

Jimmy ROUSSEL

MÉCANIQUE DES FLUIDES

Cours

Accessible en ligne : https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/

Dernière mise à jour : 10 septembre 2018

Table des matières

1	CINÉMATIQUE	2
1.1	Le modèle continu	3
1.2	Description d'un fluide en écoulement	5
1.3	Conservation de la masse	8
1.4	Caractéristiques d'un écoulement	9
2	DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS	13
2.1	Bilan des forces	14
2.2	Équation fondamentale de la dynamique des fluides parfaits	17
2.3	Statique des fluides	18
2.4	Écoulements permanents et incompressibles	23
3	FLUIDES VISQUEUX	27
3.1	Notion de viscosité	28
3.2	Dynamique d'un écoulement visqueux	31
3.3	Pertes de charge	33
3.4	Traînée et portance	40
4	TENSION SUPERFICIELLE	44
4.1	Énergie de surface	45
4.2	Forces capillaires	47
4.3	Mouillage	51
A	OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS	55

1 CINÉMATIQUE

Dans ce cours, nous étudions le fluide et son écoulement indépendamment des forces responsables de cet écoulement.

Ce chapitre est disponible en ligne à l'adresse :

https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/cinematique.php

Sommaire

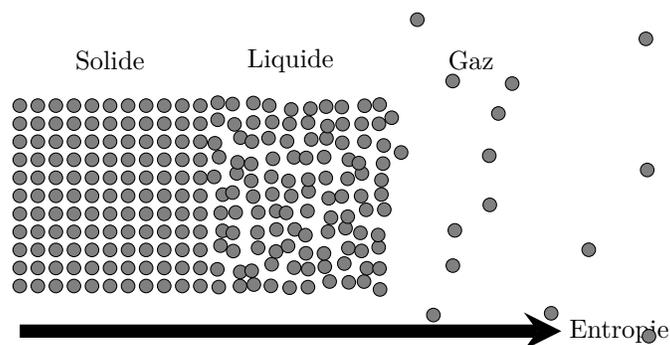
1.1 Le modèle continu	3
1.1.1 L'état fluide	3
1.1.2 Le modèle continu	4
1.2 Description d'un fluide en écoulement	5
1.2.1 Notion de ligne d'écoulement	5
1.2.2 Notion de trajectoire	6
1.2.3 Dérivée particulaire	7
1.2.4 Accélération d'une particule	7
1.3 Conservation de la masse	8
1.3.1 Vecteur densité de courant de masse	8
1.3.2 Équation de continuité	9
1.4 Caractéristiques d'un écoulement	9
1.4.1 Signification de la divergence de la vitesse	9
1.4.2 Écoulement incompressible	10
1.4.3 Signification du rotationnel de la vitesse	11

1.1 Le modèle continu

1.1.1 L'état fluide

Le terme fluide désigne un **comportement** qui s'oppose au comportement élastique ou plastique associé aux solides. Par définition, on dit que **la matière est fluide lorsqu'elle se déforme aussi longtemps que lui sont appliquées des contraintes tangentielles**. En termes simples on peut dire qu'un fluide coule quand un solide se déforme¹

Fondamentalement, le comportement fluide est lié, au niveau moléculaire, à **l'absence d'ordre à longue portée**² (contrairement aux cristaux) et à l'existence d'un **chaos moléculaire** (contrairement aux solides). Ces propriétés se retrouvent notamment chez les gaz et les liquides.



Les liquides

Dans un liquide, les interactions (l'interaction de Van der Waals, la liaison hydrogène, l'interaction électrostatique dans une solution électrolytique etc ...) jouent un rôle clé. L'interaction est telle que les molécules sont quasi en contact ce qui explique le caractère quasi-incompressible des liquides : les liquides présentent un **volume propre**. Les variations du volume V ou de la masse volumique μ avec la pression et la température se mesurent à l'aide du coefficient de dilatation α et du coefficient de compressibilité χ_T :

$$\chi_T = \left. \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial P} \right|_T \quad \text{et} \quad \alpha = - \left. \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_P$$

Pour l'eau, par exemple, la compressibilité vaut $\chi_T \approx 4,4 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ à 20°C. Cela signifie qu'il faut augmenter la pression de 227 bars pour voir la masse volumique augmenter de 1%. Les liquides ont également un coefficient de dilatation très faible.

Eau liquide (25°C, 1atm)	
$\Delta T = 10 \text{ K}$	$\frac{ \Delta \mu }{\mu} = 0,2\%$
$\Delta P = 1 \text{ bar}$	$\frac{ \Delta \mu }{\mu} = 0,02\%$

Le gaz

Dans un gaz, les particules interagissent peu, l'énergie est avant tout cinétique. Les distances interatomiques sont grandes ce qui explique qu'à l'inverse des liquides, **les gaz sont très compressibles**. Pour

1. Nous verrons plus tard qu'il existe des milieux qui présentent un comportement fluide lorsqu'on les observe sur de longues échelles de temps alors qu'ils ont un comportement élastique voire plastique sur de petites échelles de temps.

2. Certains systèmes présentent un ordre à longue portée suivant une seule direction. Ils ont alors un caractère cristallin selon cette direction et fluide selon les autres. On les désigne par le terme cristaux liquides.

un gaz, dans les conditions de pression et de température raisonnables et loin de tout point critique, le modèle du gaz parfait est tout à fait suffisant.

Vapeur d'eau (100° C, 1 atm)

$$\Delta T = 10 \text{ K} \quad \frac{|\Delta\mu|}{\mu} = 3\%$$

$$\Delta P = 1 \text{ bar} \quad \frac{|\Delta\mu|}{\mu} = 100\%$$

Approximation courantes :

- Cas des liquides :

$$\mu \approx \text{constante}$$

- Cas des gaz : modèle du Gaz Parfait

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{Mp}{RT} \quad \text{avec} \quad R = 8,315 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

1.1.2 Le modèle continu

Plusieurs approches sont possibles pour décrire un fluide :

- **L'approche « Dynamique Moléculaire »** : On peut chercher le comportement de N molécules en résolvant de façon numérique les équations de la mécanique du point appliquées aux N corps. Bien entendu, la limitation des ordinateurs, impose N petit. À l'heure actuelle le record est de l'ordre de 100 milliards d'atomes.
- **L'approche « milieu continu »** : Lorsque le libre parcours moyen ℓ est très petit devant l'échelle macroscopique, on choisit de décrire le fluide à une échelle intermédiaire entre l'échelle atomique et macroscopique : l'échelle mésoscopique.
- **L'approche statistique** : Lorsque le libre parcours moyen des molécules est du même ordre de grandeur que l'échelle macroscopique on utilise les équations de physique statistique (équation de Boltzmann) pour décrire le fluide.

La mécanique des fluides repose sur la deuxième approche. En effet, dans les situations courantes on peut, en général, distinguer trois échelles :

1. L'échelle macroscopique L . Par exemple L est le diamètre du tuyau quand on étudie l'écoulement dans un tuyau.
2. L'échelle des collisions $\ell \ll L$. ℓ est le libre parcours moyen, c'est-à-dire la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions successives. À cette échelle, les grandeurs varient de façon discontinue et imprévisible.
3. L'échelle mésoscopique a telle que $\ell \ll a \ll L$. À cette échelle, **les fluctuations sont lissées** de sorte que l'on peut définir des grandeurs locales continues.

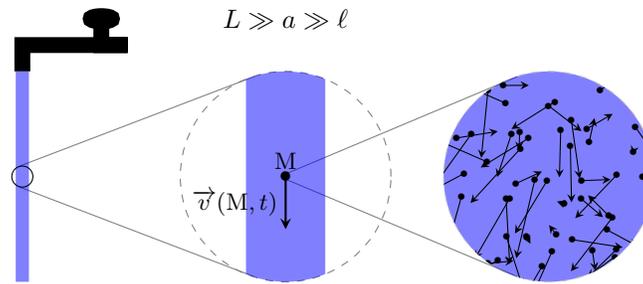


Fig. 1.1 – Les trois échelles.

Particule de fluide

On choisit alors comme échelle d'observation, l'échelle mésoscopique. On considère, autour d'un point M , un volume mésoscopique $\delta\tau$. Typiquement un volume de $1\mu\text{m}^3$ convient. Ce volume contient un grand nombre de particules ce qui permet de définir des **grandeurs moyennes locales** qui, elles, vont évoluer de façon continue : la masse volumique locale $\mu(M, t)$, la vitesse locale $\vec{v}(M, t)$...

On donne à ce « sac de molécules » le nom de **particule de fluide** qu'il ne faut pas confondre avec la notion de molécule.

Remarque : La vitesse v en mécanique des fluides désigne la norme du vecteur vitesse d'une particule de fluide. En conséquence on peut avoir $v(M) = 0$ bien que la vitesse moyenne d'une molécule soit non nulle :

$$v = \|\vec{v}_i\| \neq \|\overline{\vec{v}_i}\|$$

Conditions de validité du modèle :

Un milieu peut être considéré continu si le libre parcours moyen ℓ des molécules est petit devant la taille caractéristique L du système étudié. On définit le nombre de Knudsen

$$K_n = \frac{\ell}{L} \ll 1$$

Lorsque K_n n'est pas petit devant 1, le modèle continu n'est plus adapté.

Par exemple, dans la haute atmosphère, à l'altitude de 100 km, on a $\ell \approx 0,3\text{m}$. Pour calculer l'écoulement autour d'un véhicule spatial à cette altitude, le modèle continu ne conviendra pas.

1.2 Description d'un fluide en écoulement

Deux approches différentes existent. Le point de vue de Lagrange consiste à s'intéresser à la trajectoire des particules de fluide. Celle d'Euler se concentre sur l'évolution des propriétés du fluide en différents points et au cours du temps.

1.2.1 Notion de ligne d'écoulement

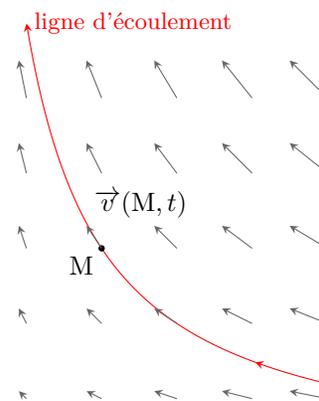
Adoptons l'approche d'Euler et supposons que l'on connaisse à **chaque instant** t le vecteur vitesse d'une particule de fluide située en M . Le vecteur vitesse $\vec{v}(M, t)$ désigne alors un champ vectoriel.

Notion de ligne d'écoulement

Par définition, une *ligne de courant* ou *ligne d'écoulement*, est une ligne de champ du vecteur vitesse, c'est-à-dire une courbe \mathcal{C} telle qu'à un instant t fixé, pour tout point $M \in \mathcal{C}$, $\vec{v}(M, t)$ est tangente à \mathcal{C} en M . Lorsque le champ de vitesse ne dépend pas du temps, les lignes d'écoulement n'évoluent pas au cours du temps : on dit que le **régime d'écoulement est stationnaire ou permanent**.

Pour un problème à deux dimensions, l'équation $f(x, y) = 0$ d'une ligne d'écoulement s'obtient en résolvant l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y(x, y, t)}{v_x(x, y, t)} \quad \text{avec } t \text{ fixe}$$



Exercice – On considère un écoulement bidimensionnel dont le champ de vitesse s'écrit :

$$\vec{v}(M, t) = -kx \vec{u}_x + ky \vec{u}_y \quad \text{avec } k = C^{\text{te}}$$

- Le régime est-il permanent ?
- Quelle est l'équation des lignes d'écoulement ?
- La vitesse est-elle constante le long d'une ligne de courant ?

Visualisation des lignes d'écoulement

On utilise des particules réfléchissantes que l'on photographie avec un court temps de pose. On a accès ainsi à des segments brillants qui donnent le sens de la vitesse en différents points ce qui permet de reconstituer la carte du champ de vitesse.

1.2.2 Notion de trajectoire

Dans la description de Lagrange, on s'intéresse à l'histoire de chaque particule de fluide. Considérons une particule de fluide \mathcal{P} située en $(x(t), y(t), z(t))$ à l'instant t . Par définition la trajectoire est la courbe paramétrique \mathcal{C} d'équation

$$\mathcal{C} \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \dot{x} = v_x(x(t), y(t), z(t), t) \\ \dot{y} = v_y(x(t), y(t), z(t), t) \\ \dot{z} = v_z(x(t), y(t), z(t), t) \end{cases}$$

La trajectoire retrace l'histoire d'une particule alors que la ligne d'écoulement est un « instantanée » du champ de vitesse. De ce fait, **ces deux notions sont différentes**. Par contre, lorsque que le régime d'écoulement est stationnaire, une particule suit nécessairement la ligne d'écoulement sur laquelle elle se trouve puisque celle-ci est fixe. Ainsi

On retiendra qu'en régime permanent, les trajectoires tracent les lignes d'écoulement.

Visualisation d'une trajectoire

On utilise des traceurs (colorants ou fumées) et l'on prend une photo avec un long temps de pose.

1.2.3 Dérivée particulière

Considérons une grandeur physique locale $G(M, t)$ attachée à une particule de fluide située en M à l'instant t . On peut penser à la température, la pression, la densité etc. Cherchons à calculer le taux de variation de cette grandeur **lorsque l'on suit la particule**. On appelle cette grandeur la **dérivée particulière** et on la note $\frac{DG}{Dt}$.

$$\begin{aligned} \frac{DG}{Dt} &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{G(x + v_x \delta t, y + v_y \delta t, z + v_z \delta t, t + \delta t) - G(x, y, z, t)}{\delta t} \\ &= \frac{G(x, y, z, t) + v_x \frac{\partial G}{\partial x} \delta t + v_y \frac{\partial G}{\partial y} \delta t + v_z \frac{\partial G}{\partial z} \delta t + \frac{\partial G}{\partial t} \delta t - G(x, y, z, t)}{\delta t} \end{aligned}$$

ce qui donne la formule que l'on retiendra :

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})G \quad \heartsuit \quad (1.1)$$

1.2.4 Accélération d'une particule

Calculons l'accélération d'une particule de fluide à partir du champ de vitesse eulérien $\vec{v}(M, t)$. L'accélération est le taux de variation du champ de vitesse en suivant une particule de fluide. On a donc :

$$\vec{a} = \frac{Dv_x}{Dt} \vec{u}_x + \frac{Dv_y}{Dt} \vec{u}_y + \frac{Dv_z}{Dt} \vec{u}_z$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_x \\ a_y &= \frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_y \\ a_z &= \frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v_z \end{aligned}$$

On pourra retenir le résultat sous forme compacte :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \quad \heartsuit \quad (1.2)$$

Le premier terme est lié au caractère non permanent de l'écoulement alors que le second au fait que la particule, en se déplaçant, visite des endroits où la vitesse change. On l'appelle le **terme convectif**.

Exercice – On considère un écoulement bidimensionnel dont le champ de vitesse est de la forme :

$$\vec{v}(M, t) = -kx \vec{u}_x + ky \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad k = C^{\text{te}}$$

- Que vaut la vitesse scalaire v en $x = 1$ et $y = 1$?
- Que vaut le vecteur accélération d'une particule située en $x = 1$ et $y = 1$?
- Quelle est le rayon de courbure de sa trajectoire ?

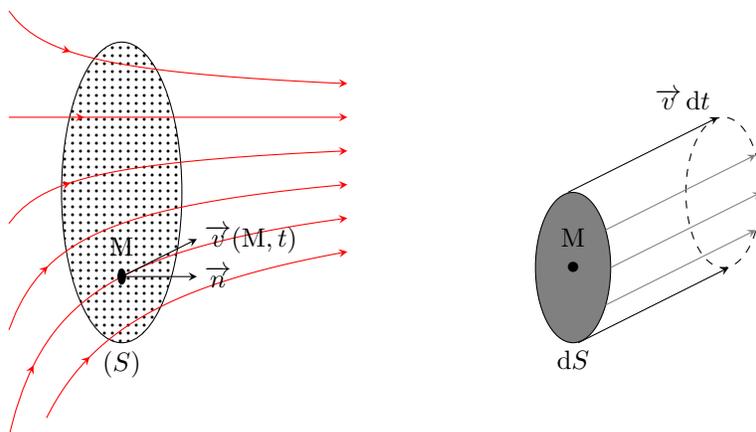


Fig. 1.2 – Calcul du débit massique.

1.3 Conservation de la masse

1.3.1 Vecteur densité de courant de masse

Un écoulement est un phénomène de transport puisqu'il s'agit d'un transfert de masse. C'est pourquoi il est naturel d'introduire la notion de **vecteur densité de courant de masse**.

Pour cela, cherchons à exprimer la masse qui traverse une section (S) lors d'un écoulement. Considérons une section infinitésimale dS autour d'un point M et calculons la masse d^2m de fluide traversant dS pendant dt . Cette masse se trouve dans le prisme de base dS et de génératrice $\vec{v} dt$. On a donc

$$d^2m = \mu(M, t) \vec{v}(M, t) \cdot \vec{n} dt dS$$

où \vec{n} est le vecteur normal à la section dS . En sommant toutes les contributions on obtient

$$dm = \left(\iint_{M \in (S)} \mu(M, t) \vec{v}(M, t) \cdot \vec{n} dS \right) dt$$

On en déduit le **flux de matière** ou **débit massique**

$$Q_m \triangleq \frac{dm}{dt} = \iint_{M \in (S)} \mu(M, t) \vec{v}(M, t) \cdot \vec{n} dS \quad \text{en kg/s}$$

Le débit massique est donc, au sens mathématique, le flux du vecteur $\vec{J}_m = \mu \vec{v}$:

$$Q_m = \iint_{M \in (S)} \vec{J}_m(M, t) \cdot \vec{n} dS \quad \text{où} \quad \vec{J}_m(M, t) = \mu(M, t) \vec{v}(M, t)$$

Le vecteur \vec{J}_m désigne le vecteur densité de courant de masse.

Remarque : le débit volumique Q_V mesure le volume de fluide qui traverse la surface (S) par unité de temps (unité : $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) :

$$Q_V = \iint_{M \in (S)} \frac{1}{\mu} \frac{d^2m}{dt} = \iint_{M \in (S)} \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

1.3.2 Équation de continuité

Établissons la première équation fondamentale de la mécanique des fluides. Il s'agit d'une contrainte imposée à $\vec{v}(M, t)$ et $\mu(M, t)$ qui repose sur une loi de conservation, celle de la masse.

Prenons un volume de contrôle fixe (V) dans un fluide, délimité par une surface fictive (S). Soit $m(t)$ la masse contenue à l'intérieur de la surface fermée à l'instant t . Par définition de la masse volumique,

$$m(t) = \iiint_{M \in (V)} \mu(M, t) d\tau$$

Cette masse varie à cause du flux de matière à travers (S) :

$$\frac{dm(t)}{dt} = - \iint_{M \in (S)} \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}^{\text{ext}}$$

où $d\vec{S}^{\text{ext}}$ est dirigé vers l'extérieur de la surface fermée (S) ce qui explique l'origine du signe $-$ devant l'intégrale. Or, on a également

$$\frac{dm(t)}{dt} = \iiint_{M \in V} \frac{\partial \mu(M, t)}{\partial t} d\tau$$

Théorème de Green-Ostrogradsky ou théorème de la divergence

Le flux d'un champ vectoriel $\vec{A}(M)$ à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale sur le volume V limité par (S) de la divergence du champ vectoriel.

$$\iint_{M \in (S)} \vec{A}(M) \cdot d\vec{S}^{\text{ext}} = \iiint_{M \in V} \text{div} \vec{A}(M) d\tau \quad \text{avec} \quad \text{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

D'après le théorème de la divergence on obtient :

$$\iiint_{M \in (V)} \left[\text{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} \right] d\tau = 0 \quad \forall V$$

d'où l'équation de conservation de la masse, dite aussi **équation de continuité**

$$\text{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \quad \text{partout et à chaque instant} \quad \heartsuit \quad (1.3)$$

1.4 Caractéristiques d'un écoulement

1.4.1 Signification de la divergence de la vitesse

La quantité $\text{div} \vec{v}$ prend une signification bien précise en mécanique des fluides. Partons de la relation

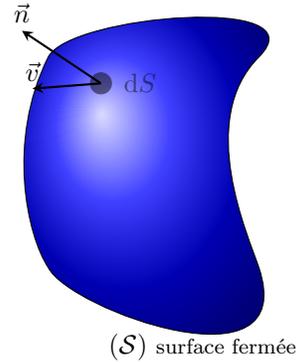
$$\text{div}(f \vec{A}) = f \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f$$

Appliqué au vecteur densité de courant de matière $\vec{J}_m = \mu \vec{v}$ cela donne

$$\text{div}(\mu \vec{v}) = \mu \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mu$$

En utilisant l'équation de continuité on obtient

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mu = -\mu \text{div} \vec{v}$$



On reconnaît dans le terme de gauche, la dérivée particulaire de μ .

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\mu} \frac{D\mu}{Dt}$$

Si l'on note δm et $\delta \tau$ la masse et le volume d'une particule de fluide en mouvement on peut écrire

$$-\frac{1}{\mu} \frac{D\mu}{Dt} = -\frac{1}{\mu} \frac{D(\delta m / \delta \tau)}{Dt} = \frac{\delta m}{\mu \delta \tau^2} \frac{D\delta \tau}{Dt} = \frac{1}{\delta \tau} \frac{D\delta \tau}{Dt}$$

Finalement, on obtient

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{\delta \tau} \frac{D\delta \tau}{Dt} \quad \heartsuit \quad (1.4)$$

La divergence de la vitesse d'écoulement représente ainsi la vitesse de dilatation de la particule de fluide.

Exemple 1 : écoulement unidimensionnel uniforme

Considérons l'écoulement décrit par le champ de vitesse

$$\vec{v}(M, t) = v \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad v = C^{\text{te}}$$

Les lignes de courant sont des droites parallèles et l'écoulement est à divergence nulle. Les particules de fluides se déplacent sans se dilater comme le montre la figure suivante³.

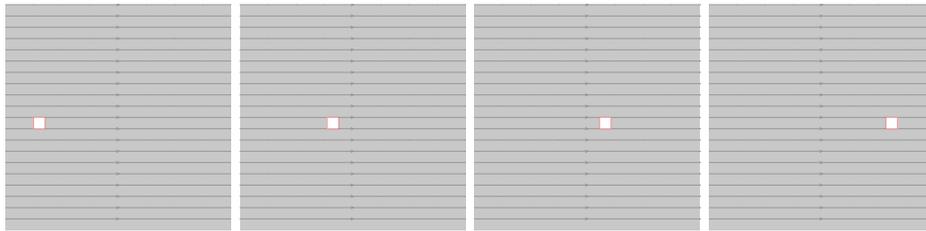


Fig. 1.3 – Particule de fluide dans un écoulement uniforme, capturé à différents instants.

Exemple 2 : écoulement radial

Considérons l'écoulement décrit en coordonnées polaires par le champ de vitesse

$$\vec{v}(M, t) = v \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad v = C^{\text{te}}$$

Les lignes de courant sont des droites issues de O et les particules de fluides se déplacent en se dilatant comme le montre la figure suivante⁴ ce qui prouve que l'écoulement est à divergence positive.

1.4.2 Écoulement incompressible

Définition

Un fluide est en écoulement incompressible quand les particules de fluide ont un volume qui reste constant au cours de l'écoulement. Elles se déforment donc sans variation de masse volumique :

$$\frac{D\mu}{Dt} = 0$$

3. cf. simulation à l'adresse https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/cinematique.php

4. cf. simulation à l'adresse https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/cinematique.php

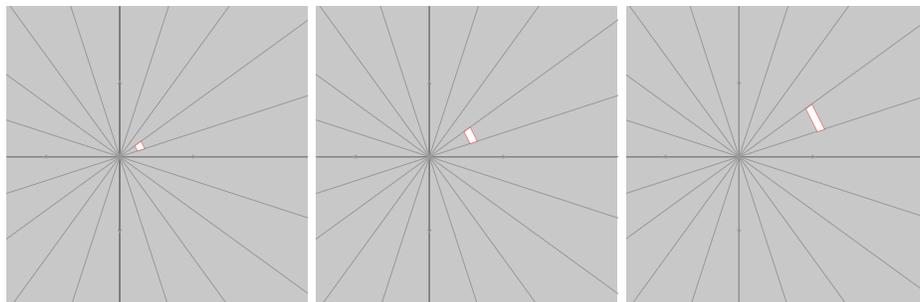


Fig. 1.4 – Particule de fluide dans un écoulement radial, capturé à différents instants.

Par conséquent, d'après la relation (1.4), un fluide en écoulement incompressible vérifie la relation

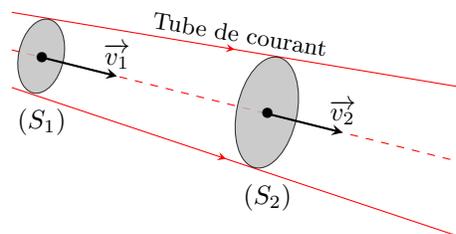
$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \iint_{(S)} \vec{v} \cdot d\vec{S}^{\text{ext}} = 0$$

la vitesse est à flux conservatif.

Tube de courant

Toutes les lignes de courant qui s'appuient sur une courbe \mathcal{C} fermée constituent un *tube de courant*. Dans ce cas, la conservation du flux de vitesse s'exprime par

$$\iint_{(S_1)} \vec{v} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{(S_2)} \vec{v} \cdot d\vec{S}_2 \quad \text{soit} \quad Q_{V1} = Q_{V2}$$



Le débit volumique se conserve le long d'un tube de courant.

Si l'on définit la **vitesse moyenne dans le section S** par :

$$\bar{v} \triangleq \frac{Q_V}{S}$$

On obtient

$$\bar{v}_1 S_1 = \bar{v}_2 S_2$$

Autrement dit, dans un tube de courant, **le resserrement des lignes de courant provoque une augmentation de la vitesse moyenne.**

1.4.3 Signification du rotationnel de la vitesse

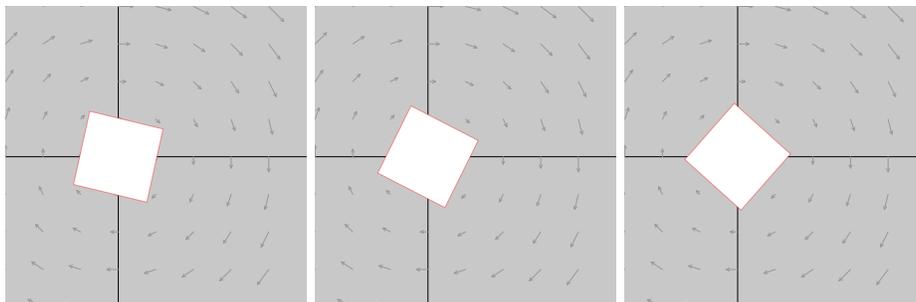
Exemple

Commençons par l'étude de l'exemple suivant. Soit un écoulement bidimensionnel dont le champ de vitesse s'écrit

$$\vec{v}(M, t) = -k y \vec{u}_x + k x \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad k = \text{C}^{\text{te}}$$

1. Tout d'abord, on constate que $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial(-k y)}{\partial x} + \frac{\partial(k x)}{\partial y} = 0$. L'écoulement est donc incompressible.
2. Le rotationnel de la vitesse vaut

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left(\frac{\partial(k x)}{\partial x} - \frac{\partial(-k y)}{\partial y} \right) \vec{u}_z = 2k \vec{u}_z$$



3. Plaçons une particule carrée d'arête $2a$ en O . Quel est son mouvement ?

La figure⁵ montre que les sommets sont animés d'une vitesse orthoradiale de sorte que la particule tourne autour de O . La vitesse d'un sommet vaut $v = \sqrt{2}ka$ d'où une vitesse angulaire de rotation $\omega = k$.

Vecteur tourbillon

L'exemple précédent montre que pour un écoulement rotationnel, les particules de fluides tournent à une vitesse angulaire égal à la moitié de la valeur du rotationnel. De manière générale, on définit le **vecteur tourbillon**

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$$

Lorsque $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$, l'écoulement est tourbillonnaire ce qui se traduit par l'existence d'un mouvement de rotation des particules lors de l'écoulement.

Écoulement potentiel

Lorsque $\vec{\Omega} = \vec{0}$, le champ de vitesse est nécessairement un gradient.

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{\nabla} \varphi$$

où $\varphi(M, t)$ désigne le **potentiel des vitesses**. Dans ce cas on parle d'écoulement **irrotationnel** ou **potentiel**.

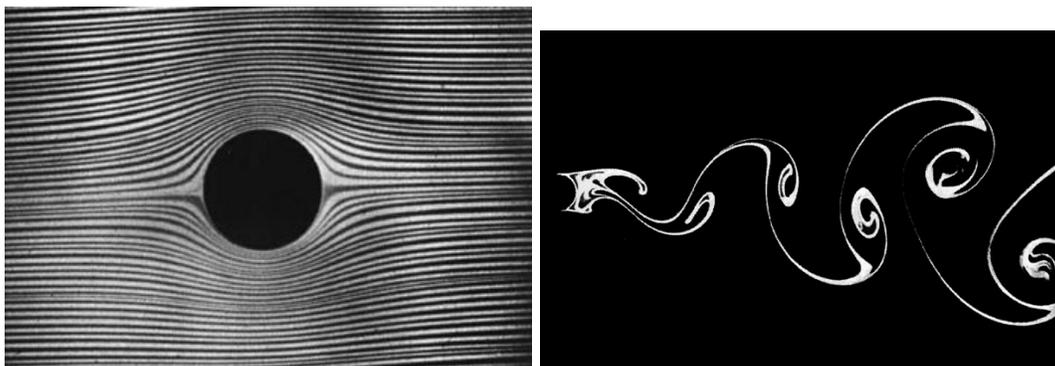


Fig. 1.5 – Quelques écoulement réels. À gauche, écoulement d'un fluide à la vitesse d'un millimètre par seconde autour d'un obstacle cylindrique. L'écoulement est permanent, incompressible et irrotationnel caractérisé par l'équation $\Delta\varphi = 0$. À droite, allée tourbillonnaire de Von Karman produit par un écoulement suffisamment rapide autour d'un obstacle cylindrique.

5. cf. simulation à l'adresse https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/cinematique.php

2 DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS

La dynamique des fluides relie l'écoulement d'un fluide aux actions qui lui sont appliquées. Ce cours se limite aux écoulements pour lesquels les couches de fluide glissent les unes sur les autres sans dissipation de chaleur. On parle alors de *fluide parfait*. On détaille particulièrement le cas des fluides au repos ainsi que celui des écoulements incompressibles et stationnaire.

Ce chapitre est disponible en ligne à l'adresse :

https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/fluides-parfaits.php

Sommaire

2.1	Bilan des forces	14
2.1.1	Forces extérieures	14
2.1.2	Forces de pression	15
2.1.3	Force volumique associée aux forces internes	16
2.2	Équation fondamentale de la dynamique des fluides parfaits	17
2.2.1	Équation d'Euler	17
2.2.2	Résolution de l'équation d'Euler	17
2.3	Statique des fluides	18
2.3.1	Liquide dans un champ de pesanteur	18
2.3.2	Gaz dans un champ de pesanteur	19
2.3.3	Liquide en rotation	20
2.3.4	Poussée d'Archimède	22
2.4	Écoulements permanents et incompressibles	23
2.4.1	Théorème de Bernoulli	23
2.4.2	Application I- Formule de Torricelli	24
2.4.3	Application II : l'effet Venturi	25
2.4.4	Application III - Le tube de Pitot	26

2.1 Bilan des forces

Au sein d'un fluide parfait, on distingue deux types de forces :

- Les forces dont l'origine est extérieure au fluide comme la pesanteur.
- Les forces de contact entre particules de fluide que l'on appelle forces internes.

2.1.1 Forces extérieures

Nous appelons forces extérieures les actions à distance qui agissent sur toutes les molécules du fluide de sorte qu'elles sont proportionnelles au volume de fluide considéré. Pour une particule de fluide de volume $d\tau$, la force extérieure se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dF}_{\text{ext}} &= \overrightarrow{f}_{\text{v,ext}} d\tau \\ [\text{N}] &= [\text{N.m}^{-3}] [\text{m}^3] \end{aligned}$$

La quantité $\overrightarrow{f}_{\text{v,ext}}$ s'appelle *force volumique extérieure*. La résultante des forces extérieures sur un volume (V) se calcule ainsi :

$$\overrightarrow{F}_{\text{ext}} = \iiint_{M \in (V)} \overrightarrow{f}_{\text{v,ext}} d\tau$$

La pesanteur

Pour un fluide plongé dans un champ de pesanteur, on a $\overrightarrow{dF}_{\text{ext}} = dm \overrightarrow{g} = \mu \overrightarrow{g} d\tau$ d'où

$$\overrightarrow{f}_{\text{v,ext}} = \mu \overrightarrow{g} \quad \heartsuit \quad (2.1)$$

La force électromagnétique

pour un plasma baignant dans un champ électromagnétique on a

$$\overrightarrow{f}_{\text{v,ext}} = \rho_e (\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}) \quad \heartsuit \quad (2.2)$$

où ρ_e désigne la densité volumique de charges.

Les forces d'inertie

Si le référentiel d'étude n'est pas galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie. Une masse dm de fluide subit une force d'inertie

$$\overrightarrow{dF}_{\text{ext}} = -dm \overrightarrow{a}_e - 2dm \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$$

d'où

$$\overrightarrow{f}_{\text{ext}} = -\mu (\overrightarrow{a}_e + 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}) \quad \heartsuit \quad (2.3)$$

2.1.2 Forces de pression

Dans un fluide au repos, une particule de fluide est soumise de la part du fluide environnant à des actions dites internes au fluide. On admettra que :

- Ces forces sont proportionnelles à la surface sur laquelle elles s'exercent. En effet, microscopiquement, les actions intermoléculaires sont de très courte portée (collision ou interaction de Van Der Waals) de sorte qu'elles concernent uniquement les molécules à la surface de la particule de fluide.
- Ces forces sont orientées perpendiculairement à la surface sur laquelle elles s'exercent.
- Le coefficient de proportionnalité s'appelle la **pression**.

Mathématiquement, on écrira

$$\begin{aligned} \vec{dF}_{\text{int}} &= -p(M) \vec{dS}_{\text{ext}} \\ [N] &= [N \cdot m^{-2}] [m^2] \end{aligned} \quad \heartsuit \quad (2.4)$$

où \vec{dS}_{ext} représente le vecteur élément de surface dirigé vers l'extérieur de la particule de fluide par convention.

Unités

Dans le Système International d'Unités, la pression s'exprime en **pascal** (symbole Pa), en hommage à Blaise Pascal¹.

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \quad \heartsuit \quad (2.5)$$

Il existe également d'autres unités encore très utilisées (*cf.* Tableau ci-dessous).

Unité	Équivalence en pascal
bar	1 bar = 10^5 Pa
atmosphère	1 atm = $1,013 \cdot 10^5$ Pa
torr	1 torr = 1 mm Hg = 133,3 Pa

Exercice – À quelle masse répartie sur 1 cm^2 correspond 1 bar si l'on prend $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

1 bar c'est 100 000 newton par mètre carré soit 10 newton par centimètre carré ce qui correspond au poids d'un kilogramme.

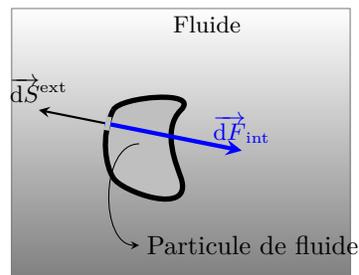


Fig. 2.1 – Notion de force de pression

1. **Blaise Pascal** (1623–1662) : Mathématicien, physicien et philosophe français, né à Clermont-Ferrand. Pascal contribua au développement des mathématiques (probabilités, invention du premier calculateur) de la philosophie (« Les pensées ») et de l'hydraulique (principe de Pascal). Il met fin au dogme aristotélicien selon lequel « la nature a horreur du vide ». En effet, il montre, avec la collaboration de son beau frère Perrier, que l'ascension du mercure dans l'expérience de Toricelli est due à la pression atmosphérique.

Ordres de grandeur

Pressions rencontrées dans la Nature	
Centre du Soleil	10^{16} Pa
Centre de la Terre	10^{11} Pa
Record Haute pression en labo	$1,510^{10}$ Pa
Abysses des océans	10^8 Pa
Talons aiguilles	10^7 Pa
Atmosphère de la terre	10^5 Pa
Trompe à eau	1000 Pa
Ultra vide en labo	10^{-12} Pa

2.1.3 Force volumique associée aux forces internes

Dans un fluide parfait, les forces internes sont normales : elles se résument aux forces de pression. Insistons sur le fait que les forces de pression sont des actions de contact (interactions de courte portée) et donc surfaciques. Ceci étant dit, montrons que la résultante des forces de pression sur une particule de fluide peut s'exprimer à l'aide d'une force volumique.

Dans un fluide, délimitons un volume (V) à l'aide d'une surface fermée (S) et calculons la résultante des forces de pression qu'exerce le fluide extérieur sur ce volume. En un point M de la surface (S), la force de pression vaut

$$\vec{F} = \iint_{M \in (S)} -p(M) \vec{dS}^{\text{ext}}$$

Munissons nous d'un repère cartésien et exprimons la force suivant l'axe Ox :

$$F_x = \iint_{M \in (S)} -p(M) \vec{u}_x \cdot \vec{dS}^{\text{ext}}$$

Le théorème de Green-Ostrogradsky donne alors :

$$F_x = \iiint_{M \in (V)} -\text{div}(p(M) \vec{u}_x) \, d\tau = \iiint_{M \in (V)} -\frac{\partial p}{\partial x} \, d\tau$$

Ainsi la résultante des forces de pression s'écrit :

$$\vec{F} = \iiint_{M \in (V)} -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z\right) \, d\tau = \iiint_{M \in (V)} -\vec{\nabla} p(M) \, d\tau \quad (2.6)$$

On peut donc définir une force volumique \vec{f}_p associée à la résultante des forces de pression :

$$\vec{f}_p = -\vec{\nabla} p(M) \quad \heartsuit \quad (2.7)$$

Cette formule signifie que lorsque la pression est uniforme, la résultante des forces de pression sur un volume de fluide est nulle. Lorsque la pression n'est pas uniforme, la résultante des forces de pression sur une particule de fluide est opposée au gradient de pression c'est-à-dire orientée vers les valeurs décroissantes de pression : La force de pression tend donc à déplacer les particules de fluide vers les basses pressions.

Remarque : l'équation (2.7) signifie aussi que la résultante des forces de pression est conservative. On peut définir une énergie potentielle volumique de pression $e_p = p$.

2.2 Équation fondamentale de la dynamique des fluides parfaits

2.2.1 Équation d'Euler

Supposons un fluide parfait en écoulement dans un référentiel galiléen². Appliquons le **Principe Fondamentale de la Dynamique** à chaque particule de fluide :

- Système d'étude : une particule de fluide située en M à l'instant t de masse $dm = \mu(M, t) d\tau$

- Bilan des forces :

$$\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{f}_{v,ext} d\tau + \overrightarrow{f}_p d\tau = \left(\overrightarrow{f}_{v,ext} - \overrightarrow{\nabla} p(M, t) \right) d\tau$$

- 2nde loi de Newton $dm \frac{D\vec{v}}{Dt} = \overrightarrow{dF}$ d'où l'**équation d'Euler**

$$\mu(M, t) \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\nabla} p(M, t) + \overrightarrow{f}_{v,ext} \quad \heartsuit \quad (2.8)$$

2.2.2 Résolution de l'équation d'Euler

L'équation d'Euler est une **équation aux dérivées partielles du premier ordre**. On remarque qu'elle est non linéaire à cause de la présence du terme convectif $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{v}$; c'est ce qui rend les problèmes de mécanique des fluides mathématiquement redoutables...

Regardons si nous disposons d'assez d'équations pour traiter un problème de mécanique des fluides parfaits.

Le fluide est incompressible

Dans ce cas la masse volumique est fixée. Le problème présente donc 4 inconnues scalaires : le champ de pression $p(M, t)$ et le champ de vitesse $\vec{v}(M, t)$ (3 composantes). Il faut donc 4 équations scalaires ! L'équation d'Euler n'en donne que 3. La quatrième est donnée par l'équation de continuité $\text{div} \vec{v} = 0$

Le fluide est compressible

La masse volumique peut varier sous l'effet de la pression mais aussi sous l'effet de la chaleur. En général le fluide possède une équation d'état locale $\mu(p, T)$. Le problème présente donc 6 inconnues scalaires : le champ de pression $p(M, t)$, les trois composantes du champ de vitesse $\vec{v}(M, t)$, la masse volumique $\mu(M, t)$ et la température $T(M, t)$. Il faut donc 6 équations scalaires. L'équation d'Euler en donne 3, la quatrième est donnée par l'équation de continuité $\text{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$, la cinquième par l'équation d'état du fluide $\mu(p, T)$ et la dernière par le premier principe de la thermodynamique. Dans ce cas une bonne modélisation des transferts thermiques est nécessaire ce qui rend le problème très ardu. Par exemple, étudier une étoile ou la combustion d'une flamme nécessite ces 6 équations et surtout de gros ordinateurs...

L'équation d'Euler et de continuité sont des équations différentielles du premier ordre ; leur intégration va donc produire une constante d'intégration par variable. On déterminera ces constantes d'intégration par les conditions aux interfaces (fluide1/fluide2 ou fluide/solide).

2. Si le référentiel n'est pas galiléen, il suffit d'ajouter dans le bilan des forces, les forces volumiques d'inertie.

Conditions aux limites d'un fluide parfait

- Condition sur $\vec{v}(M, t)$: à la traversée d'une interface, la **composante normale de la vitesse** est continue.
- Condition sur $p(M, t)$: la pression est continue à la traversée d'une interface fluide-fluide ^a

a. condition valable quand on néglige les effets de tension superficielle.

2.3 Statique des fluides

La statique des fluides étudie les fluides au repos. Il existe alors un référentiel dans lequel $\vec{v}(M, t) = \vec{0}$ partout et à chaque instant. Dans ce référentiel, l'équation d'Euler devient

$$\vec{f}_{v, \text{ext}} - \vec{\nabla} p = \vec{0} \quad (2.9)$$

Traitons quelques situations particulières.

2.3.1 Liquide dans un champ de pesanteur

Considérons un liquide au repos dans le champ de pesanteur.

1. Supposons le liquide incompressible $\Rightarrow \mu = C^{\text{te}}$
2. Seule la pesanteur agit sur le fluide $\Rightarrow \vec{f}_{v, \text{ext}} = \mu \vec{g}$
3. En projetant l'équation de la statique (**axe z descendant !**) on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu g \end{cases} \quad (2.10)$$

La pression ne dépend donc que de z .

4. Finalement, en intégrant la dernière relation

$$\frac{dp}{dz} = \mu g \quad \Rightarrow \quad p(z) = p_0 + \mu g z \quad \heartsuit \quad (2.11)$$

La pression augmente linéairement avec la profondeur. Le terme $\mu g z$ représente la pression due au poids de la colonne de liquide qui surplombe un point à la profondeur z .

Exercice – De quelle profondeur faut-il s'enfoncer dans l'océan pour voir la pression augmenter de 1 bar si l'on prend $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$?

$$\mu g h = 10^5 \quad \Rightarrow \quad h \simeq \frac{10^5}{1000 \times 9,8} = 10,2 \text{ m}$$

Conséquences

- Les isobares sont horizontales, par conséquent la surface libre (isobare $p = p_{\text{ext}}$) aussi.
- **Mesure absolue de pression** à l'aide du baromètre à mercure inventé par Evangelista Torricelli³ (Fig. 2.2). On a

$$p_{\text{atm}} = \mu gh \Rightarrow 1 \text{ atm} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} \rightarrow h \simeq 760 \text{ mm de Hg} \quad (2.12)$$

Remarque : avant 1954, la pression atmosphérique était définie à partir de la formule (2.12) : 1 atmosphère correspond à une hauteur de mercure de 76 cm pris à 0°C en un lieu de champ de pesanteur standard $g = 9,806650 \text{ m.s}^{-2}$ ce qui donnait $p_{\text{atm}} = 1,013249 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. À l'heure actuelle on a $1 \text{ atm} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ par définition.

- **Mesure relative de pression** à l'aide d'un manomètre à liquide en U (Fig. 2.2) :

$$\Delta p = \mu gh$$

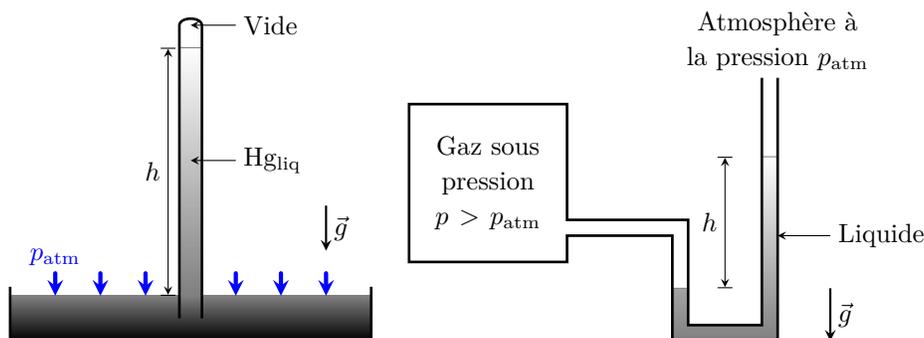


Fig. 2.2 – Mesures absolue et relative de pression. À gauche, expérience de Torricelli (1644). À droite, Manomètre à liquide.

2.3.2 Gaz dans un champ de pesanteur

Les gaz étant compressibles, il faut utiliser l'équation d'état ainsi que les principes de la thermodynamique pour résoudre le problème.

Modèle d'atmosphère isotherme

Considérons un gaz isotherme ($T = T_0$) en équilibre dans le champ de pesanteur terrestre. L'équation d'état du gaz parfait donne :

$$\mu = \frac{Mp}{RT_0}$$

En prenant l'axe z ascendant, l'équation (2.10) devient

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{Mp}{RT_0}g$$

3. Élève de Galilée, il découvre en 1644 le principe du baromètre à mercure. Le 19 septembre 1648, le beau-frère de Blaise Pascal, Florin Périer, montre que la hauteur du mercure dans le baromètre de Torricelli ne dépend que de la pression atmosphérique (il obtient à Clermont Ferrand (460m) $h = 71,2 \text{ cm}$ et sur le Puy de Dôme (1464m) $h = 62,7 \text{ cm}$ de mercure.

équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont la solution s'écrit

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT_0}{Mg} \quad (2.13)$$

où p_0 est la pression en $z = 0$. La pression, comme la masse volumique ou la densité de particules, décroît exponentiellement avec l'altitude z : c'est la loi de nivellement barométrique. La quantité H représente une distance caractéristique. Plus de 99% du gaz se retrouve sous l'altitude $z = 5H$.

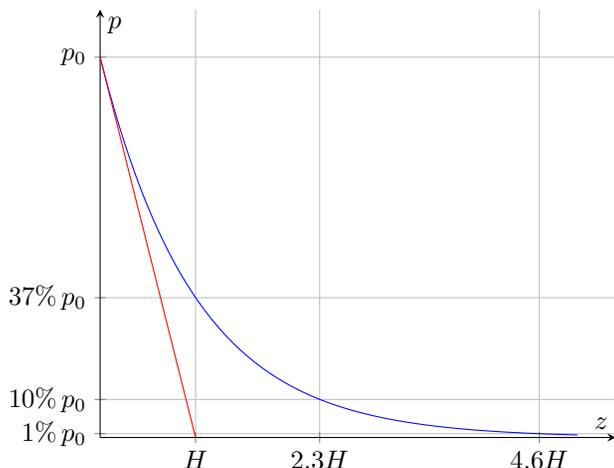


Fig. 2.3 – Nivellement barométrique : décroissance exponentielle de la pression avec l'altitude.

Exercice – On considère que la troposphère et la stratosphère forment une atmosphère de température moyenne $T_0 \simeq 250$ K. Quelle est la hauteur correspondant à 99% d'atmosphère en masse ?

$$z = 4,6 H = 4,6 \times \frac{8,315 \times 250}{29.10^{-3} \times 9,8} \simeq 34 \text{ km.}$$

Si l'altitude est petite devant H , la loi (2.13) donne

$$\frac{\delta p}{p} \simeq -\frac{\delta z}{H} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta p}{p} \sim -10^{-4} \quad \text{pour} \quad z = 1 \text{ m}$$

En conclusion, on peut négliger la pesanteur dans un gaz sur une échelle de quelques mètres.

2.3.3 Liquide en rotation

Un flacon cylindrique ouvert, contient un liquide de masse volumique μ . On fait tourner le flacon autour de son axe à la vitesse angulaire ω . Ce liquide n'est donc pas au repos dans le référentiel du laboratoire. Cependant, après un régime transitoire qui dépend de la viscosité du liquide, celui-ci tourne de façon solide à la même vitesse angulaire que le cylindre. Ainsi, dans le référentiel lié au cylindre, le liquide est au repos. On raisonnera donc dans ce référentiel tournant (noté \mathcal{R}') muni d'un système de coordonnées cylindriques.

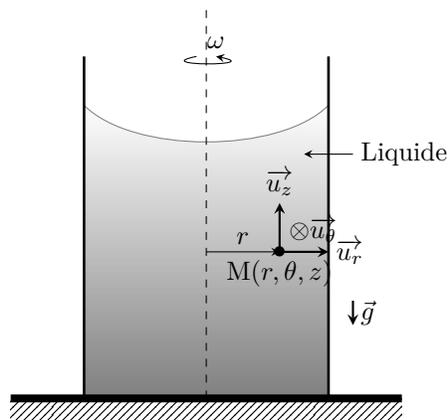


Fig. 2.4 – Cylindre en rotation.

Bilan des forces.

Le référentiel n'étant pas galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie :

- Tout d'abord, la force de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -2\mu\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')$ est nulle car, $\vec{v}(M/\mathcal{R}') = \vec{0}$.
- La force d'entraînement (ou force centrifuge) vaut $\vec{f}_{ie} = \mu r\omega^2\vec{u}_r$.
- La force volumique de pesanteur vaut $\vec{f}_g = \mu\vec{g}$

L'équation de la statique des fluides (2.9) donne donc

$$\mu r\omega^2\vec{u}_r + \mu\vec{g} - \vec{\nabla}p = \vec{0}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \mu r\omega^2 & \rightarrow p = 1/2\mu\omega^2 r^2 + f(z) \\ \frac{\partial p}{r\partial\varphi} = 0 & \downarrow \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\mu g & \text{et } \frac{\partial p}{\partial z} = f'(z) \Rightarrow f(z) = -\mu g z + C^{\text{te}} \end{cases}$$

Finalement la pression dépend de la distance à l'axe r et de z :

$$p(r, z) = \frac{\mu r^2\omega^2}{2} - \mu g z + C^{\text{te}}$$

La surface libre étant une surface isobare, elle obéit à l'équation

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

La surface libre adopte une forme parabolique d'axe de révolution (Oz).

Application – Télescope à miroir liquide

Des équipes de l'Université Laval, de l'University of British Columbia et de l'Institut d'astrophysique de Paris, ont mis au point un télescope Nommé Large Zénith Telescope (LZT) dont le miroir primaire fait 6 mètres de diamètre. Contrairement aux télescopes conventionnels dont le miroir est fait de verre, le LZT a un miroir fait de liquide réfléchissant, du mercure plus précisément qui adopte une surface parabolique puisque mis en rotation dans une cuve. Le miroir parabolique obtenu permet de faire l'image d'une étoile au foyer de la parabole avec précision. Sa focale vaut

$$f = \frac{g}{2\omega^2}$$

La principale limitation du LZT, et des autres miroirs liquides, est qu'on ne peut le pointer ailleurs qu'au zénith, sinon le liquide s'échappe de la cuvette. Au-dessus du miroir, une étroite bande de ciel défile à la vitesse de la rotation terrestre. Un astre donné met environ une minute à traverser le champ de vision du télescope.



2.3.4 Poussée d'Archimède

Imaginons un solide cubique d'arête a immergé dans un liquide au repos et calculons la résultante des forces de pression $\vec{\Pi}$.

- Tout d'abord, la pression ne dépend que de la profondeur $p(z) = p_0 + \mu g z$
- Par symétrie, les forces de pression horizontales se compensent, contrairement aux forces verticales du fait de la variation de pression avec la profondeur. $\vec{\Pi}$ est donc suivant Oz :

$$\begin{aligned}\vec{\Pi} &= p(z) a^2 \vec{u}_z - p(z+a) a^2 \vec{u}_z \\ &= -\mu g a^3 \vec{u}_z \\ \vec{\Pi} &= -m_d \vec{g}\end{aligned}$$

où m_d désigne la masse de liquide déplacé.

On obtient donc une force ascendante égale au poids du volume de liquide déplacé.

Ce résultat particulier se généralise sans difficulté. Si l'on considère un solide de volume V immergé dans un fluide quelconque au repos dans un champ de pesanteur, la résultante des forces de pression s'écrit

$$\vec{\Pi} = \iint_{M \in (S)} -p(M) \vec{dS}^{\text{ext}} = \iiint_{M \in (V)} -\vec{\nabla} p \, d\tau$$

Or, à l'équilibre $\mu \vec{g} = \vec{\nabla} p(M)$ d'où

$$\vec{\Pi} = \iiint_{M \in (V)} -\mu(M) \vec{g} \, d\tau = -m_d \vec{g}$$

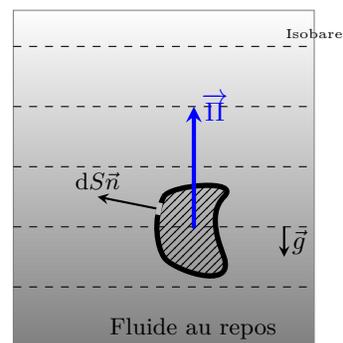
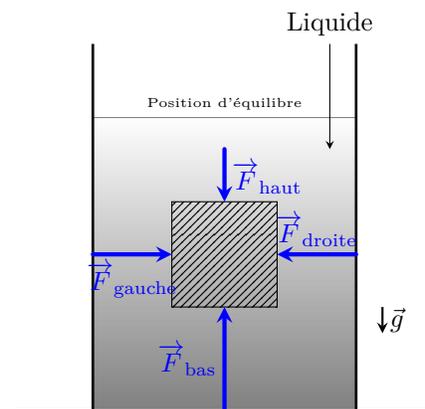
Cette force est opposée à la pesanteur et s'appelle la poussée d'Archimède.

THÉORÈME D'ARCHIMÈDE (250 AV.J.C.)

Tout corps immergé partiellement ou totalement dans un fluide subit de la part de celui-ci une poussée verticale, dirigée vers le haut, appelée poussée d'Archimède, dont l'intensité est égale au poids du fluide déplacé. Le point d'application de cette force est le centre de poussée ; il est différent, en général, du centre de gravité.

Applications

- Flottaison des bateaux ;
- Ascension des ballons sondes ;
- Courants de convection.



2.4 Écoulements permanents et incompressibles

2.4.1 Théorème de Bernoulli

Ce théorème énoncé en premier par Daniel Bernoulli⁴, est une équation intégrale de l'équation d'Euler qui exprime la conservation de l'énergie.

Hypothèses

Le théorème de Bernoulli dans sa formulation classique ne s'applique qu'aux **écoulements stationnaires incompressibles et sans viscosité**. On a donc

- Fluide parfait : les champs de vitesse et de pression vérifient l'équation d'Euler.
- Écoulement permanent : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$. Les trajectoires s'identifient aux lignes de courant.
- Écoulement incompressible : le long d'une trajectoire μ reste constant.
- De plus, nous supposons que les forces volumiques extérieures dérivent d'une énergie potentielle

$$\vec{f}_{v,\text{ext}} = -\vec{\nabla} e_p$$

Par exemple, dans le champ de pesanteur on a

$$e_p = \mu g z \quad [\text{axe ascendant}]$$

L'équation d'Euler devient donc

$$\mu (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_{v,\text{ext}}$$

or, le terme convectif peut aussi s'écrire (cf. [Annexe A](#))

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{\nabla} \frac{v^2}{2} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

d'où l'équation :

$$\mu (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v} = -\vec{\nabla} p - \vec{\nabla} e_p - \mu \vec{\nabla} \frac{v^2}{2}$$

Intégrons cette équation **le long d'une ligne de courant** entre deux points A et B :

$$\int_A^B \mu [(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v}] \cdot \vec{d\ell} = - \int_A^B \vec{\nabla} \left(p + e_p + \mu \frac{v^2}{2} \right) \cdot \vec{d\ell} = - \left[p + e_p + \mu \frac{v^2}{2} \right]_A^B$$

Le premier terme est nul puisque $\vec{d\ell} \parallel \vec{v}$. *In fine*,

$$\Rightarrow p(A) + \mu \frac{v(A)^2}{2} + e_p(A) = p(B) + \mu \frac{v(B)^2}{2} + e_p(B)$$

4. Daniel Bernoulli (1700 - 1782) : médecin, physicien et mathématicien suisse. Fils de Jean Bernoulli et neveu de Jacques Bernoulli, il fut comme son père, membre des Académies de Paris, de Berlin, de Londres et de Saint-Pétersbourg. Il publia en 1738 :

- son ouvrage *Hydrodynamica* dans lequel il expose le théorème fondamental de la mécanique des fluides qui porte son nom : le théorème de Bernoulli.
- et aussi une *Théorie sur la mesure du risque*, dans laquelle le Paradoxe de Saint-Pétersbourg - né de discussions entre lui et son frère Nicolas - fut à la base de la théorie économique et financière de l'aversion au risque, la prime de risque et l'utilité.

Théorème de Bernoulli (1738)

Pour un écoulement incompressible et permanent d'un fluide parfait, la quantité

$$p + \mu \frac{v^2}{2} + e_p = C^{\text{te}}$$

le long d'une ligne de courant. Par exemple, dans le champ de pesanteur on obtient

$$p + \mu \frac{v^2}{2} + \mu g z = C^{\text{te}}$$

Remarques :

- D'une ligne de courant à l'autre, c'est la valeur de la constante qui change.
- La conservation de la quantité $p + \mu \frac{v^2}{2} + \mu g z$ exprime la conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant
 - $\mu \frac{v^2}{2}$ représente l'énergie cinétique volumique ;
 - $\mu g z$ l'énergie potentielle volumique de pesanteur ;
 - et la pression P représente l'énergie potentielle volumique associée aux forces de pression.

2.4.2 Application I- Formule de Torricelli

Considérons un réservoir cylindrique rempli d'un liquide dans lequel on perce un orifice. La formule de Torricelli relie le débit d'écoulement avec la hauteur de liquide h . On fera les hypothèses suivantes :

- La section S du cylindre est très grande devant la section de l'orifice : $s \ll S$;
- On considère le liquide incompressible et parfait ;
- Enfin, on considère que l'écoulement est en régime stationnaire.

On cherche à calculer la vitesse d'écoulement v à la sortie du trou. L'application du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant donne :

$$p_{\text{atm}} + \mu g h + \frac{1}{2} \mu v^2(A, t) = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \mu v^2(B, t)$$

Or, la conservation de la masse donne $v(A, t) S = v(B, t) s$ d'où $v(A, t) \ll v(B, t)$ car $s \ll S$. Finalement

$$v(B, t) = \sqrt{2gh(t)} \quad [\text{formule de Torricelli}] \quad (2.14)$$

On remarquera que la vitesse a la même expression que celle de la chute libre d'un point matériel dans le champ de pesanteur. Le débit volumique d'écoulement vaut donc :

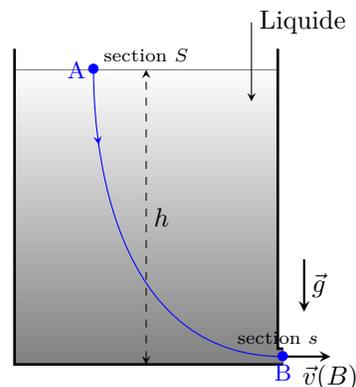
$$Q_V = s v = s \sqrt{2gh(t)}$$

Pour connaître l'évolution de la hauteur d'eau, il faut relier v à $h(t)$:

$$v(A, t) = -\frac{dh}{dt} = \frac{Q_v}{S} = \frac{s}{S} \sqrt{2gh}$$

L'intégration de cette équation donne un temps de vidange

$$\tau = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad \text{avec} \quad h_0 = h(t=0)$$



Remarque : En pratique, le jet de sortie est contractée. La section effective de sortie est donc plus petite que la section de l'orifice. Si l'on veut tenir compte de ce phénomène il faut remplacer s par αs où α est le coefficient de contraction.

2.4.3 Application II : l'effet Venturi

Dans un tube horizontal de section S variable, l'écoulement d'un fluide en écoulement incompressible et permanent s'accompagne d'une dépression là où il y a rétrécissement : c'est l'effet Venturi.

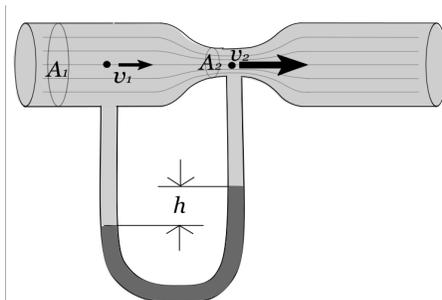


Fig. 2.5 – Effet Venturi – By Gringotumadre (Own work) [Public domain], via Wikimedia Commons

Explications

Le long d'un tube horizontal, d'après le théorème de Bernoulli on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho v^2 + p &= C^{\text{te}} \\ v S &= C^{\text{te}} \end{aligned}$$

Ainsi, la conservation du débit impose une augmentation de vitesse au niveau de l'étranglement et la relation de Bernoulli impose alors une dépression au même niveau. Cet effet peut être mis à profit pour les applications suivantes

- Mesure de débit ou de vitesse.
- Principe des trompes à eau montées sur les robinet des paillasse de chimie.
- Douchette venturi produisant une économie d'eau.
- Amélioration du tirage d'une cheminée, principe du carburateur, vaporisateur, etc.

Exercice – Montrer que dans un tube de venturi, la dépression au niveau du rétrécissement est lié au débit par la relation $\Delta p = K Q_v^2$ où K est un facteur géométrique.

En appliquant la relation de Bernoulli entre un point situé au col du tube et un point loin du tube on obtient $\Delta p = \frac{1}{2}\rho (v_{\text{col}}^2 - v_{\infty}^2)$. Dans le cas où l'écoulement est incompressible, le débit volumique se conserve : $Q_v = v_{\text{col}} A_{\text{col}} = v_{\infty} A_{\infty}$ où A_{col} désigne l'aire de la section au niveau du col. Si l'on suppose un fort rétrécissement, on peut négliger v_{∞}^2 devant v_{col}^2 d'où

$$\Delta p = K Q_v^2 \quad \text{avec} \quad K \simeq \frac{\rho}{2 A_{\text{col}}^2}$$

2.4.4 Application III - Le tube de Pitot

Le tube de Pitot permet la mesure de la vitesse d'écoulement d'un gaz subsonique ($v \ll c_{son}$). On peut en effet le considérer incompressible dans ce cas. On pratique dans un tube un orifice de prise de pression en A et en B. Le point A est un *point d'arrêt* car la vitesse est nulle (il n'y a pas d'écoulement dans l'orifice, c'est juste une prise de pression). Loin du tube de Pitot l'écoulement est supposé uniforme de vitesse v_∞ et de pression p_0 . En B la pression vaut p_0 car les lois de l'hydrostatique s'appliquent dans une direction perpendiculaire à un écoulement parallèle permanent incompressible.

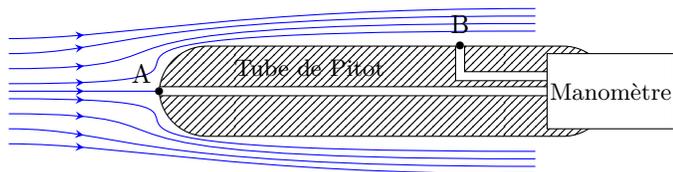


Fig. 2.6 – Tube de Pitot.

En A (point d'arrêt), en utilisant la relation de Bernoulli, la pression vaut

$$p_A = p_0 + \frac{1}{2} \mu v_\infty^2$$

En B, $p_B = p_0$. d'où

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\mu}}$$

avec $\Delta p = p_A - p_B$ différence de pression mesurable à l'aide d'un manomètre.

Exercice – Un tube de Pitot dans un écoulement d'air mesure une différence de pression $\Delta P = 0,6 \text{ mbar}$. Quelle est la vitesse d'écoulement ?

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2 \times 0,6 \cdot 10^{-3} \times 10^5}{1,2}} = 10 \text{ m.s}^{-1} \text{ (l'air a une masse volumique } \mu \approx 1,2 \text{ kg.m}^{-3} \text{ dans les conditions standards.)}$$

3 FLUIDES VISQUEUX

Ce cours aborde l'étude des fluides réels, c'est-à-dire présentant de la viscosité. Nous voyons comment l'équation d'Euler et la relation de Bernoulli se transforment pour tenir compte des effets dissipatifs dans le fluide. On introduit également les notions de perte de charge et de coefficients aérodynamiques.

Ce chapitre est disponible en ligne à l'adresse :

https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/fluides-visqueux.php

Sommaire

3.1	Notion de viscosité	28
3.1.1	Fluides newtoniens	28
3.1.2	Mesure de viscosité	29
3.1.3	Fluides non newtoniens	29
3.2	Dynamique d'un écoulement visqueux	31
3.2.1	Bilan des forces	31
3.2.2	Équation de Navier-Stokes	32
3.2.3	Le nombre de Reynolds	32
3.3	Pertes de charge	33
3.3.1	Loi de Poiseuille	33
3.3.2	Analogie électrique	35
3.3.3	Notion de perte de charge	35
3.3.4	Théorème de Bernoulli généralisé	38
3.4	Traînée et portance	40
3.4.1	Formule de Stokes	40
3.4.2	Analyse dimensionnelle	41
3.4.3	Coefficients aérodynamiques	42

3.1 Notion de viscosité

Nous avons vu (*cf.* chap. 2) que dans un fluide parfait, la contrainte qui s'exerce sur une particule de fluide est toujours perpendiculaire aux parois de celle-ci. Dans un fluide réel en écoulement, la contrainte possède une composante tangentielle dite **contrainte visqueuse**.

3.1.1 Fluides newtoniens

Expérience de Couette

Considérons un fluide enfermé entre deux cylindres, l'un mobile, l'autre fixé *via* un fil de torsion. On constate que lorsque la cavité cylindrique extérieure est mise en rotation à la vitesse angulaire ω , le cylindre intérieur tourne d'un angle α par rapport à sa position d'équilibre.

Analysons en détail le phénomène :

1. La torsion du fil conduit à l'existence d'un couple dont les forces de pression ne peuvent pas être responsables. On est donc obligé d'admettre l'existence d'efforts tangentiels.
2. On observe que les particules de fluide adhèrent aux parois. Il existe donc un gradient de vitesse au sein de l'écoulement.
3. Pour les fluides simples, l'angle α augmente proportionnellement à ω . Les efforts tangentiels augmentent donc proportionnellement au gradient de vitesse.

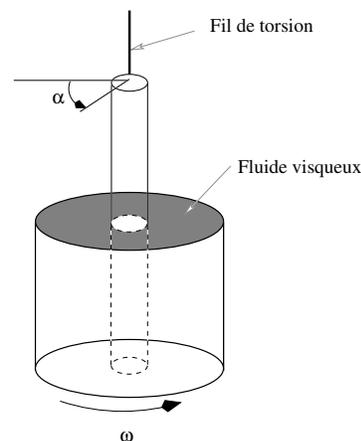
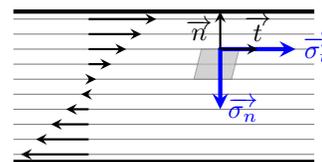


Fig. 3.1 – Expérience de Couette

Interprétation

L'expérience montre que, lors de l'écoulement d'un fluide, la pression ne suffit pas à expliquer les phénomènes et qu'il convient d'introduire des forces tangentielles qui s'opposent au mouvement du fluide. Ces forces, de type frottement, dues aux interactions entre molécules du fluide, sont appelées forces de viscosité. La contrainte (force par unité de surface) $\vec{\sigma}$ qu'exerce une couche de fluide supérieure sur un élément de surface d'une couche de fluide inférieure, s'écrit :

$$\vec{\sigma}_{1 \rightarrow 2} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \sigma_n \vec{n} + \sigma_t \vec{t} \quad \text{avec} \quad \sigma_n = -p$$



Fluide newtonien

Entre deux couches successives de fluide en écoulement unidimensionnel à la vitesse \vec{v} , il existe des contraintes tangentielles à l'écoulement qui accélèrent la couche la plus lente et ralentissent la couche la plus rapide. Par définition d'un fluide newtonien, les forces visqueuses sont proportionnelles à la différence de vitesse c'est-à-dire au gradient de vitesse.

$$\sigma_t = \eta \frac{\partial v}{\partial n} = \eta \dot{\gamma} \quad \heartsuit \quad (3.1)$$

où $\frac{\partial v}{\partial n}$ désigne le gradient de vitesse dans la direction normale à la surface. De manière générale, la contrainte visqueuse varie comme la **vitesse de cisaillement** $\dot{\gamma}$. La constante de proportionnalité η est caractéristique du fluide et désigne la **viscosité dynamique** du fluide.

3.1.2 Mesure de viscosité

L'analyse dimensionnelle de la relation (3.1) donne

$$[\eta] = \frac{[F]}{L^2} \frac{[v]}{L} = \frac{[F]}{L^2} [T]$$

Ainsi, la viscosité est homogène à une pression \times temps. On l'exprime indifféremment en **pascal.seconde** (Pa.s) ou en **poiseuille** (Pℓ) en hommage à Jean-Louis Marie Poiseuille¹.

Le viscosimètre est l'appareil de mesure de la viscosité. Différents types de viscosimètre existent suivant le type de fluide utilisé. Pour les liquides, on utilise essentiellement le viscosimètre de Couette ou le viscosimètre à tube capillaire.

Ordres de grandeur

Pour les liquides, la viscosité varie fortement avec la température (elle diminue lorsque la température augmente). Pour des liquides purs, elle suit une loi du type

$$\eta \propto e^{b/T}$$

Quant aux gaz, leur viscosité est plus difficile à mesurer² car beaucoup plus faible que celle des liquides. Elle dépend peu de la pression et augmente légèrement avec la température (à peu près comme \sqrt{T}).

Liquide (20 °C)	Viscosité (Pa.s)	Gaz	Viscosité (Pa.s)
Eau	$1,0 \cdot 10^{-3}$	Vapeur d'eau (20 °C)	$9,7 \cdot 10^{-6}$
Huile d'olive	0,84	Air sec (20 °C)	$18,2 \cdot 10^{-6}$
Glycérine pure	1,5	He (25 °C)	$19,9 \cdot 10^{-6}$
Mercure	$1,5 \cdot 10^{-3}$	N ₂ (25 °C)	$17,7 \cdot 10^{-6}$

3.1.3 Fluides non newtoniens

Le comportement newtonien ($\sigma = \eta \dot{\gamma}$) s'observe :

- dans tous les gaz ;
- dans les liquides simples constitués de petites molécules (l'eau par exemple) ;
- dans les solutions contenant des ions ou molécules à symétrie sphérique.

Cependant la rhéologie³ montre qu'il existe des fluides pour lesquels la relation entre contrainte tangentielle et cisaillement est plus complexe.

1. Jean-Louis Marie Poiseuille (1797–1869) fut élève de l'École Polytechnique avant d'étudier la médecine. Les recherches de Poiseuille ont porté principalement sur l'hémodynamique, c'est-à-dire l'étude de la circulation sanguine et lui ont permis de dégager une loi sur l'écoulement des fluides visqueux dans des tubes capillaires.

2. Sa détermination peut se faire à l'aide d'une :

- mesure de vitesse (viscosimètre à bille roulante, viscosimètre à tube capillaire) ;
- mesure de fréquence de résonance d'une onde de cisaillement (viscosimètre à cristal piézo-électrique de torsion).

3. Étude du comportement des fluides en écoulement

Comportement non linéaire

Certains fluides vérifient la relation

$$\sigma_t = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}$$

où $\eta(\dot{\gamma})$ représente une viscosité apparente.

Lorsque $\eta(\dot{\gamma})$ diminue avec $\dot{\gamma}$, le fluide coule d'autant plus facilement qu'il est cisailé. On parle alors de fluide *rhéofluidifiant* (sang, polymère fondu, etc.). Le comportement inverse est désigné par le terme *rhéoépaississant* (amidon+eau). Il existe également des liquides, comme les peintures, qui ne coulent que si la contrainte dépasse un valeur seuil.

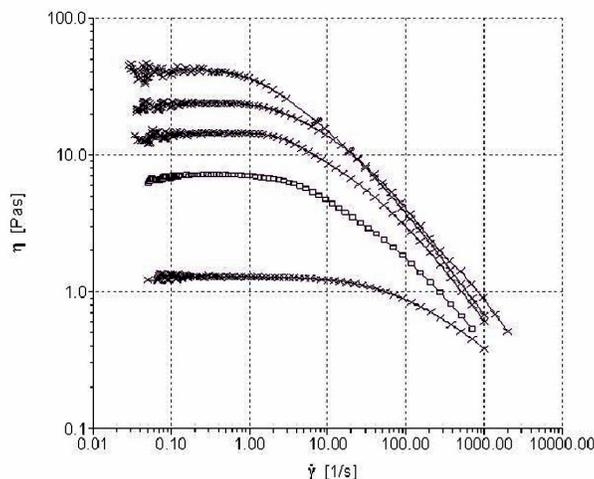


Fig. 3.2 – Mesures de la viscosité de polysaccharides de différentes masses moléculaires en solution aqueuse à 3% en masse

Comportement visco-élastique

Tout fluide se caractérise par un temps de relaxation viscoélastique τ_{ve} . Lorsque un fluide est soumis à une contrainte, on distingue trois types de comportement en fonction du temps d'observation t .

- si $t \ll \tau_{ve}$, le fluide adopte un comportement élastique (déformation proportionnelle à la contrainte);
- si $t \gg \tau_{ve}$ le fluide adopte un comportement visqueux (vitesse de cisaillement proportionnelle à la contrainte $\sigma = \eta\dot{\gamma}$);
- si $t \simeq \tau_{ve}$, le comportement est alors plus complexe; il est dit visco-élastique.

C'est pourquoi, du point de vue mécanique, la distinction entre un solide et un liquide est artificielle. Ce que l'on appelle communément un liquide est un fluide de petit temps de relaxation ($\tau_{ve} = 1$ ns pour l'eau) et ce que l'on appelle un solide peut être vu comme un fluide de grand temps de relaxation ($\tau_{ve} = 10^6$ ans pour le manteau de la croûte terrestre). τ_{ve} dépend fortement de la température ce qui confère à certains systèmes un comportement fluide ou solide suivant la température (bitume par exemple).

Un exemple de fluide viscoélastique est la pâte de silicone connue sous le nom de "silly-putty". Une boule de "silly-putty" rebondit sur le sol comme une balle élastique (aux temps courts) mais s'étale comme un fluide visqueux (aux temps longs) si on la pose sur une surface horizontale.

Matériaux	τ_{ve} (s)
eau (20 °C)	1 ns
verre à vitre (400 °C)	32 ans
verre à vitre (20 °C)	$10^{26} - 10^{30}$ s
bitume (-5 °C)	10 s
bitume (40 °C)	1 ms

3.2 Dynamique d'un écoulement visqueux

Lorsque le fluide est newtonien et incompressible, les équations de Newton appliquées à chaque particule de fluide prennent la forme des **équations de Navier-Stokes**.

3.2.1 Bilan des forces

Plaçons nous dans un référentiel galiléen et effectuons un bilan des forces sur une particule de fluide située en M à l'instant t , de masse $dm = \mu(M, t) d\tau$. En plus des forces de pression et des forces extérieures volumiques, il faut ajouter la résultante des forces visqueuses :

$$d\vec{F} = \left(\vec{f}_{v,ext} - \vec{\nabla} p \right) d\tau + d\vec{F}_\eta$$

L'expression de $d\vec{F}_\eta$ est en général assez compliquée mais elle se simplifie dans le cas des fluides newtoniens et incompressibles.

Cas d'un écoulement parallèle unidimensionnel

Calculons la résultante des forces visqueuses dans le cas particulier simple d'un écoulement suivant (Ox) avec un gradient de vitesse suivant (Oy) :

$$\vec{v} = v(y)\vec{u}_x$$

On remarque ici que $\text{div } \vec{v} = 0$. L'écoulement est donc bien incompressible. Dans ce cas, la résultante des

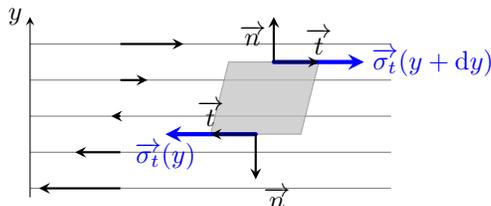


Fig. 3.3 – Bilan des forces de viscosité sur un élément de fluide.

forces visqueuses s'exerçant sur une particule de fluide, s'écrit :

$$d\vec{F}_\eta = \eta \left[\frac{dv}{dy}(y+dy) - \frac{dv}{dy}(y) \right] dx dz \vec{u}_x = \eta \frac{d^2 \vec{v}}{dy^2} d\tau$$

On voit apparaître une force volumique qui s'exprime comme le laplacien de la vitesse. Cette formule obtenue dans un cas particulier se généralise aux écoulements incompressibles des fluides newtoniens. On admettra que pour un *fluide newtonien incompressible*, la résultante des forces visqueuses s'écrit

$$d\vec{F}_\eta = \eta \Delta \vec{v} d\tau \quad \heartsuit \quad (3.2)$$

où Δ est l'opérateur laplacien (cf. https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/mecaflu_complement1.php).

3.2.2 Équation de Navier-Stokes

D'après la seconde loi de Newton appliquée à une particule de fluide, on a :

$$\mu d\tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} p d\tau + \vec{f}_{v,\text{ext}} d\tau + d\vec{F}_\eta \quad \text{avec} \quad d\vec{F}_\eta = \eta \Delta \vec{v} d\tau$$

En divisant par $d\tau$, on obtient l'équation de Navier-Stokes.

Équation de Navier-Stokes

Pour un fluide incompressible newtonien, la dynamique de l'écoulement vérifie l'équation

$$\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_{v,\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v} \quad (3.3)$$

Il s'agit donc d'une équation aux dérivées partielles du second ordre et non linéaire. Cette équation recelle encore quelques mystères qui résistent à la sagacité de nos meilleurs mathématiciens puisque l'**existence** et l'**unicité** d'une solution de l'équation de Navier-Stokes est l'un des 7 problèmes du millénaire mis à prix \$ 1 000 000 par l'Institut Clay (cf. http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/)!

Conditions aux limites

L'équation de Navier-Stokes étant une équation du second ordre, sa résolution introduit deux constantes d'intégration pour la pression p et pour la vitesse \vec{v} . On les détermine en appliquant les conditions aux limites suivantes :

- continuité de la vitesse à la traversée d'une interface ;
- continuité de la contrainte normale et donc de la pression ;
- continuité de la contrainte tangentielle.

3.2.3 Le nombre de Reynolds

La complexité provient essentiellement de la présence, dans l'équation de Navier-Stokes, d'un *terme non linéaire* – le terme convectif – et d'un *terme du second ordre* – le terme de viscosité. Dans de nombreux cas, on peut négliger l'un des deux termes devant l'autre. On définit alors un facteur sans dimension, qui estime l'importance du terme convectif devant le terme de viscosité. On peut estimer l'ordre de grandeur du terme convectif et du terme visqueux à partir de l'échelle caractéristique D du problème, de la vitesse moyenne d'écoulement v , de la masse volumique μ du fluide et de sa viscosité η .

$$\left\| \mu (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right\| \approx \mu \frac{v^2}{D} \quad \text{et} \quad \left\| \eta \Delta \vec{v} \right\| \approx \eta \frac{v}{D^2}$$

D'où le nombre sans dimension appelé **nombre de Reynolds**

$$R_e = \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme visqueux}} = \frac{\mu v D}{\eta} \quad \heartsuit \quad (3.4)$$

Type d'écoulement	Nombre de Reynolds
Écoulement atmosphérique	$R_e \approx 10^{11}$
Écoulement sanguin dans l'aorte	$R_e \approx 10^4$
Écoulement sanguin dans les capillaires	$R_e \approx 10^{-3}$
Domaine de l'aéronautique	$R_e \approx 10^7$
Domaine de la microfluidique	$R_e \approx 10^{-3} - 1$

Ce nombre joue un rôle très important en mécanique des fluides car il permet de distinguer deux types d'écoulement.

- **L'écoulement à petit nombre de Reynolds** $R_e \ll 1$: L'écoulement est laminaire et essentiellement gouverné par la viscosité. Le terme d'inertie est négligeable et l'équation de Navier-Stokes devient

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_{v,\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v}$$

équation qui a le bon goût d'être linéaire. Si l'écoulement est permanent, on obtient le régime de Stokes.

- **L'écoulement à grand nombre de Reynolds** $R_e \gg 1$: On montre dans ce cas que les effets visqueux sont concentrés sur les bords, dans une fine couche appelée *couche limite*, et dans le sillage des obstacles. Hors de ces zones, le terme visqueux est négligeable et l'on retrouve l'équation d'Euler

$$\mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \vec{f}_{v,\text{ext}}$$

- **Écoulement turbulent** La viscosité stabilise et régularise les écoulements de façon générale. Ainsi, quand le nombre de Reynolds augmente le régime laminaire devient instable voire turbulent. La transition entre le régime laminaire et turbulent se produit dans une certaine gamme de valeur du nombre de Reynolds qui dépend du problème. On peut retenir qu'en général, lorsque $R_e > 10^5$, l'écoulement devient turbulent, c'est-à-dire que la vitesse en un point M varie dans le temps de façon erratique. Dans ce cas, le problème étant analytiquement insoluble, on utilise souvent des lois phénoménologiques associées à une analyse dimensionnelle.

Exercice – Quel est l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds associé à l'écoulement autour d'une balle de tennis allant à la vitesse $v = 100 \text{ km.h}^{-1}$ dans l'air ?

Le diamètre d'une balle de tennis est de l'ordre de 7 cm, la masse volumique de l'air de l'ordre de 1 kg.m^{-3} et sa viscosité de l'ordre de 2.10^{-5} de sorte que

$$R_e = \frac{\mu v D}{\eta} \simeq \frac{1 \times 100/3,6 \times 0,07}{2.10^{-5}} \simeq 10^5$$

L'écoulement est turbulent.

3.3 Pertes de charge

3.3.1 Loi de Poiseuille

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux dans un long tube cylindrique de rayon R et de longueur $L \gg R$. Le tube est horizontal (orienté suivant Oz) et l'écoulement est assuré grâce à l'existence d'une différence de pression Δp entre l'entrée du tube et la sortie du tube.

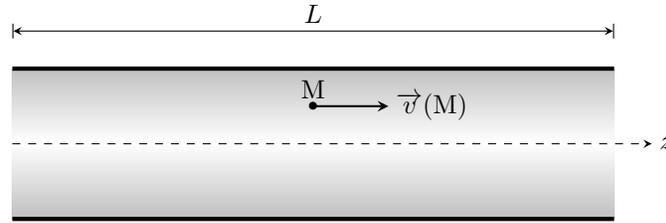


Fig. 3.4 – Écoulement de Poiseuille. Position du problème.

Hypothèses de travail

1. L'écoulement est permanent donc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$;
2. L'écoulement est incompressible, par conséquent $\text{div} \vec{v} = 0$;
3. Le nombre de Reynolds est suffisamment petit pour supposer un régime d'écoulement laminaire. En pratique, on considère que c'est le cas, quand $R_e < 2000$;
4. L'écoulement est parallèle à Oz et invariant par rotation autour de l'axe Oz, d'où $\vec{v} = v(r, z) \vec{u}_z$;
5. Enfin, on néglige la pesanteur car $\mu g R \ll \Delta p$.

Calcul du champ de vitesse

Commençons par écrire l'équation de continuité :

$$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial(rv_r)}{r\partial r} + \frac{\partial(v_\theta)}{r\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 = \frac{\partial v_z}{\partial z} \Rightarrow \vec{v} = v(r) \vec{u}_z$$

La vitesse ne dépend pas de z . Calculons l'accélération :

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_z(r) \vec{u}_z = \vec{0}$$

L'accélération est nulle. En effet, les lignes de champ sont des droites horizontales et se confondent avec la trajectoire des particules (régime stationnaire). Or si la vitesse ne dépend pas de z cela signifie que les particules de fluide se déplacent avec une vitesse constante en direction et en intensité. L'accélération est donc nulle. On peut aussi ajouter que chaque particule de fluide est soumise à deux forces qui se compensent : les forces de pression et les forces de viscosité. Sans force de pression, c'est-à-dire **sans différence de pression il ne peut pas avoir d'écoulement stationnaire**.

L'équation de Navier-Stokes se réduit donc à l'équation de Stokes : $\vec{\nabla} p = \eta \Delta \vec{v}$. Projets cette relation dans la base cylindrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial p}{r\partial\theta} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{dp}{dz} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

Ainsi, la pression ne dépend que de z . Le terme de gauche de la dernière équation ne dépend donc que de z alors que celui de droite ne dépend que de r . Cette équation apparemment paradoxale se résout si les deux termes sont constants.

$$\frac{dp}{dz} = K = -\frac{\Delta p}{L} = \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

où $\Delta p = p_1 - p_2$ est la différence de pression entre l'entrée et la sortie. En intégrant deux fois on obtient

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta L} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration. La vitesse doit être définie en $r = 0$ ce qui implique $C_1 = 0$. Enfin, les conditions aux limites imposent $v(R) = 0$ d'où

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (3.5)$$

Le profil des vitesses est parabolique.

Calcul du débit volumique

Le débit volumique est le flux du vecteur vitesse à travers une section de la canalisation :

$$Q_V = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{L}$$

Ainsi, la différence de pression est directement reliée au débit volumique par la formule

$$\Delta p = \frac{8\eta L}{\pi R^4} Q_V \quad [\text{Formule de Poiseuille}] \quad \heartsuit \quad (3.6)$$

Exercice – On veut perfuser un patient en 1 H avec un flacon de 0,5 L de plasma de viscosité $\eta = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ et de densité proche de l'eau. Si l'aiguille utilisée a une longueur de 3 cm et un diamètre de 0,4 mm, à quelle hauteur minimale faut-il installer le flacon ?

$$\Delta p_\eta = \frac{8\eta L}{\pi R^4} Q = 9290 \text{ Pa} \Rightarrow h = \frac{\Delta p_\eta}{\rho g} = 95 \text{ cm.}$$

3.3.2 Analogie électrique

On peut faire une analogie avec la conduction électrique et définir une résistance hydraulique R_H analogue de la résistance électrique :

Concepts électriques	Concepts hydrauliques
Potentiel V	Pression p
ddp $U = V_1 - V_2$	Différence de pression Δp
Intensité du courant électrique I	Débit volumique Q_V
Loi d'Ohm $U = RI$	Loi de Poiseuille $\Delta p = R_H Q_V$

3.3.3 Notion de perte de charge

Définition

La perte de charge est la pression supplémentaire qu'il faut imposer entre les extrémités d'une canalisation pour assurer un écoulement stationnaire et compenser le frottement visqueux. Deux termes entrent dans le calcul des pertes de charge :

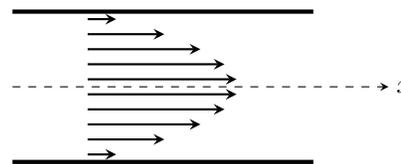


Fig. 3.5 – Écoulement de Poiseuille.

- La perte de charge en ligne dite perte de charge régulière due aux frottements le long du trajet.
- La perte de charge singulière due à la présence d'obstacles localisés tels que les coudes, les robinets, les vannes, les modifications brutales de section etc.

La perte de charge sera notée Δp_η et s'exprime en Pa.

Essayons de donner une forme générale à l'expression de la perte de charge dans une canalisation à l'aide d'une analyse dimensionnelle. Pour cela, utilisons le théorème II.

Théorème II

Le théorème II ou théorème de Vashy-Buckingham est le théorème fondamental de l'analyse dimensionnelle. Supposons que nous cherchions une relation entre n grandeurs physiques $g_{i=1..n}$ que l'on considère pertinentes pour décrire un phénomène. Notons k le nombre de dimensions fondamentales utilisées par ces grandeurs ($k \leq 7$).

Il existe alors $(n - k)$ produits sans dimension notés π_i tels que $f(\pi_1, \dots, \pi_{n-k}) = 0$

Considérons une conduite de longueur L , de diamètre D traversée par un fluide de viscosité η et de masse volumique μ circulant à la vitesse moyenne \bar{v} . Supposons qu'il existe une relation entre Δp_η , L , D , μ , η et \bar{v} .

Grandeurs	L	D	μ	η	Δp_η	\bar{v}
Dimensions	L	L	ML ⁻³	ML ⁻¹ T ⁻¹	ML ⁻¹ T ⁻²	L.T ⁻¹

On a $n = 6$ grandeurs et $k = 3$ dimensions différentes. D'après le théorème II, il existe trois nombres sans dimensions π_1 , π_2 et π_3 tels que $f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$. Fabriquons donc trois nombres indépendants sans dimension :

- L et D étant de même dimension, leur rapport est adimensionné : $\pi_1 = \frac{L}{D}$;
- Le théorème de Bernoulli nous enseigne que $\frac{1}{2}\mu\bar{v}^2$ est homogène à une pression. Ainsi $\pi_2 = \frac{\Delta p_\eta}{1/2\mu\bar{v}^2}$;
- Enfin, on sait que le nombre de Reynolds est sans dimension ; ce sera $\pi_3 = R_e = \frac{\mu\bar{v}D}{\eta}$

Ces trois nombres sont liés par une loi.

$$\pi_2 = \frac{\Delta p_\eta}{\frac{1}{2}\mu\bar{v}^2} = f(\pi_1, R_e)$$

Par ailleurs, l'expérience montre que la perte de charge régulière Δp_η est proportionnelle à L . Autrement dit, $f(\pi_1, R_e) = \pi_1\lambda(R_e)$ d'où

$$\Delta p_\eta = \lambda(R_e)\frac{1}{2}\mu\bar{v}^2\frac{L}{D} \quad \heartsuit \quad (3.7)$$

Cette relation est appelée *équation de Darcy-Weisbach*. Le facteur adimensionné λ désigne le **coefficient de perte de charge régulière** et ne dépend que du nombre de Reynolds pour une canalisation lisse. Dans le cas d'une canalisation rugueuse, un quatrième nombre sans dimension intervient : la rugosité relative ϵ/D qui mesure le rapport de la hauteur moyenne des aspérités de la paroi interne de la conduite sur son diamètre interne. La valeur de λ peut être obtenue à l'aide d'abaque comme le diagramme de Moody.

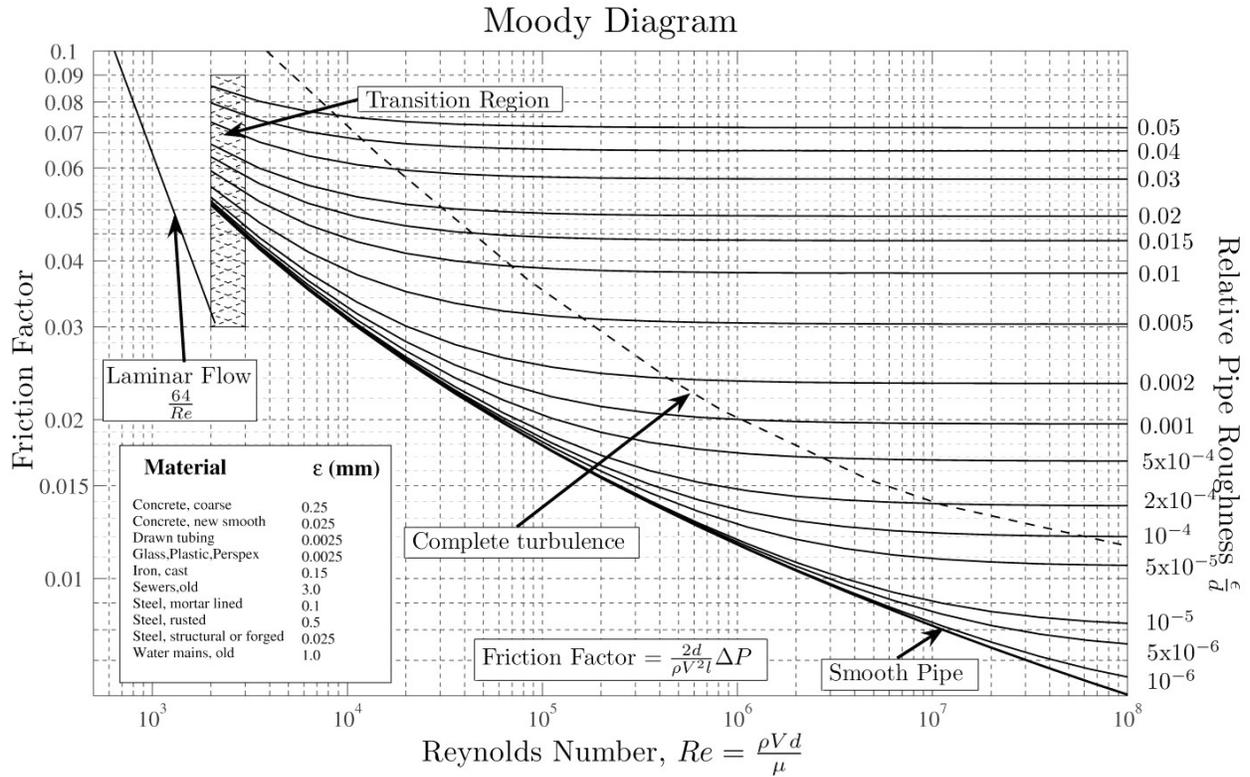


Fig. 3.6 – ©Donebythesecondlaw at the English language Wikipedia [GFDL]

Que vaut λ en régime laminaire ?

On remarque sur le diagramme de Moody que pour $Re < 2000$, le coefficient de perte de charge suit une loi de puissance (ce qui donne une droite avec une échelle logarithmique). En effet, en régime laminaire, la perte de charge est donnée par la formule de Poiseuille

$$\Delta p_\eta = Q_V \frac{8\eta L}{\pi R^4} = \bar{v} \pi R^2 \frac{8\eta L}{\pi R^4} = 32\eta \bar{v} \frac{L}{D^2}$$

Or le nombre de Reynolds de cet écoulement laminaire s'écrit :

$$Re = \frac{\mu \bar{v} D}{\eta} \Rightarrow \eta = \frac{\mu \bar{v} D}{Re}$$

Finalement, en régime laminaire

$$\Delta p_\eta = \lambda \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 \frac{L}{D} \quad \text{avec} \quad \lambda = \left(\frac{64}{Re} \right) \quad \heartsuit \quad (3.8)$$

Les pertes de charge en régime turbulent

En régime turbulent, λ augmente brutalement et pour les grands nombres de Reynolds, le coefficient de perte de charge conserve une valeur constante qui ne dépend que de la rugosité relative de la conduite. Dans ce cas, les pertes de charge varient comme le carré du débit. En conclusion, pour diminuer l'ensemble des pertes de charge dans une canalisation, afin de diminuer les coûts de fonctionnement dus aux pompes, il faut, quand c'est possible :

- diminuer la longueur de canalisation ;

- diminuer le nombre d'accidents sur la canalisation ;
- diminuer le débit de circulation ;
- augmenter le diamètre des canalisations ;
- faire circuler des liquides le moins visqueux possible ;
- utiliser des matériaux de faible rugosité.

Pertes de charges singulières

De la même manière, on peut exprimer les pertes de charge singulières comme suit :

$$\Delta P_s = \xi \frac{1}{2} \mu v_{\text{inc}}^2$$

où ξ est le **coefficient de perte de charge singulière** et v_{inc} est la vitesse moyenne incidente du fluide arrivant sur l'obstacle. Il existe également des tables donnant ξ en fonction du type d'obstacle. ■

Remarque : Dans l'expression du nombre de Reynolds pour une conduite non circulaire, il est d'usage d'utiliser le diamètre hydraulique $D_H = \frac{4 \cdot \text{aire}}{\text{périmètre}}$.

3.3.4 Théorème de Bernoulli généralisé

Nous avons vu dans le chapitre consacré aux fluides parfaits, que dans le champ de pesanteur, un fluide incompressible en écoulement stationnaire voit la quantité $\frac{1}{2} \mu v^2 + p + \mu g z$ se conserver le long d'une ligne de courant ce qui traduit la conservation de l'énergie. Voyons comment s'exprime le bilan d'énergie dans le cas d'un fluide réel en écoulement stationnaire dans une conduite en tenant compte des échanges mécaniques avec des machines hydrauliques.

Considérons un fluide en écoulement stationnaire et incompressible dans un système de conduites où il traverse des machines hydrauliques avec lesquelles il peut échanger de l'énergie :

- des pompes donneront de l'énergie mécanique au fluide ;
- des turbines recevront de la part du fluide de l'énergie mécanique.

Si l'on note \mathcal{P} la puissance échangée avec le fluide, on a $\mathcal{P} > 0$ pour les pompes et $\mathcal{P} < 0$ pour les turbines.

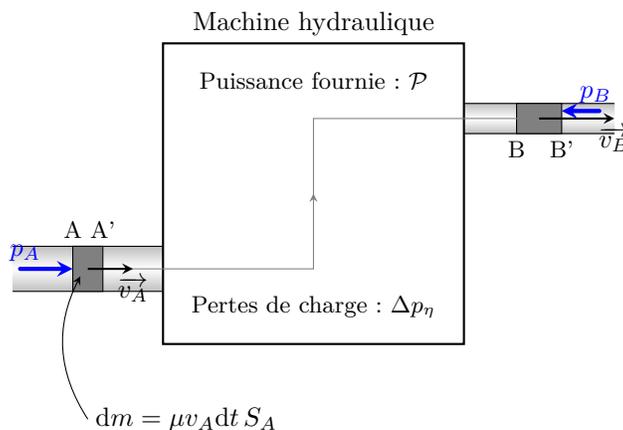


Fig. 3.7

Bilan d'énergie cinétique

Considérons comme système, le fluide situé dans la conduite entre A et B à l'instant t et entre A' et B' à l'instant $t + dt$. Pendant dt , la masse transférée est

$$dm = Q_m dt = \mu Q_v dt$$

Le débit massique est uniforme le long de la canalisation puisqu'en régime permanent

$$\operatorname{div} \mu \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_{S_1} \mu \vec{v} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_2} \mu \vec{v} \cdot \vec{dS}$$

Pour simplifier on considère que les grandeurs physiques sont uniformes sur la section droite de la conduite (cf. remarque page 40). Le théorème de l'énergie cinétique donne

$$dE_c = E_c(t + dt) - E_c(t) = \delta W$$

avec δW le travail de toutes les forces (extérieures et intérieures) s'exerçant sur le système.

Tout d'abord, le régime étant permanent, la portion de fluide située entre A' et B conserve son énergie cinétique de sorte que

$$E_c(t + dt) - E_c(t) = E_c^{BB'} - E_c^{AA'} = \frac{1}{2} Q_m dt (v_B^2 - v_A^2)$$

Par ailleurs, les forces de pesanteur travaillent d'où le transfert mécanique

$$dW_g = -Q_m dt g (z_B - z_A) \quad [\text{axe ascendant}]$$

Les machines hydrauliques fournissent une puissance mécanique \mathcal{P} de sorte que le transfert mécanique effectué pendant la durée dt s'écrit

$$\delta W_{\text{méca}} = \mathcal{P} dt$$

Quant aux forces de pression, leur travail s'exprime par

$$\delta W_p = -p^{\text{ext}} dV = p_A Q_v dt - p_B Q_v dt$$

Le fluide est également le siège de forces intérieures. Or, l'écoulement étant incompressible, les particules de fluides se déforment sans changer de volume ce qui explique que les forces de pression interne ne travaillent pas. Par contre, le fluide est le siège d'un travail résistant δW_η des forces visqueuses. Par définition de la perte de charge, on a

$$\delta W_\eta = -Q_v \Delta p_\eta dt \quad \heartsuit \quad (3.9)$$

Finalement le théorème de l'énergie cinétique donne la relation de Bernoulli généralisé

$$\frac{1}{2} \mu v_B^2 + \mu g z_B + p_B = \frac{1}{2} \mu v_A^2 + \mu g z_A + p_A + \mathcal{P}/Q_v - \Delta p_\eta \quad \heartsuit \quad (3.10)$$

Notons au passage que l'on retrouve la relation de Bernoulli vu dans le chapitre sur les fluides parfaits à condition de faire $\mathcal{P} = 0$ et $\Delta p_\eta = 0$.

Remarque : La relation (3.10) utilise l'approximation des écoulements unidimensionnels, ce qui revient à confondre la vitesse avec la vitesse moyenne sur une section droite de la conduite. Cette approximation produit des erreurs sur l'expression de l'énergie cinétique. En effet, le bilan rigoureux de l'énergie donne

$$p_1 + \overline{e_{c1}} + \mu g z_1 + \frac{\mathcal{P}}{Q_V} = p_2 + \overline{e_{c2}} + \mu g z_2 + \Delta p_\eta$$

où $\overline{e_c}$ est la moyenne de l'énergie cinétique volumique défini par

$$\overline{e_c} = \frac{\overline{v^2}}{2} = \frac{1}{Q_V} \iint \left(\frac{1}{2} \mu v^2 \right) \vec{v} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{2} \alpha \mu \overline{v}^2$$

où α est un coefficient correctif qui dépend du profil de vitesse dans la canalisation. En pratique les valeurs de α sont les suivantes :

- $\alpha = 1$ écoulement piston (vitesse uniforme dans toute la section)
- $\alpha = 2$ écoulement laminaire visqueux (newtonien)
- $\alpha = 1,01 - 1,1$ écoulement turbulent.

Comme le terme d'énergie cinétique est souvent faible devant les autres termes, une erreur sur celle ci a peu d'effet sur le résultat. C'est pourquoi nous prendrons systématiquement $\alpha = 1$.

3.4 Traînée et portance

Si l'on met de coté la poussée d'Archimède, la force que ressent un solide plongé dans un écoulement stationnaire tridimensionnelle est **nulle** si le fluide n'est pas visqueux. En revanche, l'écoulement visqueux autour d'un obstacle solide produit une force qui présente deux composantes : la composante dans le sens de l'écoulement est appelée **force de traînée**, la composante perpendiculaire est la **force de portance**.

3.4.1 Formule de Stokes

Stokes s'est intéressé à la force de traînée qu'un écoulement visqueux produit autour d'une sphère. Il s'est placé dans le cas où l'écoulement est gouverné par la viscosité c'est-à-dire pour les petits nombres de Reynolds. La résolution complète est assez longue et nous allons nous contenter de la solution sans chercher à la justifier.

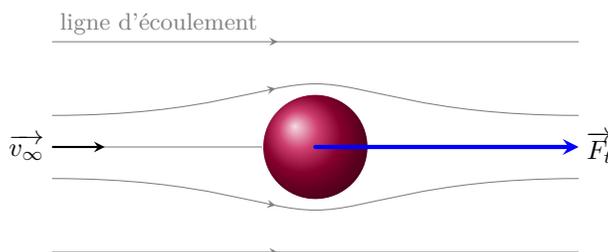


Fig. 3.8 – Traînée sur un obstacle sphérique immobile

Stokes obtient qu'une sphère de rayon r , immobile, soumise à un écoulement permanent incompressible et visqueux, ressent une force de traînée \vec{F}_t proportionnelle à la vitesse d'écoulement et à la taille de la sphère.

$$\vec{F}_t = 6\pi\eta r \vec{v}_\infty \quad \text{pour } Re \ll 1 \quad \heartsuit \quad (3.11)$$

où \vec{v}_∞ représente la vitesse de l'écoulement *par rapport* à la sphère et loin de la sphère. Cette force de traînée est liée d'une part à un champ de pression plus important en avant de la bille et d'autre part aux forces visqueuses.

Si l'on étudie la chute d'une bille sphérique dans un fluide visqueux au repos (loin de la bille), il faut écrire

$$\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$$

où \vec{v} représente la vitesse de la bille dans le référentiel du laboratoire. Cette loi est vérifiée avec une précision meilleure que 1% pour $R_e < 0,3$. Cette contrainte reste cependant assez forte. En effet, pour une bille de 1 cm de diamètre tombant dans l'air cela impose $v < 0,5 \text{ mm.s}^{-1}$ ce qui signifie que la loi du frottement linéaire n'est pas valable (sauf au tout début) dans ce cas. Par contre si la chute s'effectue dans un liquide visqueux tel le glycérol (*grosso modo* mille fois plus dense que l'air et un million de fois plus visqueux), la contrainte devient $v < 0,5 \text{ m.s}^{-1}$. Dans ce cas, la loi de Stokes peut être utilisée si la bille n'est pas trop pesante.

Vitesse de sédimentation

La physique des suspensions (particules solides mélangées à un liquide) et des émulsions (gouttelettes liquides dispersées dans un autre liquide non miscible) utilise la loi de Stokes car le nombre de Reynolds est assez petit. Lorsqu'on laisse reposer un liquide contenant de petites particules solides (comme par exemple un mélange eau-argile), les particules vont décanter c'est-à-dire sédimenter au fond du récipient avec une vitesse qui dépend de leur dimension caractéristique. Le temps de décantation donne alors un renseignement sur la taille des grains. En effet les grains tombent à une vitesse constante pour laquelle le poids apparent (poids moins la poussée d'Archimède) compense la force de traînée :

$$6\pi\eta r v_{\text{sed}} = \frac{4}{3}\pi r^3(\mu_s - \mu_l)g \quad \text{d'où} \quad v_{\text{sed}} = \frac{2}{9\eta}(\mu_s - \mu_l)r^2$$

3.4.2 Analyse dimensionnelle

L'analyse précédente n'est valable qu'à petit nombre de Reynolds et pour un obstacle sphérique. Plaçons un obstacle quelconque dans un écoulement stationnaire de vitesse \vec{v}_∞ loin de l'obstacle et cherchons la force F due à l'écoulement. Le traitement analytique est possible pour des géométries simples et pour des valeurs faibles de R_e comme nous venons de le voir. Pour des grands nombres de Reynolds, on procède en général à des expériences sur maquette en soufflerie pour avoir accès à la force. Montrons par une analyse dimensionnelle quelle forme doit prendre cette force F .

Quelles sont les grandeurs physiques pertinentes du problème? Il faut tout d'abord préciser que la viscosité est essentielle pour justifier l'existence d'une force de frottement. Si le fluide est parfait il n'y a pas de traînée car les couches de fluide glissent sur l'obstacle. Les paramètres pertinents sont donc η , v_∞ la vitesse du fluide, D une dimension caractéristique de l'obstacle, μ la masse volumique du fluide et la force F .

Grandeurs	v_∞	D	μ	η	F
Dimensions	L.T ⁻¹	L	ML ⁻³	ML ⁻¹ T ⁻¹	MLT ⁻²

On a $n = 5$ grandeurs et $k = 3$ dimensions différentes. D'après le théorème II, il existe deux nombres sans dimensions π_1 et π_2 liés entre eux. Choisissons le nombre de Reynolds comme premier facteur adimensionné. Part ailleurs, la quantité $\frac{1}{2}\mu v_\infty^2$ est homogène à une pression comme F/D^2 . Ainsi

$$\pi_1 = R_e = \frac{\mu v_\infty D}{\eta} \quad \text{et} \quad \pi_2 = \frac{F/D^2}{1/2\mu v_\infty^2}$$

Finalement le théorème II nous dit que :

$$\pi_2 = f(\pi_1) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2 D^2 f(R_e) \quad (3.12)$$

3.4.3 Coefficients aérodynamiques

La force qu'exerce un fluide en écoulement autour d'un obstacle peut se décomposer en deux composantes.

- Une composante parallèle à \vec{v}_∞ : c'est la traînée \vec{F}_t .
- Une composante perpendiculaire : c'est la portance \vec{F}_p .

Ces deux forces s'expriment comme le prévoit la formule (3.12). On définit alors deux coefficients de frottement, le C_x et le C_z .

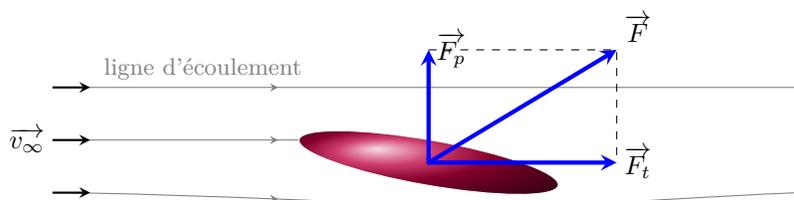


Fig. 3.9 – Portance et traînée

Coefficient de traînée

La formule (3.12) peut se réécrire :

$$F_t = \frac{1}{2} \mu v_\infty^2 S C_x(R_e)$$

où S représente une surface caractéristique, en générale, la **surface frontale projetée**. On constate expérimentalement que le C_x est quasi constant en régime turbulent (R_e grand) ce qui correspond aux situations courantes de l'aéronautisme, le nautisme, le cyclisme etc. La traînée peut se décomposer en trois termes :

- la traînée visqueuse qui est liée aux frottements du fluide sur l'obstacle ;
- la traînée de pression qui est liée à l'existence d'une dépression dans le sillage de l'obstacle quand la couche limite se décolle ;
- la traînée induite par la portance.

La force de traînée que subit un véhicule (en l'air ou au sol) étant opposée à sa vitesse, elle dissipe de l'énergie. La puissance dissipée s'écrit :

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2} \mu S C_x v^3$$

où v est la vitesse du véhicule. La puissance dissipée est une fonction cubique de la vitesse, elle ne devient donc importante qu'à haute vitesse⁴. Pour minimiser la consommation à grande vitesse, le concepteur aura intérêt à agir sur le produit SC_x . Le tableau ci-dessous donne quelques exemples.

Automobile	C_x	SC_x [m ²]	F_t à 120 km/h [N]	\mathcal{P} [kW]	\mathcal{P} [Ch]
DAIHATSU UFE III (3 places)	0,168	0,235	160	5,33	7,2
CITROEN AX DIESEL (5 places)	0,31	0,570	389	13,0	17,6
« Automobile moyenne »	0,35	0,63	430	14,3	19,5

4. *grosso modo*, en dessous de 60 km.h⁻¹ pour une voiture, les frottements de roulement l'emportent sur le frottement aérodynamique.

Coefficient de portance

Lorsque que l'obstacle solide présente trois axes équivalents il ne peut pas exister de portance. C'est le cas de la sphère et du cube. Dans le cas contraire, la portance fait intervenir le coefficient de portance C_z qui dépend de la forme du solide et de l'écoulement :

$$F_p = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 S C_z(R_e)$$

Par exemple, une aile d'avion présente un coefficient de portance qui dépend :

- de l'angle d'attaque α . Lorsque cet angle augmente, la portance augmente jusqu'à un angle α_{\max} pour lequel la portance est maximum. Une fois cet angle dépassé, la portance s'effondre, c'est le décrochage.
- du profil de l'aile, notamment de sa cambrure. Une aile symétrique d'angle d'attaque nul (la corde est parallèle à \vec{v}_∞) ne présente pas de portance. Notez que les hélices d'un hélicoptère sont symétriques : leur portance est liée à leur inclinaison.

Pour un avion en vol, on cherche à avoir une faible traînée (pour consommer moins de carburant) et un maximum de portance c'est-à-dire un rapport $\frac{C_z}{C_x}$ maximum. Ce rapport, appelé finesse de l'aile, est maximum pour un certain angle.

4 TENSION SUPERFICIELLE

De nombreuses expériences de la vie quotidienne ne peuvent pas trouver d'explication avec les lois vues jusqu'ici. C'est en tenant compte des propriétés des interfaces que l'on peut les justifier notamment grâce au concept de tension superficielle. La capillarité est la science qui s'intéresse à ces phénomènes et qui joue un rôle majeur dans de nombreux domaines scientifiques (climat, chimie de formulation, industrie du verre etc.). On propose ici une présentation classique de la capillarité; pour les aspects dynamiques et une vision plus moderne de cette science voir [1].

Ce chapitre est disponible en ligne à l'adresse :

https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/tension-de-surface.php

Sommaire

4.1	Énergie de surface	45
4.1.1	Notion de tension de surface	45
4.1.2	Conséquences expérimentales	45
4.1.3	Rôle des tensio-actifs	46
4.2	Forces capillaires	47
4.2.1	Expression de la force capillaire	47
4.2.2	Mesure et propriétés de la tension superficielle	48
4.2.3	Théorème de Laplace	49
4.3	Mouillage	51
4.3.1	Angle de contact	51
4.3.2	Ascension capillaire	52

4.1 Énergie de surface

4.1.1 Notion de tension de surface

Jusqu'ici nous avons considéré le fluide comme un milieu continu contraint par des conditions aux limites que l'on a traité de façon simpliste (continuité de la vitesse et des contraintes pour un fluide visqueux). En réalité, pour décrire correctement la physique aux interfaces il faut tenir compte des interactions moléculaires à courte portée qui s'exercent de part et d'autre de l'interface. La théorie classique de la capillarité consiste à modéliser une interface comme une surface mathématique auquel on associe une certaine élasticité représentée par la propriété physique que nous appellerons **tension superficielle**.

Essayons de justifier cette notion par un modèle simple (voire simpliste). Considérons un liquide \mathcal{F}_1 en contact avec sa vapeur \mathcal{F}_2 . Au sein de chaque fluide les molécules subissent des interactions de très courte portée (interaction de Van Der Waals attractives). Ainsi, dans \mathcal{F}_1 , chaque molécule possède une énergie d'interaction $\epsilon_1 < 0$ résultat de l'interaction attractive avec son voisinage immédiat. De même on définira une énergie d'interaction ϵ_2 au sein du fluide \mathcal{F}_2 . Par contre, il existe une couche de fluide dans laquelle les molécules sont soumises à l'action des deux fluides. L'épaisseur de ce film moléculaire est de l'ordre de la dimension a d'une molécule. Appelons alors ϵ_{12} l'énergie d'interaction d'une "molécule interfaciale". Bien entendu, on a $|\epsilon_{12}|$ compris entre $|\epsilon_1|$ et $|\epsilon_2|$. Si N est le nombre de molécules et N_s le nombre de molécules à l'interface, l'énergie du liquide \mathcal{F}_1 vaut

$$E_1 = (N - N_s)\epsilon_1 + N_s\epsilon_{12} = N\epsilon_1 + E_s$$

où $E_s = N_s(\epsilon_{12} - \epsilon_1)$ représente l'énergie de l'interface. On voit donc que l'on peut associer à l'interface une énergie liée à l'**anisotropie des forces d'interaction moléculaire**. Le terme d'anisotropie $\epsilon_{12} - \epsilon_1$ est positif. Enfin le nombre de molécules à l'interface est proportionnel à l'aire \mathcal{S} de l'interface. On a approximativement $N_s \simeq \mathcal{S}/a^2$ de sorte que l'on peut écrire

$$E_s = \gamma\mathcal{S} \quad \text{avec} \quad \gamma \simeq \frac{\epsilon_{12} - \epsilon_1}{a^2} \quad \heartsuit \quad (4.1)$$

où γ est par définition la **tension superficielle**.

La tension superficielle est une grandeur positive qui *caractérise une interface*. Ainsi la tension de surface de l'interface eau-air n'est pas la même que celle de l'interface eau-huile. Elle s'exprime en $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$.

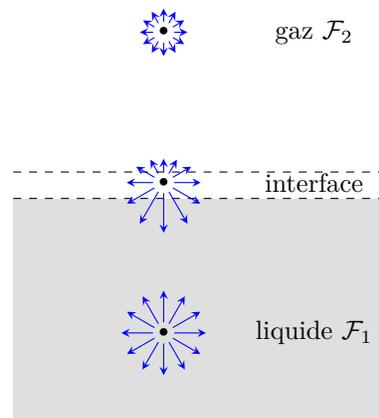
4.1.2 Conséquences expérimentales

Forme des bulles et gouttes

Augmenter la surface d'un liquide coûte donc de l'énergie. Ainsi un liquide adoptera une forme qui minimise la surface compte tenu des contraintes. On montre que pour un volume donné la surface qui minimise l'énergie est une sphère. Par exemple une goutte d'huile dans un mélange eau-alcool de densité identique sera sphérique. De la même manière, les bulles de gaz carbonique dans le champagne sont sphériques.

Coalescence

On montre aussi que deux gouttes sphériques auront intérêt à former une goutte plus grosse. Ainsi quand on agite énergiquement un mélange eau-huile on obtient une émulsion de petites gouttes d'huile dans l'eau.



Cette émulsion est instable : les petites gouttes *coalescent* (on parle du phénomène de *coalescence*) et l'on obtient après un certain temps de l'huile avec de l'eau au dessous.



Fig. 4.1 – Coalescence de deux gouttes (©CNRS)

Exercice – Considérons deux gouttes d'eau sphériques de rayon r qui coalescent pour ne former qu'une seule goutte de rayon r' . Montrer que cette transformation s'accompagne d'un gain d'énergie.

Le volume des deux gouttes vaut $\mathcal{V} = 8/3\pi r^3$ et l'interface eau-air possède une aire totale $S = 8\pi r^2$. Le volume se conservant, le rayon de la goutte obtenu après coalescence vaut $r' = \sqrt[3]{2}r$ et son interface mesure $S' = 4(\sqrt[3]{2})^2 \pi r^2 \simeq 6,3\pi r^2 < S$. La transformation s'accompagne donc d'un gain d'énergie.

Retard des changements d'état

Lorsque l'on détend un liquide de façon isotherme, la thermodynamique prévoit qu'en dessous d'une pression dite *pression de vapeur saturante*, le liquide change de phase pour se vaporiser. Cependant la formation de la première bulle de vapeur coûte de l'énergie de sorte que le liquide peut exister dans une phase métastable en dessous de la pression de vapeur saturante. On parle de retard à la vaporisation. Une simple perturbation locale peut suffire à déclencher la formation d'une première bulle de vapeur. C'est ce phénomène qui fut employé dans les détecteurs de particules du milieu du XXème siècle (chambres à bulles).

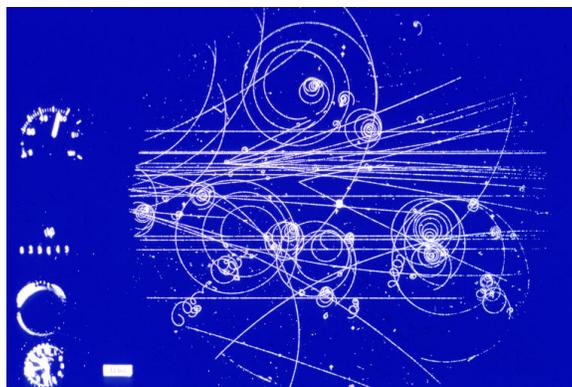


Fig. 4.2 – Production de particules dans la première chambre à bulles à hydrogène liquide du CERN

De manière analogue, il y a retard à la liquéfaction pour la vapeur sursaturante (phénomène utilisé dans un autre détecteur de particule : la chambre à Wilson).

4.1.3 Rôle des tensio-actifs

Les tensioactifs sont constituées de molécules *amphiphiles* c'est-à-dire munies d'un pôle hydrophile et d'une longue chaîne hydrophobe. Lorsqu'un tensioactif est ajouté à de l'eau il vient se placer immédiatement à la surface, avec la queue hydrophobe pointant à l'extérieur de la surface. Ce processus s'accompagne d'une stabilisation de la surface et donc d'une chute de la tension superficielle. Ce n'est qu'une fois la surface saturée, et n'offrant plus d'espace disponible à de nouvelles molécules amphiphiles, que les tensioactifs vont former des structures organisées au sein du liquide : ce sont les micelles. Les micelles sont des structures

sphériques ou ellipsoïdales dont la surface est constituée des têtes hydrophiles des tensioactifs, alors que les queues hydrophobes de ces derniers sont regroupées à l'intérieur. L'effet nettoyant des tensioactifs découle du fait que les substances hydrophobes, telles que les matières grasses, peuvent être contenues à l'intérieur des micelles. La concentration de tensioactifs au-dessus de laquelle les micelles commencent à se former est connue comme la concentration micellaire critique (CMC). Elle s'obtient en déterminant la concentration à partir de laquelle la tension superficielle cesse de chuter.

4.2 Forces capillaires

4.2.1 Expression de la force capillaire

Expériences : Plongeons un contour métallique dans de l'eau savonneuse puis retirons le. Il se forme alors une membrane liquide plane qui s'appuie sur le contour. Auparavant, nous avons pris soin de fixer un fil souple formant une boucle qui adopte une forme quelconque. Lorsque l'on crève au moyen d'une aiguille la membrane située dans la boucle, celle-ci adopte aussitôt une géométrie circulaire (cf. figure 4.3). Cette expérience montre que la boucle est soumise à des forces dites **forces capillaires** aux propriétés suivantes :

- Ces forces sont perpendiculaires en chaque point du contour et tendent à minimiser l'aire du film d'eau savonneuse.
- Ces forces sont tangentes à l'interface.
- Elles sont réparties de façon uniforme. on peut donc définir une densité linéique de force $d\vec{f}/d\ell$.

De la même façon, si l'on forme une lame d'eau savonneuse sur un cadre rectangulaire dont un des coté est mobile, le liquide cherchant à minimiser sa surface, il faut exercer une force sur la tige mobile pour maintenir la surface constante. On peut obtenir l'expression de cette force à l'aide d'un raisonnement énergétique (méthode des travaux virtuels) : Supposons qu'un opérateur déplace de façon quasi-statique la tige de longueur ℓ en produisant une force F_{op} . Si l'on note dx le déplacement, le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la tige donne

$$dE_c = 0 = \delta W = F_{op} dx + \delta W_s$$

où δW_s est le travail résistant des forces capillaires. Or ces forces dérivent d'une énergie potentielle :

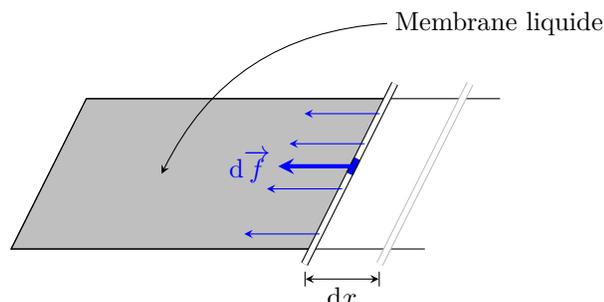
$$\delta W_s = -dE_S = -2\gamma\ell dx \quad \text{donc} \quad F_{op} = 2\gamma\ell$$

D'après le principe des actions réciproques (troisième loi de Newton), cette force s'identifie à la résultante des forces capillaires s'exerçant sur la tige.

Remarque : lorsque que l'on traite une membrane d'eau savonneuse, il ne faut pas oublier qu'il y a deux interfaces liquide-gaz ce qui explique la présence du facteur deux dans l'expression des forces capillaires.



Fig. 4.3 – Mise en évidence des forces capillaires



De façon général, on peut traiter une interface comme une membrane tendue : chaque portion de surface est le siège de forces capillaires réparties sur le contour \mathcal{C} délimitant la portion de surface. Ces forces sont tangentes à l'interface, perpendiculaires en tout point de \mathcal{C} et données par la relation

$$\vec{df} = \gamma dl \vec{n}$$

Finalement, la tension superficielle est *une force par unité de longueur*, c'est pourquoi on l'exprime couramment en $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$.

4.2.2 Mesure et propriétés de la tension superficielle

Méthode de l'anneau

Historiquement la méthode de l'anneau a été la première à être développée. Il s'agit de plonger un anneau (en platine en général) dans le liquide à étudier puis de le remonter délicatement de façon à étirer un film au-dessous de l'anneau.

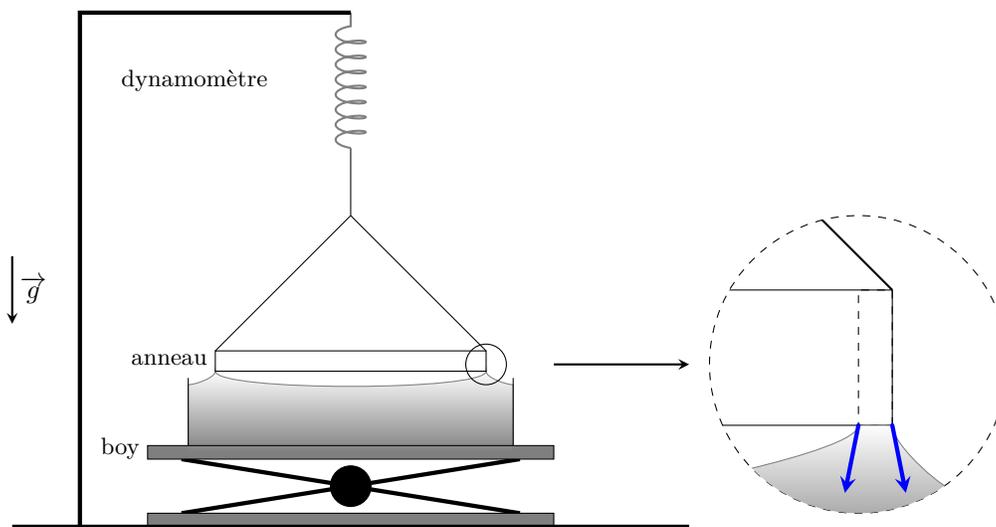


Fig. 4.4 – Méthode de l'anneau

Au cours de l'étirement du film de liquide la force exercée sur l'anneau est mesurée à l'aide d'un dynamomètre et le système passe par un seuil où la force est maximale : dans ce cas les forces capillaires sont verticales. Si l'on note r_1 le rayon intérieur de l'anneau et r_2 son rayon extérieur, on a la relation.

$$F_{\max} = 2\pi(r_1 + r_2)\gamma \simeq 4\pi r\gamma \quad \text{si } r_1 \simeq r_2$$

Sa mesure permet donc de déterminer la tension superficielle du liquide.

Ordre de grandeur

À température ordinaire, pour les liquides, la tension superficielle vaut quelques $\text{mN}\cdot\text{m}^{-1}$.

Tension superficielle de quelques interfaces liquide-air		
Liquides	Température	Tension superficielle [mN.m ⁻¹]
Mercure	18 °C	475
Eau	20 °C	73
Eau	80 °C	62
Huile d'olive	20 °C	32

La tension superficielle varie avec la température; γ diminue quand la température augmente jusqu'à s'annuler à la température critique.

4.2.3 Théorème de Laplace

Un petit contour circulaire pris dans la surface libre plane d'un liquide en équilibre est soumis à des forces de tension superficielle situées dans son plan et dont la résultante est nulle. Par contre, pour une surface sphérique, les forces exercées sur ce même contour ont une résultante orientée vers l'intérieur de la sphère; il faut donc une surpression Δp pour que l'équilibre existe. On voit immédiatement que plus la courbure est importante et plus Δp sera grand.

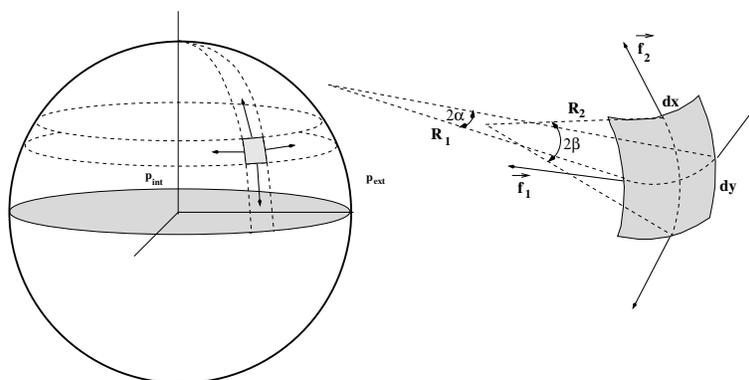


Fig. 4.5 – Existence d'une surpression dans une bulle

On peut facilement obtenir l'expression de la différence de pression à l'aide d'un raisonnement énergétique. Considérons une bulle de gaz contenue dans un liquide et appelons γ la tension superficielle de l'interface gaz-liquide. Supposons que l'on fasse subir à la bulle une transformation quasistatique en augmentant son rayon de dR . L'aire de l'interface augmente donc de $dS = 8\pi R dR$ et le volume de la bulle de $dV = 4\pi R^2 dR$. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique en choisissant comme système l'interface :

$$dE_c = 0 = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}}$$

Les forces extérieures sont les forces de pression p_{int} et p_{ext} de sorte que

$$\delta W_{\text{ext}} = -p_{\text{ext}} dV + p_{\text{int}} dV$$

Par ailleurs, les forces internes sont les forces de tension superficielles qui dérivent d'une énergie potentielle :

$$dW_{\text{int}} = -\gamma dS = -8\gamma\pi R dR$$

On a donc

$$\Delta p 4\pi R^2 dR - 8\gamma\pi R dR = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta p = p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \frac{2\gamma}{R}$$

De la même manière, à l'intérieur d'une bulle de savon, il règne une surpression

$$\Delta p = p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \frac{4\gamma}{R}$$

où le facteur 4 est dû au fait que la bulle de savon présente deux interfaces liquide-gaz. Ainsi la surpression est d'autant plus importante que la courbure moyenne $C = 2/R$ est importante. La généralisation à une géométrie quelconque est donnée par la loi de Laplace-Young :

Loi de Laplace-Young

La différence de pression entre deux milieux non miscibles séparés par une interface de tension superficielle γ , est donnée par

$$p_1 - p_2 = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux de la membrane au point considéré. Ces rayons sont définis positifs quand le rayon de courbure est du côté du milieu 1. Dans le cas d'une interface sphérique, ces deux rayons de courbure s'identifient au rayon de la sphère.

Ordre de grandeur

Pour une bulle de savon de rayon $R \simeq 1 \text{ cm}$ et $\gamma \simeq 25.10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$ on obtient $\Delta p \simeq 10 \text{ Pa}$. Pour faire des grosses bulles il faut fournir beaucoup d'énergie (surface importante) et générer une faible surpression ; il faut donc souffler tout doucement et longtemps.

Mûrissement d'une mousse

Dans une mousse humide (mousse à raser, mousse de bière, etc.), du gaz est enfermé dans des bulles sphériques séparées par un film liquide pouvant plus ou moins laisser diffuser le gaz selon l'épaisseur de la membrane et la taille des molécules gazeuses. Le gaz emprisonné est en surpression par rapport au liquide en vertu de la loi de Laplace-Young

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R}$$

Ainsi la pression est plus importante dans les petites bulles. C'est ce qui explique le phénomène de **mûrissement** d'une mousse : Le gaz contenu dans les petites bulles traversent la membrane liquide par diffusion pour se diriger dans les zones de moins grande pression, c'est-à-dire, dans les grosses bulles. Les petites bulles se vident donc dans les grosses et la mousse s'enrichit en grosses bulles.

Surface minimale

Lorsque l'on trempe une structure métallique dans une eau de savon, on obtient une surface minimale (l'interface va chercher à minimiser l'énergie superficielle) qui a la propriété suivante : si la surface est ouverte, $\Delta p = 0$ et donc

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$$

On dit que la courbure moyenne est nulle. Dans la plupart des cas on obtient des lames planes qui forment une surface minimale ($R_1, R_2 \rightarrow \infty$). On peut aussi obtenir des lames avec deux rayons de courbures opposées comme sur la figure 4.6 montrant une *caténoïde*.

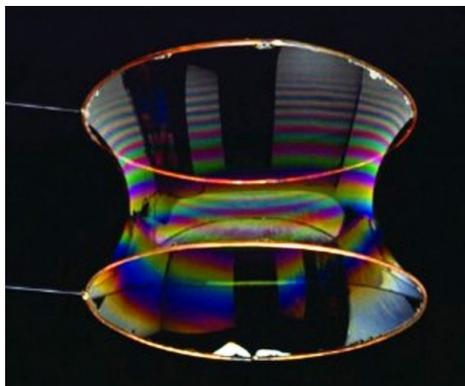


Fig. 4.6 – Lame de savon formant une caténoïde (©Berkeley Science Review).

4.3 Mouillage

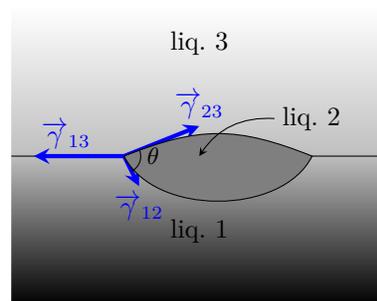
4.3.1 Angle de contact

Équilibre au contact de trois fluides

Déposons une petite quantité de liquide 2 sur un autre liquide 1 plus dense. L'ensemble des points en contact avec les deux liquides et l'air forme une ligne, dite ligne triple. Intéressons nous aux forces capillaires s'exerçant sur cette ligne triple. L'équilibre n'est possible que si la résultante des forces capillaires peut s'annuler ce qui définit l'angle de contact θ :

$$\vec{\gamma}_{12} + \vec{\gamma}_{23} + \vec{\gamma}_{31} = \vec{0}$$

où le vecteur $\vec{\gamma}_{ij} = \frac{d\vec{f}_{ij}}{d\ell}$ désigne la densité linéique de force capillaire. Cet équilibre suppose que l'on puisse former un triangle (dit triangle de Neumann) avec les trois vecteurs $\vec{\gamma}_{ij}$ ce qui n'est possible qu'à condition que **chaque tension de surface soit inférieure à la somme des deux autres**. Dans le cas contraire, le liquide 2 s'étale sur le liquide 1 : on dit qu'il y a **mouillage total**.



Exercice – Déposons une goutte d'huile d'olive sur de l'eau. Sachant que $\gamma_{\text{eau-air}} = 73 \text{ N.m}^{-1}$, $\gamma_{\text{huile-air}} = 32 \text{ N.m}^{-1}$ et $\gamma_{\text{huile-eau}} = 18 \text{ N.m}^{-1}$, dire s'il y a étalement ou non.

Comme $73 > 18 + 32$, la condition d'équilibre n'est pas respectée et l'huile d'olive s'étale.

Équilibre d'un liquide au contact d'un solide

Déposons une goutte de liquide sur un support plan. En général, le liquide adopte la forme décrite sur la figure ci-contre, résultat d'un compromis entre le poids qui tends à diminuer la position du centre de gravité de la goutte et des forces capillaires qui tendent à minimiser l'aire de la surface libre. À l'équilibre, la résultante des forces capillaires en un point de la ligne triple s'annule. En projection sur le plan de la surface solide, on a donc

$$\gamma_{SL} + \gamma_{LV} \cos \theta = \gamma_{SV}$$

Cette relation trouvée par Young en 1805 définit l'angle de contact θ .

On distingue trois cas de figure :

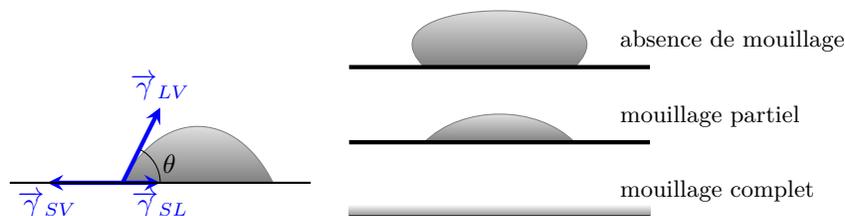


Fig. 4.7 – Différents équilibres d'un liquide au contact d'un substrat solide.

1. $\theta > \pi/2$: le liquide est non mouillant (exemple : verre-mercure-air)
2. $\theta \in [0, \pi/2]$: il y a mouillage partiel (exemple : verre-eau-air)
3. Lorsque l'angle de contact n'est pas défini, il y a mouillage complet du liquide sur le substrat solide.

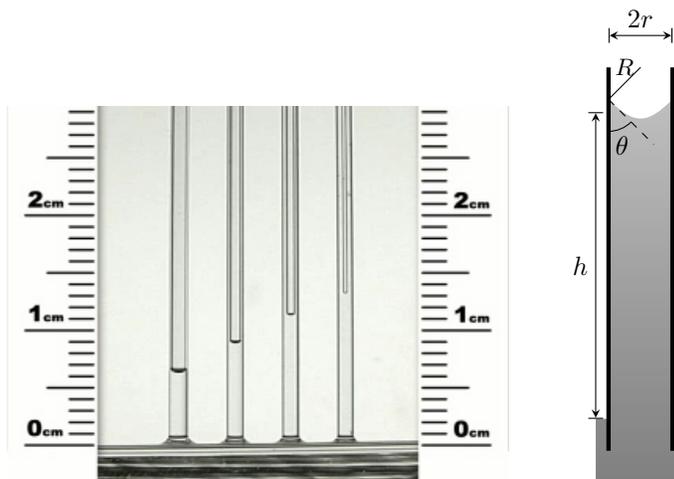
Remarque : dans la direction perpendiculaire à la surface solide, les forces capillaires ne se compensent pas ce qui signifie que le solide se déforme. On peut montrer que pour les solides courants, cette déformation est plus petite que la taille d'un atome et donc négligeable.

4.3.2 Ascension capillaire

Quand on plonge un capillaire propre (tube étroit de rayon r) dans de l'eau, on observe l'ascension d'une colonne d'eau dans le capillaire malgré la pesanteur. Cette ascension est d'autant plus importante que le rayon est petit.

$$h = \frac{C^{te}}{r} \quad \text{Loi de Jurin}$$

où la constante dépend du liquide et de l'angle de contact.



On peut utiliser la loi de Laplace-Young pour démontrer la loi de Jurin. En effet, considérons l'interface liquide raccordée à la paroi du tube avec un angle θ et supposons que le ménisque est sphérique de rayon R . L'air étant à la pression p_0 , la pression qui règne dans le liquide au voisinage du ménisque vaut $p_0 - \Delta p$ avec $\Delta p = 2\gamma/R$ en vertu de la loi de Laplace-Young. Le rayon de courbure vaut $R = r/\cos\theta$ d'où

$$p_h = p_0 - \frac{2\gamma \cos\theta}{r}$$

Or si l'on applique les lois de l'hydrostatique au niveau de la surface libre du récipient dans lequel plonge le tube, on trouve

$$p_0 = p_0 - \frac{2\gamma \cos \theta}{r} + \mu g h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\mu g} \frac{1}{r}$$

Il y a donc ascension capillaire si le liquide mouille la paroi ($\theta < \pi/2$). Par contre pour un liquide non mouillant il y a descente capillaire (cas du mercure dans un capillaire en verre).

Exemple –

Pour l'eau dans un tube de verre propre l'angle de raccordement vaut 0 (l'eau mouille le tube). Si $r = 0,01$ mm on obtient

$$h = \frac{2\gamma}{\mu g} \frac{1}{r} = 1,5 \text{ m}$$

l'ascension peut donc être très importante. C'est ce qui explique par exemple les remontées d'humidité par capillarité que l'on peut observer dans des milieux poreux notamment dans certains bâtiments.

Remarque : la loi de Jurin suppose que le ménisque est sphérique et donc que la pression sous le ménisque est uniforme. Or rigoureusement, comme les bords du ménisque sont plus haut que le centre, cette pression **ne peut pas** être uniforme. Elle ne peut l'être qu'approximativement à condition que l'élévation du ménisque soit négligeable devant la hauteur d'ascension h . Il est facile de montrer que cette condition se traduit par

$$r \ll \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \sin \theta}} \sqrt{\frac{\gamma}{\mu g}}$$

Pour les petits angles cela donne

$$r \ll \sqrt{\frac{\gamma}{\mu g}} \simeq 2,7 \text{ mm} \quad \text{pour l'eau}$$

Compléments

A OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

Complément de cours sur ce qu'il faut savoir à propos des opérateurs différentiels utilisés en physique.
Ce chapitre est disponible en ligne à l'adresse :

https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/mecaflu_complement1.php

L'opérateur gradient

Définition

L'opérateur gradient est un *opérateur différentiel* qui s'applique à un **champ scalaire** (fonction scalaire dépendant de l'espace et du temps) et le transforme en un **champ vectoriel** (vecteur dépendant de l'espace et du temps). Il se lit « gradient » ou « nabla » et se note :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(M, t) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla}f(M, t)$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes le gradient s'exprime ainsi :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(x, y, z, t) = \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z} \vec{u}_z \quad \heartsuit \quad (\text{A.1})$$

Le tableau ci-dessous donne les différentes expressions du gradient dans les systèmes de coordonnées utilisés couramment en physique.

Système de coordonnées	$f(M, t)$	Expression de $\text{grad}f$
Cartésiennes	$f(x, y, z, t)$	$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$
Cylindriques	$f(r, \theta, z, t)$	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{\partial f}{r \partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$
Sphériques	$f(r, \theta, \varphi, t)$	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{\partial f}{r d\theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{r \sin \theta d\varphi} \vec{u}_\varphi$

Exercice – Calculer le gradient des champs suivants

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{et} \quad g(r, \theta, \varphi) = -\frac{1}{r}$$

$$\vec{\nabla}f = (x, y, z) = \overrightarrow{\text{OM}} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla}g = \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$$

Propriétés.

L'opérateur gradient est un opérateur linéaire et vérifie donc

$$\vec{\nabla}(\alpha f + \beta g) = \alpha \vec{\nabla} f + \beta \vec{\nabla} g \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Le gradient d'un produit de champs scalaires vaut

$$\vec{\nabla} f \cdot g = f \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} f$$

où f et g sont deux fonctions de l'espace et du temps.

Lien avec la différentielle

On peut définir le gradient à partir de sa relation avec la différentielle. Soit M un point de l'espace et M' un point infiniment voisin, la différentielle df représente la variation du champ scalaire f lorsque l'on se déplace de M à M' à t fixé :

$$df \triangleq f(M', t) - f(M, t) = \vec{\nabla} f(M, t) \cdot d\vec{\ell} \quad \text{avec } d\vec{\ell} = \overrightarrow{MM'}$$

En conséquence,

- Le vecteur $\vec{\nabla} f(M, t)$ est perpendiculaire à la surface de niveau¹ de f passant par M à l'instant t .
- Le vecteur gradient est orienté vers les valeurs croissantes de f et sa norme mesure le taux de variation spatiale dans la direction de plus grande pente

$$\|\vec{\nabla} f\| = \frac{df}{d\ell}$$

Exercice – Considérons le champ scalaire de l'espace bi-dimensionnel, $f(x, y) = x^2 + y^2$. Représenter les courbes de niveau puis calculer $\vec{\nabla} f$. Tracer quelques vecteurs gradients.

Les courbes de niveau sont des cercles de centre O . On a $\vec{\nabla} f = (2x, 2y) = 2\overrightarrow{OM}$. Les vecteur gradients sont effectivement perpendiculaires aux cercles.

L'opérateur divergence

Définition

L'opérateur divergence est un opérateur différentiel qui s'applique à un **champ vectoriel** et qui renvoie un **champ scalaire**. Il se lit « divergence » et se note :

$$\operatorname{div} \vec{A}(M, t) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(M, t)$$

Cette notation permet de retenir l'expression de la divergence en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div} \vec{A}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \heartsuit \quad (\text{A.2})$$

Le tableau ci-dessous donne les différentes expressions de la divergence d'un champ vectoriel exprimé dans différents systèmes de coordonnées.

1. La surface de niveau de f est l'ensemble des points M pour lesquels $f(M, t)$ conserve la même valeur à un instant t fixé. En dimension $d = 2$, cet ensemble donne une courbe de niveau.

Système de coordonnées	Expression de $\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$
cartésiennes	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
cylindriques	$\frac{\partial(rA_r)}{r \, dr} + \frac{\partial(A_\theta)}{r \, d\theta} + \frac{\partial A_z}{dz}$
sphériques	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

Exercice – Considérons le champ vectoriel $\vec{A}(r, \theta, \varphi) = \frac{\vec{u}_r}{r^2}$. Calculer la divergence de ce champ en tout point M autre que O.

On trouve $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. On dit que \vec{A} est un champ à flux conservatif (sauf en O).

Propriétés

L'opérateur divergence est un **opérateur linéaire** et vérifie donc

$$\operatorname{div}(\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}) = \alpha \operatorname{div} \vec{A} + \beta \operatorname{div} \vec{B} \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

La divergence d'un produit vaut

$$\operatorname{div}(f \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = f \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f = f \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f$$

Théorème de Green-Ostrogradsky ou théorème de la divergence

Le flux d'un champ vectoriel $\vec{A}(M)$ à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale sur le volume V limité par (S) de la divergence du champ vectoriel.

$$\iint_{M \in (S)} \vec{A}(M) \cdot d\vec{S}^{\text{ext}} = \iiint_{M \in V} \operatorname{div} \vec{A}(M) \, d\tau \quad \text{avec } \operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Sens physique

La divergence prend un sens bien précis en mécanique des fluides (*cf.* simulations à la page https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/cinematique.php). Considérons une portion de fluide en mouvement dans un fluide décrit par le champ de vitesse $\vec{v}(M, t)$. Au cours du mouvement, le volume \mathcal{V} de cette portion varie suite aux déformations engendrées par l'écoulement. La divergence de la vitesse est liée au taux de dilatation de la portion fluide par la relation

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{\mathcal{V}} \frac{D\mathcal{V}}{Dt}$$

L'opérateur rotationnel

Définition

L'opérateur rotationnel est un opérateur différentiel qui transforme un **champ vectoriel** en un autre **champ vectoriel**. Il se lit « rotationnel » et se note

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M, t) \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(M, t)$$

Cette notation permet de retenir l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \heartsuit \quad (\text{A.3})$$

Le tableau ci-dessous donne les différentes expressions du rotationnel dans différents systèmes de coordonnées.

Système	$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$
cartésien	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$
cylindrique	$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}, \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$
sphérique	$\left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right)$

Propriétés

Citons quelques propriétés utiles :

- L'opérateur rotationnel étant linéaire, on a

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\alpha \vec{A} + \beta \vec{B}) = \alpha \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \beta \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

- Le rotationnel d'un gradient est nul.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

- La divergence d'un rotationnel est nulle.

$$\text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$$

- Rotationnel d'un produit

$$\overrightarrow{\text{rot}} f \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge (f \vec{A}) = \vec{\nabla} f \wedge \vec{A} + f \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{A} + f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

- Théorème de Stokes.

La circulation d'un champ vectoriel le long d'un contour \mathcal{C} **fermé** et **orienté** est égal au flux du rotationnel de ce champ à travers une surface \mathcal{S} délimité par \mathcal{C} .

$$\oint_{M \in \mathcal{C}} \vec{A}(M) \cdot d\vec{\ell} = \iint_{M \in \mathcal{S}} \text{rot } \vec{A}(M) \cdot d\vec{S}$$

avec $d\vec{S}$ orienté à partir du sens de parcours de \mathcal{C} et de la règle du tire-bouchon.

Sens physique

En mécanique des fluides, le rotationnel du champ de vitesse d'un fluide en écoulement est lié à la vitesse de rotation Ω des particules de fluide au cours de leur mouvement.

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$$

L'opérateur laplacien

Le laplacien scalaire

L'opérateur laplacien scalaire est un opérateur différentiel d'ordre deux qui transforme un champ scalaire en un autre champ scalaire. Le laplacien scalaire s'obtient en prenant la divergence du gradient et se note $\Delta f(M, t)$.

$$\Delta f(M, t) = \text{div}(\text{grad } f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \heartsuit \quad (\text{A.4})$$

Le tableau ci-dessous donne les expressions du laplacien scalaire dans différents systèmes de coordonnées.

Système de coordonnées	Expression de Δf
cartésiennes	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
cylindriques	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
sphériques	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

Le laplacien vectoriel

Le laplacien s'applique également à un champ vectoriel. Dans ce cas il renvoie un autre champ vectoriel et se note

$$\Delta \vec{A}$$

Par définition, le laplacien vectoriel s'obtient à l'aide de l'identité

$$\text{rot } \text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \text{grad}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

En coordonnées cartésiennes, les vecteur unitaires étant fixes, le laplacien vectoriel d'un champ \vec{A} est tout simplement, un vecteur dont les composantes sont les laplaciens scalaires des composantes de \vec{A} :

$$\Delta \vec{A}(M, t) = (\Delta A_x) \vec{u}_x + (\Delta A_y) \vec{u}_y + (\Delta A_z) \vec{u}_z$$

Accélération d'une particule de fluide

On a vu en mécanique des fluides (cf. https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/cinematique.php) que l'accélération d'une particule de fluide située en M à l'instant t pouvait s'obtenir à l'aide du champ de vitesse $\vec{v}(M, t)$:

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

où le dernier terme désigne la partie **convective** de l'accélération. Explicitons la composante suivant Ox de ce terme en utilisant l'égalité $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ avec $\vec{A} = \vec{v}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} v_x$ et $\vec{C} = \vec{u}_x$:

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_x) \vec{u}_x = (\vec{v} \cdot \vec{u}_x) \vec{\nabla} v_x - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} v_x \wedge \vec{u}_x) = v_x \vec{\nabla} v_x - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} v_x \wedge \vec{u}_x) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} v_x^2 - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} v_x \wedge \vec{u}_x)$$

Ainsi en procédant de la même façon pour les deux autres composantes, on obtient

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \vec{v} \wedge (\vec{\nabla} v_x \wedge \vec{u}_x + \vec{\nabla} v_y \wedge \vec{u}_y + \vec{\nabla} v_z \wedge \vec{u}_z)$$

On reconnaît v^2 dans le gradient et l'on voit apparaître $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$ dans le dernier terme. On aboutit alors à une nouvelle expression de l'accélération

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} \quad \heartsuit \quad (\text{A.5})$$

Ouvrages

1. De GENNES, P.-G., WYART, F. B. & QUÉRÉ, D. *Gouttes, bulles, perles et ondes* (Belin, 2002).
2. GUYON, E., HULIN, J.-P. & PETIT, L. *Hydrodynamique physique* (Interéditions/CNRS, 1991).
3. CANDEL, S. *Mécanique des fluides 2ème cycle* (Dunod, Paris, 2001).

Autres sources

4. DUPEU, G. *et al.* Le football et ses trajectoires. *Reflète de la physique*, 10–14 (2012).
5. LANGEVIN, D. La coalescence. *Bulletin de la SFP* (1998).
6. LANGEVIN, D. Les tensioactifs. *BUP, Hors série* (2005).