux groupes: des équations sans source (première ligne) et des équations avec sources (deuxième ligne):

$$(42-1) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \wedge \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

où ρ est la densité de charge et \mathbf{j} la densité de courant. Dérivant la première équation avec sources par rapport au temps et prenant la divergence de la seconde, on obtient l'équation de conservation de la charge

$$(42-2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

On reconnaît dans cette équation une divergence.

Nous pouvons donc interpréter (42-2) de la façon suivante: \mathbf{j} et ρc forment un quadrivecteur à divergence nulle (quadricourant). Sa norme invariante est

$$(42-3) \quad \rho^2 c^2 - \mathbf{j}^2 = \rho_0^2 c^2.$$

(42-2) est d'autre part très semblable à l'équation de continuité de l'hydrodynamique qui traduit la conservation du nombre de particules

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0,$$

et que nous interprétons: $n\mathbf{v}$ et nc forment également un quadrivecteur à divergence nulle.

Or l'expérience (Millikan) nous apprend qu'il existe une charge élémentaire e ($=1.6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb). La densité de courant résulte du bilan du mouvement des charges. Imaginons que le courant ne soit dû qu'au déplacement d'électrons (chacun portant la charge $-e$). Un élément fluide du gaz d'électrons est animé de la vitesse \mathbf{v} dans R . Localement:

$$\rho = -ne, \quad \mathbf{j} = -nev.$$

Nous sommes donc fondés à admettre que la *charge élémentaire* e a un statut d'*invariant relativiste*.

Ce point acquis, montrons que \mathbf{j} et ρc forment bien un quadrivecteur et que nous obtenons ainsi une formulation cohérente. Supposons la vitesse \mathbf{v} uniforme. Alors, la densité particulière dans R tient compte de la contraction de Fitzgerald Lorentz

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = n_0 \gamma_v,$$

où n_0 est la densité qu'aurait le gaz d'électrons en l'absence de mouvement d'ensemble.

Dans ces conditions

$$\begin{aligned} \rho &= -en = -en_0 \gamma_v \\ \mathbf{j} &= -en\mathbf{v} = -en_0 \gamma_v \mathbf{v}. \end{aligned}$$

$(\mathbf{j}, \rho c)$ est le produit de $-en_0$ par la quadrivitesse. C'est un quadrivecteur.

On le vérifie directement en considérant un référentiel R' se déplaçant par rapport à R avec la vitesse \mathbf{u} parallèle à \mathbf{v} , on a d'abord la relation entre facteurs de Lorentz:

$$\gamma_{v'} = \gamma_u \gamma_v \left(1 - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{c^2}\right),$$

d'où, toutes les vitesses étant parallèles:

$$\mathbf{j}' = -en_0 \gamma_{v'} \mathbf{v}' = -en_0 \gamma_u \gamma_v (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = -en_0 \gamma_u (\gamma_v \mathbf{v} - \beta_u c \gamma_v) = \gamma_u (\mathbf{j} - \beta_u \rho c).$$

De même:

$$\rho' c = -en_0 \gamma_{v'} = -en_0 \gamma_u \gamma_v \left(1 - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{c^2}\right)$$

de sorte que:

$$\rho' c = -en_0 \gamma_u (-\beta_u \mathbf{v} \gamma_v + c \gamma_v) = \gamma_u (-\beta_u \mathbf{j} + \rho c).$$

\mathbf{j} et ρc obéissent à la transformation de Lorentz. C.Q.F.D.

43. Le quadripotentielle.

Les équations de Maxwell sont écrites en termes de champs électrique et magnétique dérivant d'un potentiel scalaire ϕ et d'un potentiel vecteur \mathbf{A} selon les relations :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B} = \nabla\wedge\mathbf{A}.$$

Utilisant ces égalités dans les équations avec sources, il vient :

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\nabla\wedge(\nabla\wedge\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} - \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}.$$

Après arrangement:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} - \nabla\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A}\right).$$

Sous la condition:

$$(43-1) \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A} = 0,$$

qui définit la **jauge de Lorentz**, on trouve deux équations découplées de même forme en ϕ et \mathbf{A} :

$$(43-2) \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}.$$

Or \mathbf{j} et ρc forment un quadrivecteur et d'autre part, les opérateurs différentiels des premiers membres sont invariants par transformation de Lorentz. Les équations (43-2) sont invariantes par transformation de Lorentz. Il en est évidemment de même pour les équations de Maxwell dont elles sont issues.

Ainsi, \mathbf{A} et $\frac{\phi}{c}$ forment un quadrivecteur dont (43-1) nous montre qu'il est à divergence nulle. Ce quadrivecteur, le **quadripotentielle**, se transforme par:

$$\begin{aligned} A'_{x'} &= \gamma \left(A_x - \beta \frac{\phi}{c} \right), \\ A'_{y'} &= A_y, \\ A'_{z'} &= A_z, \\ \frac{\phi'}{c} &= \gamma \left(-\beta A_x + \frac{\phi}{c} \right). \end{aligned}$$

44. Transformation du champ électromagnétique.

Pour passer des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} dans le référentiel R à ces mêmes champs dans un référentiel R' , nous allons utiliser la transformation de Lorentz pour le quadripotiel et appliquer les formules de transformation des dérivées premières

$$\begin{aligned} c \frac{\partial}{\partial x'} &= \gamma \left(c \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= \gamma \left(\beta c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

aux expressions des champs dérivant du quadripotiel. On trouve ainsi

$$E'_{x'} = -c \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\phi'}{c} \right) - \frac{\partial A'_{x'}}{\partial t'} = -\gamma^2 (1 - \beta^2) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) = E_x.$$

Pour les autres composantes:

$$\begin{aligned} E'_{y'} &= -c \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\phi'}{c} \right) - \frac{\partial A'_{y'}}{\partial t'} = -\gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) + \gamma u \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \\ &= \gamma (E_y - u B_z), \\ E'_{z'} &= \gamma (E_z + u B_y). \end{aligned}$$

On calcule de même:

$$B'_{x'} = \frac{\partial A'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial A'_{y'}}{\partial z'} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x,$$

puis:

$$\begin{aligned} B'_{y'} &= \frac{\partial A'_{x'}}{\partial z'} - \frac{\partial A'_{z'}}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \gamma \frac{u}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \\ &= \gamma \left(B_x + \frac{u}{c^2} E_z \right), \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}'_{z'} = \gamma \left(\mathbf{B}_z - \frac{\mathbf{u}}{c^2} E_y \right).$$

On reconnaît dans le second membre des formules correspondant aux composantes des champs orthogonales au mouvement du référentiel R' , les composantes des produits vectoriels $\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}$ et $\frac{\mathbf{u}}{c^2} \wedge \mathbf{E}$. On écrit donc la transformation du champ électromagnétique lors d'un changement de référentiel d'inertie :

$$\begin{aligned} E'_{x'} &= E_x, & B'_{x'} &= B_x, \\ E'_{y'} &= \gamma \left(\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} \right)_y, & B'_{y'} &= \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \wedge \mathbf{E} \right)_y, \\ E'_{z'} &= \gamma \left(\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} \right)_z, & B'_{z'} &= \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \wedge \mathbf{E} \right)_z. \end{aligned}$$

Une forme plus compacte s'obtient en décomposant les vecteurs en une composante parallèle à la vitesse \mathbf{u} de translation du référentiel mobile et une composante orthogonale.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{//} + \mathbf{E}_{\perp}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{//} + \mathbf{B}_{\perp}.$$

Ainsi:

$E'_{//} = E_{//},$	$B'_{//} = B_{//},$
$(44-1) \quad E'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} \right)_{\perp}$	$B'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}}{c^2} \wedge \mathbf{E} \right)_{\perp}.$

La transformation des champs électrique et magnétique n'est évidemment pas celle de Lorentz. \mathbf{E} et \mathbf{B} y apparaissent indissociables. Ce sont deux aspects d'une même réalité: l'interaction électromagnétique dont la loi de force s'exprime à l'aide de ces deux champs. Sur une particule chargée s'exerce la force de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

à partir de laquelle on peut construire le quadrivecteur force travail (C.F. § 28)

$$\begin{aligned} \gamma_v c \mathbf{F} &= \gamma_v c q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}), \\ \gamma_v (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) &= \gamma_v q (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}). \end{aligned}$$

La dernière égalité est justifiée par le fait que \mathbf{v} est orthogonale au produit vectoriel $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$.

Ni \mathbf{E} ni \mathbf{B} ne sont des quadrivecteurs. Il existe cependant **deux invariants** du champ.
D'abord:

$$\begin{aligned} E'^2 - c^2 B'^2 &= E'_{//}{}^2 + E'_{\perp}{}^2 - c^2 B'_{//}{}^2 - c^2 B'_{\perp}{}^2 \\ &= E_{//}{}^2 + \gamma^2 (\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B})_{\perp}{}^2 - c^2 B_{//}{}^2 - c^2 \gamma^2 (\mathbf{B} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{E}/c^2)_{\perp}{}^2 . \end{aligned}$$

Or:

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}|^2 = (\beta c B_{\perp})^2, \quad \text{et} \quad |\mathbf{u} \wedge \mathbf{E}/c^2|^2 = (\beta E_{\perp})^2/c^2,$$

de sorte que les termes croisés s'éliminent et:

$$E'^2 - c^2 B'^2 = E_{//}{}^2 + \gamma^2 (1 - \beta^2) E_{\perp}{}^2 - c^2 B_{//}{}^2 - c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) B_{\perp}{}^2 = E^2 - c^2 B^2 .$$

Ensuite:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' &= E_x B_x + \gamma^2 (E_y - u B_z) \left(B_y + \frac{u}{c^2} E_z \right) + \gamma^2 (E_z + u B_y) \left(B_z - \frac{u}{c^2} E_y \right) \\ &= E_x B_x + \gamma^2 (1 - \beta^2) E_y B_y + \gamma^2 (1 - \beta^2) E_z B_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} . \end{aligned}$$

On a donc finalement les **deux invariants**:

$E^2 - c^2 B^2$	et	$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$
-----------------	----	-------------------------------

45. Le tenseur du champ électromagnétique. Forme tensorielle des équations.

Tel qu'il vient d'être présenté, le champ électromagnétique est décrit par des objets mathématiques, vecteurs, qui s'inscrivent dans l'espace physique à 3 dimensions. Il convient maintenant de rechercher quels objets représentent ce champ dans l'espace-temps à 4 dimensions de la relativité restreinte. Or les champs électrique et magnétique dérivent du quadripotiel. On les obtient en procédant à des différenciations réécrites ici par exemple pour les composantes suivant Ox:

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{c} &= - \frac{\partial A_x}{\partial ct} - \frac{\partial \phi}{\partial x} = - (\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0), \\ B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = - (\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2). \end{aligned}$$

Ces composantes qui dépendent de deux indices sont les éléments d'un tenseur du second ordre antisymétrique deux fois contravariant. En effet, on obtient immédiatement

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = -\frac{E_x}{c} = -F^{10},$$

$$F^{23} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 = -B_x = -F^{23}.$$

La forme généralement adoptée du tenseur du champ électromagnétique s'écrit

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -c B_z & c B_y \\ E_y & c B_z & 0 & -c B_x \\ E_z & -c B_y & c B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Le tenseur doublement covariant associé est obtenu en appliquant la règle

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\tau} F^{\sigma\tau}.$$

Il s'écrit

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -c B_z & c B_y \\ -E_y & c B_z & 0 & -c B_x \\ -E_z & -c B_y & c B_x & 0 \end{pmatrix},$$

différent du précédent par changement de signe des composantes électriques.

Les composantes électriques E_x , E_y et E_z forment un vecteur polaire (vrai vecteur dont les composantes changent de signe lorsqu'on inverse le sens des axes) dans l'espace physique tridimensionnel tandis que les composantes magnétiques forment un tenseur antisymétrique de rang 3 qui est aussi un vecteur axial (pseudo vecteur dont les composantes ne changent pas de signe par réflexion — propriété du produit vectoriel —) dans ce même espace. On peut donc écrire de façon concise:

$$(F^{\mu\nu}) = (-\mathbf{E}, c\mathbf{B}); (F_{\mu\nu}) = (\mathbf{E}, c\mathbf{B}).$$

Les équations de Maxwell avec sources

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \wedge c\mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c},$$

ont également une expression tensorielle. La première est aussi

$$\partial_\mu F^{0\mu} = \frac{j^0}{\varepsilon_0},$$

tandis que chacune des composantes de la seconde peut se mettre sous la forme

$$\partial_{\mu} F^{i\mu} = \frac{j^i}{\varepsilon_0 c}, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Dans ces équations le quadrivecteur courant est $(\rho, \frac{\mathbf{j}}{c})$. On peut donc énoncer que la divergence du tenseur du champ est égale au quadricourant divisé par ε_0 . soit:

$$\partial_{\mu} F^{v\mu} = \frac{j^v}{\varepsilon_0 c}. \quad (45-1)$$

Pour l'autre paire d'équations, sans sources,

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \bullet \mathbf{B} = 0,$$

on constate d'abord que la dernière est

$$\partial_1 F^{23} + \partial_2 F^{31} + \partial_3 F^{12} = 0.$$

De même par exemple la composante suivant Ox de la première est

$$\partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} + \partial_0 F^{23} = 0.$$

On aura finalement 4 équations de forme

$$\partial_{\mu} F^{v\sigma} + \partial_{\nu} F^{\sigma\mu} + \partial_{\sigma} F^{\mu\nu} = 0, \quad (45-2)$$

où les indices doivent être tous différents.

L'ensemble (45-1) (45-2) constitue la forme tensorielle covariante des équations du champ électromagnétique. Associés à celui-ci la densité d'énergie et la densité de flux d'énergie s'écrivent dans l'espace physique à 3 dimensions

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2),$$

$$\Phi = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}.$$

Dans l'espace-temps à 4 dimensions, on a affaire à un tenseur d'énergie impulsion (présenté ici sans démonstration) dont l'expression générale des composantes est

$$T^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(g^{\mu\sigma} F_{\sigma\tau} F^{\tau\nu} + \frac{g^{\mu\nu}}{4} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} \right).$$

Ce tenseur est symétrique. On notera que:

$$\begin{aligned}
 T^{00} &= \frac{\varepsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2), && \text{densité d'énergie,} \\
 T^{0i} &= \left(\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \right)_i, && \text{composante du vecteur de Poynting,} \\
 T^{ij} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left[E^i E_j + c^2 B^i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) \right].
 \end{aligned}$$

Passons enfin à l'équation du mouvement d'une charge électrique q dans un champ électromagnétique. Dans l'espace physique à 3 dimensions, elle est soumise à la force de Lorentz et le mouvement obéit à l'équation

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).$$

Considérons l'équation relative à la composante suivant Ox par exemple et multiplions les deux membres par $\gamma_v c$. Alors

$$\gamma_v c \frac{dp_x}{dt} = \frac{dp^1}{dt_0} = q (E_x \gamma_v c + \gamma_v v_y c B_z - \gamma_v v_z c B_y) = q (F^{1\mu} v_\mu),$$

où p^1 et v^1 sont les composantes suivant Ox de la quadri-impulsion $(E, \mathbf{p}c)$ et de la quadrivitesse $(\gamma_v c, \gamma_v \mathbf{v})$, respectivement, et t_0 est le temps propre. Multipliant maintenant le travail de la force par γ_v , il vient (C.F. § 28)

$$\mathbf{F} \bullet \gamma_v \mathbf{v} = \gamma_v m_0 c^2 \frac{d\gamma_v}{dt} = \frac{dp^0}{dt_0} = q (E_x \gamma_v v_x) = q F^{0\mu} v_\mu.$$

D'où l'équation du mouvement écrite sous forme covariante dans l'espace-temps à quatre dimensions

$$\frac{dp^\mu}{dt_0} = q F^{\mu\nu} v_\nu. \quad (45-3)$$