

Université de Caen

Département de physique

Agrégation de physique

Prof C. LONGUEMARE

version 2.0

2001-2005

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Principes fondamentaux | 6 |
| 1.1 | Principe de moindre action | 6 |
| 1.2 | Equations de Lagrange | 6 |
| 1.3 | Equations de Hamilton | 7 |
| 1.4 | Applications | 8 |
| 1.5 | Généralisation aux ondes : la densité de lagrangien | 8 |
| 1.6 | Equations de Hamilton-Jacobi | 9 |
| 2 | Théorème de Noether | 11 |
| 2.1 | But du théorème de Noether | 11 |
| 2.2 | Théorie lagrangienne des systèmes ponctuels | 11 |
| 2.3 | Théorie lagrangienne des champs | 12 |
| 2.4 | Théorème de Noether | 12 |
| 2.5 | Application à l'invariance par translation du temps | 13 |
| 3 | Formules d'analyse vectorielle | 15 |
| 3.1 | Analyse vectorielle | 15 |
| 3.2 | Théorème de Stockes | 16 |
| 3.3 | Formulations particulières | 16 |
| 3.4 | Opérateurs différentiels | 16 |
| 3.4.1 | Cartésiennes : (x, y, z) | 16 |
| 3.4.2 | Cylindriques : (ρ, θ, z) | 17 |
| 3.4.3 | Sphériques : (r, θ, ϕ) | 17 |
| 4 | Référentiels et invariances | 19 |
| 4.1 | Référentiels en physique classique | 19 |
| 4.2 | Cinématique d'un référentiel | 19 |
| 4.3 | Mouvement d'un référentiel | 20 |
| 4.4 | Mouvement des solides | 20 |
| 4.5 | Invariance galiléenne | 21 |
| 4.6 | Invariance relativiste restreinte | 21 |
| 4.7 | Cinématique classique d'un solide en mouvement | 22 |
| 5 | Mécaniques 1 | 26 |
| 5.1 | Dynamique classique des solides | 26 |
| 5.2 | Applications | 27 |
| 6 | Mécaniques 2 | 30 |
| 6.1 | Rappels | 30 |
| 6.2 | Dynamique relativiste | 30 |
| 6.3 | Applications en physique nucléaire et des particules. | 31 |
| 6.4 | Approche lagrangienne de la force de Lorentz | 32 |
| 7 | Mécaniques 3 | 34 |
| 7.1 | Introduction à la mécanique des fluides | 34 |
| 7.2 | Equations dynamiques d'Euler pour les fluides parfaits | 34 |
| 7.3 | Loi thermo-dynamique en milieu fluide | 35 |
| 7.4 | Approximations | 35 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 7.5 | Applications | 36 |
| 7.6 | Introduction de la viscosité | 36 |
| 7.7 | Interprétation de la force de viscosité | 38 |
| 8 | Vibrations | 40 |
| 8.1 | Introduction et hypothèses | 40 |
| 8.2 | Le mouvement libre | 41 |
| 8.3 | Le mouvement amorti | 42 |
| 8.4 | Oscillations forcées et résonances | 43 |
| 9 | Thermodynamique 1 | 45 |
| 9.1 | Introduction | 45 |
| 9.2 | Principe 0 et équation d'état | 45 |
| 9.3 | Principe 1 et énergie interne | 47 |
| 9.4 | Principe 2 et entropie | 47 |
| 9.5 | Principe 3 et les basses températures | 48 |
| 10 | Thermodynamique 2 | 50 |
| 10.1 | Introduction | 50 |
| 10.2 | Les potentiels thermodynamiques | 50 |
| 10.2.1 | L'entropie $S(U, x)$ et la nég-entropie $-S(U, x)$: | 50 |
| 10.2.2 | L'énergie libre $F(x, T) = U - TS$: | 51 |
| 10.2.3 | L'enthalpie libre $G(X, T) = H - TS$ | 51 |
| 10.2.4 | L'énergie interne $U(x, S)$ | 52 |
| 10.3 | Expression de G pour les systèmes ouverts | 52 |
| 10.4 | Les transitions de phases : | 52 |
| 11 | Thermodynamique 3 | 55 |
| 11.1 | Introduction à la physique statistique | 55 |
| 11.2 | Statistique de Maxwell Boltzmann | 55 |
| 11.3 | Relations avec la thermodynamique | 56 |
| 11.4 | Théorie cinétique des gaz | 56 |
| 11.5 | Statistiques quantiques | 57 |
| 12 | Thermodynamique 4 | 61 |
| 12.1 | Introduction à la théorie du transport | 61 |
| 12.2 | Théorie thermodynamique des processus irréversibles | 61 |
| 12.3 | Thermodynamique irréversible | 63 |
| 12.4 | Théories microscopiques (physique statistique hors équilibre) | 64 |
| 12.5 | Evolution mécanique du système : | 64 |
| 12.6 | Le théorème H de Boltzmann et l'équation de Boltzmann | 65 |
| 13 | Elasticité -Thermodynamique | 67 |
| 13.1 | Introduction | 67 |
| 13.2 | Théorie des déformations et contraintes élastiques | 68 |
| 13.3 | Déformations élastiques : la loi de Hooke (1678) | 69 |
| 13.4 | Thermodynamique de la déformation | 69 |

| | |
|--|-----------|
| 14 Solide 1 | 71 |
| 14.1 la conduction électrique | 71 |
| 14.2 Les réseaux de Kirchhoff | 71 |
| 14.3 Capacités calorifiques | 72 |
| 14.4 Elasticité mécanique | 72 |
| 14.5 Polarisation électrique | 73 |
| 14.6 Magnétisme | 73 |
| 14.7 Paramagnétisme | 74 |
| 14.8 Théorie quantique de Brillouin | 74 |
| 15 Solide 2 | 76 |
| 15.1 Propriétés géométriques | 76 |
| 15.2 Le réseau réciproque | 76 |
| 15.3 Diffraction des rayons X par les cristaux | 77 |
| 15.4 La conduction électrique | 78 |
| 15.5 Modèle des électrons quantiques libres | 78 |
| 15.6 Une onde électronique dans un potentiel périodique (MQ) | 80 |
| 15.7 Théorie des bandes de valence | 80 |
| 15.8 Les capacités calorifiques des solides | 81 |
| 16 Ondes 1 Généralités | 85 |
| 16.1 Introduction : le cas du fil tendu. | 85 |
| 16.2 La propagation de l'onde | 86 |
| 16.3 Ondes progressives et ondes stationnaires | 87 |
| 16.4 Dispersion | 88 |
| 17 Ondes 2 : Acoustique | 90 |
| 17.1 Généralités | 90 |
| 17.2 Potentiel des vitesses | 91 |
| 17.3 Energie et lagrangien pour l'acoustique linéaire | 91 |
| 17.4 Aspects thermodynamiques | 92 |
| 17.5 Aspects physiologiques | 93 |
| 17.6 Tuyaux et résonances | 93 |
| 17.7 Dispersion et absorption des ondes sonores | 94 |
| 17.8 Acoustique musicale | 95 |
| 18 Electrodynamique 1 | 97 |
| 18.1 Equations de Maxwell | 97 |
| 18.2 Equations de propagation des potentiels dans le vide | 98 |
| 18.3 Le cas fondamental | 98 |
| 18.4 Développement multipolaire | 99 |
| 18.5 Potentiels retardés | 100 |
| 18.6 Approximation des régimes quasistationnaires | 100 |
| 18.7 Rayonnement | 102 |
| 18.8 Approche lagrangienne de la force de Lorentz | 103 |
| 18.9 Questions à voir | 103 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 19 | Electrodynamique 2 | 105 |
| 19.1 | Equations de Maxwell | 105 |
| 19.2 | Equations dans les milieux matériels | 105 |
| 19.3 | Une théorie élémentaire de la dispersion | 106 |
| 19.4 | Les milieux conducteurs non-magnétiques et isotropes | 106 |
| 19.5 | Ondes électromagnétiques dans les plasmas | 107 |
| 19.6 | La réfraction et biréfraction | 107 |
| 19.7 | Réflexion sur un milieu conducteur parfait | 109 |
| 20 | Guide d'onde électromagnétique | 111 |
| 20.1 | Introduction | 111 |
| 20.2 | Discussion | 112 |
| 20.3 | Cas guide à section rectangulaire | 112 |
| 21 | Optique 1 | 115 |
| 21.1 | Approximation Eikonale | 115 |
| 21.2 | Principe de Fermat | 116 |
| 21.3 | Interférences et dispositifs interférentiels | 117 |
| 22 | Optique 2 | 120 |
| 22.1 | Introduction | 120 |
| 22.2 | Diffraction par une pupille | 120 |
| 22.3 | Réseaux dans le domaine optique | 122 |
| 22.4 | Diffraction des X par les cristaux | 123 |
| 23 | Mécanique quantique | 126 |
| 23.1 | Fondements expérimentaux | 126 |
| 23.2 | Le rayonnement thermique : La loi de Planck | 127 |
| 23.3 | L'effet photoélectrique : l'expérience de Franck-Hertz | 128 |
| 23.4 | La mécanique ondulatoire | 128 |
| 23.5 | Généralisation : Loi De Broglie | 129 |
| 23.6 | Equation de Schrödinger | 129 |
| 24 | Physique Atomique | 132 |
| 24.1 | Introduction | 132 |
| 24.2 | Un électron dans un champ central | 134 |
| 24.3 | Théorie quantique de l'atome | 134 |
| 24.4 | L'atome à plusieurs électrons | 136 |
| 24.5 | Le spin des électrons | 137 |
| 24.6 | Physique moléculaire | 138 |
| 25 | Physique Nucléaire | 140 |
| 25.1 | Introduction | 140 |
| 25.2 | Propriétés statiques des noyaux | 140 |
| 25.3 | Modèles nucléaires | 142 |
| 25.4 | Dynamique nucléaire | 143 |

1 Principes fondamentaux

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

1.1 Principe de moindre action

Soit un système dynamique défini par une position et une vitesse dans l'espace de phase

$$(q, \dot{q})$$

L'action \mathcal{A} sur un chemin virtuel $q(t)$ de t_0 à t_1 est minimum sur le chemin physique effectivement suivi par le système .

$$\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

1.2 Equations de Lagrange

Equations de Lagrange, conséquence d'une moindre action entre t_0 à t_1

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right)$$

Propriété de stabilité des équations par rapport aux changements de variables ou transformations ponctuelles définies par :

$$q \rightarrow Q = u(q, t)$$

Démonstration : on utilise essentiellement

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial u}{\partial q}$$

Applications

— Mouvement libre

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}mv^2 + Cte$$

— Mouvement dans un champ conservatif avec $U(q)$, l'énergie potentielle.

$$\mathcal{L} = T - U$$

— Généralisation à n degrés de liberté

$$(q_i, \dot{q}_i) \quad i = 1, n$$

Généralisations possibles vers les ondes, la mécanique quantique ou relativiste ..

1.3 Equations de Hamilton

Définition de l'hamiltonien : soit p la variable conjuguée de q

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

Alors :

$$\mathcal{H}(q, p, t) = p\dot{q} - \mathcal{L}$$

Equations de Hamilton

Dans l'espace de phase (q, p) , la vitesse (\dot{q}, \dot{p}) est déterminée par le principe de moindre action qui conduit aux équations d'Hamilton.

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ F_q \end{pmatrix}$$

Propriétés

— Stabilité des équations par rapport aux changements de variables "canoniques"

$$(q, p) \rightarrow (u(q, p, t), v(q, p, t))$$

— Variation d'une grandeur physique quelconque $X(q, p, t)$... sur la trajectoire physique du système.

$$\frac{dX}{dt} = \{\mathcal{H}, X\} + \frac{\partial X}{\partial t}$$

— Le crochet de Poisson

$$\{Y, X\}_{q,p} = \frac{\partial Y}{\partial p} \frac{\partial X}{\partial q} - \frac{\partial Y}{\partial q} \frac{\partial X}{\partial p} = -\{X, Y\}_{q,p}$$

— Conservation de la grandeur $X(q, p)$ définie en fonction des variables q, p

$$\{\mathcal{H}, X\} = 0 \quad \frac{\partial X}{\partial t} = 0$$

Conservation de l'énergie $X \equiv \mathcal{H}$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

Exemple : $X = q$ ou p

$$\{q, q\} = 0 \quad \{p, p\} = 0 \quad \{p, q\} = 1$$

Exemples : $X = L = q \wedge p$ ou $X = E_c = \frac{p^2}{2m}$ alors

$$\{\mathcal{H}, L\} = \dot{q} \wedge p - F_q \wedge q \quad \text{ou} \quad \{\mathcal{H}, E_c\} = F_q \frac{p}{m}$$

1.4 Applications

Théorème du Viriel :

$$\mathcal{V} = qF_q = q \cdot \dot{p} = q \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}$$

dans certaines conditions (système périodique ou confiné), la moyenne du viriel sur un temps long ($t \rightarrow \infty$) conduit à :

$$\langle \mathcal{V} \rangle = -\langle \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \rangle = -2 \langle T \rangle$$

Eléments pour la démonstration

$$(\dot{p}q) = \dot{p}q + \dot{q}p \text{ avec } \dot{p} = F_q \text{ et } p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

Le Viriel des forces de pression dans un gaz (avec le théorème de Stokes)

$$\langle \mathcal{V} \rangle = \int_{surface} (-p) \vec{r} \vec{d}s = -3 pV$$

1.5 Généralisation aux ondes : la densité de lagrangien

Théorie lagrangienne des ondes :

Nous noterons la variable d'espace

$$x = (t, \vec{x})$$

Le lagrangien \mathcal{L} est une fonction de φ , l'amplitude de l'onde, et de ses dérivées d'espace temps.

$$\mathcal{L}(\varphi, \varphi_x) \text{ avec } \varphi(x) \text{ et } \varphi_x = \partial_x \varphi(x)$$

$$\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\varphi, \varphi_x) d\vec{x} dt$$

$\mathcal{L}(\varphi, \varphi_x)$ est une densité de lagrangien définie en x soit en \vec{x} à t .

Equations de Lagrange pour chaque composante φ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \sum_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_x} \right)$$

Densité d'hamiltonien

$$\mathcal{H} = \sum_{\varphi} \dot{\varphi} \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \mathcal{L} \text{ avec } \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Application à la corde vibrante : définie par densité et tension

$$\rho \text{ et } T$$

densité de lagrangien à t en \vec{x} :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\rho \dot{\varphi}^2 - T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2)$$

densité d'hamiltonien à t en \vec{x} :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\rho \dot{\varphi}^2 + T \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2)$$

Energie d'une corde vibrante (à 1D) ?

1.6 Equations de Hamilton-Jacobi

Autres formes du principe de moindre action :

L'action \mathcal{A} est considérée comme une fonction de q et t : $\mathcal{A}(q, t)$

On montre que :

$$d\mathcal{A} = p dq - \mathcal{H} dt \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q} \text{ et } \mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$$

Démonstration :

Si on relie \dot{q} et q par $dq = \dot{q} dt$ alors avec $\mathcal{H} = p\dot{q} - \mathcal{L}$ on constate :

$$d\mathcal{A} = p dq - \mathcal{H} dt = p dq - (p\dot{q} - \mathcal{L}) dt = \mathcal{L} dt$$

L'action se comporte comme la phase d'une onde

$$\delta \mathcal{A} = (p \delta q - \mathcal{H} \delta t)$$

Equations de Hamilton-Jacobi

$$-\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = \mathcal{H}(q, \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q}, t) \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial q} = p$$

Analogies avec l'équation de Schrödinger et la fonction d'onde quantique $\psi(x, t) \sim \mathcal{A}$.

Dans ce cadre le principe de moindre action exprime la stabilité (locale) de la phase de l'onde quantique.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}(x, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, t) \psi \quad -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = p$$

L'action de Maupertuis

Mouvements dans un champ conservatif avec conditions initiales fixées et $\mathcal{H} = E_0$

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + U(x) \quad |p(x)| = \sqrt{2m(E_0 - U(x))} \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{A} = \vec{p}(x) d\vec{x} - E_0 dt$$

L'action de Maupertuis et principe de moindre action :

$$\mathcal{A} = \int_{x_0}^{x_f} \vec{p}(x) d\vec{x}$$

Application : un point matériel dans un potentiel homogène

$$|p(x)| = \sqrt{2m(E_0 - U(x))} = p_0 \quad d\vec{x} = \vec{t} ds$$

$$\mathcal{A} = p_0 \int_{x_0}^{x_f} ds$$

La trajectoire physique est un segment de droite car la distance parcourue la plus courte.

Vocabulaire, références et exercices

Références

Mécanique : Landau et Lifschitz

Théorie des champs : Landau et Lifschitz

Vocabulaire Dynamique, déterminisme, action, principe de moindre action, équations canoniques, transformations canoniques, hamiltonien, lagrangien, Viriel. Variables conjuguées.

Exercices

- 1 Ecriture lagrangien, hamiltonien d'un pendule ponctuel de longueur l et de masse m , en fonction du paramètre angulaire ϕ .
- 2 Etablir la mécanique lagrangienne et hamiltonienne d'un oscillateur harmonique masse m et raideur k .
- 3 Un fil tendu parallèlement à Ox , à la tension T et dont la densité linéique est ρ , est le siège d'une onde de déformation transversale

$$y(x, t) \quad \text{avec} \quad \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t}$$

On donne la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2}(\rho \dot{y}^2 - T(\frac{\partial y}{\partial x})^2)$$

Ecrire les équations dynamiques de l'onde et la densité d'énergie $\mathcal{H}(x, t)$ sur le fil.

Ecrire Le lagrangien à l'instant t .

Ecrire L'action en t_0 et t .

Appliquer les résultats à une solution stationnaire en $\lambda/2$

- 4 Une particule se déplace librement dans un champ central $U(r)$
Démontrer que le moment cinétique est conservé par la dynamique lagrangienne
Deux particules sont en interaction centrale $U(r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$
Démontrer que le moment cinétique est conservé.

2 Théorème de Noether

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

2.1 But du théorème de Noether

Construire une méthode systématique permettant de définir des invariants dans une approche lagrangienne de la dynamique : (constante du mouvement, intégrales premières...)

Le théorème définit un courant conservé associé à une symétrie continue du système ; la 4^{ème} composante de ce courant est une densité globalement conservée.

$$\text{div} \vec{j} = -\partial_t \rho$$

Nous prendrons l'exemple de l'invariance par translation dans le temps qui conduira à une densité de courant d'énergie ; la 4^{ème} composante est la densité d'énergie. La loi de conservation est celle de l'énergie qui sera globalement conservée.

Le théorème de Noether se démontre en considérant les variables d'espace-temps :

$$x^\mu = (x^0, x^i) \quad i = 1, 2, 3$$

Nous utilisons la convention d'Einstein

La démonstration ci-dessous sous entend certains indices que l'on ne rappellera pas

2.2 Théorie lagrangienne des systèmes ponctuels

Le système est défini par des variables q_i ; $\dot{q}_i(t)$ sont les vitesses associées à chacune des variables.

Le lagrangien dépend des positions et des vitesses

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

L'action s'écrit

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

Le principe de moindre action mène aux équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right)$$

Nous poserons $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$

Exemple : un point m à une dimension sur Ox dans un potentiel $V(x)$ indépendant du temps :

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x)$$

2.3 Théorie lagrangienne des champs

(les ondes par exemple)

Le système est défini par des fonctions $u(x)$ (c'est un système à une infinité de degrés de liberté) et les variations associées dans chacune des dimensions de l'espace temps $\partial u(x)$.

$$\text{avec } u_\mu = \partial_\mu u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x^\mu} \quad \mathcal{L}(u(x), u_\mu(x), x)$$

Exemple : Pour les ondes sonores $u(x)$ est pratiquement la surpression en x , c'est l'amplitude de l'onde en x .

Soit A l'état de l'onde en $t = t_A$ et respectivement pour B en t_B l'action sur la "trajectoire" \widehat{AB} est :

$$\mathcal{A}_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} \mathcal{L}(x) d^4x$$

Le principe de moindre action conduit aux équations de Lagrange pour les champs :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_\mu} \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} \right)$$

Exemple pour une onde scalaire comme la pression on peut prendre :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(u_i u^i + \beta^{-2} u_0 u^0)$$

avec : $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$

Et l'équation du mouvement (de Lagrange) devient l'équation des ondes de D'Alembert :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \beta^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x) = 0$$

2.4 Théorème de Noether

Question : Comment définir des invariants dans une approche lagrangienne des champs ?

Soit une transformation continue (groupe continu avec le paramètre ω) qui laisse l'action invariante au premier ordre au voisinage de l'identité. La dynamique sera invariante dans cette transformation! **si c'est une symétrie.**

Exemples : translations rotations ...

Dans la symétrie, l'espace est transformé et les champs sont transformés :

$$\begin{pmatrix} x \\ u(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ u'(x') \end{pmatrix}$$

Dans une transformation élémentaire proche de l'identité ($\delta\omega$) on a :

$$\begin{pmatrix} x' \sim x + \Lambda \delta\omega \\ u'(x') \sim u(x) + M \delta\omega \end{pmatrix}$$

et l'invariance de l'action s'écrit :

$$\mathcal{A} = \int \mathcal{L}(u(x)) dx \sim \mathcal{A}' = \int \mathcal{L}(u'(x')) dx'$$

analyse des différentes variations

- changement de variable :

$$dx' = |J|dx = (1 + \partial_\mu(\delta x^\mu))dx$$

- changement de fonction :

$$u'(x') = u'(x + \Lambda\delta\omega) = u(x) + M\delta\omega \Rightarrow u'(x) = u(x) + (M - \Lambda^\nu u_\nu) \delta\omega$$

- changement de l'action

$$\delta\mathcal{A} = \int (\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_\mu}\delta u^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \} + \mathcal{L} \partial_\mu(\delta x^\mu)) \times dx$$

et l'invariance de l'action s'écrit (en utilisant l'équation de Lagrange) :

$$\delta\mathcal{A} = (\int \partial_\mu J^\mu dx) \delta\omega$$

- en remplaçant $\delta\mathcal{A} = 0$ (quelque soit $\delta\omega$) on obtient la conservation du courant :

$$\Rightarrow \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \quad \text{avec } J^\mu = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_\mu}(M - \Lambda^\nu u_\nu) + \mathcal{L}\Lambda^\mu \right]$$

soit $\quad \partial_0 J^0 = -div(\vec{J})$

2.5 Application à l'invariance par translation du temps

A cause de l'invariance par translation dans le temps, l'énergie est une constante du mouvement des ondes élastiques !

- L'invariance par translation du temps, on trouve :

$$M = 0 \text{ et } \Lambda^\mu = \delta_0^\mu$$

- Construction du courant conservé associé par l'application du théorème de Noether :

$$J^\mu = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_\mu}(u_0) - \mathcal{L} \delta_0^\mu \right)$$

- Cas particulier : Application à une onde scalaire

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (-u_i^2 + c^{-2}u_0^2)$$

Courant d'énergie et densité d'énergie (le flux du courant d'énergie est une puissance)

$$J^i = (u^i u_0)$$

$$J^0 = \frac{1}{2} (+u_i^2 + c^{-2}u_0^2) = \mathcal{H}$$

Conservation globale de l'énergie

$$E = c^{-1} \int J^0 d^3x = Cte$$

— Le cas de l'acoustique :

\vec{v} est la vitesse des couches de l'air et \tilde{p} la surpression

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(-\rho \vec{v}^2 + \chi_S \tilde{p}^2) \text{ et } c^{-2} = \chi_S \rho$$

Le potentiel des vitesses φ est tel que :

$$\vec{v} = \overrightarrow{grad}(\varphi) \quad \tilde{p} = \rho (\dot{\varphi}) \quad u = \sqrt{\rho} \varphi$$

Le lagrangien acoustique (la densité de)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(-u_i^2 + c^{-2}u_0^2)$$

On en déduit :

$$\text{la vitesse des ondes acoustiques } c = \frac{1}{\sqrt{\chi_S \rho}}$$

$$\text{densité d'énergie} = \frac{1}{2}(+\rho \vec{v}^2 + \chi_S \tilde{p}^2)$$

$$\text{courant d'énergie} = \tilde{p} \vec{v}$$

$$\text{intensité sonore en } \text{watt}/m^2 = |\tilde{p} \vec{v}|$$

3 Formules d'analyse vectorielle

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

Equations utiles en théorie des ondes et des fluides

3.1 Analyse vectorielle

notation

$$\Delta = \sum_{j=1..3} \partial_j \partial_j \quad \square = \partial_0 \partial_0 - \Delta$$

$$(A \times \text{grad})B = \sum_j (A_j \partial_j) B_i$$

$$\text{div}(A \wedge B) = B \times \text{rot}(A) - A \times \text{rot}(B)$$

$$\text{div}(\text{grad}(f)) = \Delta f$$

$$\text{div}(\text{rot}(A)) = 0$$

$$\text{div}(fA) = f \times \text{div}(A) + A \times \text{grad}(f)$$

$$\text{grad}(A \times B) = (A \times \text{grad})B + A \wedge \text{rot}(B) + (B \times \text{grad})A + B \wedge \text{rot}(A)$$

$$\text{exemple : } \text{grad}(A^2) = 2 \times \{(A \times \text{grad})A + A \wedge \text{rot}(A)\}$$

$$\text{grad}(\text{div}(A)) = \{\partial_i(\partial_j A_j)\}$$

$$\text{grad}(fg) = g \times \text{grad}f(f) + f \times \text{grad}(g)$$

$$\text{rot}(A \wedge B) = A \times \text{div}(B) - B \times \text{div}(A) + (B \times \text{grad})A - (A \times \text{grad})B$$

$$\text{rot}(\text{grad}(A)) = 0$$

$$\text{rot}(\text{rot}(A)) = \text{grad}(\text{div}A) - \Delta A$$

$$\text{rot}(fA) = \text{grad}(f) \wedge A + f \times \text{rot}(A)$$

$$\text{rot}(A) = 0 \Leftrightarrow A = \text{grad}(f)$$

$$\text{div}(A) = 0 \Leftrightarrow A = \text{rot}(B)$$

Champ irrotationnel à circulation conservative

$$\text{rot}(A) = 0 \Rightarrow A = \text{grad}(f)$$

Champ à flux conservatif

$$\text{div}(A) = 0 \Rightarrow A = \text{rot}(B)$$

3.2 Théorème de Stokes

Formulation générale :

$$\int_v w = \int_{\delta v} dw$$

V : variété de dimension n

δV : variété de dimension $n + 1$

3.3 Formulations particulières

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div}(A) d^3x &= \int_S A d^2x && \text{flux de } A = \text{poids de } \operatorname{div}(A) \\ \int_S \operatorname{rot}(A) d^2x &= \int_C A d^1x && \text{circulation de } A = \text{flux de } \operatorname{rot}(A) \\ \int_S f d^2x &= \int_V \operatorname{grad}(f) d^3x && \text{somme de } f \text{ sur une surface} = \text{poids du gradient}(f) \\ \int_C d^1f &= [f]_A^B && \text{circulation sur la courbe} = \text{variation d'une fonction}(f) \\ \int_S A \wedge d^2x &= \int_V \operatorname{rot}(A) d^3x && \text{"flux" tangentiel de } (A) = \text{poids de } \operatorname{rot}(A) \\ \int_C f d^1x &= \int_S \operatorname{grad}(f) d^2x && \text{circulation de } f = \text{flux de } \operatorname{grad}(f) \end{aligned}$$

3.4 Opérateurs différentiels

3.4.1 Cartésiennes : (x, y, z)

Base : $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

a) NABLA

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

b) GRAD(F)

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

c) ROTATIONNEL(V)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ &\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ &\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{aligned}$$

d) DIVERGENCE(V)

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

e) LAPLACIEN(F ou V)

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

3.4.2 Cylindriques : (ρ , θ , z)

Base : $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{U}_z)$

a) NABLA

$$\vec{\nabla} = \vec{U}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{U}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{U}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

b) GRAD(F)

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

c) ROTATIONNEL(V)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \\ & \frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \\ & \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

d) DIVERGENCE(V)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

e) LAPLACIEN(F)

$$\Delta F = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial F}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

3.4.3 Sphériques : (r , θ , ϕ)

Base : $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta, \vec{U}_\phi)$

a) NABLA

$$\vec{\nabla} = \vec{U}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{U}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{U}_\phi \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

b) GRAD(F)

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)$$

c) ROTATIONNEL(V)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial(\sin(\theta) V_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right] \\ & \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_\phi)}{\partial r} \\ & \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned}$$

d) DIVERGENCE(V)

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(\sin(\theta) V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$$

e) LAPLACIEN(F)

$$\Delta F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}$$

f) PROPAGATEUR sphérique de $F(r)$

$$\Delta F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) = k^2 F \text{ solution } \frac{k}{r} \exp(kr)$$

| | |
|-----------------------|--------------|
| solution stationnaire | avec $k < 0$ |
| solution radiative | $k = ik$ |
| solution coulombienne | $k = 0$ |

4 Référentiels et invariances

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

4.1 Référentiels en physique classique

notion d'événement
ses coordonnées d'espace temps sont $x = (t, \vec{x})$
synchronisation des horloges

4.2 Cinématique d'un référentiel

Vecteur instantané de rotation d'un référentiel en mouvement $\vec{\Omega}(t)$

$$\vec{\Omega}(t) \text{ est tel que } \frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i} \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j} \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{k}$$

| | | | |
|-----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| | $\frac{d\vec{i}}{dt}$ | $\frac{d\vec{j}}{dt}$ | $\frac{d\vec{k}}{dt}$ |
| \vec{i} | 0 | $-\Omega_3$ | Ω_2 |
| \vec{j} | Ω_3 | 0 | $-\Omega_1$ |
| \vec{k} | $-\Omega_2$ | Ω_1 | 0 |

avec

$$\vec{\Omega} = \Omega_1 \vec{i} + \Omega_2 \vec{j} + \Omega_3 \vec{k}$$

Les vitesses d'entraînement

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(O) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

notion de torseur -

— En tout point M, on définit un vecteur \vec{V} et un pseudo-vecteur \vec{A} tels que

$$\begin{aligned} \text{torseur en M : } & (\vec{V}, \vec{A}) \\ \text{si en M' } & \vec{A}(M') = \vec{A}(M) + \overrightarrow{M'M} \wedge \vec{V} \text{ et } \vec{V}(M') = \vec{V}(M) \end{aligned}$$

— Torseur des forces appliquées à un système : résultante \vec{R} et moment des forces $\vec{\mathcal{M}}$

$$\text{torseur en M : } (\vec{R}, \vec{\mathcal{M}}) \quad \vec{\mathcal{M}}(M) = \vec{\mathcal{M}}(O) + \overrightarrow{MO} \wedge \vec{R}$$

— Torseur des vitesses d'entraînement d'un référentiel ou d'un solide

$$\text{Torseur en M : } (\vec{\Omega}, \vec{V}) \quad \vec{V}(M) = \vec{V}(O) + \overrightarrow{MO} \wedge \vec{\Omega}$$

— Torseur cinétique d'un système de points P_i de masse m_i : Le torseur cinétique est la quantité de mouvement et moment cinétique \vec{L}

$$\text{Torseur en M : } (M\vec{V}_G, \vec{L}) \quad m\vec{V}_G = \sum m_i \vec{V}_i \quad \vec{L}(M) = \vec{L}(O) + \overrightarrow{MO} \wedge m\vec{V}_G$$

4.3 Mouvement d'un référentiel

Torseur cinétique d'un référentiel

$$\vec{V}(O) \text{ et } \vec{\Omega}$$

Classement des mouvements instantanés

| | | | |
|----------------|---|-----------------|---|
| Repos | $\vec{\Omega} = \vec{0}$ et $\vec{V}(O) = \vec{0}$ | | |
| Translation | $\vec{\Omega} = \vec{0}$ et $\vec{V}(O) \neq \vec{0}$ | direction | $\vec{V}(O)$ |
| Rotation | $\vec{\Omega} \perp \vec{V}(O)$ | axe de rotation | $\{M \text{ telque } \vec{V}(M) = 0\}$ |
| Mvt hélicoïdal | $\vec{\Omega}$ et $\forall \vec{V}(O)$ | axe hélicoïdal | $\{M \text{ telque } \vec{V}(M) \parallel \vec{\Omega}\}$ |

Angles d'Euler

$$\text{Rot}_z\varphi \circ \text{Rot}_x\theta \circ \text{Rot}_z\psi$$

Composition des rotations :

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}_2 + \vec{\Omega}_3$$

Vecteur de rotation et les angles d'Euler (à voir)

4.4 Mouvement des solides

- Caractérisation du mouvement d'un solide : 6 paramètres
M étant un point du solide : $\vec{V}(M)$ et $\vec{\Omega}$ suffisent pour déterminer la cinématique soit le mouvement de tous les points.
- mouvement lié : 6 paramètres - n liaisons
- système de k solides liés ; paramètres : $(6 - n) \times k$
- contacts solides
 - roulements
 - vitesse de glissement

$$\vec{v}_g = \vec{V}(M \in S_1) - \vec{V}(M \in S_2)$$

frottement solide : lois de Coulomb, cas du glissement

Cinétique des solides

- Torseur cinétique : quantité de mouvement \vec{P} et moment cinétique \vec{L}

$$(\text{en } M : \vec{P} = m\vec{V}_G, \vec{L}_M)$$

- Energie cinétique : 1er théorème de König avec I_D moment d'inertie / droite $D = (O, \Omega)$

$$E_c = \frac{1}{2}(M\vec{V}^2(O) + 2m(\vec{V}(O), \vec{\Omega}, \overrightarrow{OG}) + I_D\vec{\Omega}^2)$$

cas particuliers : $\vec{V}(O) = 0$ ou $O \equiv G$ ou $O \in$ axe hélicoïdal ou de rotation

$$E_c = \frac{1}{2}(m\vec{V}^2(O) + I_D\vec{\Omega}^2)$$

— Moment cinétique : 2ième théorème de König

$$\vec{L}_A = m \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G) + (\vec{L}_G = I_G \Omega) \text{ si A est un point fixe du référentiel absolu}$$

$$\vec{L}_O = m \overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}(O) + (\vec{L}_G = \overrightarrow{I_G \Omega}) \text{ si O est un point fixe du solide en mouvement}$$

Matrices d'inertie et axes principaux paragraphe [7] ci-dessous

4.5 Invariance galiléenne

O un point fixe du référentiel par exemple l'origine.

— Composition des vitesses

$$\begin{aligned} \vec{V}_e(M) &= \vec{V}(O) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \\ \vec{V}(M) &= \vec{V}_e(M) + \vec{V}_r(M) \end{aligned}$$

— Composition des accélérations

$$\begin{aligned} \vec{A}_e(M) &= \vec{A}(O) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} \\ \vec{A}(M) &= \vec{A}_r(M) + \vec{A}_e(M) + \vec{A}_c(M) \\ \text{avec } \vec{A}_c &= 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r \end{aligned}$$

Référentiel galiléen : translation rectiligne uniforme / référentiel galiléen

Exemple : transformation galiléenne suivant Ox à la vitesse v_0 .

$$\begin{cases} t' &= t \\ x' &= x - v_0 t \\ y' &= y \end{cases}$$

Réf : Théorie Lagrangienne (Mécanique Landau Lifchitz page 174)

4.6 Invariance relativiste restreinte

Constance de la vitesse de la lumière dans les référentiels galiléens ?

Evénements dans l'espace temps (\vec{x}, t)

Coordonnées dans l'espace temps :

$$x_\mu = (x_0 = ct, x_i = \vec{x})$$

Transformations de Lorentz : référentiel galiléen à la vitesse v_0

$$\begin{aligned} t' &= \begin{cases} \gamma(t - \frac{v_0}{c^2} x) \\ \gamma(x - v_0 t) \\ y' &= y \end{cases} & \text{ou plutôt } x'_0 &= \begin{cases} \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ x'_2 &= x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

avec $\beta = v_0/c$ et $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$

Transformation du temps et des durées de vie : $dx_0 = \gamma dx'_0$

Composition des vitesses.

$$\beta_x = \frac{\beta'_x + \beta}{1 + \beta'_x \beta} \quad \beta_y = \frac{\beta'_y}{\gamma(1 + \beta'_x \beta)} \quad \beta_z = \dots$$

Etudier les limites $\beta \rightarrow 0$ ou $\beta \rightarrow 1$

4.7 Cinématique classique d'un solide en mouvement

Introduction de la matrice d'inertie -

Soit un point matériel M de masse m appartenant à un solide en mouvement par rapport à un référentiel (absolu) : O', I, J, K orthonormé; le mouvement est repéré par rapport à ce référentiel.

$$\vec{V}(O') = 0 \quad \frac{d\vec{I}}{dt} = 0 \quad \frac{d\vec{J}}{dt} = 0 \quad \frac{d\vec{K}}{dt} = 0$$

O est une origine quelconque de l'espace entraîné par le solide et G, I, J, K est appelé référentiel barycentrique en translation éventuellement non-rectiligne par rapport au référentiel absolu O', I, J, K

On donne les composantes de \vec{OM} dans une base orthonormée quelconque (i, j, k) liée au solide

$$\vec{OM} = (x, y, z)$$

Soit un vecteur libre quelconque dans la même base

$$\vec{A} = (a, b, c)$$

1. Interprétation matricielle du produit vectoriel :

montrer que le vecteur $(\vec{OM} \wedge \vec{A})$ peut se calculer matriciellement dans la base i, j, k par le produit :

$$(\vec{OM} \wedge \vec{A}) = \begin{pmatrix} 0 & -z & +y \\ +z & 0 & -x \\ -y & +x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

2. En déduire l'expression du double produit vectoriel en chaque point i du solide.

$$-m_i \vec{OM} \wedge (\vec{OM} \wedge \vec{A}) = m_i \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

3. Démontrer la seconde loi du théorème de Koenig avec $m = \sum_i m_i$

$$\vec{L}_{/A} = \vec{L}_{/G} + m \times \vec{AG} \wedge \vec{V}_G$$

où A est un point quelconque, G le centre de gravité et $\vec{L}_{/G}$ le moment cinétique du mouvement autour de G

4. Faire le lien entre le résultat de 2) et le calcul du moment cinétique dans le référentiel barycentrique centré en G et défini par $(G, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

Montrer que

$$\vec{L}_{/G} = \sum_i -m_i \vec{GM}_i \wedge (\vec{GM}_i \wedge \vec{\Omega})$$

En déduire que le moment cinétique par rapport à G peut se calculer matriciellement grâce à la matrice d'inertie en G et dans une base quelconque $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$L_{/G} = [I_G] \times \Omega$$

5. Si la base choisie pour le calcul est base principale d'inertie fixe par rapport au solide, montrer que le moment cinétique par rapport à G est :

$$L_{/G} = \begin{pmatrix} I_1 \Omega_1 \\ I_2 \Omega_2 \\ I_3 \Omega_3 \end{pmatrix}$$

dans la base (i,j,k) principale d'inertie

$$\text{soit } \vec{L}_{/G} = I_1 \Omega_1 \vec{i} + I_2 \Omega_2 \vec{j} + I_3 \Omega_3 \vec{k}$$

où les composantes de Ω étant exprimées dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $G, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est principal d'inertie!

6. Montrer que l'énergie cinétique de rotation dans le référentiel barycentrique $G, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ s'écrit :

$$E_C(G, I, J, K) = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2)$$

Vocabulaire, références et exercices

Références

Larralde J.P. Editeur Masson, Cinématique

Cabannes H. Cours de mécanique générale

Brousse P. Mécanique

Boutigny : cours de physique : Mécanique

Bône J.C : Problèmes de mécanique

J Bok & al : Editeur Hermann Paris, Ondes – électromagnétique - relativité

Vocabulaire Cinématique, torseurs, mouvements instantanés, rotations, translations, matrices d'inertie, vecteur instantané de rotation, angles d'Euler, loi de Coulomb du frottement solide, précession, nutation, relativité, mouvement d'entraînement, glissement, roulement, théorèmes de König, relativité restreinte, formule d'Einstein.

Exercices

1 On donne un disque homogène, de masse M , de rayon R sur un plan horizontal : son centre O permet de définir un référentiel solide du disque O, i, j, k tel que \vec{k} reste fixe et tel que l'angle polaire de \vec{i} soit $\theta(t)$.

Soit $x(t)$, $y = R$ et $z = 0$ les coordonnées de O dans le référentiel " absolu ".

1. Définir le vecteur de rotation, calculer la vitesse de glissement au point I de contact avec le plan.
2. Discuter des différents types de mouvements du disque en fonction de $x(t)$ et $\theta(t)$.
3. Dans les différents cas, calculer l'énergie cinétique et le moment cinétique en un point que l'on choisira.
4. Calculer les éléments de la matrice d'inertie d'un disque homogène.
5. Calculer les éléments de la matrice d'inertie d'une sphère homogène
6. Calculer les éléments de la matrice d'inertie d'un ellipsoïde d'axe Oz

2 Le mouvement terrestre par rapport au Soleil (référentiel de Copernic noté \otimes) résulte de la composition du mouvement du centre terrestre T (circulaire autour du soleil rayon $R = 1 UA$) et d'une rotation dont le vecteur angulaire reste fixe par rapport au Soleil.

Le référentiel géocentrique se déduit donc de \otimes par une translation qui amène l'origine en T .

1. Quel est le mouvement de la terre dans le référentiel géocentrique
2. Quel est le mouvement de la terre dans le référentiel \otimes
3. On donne les composantes de $V(T)$ et de Ω par rapport \otimes à l'instant t .

$$V(T) = v_0 \begin{cases} \cos(\vartheta(t)) \\ \sin(\vartheta(t)) \\ 0 \end{cases} \quad \Omega = \omega_0 \begin{cases} \sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{cases}$$

déterminer l'intersection de l'axe hélicoïdal instantané avec l'écliptique dans (T, x, y) en utilisant la relation suivante que l'on justifiera :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{V}(T) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{TM}) = \vec{0}$$

1. Calculer l'énergie cinétique terrestre dans le référentiel galiléen \otimes en fonction des paramètres
 2. Calculer la quantité de mouvement et le moment cinétique en un point.
- 3** Un objet sphérique (une particule sans spin) se déplace selon Ox à la vitesse v_0 , sa durée de vie est τ dans son référentiel propre :
1. Quelle est sa durée de vie dans le laboratoire ?
 2. Quelle est sa " forme " dans le référentiel du laboratoire ?
 3. Etudier la limite $\beta=1$.
- 4** Etude de l'effet Doppler non-relativiste pour une onde de célérité $c \ll$ vitesse de la lumière.
- a) Démontrer par la conservation de la phase :

$$\omega = \frac{\omega'}{1 - \frac{v}{c} \cos(\vartheta)}$$

- b) Etude de l'effet Doppler relativiste pour la lumière!
Démontrer

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos(\vartheta)}$$

soit par la conservation de la phase de l'onde

soit par la transformation de Lorentz de l'énergie impulsion du photon.

application au décalage vers le rouge de la lumière émise par les galaxies lointaines.

5 Mécaniques 1

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

5.1 Dynamique classique des solides

Dynamique du solide Solide = { N points massifs solidaires $i = 1, N$ }

En principe 3N coordonnées \Rightarrow 6 paramètres seulement à cause des contraintes assurées par forces intérieures de cohésion.

Définitions de la dynamique du solide

La masse du solide

$$M = \sum_i m_i$$

Torseur cinétique : soit un point O quelconque de l'espace,

$$\forall O \quad \begin{aligned} \vec{P} &= \sum_i m_i \vec{V}_i = M \vec{V}_G \\ \vec{L}_O &= \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{V}_i \end{aligned}$$

Torseur dynamique : soit un point O quelconque de l'espace,

$$\forall O \quad \begin{aligned} \sum_i m_i \vec{A}_i &= M \vec{A}_G \\ \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{A}_i & \end{aligned}$$

Torseur des forces : soit un point O quelconque de l'espace,

$$\forall O \quad \begin{aligned} \vec{R} &= \sum_i \vec{F}_i \\ \text{vec} \mathcal{M}_O &= \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_i \end{aligned}$$

Principe fondamental

torseur des forces \equiv torseur des accélérations

Il faut distinguer les forces intérieures et les forces extérieures

Le principe de l'action et de la réaction contraint l'action des forces intérieures

$$\sum \vec{F}_{int} = 0$$

Cependant les forces intérieures peuvent modifier la dynamique d'un système (ex 1).

1. Théorème de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{R} = \vec{R}_{ext}$$

2. Théorème du moment cinétique : si O est "fixe" ou si O coïncide avec G .

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{M}_O(\text{forces})$$

3. Travail des forces : O un point solidaire du solide par exemple G .

$$\frac{d}{dt} dE_c = P_{\text{puissance}} = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \vec{R} \cdot \vec{V}_O + \vec{\Omega} \cdot \vec{M}_O$$

Etude du travail des forces de liaison, de frottement solide (lois de Coulomb)

Etude des cas particuliers

- Si O appartient à l'axe de rotation quand il existe ($\vec{V}_O = 0$)
- Si les forces constituent un glisseur ($\vec{M}_O = 0$) et O sur l'axe du glisseur

5.2 Applications

Mouvement libre ou sous l'action d'un couple -

Les référentiels associés au mouvement d'un solide

- Référentiel absolu $A = O \ x, y, z$
- Référentiel Barycentrique $G = G \ x, y, z$
- Référentiel du solide $S = G \ i, j, k$ (principal d'inertie par exemple)

Le référentiel barycentrique est d'inertie si le référentiel A est d'inertie.

Equations d'Euler -

— Mouvement de rotation autour de G :

théorème du moment cinétique \Rightarrow Equations d'Euler

— Soit \vec{L}_G le moment cinétique dans la base i, j, k lié au solide

$$\vec{L}_G = I_1 \omega_1 \vec{i} + I_2 \omega_2 \vec{j} + I_3 \omega_3 \vec{k}$$

Soit \vec{D} le couple agissant sur le solide

$$\vec{D} = \left. \frac{d\vec{L}_G}{dt} \right|_A = \left. \frac{d\vec{L}_G}{dt} \right|_S + \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_G$$

Démonstration basée sur :

$$\frac{d}{dt} \vec{i} = \Omega \wedge \vec{i}$$

— Mouvement libre d'un solide de révolution autour de l'axe 3 :

$$\vec{D} = \vec{0} \text{ et } I_1 = I_2 = I \neq I_3 = J$$

(3 équations pour 3 degrés de liberté) :

$$D_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2$$

$$D_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3$$

$$D_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1$$

1. Démontrer que l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_{cin} = \frac{1}{2}(I_1 \omega_1^2 + \dots)$$

2. Démontrer que

$$\omega_3 \text{ et } \vec{L}_G = I_1 \omega_1 \vec{i} + \dots \text{ sont conservés .}$$

La toupie -

Cas du mouvement de la toupie symétrique, sans frottement qui repose sur un support en O, un point fixe de la toupie :

Référentiel d'Euler : angles d'Euler de (i, j, k) dans (x, y, z) :

$$\vec{\Omega} = \left(\dot{\theta}, \dot{\varphi} \sin(\theta), \dot{\varphi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \right) |_{i,j,k}$$

Action de la pesanteur :

$$\vec{D} = (m g l \sin(\theta), 0, 0) |_{i,j,k}$$

Réaction du support en O : quelles sont les composantes ?

le gyroscope -

Mouvement du gyroscope :

Quel couple doit-on exercer sur un solide pour maintenir une rotation autour d'un axe qui ne coïncide pas avec une direction principale d'inertie ?

$$\text{vecteur de rotation} = \omega \vec{i}_3 + \Omega \vec{i}_\perp$$

ou plutôt, quel couple doit-on exercer pour forcer une rotation Ω quand un solide tourne librement autour d'une direction principale d'inertie à une vitesse élevée ω ?

$$\vec{C}_{gyroscope} = (I - J) (\vec{\Omega} \wedge \vec{\omega}) \text{ avec } \omega \gg \Omega$$

I est le moment d'inertie par rapport à Ω

J est le moment d'inertie par rapport à ω

Remarque : si Ω et ω sont parallèles ou $I = J$ alors $\vec{C}_{gyroscope} = \vec{0}$

Vocabulaire, références et exercices

Références

- Landau L : Mécanique
Cabannes H. Cours de mécanique générale
Brousse P. Mécanique analytique éditeur Ellipses
Boutigny : cours de physique : Mécanique
Bône J.C : Problèmes de mécanique
Queyrel J.L. : Mécaniques des solides éditeur BREAL 1996
Perez J P. : Mécanique (point solide et fluide) éditeur Masson 1995
Boudet R : Mécanique rationnelle éditeur Hermes 1997
Denève P : Mécanique (aux concours) éditeur Ellipses 1987
Goutrier Ch : Mécanique générale : Presses polytechniques romandes
Bausset M. : Mécanique des systèmes solides éditeur Masson 1990

Vocabulaire Dynamique des solides, Torseur des forces, glisseur, couple. Forces intérieures et extérieures et d'inertie. Théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique, Puissance des forces extérieures. Application au rotateur libre, la toupie et le gyroscope. Précession, nutation. Mouvement de la terre dans le référentiel barycentrique.

Exercices

- 1 Démontrer que les forces intérieures de la forme : $\vec{f}(i, j) = \vec{u}.f(r)$ n'ont aucune action dynamique sur le mouvement d'un solide.
Etudier l'action les composantes $\vec{f}(i, j) = \vec{u}_\perp.f(r)$ sur le mouvement .
- 2 Dans un virage de rayon R parcouru à la vitesse v , déterminer le couple gyroscopique exercé sur l'automobile par les 4 roues de la voiture qui sont en contact avec le sol.
- 3 Considérant la terre dans son mouvement autour du soleil, construire les équations du mouvement
Etudier ces équations dans le cas où le référentiel barycentrique terrestre est d'inertie (galiléen) et où la gravitation solaire n'exerce sur la terre qu'un couple dans une direction à déterminer.
- 4 Soit une toupie symétrique reposant sur un support en O. Le contact O est fixe. On introduit les angles d'Euler qui repèrent la toupie dans le référentiel A.
Ecrire les équations d'Euler pour la toupie symétrique en appliquant le théorème du moment cinétique en O et trouver les constantes du mouvement. Faire un bilan qualitatif des réactions du support sur la toupie, peut-on faire tourner une toupie sur un support parfaitement glissant.
Ecrire l'énergie totale et montrer quelle est conservée.
- 5 Reprendre l'exercice 4 avec le formalisme lagrangien et retrouver les constantes du mouvement (voir Landau Mécanique page 155).

6 Mécaniques 2

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

6.1 Rappels

En mécanique classique le temps est absolu et les forces « physiques » conditionnent le mouvement des objets matériels :

le principe fondamental établit le lien entre les forces et les changements de vitesse constatés :

$$m\vec{A} = \vec{F}$$

Cette loi ne peut être universelle (pour tous les observateurs) car l'accélération est relative, il est donc nécessaire de postuler l'existence d'une classe d'observateurs privilégiés pour lesquels la loi de Newton s'applique sans correction, pour les autres des forces d'inertie doivent être introduites

$$m\vec{A} = \vec{F} + \vec{F}_{inertie}$$

avec $\vec{F}_{inertie} = -m(\vec{A}_e + \vec{A}_c)$

La classe d'observateurs privilégiés s'appelle classe des observateurs galiléens, ils sont en translation ($\vec{\Omega} = 0$) rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres. Le référentiel de Copernic est galiléen avec une très bonne approximation.

Dans un référentiel galiléen le mouvement libre est rectiligne et uniforme

La question se pose d'étendre la dynamique aux observateurs galiléens dans le cadre de la relativité restreinte où le temps n'est pas un absolu.

Pour les observateurs accélérés par rapport aux observateurs galiléens, il faut appliquer la relativité générale et c'est beaucoup plus compliqué.

6.2 Dynamique relativiste

Mouvement d'un point matériel en relativité restreinte

Approche lagrangienne -

Paramètres du point dans l'espace à 3D $q(t)$: espace de phase

$$(q = \frac{x}{c}, \dot{q} = \frac{\dot{x}}{c})$$

Hypothèse dynamique : En tout point de l'espace de phase, on définit le lagrangien et l'action tels que

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = -mc^2 \sqrt{1 - \dot{q}^2} - V(q) \quad \mathcal{A} = \int \mathcal{L} dt$$

remarque

$$ds = \sqrt{dx_0^2 - dx_i^2} = dx_0 \sqrt{1 - \dot{x}^2}$$

Le principe de moindre action avec $q \equiv x$ conduit à :

$$\frac{d}{dt} p = F$$

avec

$$p = m\gamma\dot{x} \quad F = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \gamma = (1 - \dot{x}^2)^{-1/2} \quad p_0 = mc^2\gamma$$

La fonction hamiltonien $\mathcal{H}(x, p)$ est obtenue des équations de Hamilton.

$$\mathcal{H}(x, p) = mc^2\gamma + V(x)$$

Application au mouvement libre \Rightarrow conservation de l'énergie-impulsion.

Approche classique -

Hypothèse dynamique !

En tout point de l'espace de phase, on définit l'équation dynamique à partir des forces telle que

$$\frac{d}{dt} p = F \quad \text{ou} \quad p = \gamma mv \quad \text{ou} \quad d\tau = \gamma^{-1} dt$$

On en déduit la célèbre formule d'Einstein :

$$\text{avec} \quad E = mc^2\gamma \quad \frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \text{soit} \quad \frac{d}{dt}(E^2 - p^2) = 0$$

La puissance de la force s'écrit :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Développement non-relativiste (NR)

$$E = mc^2\gamma = mc^2 + m\frac{v^2}{2} + \dots \text{ l'énergie de masse vaut } E_0 = mc^2$$

$E_0 = mc^2$ est une énergie potentielle !

6.3 Applications en physique nucléaire et des particules.

- Deux particules en interaction : conservation de l'énergie - impulsion à l'infini.

$$a + b \rightarrow c + d + \dots$$

$$\text{conservation de la quadri-impulsion} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_i = E_f \\ \vec{p}_i = \vec{p}_f \end{array} \right\}$$

- Application à la diffusion Compton (1937) :

$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + \gamma$$

la conservation de l'énergie impulsion permet de démontrer la formule de la diffusion Compton

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_c(1 - \cos\theta)$$

avec λ_c la longueur d'onde Compton

$$\lambda_c = \frac{h}{mc}$$

Pour l'électron la longueur Compton vaut $3,86 \cdot 10^{-4} \text{ nm}$

6.4 Approche lagrangienne de la force de Lorentz

Soit une charge ponctuelle non relativiste dans un champ E.M statique¹ :

Soit les potentiels électromagnétiques (φ, \vec{A}) fonctions de (\vec{x}, t)

$$\mathcal{L}_0(\vec{x}, \vec{v}) = \frac{mv^2}{2} + e(\vec{A} \cdot \vec{v} - \varphi)$$

L'application des équations de Lagrange conduit à la force de Lorentz et à l'équation du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial q}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = F = e\vec{E} + e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Intermédiaires du calcul :

$$(v.grad) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (v.grad)\vec{A} \quad \overrightarrow{grad}(v.A) = (v.grad)\vec{A} + \vec{v} \wedge \overrightarrow{rot}(A)$$

$$grad(AB) = (B.grad)A + (A.grad)B + B \wedge rot(A) + A \wedge rot(B)$$

L'hamiltonien s'écrit (application des équations canoniques) :

$$p = mv + eA \quad \mathcal{H}_0 = p.v - \mathcal{L}_0 = \frac{mv^2}{2} + e\varphi$$

Interprétation de l'action

$$d\mathcal{A} = \mathcal{L}_0 dt = -\mathcal{H}_0 dt + \vec{p} d\vec{x} = (-\mathcal{H}_0 + \vec{p} \cdot \vec{v}) dt = d\varphi$$

$$d\mathcal{A} = d\varphi$$

Remarque : L'effet Bohm-Aharonov :

$$\Delta\varphi = + \int \vec{A} d\vec{x} \text{ car } \mathcal{L}_{int} = +e\vec{A} \cdot \vec{v}$$

Remarque : Le cas de la particule relativiste n'est pas plus compliqué ,

$$\mathcal{L}_0(\vec{x}, \vec{v}) \rightarrow \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}) = \frac{ds}{dt} + e(\vec{A} \cdot \vec{v} - \varphi)$$

Il suffit donc de remplacer $\vec{p} = m\vec{v}$ par $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$

1. Ref Landau théorie des champs : page 67)

Vocabulaire, références et exercices

Références

J Bok & al Editeur Hermann Paris, Ondes – électromagnétique - relativité

Smith J : Relativité Masson 1997

Lumbroso H : physique générale et relativité éditeur Macgrawhill

Vocabulaire Dynamique relativiste, force de Lorentz, formule d'Einstein. Conservation de l'énergie impulsion.

Exercices

1 Mouvement d'un électron dans un champ électrique constant, corrections relativistes ?

2 Etude de la diffusion Compton en appliquant la conservation de l'énergie impulsion
Diffusion Compton

$$\gamma + e \rightarrow \gamma' + e'$$

démontrer

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos(\vartheta))$$

3 Etude de l'effet Doppler non-relativiste pour une onde de célérité $c \ll$ vitesse de la lumière.

— Par la conservation de la phase, démontrer :

$$\omega = \frac{\omega'}{1 - \beta \cos(\vartheta)} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

— Etude de l'effet Doppler relativiste pour la lumière!
Démontrer

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos(\vartheta)}$$

soit par la conservation de la phase de l'onde

soit par la transformation de Lorentz de l'énergie impulsion du photon.

— application au décalage vers le rouge de la lumière émise par les galaxies lointaines.

7 Mécaniques 3

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

7.1 Introduction à la mécanique des fluides

Le fluide est composé de particules ou atomes ou molécules ou constituants dont les trajectoires sont :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\zeta}(t)$$

L'état du fluide en M à t est déterminé par 5 fonctions de (\vec{r}, t)
(Pression, densité (massique) et vitesse) $p, \rho, \vec{v}(\vec{r}, t)$.

La vitesse d'une particule du fluide à t est donc :

$$\vec{v}(\vec{r}(t), t)$$

La vitesse des particules en \vec{r} et à t est ;

$$\vec{v}(\vec{r}, t)$$

On suppose la continuité de ces fonctions ce qui suppose un **mouvement ordonné**.
On introduit le courant massique de particules en M à t

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

Le flux de \vec{j} est l'intensité massique, c'est à dire la masse des particules qui traversent une section pendant l'unité de temps.

7.2 Equations dynamiques d'Euler pour les fluides parfaits

Pour déterminer le problème physique il faut 5 équations.

- Conservation des particules, donc leur masse : soit une équation

$$\overrightarrow{div}(\vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- L'action des forces. Bilan des forces dans les hypothèses :
fluide parfait \Rightarrow pas de forces dissipatives (viscosité = 0) et énergie conservée.
- Forces d'interaction à courte portée, superficielles, de pression : Th. de Stockes

$$d\vec{f} = -p d\vec{s} \quad d\vec{f} = -\overrightarrow{grad}(p) d^3x$$

- Forces à longue portée dérivant d'une énergie potentielle (\propto volume)

$$d\vec{f} = -\overrightarrow{grad}(U) d^3x$$

Exemple la pesanteur : $U = \rho g z$

- Calcul de l'accélération des particules du fluide :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (v.\text{grad}) \vec{v}$$

Théorème d'analyse vectorielle : (à vérifier en exercice)

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) = (v.\text{grad}) \vec{v} + \vec{v} \wedge \text{rot}(\vec{v})$$

7.3 Loi thermo-dynamique en milieu fluide

L'équation d'état d'un volume unité de fluide est une relation entre densité, pression et température. Si on impose la réversibilité adiabatique une condition s'ajoute qui donne :

$$\delta\rho = (\rho \chi_S) \delta p \quad \chi_S \text{ est la compressibilité adiabatique}$$

on fera souvent l'hypothèse d'incompressibilité ! sauf en acoustique.

Les équations (mécaniques) d'Euler :

$$\rho \left(\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) + (v.\text{grad}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(p + U)$$

La formulation équivalente de Gromeko

$$\left(\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) - \vec{v} \wedge \text{rot}(\vec{v}) \right) = -\rho^{-1} \overrightarrow{\text{grad}}(p + U) - \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

on utilise la formule ci-dessous pour passer de l'une à l'autre

$$((v.\text{grad}) \vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \wedge \text{rot}(\vec{v})$$

7.4 Approximations

- Fluide incompressible

$$\rho = \rho_0 \quad \forall M \text{ et } t \Rightarrow \text{div}(\vec{v}) = 0$$

- Mouvement irrotationnel : il existe un potentiel des vitesses $\varphi(\vec{r}, t)$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{grad}(\varphi)$$

- Ecoulement permanent

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

- Approximation acoustique (linéarité de la compression)

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho} \quad \tilde{p} = \chi_S^{-1} \frac{\tilde{p}}{\rho_0}$$

7.5 Applications

- Intégrale de Lagrange : Mouvement irrotationnel d'un fluide incompressible

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p+U}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C(t) \quad \forall M \text{ et } t$$

- Intégrale d'Euler : + permanent

$$\frac{p+U}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C_0 \quad \forall M \text{ et } t$$

- Intégrale de Bernoulli : Mouvement stationnaire d'un fluide incompressible éventuellement tourbillonnaire :

$$\frac{p+U}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C_0 \text{ sur une ligne de courant.}$$

Applications à voir :

- écoulement dans une conduite de section variable
- hydrodynamique
- ondes de surface

7.6 Introduction de la viscosité

Le fluide est composé de particules ou molécules dont les trajectoires sont :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{\zeta}(t)$$

Il faut revoir le bilan des forces agissant sur un élément de volume du fluide :

- Forces à longue portée : pas de changement

$$d\vec{f} = -\vec{F} d^3x$$

Dérivant d'une énergie potentielle (par unité de volume)

$$d\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}(U) d^3x \quad \text{exemple la pesanteur : } U = \rho g z$$

- Forces à courtes portées

Expression générale à l'aide du tenseur des contraintes : σ

$$df_i = \sigma_{ij} ds_j$$

avec

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\prime} + \sigma_{ij}^{\prime\prime} + \sigma_{ij}^{\prime\prime\prime}$$

nous utilisons la convention d'Einstein.

La forme la plus générale du tenseur des contraintes σ est lourde à analyser, pour un fluide incompressible, σ se réduit à :

1. Un terme de pression déjà rencontré dans les fluides parfaits :

$$\sigma_{ij}' = -p \delta_{ij}$$

2. Un terme de viscosité que l'on rencontre dans les fluides réels :

$$\sigma_{ij}'' = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

3. Les autres termes de viscosité (au premier ordre par rapport à la vitesse) que l'on rencontre dans les fluides réels compressibles ne contribuent pas si le fluide est incompressible.

$$\sigma_{ij}''' = \eta \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \xi \operatorname{div}(\vec{v}) \delta_{ij}$$

- **La force de viscosité n'est présente que si le champ des vitesses est inhomogène**

$$\partial_x \vec{v} \neq 0$$

η est le coefficient de viscosité dynamique dimension : $ML^{-1}t^{-1} \sim \text{pression} \times \text{temps}$

Le coefficient de viscosité cinétique ν est défini par

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

La dimension de ν est : $L^2t^{-1} \sim \text{surface} / \text{temps}$

Pour l'eau $\nu = 10^{-2} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ et $\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$

| | η Pa.s | ν m^2/s |
|-----------------|-------------------------|--------------------------------|
| ${}_4\text{He}$ | $3,0 \cdot 10^{-6}$ | $2,8 \cdot 10^{-8}$ |
| air | $1,8 \cdot 10^{-5}$ | $1,5 \cdot 10^{-5}$ |
| eau | $1,0 \cdot 10^{-3}$ | $1,0 \cdot 10^{-6}$ |
| glycérol | 1,4 | 1,12 |

Le calcul de la résultante s'exerçant sur un volume suppose l'intégration en surface puis l'application du théorème de Stokes qui conduit à (par unité de volume) :

$$F_i = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}) \Rightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(p) + \eta \Delta \vec{v}$$

- L'équation d'Euler devient **l'équation de Navier Stokes** :

$$\rho \left(\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) + (v \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(p + U) + \eta \Delta \vec{v} \quad \text{ou}$$

$$\left(\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) - \vec{v} \wedge \operatorname{rot}(\vec{v}) \right) = -\rho^{-1} \overrightarrow{\operatorname{grad}}(p + U) - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \nu \Delta \vec{v}$$

Pour le mouvement d'un fluide compressible, l'équation de Navier Stokes s'écrit :

$$\rho \left(\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) + (v \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(p + U) + \eta \Delta \vec{v} + \left(k + \frac{\eta}{3}\right)$$

avec $k = \xi + \frac{2}{3}\eta$ référence²

2. références : Encyclopédie de physique et Landau & Lifschitz

Exemple Ecoulement permanent dans une conduite cylindrique selon Ox

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \text{ et } U = Cte \quad \Rightarrow \quad \rho(v.grad)\vec{v} + \overrightarrow{grad}(p) = \eta\Delta\vec{v}$$

Par hypothèse le comportement de la vitesse est :

$$\vec{v} = (v_x(y, z), 0, 0) \quad p(x)$$

On obtient les équations suivantes :

$$\frac{dp}{dx} = -Cte \quad \eta \Delta v_x = -Cte$$

Exercice -

Ecoulement dans une conduite cylindrique de rayon R , calcul du débit massique (flux de j) :

$$Q = Cte \frac{8\pi}{\nu} R^4$$

Exercice -

Démontrer la formule de Stokes qui donne la force de freinage d'une bille sphérique en mouvement dans un fluide visqueux :

$$\vec{F} = -6\pi R\eta \vec{v}$$

Nombre de Reynolds

$$\mathcal{R} = \frac{vl}{\nu} \quad \mathcal{R} \text{ est sans dimension}$$

Le nombre de Reynolds caractérise (entre autres) le rapport des termes

$$\mathcal{R} \approx \rho(v.grad) \vec{v} \quad / \quad \eta\Delta\vec{v} \approx \frac{vl}{\nu}$$

\mathcal{R} grand \approx fluide turbulent

\mathcal{R} faible \approx fluide visqueux.

7.7 Interprétation de la force de viscosité

La force de viscosité ne dépend que de la variation des vitesses au sein du fluide. Si le champ des vitesses est homogène la viscosité est sans effet.

Considérons un cas simple :

Le fluide est (localement) en mouvement parallèlement à Ox et sa vitesse ne dépend que de la profondeur z :

$$\vec{v} = (v_x(z), 0, 0)$$

La force de viscosité s'exerçant sur une surface ds du plan Oxy et dirigée dans le sens Oz s'écrit :

$$d\vec{F} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}, 0, 0 \right) ds$$

La force est tangentielle, parallèle à la vitesse, est positive si les couches supérieures ($z > 0$) sont plus rapides que les couches inférieures ($z < 0$). Ce sont bien les propriétés des forces de viscosité. On peut montrer qu'elle consomme l'énergie mécanique du fluide, c'est une force de frottement.

$$\frac{dE}{dt} = -\eta \times \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 d^3x$$

Vocabulaire, références et exercices

Références

Audaye P mécanique des fluides (élémentaire) Masson 1996
Caudel S Mécanique des fluides (plus lourd) Dunod 1990
Comolet R Mécanique des fluides (3 volumes) Masson 1997
Schaum Mécanique des fluides
Salencon J : Mécanique des milieux continus (concepts) cours de l'X / Ellipses
Perez J.P. Mécanique (point solides fluides) Masson 1995
Boudet Mécanique des milieux continus Hermes 1997
Ryhning Inge : hydrodynamique Editeur Presses polytechniques romandes
Hanauer M : Mécanique des fluides (point de vue technique) éditeur : BREAL
Cabannes H. Cours de mécanique générale
Brousse P. Mécanique
Boutigny : cours de physique : Mécanique
Bône J.C : Problèmes de mécanique
Landau et Lifchitz : Mécanique des fluides
Sedov : Mécanique des milieux continus et fluides (analyse tensorielle)
Fadeievski et al : hydrodynamique
Encyclopedia of physics : viscosity

Vocabulaire Equations d'Euler de la mécanique des fluides, fluides parfaits, viscosité, écoulements laminaires, turbulence, nombre de Reynolds.

Exercices

1 Exercices 1-4 : D'après Landau et Lifchitz : Mécanique des fluides.

8 Vibrations

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

8.1 Introduction et hypothèses

Un système oscillant est constitué de $N \gg 1$ oscillateurs : atomes, molécules, oscillateurs macroscopiques etc... .. mécaniques ou autres.

La dynamique est celle du principe de moindre action (équations de Lagrange).

A l'équilibre, le système est tel que ses variables sont déterminées, les variables dynamiques sont des variations par rapport à la position d'équilibre :

$$(q_i(t))$$

A l'équilibre : $\forall t \quad q_i(t) = 0$

Nous utilisons la convention d'Einstein et la notation complexe quand elle sera nécessaire

1. Energie potentielle :

Elle est minimum pour $q_i = 0$ si non l'équilibre est instable.

Conséquence : A l'approximation du 2ième ordre

$$U = \frac{1}{2} \alpha_{ij} q_i q_j \geq 0$$

α est une matrice conduisant à une forme bilinéaire définie positive et symétrique donc inversible.

Dans la base des vecteurs propres :

$$U = \frac{1}{2} \lambda_i q_i^2 \geq 0$$

2. Energie cinétique :

Elle est minimum pour $\{\dot{q}_i = 0\}$.

$$E_c = \frac{1}{2} m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

3. Le lagrangien libre du système s'écrit évidemment

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \{m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \alpha_{ij} q_i q_j\} = E_c - U$$

L'hamiltonien :

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \{m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \alpha_{ij} q_i q_j\}$$

8.2 Le mouvement libre

- Equations de Lagrange et dynamique du système :

$$m_{ij} \ddot{q}_j = F_i = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial q_i} = -\alpha_{ij} q_j$$

Soit un système de N équations linéaires sur N fonctions inconnues.

Recherche de solutions particulières exponentielles et des équations caractéristiques

$$q_i(t) = q_i(0) \exp(rt)$$

La recherche de ces solutions conduit à un système d'équations homogènes qui n'a de solution différente de 0 que si le déterminant est nul :

$$|m_{ij} r^2 + \alpha_{ij}| = 0 \quad \text{c'est l'équation caractéristique en } r$$

L'équation caractéristique est à coefficients réels, d'ordre N en r^2 .

Remarque : si r est solution $-r$ et r^\dagger le sont également.

La solution générale (... $q_i(t)$...) est une combinaison linéaire des solutions propres qui vérifient :

$$(m_{ij} r^2 + \alpha_{ij}) q_j(0) = 0$$

- Application : soit deux oscillateurs couplés, identiques avec

$$\alpha = m \begin{bmatrix} \omega_0^2 & -\alpha \\ -\alpha & \omega_0^2 \end{bmatrix} \quad \text{et } m = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

deux solutions réelles :

$$r = \pm \sqrt{-\omega_0^2 \pm \alpha}$$

en couplage faible

$$\alpha \leq \omega_0 \text{ alors } r = \pm i w$$

Solutions (vecteurs) propres :

$$q(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Energie du système :

Dans un mouvement propre de pulsation ω et d'amplitude propre a_i l'énergie est indépendante du temps et peut s'écrire :

$$\mathcal{H}_0 = E = \frac{1}{2} \omega^2 \left\{ \sum m_{ij} a_i a_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right\}$$

avec $q_i(t) = a_i \cos(\omega t + \varphi_i)$

L'énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude

Si la matrice de masse m est diagonale l'énergie s'écrit :

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 m_i a_i^2$$

Application N oscillateurs libres $\alpha = 0$, identiques, équation caractéristique :

$$(r^2 + \omega_0^2)^N = 0$$

L'énergie : $E = \frac{1}{2} \omega_0^2 m \sum a_i^2$

8.3 Le mouvement amorti

1. Equation du mouvement :

$$m_{ij} \ddot{q}_j = F_i = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial q_i} - 2\lambda_{ij} \dot{q}_j = -\alpha_{ij} q_j - 2\lambda_{ij} \dot{q}_j$$

2. L'énergie n'est plus conservée : on montre que

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -2\lambda_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i \quad \lambda_{ij} \geq 0$$

3. Solutions exponentielles

$$q_i(t) = q_i(0) \exp(rt)$$

Equation caractéristique en r :

$$|m_{ij} r^2 + 2\lambda_{ij} r + \alpha_{ij}| = 0$$

équation à coefficients réels et d'ordre $2N$ en r

Si r est solution r^\dagger mais $-r$ ne l'est plus.

Solutions physiques si et seulement si : Réel(r) est négatif.

4. Application : N oscillateurs indépendants identiques :

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= m \omega_0^2 \delta_{ij} \\ m_{ij} &= m \delta_{ij} \text{ et } \lambda_{ij} = m \lambda \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1)$$

Equation caractéristique :

$$(r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2)^N = 0$$

Solutions physiques :

$$r = -\lambda \pm i\omega_1$$

avec $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ et la pseudo période est $T = 2\pi/\omega_1$

$$q_i(t) = q_{i0} \exp(-\lambda t) \cos(\omega_1 t + \varphi_i)$$

5. Variation de l'énergie totale

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \{m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \alpha_{ij} q_i q_j\}$$

$$E(t) \approx \exp(-2\lambda t)$$

Facteur de qualité Q : Sur une pseudo période l'énergie varie relativement de :

$$\frac{\delta E}{E} = -2\lambda \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right) = -\frac{2\pi}{Q} \quad Q = \frac{\omega_1}{2\lambda}$$

8.4 Oscillations forcées et résonances

1. Action d'une force extérieure périodique de pulsation ω quelconque :

$$m_{ij} \ddot{q}_j + 2\lambda_{ij} \dot{q}_j + \alpha_{ij} q_j = F_i(t)_{ext} \quad F_i(t)_{ext} = F_i(0)_{ext} \exp(i\omega t)$$

2. Solution permanente (au delà du régime transitoire) :

$$q_i(t) = q_i(0) \exp(i\omega t)$$

On obtient :

$$q_i(0) = (-\omega^2 m_{ij} + 2i\omega \lambda_{ij} + \alpha_{ij})^{-1} F_j(t=0)_{ext}$$

Applications :

- (a) On a une résonance si ω est solution de l'équation caractéristique de l'oscillateur libre
 - (b) A la résonance, la force est en phase avec le mouvement (vitesse)
 - (c) La puissance dissipée est égale puissance extérieure reçue. L'énergie restituée à l'action extérieure est nulle.
3. Cas d'un seul oscillateur : $N = 1$

$$q_1(0) = \frac{F}{m} \times \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\lambda\omega}$$

Résonance est obtenue pour $\omega = \omega_0$

La vitesse est en phase avec la force extérieure ; le déphasage du mouvement par rapport à la force = $-\frac{\pi}{2}$.

Maximum d'énergie du mouvement permanent :

$$|q_i(0)|_{max}^2 = \left(\frac{F}{2\lambda m \omega_1}\right)^2$$

pour $\omega_{max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$

Largeur en pulsation de la résonance (définie comme les limites à $E_{max}/2$)

$$\delta\omega^2 = \omega^2 - \omega_0^2 = \pm 2\lambda \omega \quad (2)$$

Soit si l'amortissement est faible $\delta\omega \approx \lambda$

Vocabulaire, références et exercices

Références

Landau et Lifchitz, Mécanique, Mir 1970

Alonso Finn, Physique générale

Paul Germain, Mécanique II Ellipse 1986

Vocabulaire Oscillations, pulsations, fréquences, transformation de Fourier, analyse spectrale, nombre d'onde, vecteur d'onde. Facteur de qualité, pseudo période, amortissement et résonance, largeur de résonance. Dispersion.

Exercices

- 1 Fréquences propres de 3 oscillateurs identiques faiblement couplés tels que

$$\alpha = m \begin{pmatrix} \omega_0^2 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & \omega_0^2 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & \omega_0^2 \end{pmatrix}$$

Etudier le système des forces intérieures : F_i attractives, répulsives ?

Mouvements propres $q_i(t)$? Calculer l'énergie totale d'un mouvement propre.

Mouvement amorti par $\lambda_{ij} = m \lambda \delta_{ij}$

- 2 Etudier la chaîne infinie d'oscillateurs couplés de telle sorte que la force sur l'oscillateur d'ordre n s'écrive

$$F_n = m(-\omega_0^2 q_n + \alpha(q_{n-1} + q_{n+1}))$$

Ecrire la matrice α correspondante.

Etudier la relation de dispersion. Linéarité ?

Etudier la limites des oscillateurs indépendants ou fortement couplés.

- 3 Etudier le mouvement d'un oscillateur de masse m et de pulsation propre ω_0 .

Il est initialement au repos, le milieu extérieur exerce une action (F_0) constante pendant un intervalle de temps T .

Déterminer l'amplitude des oscillations libres résultantes.

- 4 Etudier les questions de cours de l'agrégation 1990 et 1995.

9 Thermodynamique 1

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

9.1 Introduction

Les systèmes thermodynamiques

- Complexité
- Echange d'énergie avec l'extérieur
- Echange de matière : système ouvert

L'équilibre thermodynamique est caractérisé par

Variables thermodynamiques :

Extensives : x_i

Intensives : X_i

Les variables (x, X) sont dites conjuguées

Le système peut échanger de l'énergie calorifique et du travail avec l'extérieur

La thermalisation (équilibre thermique) se fait par contact diatherme. \exists des parois diathermes

La chaleur (le travail) est une énergie désordonnée (ordonnée)

Exemple :

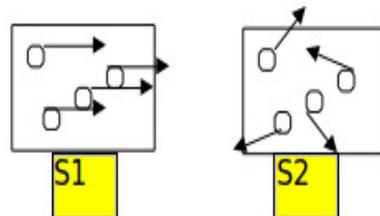


figure 1

S1 et S2 ont même énergie mais le désordre est plus grand dans S2 que dans S1.

9.2 Principe 0 et équation d'état

Il est possible de définir la température d'un système à l'aide d'un thermomètre. N'importe quel un système thermodynamique peut être choisi comme thermomètre. Le thermomètre est le système de référence :

Pour ce faire il faut imposer *le principe 0* :

La relation " S_1 est à la même température que S_2 " est une relation équivalence .

Dans ce cas, elle est transitive :

$$\begin{matrix} S_0 \approx S_1 \\ S_1 \approx S_2 \end{matrix} \Rightarrow S_0 \approx S_2$$

Conséquence du principe 0 : A l'équilibre thermodynamique, il existe une équation d'état telle que la température soit définie en fonction des paramètres thermodynamique :

$$\exists T(x, X)$$

La température est la propriété commune à tous les systèmes en équilibre thermique . Ces systèmes constituent une classe d'équivalence au sens de la relation ci-dessus.

La détermination de l'équation d'état est l'un des objectifs de la thermodynamique.

Les transformations -

Sous l'action d'une modifications des contraintes imposées au système celui-ci quitte un état d'équilibre A pour se positionner sur un autre état d'équilibre B : ce processus s'appelle "**transformation thermodynamique**".

On définit les transformations :

quasi-statiques
réversibles
adiabatiques
isothermes, isobars, isochores
infinitésimales

Les coefficients thermo-élastiques -

Dans une transformation infinitésimale, on peut utiliser la notion de différentielle \approx accroissements

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_X dx + \left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)_x dX$$

Localement l'équation d'état est équivalente à la connaissance des fonctions dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_X, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)_x$$

ou bien des coefficients thermo-élastiques :

$$\alpha = \frac{1}{x} \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_X \quad \beta = \frac{1}{X} \left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_x \quad \chi = \frac{1}{x} \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)_T$$

Ces trois fonctions ne sont pas indépendantes, nous avons :

$$\alpha = -\chi X \beta$$

Exercice : pour un mole de GP $X = -p, x = V, T$ avec

$$p V = R T$$

$$\alpha = \beta = T^{-1} \text{ et } \chi = -X^{-1}$$

Exercice : qu'appelle-t- on "conditions critiques" ?

9.3 Principe 1 et énergie interne

Dans une transformation le système reçoit de l'énergie de l'extérieur soit sous forme ordonnée (travail) W soit sous forme désordonnée (chaleur) Q .

Expressions différentielles de la chaleur

$$dQ = C_x dT + l dx = C_X dT + h dX = \mu dx + \lambda dX$$

dQ ne dépend que de deux fonctions donc il existe des relations entre les coefficients.

Relation de Mayer

$$C_X - C_x = -T \left(\frac{\partial x}{\partial T} \right)_X \left(\frac{\partial X}{\partial T} \right)_x$$

application à une mole de GP

$$C_P - C_V = R$$

Relation de Reech compressibilité adiabatique χ_Q , isotherme χ_T ?

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{\chi_T}{\chi_Q}$$

Expressions différentielles du travail -

Par définition, si x et X sont conjuguées, dW s'écrit :

$$dW = \sum X_i dx_i$$

Pour une transformation infinitésimale d'un gaz ou d'un fluide :

$$dW = -p dV$$

9.4 Principe 2 et entropie

L'inégalité de Clausius est à la base de la définition de l'entropie : elle affirme que pour les cycles multi-thermes

$$\text{une distinction doit être faite entre cycles } \begin{pmatrix} \text{magiques} \\ \text{physiques} \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

— L'entropie est classiquement définie sur une transformation réversible par

$$\Delta S = \int_{rev} \frac{dQ}{T}$$

— **Enoncé du deuxième principe** : Dans une transformation réelle l'évolution temporelle crée de l'entropie

$$\Delta S_{cr} = \Delta S - \sum_i \frac{Q_i}{T_i} \geq 0$$

Conséquences : dS et dU sont des différentielles totales

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad dU = dQ + dW \quad (3)$$

On en déduit les relations thermodynamiques de Maxwell puis celle de Clapeyron qui réduisent d'une unité le nombre des coefficients calorimétriques indépendants du système si l'on connaît l'équation d'état.

$$l = -T \left(\frac{\partial X}{\partial T} \right)_x \quad \text{reste par exemple } C_x$$

exemple $X = -p$

L'entropie statistique de Boltzmann

$$S = k \ln(\Omega)$$

k est la constante de Boltzmann, c'est **l'unité d'entropie** à l'échelle microscopique :

$$k = R/N$$

$$k = 1.380658(\pm 12) \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$$

$$R = 8.314510(\pm 70) \text{ JK}^{-1}$$

$$N = 6.022045 \cdot 10^{23}$$

9.5 Principe 3 et les basses températures

Enoncé du principe 3

Quand T tend vers le zéro l'entropie tend vers un constante.

Hypothèse complémentaire de Plank : cette constante peut être prise égale à 0.

$$\text{quand } T \rightarrow 0 \quad S \rightarrow 0$$

Conséquences :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_T = - \left(\frac{\partial X}{\partial T} \right)_T \rightarrow 0 \quad \alpha, \beta \rightarrow 0 \quad C_x \text{ ou } C_X \rightarrow 0 \quad \chi \text{ reste fini}$$

Vocabulaire, références et exercices

Références

Bazarov thermodynamique Mir 1970

J.P. Perez : thermodynamique Masson 1990

Vocabulaire Systèmes, sources de chaleur, variables thermodynamiques, variables conjuguées, principes, chaleur, capacités calorifiques, travail, ordre, désordre, entropie, transformations réversibles, adiabatiques, isothermes, monothermes, dithermes, cycle de Carnot, relation de Reech, relation de Mayer, relation de Clapeyron, relations de Maxwell, coefficients calorimétriques, gaz parfait, loi de Joule, loi de Dulong et Petit, loi de Debye . Développement du Viriel.

Exercices

1 Soit un système hydrostatique dépendant de P,V et T qui suit la loi de Joule ; en déduire la forme de l'équation d'état en utilisant la relation de Clapeyron. En déduire que le gaz parfait suit la loi de Joule.

2 Soit un gaz de Van der Walls,

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

1. Justifier la forme de cette équation d'état et donner l'allure des isothermes. Température critique ? interprétation de a et b ?

2. Si a et b sont est constants, en déduire l'énergie interne

$$U = \int C_V(T)dT - \frac{a}{V}$$

1. Recherche la forme de S(V,T)

2. Etudier le cas où a dépend de T : soit a(T).

3 Démontrer le théorème du viriel en mécanique .

Application aux gaz.

Qu'appelle-t-on le développement du viriel dans la théorie des gaz réels

Cas du gaz de Van der Walls,

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

10 Thermodynamique 2

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

10.1 Introduction

Les premiers principes permettent d'introduire les variables thermodynamiques à l'équilibre :

| | |
|-------------------|----------------------------------|
| Extensives | x_i |
| Intensives | X_i |
| L'équation d'état | $T(x, X)$ |
| L'énergie interne | $U(x, T)$ |
| L'entropie | $S(x, T)$ avec $S = 0$ à $T = 0$ |

10.2 Les potentiels thermodynamiques

Si A est un équilibre du système dans des contraintes extérieures, le potentiel thermodynamique est minimum en A si l'on considère une évolution dans les contraintes imposées au système.

S, F, G, U sont des potentiels dans des contraintes différentes .

10.2.1 L'entropie $S(U, x)$ et la nég-entropie $-S(U, x)$:

$$dS = \frac{1}{T}dU - \frac{X}{T} dx = \frac{1}{T} dU - \frac{dW}{T}$$

Soit une évolution (isolée) telle que $dQ = 0$ et $dW = 0$ alors $dU = 0$ et $dS = 0$: le système se positionne sur un extrémum de S

La nég-entropie est minimum en A pour une évolution **isolée** .

Autre façon de formuler : soit une transformation finie telle que $W = 0$ et $Q = 0$ alors

$$\Delta S - \sum \frac{Q}{T} \geq 0 \Rightarrow -\Delta S \leq 0$$

Relations thermodynamiques avec S :

$$\text{température : } \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_x \quad \text{équation d'état : } -\frac{X}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_U$$

10.2.2 L'énergie libre $F(x, T) = U - TS$:

$$dF = -S dT + X dx$$

Soit une évolution (isotherme) telle que $dT = 0$ et $dW = 0$ alors $dF = 0$ donc F est extrémum

L'énergie libre est minimum en A si A est un équilibre pour les isothermes avec $dW = 0$

Autre formulation : soit une transformation isotherme finie telle que $W=0$ alors :

$$\Delta S - \sum \frac{Q}{T} \geq 0 \Rightarrow \Delta F \leq 0$$

Relations thermodynamiques avec $F(x, T)$:

Entropie déterminée par F

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x$$

L'équation d'état déterminée

$$X = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_T$$

Relations de Maxwell

$$-\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_x = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T$$

Relation de Clapeyron

$$l = -T\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_x$$

Relation de Helmholtz

$$U = F + TS = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x$$

10.2.3 L'enthalpie libre $G(X, T) = H - TS$

L'enthalpie libre n'est fonction que des variables intensives X et T !

$$dG = -S dT - x dX$$

Soit une évolution (isotherme) telle que $dT = 0$ et $dX = 0$ alors $dG = 0$ donc G est extrémum

L'enthalpie libre est minimum en A si A est un équilibre pour les isothermes avec $X = X_0 = Cte$

Autre formulation : soit une transformation isotherme finie à X_0 constant et Δx , nous avons $W = X_0 \Delta x$ alors :

$$\Delta S - \sum \frac{Q}{T} \geq 0 \Rightarrow \Delta G \leq 0$$

Relations thermodynamiques avec $G(X, T)$:

Entropie déterminée par G

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_X$$

L'équation d'état déterminée

$$x = -\left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)_T$$

Relations de Maxwell

$$\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_X = \left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)_T$$

Relation de Clapeyron

$$h = T\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_X$$

Relation de Gibbs

$$H = G + TS = G - T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_X$$

10.2.4 L'énergie interne $U(x, S)$

$$dU = TdS + Xdx$$

Soit une évolution (isolée) telle que $dS = 0$ et $dW = 0$ alors $dU = 0$ donc S est extrémum
L'énergie interne est minimum dans les contraintes.

Autre façon : soit une transformation finie telle que $S = Cte$ et $W = 0$ alors :

$$\Delta S - \sum \frac{Q}{T} \geq 0 \Rightarrow \Delta U \leq 0$$

relations thermodynamiques avec $U(x, S)$:

Température déterminée par U

$$T = +\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_x$$

L'équation d'état

$$X = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_S$$

10.3 Expression de G pour les systèmes ouverts

(systèmes chimiques)

U est fonction de x, S et n_i les nombres de moles de l'espèce chimique i .

Introduisons le potentiel chimique (variable conjuguée de n_i)

$$dU = Xdx + TdS + \mu_i dn_i$$

$$\text{soit } dG = -xdX - SdT + \mu_i dn_i$$

U est une fonction extensive de variables extensives donc :

$$U(\lambda x, \lambda S, \lambda n_i) = \lambda U(x, S, n_i)$$

On en déduit que U est une fonction homogène du 1er ordre :

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + S \frac{\partial U}{\partial S} + n \frac{\partial U}{\partial n} = U(x, S, n_i) = xX + TS + n_i \mu_i$$

$$G = \mu_i n_i$$

et la relation de Gibbs-Duheim :

$$n_i d\mu_i = -SdT + v dP$$

Exercice : Applications au Gaz parfait.

10.4 Les transitions de phases :

1. La variance selon Gibbs

Il est possible de définir l'enthalpie libre d'un système comportant plusieurs phases (ϕ phases) et plusieurs constituants chimiques (C constituants) de ces phases. La variance selon Gibbs du système est :

$$v_{Gibbs} = C + 2 - \phi$$

Démonstration : les espèces sont libres de circuler entre les phases et à T, P , G est minimum par rapport à ces variations donc si μ_{ik} est le potentiel du constituant i dans la phase k on a :

$$\forall i, k \quad \mu_{ik}(P, T, x_{ik}) = \mu_i$$

x_{ik} est la concentration molaire du constituant i dans la phase k .

2. **Transition de phase des corps purs dans le diagramme P, T :**

$$C = 1$$

$$v_{Gibbs} = 3 - \varphi$$

$$v_{Gibbs} = 2 \Rightarrow P \text{ et } T \text{ engendrent une surface du diagramme}$$

$$\varphi = 1, 2, 3 \quad v_{Gibbs} = 1 \Rightarrow P \text{ est une fonction de } T : \text{ courbe de transition}$$

$$v_{Gibbs} = 0 \Rightarrow P \text{ et } T \text{ sont fixes : points triples}$$

Classification des transitions : -

Avec P et T fixés, on effectue une transition à travers une courbe de transition : on a

$$dG = v dP - S dT$$

G sera continue dans la transition

1ère espèce si : $\frac{\partial G}{\partial X}$ les dérivées premières discontinues

exemples volume molaire, densité et entropie

2ième espèce si : $\frac{\partial^2 G}{\partial X^2}$ les dérivées secondes discontinues

exemples capacités calorifiques, coefficients thermo-élastiques

3. **Formule de Clapeyron (Transition de phase 1ère espèce) :**

Il y a une relation entre les discontinuités !

Soit une transition :

$$1 \mapsto 2 \quad \frac{L}{T} = S_2 - S_1 = (v_2 - v_1) \frac{dP}{dT}$$

En général, on observe $\frac{dP}{dT} \geq 0$ (contre exemple H_2O).

4. **Formule d'Ehrendfest.** Relation entre discontinuités pour des transitions de 2ième espèce :

$$1 \mapsto 2 \quad L = 0 \quad v_2 = v_1 \quad \text{et}$$

$$C_{P2} - C_{P1} = T v (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{dP}{dT}$$

Vocabulaire, références et exercices

Références

Bazarov, thermodynamique Mir 1970

J.P. Perez, thermodynamique Masson 1990

Vocabulaire Potentiels thermodynamiques, réactions chimiques, potentiels chimiques, loi d'action de masse, énergie et enthalpie libres, transitions de phases, discontinuités, diagrammes de phase, diagrammes pour les systèmes binaires, mélange eutectique, formule de Clapeyron. Loi de Kirchhoff, formule de Dupré pour H₂O, transition de phase d'un gaz de Van der Waals, construction de Maxwell, Superfluidité de He, transition λ de He. Coordonnées réduites.

Exercices

1 Démontrer la formule de Clapeyron et la formule d'Ehrenfest.

2 Soit un gaz de Van der Waals,

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$$

1. Justifier que la transition liquide vapeur ne s'observe que pour des températures inférieures à la température critique. Calculer cette température en fonction de a et b .

2. Ecrire l'équation de Van der Waals en coordonnées réduites.

3 Question de cours d'agrégation en 1993.

11 Thermodynamique 3

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

11.1 Introduction à la physique statistique

Un système complexe macroscopique est constitué de N constituants microscopiques : atomes, molécules, moments magnétiques etc

L'agitation thermique induit des changements d'état, d'énergie des constituants considérés classiquement comme des entités discernables.

Une mesure à l'échelle macroscopique est une moyenne dans le temps sur des états microscopiques en perpétuel changement (agitation thermique).

Hypothèse ergodique : Les moyennes temporelles (obtenues des mesures macroscopiques) peuvent être obtenues comme des moyennes dans l'espace de phase du système avec "certaines" probabilités (on dit "moyenne sur un ensemble").

$$\langle A(t) \rangle_t = \langle A \rangle_{\text{ensemble}}$$

Exemple : Soit un système défini par les variables conjuguées (q_i, p_i) avec $i = 1, N$

Considérons l'énergie du système : L'énergie interne est la moyenne temporelle de l'énergie

$$U = \langle E \rangle = \left\langle \sum_i \varepsilon_i(t) \right\rangle_t = \left\langle \sum_{\text{ensemble}} \varepsilon \right\rangle$$

On distingue différentes approches de l'équilibre thermodynamique :

- Micro canonique : le système est isolé et fermé, E et N sont fixés .
- Canonique : le système est en contact d'un thermostat T et N sont fixés
- Grand canonique : le système est au contact d'un thermostat et

d'une source de constituants (le système est ouvert) T et μ sont fixés.

11.2 Statistique de Maxwell Boltzmann

Dénombrement de la probabilité thermodynamique -

Les états individuels des constituants forment un spectre d'états dénombrables :

Un état d'énergie ε_j est défini par les labels (i, j) avec $i = 1, ..g_j$ où g_j est la **dégénérescence** du niveau d'énergie j

On montre facilement que la probabilité thermodynamique (de Boltzmann) de l'état défini par les nombres d'occupation $(..n_j..)$ est pour N constituants

$$\Omega = \prod_j \frac{N!}{n_j!} g_j^{n_j} \quad \Omega \text{ est le nombre d'états microscopiques compatibles avec } (...n_j..)$$

L'entropie est maximum à l'équilibre $S_{max} = k \text{Ln}(\Omega_{max})$ ce qui est réalisé dans les conditions de la statistique de Maxwell :

$$p_{ij} = \frac{\exp(-\beta\varepsilon_j)}{Z} \quad \text{indépendant de } i \text{ et avec } \beta = (kT)^{-1} \text{ et } Z = \sum_{ij} \exp(-\beta\varepsilon_j)$$

p_{ij} est la probabilité d'occupation de l'état i, j (à l'équilibre), elle ne dépend que de l'énergie de l'état ! Z est la fonction de partition.

11.3 Relations avec la thermodynamique

interprétation statistique de la thermodynamique

— **L'entropie**

$$S = -Nk \sum_{ij} p_{ij} \text{Ln}(p_{ij})$$

— **L'énergie interne**

$$U = \sum_{ij} p_{ij} \varepsilon_j$$

— **L'énergie libre**

$$F = -NkT \text{Ln}(Z) \quad \text{avec } Z = \sum_{ij} \exp(-\beta\varepsilon_j)$$

Rappel : U et S peuvent se définir à partir de l'énergie libre F (relation de Helmholtz).
Par exemple :

$$U = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \text{Ln}(Z) \quad S = Nk \left(1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta}\right) \text{Ln}(Z)$$

— **Interprétation microscopique** de la chaleur et du travail

$$dQ = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} dp_{ij} \quad dW = \sum_{ij} p_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

— **Equipartition**

$$\varepsilon = aq^2 \Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} kT$$

11.4 Théorie cinétique des gaz

1. La pression cinétique : On montre

$$P = \frac{N}{3V} m \langle v^2 \rangle$$

2. **Théorème du Viriel en théorie cinétique des gaz :**

Le Viriel pour un point mécanique

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{p}) = (\vec{r} \cdot \vec{f}) + (\vec{v} \cdot \vec{p})$$

Applications

1. Trajectoires périodiques : sur une période

$$-\int_T (\vec{r} \cdot \vec{f}) dt = \int_T (\vec{v} \cdot \vec{p}) dt = T \times \langle 2 \varepsilon_c \rangle$$

2. Mouvements confinés sur un temps long

$$-\langle r \cdot \vec{f} \rangle = \langle 2 \varepsilon_c \rangle ?$$

3. Pour une collection de N atomes d'un gaz
(développement du Viriel en physique statistique)

$$\langle E_C \rangle - \frac{3}{2} P V = \frac{1}{2} \text{Viriel des forces intérieures} = - \langle \sum_{(ij)} \vec{r}_{ij} \cdot \vec{f}_{ij} \rangle$$

4. Qualitativement : forces intérieures attractives \Rightarrow Viriel positif et baisse de la pression (inversement pour des forces répulsives).

Exercice : question de cours d'agrégation 1990

11.5 Statistiques quantiques

1. Critique de la statistique Maxwell Boltzmann :

- Le nombre de constituants par état est variable et ne respecte pas le principe de Pauli pour les Fermions
- Le dénombrement à la Boltzmann ne tient pas compte de l'indiscernabilité quantique des constituants élémentaires

2. **Statistique de Fermi- Dirac**

A l'équilibre le nombre de constituants dans l'état i, j est :

$$0 \leq n_{ij} = \frac{1}{\exp \beta(\varepsilon_j - \mu) + 1} \leq 1$$

Le potentiel chimique μ est déterminé par la conservation des éléments du système

$$\sum_{ij} n_{ij} = N \quad \text{Le paramètre } \beta \text{ vaut } 1/kT$$

Application : les électrons de conduction dans les métaux.

L'énergie de Fermi d'un système de Fermions :

$$\mu \rightarrow E_F \text{ quand } T \rightarrow 0 K$$

3. **Statistique de Bose- Einstein**

A l'équilibre le nombre de constituants dans l'état i, j est :

$$0 \leq n_{ij} = \frac{1}{\exp \beta(\varepsilon_j - \mu) - 1} \leq N \approx \infty$$

Le potentiel chimique μ est déterminé par la conservation des éléments et évidemment :

$$\forall j \quad \mu \leq \varepsilon_0 \leq \varepsilon_j$$

Le paramètre β vaut $1/kT$

4. Applications :

(a) Condensation de Bose.

(b) Corps noir et rayonnement thermique.

Le potentiel chimique μ est éventuellement déterminé par la conservation des éléments :

$$\sum_{ij} n_{ij} = N$$

Dans le cas des photons, ce nombre est libre car par la thermalisation un photon peut en donner plusieurs donc :

$$\forall T > 0 K \quad \mu_\gamma = 0$$

Vocabulaire, références et exercices

Références

I. Bazarov, Thermodynamique
M.Zemansky, Heat and thermodynamics
P. Grécias, Exercices et problèmes de thermo...
Papon, Thermodynamique des états d...
M. Bertin, Thermodynamique classique e...
D. Ruelle, Statistical mechanics
Y. Rocard, Thermodynamique
JW Gibbs, The Collected works of J. W..
C. Chahine , Thermodynamique statistique...
P.M. Chaikin, Principles of condensed mat...
B. Jancovici, Thermodynamique et physique...
I. Prigogine, Introduction à la thermodyn...
Zitoun, Physique statistique
I. Bazarov thermodynamique Mir 1970
J.P. Perez, : thermodynamique Masson 1990
E.A. Guggenheim,
H. Lumbroso,
R. Castaing, Cours de thermodynamique st...
Faroux, Thermodynamique, cours et 1...

Vocabulaire Facteur de Boltzmann. Statistiques quantiques, équipartition de l'énergie, Viriel des forces, Fonction de partition, Théorie de Langevin du paramagnétisme, Loi de Curie pour la susceptibilité magnétique. Théorie cinétique des gaz parfaits, des gaz réels. Le Corps noir, la loi de Stefan. Condensation de Bose. L'énergie de Fermi. Capacité calorifique des solides, (modèle de Debye, modèle d'Einstein), théorie des phonons.

Exercices

- 1 Justifier l'équipartition de l'énergie en utilisant la statistique de Maxwell-Boltzmann. Démontrer le théorème d'équipartition de l'énergie.

$$\varepsilon = aq^2 \Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2}kT$$

- 2 Calculer la fonction de partition d'une mole de gaz parfait

$$Z = \frac{V}{h^3}(2\pi mkT)^{3/2} = V\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}\beta^{-3/2}$$

Vérifier la dimension et en déduire :

$$U = \frac{3}{2} kT \text{ et } PV = NkT$$

- 3** Démontrer les lois de distribution de probabilité de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein
Dénombrer les complexions en tenant compte de l'indiscernabilité et du principe de Pauli.
Etablir la théorie de Planck du corps noir.
Démontrer que pour les photons $\mu = 0$.
En déduire la loi de Stefan
Application numérique :
Quelle est la puissance émise par une surface unité de corps noir à 300 K .
Quelle est la longueur d'onde centrale du spectre d'émission du corps noir à $T = 300\text{ K}$.

12 Thermodynamique 4

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

12.1 Introduction à la théorie du transport

Un système complexe constitué de deux sous-systèmes $\{1,2\}$ est à l'équilibre si certaines propriétés se conservent quand on passe de l'un à l'autre des systèmes comme par exemple

| | |
|----------------------|-----------------|
| température | $T_1 = T_2$ |
| pression | $P_1 = P_2$ |
| potentiel chimique | $\mu_1 = \mu_2$ |
| potentiel électrique | $U_1 = U_2$ |

La théorie du transport décrit, en principe, la dynamique d'un système qui tend vers l'équilibre dans ses contraintes extérieures ($S \rightarrow S_{max}$).

12.2 Théorie thermodynamique des processus irréversibles

Soit un système en quasi-équilibre tel que chaque sous système puisse être considéré, autour de de chaque point du système, comme localement à l'équilibre. Alors on a

$$\begin{aligned} T(x, t) \\ \rho(x, t) \\ P(x, t) \end{aligned}$$

Diffusion chimique : -

Equilibre des potentiels avec une seule espèce chimique.

L'égalité des potentiels induit celle ces concentrations donc :

$$\rho(x, t) = \frac{\delta N}{\delta V} \rightarrow \rho_0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

Le courant de particules suit la loi de Fick (hypothèse de linéarité)

$$\vec{j}(x, t) = \rho \vec{v} = -D_c \overrightarrow{\text{grad}}(\rho)$$

D_c est la constante de diffusion en $l^{-2}s^{-1}$

Loi de conservation des constituants avec une source locale (ω par unité de volume et par sec)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}) + \omega \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = D_c \Delta \rho + \omega$$

Applications diffusion gazeuse, diffusion solide, neutronique des réacteurs.

| D_c | soluté | solvant | $D_c \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ | T en Celsius |
|---------|--------|---------|-----------------------------------|----------------|
| solide | C | Calcium | $1,4 \cdot 10^{-7}$ | 400 °C |
| liquide | O_2 | Alcool | $2,6 \cdot 10^{-5}$ | 30 °C |
| gaz | Alcool | Air | 6,13 | 30 °C |

Diffusion thermique -

La dérive du système conduit à l'uniformité des températures donc :

$$T(x, t) \rightarrow T_0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

Le courant de chaleur suit la loi de Fourier (hypothèse de linéarité)

$$\vec{j}(x, t) = \rho \vec{v} = -K_T \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

K_T est la constante de conductivité thermique en $l^{-2} K^{-1} s^{-1}$

Remarque : attention cette hypothèse de linéarité implique l'absence de convection (pas de déplacement de matière) ni de rayonnement.

Loi de conservation de la chaleur (énergie) avec une source locale (ω par unité de volume et par sec)

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}) + \omega \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = D_Q \Delta T + \omega$$

C_x est la capacité calorifique par unité de volume. (à volume constant **ou** à pression constante)
 D_Q est le coefficient de diffusion de la chaleur

$$D_Q = \frac{K_T}{C_x}$$

Application diffusion de la chaleur.

— Equation de la diffusion de la chaleur sans sources internes :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_Q \Delta c$$

— Stationnaire à 1 dimension :

$$c(x) = ax + b \Rightarrow j \propto -\text{grad}(c)$$

— A partir d'une source en $x = 0$ à $t = 0$

$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma}\right) \text{ avec } \sigma(t) = \langle x^2 \rangle = 2Dt$$

— Constante de Diffusion des constituants

Etude du mouvement Brownien comme marche au hasard à partir de $x = 0$, à une dimension on trouve

$$\langle x^2 \rangle = n l^2 = \frac{t}{\tau} l^2 = 2Dt \Rightarrow D_c = \frac{l^2}{2\tau} = \frac{vl}{2}$$

Pour le gaz parfait, à 3 dimensions et sous la pression P on montre que :

$$D_c \propto (kT)^{3/2} (m)^{-1/2} (P)^{-1}$$

12.3 Thermodynamique irréversible

théorie d'Onsager-Prigogine

Questions -

- Comment l'entropie d'un système croit-elle lorsqu'il tend vers l'équilibre ?
- Quelle trajectoire suit le système dans l'espace de phase ?

Exemple : Croissance de l'entropie par diffusion de la chaleur

Les courants de chaleur et d'entropie s'écrivent respectivement :

$$\text{La puissance calorifique à travers } d^2x \quad : \quad \frac{dQ}{dt} = \vec{j}_Q \cdot \overrightarrow{d^2x} \quad \vec{j}_S = \frac{\vec{j}_Q}{T}$$

Le flux d'entropie à travers un élément de surface est :

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T} = \frac{\vec{j}_Q}{T} \cdot \overrightarrow{d^2x}$$

En prenant la divergence de \vec{j}_S , on montre que l'entropie (par unité de volume) croit comme :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{1}{T} \text{div}(\vec{j}_Q) = -\text{div}(\vec{j}_S) - \frac{1}{T^2} \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \vec{j}_Q \quad \text{avec } \vec{j}_Q = -K \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

L'entropie produite par unité de volume est donc liée à l'existence des courants :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{\text{produite}} = +\frac{K}{T^2} [\overrightarrow{\text{grad}}(T)]^2$$

que l'on peut écrire

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{\text{produite}} = +\frac{1}{T} I \cdot X \quad \text{avec } I = -K \overrightarrow{\text{grad}}(T) \text{ et } X = -\frac{1}{T} \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

I est un flux (densité de courant ou flux) et X est appelé force thermodynamique .

Théorie d'Onsager -

Théorie linéaire de l'évolution vers l'équilibre

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_{\text{produite}} = \frac{1}{T} \sum I_i \cdot X_i$$

Les flux sont créés linéairement par les forces et il y a des effets croisés :

$$I_i = \sum L_{ij} X_j$$

La matrice des coefficients cinétiques est symétrique :

$$L_{ij} = L_{ji}$$

Application au thermocouple : (conduction électrique et de la chaleur) \Rightarrow croissance de l'entropie

$$\vec{j}_Q = L_{11} \left(-\frac{1}{T} \overrightarrow{\text{grad}}(T)\right) + L_{12} \left(-\overrightarrow{\text{grad}}(V)\right)$$

$$\vec{j}_e = L_{21} \left(-\frac{1}{T} \overrightarrow{\text{grad}}(T)\right) + L_{22} \left(-\overrightarrow{\text{grad}}(V)\right)$$

Ce qui donne pour le courant électrique (en redéfinissant les paramètres)

$$L_{22} = \sigma \text{ et } L_{21} = \sigma T \alpha \quad \vec{j}_e = \sigma \left[-\overrightarrow{\text{grad}}(V) - \alpha \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right]$$

σ est la conductivité du métal et

α est le coefficient thermo-électromoteur du métal.

La *fem* induite dans le thermocouple à deux métaux est :

$$fem = (\Delta\alpha \cdot \Delta T)$$

12.4 Théories microscopiques (physique statistique hors équilibre)

L'ensemble microcanonique -

Espace de phase du système : $(q, p)_i$ avec $i = 1, 3N$

Le système ne peut être déterminé que statistiquement et non absolument à $t = 0$ (conditions initiales floues)

Il existe une fonction de distribution dans l'espace de phase :

$$d \text{ Prob} = f(q, p, t) d\Omega \quad \text{avec } d\Omega = dq dp$$

L'entropie statistique peut être définie à une constante près par

$$S = -k \int f \text{Ln}(f) d\Omega$$

12.5 Evolution mécanique du système :

Loi de conservation (le système se conserve au cours du temps) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\text{div}(\vec{j}) \quad \text{avec } \vec{j} = f \vec{v}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \text{div}(\vec{v}) = 0$$

On en déduit (loi dynamique du système mécanique)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}f \cdot \vec{v} = -\{f, \mathcal{H}\}$$

si f est une fonction composée de (q, p) par \mathcal{H} soit $f(\mathcal{H}(q, p))$

$$(q, p) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow f(\mathcal{H})$$

alors la distribution f est stationnaire

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Si f ne dépend que de l'énergie, f est stationnaire

Ensemble microcanonique : Le système est isolé d'énergie E_0 , à l'équilibre, tous les états d'énergie E_0 ont même probabilité donc

$$\int f d\Omega = 1 \Rightarrow f = \frac{1}{\Omega} \Rightarrow S = -k \ln(\Omega) + Cte$$

L'entropie croît avec le volume d'espace de phase accessible à l'énergie E_0 .

12.6 Le théorème H de Boltzmann et l'équation de Boltzmann

Hors équilibre, Boltzmann introduit la quantité H_B telle que :

$$H_B = \int f \ln(f) d\Omega \sim -S$$

Boltzmann démontre qu'elle décroît au court du temps (croissance de l'entropie statistique)

Exemple : le constituant du système est à une dimension, l'entropie croit comme le circonférence du cercle d'équation

$$\mathcal{H}(q, p) = p^2 + q^2 \Rightarrow \Omega \propto 2\pi\sqrt{E_0}$$

L'équation de Boltzmann porte sur la densité de probabilité à une particule dans la collection des N constituants du système, elle s'écrit :

$$\frac{df}{dt}(r, v, t) = \int d^3v_1 \int d\omega \frac{d\sigma}{d\omega} g \{f' f'_1 - f f_1\}$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{g} &= \vec{v}_1 - \vec{v} = \vec{v}'_1 - \vec{v}' \text{ vitesses relatives } g = |\vec{g}| \\ f &= f(r, v, t) \quad f' = f(r, v', t) \text{ densités dans } d^3x \quad d^3v \\ f_1 &= f(r, v_1, t) \quad f'_1 = f(r, v'_1, t) \end{aligned}$$

$\sigma(g, \omega)$ est la section efficace (dimension l^2) pour une diffusion sous l'angle solide ω dans le CM

L'analyse de cette équation conduit à la décroissance de H_B , c'est le théorème H de Boltzmann .

$$\frac{df}{dt}(r, v, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \times v + \frac{\partial f}{\partial v} \times F = \int d^3v_1 \int d\omega \frac{d\sigma}{d\omega} g \{f' f'_1 - f f_1\}$$

F est la force extérieure qui s'exerce sur l'unité de masse.

f a la dimension de $l^{-6} t^3 \sim (dq dp)^{-1}$ avec $m = 1$

Vocabulaire, références et exercices

Références

- R. Castaing, Cours de thermodynamique
- Bazarov, I., Thermodynamique
- Couture & al ,Statistical physics
- C Chahine, Thermodynamique classique
- D. Ruelle, Statistical mechanics
- Klimontovich, Thermodynamique statistique...
- A. Blanc-Lapierre, Mécanique statistique
- I. Prigogine, Introduction à la thermodyn...
- Papon, Thermodynamique des états d...

Vocabulaire Courants, Forces thermodynamiques, transport de la chaleur, des espèces chimiques, diffusion, mouvement Brownien, marche au hasard, constante de Diffusion, croissance de l'entropie, théorème H, flux d'entropie.

Exercices

- 1** Un système chaud (température initiale T_1) de capacité C est en contact avec une source froide de capacité infinie (température T_0), le contact se fait à travers une paroi adiabatique de conductivité calorifique 0. Les deux systèmes sont initialement à l'équilibre. On remplace la paroi adiabatique par une paroi diatherme plane homogène de surface S , d'épaisseur e et de conductivité K_T .
Calculer le flux de chaleur qui s'écoule du système chaud vers la source froide.
Calculer la température du système à l'instant t : $T(t)$
Calculer l'entropie produite en fonction du temps. $S(t)$
Faire le bilan de l'entropie pour le système et sa source à t infini.
Faire une application numérique.
- 2** Démontrer que $c(x,t)$ est solution de l'équation de la diffusion à partir de $x = 0$ et $t = 0$.

$$c(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma}\right) \text{ avec } \sigma(t) = \langle x^2 \rangle = 2Dt$$

- 3** Préciser la dimension des différents termes de l'équation de Boltzmann .

13 Elasticité -Thermodynamique

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

13.1 Introduction

- Un solide subit des forces à sa périphérie, reste en équilibre et se déforme :

$$\begin{aligned}d\vec{f} &\propto d\vec{s} \\ \int d\vec{f} &= 0 \\ \int \vec{r} \wedge d\vec{f} &= 0\end{aligned}$$

- Exemple 1 : la barre sous tension : longueur l_0 , surface s et traction f selon Oz

$$\text{la contrainte } \sigma = \frac{f}{s} \Rightarrow \left(\frac{\partial l}{\partial \sigma} \right)_T = \frac{l_0}{E}$$

E est le module d'Young,

E est la tension $\sigma = \frac{f}{s}$ sous laquelle la déformation est de 100%

$$\frac{\delta l}{l_0} \sim \frac{\delta \sigma}{E}$$

Ordre de grandeur : $E = 10^{11} \text{ Pa}$ pour l'acier.

- Travail de déformation isotherme et réversible :

$$dF \text{ énergie libre} = dW = s \sigma dl$$

densité d'énergie de déformation :

$$w = \frac{1}{2E} \sigma^2$$

Considérant les variations de température on peut écrire l'équation d'état (l, σ, T) sous forme locale :

$$dl = \frac{l_0}{E} d\sigma + l_0 \alpha dT$$

Coefficient de dilatation thermique :

$$\left(\frac{dl}{dT} \right)_{\sigma=0} = \alpha l_0$$

- Exemple 2 le ressort :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -k \quad W = \frac{1}{2} k x^2$$

- Exemple 3 le pendule de torsion : force de cisaillement :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma_t} = G^{-1} \text{ avec } G \approx E$$

G est le module de cisaillement :

Pour une barre homogène cylindrique de longueur l la constante de torsion vaut :

$$\text{Couple} = C \theta \text{ avec } C = \frac{\pi R^4 G}{2l}$$

Le travail isotherme du couple de torsion conduit à une densité d'énergie de déformation donnée par :

$$w = \frac{1}{4} \frac{R^2}{l^2} G \theta^2 \quad W = \int w d^3x$$

13.2 Théorie des déformations et contraintes élastiques

- Les déformations.

Les déplacements des points du solides sont limités et fonctions des coordonnées :

$$\vec{u}(x, y, z) \ll 1$$

La déformation est donnée par une matrice d'ordre 2 (2-tenseur symétrique)

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Exercice : démontrer que la composante antisymétrique correspond à un déplacement (rotation).

- Exemple la barre sous traction :

Variation des distances

$$\frac{\delta l}{l} = n_i n_j u_{ij}$$

Variation des volumes :

$$\frac{\delta v}{v} = \text{trace} (u)$$

- Les contraintes :

Au point M les forces intérieures du solide sont des forces de cohésion à courte portée :

$$d\vec{s} \rightarrow dF_i = \sigma_{ij} ds_j$$

Exemple : cisaillement $i \neq j$ ou étirement $i = j$

- Equations d'équilibre statique des éléments du solide déformé

La résultante et le moment des contraintes sont nuls pour tout sous-volume du solide

$$\text{conséquences : } \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = 0 \text{ et } \sigma_{ij} \text{ symétrique}$$

13.3 Déformations élastiques : la loi de Hooke (1678)

- Linéarité entre contraintes et déformations

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} u_{kl} \quad \text{symétrie } i \leftrightarrow j \quad k \leftrightarrow l$$

Exemple : la barre sous traction $\sigma_{33} = E u_{33}$

Analyse du tenseur λ_{ijkl} dans le cas isotrope :

$6 \times 6 = 36$ constantes \rightarrow +(isotropie) = 2 constantes λ, μ (les coefficients de Lamé)

$$\lambda_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{il} \delta_{kj} + \delta_{ik} \delta_{jl})$$

- Loi de Hooke isotrope

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{trace}(u) \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}$$

Application à la barre sous traction

- Définition du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν

$$E = \frac{\mu}{\lambda + \mu} (2\mu + 3\lambda)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Pour l'acier $E = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ $\nu = 0,3$

13.4 Thermodynamique de la déformation

- Calcul du travail isotherme de déformation :

par unité de volume :

$$\delta W = \sigma_{ij} \delta(u_{ij})$$

$$W = \Delta F = \frac{1}{2} (\lambda_{ijkl} u_{ij} u_{kl}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{ij}$$

F est l'énergie libre.

- Application à la barre sous traction

$$\Delta F = \frac{E}{2} (u_{33})^2$$

- Echange de chaleur avec une source :

$$F = -a(T - T_0) \text{trace}(u) + \frac{1}{2} \lambda_{ijkl} u_{ij} u_{kl}$$

compressibilité isotherme avec $k = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$

$$\left(\frac{\delta v}{v} \right)_T = -\frac{p}{k}$$

dilatation thermique sans contrainte :

$$\left(\frac{\delta v}{v} \right)_{\sigma=0} = \alpha(T - T_0) \text{ avec } \alpha = \frac{a}{k}$$

détermination de la compression adiabatique ...etc

Vocabulaire, références et exercices

Références

Elasticité : Landau et Lifschitz

Vocabulaire Dynamique, déterminisme, action, principe de moindre action, équations canoniques, transformations canoniques, hamiltonien, lagrangien, Viriel. Variables conjuguées.

Exercices

1

14 Solide 1

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

14.1 la conduction électrique

Théorie quantique de la conduction :

Bandes de conduction

Bande de valence

Isolants conducteurs et semi conducteur

Conduction des semi conducteurs dopés N ou P

Application : jonction NP et transistor : PNP

Modèle classique de Drude :

Loi d'Ohm :

$$j = \gamma E \quad \text{avec} \quad \gamma = \rho \frac{e^2}{\lambda}$$

ρ est la densité volumique des charges « libres »

λ représente les interactions avec le réseau cristallin.

Interprétation de la conductivité et dépendance par rapport à la température T .

14.2 Les réseaux de Kirchhoff

réseaux de fils :

inconnues b

L'intensité I_b dans les branches

données

Les tensions et les caractéristiques des composants

Loi d'Ohm et conservation des charges :

$$b = m + (n - 1)$$

b nombre de branches, n le nombre de noeuds et m le nombre de mailles indépendantes.

Les intensités dans les branches I_b sont déterminées par les équations.

La ligne de transmission sans perte

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

La self et la capacité (L et C) par unité de longueur de ligne détermine la vitesse sur la ligne :

$$v = 1/\sqrt{LC}$$

Ligne bifilaire sans perte :

$$L = \frac{\mu_0 \mu}{\pi} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right) \text{ et } C^{-1} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \pi} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right)$$

et donc

$$v = c/\sqrt{\varepsilon \mu} = c/n \quad n \approx 2,$$

La ligne avec des pertes : résistances en série et en parallèle ... -

ligne avec des pertes :

- En série par unité de longueur R
- En parallèle par unité de longueur G^{-1}

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - (RC + LG) \frac{\partial V}{\partial t} - (GR) \times V = 0$$

C'est l'équation du télégraphiste .

14.3 Capacités calorifiques

Dans les solides et par mole :

A basse température : Loi de Debye

$$C_v = a(T/T_D)^3$$

A haute température (mais avant la fusion) : Loi de Dulong et Petit.

$$C_V = n \ 3 \ R$$

Les modèles sont basés sur une description microscopique du réseau cristallin :

la statistique de M.B de l'oscillateur harmonique quantique

fonction de partition Z qui donne F puis U puis C

- Modèle d'Einstein : les sites du réseau vibrent comme des oscillateurs harmoniques indépendants et les oscillations sont incohérentes.
- modèle de Debye : les excitations du réseau sont des vibrations cohérentes appelées phonons ; à basse température la différence est notable avec le modèle d'Einstein.
- La capacité calorifique des électrons libres dans les conducteurs est faible car l'énergie de Fermi est élevée : les électrons de conduction sont comme gelés jusqu'à des températures très élevées.

14.4 Elasticité mécanique

Loi de Hooke : les contraintes σ sont linéaires par rapport aux déformations u

$$\sigma = \lambda u$$

λ est le tenseur des modules d'élasticité.

Exemple : La barre homogène tendue

$$\sigma = \frac{F}{s} \text{ et } u = \frac{\delta L}{L} \text{ alors } \sigma = E u$$

E est le module d'Young.

— Tenseur des contraintes :

$$d\vec{f} = \sigma \times d\vec{S} \quad df_i = \sigma_{ij} \times dS_j$$

— Tenseur des déformations :

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

— Loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} u_{kl}$$

λ dépend de 36 paramètres en général mais si le milieu est isotrope, il ne dépend que de 2 paramètres : le module Young et le coefficient de Poisson.

14.5 Polarisation électrique

Equations de l'électrostatique statique :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{D}) &= \rho \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) &= 0 \\ \vec{D} &= \varepsilon_0(\vec{E}) + \vec{P} \end{aligned}$$

où \vec{P} est la polarisation du milieu .

Charges fictives équivalentes de la polarisation

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) = \rho - \operatorname{div}(\vec{P})$$

soit

$$\rho_p = -\operatorname{div}(\vec{P}) \text{ et } \sigma_p = \vec{n} \cdot \vec{P}$$

polarisation induite dans l'approximation linéaire :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_{el} \vec{E} \text{ et } \varepsilon = 1 + \chi_{el}$$

14.6 Magnétisme

Equations du magnétisme statique :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{H}) &= \vec{j} \\ \vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \end{aligned}$$

\vec{M} est l'aimantation du milieu : densité volumique de moment magnétique :

L'aimantation est équivalente à des courants fictifs :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) &= \mu_0(\vec{j} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{M})) \\ \vec{j}_a &= \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{M}) \text{ et } \vec{\sigma}_a = \vec{M} \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

Aimantation rigide : si \vec{M} existe à $\vec{j} = 0$

champ d'un aimant permanent \sim un solénoïde

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{M}) = \mu_0 \vec{j}_a \Rightarrow \text{loi de Biot et Savart avec } \vec{j}_a$$

aimantation induite dans l'approximation linéaire :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \mu = 1 + \chi_m$$

• Différents matériaux :

propriétés

| | |
|-----------------|--------------------------------------|
| diamagnétisme | indépendant de la température T |
| paramagnétisme | dépend de T |
| ferromagnétisme | dépend de T (transition de phase). |

14.7 Paramagnétisme

Théorie classique de Langevin

$$M = \rho \mu L(X) \quad \text{avec}$$

$$L(X) = \coth(X) - X^{-1} \quad X = \frac{\mu B}{kT}$$

$$L(X) \approx \frac{X}{3} \text{ si } X \ll 1$$

donc

$$\chi = \rho \mu_0 \frac{\mu^2}{3kT}$$

14.8 Théorie quantique de Brillouin

Le magnéton de Bohr

$$\mu = g j \mu_B \text{ avec } \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

j est le spin en unité \hbar et g est le facteur de Landé.

Exemple -

pour un électron (atome à un électron par exemple)

$$g \approx 2 \quad j = 1/2 \quad \mu_B = 9,273 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2$$

$$M = \rho \mu B_j(X) \text{ avec } X = \frac{\mu B}{kT}$$

$$B_j(X) = \left[\frac{2j+1}{2j} \coth\left(\frac{2j+1}{2j} X\right) - \frac{1}{2j} \coth\left(\frac{1}{2j} X\right) \right]$$

$$\text{si } X \ll 1 \quad M = \chi_m H$$

donc

$$\chi_m = \rho \mu_0 \frac{\langle \mu^2 \rangle}{3kT} \text{ avec } \langle \mu^2 \rangle \approx g^2 j(j+1) \mu_B^2$$

Vocabulaire, références et exercices

Références

J P Perez, Electromagnétisme, Masson

Magnétisme page 475

Polarisation page 448

Propagation en ligne 583

L. Landau & al , Elasticité

Zitoun Phys statistique

Capacités calorifiques

Vocabulaire ...

Exercices

1

15 Solide 2

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

15.1 Propriétés géométriques

réseau de Bravais (RB) et réseau réciproque (RR) :

- Un cristal (mono) est un milieu anisotrope homogène aux distances macroscopiques et périodiques aux distances microscopiques :

La même propriété (par ex la présence de l'atome A) se retrouve périodiquement dans l'espace

$$P(x + a) \equiv P(x)$$

- La période spatiale constitue la maille cristalline.
- On distingue les cristaux par rapport à leurs symétries ponctuelles : Il existe 32 classes cristallines (une classe = un groupe ponctuel compatible avec les translations) regroupées en 7 systèmes cristallins :
triclinique, monoclinique, orthogonale, quadratique, rhomboédrique, hexagonale, cubique.
- Les sites des mailles cristallines sont dénombrables (n, m, p dans Z) :

$$\overrightarrow{OM}_i = n\vec{a} + m\vec{b} + p\vec{c}$$

Le réseau de Bravais (RB) est constitué par l'ensemble des sites M_i

La maille est définie par

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

Le volume de la maille est

$$v = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

15.2 Le réseau réciproque

Le réseau réciproque (RR) est défini par la maille des points P_i tels que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP}_i &= n\vec{a}^* + m\vec{b}^* + p\vec{c}^* \\ (\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*) &= \frac{2\pi}{v}(\vec{b} \wedge \vec{c}, \vec{c} \wedge \vec{a}, \vec{a} \wedge \vec{b}) \end{aligned}$$

La dimension des vecteurs de la maille du réseau réciproque est celle d'un vecteur d'onde soit l'inverse d'une longueur .

- Propriété du réseau réciproque par rapport au réseau de Bravais :

$$\overrightarrow{OM}_i \cdot \overrightarrow{OP}_j = (n_1 n_2 + \dots) 2\pi = N 2\pi$$

- les plans réticulaires sont ceux qui contiennent des sites du RB et sont les plans d'onde des ondes planes sur le réseau (les surfaces d'onde planes possibles). Les familles de plans réticulaires sont caractérisé par des indices de Miller (p, q, r) qui caractérisent les directions de propagation des ondes planes et les plans d'ondes :

propriétés des indices

les indices sont premiers entre eux (division par le PGCD)
 l'équation d'un plan $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = n$

La normale à une famille de plans (p, q, r) est

$$\vec{g}(p, q, r) = p \vec{a}^* + q \vec{b}^* + r \vec{c}^*$$

La distance entre plans (p, q, r) est

$$d(p, q, r) = \frac{2\pi}{|\vec{g}|}$$

— Le volume de la maille du RR est

$$v = (\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*)$$

— Réflexion de Bragg sur la famille de plans (p, q, r)

$$2n d(p, q, r) \sin(\theta_m) = m \lambda$$

L'indice n est voisin de 1 pour les rayons X utilisés en cristallographie.

15.3 Diffraction des rayons X par les cristaux

Expérience de diffraction : on envoie des X sur un monocristal ou sur une poudre polycristalline.

Soit \vec{k} le vecteur d'onde incident et \vec{k}' le vecteur d'onde diffracté, la condition d'interférence constructive est :

$$\vec{k} - \vec{k}' \in RR$$

$$\exists(p, q, r) \text{ tel que } \vec{k} - \vec{k}' = m \vec{g}(p, q, r)$$

C'est possible si et seulement si $|\vec{k} - \vec{k}'| < 2k$ est assez grand pour intercepter des sites de RR

Démonstration :

- l'onde est incidente sur M_i

$$M_i \quad A \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM_i}))$$

- l'onde est transmise vers P le point d'observation (direction \vec{k}')

$$\text{en } P \quad A \exp(i\delta) \exp i(\omega t - \vec{k}' \cdot \overrightarrow{M_i P})$$

- La fonction de transfert vaut donc :

$$T = \sum \exp i(\omega t - (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \overrightarrow{OM_i})$$

- Si l'interférence est constructive $\vec{k} - \vec{k}' \in RR$:

$$T = N \text{ et l'intensité lumineuse est } I = N^2 I_0$$

Conséquences expérimentales :

Diagramme d'intensité sur un monocristal : collection de points lumineux très intenses

Diagramme de poudre : anneaux lumineux (en réflexion de Bragg sur les différents plans)

15.4 La conduction électrique

Modèle classique : La loi d'Ohm :

Hypothèse : Il existe dans les conducteurs des charges libres (q) de masse (m) et en densité (ρ) dépendant du matériau :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \rho \vec{v}$$

Le modèle de Drude permet d'interpréter la conductivité γ

$$\gamma = \rho \frac{q^2}{m} \tau$$

τ est le temps de relaxation du phénomène d'accélération sous l'influence du champ électrique \vec{E} .

Exemple pour le cuivre Un e^- libre par atome de cuivre (électrons de valence)

$$A = 63,54 \text{ g}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\text{Structure Atomique de Cu} = (\text{Ar}) 3d^{10} 4s^1$$

Calcul numérique pour le gaz d'électrons classiques (masse m) libres :

$$\text{Vitesse de dérive dans le champ } E = 1 \quad v_d = 7,6 \text{ micromètre/sec}$$

$$\text{Vitesse d'agitation thermique } v(th) = 1200 \text{ km/sec}$$

$$\text{Libre parcours moyen } v(th) \cdot \tau = 3,15 \text{ nanomètres}$$

| Métaux | γ^{-1} | ρ | τ | λ |
|--------|--------------------|-------------------|--------------|-------------|
| | $10^{-8} \Omega m$ | $10^{22} cm^{-3}$ | $10^{-14} s$ | $10^{-9} m$ |
| Li | 8,6 | 4,2 | 0,9 | |
| Na | 4,3 | 2,5 | 3,3 | |
| K | 6,1 | 1,3 | 4,4 | |
| Cs | 19 | 0,8 | 2,2 | |
| Cu | 1,6 | 8,5 | 2,7 | 3,15 |
| As | 1,5 | 5,9 | 4,1 | |

Classification des conducteurs

conducteur $\rho \gg Cte \forall T \quad \tau \ll \downarrow$ avec $T \uparrow$

Semi conducteur $\rho \approx$ et \uparrow avec $T \uparrow \quad \tau \ll$ et \downarrow avec $T \uparrow$

Isolant $\rho \ll$ et $\approx Cte \forall T \quad \tau \ll$ et \downarrow avec $T \uparrow$

15.5 Modèle des électrons quantiques libres

Modèle quantique :

Les électrons sont indiscernables et soumis au principe de Pauli (fermions)

Dans un puits qui a les dimensions macroscopiques du conducteur

L'énergie d'un électron dans le puits est :

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + U_0 \text{ avec } U_0 \approx 12 \text{ eV}$$

La quantification des quantités de mouvement s'applique :

$$\vec{p} = \hbar \vec{k} \text{ et } \vec{k} = (n_x \frac{2\pi}{L_x}, \dots)$$

La densité d'états d'impulsions dans l'espace de phase est donc :

$$dn = d^3k \times \frac{V}{(2\pi)^3} = d^3p \times \frac{V}{h^3} \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

La distribution des états quantiques (propre de \vec{p} et du spin) dans l'espace de phase en fonction de l'énergie est :

$$\frac{dn}{d\varepsilon} = g(\varepsilon) = 2 \times 2\pi \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon}$$

Le nombre d'occupation de chaque état est fixé par la statistique de Fermi-Dirac :

$$n(\alpha) = \frac{1}{1 + \exp(\alpha)} \text{ avec } \alpha = \frac{\varepsilon - \mu}{kT}$$

μ est le potentiel chimique des électrons e^- .

L'énergie interne électronique et le potentiel chimique sont fixés par les équations suivantes :

$$N = \int n(\alpha)g(\varepsilon)d\varepsilon \Rightarrow \mu(T) \quad U = \int \varepsilon \times n(\alpha)g(\varepsilon)d\varepsilon \Rightarrow U(T)$$

Au voisinage de $T = 0$ (à très basse température)

L'énergie de Fermi est l'énergie cinétique max des électrons à $T = 0$:

$$\varepsilon_F = \mu_{(T=0)}$$

En conséquence :

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon) d\varepsilon \text{ soit dans ce modèle } \varepsilon_F = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}$$

Application Numérique pour le Cu l'énergie de Fermi vaut $\varepsilon_F = 7 \text{ eV}$
L'énergie interne à basse température (on développe au voisinage de $T=0$) :

$$U(T) = U(0) + \frac{\pi^2}{4} N \frac{(kT)^2}{\varepsilon_F}$$

La capacité calorifique est faible et varie linéairement avec T :

$$C_V = aT \text{ et } a = \frac{\pi^2}{2} N \frac{k^2}{\varepsilon_F}$$

La capacité est faible car l'énergie de Fermi est relativement élevée

$$U_0 \approx 12 \text{ eV} \quad \varepsilon_F \approx 7 \text{ eV}$$

L'énergie d'ionisation est de l'ordre de 3 eV

Application numérique pour le cuivre

1 électron de conduction par atome, densité = 8,96 g/cm³, $A = 63,54 \text{ g}$

15.6 Une onde électronique dans un potentiel périodique (MQ)

Première zone de Brillouin (PZB) :

Une onde dans un réseau est définie par son amplitude à t en chaque site du RB .

$$\vec{OM}_i = n\vec{a} + m\vec{b} + p\vec{c} = \vec{R} \quad \Psi_{\vec{k}} \approx A \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{R})$$

La fonction $\omega(k)$ est la relation de dispersion des ondes, elle caractérise la dynamique du milieu ; la dispersion dans la direction \vec{k} est définie par la dynamique "spécifique" des ondes dans cette direction qui est associée à une famille de plans réticulaires et \vec{k} est donc dans une direction caractérisée par 3 indices de Miller :

$$\vec{k}(\omega) \text{ pour } (p,q,r)$$

propriété essentielle du réseau réciproque

si on ajoute à \vec{k} un vecteur \vec{K} du RR on ne modifie pas l'état ondulatoire des sites du réseau :

$$\Psi_{\vec{k}+\vec{K}} = \Psi_{\vec{k}} \text{ quelque soit } M \text{ un site du } RB$$

On peut donc limiter la définition de k à une zone (première zone de Brillouin PZB) qui est située autour de l'origine et limitée par les plans médiateurs construits entre O et l'ensemble des premiers sites du RR .

Exemple à 1 Dimension période a

| | | | | | | |
|-------------------|-----|-------------------|-------------------|-----|------------------|---------------------|
| Réseau de Bravais | ... | $-2a$ | $-a$ | 0 | a | $2a...$ |
| Réseau Réciproque | ... | $-\frac{4\pi}{a}$ | $-\frac{2\pi}{a}$ | 0 | $\frac{2\pi}{a}$ | $\frac{4\pi}{a}...$ |

La première zone de Brillouin (PZB) à 1D est donc définie par

$$-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$$

Remarque : par les translations du RR la PZB engendre tout le réseau réciproque.

Exemples -

L'onde $\vec{k} = 0$ est stationnaire : tous les sites sont en phase.

Si \vec{k} est différent de zéro, il existe des déphasages entre les différents sites (onde progressive).

On montre que le nombre d'états \vec{k} dans la PZB est égal au nombre de mailles du RB !

15.7 Théorie des bandes de valence

Les états quantiques des électrons dans un cristal « ionique » sont ceux d'électrons dans un potentiel attractif périodique :

$$U(\vec{r} + \vec{R}) = U(\vec{r})$$

Soit un état atomique de valence $\varphi(\vec{r} - \vec{R}_0)$: l'électron étant indiscernable il est légitime de considérer qu'il se trouve également sur tous les atomes du cristal soit un tel état :

$$\Psi_0(\vec{r}) \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \varphi(\vec{r} - \vec{R}_j)$$

Cet état est périodique (RB) et tous les sites sont en phase.

$$\Psi_0(\vec{r} + R) = \Psi_0(\vec{r})$$

A partir de cet état statique, on peut construire une onde plane électronique introduisant des déphasages entre les sites : il s'agit des fonctions d'onde de Bloch :

$$\Psi_{\vec{k}} = \exp -i(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad \Psi_0(\vec{r})$$

Cette fonction est satisfaisante pour représenter les électrons quantiques de valence dans un solide si ces électrons peuvent effectivement passer d'un site à l'autre par effet tunnel c'est à dire s'ils sont des **électrons de valence**.

L'onde ω, \vec{k} se propage sur une mer d'électrons " statiques" liés aux atomes (à tous les atomes) et les valeurs de \vec{k} sont limitées à la PZB : ces états constituent une bande de $2N$ états. L'énergie de ces états est telle que :

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m^*} + U_0$$

m^* est la masse effective des électrons dans le cristal (électrons liés au cristal) ; U_0 est l'énergie de l'électron lié au cristal dans l'état fondamental de repos.

La quantité de mouvement est $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ avec $|\vec{k}| \leq \frac{\pi}{a}$ appartient à la PZB .

Ainsi on définira, par exemple, la bande de conduction du sodium associé à l'état atomique : $3s^1$

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m^*} + U_{3s^1}$$

Celle du silicium $3sp^4$

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m^*} + U_{3sp^4}$$

L'occupation moyenne des états obéit à la statistique et dépend de la température T :

$$dN = g(\varepsilon) n(\alpha) d\varepsilon$$

S'il existe des gaps entre les bandes, l'excitation des électrons est difficile.

En conclusion on distingue à basse température (jusqu'à quelques milliers de Kelvin)

- Les isolants : bande de valence saturée bande de conduction vide gap large (>5 eV)
- Les semi-conducteurs intrinsèques (purs) : bande de valence saturée à $T=0$ gap étroit (~ 1 eV)
- Les conducteurs : bande de valence incomplète, conduction est possible même à $T=0$.
- Les semi-conducteurs dopés : la conduction est conditionnée par le dopage N ou P .

15.8 Les capacités calorifiques des solides

But : évaluation de l'énergie interne des solides à $T > 0$.

1. Modèle classique :

Oscillateurs harmoniques classiques indépendants caractérisés par x et p

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

L'élasticité des solides permet de déterminer un ordre de grandeur pour ω

$$\omega \approx 10^{13} \text{ Hz}$$

Exemple : considérons une maille cristalline de dimension a et de masse m

$$\sigma = \lambda u \text{ soit } \frac{\delta F}{a^2} = E \frac{\delta a}{a} \text{ soit } \delta F = E a \delta a$$

$$\text{donc } \omega^2 = E \frac{a}{m} \text{ on trouve } \omega \approx 10^{13} \text{ Hz}$$

Application de la statistique de Maxwell-Boltzmann ou principe d'équipartition

$$U = \text{énergie cinétique} + \text{potentielle} = N \left(\frac{3}{2} kT + \frac{3}{2} kT \right)$$

C'est la loi de Dulong et Petit : valable seulement à $T \gg 0$ et avant la fusion.

$$C \approx 3N kT$$

2. Modèle d'Einstein :

Oscillateurs harmoniques quantiques indépendants caractérisés par n

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = (n + 1/2)\hbar\omega$$

Application de la statistique de Maxwell-Boltzmann

$$U = N \langle \varepsilon \rangle = 3N\hbar\omega \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\alpha) - 1} \right) \text{ avec } \alpha = \frac{\hbar\omega}{kT}$$

On montre que

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow C \rightarrow 3Nk$$

$$T \rightarrow 0 \Rightarrow C \rightarrow 0$$

La capacité $C(T)$ décroît trop vite à température voisine de 0 K .

3. Modèle de Debye :

Les vibrations du cristal (déplacement de mailles par rapport à l'équilibre) sont des phonons

$$\Psi \approx \vec{u} \approx A \exp i(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

avec $\vec{k} \in PZB$

Les vibrations ont trois états de polarisation, le phonon est donc un boson ; la relation de dispersion peut être complexe et dépendre de la dynamique des vibrations dans le cristal ; dans le cas d'une approximation linéaire on peut avoir :

$$\omega = c k$$

$\omega(\vec{k}) < \omega_D$ la fréquence limite est la fréquence de Debye.

La densité d'états quantiques est fixée dans la première zone de Brillouin par :

$$dn = g(\omega) d\omega \quad g(\omega) = 9 N \frac{\omega^2}{\omega_D^3} \text{ si } \omega(\vec{k}) < \omega_D \text{ et } \omega_D = c \times \frac{\pi}{a}$$

La PZB une sphère, le nombre d'états $\vec{k} = N \times (3 \text{ états de polarisation}) = 3 N$

L'occupation des états quantiques suit la statistique de Bose et l'énergie interne s'écrit :

$$U = \int g(\omega) \times \hbar\omega \times n(\alpha) d\omega$$

Le nombre de phonons n'étant pas déterminé, le potentiel chimique est nul pour ces quasi-particules.

$$n(\alpha) = \frac{1}{\exp(\alpha) - 1}$$

Conséquences :

— A haute température :

$$U(T) \rightarrow 3NkT$$

— A basse température :

$$U(T) \rightarrow 9N \frac{\pi^4}{15} \times \frac{(kT)^4}{(\hbar\omega_D)^3} \Rightarrow C = \frac{12}{5} \pi^4 N k \left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 = b T^3$$

$$\text{avec } \theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k}$$

Retour sur la capacité calorifique des conducteurs -

Pour les conducteurs (\exists contribution des électrons de valence) :

$$C = a T + b T^3$$

La capacité des phonons ou vibrations $b T^3$ domine à haute température $T > 10 K$ La capacité des électrons $a T$ n'intervient qu'à très basse température $T < 1 K$

Vocabulaire, références et exercices

Références

Zitoun, Physique statistique

Kittel, Physique des solides

Kiréev, Physique des semi-conducteurs MIR

Vocabulaire Oscillations, pulsations, fréquences, conduction, résistance, capacités calorifiques, isolants, conducteur semi-conducteurs, dopage, zone de Brillouin, température de Debye, modèle d'Einstein, phonons, modèle de Drude, loi d'Ohm, gap, bandes, fonctions de Bloch, directions cristallines.

Exercices

1

16 Ondes 1 Généralités

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

Définition : On considère un milieu indéfini à l'équilibre . Sous une action extérieure , le milieu reçoit de l'énergie et quitte son état de repos, la perturbation est mesurée en chaque point du milieu par une amplitude fonction du temps.

$$y(x, t) \in \mathcal{R} \text{ ou } \in \mathcal{C}$$

16.1 Introduction : le cas du fil tendu.

Une corde vibrante est constituée de points matériels (masse m) reliés par un fil tendu (tension T) sans masse selon Ox .

Le mouvement des masses est déterminé par la tension T et le principe fondamental de la mécanique.

A l'instant t , par hypothèse, la position de la masse d'ordre n est :

$$\begin{pmatrix} x = na \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

Au repos, la corde est telle que $\forall t \forall n \quad y_n(t) = 0$.

La résultante des forces suivant la direction \perp soit Oy est obtenue trivialement :

$$F_{\perp}(n) = T \frac{y_{n+1} - y_n}{a} + T \frac{y_{n-1} - y_n}{a} = \frac{T}{a} (-2y_n + y_{n+1} + y_{n-1})$$

Solutions sinusoïdales (en \mathcal{C})

$$y_n(t) \propto \exp i(\omega t - \varphi_n)$$

Ces solutions sont telles que le mouvement de l'oscillateur n se déduit du mouvement de l'oscillateur $n - 1$ par un déphasage qui exprime un retard (une avance)

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_0 = n\varphi_0$$

avec le déphasage élémentaire φ_0 est défini à 2π près

On peut introduire le vecteur d'onde k tel que

$$k = \frac{\varphi_0}{a} \Rightarrow \varphi_n = k \cdot x_n \text{ et bien sûr } -\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$$

La relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{4T}{am}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

Etude du graphe $\omega(k)$ et domaine linéaire si ka est faible devant π soit l'approximation dite des grandes longueurs d'onde

$$\lambda \geq 2a$$

Pour les grandes longueurs d'onde le milieu est linéaire donc non dispersif :

$$k = \pm\omega/c \text{ avec } c = \left(\frac{Ta}{m}\right)^{1/2} \text{ avec } -\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$$

Si on introduit la masse linéique $\sigma = m/a$ alors

$$c = \left(\frac{T}{\sigma}\right)^{1/2}$$

Cas du fil continu -

On passe à la limite

$$a \rightarrow 0 \Rightarrow -\infty \leq k \leq \infty$$

] On retrouve l'équation d'onde $y(x, t)$ dans l'approximation linéaire :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \text{ équation I}$$

Solutions sinusoïdales :

$$y \propto \exp i(\omega t - kx) \Rightarrow \omega = \pm ck$$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

Remarque : dans le cas de la corde, l'onde est polarisée dans les directions transverses ou longitudinales soit trois directions de polarisation : la dynamique des ondes transverses est définie par la tension, celle des ondes longitudinales est conditionnée par le module d'Young du matériau.

16.2 La propagation de l'onde

Principe dynamique : principe de moindre action

Densité lagrangienne sur la corde tendue :

$$\text{avec } y_t = \frac{\partial y}{\partial t} \text{ et } y_x = \frac{\partial y}{\partial x} \quad \mathcal{L}_0(y, y_t, y_x) = \frac{1}{2}(\sigma y_t^2 - T y_x^2)$$

Equations de Lagrange pour l'onde $y(x, t)$

$$\sum_{x_i=t,x,y,z} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial y_{x_i}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial y}$$

Cette équation conduit à l'équation de propagation d'une onde dans un milieu non dispersif.

1. Densité d'Hamiltonien (densité linéique d'énergie)

$$\mathcal{H}_0(y, y_t, y_x) = y_t \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial y_t} - \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\sigma y_t^2 + T y_x^2)$$

L'énergie de l'onde à t vaut donc :

$$E(t) = \int \mathcal{H}_0 dx$$

2. Variable conjuguée de y ou densité de quantité de mouvement selon Oy

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial y_t} = \sigma y_t = \sigma \frac{\partial y}{\partial t}$$

3. Courant d'énergie associé à la propagation de l'onde selon Ox

$$j_x = j = -T \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x}$$

exercice -

Vérifier la dimension de j , c'est la puissance qui passe en x à t dans le sens positif.
Démontrer la conservation de l'énergie, soit :

$$\text{div}(j) = \frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial t}$$

16.3 Ondes progressives et ondes stationnaires

— Ondes progressives les différents points du milieu connaissent des différences de phase

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

En notation complexe

$$y(x, t) = A \exp i(\omega t - kx)$$

Courant d'énergie d'une onde progressive en x à t :

$$j = T k \omega A^2 \sin^2(\omega t - kx) \propto |A|^2$$

— Ondes stationnaires : les points du milieu sont en phase ou en opposition.

Exemple :

$$y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Les conditions aux limites du milieu : \Rightarrow quantification des vecteurs d'onde

Si par exemple, les points A et B des extrémités de la corde sont maintenus fixes

$$k = n \frac{\pi}{l} \Rightarrow \lambda = \frac{2l}{n} \Rightarrow \omega = n \frac{c}{l} \pi$$

— Interférences

Cas particulier : superposition de deux ondes de même fréquence en un point M

Intensité de l'onde détectée, ou courant d'énergie

$$I \propto |A|^2$$

— si les ondes sont cohérentes : Le déphasage φ est déterminé!

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi)$$

— si les ondes sont en phase : les amplitudes s'ajoutent

$$\varphi = 0 \Rightarrow I = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

— si les ondes sont en opposition : les amplitudes se soustraient

$$\varphi = \pi \Rightarrow I = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$$

— si les ondes sont incohérentes : φ est indéterminé! les intensités s'ajoutent

$$\forall \varphi \Rightarrow I = I_1 + I_2$$

Remarque : superposition de deux ondes cohérentes de fréquences voisines induit des battements

16.4 Dispersion

- Relation de dispersion dans un milieu parcouru par une perturbation :

L'équation dynamique sera a priori une équation aux dérivées partielles en x et t .

Par transformation de Fourier cette équation se traduira par une équation algébrique sur ω et k qu'on appelle équation de dispersion du milieu.

On choisit par convention :

$$\omega \geq 0 \text{ et } k \text{ algébrique}$$

- La relation de dispersion $\omega(k)$ détermine la dynamique du milieu par rapport aux ondes :

$$y(x, t) = \int_k g(k) \exp i(\omega t - kx) dk$$

- Si les conditions initiales : $y(x, t=0)$ sont connues alors $g(k)$ est déterminée par la T.F.

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_x y(x, 0) \exp i(kx) dx$$

- Onde monochromatique :

$$g(k) = A \delta(k - k_0) \text{ est la " distribution de Dirac " } = \frac{A}{2\pi} \int_x \exp i(kx) dk$$

en conséquence de quoi

$$y(x, t) = A \exp i(\omega_0 t - k_0 x)$$

- La propagation d'un paquet d'ondes permet de définir : la vitesse de phase et la vitesse de groupe

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Vocabulaire, références et exercices

Références

Alonso-Finn, Champs et Ondes, Inter-Editions

Vocabulaire Pulsations, fréquences, transformée de Fourier, analyse spectrale, nombre d'onde, vecteur d'onde. dispersion, interférences, phase, polarisation vitesse de phase de groupe.

Exercices

- 1 On donne une équation de propagation dans un milieu à 3D

$$\Delta y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k_0^2 y = 0$$

k_0 mesure l'inertie de l'onde dans ce milieu.

Construire la relation de dispersion et discuter la vitesse de phase et de groupe, étudier le cas $k_0 = 0$.

- 2 Calculer l'énergie d'une corde vibrante (σ, T) qui est le siège d'une onde stationnaire telle que :

$$y(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

dans le mode $\frac{1}{2}$ onde :

Etudier le courant d'énergie en fonction de x et t .

- 3 Soit une corde vibrante (σ, T) qui est le siège d'une onde progressive telle que :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t \pm kx)$$

Etudier le courant d'énergie en fonction de x et t , sens de propagation, intensité.

L'onde est incidente sur une extrémité ($x = 0$) qui n'est pas adaptée et une fraction f de l'énergie est réfléchi, construire l'onde résultante.

- 4 Une corde vibrante (σ, T) est le siège d'une onde progressive qui résulte de la superposition d'un mouvement suivant Oy et d'un autre suivant Oz de même amplitude mais déphasé de $\pi/2$

Etudier le mouvement de la corde.

Que se passerait-il si les lois de dispersion étaient différentes pour les déplacements selon Oy et Oz ?

- 5 A $t = 0$ une corde vibrante est pincée en son milieu puis abandonnée à une évolution libre sans vitesse initiale; déterminer $y(x, t)$

$$\begin{aligned} x \leq l/2 & \quad y(x, 0) = ax & \quad \text{et } \dot{y}(x, 0) = 0 \\ x \geq l/2 & \quad y(x, 0) = a(l - x) \end{aligned}$$

On recherchera la solution qui satisfait aux conditions initiales.

17 Ondes 2 : Acoustique

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

17.1 Généralités

Un système acoustique met en mouvement le fluide qui l'entoure ; cette perturbation est une onde acoustique dont la dynamique est celle d'un fluide (équations d'Euler ou de Navier Stokes) ; cependant les mouvements acoustiques autour de l'équilibre sont limités et la compression non négligeable !

En chaque point M, on définit les propriétés du fluide :

| | |
|-------------|--------------------------------|
| Densité | $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$ |
| Pression | $p = p_0 + \tilde{p}$ |
| Température | $T = T_0 + \tilde{T}$ |
| Vitesse | v |

A l'équilibre on observe :

$$\rho_0 \quad p_0 \quad T_0 \quad \vec{v} = 0$$

On traite le problème

- à l'ordre le plus bas par rapport aux perturbations (linéarisation)
- pour un liquide non-visqueux (pas de dissipation)
- chaque élément de fluide subit une transformation adiabatique réversible ; il est constamment à l'équilibre thermodynamique.

Dans ces conditions l'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -grad(p) - grad(U) \text{ avec } grad(U) = 0$$

La conservation de la masse impose :

$$\rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

La thermodynamique adiabatique et réversible impose

$$\tilde{\rho} = (\chi_S \rho_0) \tilde{p} \text{ et } \tilde{T} = \left(\frac{T_0 \alpha}{C_P/V} \right) \tilde{p} \quad (\text{voir paragraphe 3})$$

χ_S est la compressibilité adiabatique dans le cas réversible .

α est le coefficient de dilatation thermique.

C_P/V est la capacité calorifique par unité de volume.

Equation d'onde de D'Alembert :

Dans les 5 premières équations sur $(\vec{v}, \tilde{\rho}, \tilde{p})$, on élimine les variables $(\vec{v}, \tilde{\rho})$ pour construire l'équation sur (\tilde{p}) qui est l'équation d'une onde élastique non dispersive, non dissipative :

$$\Delta \tilde{p} - c^{-2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{p} = 0 \quad \text{avec } c^{-1} = \sqrt{\chi_S \rho_0}$$

Exercice : Vérifier la dimension physique de c

17.2 Potentiel des vitesses

Si le mouvement est irrotationnel, il existe un potentiel dont dérive les vitesses

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(\varphi) \quad \varphi(\vec{x}, t)$$

en conséquence de quoi la pression peut s'écrire :

$$\tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\rho_0 \dot{\varphi}$$

L'équation du mouvement en $\varphi(\vec{x}, t)$ peut être construite à partir des 5 équations dynamiques :

$$\Delta \varphi - c^{-2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Vitesse des ondes acoustiques

$$c^{-2} = \chi_S \rho_0$$

Application au gaz parfait :

$$\chi_S = \gamma^{-1} \chi_T$$

$$\chi_T = p_0^{-1} \quad \text{il s'en suit} \quad c = \sqrt{\frac{M}{\gamma R T_0}}$$

$$\rho_0 = M/V_0$$

Pour l'atmosphère (gaz parfait diatomique) :

$$T_0 = 300; M = 29g; R = 8,32 JK^{-1}; \gamma = \frac{C_p}{C_v} = 7/5 : \quad c = 340m/s$$

17.3 Energie et lagrangien pour l'acoustique linéaire

Le lagrangien libre de l'onde acoustique élastique peut être choisit en fonction du potentiel φ où en fonction des variables physiques du problème : $\vec{v}, \tilde{\rho}, \tilde{p}$

1. Densité de lagrangien $\mathcal{L}_0(\vec{x}, t)$

En fonction du potentiel on choisira :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{\rho_0}{2} ((\text{grad}(\varphi))^2 - c^{-2} (\dot{\varphi})^2)$$

En fonction des pressions et vitesse il s'écrit :

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\rho_0 v^2 - \chi_S (\tilde{p})^2)$$

La dynamique est celle du principe de moindre action (équations de Lagrange) qui conduit à l'équation d'onde sur le potentiel.

$$\Delta \varphi - c^{-2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

2. Densité d'hamiltonien (ou d'énergie) :

Par les équations canoniques, on définira \mathcal{H}_0 à partir de \mathcal{L}_0 :

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}(\rho_0 v^2 + \chi_S(\tilde{p})^2) = \frac{\rho_0}{2}(\text{grad}^2(\varphi) + c^{-2}(\dot{\varphi})^2)$$

3. Densité de courant d'énergie \vec{j}_e et le flux $\vec{j}_e d\vec{s}$

$$\vec{j}_e = \tilde{p} \vec{v}$$

Justification : La puissance des forces de surpression est :

$$dP = \vec{v} \cdot d\vec{f} = \tilde{p} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

exercice démontrer la conservation de l'énergie mécanique pour les ondes élastiques :

$$\text{div}(\vec{j}_e) = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial t}$$

Vérifier les dimensions de toutes les expressions ci-dessus.

17.4 Aspects thermodynamiques

L'onde n'est pas en équilibre isotherme et l'équation des adiabatiques linéarisée joue le rôle d'une équation d'état.

La thermodynamique conduit à deux équations sur les variations de pression, température et densité :

— l'équation d'état linéarisée fait intervenir les coefficients thermoélastiques

$$dT = \frac{1}{P\beta} dP + \frac{1}{V\alpha} dV$$

— L'autre hypothèse provient de la réversibilité isentropique.

$$dQ = 0 = C_P dT + h dP = \lambda dV + \mu dP$$

Avec les relations calorimétriques bien connues en thermodynamique :

$$\lambda = C_P \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \quad \text{et} \quad \mu = C_V \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V$$

Par ailleurs, la relation de Clapeyron s'écrit avec nos notations :

$$h = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

— On en déduira donc aisément que les variations de températures sont données par :

$$\frac{\tilde{T}}{T_0} = \alpha \left(\frac{V}{C_P} \right) \tilde{p} \quad \text{et} \quad \chi_S = \frac{C_V}{C_P} \chi_T = \gamma^{-1} \chi_T \quad \chi_T \sim p_0^{-1}$$

— Cette théorie élémentaire des ondes élastiques néglige :

| | |
|-----------------------------|---|
| La conduction de la chaleur | ⇒ irréversibilité : $\overrightarrow{\text{grad}}(T)$ |
| Les frottements visqueux | ⇒ transformation du travail en chaleur : $\eta \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ |
| Les termes non linéaires | ⇒ dispersion $\omega(k)$ |

L'amortissement et la dispersion peuvent être étudiés dans le livre « mécanique des fluides » de Landau et Lifchitz.

17.5 Aspects physiologiques

Seuil de l'audition toutes fréquences confondues

$$j_{ref} = 10^{-12} W.m^{-2}$$

Catégories des phénomènes sonores -

| | |
|--------------------|---------------------------------|
| domaine | ν en Hz |
| infra sons | $\nu < 20$ |
| sons | $20, < \nu < 20 \cdot 10^3$ |
| ultra et hypersons | $20 \cdot 10^3 < \nu < 10^{10}$ |

Intensité sonore en décibel

$$dB = 10 \log_{10} \left(\frac{j_e}{j_{ref}} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_{ref}} \right)$$

Seuil de la douleur à 500 Hz

$$Seuil = 180 \text{ dB} \quad \left(\frac{j_e}{j_{ref}} \right) = 10^{18}$$

Différences selon les milieux

$$\begin{aligned} \text{Atmosphère :} & \quad c = 340 \text{ m s}^{-1} \\ \text{Eau :} & \quad c = 1500 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

pour l'eau : $\rho_0 = 1g.cm^{-3}$ et $\chi = 2,310^{-9} Pa^{-1}$

17.6 Tuyaux et résonances

— Impédance acoustique d'un tuyau

C'est le rapport de la surpression au courant de matière en un point du tuyau sonore

$$Z = \frac{\tilde{p}}{I} \sim \frac{V}{I} \text{ en électricité}$$

$$\text{avec } I = \text{flux de matière} = \int \rho_0 \vec{v} \cdot d\vec{s} = \rho_0 S v$$

— Dans le cas d'une onde plane dans un tuyau (en négligeant les effets de bord)

$$Z = \pm Z_c = \pm \frac{c}{S}$$

— Réflexion sur une impédance Z

$$\frac{b}{a} = \frac{Z_c - Z}{Z_c + Z}$$

— Résonance d'un tuyau ouvert ou fermé

Ondes stationnaires à une dimension dans un tuyau :

fermé aux deux extrémités

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad \nu = n \frac{c}{2l} \text{ fondamental pour } n = 1 \text{ harmoniques } n = 2, 3, \dots$$

ouvert – fermé aux extrémités

$$l = (n + 1/2) \frac{\lambda}{2} \quad \nu = (n + 1/2) \frac{c}{2l} \text{ fondamental } n = 0 \text{ harmoniques } n=1, 2, \dots$$

— Propagation des ondes acoustiques à 3D

A trois dimensions la propagation est complexe, on observe la réflexion et réfraction sur les interfaces.

L'étude des ondes stationnaires dans des géométries simples, cylindriques ou sphériques, suppose la résolution de l'équation de Laplace :

$$\varphi(x, t) = \exp(i\omega t) \varphi(x) \Rightarrow \Delta\varphi(x) + k^2\varphi(x) = 0 \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

Les conditions aux limites imposent la « quantification » des fréquences

En symétrie sphérique, on a par exemple :

$$\varphi(r, t) = \frac{f(r - ct) + g(r + ct)}{r}$$

— La vibration des membranes

Vitesse des vibrations sur une membrane

$$c^2 = \frac{T}{\sigma}$$

exercice : vérifier la dimension physique de c

T est la tension superficielle (force /unité de longueur)

σ la densité surfacique de masse.

Etudier des modes de résonance d'une membrane cylindrique de rayon R (l'exercice 3).

17.7 Dispersion et absorption des ondes sonores

A voir Agrégation épreuve A en 1998.

Equation de Navier Stokes au 1er ordre par rapport aux perturbations :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad}(\tilde{p}) + \rho_0 \nu \Delta \vec{v}$$

par dérivation ($\partial/\partial t$ ou par (div)) on en déduit :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\text{grad}(\dot{\tilde{p}}) + \rho_0 \nu \Delta \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

soit

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = c^{-2} \Delta \vec{v} + \nu \Delta \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \text{avec } \text{div}(\vec{v}) = -\chi_s \dot{\tilde{p}}$$

Pour une onde monochromatique plane de pulsation ω la variation d'amplitude dans la direction de propagation est

$$\sim \exp(-\gamma x)$$

avec

$$\gamma = \frac{\omega \nu}{2 c^3}$$

ν est la viscosité cinématique, c est la célérité des ondes = $(\chi_s \rho_0)^{-1/2}$.

17.8 Acoustique musicale

Octaves des « physiciens »

| | |
|----|------|
| n | do |
| -1 | 16 |
| 0 | 32 |
| 1 | 64 |
| 2 | 128 |
| 3 | 256 |
| 4 | 512 |
| 5 | 1024 |
| 6 | 2048 |
| 7 | 4096 |
| 8 | 8192 |

Notes des « physiciens »

| note | $\nu/\nu_{\text{précédent}}$ | ν/ν_{do} |
|------|------------------------------|----------------|
| do | | 1 |
| ré | 9/8 | 9/8 |
| mi | 10/9 | 5/4 |
| fa | 16/15 | 4/3 |
| sol | 9/8 | 3/2 |
| la | 10/9 | 5/3 |
| si | 9/8 | 15/8 |
| do | 16/15 | 2 |

Le « la » des physiciens

$$\nu = \frac{5}{3} 256 = 426Hz$$

Le « la » de musiciens et du diapason

$$\nu = 440Hz$$

Vocabulaire, références et exercices

Références

Landau et Lifchitz, Mécanique des fluides, Mir 1970

Vocabulaire Pulsations, fréquences, transformation de Fourier, analyse spectrale, nombre d'onde, vecteur d'onde. Résonances . Limites de l'audition . Fréquence fondamentale et harmoniques.

Exercices

- 1 On considère une onde sonore plane qui se propagent dans la direction Ox et correspondant au seuil de l'audition à $500Hz$
: (reprendre les questions pour le seuil de la douleur)
Calculer la surpression qui s'exerce sur le tympan.
Calculer l'amplitude des vitesses des couches de l'atmosphère.
Vérifier que, dans les conditions, le terme $(v.grad)v$ de l'équation d'Euler est négligeable.
Calculer l'amplitude des excursions de température en faisant l'hypothèse que l'atmosphère est un gaz parfait.
- 2 Etudier la propagation du son dans une cavité sphérique et les modes résonants dans une sphère de rayon $R = 1m$ quand la source sonore est ponctuelle et placée à l'origine.
Application numérique.
- 3 On considère une peau tendue à la tension T ; la densité surfacique de cette peau est σ :
Etudier l'équation du mouvement perpendiculaire à la peau (Oz) et démontrer que c'est une équation d'onde de la forme :

$$\Delta z - \frac{\sigma}{T} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

Etudier les modes de vibration stationnaire d'une peau cylindrique tendue :
Les solutions en $z(r)$ sont des fonctions de Bessel.

- 4 Démontrer la conservation de l'énergie pour une onde élastique :

$$div(\vec{j}_e) = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial t}$$

- 5 Etudier les questions de cours de 1984 et 1998.

18 Electrodynamique 1

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

18.1 Equations de Maxwell

Théorie des interactions des particules chargées.

ρ \vec{j} sont les sources des champs \vec{E} , \vec{B}

qui agissent sur des charges qui en retour agissent sur ρ \vec{j}

\vec{E} est un vrai vecteur, \vec{B} est un pseudo-vecteur

Les unités du système International

μ_0 et c fixés par $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ et $c = 299\,792\,458,0$ m/s avec $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$

L'unité de charge est le coulomb et l'unité d'intensité est l'ampère.

— Les équations qui définissent la structure des champs indépendamment des charges :

$$\begin{aligned} \text{rot}(E) = -\frac{\partial B}{\partial t} & \text{ équivalent à} & E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad}(V) \\ \text{div}(B) = 0 & & B = \text{rot}(A) \end{aligned}$$

— Les équations qui définissent l'action des sources du champ et l'action du milieu sur les champs :

$$\begin{aligned} \text{rot}(H) = j + \frac{\partial D}{\partial t} & \text{ avec} & B = \mu_0(H + I) \\ \text{div}(D) = \rho & & D = \epsilon_0 E + P \end{aligned}$$

Système de Gauss rationalisé : tous les champs s'expriment dans la même unité $\frac{Q^2}{L}$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi} \text{ et } \mu_0 = 4\pi \text{ et } x = (x_0 = c t, \vec{x})$$

Retour sur la structure des champs :

$$\begin{aligned} \text{rot}(E) &= -\partial_0 B \\ \text{div}(B) &= 0 \end{aligned}$$

— L'action des sources et l'action de la matière :

$$\begin{aligned} \text{rot}(H) = c^{-1}j + \partial_0 D & & B = 4\pi(H + I) \\ \text{div}(D) = \rho & & D = (4\pi)^{-1}(E + P) \end{aligned}$$

Unité de charge : la charge de l'électron $e = \sqrt{\hbar c \alpha}$ où $\alpha = 1/137,0$ est la constante de structure fine sans dimension.

— « Equations de Maxwell symétrisées » , électriques et magnétiques

$$\begin{aligned} \text{rot}(E) &= -c^{-1}j_m - \partial_0 B & \text{rot}(H) &= c^{-1}j + \partial_0 D \\ \text{div}(B) &= \rho_m & \text{div}(D) &= \rho \end{aligned}$$

remarque : les charges magnétiques seraient des pseudo-scalaires (type produit mixte).

— Action des champs sur les charges et les courants : la force de Lorentz généralisée

$$\text{par unité de volume } f = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B} + \rho_m \vec{B} - j_m \wedge \vec{E}$$

18.2 Equations de propagation des potentiels dans le vide

Notation : le d'Alembertien \square

$$\square = \Delta - \partial_0^2$$

Dans la jauge de Lorentz, les potentiels de Liénard-Wiechert sont solution de :

$$\square V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \square A = -\mu_0 j$$

Equations de propagation des champs dans le vide

1. Dans la jauge de Lorentz :

$$\square E = \text{grad}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 j) \quad \square B = -\text{rot}(\mu_0 j)$$

2. Le cas des champs statiques :

Un système est constitué de charges au repos ou de courants stationnaires.

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \text{ et } \text{div}(\vec{j}) = 0$$

Electrostatique et magnétostatique se séparent en deux théories indépendantes :

On obtient les équations linéaires de Poisson :

$$\begin{aligned} \Delta V &= -\varepsilon_0^{-1} \rho \\ \Delta A &= -\mu_0 j \end{aligned}$$

18.3 Le cas fondamental

La charge ponctuelle à symétrie sphérique (sans structure interne) dans le vide³

$$\Delta V = 0 \Rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} r^{-1} + (\text{cte} = 0)$$

On en déduit le champ électrique coulombien et aussi la Loi de Biot et Savart pour la magnétostatique .

3. $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$.

18.4 Développement multipolaire

Développement du potentiel électrostatique V (idem pour le potentiel vecteur \vec{A})

Le système considéré est constitué de n charges statiques q_i en \vec{OP}_i : (atomes, molécules ou autres).

Question : Quel est le potentiel V en M à grande distance ?

$$|\vec{OM}| \gg |\vec{OP}_i|$$

Nous utilisons la convention d'Einstein

Soit : $i = 1, \dots, n$ et $k = 1, 2, 3$ $\vec{OP}_i = ((x_i)_k)$

$$\vec{OM} = \vec{x} \text{ avec } r^2 = \sum x_k^2$$

Le développement de Taylor en r_{i-1} conduit avec ces notations à :

$$r_i^{-1} = r^{-1} + \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_k} (-x_i)_k + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x_k \partial x_l} (-x_i)_k (-x_i)_l + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 r^{-1}}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m} (-x_i)_k (-x_i)_l (-x_i)_m + \dots$$

Introduisons les moments multipolaires électriques

$$Q = \sum q_i$$

$$P_k = \sum q_i (x_i)_k$$

$$D_{kl} = \sum q_i (x_i)_k (x_i)_l$$

$$M_{klm} = \sum q_i (x_i)_k (x_i)_l (x_i)_m$$

etc....

Ces moments sont des tenseurs symétriques définis sur la distribution des charges.

Avec ces moments, le potentiel s'écrit :

$$V(M) = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \left\{ Q r^{-1} - \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_k} P_k + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x_k \partial x_l} (D)_{kl} - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 r^{-1}}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m} (M)_{klm} + \dots \right\}$$

Analyse des coefficients des multipôles :

$$u_k = x_k/r$$

$$\partial_k r^{-1} = r^{-2} (-u_k)$$

$$\partial_k \partial_l r^{-1} = r^{-3} (3u_k u_l - \delta_{kl})$$

$$\partial_k \partial_l \partial_m r^{-1} = r^{-4} (-5u_k u_l u_m + 3u_k \delta_{lm} + 3u_m \delta_{kl} + 3u_l \delta_{km}) \dots$$

Applications Calcul de potentiels dipolaire, quadripolaire, structure des surfaces équipotentielles et des lignes de champ.

Champ d'une charge ponctuelle à symétrie sphérique (sans structure interne)

$$\Delta] V = 0 \Rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} r^{-1} \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} r^{-2} \vec{u}$$

Exercices -

Calcul de potentiels dipolaires, quadripolaires, étude des surfaces équipotentiels et des lignes de champ.

18.5 Potentiels retardés

Un système de charges est en mouvement : atomes, molécules, systèmes macroscopiques ou autres dans une région limitée de l'espace :

$$|\overrightarrow{OP_i}| = r_i < a$$

Loin des charges ($r \gg a$) les potentiels (dans la jauge de Lorentz) vérifient les équations linéaires :

$$\square V = 0 \quad \square A = 0$$

Cas fondamental une charge ponctuelle en O qui varie dans le temps telle que $q(t)$
La solution est

$$V \approx \frac{q(t - r/c)}{r}$$

En général, elle sera par linéarité :

$$V \approx \int \frac{\rho(t - r/c)}{r} d^3x \quad A \approx \int \frac{j(t - r/c)}{r} d^3x$$

18.6 Approximation des régimes quasistationnaires

$a \ll ct \ll r$ approximation des grandes longueurs d'onde

$$a \approx ct \ll r \text{ régime HF}$$

Propagation des ondes électromagnétiques -

Equation de d'Alembert loin des sources dans le vide

$$\square \vec{B} \text{ ou } \vec{E} = 0 \quad \varepsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$$

Dans le vide infini :

$$\vec{E} = \vec{E}_T \exp i(\omega t - \vec{k}\vec{x})$$

$\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ forment un trièdre direct

la vitesse de propagation de la phase est c

la propagation a lieu sans dispersion et $\forall \omega$

Dans un guide vide dont les parois sont des conducteurs parfaits -
 Etude de l'effet de peau ...)

$$\square (\vec{B}, \vec{E}) = 0$$

Les conditions aux limites sur les surfaces parfaitement conductrices :

$$B_N = 0, E_T = 0$$

à cause de :

$$\text{div} B = 0 \quad \text{rot}(E) = -\partial_0 B$$

On distingue les ondes

1. TE transverses électriques ($(\vec{E} \cdot \vec{k}) = 0$)
2. TM transverses magnétiques ($(\vec{B} \cdot \vec{k}) = 0$)
3. TEM transverses ($(\vec{B} \cdot \vec{k}) = 0$ et $(\vec{E} \cdot \vec{k}) = 0$)

Application : Le guide à section rectangulaire (réf par exemple J Ph Perez page 590)

Impédance dans un guide

$$Z \approx \frac{V}{I} \approx \frac{E}{H}$$

dans le vide

$$Z \approx \mu_0 c = (\varepsilon_0 c)^{-1} = 377,0 \Omega$$

Propagation de l'énergie électromagnétique -
 dans le vide en présence de charges et de courants

$$\frac{\partial \omega_{em}}{\partial t} = -(jE + \text{div}(E \wedge H)) \quad \text{avec } \delta \omega_{em} = E \delta D + H \delta B$$

Soit pour les milieux linéaires :

$$\omega_{em} = \frac{1}{2}(ED + HB)$$

Le flux d'énergie associé à la propagation de l'onde E.M. est le vecteur de Poynting :

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

Le flux du vecteur de Poynting \vec{P} à travers une surface est une puissance .

Polarisation des ondes EM -

Dans le vide infini, on a deux directions indépendantes de polarisation transverses (Ox et Oy) :

$$\vec{E} = \vec{E}_{x,y} \exp i(\omega t - kz)$$

- Les équations de Maxwell fixent \vec{B} en fonction de \vec{E} .
- L'intensité de l'onde plane polarisée selon Ox et monochromatique est

$$I = |P| = \frac{1}{\mu_0 c} E_x^2 \text{ en moyenne dans le temps } \langle I \rangle = \langle |P| \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0 c} E_{0x}^2$$

- La direction de polarisation est conventionnellement prise comme celle de \vec{E} .
 E_x, E_y sont en principe complexes et comporte un déphasage arbitraire (indépendants).

1. s' il n'y a pas de déphasage, la polarisation est rectiligne : onde peut être obtenue à partir d'une onde polarisée selon Ox sur laquelle on effectue une rotation
2. si le déphasage est de $\pm \frac{\pi}{2}$ avec même amplitude, on a des polarisations circulaires D ou G .
3. Si l'onde est non-polarisée (ou partiellement), on a une superposition incohérente d'ondes avec des polarisations quelconques.

Les ondes polarisées selon Ox, Oy ou circulaires D, G constituent deux bases utiles pour représenter toutes les ondes se propageant selon Oz .

— Le flux d'énergie associé est proportionnel au module carré des amplitudes respectives :

$$P \propto (|E_{0x}|^2 + |E_{0y}|^2) \propto (|E_{0D}|^2 + |E_{0G}|^2)$$

Les amplitudes se calculent par projection (produit hermitique) sur les vecteurs unitaires des bases :

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} E_{0x} &= E_0 \vec{e}_x \\ E_{0D} &= E_0 \vec{e}_D \end{aligned}$$

Applications

- Analyse avec un polarimètre
- Action d'une lame quart d'onde.

18.7 Rayonnement

Par principe relativiste, une charge accélérée rayonne du champ électromagnétique !

Le rayonnement dipolaire de Hertz -

(passage des équations en coordonnées sphériques)

Soit une ligne de courant rectiligne de longueur a parallèle à Oz et parcourue par un courant spatialement uniforme tel que :

$$j = j_0 \cos(\omega t)$$

Les charges se posent aux extrémités de la ligne et il se crée un dipôle de moment $p(t)$ tel que

$$p(t) = a \frac{j_0 s}{\omega} \sin(\omega t)$$

1. Calcul du potentiel scalaire au premier ordre en r^{-1} :

$$V = \frac{\cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\dot{p}}{rc} \right) \text{ pris à } (t - r/c)$$

2. Calcul du potentiel vecteur

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\dot{p}}{rc} \right) \vec{k} \text{ pris à } (t - r/c)$$

3. Vérification de la condition de Lorentz
4. Calcul des champs à grande distance : \vec{E} et \vec{H}

5. Conclusions : calcul du vecteur de Poynting et de la puissance rayonnée par le dipôle

$$dP_{\text{uissance}} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} (\ddot{p})^2 \sin^2(\theta) d\Omega \quad P_{\text{uissance}} = \frac{\mu_0}{6\pi c} (\ddot{p})^2$$

Applications : par exemple réf J. Ph. Pérez

— Rayonnement d'une antenne demi-onde : pages 367

— Rayonnement des électrons atomiques : section efficace de Thomson ... pages 374

18.8 Approche lagrangienne de la force de Lorentz

Soit une charge ponctuelle non relativiste dans un champ E.M statique .

(Ref Landau théorie des champs : page 67)

Soit les potentiels électromagnétiques $(V(\vec{x}, t), \vec{A}(\vec{x}, t))$

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}) = \frac{mv^2}{2} + e (\vec{v} \cdot \vec{A} - V)$$

L'application des équations de Lagrange conduit à l'équation du mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \vec{E} + e \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{avec } \vec{p} = m\vec{v}$$

Intermédiaires du calcul :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + e\vec{A} \\ (v.grad) &= v_x \frac{\partial}{\partial x} + \dots \\ \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (v.grad)\vec{A} \\ \vec{grad}(v.A) &= (v.grad)\vec{A} + \vec{v} \wedge \vec{rot}(A) \end{aligned}$$

L'hamiltonien s'écrit (application des équations canoniques)

$$\mathcal{H} = \frac{mv^2}{2} + eV = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + eV \quad \text{ou plutôt } (\mathcal{H} - eV) - \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 = 0$$

18.9 Questions à voir

1. Transformations du champ (E, B) dans un changement de référentiel galiléen : (Réf Landau théorie des champs : page 87) (Réf J Ph Perez : page 179)
2. Rayonnement magnéto-dipolaire (Réf Landau théorie des champs : page 232) (Réf J Ph Perez : page 380)
3. Invariance de jauge (Réf Landau théorie des champs : page 71) (Réf J Ph Perez : page 191)
4. Interaction avec les milieux conducteurs ; conditions aux limites sur une paroi conductrice. Effet de peau ; (Réf (J. Ph Perez : page 295)

Vocabulaire, références et exercices

Références

Landau et Lifchitz, Théorie des champs Mir 1970

Jackson J.D, Classical electrodynamics

Jean Ph. Perez, Electromagnétisme Masson 1990

Vocabulaire Potentiel vecteur et scalaire, potentiels retardés de Liénard Wiechert. Guides d'ondes ... Dispersion. Rayonnement électromagnétique (dipolaire électrique, magnétique quadripolaire ...) Polarisation. Densité d'énergie électromagnétique, Vecteur de Poynting. Invariance de jauge. Transformations du champ EM dans un changement de référentiel galiléen. Effet de peau.

Exercices

1 Calcul du potentiel électrostatique à l'infini d'une distribution de charges quadripolaires

2 Calculez les potentiels puis les champs électriques et magnétiques statiques d'un dipôle :

$$V \propto \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{r^2} \quad A \propto \frac{\vec{m} \wedge \vec{u}}{r^2}$$
$$\vec{E} \propto r^{-3}(3(\vec{p}\vec{u})\vec{u} - \vec{p}) \quad \vec{B} \propto r^{-3}(3(\vec{m}\vec{u})\vec{u} - \vec{m})$$

3 Emission dipolaire magnétique (J Ph Perez Electromagnétisme)

Une spire est parcourue par un courant alternatif de pulsation ω : étude du rayonnement.

4 Rayonnement du dipôle : Vérifiez que les expressions de V et A ci-dessous satisfont à la condition de Lorentz

$$V = \frac{\cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\dot{p}}{rc}\right) \quad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\dot{p}}{rc}\right) \vec{k} \quad \text{à } (t - r/c)$$

5 Intensité d'une onde après un polariseur de direction θ par rapport à Oz :

1. si l'onde est polarisée circulairement
2. si l'onde est polarisée rectilignement selon oz
3. si l'onde est non-polarisée

19 Electrodynamique 2

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

19.1 Equations de Maxwell

Système International
Structure des champs :

$$\begin{array}{ll} \text{rot}(E) = -\partial_t B & \text{équivalent à} \\ \text{div}(B) = 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} E = -\partial_t A - \text{grad}(V) \\ B = \text{rot}(A) \end{array}$$

19.2 Equations dans les milieux matériels

Equations qui définissent l'action des sources et l'action de la matière dans les milieux non-conducteurs, non-magnétiques, linéaires et isotrope : soit transparents

$$\text{avec} \quad I = 0 \quad P = \varepsilon_0 \chi E$$

$$\begin{array}{ll} \text{rot}(H) = 0 + \partial_t D & \Rightarrow B = \mu_0(H + I) = \mu_0 H \\ \text{div}(D) = 0 & \Rightarrow D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0(1 + \chi)E = \varepsilon_0 \varepsilon E \end{array}$$

La permittivité relative χ peut être un nombre complexe (cas d'une absorption).
L'équation de d'Alembert s'écrit sur E :

$$[\Delta - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}] E = 0$$

$$\text{avec} \quad n = \sqrt{\varepsilon} \quad \text{et} \quad v = \frac{c}{n} \quad \text{avec} \quad n^2 - 1 = \chi$$

n est l'indice du milieu, il n'a pas de direction privilégiée quand le milieu est isotrope.

L'onde plane s'écrit en général :

$$E = E_0 \exp -i(\omega t - \vec{k}\vec{x}) \quad \text{avec} \quad k v = \frac{kc}{n} = \pm \omega$$

Si l'indice est complexe (\exists déphasage de P par rapport à E), l'onde est absorbée par le milieu.

La relation de dispersion $k(\omega)$ caractérise le milieu transparent.

$$\omega = \frac{kc}{n} \quad n(\omega) \text{ définit la relation de dispersion}$$

19.3 Une théorie élémentaire de la dispersion

Le mouvement des électrons atomiques soumis à un champ EM extérieur permet de justifier la loi de Lorentz-Lorenz

$$[n] = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{\chi}{\chi + 3} = \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\beta\omega}$$

ω_0 est la fréquence de résonance des électrons, m leur masse, N est leur densité volumique (on peut envisager plusieurs fréquences de résonance) β décrit l'amortissement du mouvement des électrons par la dissipation de l'énergie et éventuellement, le rayonnement de freinage.

On distingue

La dispersion normale n est réel et le milieu est transparent.

$$\begin{array}{ll} \omega < \omega_0 & n \text{ croît avec } \omega \quad \text{formule empirique de Cauchy : } n = n_0 + B\lambda^{-2} + C\lambda^{-4} \\ \omega > \omega_0 & n \text{ croît avec } \omega \quad \text{formule empirique (domaine X) : } n = 1 - B\lambda^2 \end{array}$$

La dispersion anormale dans la bande d'absorption

$$\text{pour } \omega \approx \omega_0 \quad n(\omega) = \text{Réal}(n) \text{ décroît avec } \omega$$

19.4 Les milieux conducteurs non-magnétiques et isotropes

dans le système international

Structure des champs :

$$\begin{array}{ll} \text{rot}(E) = -\partial_t B & \text{équivalent à} \quad E = -\partial_t A - \text{grad}(V) \\ \text{div}(B) = 0 & B = \text{rot}(A) \end{array}$$

Equations qui définissent l'action de la matière : avec $j = \gamma E$

$$\begin{array}{ll} \text{rot}(H) = j + 0 & \text{avec} \quad B = \mu_0(H + 0) \\ \text{div}(D) = 0 & D = \varepsilon_0 E + 0 \end{array}$$

γ est la conductivité du milieu supposée élevée.

$$\Delta E = \gamma \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad \Rightarrow k^2 = -i\omega \mu_0 \gamma \quad \Rightarrow k = (1 - i) \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \gamma}{2}}$$

On en déduit la distance de pénétration de l'onde dans le conducteur (\sim un plasma) :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \gamma}} \rightarrow 0 \text{ quand } \omega \rightarrow \infty$$

Théorie microscopique

Le conductivité du milieu est grande si le nombre de charges libres est grand par unité de volume soit $N \sim 10^{23} \gg 1$. Les charges mises en mouvement par le champ \vec{E} sont ralenties par des forces de frottement selon l'équation du mouvement

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + f\vec{v} = q\vec{E}$$

Par unité de volume la densité de courant limite est

$$\vec{j} = Nq\vec{v} = \frac{q^2 N}{f} \vec{E} \quad \text{soit } \gamma = \frac{N q^2}{f}$$

19.5 Ondes électromagnétiques dans les plasmas

Le plasma est un milieu conducteur particulier où les charges q sont libres (frottement négligeable) quand le milieu reste globalement et localement neutre :

Retour sur les équations qui définissent l'action de la matière :

$$\begin{array}{lcl} j = \gamma E & \text{avec} & I = 0 \\ \rho = 0 & & P = 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} B = \mu_0 H \\ D = \epsilon_0 E \end{array}$$

γ est la conductivité (complexe) du milieu, elle est « grande » car les charges sont peu inertes ; dans un plasma, les charges sont libres mais en densité relativement réduite.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E} \quad \gamma = i \frac{Nq^2}{m\omega}$$

$$\text{rot}(H) = j + \partial_t D \Rightarrow \Delta E = \mu_0 \partial_t (j + \epsilon_0 \partial_t E) \Rightarrow \square E = \mu_0 \gamma \partial_t E$$

$$-k^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = +\mu_0 \frac{Nq^2}{m} \quad k = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_P^2}$$

Avec la fréquence plasma telle que :

$$\omega_P = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}$$

Il y a donc deux régimes

- $\omega < \omega_P$ l'indice est imaginaire (absorption)
- $\omega > \omega_P$ il y a dispersion puis à très haute fréquence le milieu est transparent.

19.6 La réfraction et biréfraction

– Réfraction sur un milieu transparent vitreux, isolant, isotrope (lois de Descartes)

1. La continuité de la phase conduit aux lois de Descartes

$$i = i' \quad \sin(i) = n \sin(t) \quad \text{et} \quad n^2 - 1 = \chi(\omega)$$

2. Coefficients de Fresnel :

— Continuité des champs sur une interface vitreuse caractérisée par l'absence de charges et de courants mais la présence d'une polarisation

$$\Delta B_n = 0 \quad \Delta H_t = 0 \quad \Delta D_n = 0 \quad \Delta E_t = 0 \quad \Delta E_n \neq 0$$

— si la polarisation (direction E) est perpendiculaire au plan d'incidence (Oz, Ox) :

$$R_{\perp} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\cos(i) - n \cos(t)}{\cos(i) + n \cos(t)} = \frac{\sin(t-i)}{\sin(t+i)} \quad T_{\perp} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2 \cos(i)}{\cos(i) + n \cos(t)} = \frac{2 \sin(t) \cos(i)}{\sin(t+i)}$$

— si la polarisation est parallèle au plan d'incidence :

$$R_{//} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\cos(t) - n \cos(i)}{\cos(t) + n \cos(i)} = \frac{tg(t-i)}{tg(t+i)} \quad T_{//} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2 \cos(i)}{\cos(t) + n \cos(i)} = \frac{2 \cos(i) \sin(t)}{\sin(t+i) \cos(i-t)}$$

— équations en incidence normale la polarisation est \perp au plan d'incidence :

$$\begin{array}{ll} \text{transition } 1 \rightarrow n & R_{//} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{1-n}{1+n} \quad T_{//} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2}{1+n} \\ \text{transition } n \rightarrow 1 & R_{//} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{n-1}{1+n} \quad T_{//} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n}{1+n} \end{array}$$

3. Réfraction sur un milieu bi-réfringent (isolant, anisotrope)⁴

Equations qui définissent l'action des sources et l'action de la matière :

$$\begin{array}{ll} \text{rot}(H) = 0 + \partial_t D & \text{avec} \quad B = \mu_0(H + 0) \\ \text{div}(D) = 0 & D = \varepsilon_0(1 + \chi)E = \varepsilon_0 \varepsilon E \end{array}$$

La permittivité relative est une matrice symétrique éventuellement complexe (cas d'une absorption) qui peut être diagonalisée (directions principales axes 1,2,3) :

$$\text{rot rot}(E) = -\mu_0 \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} \quad \text{avec } D = \varepsilon_0 \varepsilon E$$

4. pour une onde plane de vecteur d'onde \vec{k}

$$\begin{array}{l} \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = -\mu_0 \omega^2 \vec{D} \quad \text{avec } \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \\ \vec{D} \perp \vec{k} \quad \vec{H} \perp \vec{D} \quad \vec{H} \perp \vec{k} \quad \vec{H} \perp \vec{E} \quad \vec{E} \vee \vec{k} \quad \vec{E} \vee \vec{D} \end{array}$$

\vec{D} est conventionnellement la direction de polarisation, si l'onde est polarisée selon l'axe principal 1 alors on a

$$k_1 = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1}$$

La propagation s'effectue dans le plan perpendiculaire (celui des axes 2,3) avec la vitesse de phase

$$v_1 = \frac{\omega}{k_1} = \frac{c}{n_1} \quad \text{avec } \sqrt{\varepsilon_1} = n_1$$

Les vitesses de phases sont différentes selon l'état de polarisation de l'onde

Le cas de la biréfringence -

Si on pose $v_1 = \frac{c}{n_1}$ avec $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$, les équations ci-dessus deviennent

$$\left(1 - \frac{v^2}{v_i^2}\right) E_i - (\vec{E} \cdot \hat{k}) \hat{k}_i = 0$$

C'est un système de 3 équations linéaires homogènes où \hat{k} est unitaire dans la direction de propagation de la phase. Ces équations imposent une relation entre le carré de la vitesse de phase v^2 , la direction \hat{k} de propagation de la phase. La direction de polarisation est fixée pour chaque solution; dans chaque direction, il y a deux vitesses et deux polarisations définies.

Attention : la direction du rayon lumineux n'est pas celle de \hat{k} mais plutôt celle de \hat{r}

$$\hat{r} \propto \vec{E} \wedge \vec{H} \neq \vec{D} \wedge \vec{H}$$

Lames demi-onde et quart d'onde.

Ces lames sont taillées dans des milieux uniaxes (tels que $n_1 = n_2 \neq n_3$), sont utilisées en incidence normale, les propagations se font dans la direction d'incidence mais avec une différence de phase entre les deux polarisations. L'axe optique (Ox_3) est parallèle aux faces de la lame.

4. Réf série Schaum : optique cours et problèmes

19.7 Réflexion sur un milieu conducteur parfait

— Continuité de la phase conduit aux lois de Descartes pour la réflexion

$$i = i'$$

— Coefficients de réflexion : la continuité des champs sur une interface parfaitement conductrice caractérisée par la présence de charges, de courants en surface et par l'absence des champs \vec{E} \vec{B} à l'intérieur du conducteur.

$$\begin{array}{ll} B_n = 0 & H_t \neq 0 \\ D_n \neq 0 & E_t = 0 \end{array} \quad \sim \text{limite } n = \infty$$

$$\begin{array}{l} R = \frac{E_r}{E_i} = -1 \\ T = 0 \end{array}$$

Vocabulaire, références et exercices

Références

- Landau et Lifchitz, Théorie des champs, Mir 1970
Jean Ph. Perez & al, Electromagnétisme, Masson 1990
Schaum, Optique : Cours et problèmes

Vocabulaire Propagation, indice. Dispersion de la lumière. Milieux anisotropes, biréfringence. Polarisation avec des lames biréfringentes. Lames demi-onde, quart d'onde. Fréquence plasma, effet de peau. Dichroïsme.

Exercices

1 Optique

- Rappeler la construction des rayons lumineux à l'interface entre le vide et un milieu isotrope d'indice n : construction de Huyghens.
- Soit une interface entre le vide ($z > 0$) et un cristal biréfringent uniaxe ($z < 0$) ; l'axe de symétrie est Oy et la matrice des permittivités relatives s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}$$

Calculer les déphasages des ondes transmises en incidence normale (selon Oz) lors de la traversée d'une lame d'épaisseur " e " par des ondes incidentes de polarisation $0x$ ou $0y$.

- Etudier la réfraction en incidence oblique : montrer qu'il y a une double réfraction.

20 Guide d'onde électromagnétique

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

20.1 Introduction

Le guide est un cylindre creux rempli d'un isolant linéaire et homogène de permittivité ε et de perméabilité μ . Les champs E et B sont confinés dans l'isolant et se propagent selon Oz

$$B = \mu H \text{ et } D = \varepsilon E$$

Des courants et charges superficiels accompagnent les champs sur les faces intérieures des conducteurs supposés parfaits .

Les équations de Maxwell (rappels) dans l'isolant :

$$\text{rot}(E) = - \partial_t B \quad \text{et} \quad \text{rot}(H) = 0 + \partial_t D$$

On considère des ondes monochromatiques de pulsation fixée ω , alors en notation complexe :

$$\partial_t = - i\omega \text{ convention de la MQ}$$

Conséquences :

$$\text{rot}(E) = +i\omega\mu H \quad \text{et} \quad \text{rot}(H) = -i \omega\varepsilon E$$

On considère des ondes planes progressives se propageant dans le sens de Oz , de la forme :

$$(\vec{E}, \vec{H}) \propto \vec{X}(x,y) \exp(-i\omega t + ikz)$$

On en déduit l'équation (de d'Alembert) vérifiée par la fonction d'onde transverse, $X(x, y)$:

$$\left\{ \frac{\partial_2}{\partial x^2} + \frac{\partial_2}{\partial y^2} + (\varepsilon\mu\omega^2 - k^2) \right\} \vec{X}(x, y) = 0$$

C'est un équation d'onde stationnaire à 2D dont les solutions sont quantifiées par les conditions aux limites dans la section du guide. Appelant k_T les valeurs propres quantifiées du laplacien transverse plus précisément

$$\frac{\partial_2}{\partial x^2} + \frac{\partial_2}{\partial y^2} \approx -k_T^2 \quad \omega^2 = c^2(k^2 + k_T^2)$$

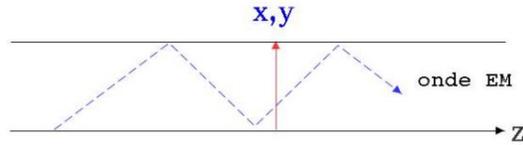
On en déduit que la pulsation du photon dans le guide qui suit la loi de dispersion d'une particule relativiste «massive»

$$\omega^2 = c^2(k^2 + k_T^2)$$

La masse de la particule (photon guidé) n'est autre que : $m_\gamma = \frac{\hbar}{c} k_T$

Puisqu'il y a différentes polarisations des photons (TM ou TĒ ou TME) dans le guide, il existe un spectre de masses pour chaque type d' onde.

La masse a alors une origine géométrique due à la «friction» sur les parois : A cause du principe d'Heisenberg , l'onde ne peut se déplacer parfaitement dans l'axe du guide, alors qu'une particule classique le pourrait.



figure

k_T est l'inverse de la longueur compton du photon "massif" dans le guide .

La vitesse de groupe de l'onde devient nulle quand le photon est au repos $k = 0$ ce qui est attendu (voir ci dessous) et la vitesse de phase diverge (elle n'est plus observable).

Les ondes guidées (massives) se dispersent (voir la loi de dispersion).

Remarque : Seules les particules de masse nulle ne se dispersent pas (photon dans le vide ∞) c'est le cas des photons provenant de galaxies lointaines...

Etudier le cas statique : $k = 0$.

20.2 Discussion

On distingue deux types de polarisation de ces ondes

- Les ondes TM ou transverses magnétiques sont telles que le champ H est perpendiculaire à la propagation (partout et quel que soit t).
 - Les ondes TE ou transverses électriques sont telles que le champ E est perpendiculaire à la propagation (partout et quel que soit t).
1. pour les ondes TE, on a une relation linéaire entre les champs transverses :

$$\omega\mu \times \vec{H}_T = \vec{k} \wedge \vec{E}$$

Ces champs sont proportionnels et en phase comme dans le vide.

$$\frac{E_T}{H_T} = Z = \frac{\omega\mu}{k}$$

Pour les TE il existe un champ magnétique longitudinal parallèle à Oz

2. pour les ondes TM, on a une relation linéaire entre les champs transverses :

$$\omega\varepsilon \times \vec{E}_T = \vec{k} \wedge \vec{H}$$

Et donc ces champs sont proportionnels et en phase.

$$\frac{E_T}{H_T} = Z = \frac{k}{\varepsilon\omega}$$

Pour les TM il existe un champ électrique longitudinal parallèle à Oz

Applications : accélération des faisceaux de particules.

20.3 Cas guide à section rectangulaire

Le guide est un cylindre creux rempli d'un isolant linéaire; la section du guide est définie par :

$$0 < x < a \quad 0 < y < b \quad -\infty < z < \infty$$

Les conditions aux limites sur les conducteurs sont : $H_{\perp} = 0$ et $E_{\parallel} = 0$

$$x = 0 \text{ ou } x = a \quad \forall y \Rightarrow \quad H_x = 0 \text{ et } E_y = E_z = 0$$

$$y = 0 \text{ ou } y = b \quad \forall x \Rightarrow \quad H_y = 0 \text{ et } E_x = E_z = 0$$

Ces conditions aux limites imposent , par exemple pour les TE

$$\vec{E} \propto \begin{pmatrix} +k_2 \cos(k_1 x) \sin(k_2 y) \\ -k_1 \cos(k_1 x) \sin(k_2 y) \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\omega t + ikz)$$

Avec l'équation de dispersion $\omega(k)$

$$k_1^2 + k_2^2 + k^2 = \varepsilon\mu \omega^2 \quad \omega^2 \geq c^2 \min(k_1^2 + k_2^2)$$

Avec pour satisfaire les conditions aux limites :

$$k_1 = n \left(\frac{\pi}{a} \right) \quad \text{et} \quad k_2 = m \left(\frac{\pi}{b} \right)$$

Le guide ne propage pas les ondes de fréquence trop faible, c'est un filtre passe haut.

$$\omega \geq \omega_c = c \pi \min(a^{-1}, b^{-1})$$

Les fréquences très élevées sont, en principe, coupées par les imperfections des parois.

Les vitesses de phase et de groupe des ondes sont :

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} \quad v_g = c \frac{kc}{\omega} = c \sqrt{1 - \frac{(k_2^2 + k_1^2) c^2}{\omega^2}}$$

Vocabulaire, références et exercices

Références

Mécanique : Landau et Lifschitz

Théorie des champs : Landau et Lifschitz

Vocabulaire Guide d'onde, conditions aux limites d'un conducteur, supraconducteur, effet de peau, résonance, amortissement, ondes évanescentes, cavités résonantes.

Exercices

- 1 Construire les ondes électromagnétiques qui se propagent dans un guide indéfini de section rectangulaire a, b .
- 2 Etudier les modes de résonance d'une cavité parallélépipédique a, b, c .
- 3 Construire les ondes électromagnétiques qui se propagent dans un guide indéfini à section circulaire de rayon R . Etudier les fonctions spéciales de Bessel.

21 Optique 1

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

21.1 Approximation Eikonale

Approximation de l'optique géométrique et lois de Descartes.

Une onde lumineuse se propage dans un milieu isotrope, transparent caractérisé par l'indice n , la polarisation de l'onde est définie par son champ électrique $\vec{E}(x, t)$, pour une onde monochromatique le champ magnétique s'en déduit par :

$$\text{rot}(E) = -\partial_t B$$

en notation complexe, avec la convention la plus courante en Optique

$$\partial_t = i\omega \quad \text{rot}(E) = -i\omega B$$

On écrit \vec{E} sous forme eikonale :

$$\vec{E}(x, t) \propto \vec{a} \exp(i\psi(x, t))$$

La fonction ψ est l'argument de l'exponentielle, la phase de l'onde et la fonction dite eikonale.

Pour une onde monochromatique on l'écrira :

$$\psi(\vec{x}, t) = \omega t - \psi_0(\vec{x}) \quad \psi_0(\vec{x}) = Cte \text{ définit les surfaces d'onde.}$$

\vec{E} doit satisfaire aux équations de Maxwell :

$$\text{div}(D) = 0 \quad \text{rot}(H) = \partial_t D \quad \text{rot}(E) = -\partial_t B \quad \text{div}(B) = 0$$

En conséquences

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(\psi_0) = 0 \quad \vec{H} = (\omega\mu_0)^{-1} \overrightarrow{\text{grad}}(\psi_0) \wedge \vec{E}$$

et le vecteur de Poynting P est

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{E^2}{\omega\mu_0} \overrightarrow{\text{grad}}(\psi_0)$$

Conséquences :

| | |
|---|--|
| L'intensité $ \vec{P} $ est proportionnelle à | $\frac{E^2}{\omega\mu_0}$ |
| La direction du rayon est celle de | $\overrightarrow{\text{grad}}(\psi_0)$ |
| L'équation des surfaces d'ondes est | $(\psi_0(\vec{x})) = Cte$ |
| Les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'ondes. | |

— Equation de d'Alembert :

$$\text{rot.rot}(E) = +\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon E \text{ avec } \varepsilon = \text{permittivité relative du milieu}$$

soit

$$\Delta E = -k_0^2 n^2 E$$

avec

$$n = \sqrt{\varepsilon} \quad k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

soit avec l'approximation eikonale $\psi_0(x) \gg 1$

$$\Delta E = -i(\Delta \psi_0)E - (\overrightarrow{\text{grad}}(\psi_0))^2 E$$

— Equation de l'eikonale :

$$|\overrightarrow{\text{grad}}(\psi_0)| = +k_0 n$$

donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\psi_0) = +k_0 n \vec{u}$$

où \vec{u} est le vecteur tangent à la trajectoire suivie par le rayon lumineux ,

— on en déduit l'intensité lumineuse (module du vecteur de Poynting)

$$\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{E^2}{\omega \mu_0} k_0 n \vec{u} = c \varepsilon_0 E^2 n \vec{u} = \frac{1}{c \mu_0} E^2 n \vec{u}$$

— Solutions particulières

$$\text{Planes} \quad \psi_0(x) = \vec{k} \cdot \vec{x}$$

$$\text{Sphériques} \quad \psi_0(x) = kr$$

21.2 Principe de Fermat

Soit deux points A et B appartenant à des surfaces d'ondes distinctes et situés sur un même rayon lumineux : La différence de phases entre ces deux points à l'instant t est :

$$\psi_{AB} = \psi_0(B) - \psi_0(A)$$

Démonstration : Soit une courbe C quelconque joignant A et B intégrons le chemin optique de A à B sur la courbe C,

$$L = \int_{AB} n dl = k_0^{-1} \int_{AB} |\overrightarrow{\text{grad}}(\psi_0)| dl \geq k_0^{-1} \int_{AB} \overrightarrow{\text{grad}}(\psi_0) \cdot \vec{dl} = k_0^{-1}(\psi_{AB}) = L_{\min}$$

$$L_{\min} = k_0^{-1}(\psi_{AB}) = \int n dl \text{ sur le rayon lumineux}$$

Principe de Fermat :

$\int n dl$ est minimum sur le trajet choisi par la lumière (chemin optique).

— On en déduit les lois de Descartes

— Une équation géométrique pour les rayons lumineux :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(n) = \frac{\partial}{\partial s}(n \vec{u}) \quad \text{équation I}$$

\vec{u} est le vecteur tangent à la trajectoire suivie par le rayon lumineux et s est l'abscisse curviligne.

Stabilité de la phase -

La phase en B depuis A est stable au voisinage du rayon lumineux : les interférences sont constructives pour les rayons voisins si la phase est stable (bien définie)

Soit la formule d'analyse vectorielle :

$$\text{grad}(a.b) = (a.\text{grad})b + (b.\text{grad})a + a \wedge \text{rot}(b) + b \wedge \text{rot}(a)$$

On en déduit l'équation I avec

$$\vec{a} = \vec{b} = \overrightarrow{\text{grad}}(\psi_0) = k_0 n \vec{u} \text{ et avec } \frac{\partial}{\partial s} = (\vec{u}.\overrightarrow{\text{grad}})$$

Exercice : Déduire les lois de Descartes de l'équation I.

21.3 Interférences et dispositifs interférentiels

Soit deux ondes provenant d'une même source qui interfèrent en B en suivant deux chemins différents :

Le déphasage des ondes en B est $\varphi = k_0 \Delta L = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda_0}$

1. Les deux ondes sont polarisées perpendiculairement : $I = I_1 + I_2$
2. Les deux ondes sont polarisées parallèlement et sont cohérentes, le déphasage φ est défini !

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi)$$

alors on observe éventuellement des « franges »

$$(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \leq I \leq (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$$

3. Elles sont incohérentes le déphasage ϕ n'est défini ni dans le temps ni dans l'espace sur la source ou le détecteur : ϕ est aléatoire et prend toute valeur entre $0, 2\pi$

$$I = I_1 + I_2$$

Vocabulaire :

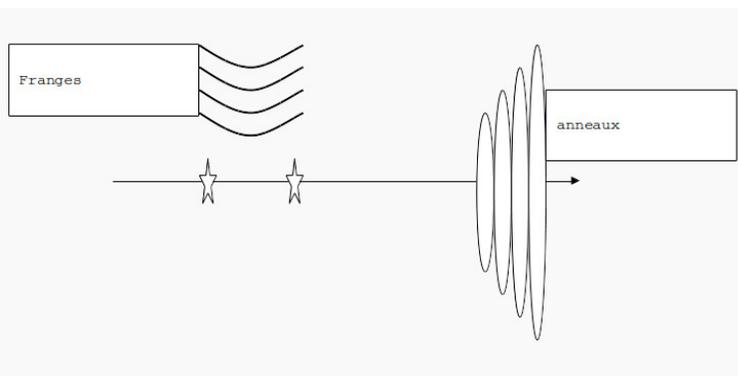
- franges d'interférence : $I(\vec{x})$ varie dans l'espace
- ordre d'interférence p : $\varphi = p \times 2\pi$ ou $\Delta L = p \times \lambda_0$
- contraste des franges varie entre 0 et 1

$$\text{contraste} = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m}$$

Généralités sur les franges et anneaux -

Soit deux sources cohérentes S1 et S2, elles interfèrent dans tout l'espace :

$$k_0 \Delta L = \varphi = p2\pi \text{ avec } \Delta L \approx r_1 - r_2$$



1. Miroirs de Fresnels : On observe des franges
2. Michelson : On observe des anneaux
3. Fabry-Perrot : c'est une lame d'air ($n = 1$) encadrée par deux plans parfaitement réfléchissants ($R \approx 1$)

On observe des anneaux engendrés par la réflexion multiple : le Fabry-Perrot est une cavité résonante dans le domaine optique.

$$\Delta L = 2ne \cos(r)$$

Le Fabry-Perrot a une sélectivité qui l'apparente à un laser.

Fonction de Airy du Fabry-Perrot

$$I(\varphi) \propto \frac{1}{1 + m(\sin(\frac{\varphi}{2}))^2} \text{ avec } m = \frac{4R}{(1 - R)^2}$$

— si $m = 0$ avec $R = 0$ pas de franges. La visibilité des interférences nulle :

$$\forall \varphi \quad I(\varphi) = 1$$

— si $m \rightarrow \infty$ avec $R \rightarrow 1$ alors le Fabry-Perrot fonctionne avec un pouvoir séparateur très grand car :

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= 1 \text{ si et seulement si } \varphi = p 2\pi \\ I(\varphi) &= 0 \quad \forall \varphi \neq p 2\pi \end{aligned}$$

Vocabulaire, références et exercices

Références

Landau et Lifchitz , Théorie des champs Mir 1970, page 174

Vocabulaire Eikonale, indice chemin optique, franges, anneaux surfaces d'onde déphasage, amplitude, intensité ordre d'interférence, visibilité, Michelson, Fabry-Perrot

Exercices

1 Démontrer les lois de Descartes d'après le principe de Fermat.

2 Etudier le régime d'interférences d'un Fabry-Perrot,

démontrer : $\Delta L = 2ne \cos(r)$

Retrouver la fonction d'Airy.

3 Démontrer l'équation I.

Démontrer la formule d'analyse vectorielle du paragraphe 2.

$$\text{grad}(a.b) = (a.\text{grad})b + (b.\text{grad})a + a \wedge \text{rot}(b) + b \wedge \text{rot}(a)$$

Application au cas : b est un champ uniforme.

4 Etude du Michelson

22 Optique 2

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

22.1 Introduction

Soit une onde lumineuse dans un milieu isotrope transparent caractérisé par l'indice n , la polarisation de l'onde est définie par le champ électrique $\vec{E}(x,t)$; la diffraction existe si la propagation de la lumière s'écarte grandement de celle prévue par le principe de Fermat soit la ligne droite en milieu homogène : C'est le cas s'il y a des obstacles à la propagation : fentes et diaphragmes . On distingue classiquement :

- diffraction de Fraunhofer : état lumineux à l'infini ou au voisinage des images.
- Diffraction de Fresnel : état lumineux loin des images à distance finie.

Principe de Huyghens-Fresnel : (en régime stationnaire)

On peut construire l'état d'amplitude de l'onde en M en considérant qu'elle résulte de la superposition d'ondes sphériques émises par des sources fictives situées sur une surface d'onde et d'intensité proportionnelle à l'amplitude reçue localement par la surface d'onde (superposition d'ondelettes) .

$$\vec{E}(M, t) \approx \frac{ik}{2\pi} \int_{P \in \Sigma} \vec{E}(P, 0) \frac{\exp(i(\omega t - kr))}{r} d^2x \text{ avec } r = |\vec{P}M| \text{ et } P \in \Sigma$$

Σ est la surface d'onde génératrice de l'amplitude en M à partir de $P \in \Sigma$.

d^2x est la mesure de l'élément de surface sur Σ tel que : $d^2x = |d\vec{x}|$

Le facteur $ik/2\pi$ est très rarement avancé, nous faisons référence à Alonso-Finn page 429. On peut également trouver ce facteur dans Landau & Lifchitz. Remarquons enfin que la dimension de l'onde résultante est correcte mais que la justification mathématique est délicate.⁵

22.2 Diffraction par une pupille

Dans le cas des pupilles d'axe Oz , la propagation de l'onde électromagnétique est limitée par un obstacle (un écran) situé dans le plan Oxy en ($z = 0$), la surface d'onde est donc la surface de la pupille et si on l'observe à grande distance en M on peut montrer que :

$$E(M, t) \propto \frac{\exp(i(\omega t - kr_0))}{r_0} E(O, t) \int_{\Sigma} \exp(ik(\vec{r} \cdot \vec{u})) d^2x$$

$$\text{avec } \vec{r} = \overrightarrow{OP} \quad P \in \Sigma \text{ et } \vec{u} \text{ dans la direction } \overrightarrow{OM} \quad r_0 = |\overrightarrow{OM}| \gg r$$

5. Le propagateur de l'onde sphérique est solution de

$$(\Delta f = -k^2 f)$$

l'intégration s'effectue sur la pupille Σ

Justification : $\delta r = r - r_0 = -\vec{u} \cdot \overrightarrow{OP}$ à grande distance $r^{-1} \approx r_0^{-1} + \dots O(r_0^{-2})$

Les cosinus directeurs de \vec{u} seront notés (α, β, γ) , $\vec{k} = k \vec{u}$

Si on introduit la fonction de transfert dans le plan de la pupille (à 2D) $T(x, y)$ en $z = 0$, l'amplitude dans la direction \vec{u} de cosinus directeurs (α, β) est proportionnelle à la transformée de Fourier de cette fonction :

$$E(M, t) \propto \frac{\exp(i(\omega t - kr_0))}{r_0} E(O, t) \hat{T}(\vec{k}) \text{ avec } \vec{k} = k\vec{u}$$

$$\hat{T}(\vec{k}) = \hat{T}(k\alpha, k\beta) = \int_{(x,y)} T(x, y, z=0) \exp(i(\vec{r} \cdot \vec{k})) d^2x \text{ avec } \vec{r} = (x, y)$$

La transformée de Fourier peut être « visualisée » dans le plan focal d'une lentille d'observation.

Pour une fente telle que :

$$\forall x, y \quad T(x, y) = 0 \quad \text{sauf si } -a/2 < x < a/2 \text{ et } -b/2 < y < b/2 \text{ alors } T(x, y) = 1$$

alors avec $k_x = k\alpha$, $k_y = k\beta$

$$\hat{T}(k_x, k_y) = a \left(\frac{\sin(k_x a/2)}{k_x a/2} \right) \times b \left(\frac{\sin(k_y b/2)}{k_y b/2} \right)$$

Pour une pupille circulaire :

$$T(x, y) = 0 \quad \forall x, y \text{ sauf } T(r) = 1 \text{ si } r < R \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

alors

$$\hat{T}(k_\theta) = \pi R^2 \left(\frac{2J_1(k_\theta R)}{k_\theta R} \right) \text{ avec } k_\theta = k \sin(\theta)$$

Les zéros de cette fonction de Bessel sont : $X_i = 1, 22\pi; 2, 23\pi \dots$ soit :

$$\sin(\theta_i) = \frac{\lambda}{2R} \{1, 22; 2, 23 \dots\}$$

dans le plan focal d'observation, les rayons des anneaux sombres de diffraction sont :

$$r_i = f \frac{\lambda}{D} \{1, 22; 2, 23 \dots\}$$

Action des transformations planes de la pupille dans l'espace réciproque $\vec{k} = (k_x, k_y)$:

- Translations : $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{a} \Rightarrow \vec{k} \rightarrow \vec{k}$
- Rotations d'axe Oz : $\vec{r} \rightarrow \text{Rot}(\vec{r}) \Rightarrow \vec{k} \rightarrow \text{Rot}(\vec{k})$
- Homothétie : $\vec{r} \rightarrow \lambda \vec{r} \Rightarrow \vec{k} \rightarrow \lambda^{-1} \vec{k}$

22.3 Réseaux dans le domaine optique

Soit une pupille composée de n pupilles identiques de centre \vec{a}_i avec $i = 1, n$:

$$\hat{T}(k_x, k_y) = \hat{T}_0(k_x, k_y) \times \sum_i \exp i(\vec{k} \cdot \vec{a}_i)$$

$$\hat{T}_0(k_x, k_y) = \int_{\infty} T(x, y) \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{u}) \cdot d^2x$$

avec $\vec{r} = (x, y)$ est l'amplitude qui résulte de la pupille en O

A_i est le centre de la i ème pupille du plan Oxy , $\vec{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$.

— Si les pupilles sont disposées aléatoirement : « diffusion »

$$\sum_i \exp i(\vec{k} \cdot \vec{a}_i) \approx \langle \exp i(\vec{k} \cdot \vec{a}_i) \rangle \approx 0$$

— Si les pupilles sont rangées régulièrement, des interférences sont possibles : « diffraction »

$$\sum_i \exp i(\vec{k} \cdot \vec{a}_i) = \sum_i \langle \exp i(\varphi_i) \rangle \approx n \text{ si } \varphi_i = 0 \text{ (} 2\pi \text{)}$$

Conditions d'interférence pour un réseau

Conditions d'interférence pour un réseau

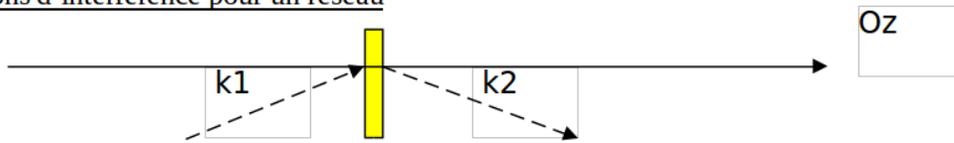


figure 1

Soit une même source qui éclaire un réseau plan en transmission ou en réflexion :

Le déphasage des ondes à l'infini est

$$\varphi = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \overrightarrow{OA}$$

où \overrightarrow{OA} repère la maille (périodicité) du réseau

1. Avec certaines conventions les maxima d'intensité sont obtenus en transmission pour :

$$ka(\sin(i_2) - \sin(i_1)) = p(2\pi) \text{ (1D)}$$

2. Avec certaines conventions les maxima d'intensité sont obtenus en réflexion pour :

$$ka(\sin(i_2) + \sin(i_1)) = p(2\pi) \text{ (1D)}$$

Calcul complet de l'amplitude pour un réseau à 1D -

Réseau de fentes ou de traits à 1D selon (Ox), pouvoir de résolution du réseau, amplitude en transmission dans la direction \vec{k}_2

$$\text{Amplitude} \approx \frac{\exp(i(\omega t - kr_0))}{r_0} \hat{T}(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)$$

En transmission par exemple

$$\vec{k}_2 - \vec{k}_1 = k \begin{pmatrix} \sin(i_2) - \sin(i_1) \\ 0 \\ \cos(i_2) - \cos(i_1) \end{pmatrix}$$

Si les fentes, en nombre N , ont une largeur b , une hauteur L et une périodicité $a \gg b$:

$$|\hat{T}| = Lb \cdot \frac{\sin(\delta kaN/2)}{\sin(\delta ka/2)} \cdot \frac{\sin(\delta kb/2)}{\delta kb/2} \text{ avec } \delta k = k (\sin(i_2) - \sin(i_1))$$

Les maxima d'interférence sont obtenus à l'ordre d'interférence $p = 0, 1, \dots$ pour :

$$\delta ka = 2 p \pi \text{ soit } \delta k = p \left(\frac{2\pi}{a} \right) \text{ (cf réseau réciproque)}$$

pour les maxima

$$|\hat{T}| = Lb \cdot \frac{\sin(\delta kb/2)}{\delta kb/2}$$

si $b = 0$ soit des fentes fines on a finalement $|\hat{T}| = Lb$ aux maxima, l'amplitude émise est la somme des amplitudes transmises.

Pouvoir de résolution du réseau à 1D (pouvoir séparateur)

au maxima d'ordre p , la valeur de $X = \delta kaN = Np\pi$

si la fréquence varie, la quantité X varie ; elle passera d'un maximum à un minimum sur une variation de π : le rapport d'une variation de X égale à π à sa valeur au maximum est le pouvoir séparateur, c'est sa capacité à distinguer une variation de longueur d'onde.

$$\frac{\delta \lambda}{\lambda} = \frac{\delta(\delta kaN)}{(\delta kaN)} = \frac{\pi}{Np\pi} = \frac{1}{Np}$$

où N est le nombre de fentes et p l'ordre d'interférence

22.4 Diffraction des X par les cristaux

Adéquation des rayons X pour sonder les cristaux :

$$\lambda \approx \text{taille de la maille cristalline} \approx 1\text{\AA} \Rightarrow \text{quantum d'énergie} = h\nu \approx 10 \text{ keV}$$

C'est le domaine des rayons X pour lesquels on prendra l'indice $n = 1$ (approximation haute fréquence largement justifiée)

Réflexion de Bragg

$$2d \sin(\theta) = p\lambda \text{ avec } |p\lambda| \leq 2d$$

où d est la distance des plans cristallins qui réfléchissent les rayons X.

Image X en transmission On observe à l'infini des points lumineux de lumière ré-émise par les mailles du réseau cristallin :

Si on introduit les vecteurs d'ondes incident et transmis :

$$\vec{k}_1, \vec{k}_2 \text{ et } \vec{q} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$$

Alors, dans la «direction» \vec{k}_2 l'amplitude est le produit de deux termes

- un terme qui vient de la superposition des mailles
- un terme qui vient de la structure des mailles

$$E(\vec{q}) \propto \hat{T}(\vec{q}) \times \sum_{\text{mailles}} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{a})$$

Le vecteur \vec{a} est un vecteur de translation du réseau de Bravais du cristal qui permet de passer d'une maille à l'autre :

$$\vec{a}(n_1, n_2, n_3) = n_1 R_1 \vec{i} + n_2 R_2 \vec{j} + n_3 R_3 \vec{k}$$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dépendent de la structure cristalline ; (R_1, R_2, R_3) sont les périodes du réseau cristallin.

Introduisons le «réseau réciproque» tel que :

$$\vec{b}(m_1, m_2, m_3) = \frac{2\pi}{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} \left(m_1 \frac{\vec{j} \wedge \vec{k}}{R_1} + m_2 \frac{\vec{k} \wedge \vec{i}}{R_2} + m_3 \frac{\vec{i} \wedge \vec{j}}{R_3} \right)$$

On montre facilement que :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\pi(n_i m_i) \propto 2\pi$$

En conséquence si le vecteur $\vec{q} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1$ est un vecteur du réseau réciproque les amplitudes interfèrent positivement :

Si $\vec{q} \in \vec{b}$ alors l'amplitude

$$E(\vec{q}) \propto \hat{T}(\vec{q}) \times \sum_{\text{mailles}} 1 = \hat{T}(\vec{q}) \times N \text{ avec } N \approx 10^{23}$$

Si \vec{k}_2 est tel que $\vec{q} \in \vec{b}$, on observe un maximum d'intensité très intense car l'intensité est le module carré de l'amplitude résultante :

$$I(\vec{q}) \propto |E(\vec{q})|^2 = |\hat{T}(\vec{q})|^2 \times N^2 = N^2 \times \text{l'intensité issue d'une maille}$$

par exemple avec $N \approx 10^{23}$

Retrouvons la loi de réflexion de Bragg : condition de Bragg

$$\begin{aligned} \vec{q} &= 2k \sin(\theta) \vec{n} \\ \vec{b} &= m \frac{2\pi}{d} \vec{n} \end{aligned} \quad \vec{q} \equiv \vec{b} \Rightarrow \exists m \text{ un entier tel que } \sin(\theta) = m \frac{\lambda}{2d}$$

ce qui impose l'usage des rayons X.

$$\frac{\lambda}{2d} < 1$$

Vocabulaire, références et exercices

Références

Alonso-Finn, Champs et Ondes, Inter-Editions

Vocabulaire Diffraction, Réseau réciproque, Pupille, Transformation de Fourier, pouvoir séparateur d'un instrument (le microscope par exemple)

Exercices

- 1 Etude des réseaux en optique..
Pouvoir séparateur des réseaux
- 2 Réflexion de Bragg des rayons X sur les cristaux

23 Mécanique quantique

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

23.1 Fondements expérimentaux

- La mécanique quantique est la science physique du dénombrable et du microscopique tandis que la physique classique est celle du continu et du macroscopique

Exemple : le mouvement d'un point élémentaire dans un champ coulombien attractif

La trajectoire elliptique dépend :

1. de l'énergie mécanique : trajectoire fermée si $E \leq 0$

$$E = E_c - \frac{\alpha}{r} < 0$$

avec pour l'attraction électrostatique $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ et la gravitation $\alpha = G M m$

2. du moment cinétique : \vec{L} soit le module L et deux angles : \hat{L}
3. enfin de l'angle arbitraire de rotation autour de la direction de \vec{L} soit φ qui dépend de l'origine du temps (la rotation est fonction du temps)

La trajectoire (dans le plan perpendiculaire à \vec{L}) s'écrit :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \varphi)} \quad p, e \text{ sont appelés paramètre et excentricité}$$

La dynamique permet d'établir les relations suivantes :

$$p = \frac{L^2}{\alpha m} \text{ et } e^2 = 1 + \frac{2p}{\alpha} E \text{ avec } 0 < e < 1$$

Dans le cas quantique :

$$E = -\frac{E_0}{n^2} \quad n \in \mathbb{N} \quad E_0 = \left(\frac{mc^2}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{\hbar c}\right)^2 = 13,6 \text{ eV}$$

$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \text{ avec } l < n$$

$$L_Z = m\hbar \text{ avec } |m| \leq l$$

l'état dépend des nombres quantiques : n, l, m

- La notion de dénombrement apparaît au XIX siècle avec la chimie et la notion d'atome (indivisible). Le passage du macroscopique au microscopique est fixé par le nombre d'Avogadro \mathcal{N}

$$\mathcal{N} = 6,0 \cdot 10^{23} \quad \mathcal{N} = \frac{R}{k}$$

Détermination de \mathcal{N} par l'étude du mouvement Brownien

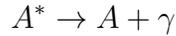
Mesure de k par les fluctuations thermiques qui sont de l'ordre de kT puis

- L'électricité est quantifiée par l'électrolyse : chaque réaction chimique échange un quantum électrique, Le Faraday est la charge d'une mole :

$$F = \mathcal{N} \times e$$

Mesure du nombre d'Avogadro par la mesure de e : expérience de Millikan.

- Les spectres d'émission des atomes :
Exemples : les lampes à vapeurs métalliques excitées par des électrons (expérience de Franck – Hertz)



Les longueurs d'ondes sont fixées

$$\lambda = 5461 \text{ \AA}, 4571 \text{ \AA} \text{ pour } Hg \quad \lambda \sim 5900 \text{ pour } Na$$

etc ..

- Les spectres d'absorption de la lumière du soleil : l'atmosphère solaire (couronne) absorbe la lumière émise par la chromosphère ($T = 6\,000K$).
- La théorie du corps noir : Hypothèse de Plank :

$$e = h\nu$$

23.2 Le rayonnement thermique : La loi de Planck

Soit $e(\omega)$ la densité d'énergie dans le rayonnement d'une cavité en équilibre à T avec ses parois qui constituent une source de température à T ; $e(\omega)$ est l'énergie du rayonnement par unité de volume ($V=1$), à la pulsation ω et dans $d\omega$.

Les courants d'énergie (dans $d\omega$) en un point M sont isotropes :

$$\vec{j} = e(\omega) \frac{c}{4\pi} \vec{n}$$

La puissance incidente (dans $d\omega$) sur une surface unité de paroi plane absorbante (corps noir) est égale (flux de \vec{j} à la puissance réémise (équilibre thermodynamique)

$$I = \frac{c}{4} e(\omega)$$

Nous Recherchons $e(\omega)$?

Probabilité d'un état (dans $V = 1$) à n photons de pulsation ω (statistique de Bose) :

$$prob(n) = \frac{\exp(-n\epsilon)}{1 - \exp(-\epsilon)} \quad \epsilon = \frac{\hbar\omega}{kT}$$

Energie moyenne à la pulsation ω

$$\frac{\hbar\omega}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1}$$

Densité des états de photons à la pulsation ω avec deux états de polarisation :

$$dN = 2 \times \frac{d\vec{p} \times (V = 1)}{h^3} = 2 \times \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} = \frac{\omega^2 d\omega}{c^3 \pi^2}$$

Densité d'énergie :

$$\frac{dE}{d\omega} = e(\omega) = \frac{\hbar\omega}{\exp(\frac{\hbar\omega}{kT}) - 1} \times \frac{\omega^2}{c^3\pi^2}$$

Energie totale dans $V = 1$:

$$E = \frac{(kT)^4}{\hbar^3} \times \frac{1}{c^3\pi^2} \times \frac{\pi^4}{15} \text{ soit } E = \frac{4}{c}\sigma \times T^4$$

Soit pour le rayonnement du corps noir (formule de Stefan-Boltzmann) I la puissance rayonnée par unité de surface

$$I = \sigma \times T^4$$

σ est la constante de Stefan-Boltzmann :

$$\sigma = 5,6 \quad 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$$

23.3 L'effet photoélectrique : l'expérience de Franck-Hertz

— L'énergie l'extraction d'un électron est liée au quantum du rayonnement

$$\begin{aligned} \gamma + A &\rightarrow A + e^- \\ h\nu &= E_l + E_c > E_l \end{aligned}$$

La probabilité d'extraction d'un électron est indépendante de l'intensité de l'onde mais seulement du quantum d'énergie qu'elle porte :

— Incompatibilité de la théorie atomique avec la physique classique :

Calcul de la durée de vie de l'atome planétaire de Rutherford :

$$\tau = 10^{-10} \text{ s}$$

rappel : puissance du rayonnement dipolaire (moment dipolaire $d(t) \sim e x(t)$)

$$I = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\ddot{d}^2}{c^3}$$

23.4 La mécanique ondulatoire

La physique des ondes introduit naturellement la quantification.

— La corde vibrante fixée aux deux extrémités de longueur a :

$$k = n \frac{\pi}{a} \Rightarrow \lambda = \frac{2a}{n} \quad \omega = ck$$

— Dualité onde corpuscule pour le photon

$$e = \hbar\omega = h\nu \quad \lambda = \frac{c}{\nu} \text{ soit } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

La phase de l'onde peut s'écrire :

$$\varphi = \omega t - kx$$

23.5 Généralisation : Loi De Broglie

$$e = \frac{h}{T} = h\nu = \hbar\omega$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

Expérience de Davidson et Germer :

Diffraction des électrons par des cristaux \sim diffraction des rayons X

Diagramme de poudre :

$$n\lambda = 2d \sin(i) \text{ avec } i = \frac{\alpha}{2}$$

D'après de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}}$$

calcul de $E_c \approx 100 \text{ eV}$ pour $\lambda = 1\text{\AA}$

23.6 Equation de Schrödinger

C'est une généralisation de la mécanique ondulatoire :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \mathcal{H}\Psi$$

$\mathcal{H}(q, p)$ est l'hamiltonien du système quantique il dépend des variables q et des variables conjuguées p . L'espace de phase du système et l'espace (q, p)

Exemple : à une dimension une particule ponctuelle.

$$q = x \quad p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

Postulats de la Mécanique quantique

1. Le système évolue selon l'équation de Schrödinger
2. Les quantités accessibles aux mesures sont associées à des opérateurs O hermitiens
3. Le résultat d'une mesure est toujours une valeur propre de O
4. La moyenne des résultats d'une mesure peut s'obtenir par un produit scalaire sur Ψ

$$\langle O \rangle = \int \Psi^* O \Psi \, dq = \sum_a a \text{Prob}(a)$$

5. La probabilité d'observer l'état $|a\rangle$ est donnée par le module carré de l'amplitude de $|a\rangle$ dans $|\Psi\rangle$

$$\text{prob}(a) = |\langle a | \Psi \rangle|^2$$

6. Conséquences

— Principe d'incertitude : Les opérateurs qui commutent peuvent être définis simultanément. Si non la mesure de l'un induit une incertitude quantique sur la mesure de l'autre.

Exemples :

$$p_x = -i\hbar \partial_x \quad [x, p_x] = i\hbar \quad \Delta x \Delta p_x \approx \hbar$$

— Conséquence : théorème d'Ehrenfest soit une observable O

$$\frac{d}{dt} \langle O \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\mathcal{H}, O] \rangle + \langle \frac{\partial O}{\partial t} \rangle$$

Hypothèse $\langle \frac{\partial O}{\partial t} \rangle = 0$

Si O commute avec \mathcal{H} sa moyenne est stationnaire

Si $|\psi\rangle$ est propre de \mathcal{H} alors la moyenne de O est stationnaire : l'état est dit stationnaire!

(a) Modèles élémentaires en M.Q.

Recherche des états stationnaires propres de l'énergie

(b) Le puits infini à une dimension

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} \text{ pour } 0 < x < a$$

avec $[x, p] = i\hbar$

$$\psi \propto \sin(kx)$$

$$k = n \frac{\pi}{a} \quad e = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \propto n^2$$

(c) Le rotateur quantique

$$\mathcal{H} = \frac{L^2}{2I}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \text{avec } [L_x, L_y] = i\hbar L_z \text{ etc..}$$

$$\psi \propto Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$$L^2 = l(l+1)\hbar^2 \quad e \propto l(l+1)$$

Bandes de rotation : soit la transition dipolaire $l \rightarrow l-1$

L'énergie libérée vaut :

$$h\nu = \frac{\hbar^2}{2}(l(l+1) - (l-1)l) = \frac{\hbar^2}{I} l$$

Les fréquences sont **équidistantes** (bande de rotation pour $l = 1, 2, 3, \dots$)

(d) L'oscillateur harmonique à une dimension ou éventuellement plusieurs

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2$$

avec $[x, p] = i\hbar$

$$\psi \propto H_n(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \quad \xi = x\sqrt{m\omega_0/\hbar}$$

$$e_n = \hbar\omega_0 (n + 1/2) \propto n$$

remarque $e_0 = 1/2 \hbar\omega_0$

$H_n(\xi)$ sont les polynômes d'Hermite-Tchebychev définis par :

$$H_n(\xi) = (-1)^n \exp\left(+\frac{\xi^2}{2}\right) \left(\frac{d^n}{d\xi^n} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \right)$$

Vocabulaire, références et exercices

Landau et Lifchitz , Mécanique quantique , Mir 1970

Khiezer, Physique atomique , Ellipses

Blokhintsev, Principe de mécanique quantique, Mir

Levy leblond, Quantiques, Masson

Cohen – Laloe, Mécanique quantique, Dunod

Vocabulaire Quantum, constante de Plank, nombre d'Avogadro, corps noir, rayonnement thermique, équation de Schrödinger, opérateur valeurs propres, moyennes, commutateurs, relations d'incertitudes.

Exercices

1 Revoir la théorie du rayonnement thermique

Calculer la constante de Stefan-Boltzmann et vérifier :

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^2}{60 \hbar^3 c^2} = 5,6 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$$

Application à la chromosphère : calcul de la constante solaire : puissance totale rayonnée par la chromosphère.

2 Revoir la théorie du moment cinétique en mécanique : règles de quantification et états propres : les harmoniques sphériques.

3 Vérifier la dimension de la formule du rayonnement dipolaire

$$-\frac{dE}{dt} = I = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\ddot{d}^2}{c^3}$$

En déduire que pour une trajectoire circulaire d'un électron autour d'un noyau atomique l'énergie E décroît et l'électron « tombe » sur le proton en $\tau = 10^{-10} \text{ s}$

On démontrera que :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \text{ alors } r^3(t) = r^3(0) - \frac{4\alpha^2}{m^2 c^3} t$$

4 Revoir la théorie de l'oscillateur harmonique

Démontrer que le spectre est défini par $e = \hbar\omega_0(n + 1/2)$

...spectre en énergie à 3 D ?

24 Physique Atomique

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

24.1 Introduction

- Neutralité électrique des atomes : il existe des électrons (effet photoélectrique, conduction électrique ...) donc des charges positives.
- Structure atomique : expérience de Rutherford avec les α d'une source radioactive de quelques 8 MeV .

Diffusion élastique dans le champ coulombien répulsif du noyau atomique :

$$V = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right) \times \frac{\hbar c}{r} = \frac{\alpha\hbar c}{r}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

α est la constante de structure fine, elle est sans dimension = $\frac{1}{137,0}$

Principe de mécanique (théorie classique de Rutherford) :

$$\Delta\vec{p} = \text{transfert d'impulsion} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{f} dt$$

si θ est l'angle de la diffusion on montre : $|\Delta\vec{p}| = 4p_0 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

si b est le paramètre d'impact classique $\tan(\theta/2)$ est une fonction de b :

$$\tan(\theta/2) = \frac{Zz\alpha}{2} \frac{\hbar c}{E_0 b} \quad \text{formule de Rutherford}$$

on en déduit la section efficace différentielle de Rutherford :

$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \left(\frac{Zz\alpha}{2E_0}\hbar c\right)^2 \times \frac{1}{4\sin^4(\theta/2)} \quad E_0 \sim \text{MeV}$$

- Impossibilité d'un image classique (planétaire) de l'atome :

Le rayonnement électromagnétique

Rappels sur le rayonnement dipolaire : P est la puissance rayonnée d le dipôle

$$dP = \frac{1}{(4\pi)^2\epsilon_0 c^3} \sin^2(\theta)(\ddot{d})^2 d\Omega$$

$\vec{d}(t) = e\vec{r}(t)$ est le moment dipolaire suivant Oz variable dans le temps.

$$P = \frac{dE_R}{dt} = \frac{2\alpha\hbar c}{3c^3} \times \frac{(\ddot{d})^2}{e^2}$$

Calcul de la durée de vie d'une orbite circulaire de rayon initial $a_0 = 1\text{Å}$ et de rayon $a(t)$

$$E = -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\hbar c}{a}\right)^2 \text{ avec } \frac{dE}{dt} = -P$$

$$\tau = \frac{E}{P} = \frac{a_0^3}{4\alpha^2 \lambda_c^2 c}$$

$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$ est la longueur d'onde Compton de l'électron

$a_0 = \frac{\lambda_c}{\alpha} \sim 0,53 \text{ Å}$ le rayon de Bohr initial.

On trouve pour l'atome

$$\tau \sim \frac{\lambda_c}{4 \alpha^5 c} \sim 10^{-10} \text{ s}$$

- La vision quantique :

Les interactions des atomes avec le rayonnement sont discrètes et réglées par la relation de Planck :

$$\delta E = h\nu$$

Autres effets quantiques

- l'émission se produit lors de transitions entre les états « stables » ou stationnaires en théorie quantique :

$$A_2 \rightarrow A_1 + \gamma : \text{ émission : } E_2 - E_1 = h\nu$$

$$\gamma + A_1 \rightarrow A_2 : \text{ absorption : } E_2 - E_1 = h\nu$$

- Effet photoélectrique avec un seuil en énergie : $h\nu$:

$$\gamma + A_1 \rightarrow A_2^+ + e^-$$

- Expérience de Franck Hertz

$$e^- + A_1 \rightarrow A_2 + e^-$$

- Exemple de système quantique : Le puits infini à une dimension de longueur a

$$e(n) = \frac{(\hbar c)^2}{2 mc^2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \times n^2$$

m est la masse de la particule.

n est le nombre de zéros +1 de la fonction d'onde sur l'intervalle $[0, a]$.

n est le nombre quantique associé à la dimension du mouvement sur Ox .

La particule au repos n'existe pas physiquement ! $e > 0$

Applications numériques :

Un électron dans un puits de dimension 1 angström : l'atome $\approx 10 \text{ eV}$

Un nucléon dans un puits de dimension 1 fm (10^{-13} cm) : le noyau $\approx 10 \text{ MeV}$

24.2 Un électron dans un champ central

(exemple l'atome d'hydrogène ou hydrogénoïde)

Les séries raies de l'atome d'hydrogène sans spin (en première approximation)

La formule de Balmer : raies de l'hydrogène dans le visible, transition $n > 2 \rightarrow n = 2$:

$$\lambda^{-1} = 4 B^{-1} \left(-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4} \right) \quad \frac{B}{4} = 3645,6 \text{ \AA}$$

| \AA | calcul | expérience |
|------------|---------|------------|
| H α | 6562,08 | 6562,10 |
| H β | 4860,80 | 4860,74 |
| H γ | 4340,00 | 4340,10 |
| H δ | 4101,30 | 4101,20 |
| H ∞ | - | 3645,6 |

Interprétation énergétique à l'aide de la relation de Planck

$$\lambda^{-1} = \frac{\nu}{c} = \frac{4}{B} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n > 2$$

Les séries sont définies par la formule ci-dessous :

| n_0 | raies | série |
|-------|----------------|---------------|
| 1 | uv | Lyman |
| 2 | visible | Balmer |
| 3 | ir | Paschen |
| 4 | mm | Brackett |

$$\lambda^{-1}(n_0) = \frac{\nu}{c} = \frac{4}{B} \left(\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n > n_0$$

Termes spectraux des atomes : Généralisation

$$T_i - T_j = h\nu_{ij}$$

24.3 Théorie quantique de l'atome

Détermination des termes spectraux des atomes et de l'atome d'hydrogène :!

$\Psi(\vec{r})$ solution stationnaire de l'équation de Schrödinger

$$\mathcal{H}\Psi = E\Psi$$

avec

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(r) \text{ avec } \vec{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \text{ et } V(r) = -\alpha \frac{\hbar c}{r}$$

Equation en coordonnées sphériques svp!

on fait l'inventaire des états quantiques stationnaires possibles :

propres de \mathcal{H} L^2 et L_z

Les états propres du moment cinétique : Relations de commutation :

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$$

Pourquoi rechercher des états propres de L^2 et L_z :

Principe d'incertitude et commutation

Remarque le moment cinétique ne dépend que de la direction \vec{r} soit des angles : θ , φ

Opérateurs de création d'un **quantum de moment cinétique** : on vérifie

$$\text{avec } A^+ = L_x + iL_y \quad \left[\frac{L_z}{\hbar}, A^+\right] = A^+$$

on en déduit :

— si Ψ est propre de L_z

$$L_z \Psi(\theta, \varphi) = m \hbar \Psi(\theta, \varphi)$$

— alors $A^+\Psi(\theta, \varphi)$ est propre de L_z et L^2 avec la valeur propre $(m+1)\hbar$ et le même l^2 .

Construction des fonctions propres Les harmoniques sphériques.

$Y_l^m(\theta, \varphi)$ sont des fonctions propres de L^2 et L_z avec les valeurs $m\hbar$ et $|m| \leq l$

— Le « mouvement » radial avec $Y_l^m(\theta, \varphi)$?

$$p^2 = p_r^2 + \frac{L^2}{r^2} \quad \text{avec } p_r = \frac{\hbar}{i} \left(r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} r \right)$$

L'équation radiale de Schrödinger avec un changement de fonction

$$\Psi(r) \rightarrow u(r) = r \Psi(r)$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) \right] \times u(r) = E \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right) \times u(r)$$

— **Recherche de l'état fondamental 1s soit avec** $n=1$ $l=0$

Solution de la forme $u(r) \propto r \exp(-\varepsilon r)$

Solution ok avec les conditions aux limites

On trouve

$$E_{1s} = -(Z\alpha)^2 \times \left(\frac{mc^2}{2} \right) = -E_0 = -13,6 \text{ eV pour } Z=1 \text{ et } \varepsilon = r_0^{-1} = \frac{\alpha mc}{\hbar}$$

— Généralisation l'état : n, l

On introduit un nombre quantique radial n_r qui est égal au nombre de zéros de la fonction d'onde radiale sur $]0, +\infty[$ et un nombre quantique principal n tel que :

$$n = l + 1 + n_r \geq l + 1$$

Conséquences

$$\begin{aligned} n &\geq 1 \\ 0 &\leq l < n \\ |m| &\leq l \end{aligned}$$

— Termes atomiques de l'Hydrogène

$$E_{n,l,m} = -\frac{E_0}{n^2}$$

Dégénérescence de la couche n (avec le spin $\times 2$) : $2 \sum (2l + 1) = 2n^2$
Théorie ok avec la formule de Balmer etc. . .

— Rayons atomiques : ordre de grandeur de 1 à 2 Angström $\forall Z$.

Rayon de Bohr

$$r_0 = \frac{\hbar}{\alpha mc} = 0,529 \text{ \AA}$$

On montre que la distance moyenne de l' « orbite » n, l est donnée par :

$$\langle r_{nl} \rangle = \frac{n^2 r_0}{Z} \left(1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{l(l+1)}{n^2} \right) \right)$$

Le rayon atomique correspond à la dernière couche occupée soit la couche n_1 mais Z croit avec n_1 en principe comme n_1^3

$$\frac{Z}{2} = \sum n^2 = n_1(n_1 + 1) \left(\frac{n_1 + 2}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

En conséquence **les rayons atomiques sont sensiblement constants** $\forall Z$.

$$Z \sim \frac{2}{3} n_1^3 \text{ et } \langle r_{n_1} \rangle \sim \frac{n_1^2}{Z} r_0$$

24.4 L'atome à plusieurs électrons

Si on néglige l'interaction répulsive entre les électrons, on est ramené au problème coulombien de l'atome d'Hydrogène cependant l'on se doit respecter le principe de Pauli, d'où les règles de remplissage des couches :

Nomenclature pour les couches : K L M N O P pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$,

Nomenclature pour la structure fine : s p d f soit pour $l = 0, 1, 2, 3$,

La structure atomique en couches ou modèle en couches explique :

1. la périodicité des propriétés chimiques en Z et donc la relation entre la masse atomique et la chimie exprimée par la table de Mendéléiev .
2. Configuration électronique des atomes, Exemple : atomes à 1 ou 2 électrons

| Atome | configuration | notation spectroscopique $^{2S+1}L_J$ |
|-------|---------------|---------------------------------------|
| 1H | $1s^1$ | $^2S_{1/2}$ |
| He | $1s^2$ | 1S_0 |
| K | $4s^1$ | $^2S_{1/2}$ |

Autres exemples :

$$\text{Cu} = (1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6) 3d^{10} 4s^1 = (\text{Ar}) 3d^{10} 4s^1$$

$$\text{Si} = (1s^2 2s^2 2p^6) 3s^2 3p^2 = (\text{Ne}) 3s^2 3p^2$$

3. L'existence de nombres magiques (gaz rares et autres propriétés chimiques)

Exemple :

| | | |
|-------------|-------|---------|
| 1s | H-He | Z=2 |
| 2s-2p | Li-Ne | 10 |
| 3s-3p | Na-Ar | 18 |
| 4s-3d-4p | K-Kr | 36 |
| 5s-4d-5p | Ru-Xe | 54 |
| 6s-4f-5d-6s | Cs-Rn | 86 |
| 7s-5f-6d-7p | Fr... | « 118 » |

24.5 Le spin des électrons

C'est un moment cinétique interne et quantique : il apparaît « naturellement » en théorie quantique relativiste :

Le spin de « Pauli » est une correction à l'équation de Schrödinger qui est décrit dans un espace à 2 dimensions celui des états propres du spin selon s_z

$$\vec{s} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \text{ avec } \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Expérience de Stern et Gerlach -

On envoie un faisceau d'atomes « à un électron » dans un champ magnétique inhomogène qui sépare le faisceau en deux ; ces faisceaux sont « polarisés » dans la direction du champ magnétique inhomogène

$$\vec{f} = -\overrightarrow{\text{grad}}(U = -\vec{M} \cdot \vec{B}) \Rightarrow f_z = M_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \vec{M} \text{ est le moment magnétique de l'atome}$$

Facteur gyromagnétique :

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \wedge I \, d\vec{l} = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

d'une manière générale on introduit le facteur de Landé g tel que

$$\vec{M} = g \frac{e}{2m} \vec{J} \quad \vec{J} \text{ est le moment cinétique total de l'atome}$$

si le moment cinétique est orbital $g = 1$

si le moment cinétique est le spin d'un électron $g = 2,00232$

L'unité du magnétisme atomique est le magnéton de Bohr :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,273 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2$$

soit dans l'expérience de Stern et Gerlach avec un électron

$$f_z = \pm \mu_B \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

L'interaction spin orbite -

Le spin de l'électron induit une correction relativiste à l'équation de Schrödinger qu'on appelle l'interaction spin orbite ; on peut la considérer comme l'action du magnétisme orbital sur le moment magnétique interne de l'électron, on montre que :

$$\mathcal{H}_{spin-orbite} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{mc}\right)^2 \frac{\partial V}{r \partial r} (\vec{L} \cdot \vec{S})$$

où $V(r)$ est l'interaction centrale

Interaction coulombienne

$$V(r) = -Z \frac{\hbar \alpha}{r}$$

Exercice : Vérifier la dimension de l'expression ci-dessus .

Nous avons à L, S fixés différentes valeurs de J

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) \text{ avec } J = \{L - S..L + S\}$$

Cette interaction introduit une levée de dégénérescence des états avec des J différents, il y a $2S+1$ états de J différents pour L et S donnés.

C'est la structure fine des niveaux atomiques.

Exemple pour un atome à un électron on observe deux niveaux fins séparés par :

$$j = l \pm 1/2 \Rightarrow \delta(\vec{L} \cdot \vec{S}) = \left(l + \frac{1}{2}\right) \hbar^2$$

24.6 Physique moléculaire

Les atomes s'assemblent en molécules

— Liaison covalente : molécules symétriques comme H_2

Référence : le livre de Chpolski, physique atomique II, page 387

L'énergie de liaison de la molécule H_2 est calculée théoriquement de l'ordre de 4 eV et la distance des noyaux d'hydrogène est d'environ 0,8 Angström.

— Liaison ionique : H^+Cl^-

L'affinité électronique est très dissymétrique et les atomes se ionisent dans l'état de plus basse énergie. Ils forment une molécule et restent liés par l'attraction électrostatique.

Vocabulaire, références et exercices

Références

Landau et Lifchitz, Mécanique quantique, Mir 1970

Khiezer, Physique atomique, Ellipses

Vocabulaire Equation de Schrödinger, opérateur valeurs propres, moyennes, commutateurs, relations d'incertitudes. Moment cinétique, spin, facteur gyromagnétique, Termes atomiques, rayon de Bohr, magnéton de Bohr. Interaction spin-orbite. Couches et sous-couches, nombre magiques

Exercices

1

25 Physique Nucléaire

Préparation à l'Agrégation de Physique
Résumé de cours

25.1 Introduction

- La table de Mendéléiev établit une relation entre la masse molaire, propriété physique, et les propriétés chimiques des éléments car :

$$\text{chimie} \approx Z \approx \frac{A}{2}$$

- Nomenclature des noyaux atomiques

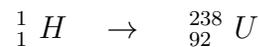
Atome $\rightarrow Z$

Noyau $\rightarrow Z, A = Z + N$

notation pour le noyau : ${}^A_Z X$

| | |
|--------------------------------|----------|
| $Z = \text{Cte}$ | isotopes |
| $N = \text{Cte}$ | isotones |
| $A = N + Z = \text{Cte}$ | isobars |
| $Z \text{ et } N = \text{Cte}$ | isomères |

Il existe 92 éléments chimiques et environ 300 isotopes stables :



On appelle stable les noyaux dont la durée de vie est supérieure à $10^{11} y$ $y = \text{year}$

- Structure nucléaire :

Les noyaux stables sont tels que N est approximativement plus grand et voisin de Z .

$$N \sim Z \text{ avec } Z \sim \frac{A}{2}$$

Il existe des noyaux artificiels très instables dont la durée de vie est courte $\sim 10^{-10} s$

25.2 Propriétés statiques des noyaux

1. La masse au repos :

$$E_0 = Mc^2$$

2. L'énergie de liaison des nucléons : protons et neutrons

$$-E_B = (M_{\text{noyau}} - (ZM_p + NM_n))c^2$$

3. Le défaut de masse atomique :

$$\delta = (M_{atome} - (ZM_H + NM_n))c^2$$

En pratique : si on néglige les énergie de liaison des électrons atomiques .

$$E_B \approx -\delta$$

4. L'unité de masse atomique :

$$uma = M({}^{12}_6C)/12 = 931,49431 \text{ MeV}/c^2 = 1,66054010^{-27} \text{ kg} \pm (0,6)$$

on a : $M_H = 1,007825 \text{ uma}$ pour le neutron $M_n = 1,008665 \text{ uma}$

5. Comportement de l'énergie de liaison en fonction de A pour les noyaux stables :

$$\frac{E_B}{A} \approx 8 \text{ MeV en moyenne avec des variations locales de quelques MeV}$$

Exemples : Deutérium, Fer, Uranium

Comparaison des énergies nucléaires avec les énergies atomiques $\times 10^6$

6. Rayon des noyaux par rapport aux rayons atomiques $\times 10^{-5}$:

Mesure par diffusion élastique d'électrons (expérience de Rutherford) :

$$R = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = r_0 A^{1/3} \text{ avec } r_0 = 1,25 \text{ fm}$$

Les expériences d'Hofstadter aux USA avec des électrons jusqu'à quelques GeV (Standford (USA) dans les années 1960)

7. Le spin d'un noyau :

C'est un moment cinétique quantique qui résulte de la rotation orbitale et de la rotation interne des constituants protons et neutrons :

$$J = L + S$$

Les états propres quantiques sont tels que :

$$J_z = m\hbar$$

$$J^2 = j(j+1)\hbar^2$$

Les noyaux avec A impair(pair) sont des fermions (des bosons).

Les atomes avec N impair (pair) sont des fermions (des bosons).

8. Les moments magnétiques dipolaires

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{l}$$

Le quantum de moment magnétique :

| | | |
|--|---|--------------------------|
| | | 10^{-24} A m^2 |
| pour les électrons le magnéton de Bohr | μ_B | 9,27 |
| pour les noyaux le magnéton nucléaire | $\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p} \ll \mu_B$ | $5,05 \cdot 10^{-3}$ |

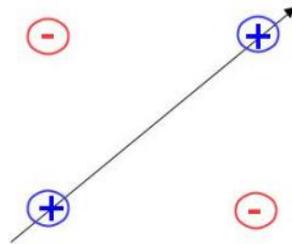
Facteur de Landé pour les noyaux : g

$$\vec{\mu} = g \mu_N \vec{J} \text{ (en unités } \hbar)$$

| facteurs de Landé | g | J |
|-------------------|---------|---------------|
| p | 5,5833 | $\frac{1}{2}$ |
| n | -3,8270 | $\frac{1}{2}$ |
| e | -2,000 | $\frac{1}{2}$ |
| orbital | 1 | entier |

9. Les moments électriques quadrupolaires :

$$Q = \frac{q}{2}(3 \cos^2(\vartheta) - 1) r^2$$



figure

Certains noyaux ont des formes d'ellipsoïdes et portent un moment quadripolaire électrique : (J Ph Pérez électromagnétisme éditions Masson) .

Ordres de grandeur :

$$\frac{Q}{e} \approx 10^{-26} \text{ cm}^2$$

Exemple pour le Deutérium : $\frac{Q}{e} = 0,27 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$

25.3 Modèles nucléaires

1. La goutte liquide :

Interprétation de l'énergie de liaison en fonction de A et Z pour les isotopes stables :

Hypothèses :

- il existe une attraction nucléaire entre nucléons (p ou n)
 L'interaction forte est "symétrique" en n, p
 L'interaction est à courte portée
 L'interaction domine à l'électromagnétisme.
 Les nucléons obéissent au principe de Pauli
 Les nucléons n ou p "préfèrent" s'apparier
- l'interaction forte
isospin ou indép. de charge)
 $\sim fm \cdot 10^{-15} m$
 $\times 10^2$

Conséquences :

$$E_B = B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4$$

$$B_0 = a_v A$$

énergie en volume

$$B_1 = -a_s A^{2/3}$$

correction de surface

$$B_2 = -a_c (Z^2/A^{1/3})$$

répulsion coulombienne

$$B_3 = -a_a ((N - Z)^2/A)$$

équilibre n-p

$$B_4 = \pm \delta \quad \delta = a_p A^{-3/4}$$

"pairing" n et p

Résultat de l'ajustement aux énergies de liaison :

$$\begin{aligned}
 a_v &= 14 \text{ MeV} & a_s &= 13 \text{ MeV} \\
 a_c &= 0,58 \text{ MeV} & a_a &= 19,5 \text{ MeV} & a_p &= 33 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

2. Le modèle en couche :

Les nucléons sont dans les états quantiques d'un potentiel attractifs moyen dont les caractéristiques sont approximativement :

$$\begin{aligned}
 U &= -50 \text{ MeV} \\
 R &= r_0 A^{1/3} & r_0 &= 1,25 - 1,40 \text{ fm}
 \end{aligned}$$

exemple le noyau d'Hélium

Interprétation de l'énergie d'asymétrie ($N \sim Z$) par le principe de Pauli et la structure en couches.

25.4 Dynamique nucléaire

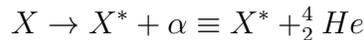
— la radioactivité, deux catégories :

1. désintégration isobariques : $A = \text{Cte}$ (désintégrations bêta, gamma)

| désintégration | ΔZ | réaction |
|----------------------|------------|--|
| β^- | +1 | $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ |
| β^+ | -1 | $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ |
| capture électronique | -1 | $p + e^- \rightarrow n + \nu$ |
| émission gamma | 0 | ${}^A_Z X^* \rightarrow {}^A_Z X + \gamma$ |

2. désintégrations avec émission de nucléons (uniquement les noyaux lourds)

désintégrations alpha : $\Delta A = -4$



— durée de vie, vie moyenne et demi-vie

$$\tau = \lambda^{-1} = \frac{\tau_{1/2}}{\ln(2)}$$

loi de décroissance radioactive :

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow N = N_0 \exp(-\lambda t)$$

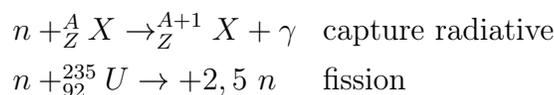
— Radioactivité naturelle :

Isotopes à vie longues $\tau > 10^9 \text{ y}$ + cosmogénèse par le rayonnement cosmique supposé stable depuis des milliards d'années.

Filiations des famille de l'uranium - thorium ${}^{235}_{92}\text{U}$ ${}^{238}_{92}\text{U}$ ${}^{232}_{90}\text{Th}$.

— Les réactions nucléaires :

— Avec les neutrons de quelques $\sim \text{MeV}$ (haute énergie) jusqu'à l'énergie thermique (énergie nulle)



- Avec les particules chargées (α , ions lourds) : seulement à haute énergie ($> qq \text{ MeV}$) à cause de la répulsion coulombienne : Aux énergies inférieures, on observe uniquement la diffusion coulombienne élastique de Rutherford.

$$\text{la barrière coulombienne : } U_c = ZZ' \frac{\alpha \hbar c}{(R + R')}$$

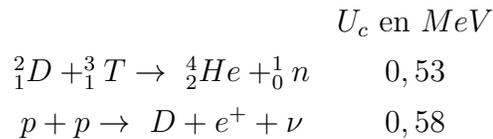
$$R = r_0 A^{1/3} fm \quad \alpha \hbar c = 1,44 \text{ MeV} \cdot fm$$

- Modèle de Fermi : modèle quantique à nucléons indépendants et à température nulle dans un potentiel uniforme U :

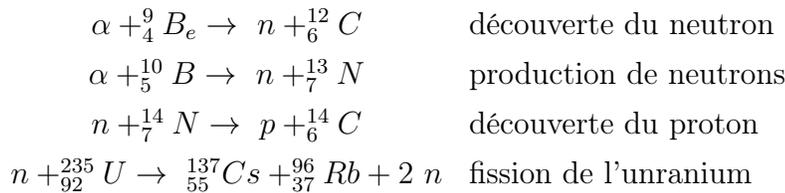
$$p_F = \sqrt[1/3]{\frac{9\pi}{8} \frac{\hbar}{r_0}} \quad E_F = \frac{p_F^2}{2M} = 30, \text{ MeV} \quad E_B \text{ le nucléon le moins lié} = U + E_F$$

Exemples importants de réactions nucléaires -

réactions de fusion



réactions diverses avec des α et des neutrons



On dispose de sources α naturelles dans les minerais d'Uranium et les neutrons interagissent avec les noyaux jusqu'aux énergies nulles ; ces réactions ont eu une importance historique dans la développement de la physique nucléaire.

Cinématique des réactions -

| |
|---|
| Conservation de l'énergie (cinétique + masse) |
| Conservation de la quantité de mouvement |

L'énergie "libérée" dans une réaction nucléaire : Q

$$Q = (m_i - m_f) c^2$$

Vocabulaire, références et exercices

Références

Evans, Le noyau atomique, Dunod 1960

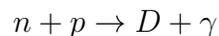
Vocabulaire Noyau atomique, énergie de liaison, barrière coulombienne, désintégrations alpha bêta et gamma, capture électronique, conversion interne, masse atomique, numéro atomique, nombre de masse, matière nucléaire, spin parité, moment magnétique, magnéton nucléaire, isospin, réactions nucléaires, fission, section efficace, vie moyenne, demi-vie, schéma de désintégration, isobare, isotope, isomère .

Exercices

- 1 Les réactions de capture des neutrons thermiques sur l'uranium 235 permettent de mettre en oeuvre la fission en chaîne de l'uranium.

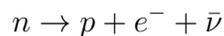
Calculer l'énergie (en eV) et la vitesse des neutrons à la température de 1300 K.

Ces neutrons subissent parfois des captures sur l'hydrogène et la réaction forme du Deutérium puis du Tritium éventuellement.



Déterminer par un calcul relativiste, l'énergie des gammas issus de ces réactions.

Enfin les neutrons peuvent se désintégrer au bout d'un temps assez long (la durée de vie moyenne des neutrons est de 900 s).

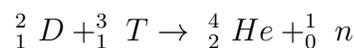


Calculer l'énergie cinétique maximale des électrons issus de la désintégration des neutrons.

- 2 Le Carbone 13 est un noyau de spin 1/2 et dont le moment magnétique est de 0,702 magnéton nucléaire, on veut faire une observation RMN des noyaux de carbone 13.

Quelle est la fréquence RMN du carbone 13.

- 3 Le projet ITER est un programme mondial de fusion nucléaire , la réaction proposée est la fusion deutérium - tritium :



Pourquoi cette réaction est-elle difficile à réaliser ?

Calculer la «hauteur de la barrière coulombienne» dans cette collision.

A quelle température doit-on porter le plasma pour pouvoir réaliser la fusion ?

Pourquoi la réaction de fusion qui se produit dans le soleil ($p + p \rightarrow D + e^+ + \nu$) n'est pas celle qui est envisagée pour ITER ?