

Leçons de physique 2014 (Joévin Giboudot) ¹

LP 0 — Rapport du Jury 2013 sur l'épreuve orale de Leçon de physique	2
I Leçons de Mécanique Newtonienne et Relativiste	
LP 1 — Contact entre deux solides. Frottement.	5
LP 2 — Caractère non galiléen du référentiel terrestre.	7
LP 3 — Appro. gyro. Effets dans les domaines macro. et micro..	9
LP 4 — Lois de conservation en dynamique des systèmes.	11
LP 5 — Cinématique relativiste.	13
LP 6 — Dynamique relativiste.	14
II Leçons de Mécanique des fluides	
LP 7 — Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.	16
LP 8 — *Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide..	19
LP 9 — Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides.	28
III Leçons de Thermodynamique et de Physique Statistique	
LP 10 — Gaz parfait, gaz réels.	32
LP 11 — Premier principe de la thermodynamique.	36
LP 12 — Évolution et condition d'équilibre d'un système thermodyn. fermé.	39
LP 13 — Appl. des 2 ^{es} princ. de la thermo. au fonct ^t des machines thermi..	43
LP 14 — Étude thermo. d'un syst. constitué par 1 corps pur sous plusieurs phases.	46
LP 15 — *Étude stat. d'un syst. en contact avec un thermostat. Proba. canonique.	48
LP 16 — *Rayonnement d'équilibre thermique. Corps noir.	57
LP 17 — Phénomènes de transport.	65
LP 18 — Flux conductifs, convectifs, radiatifs, bilans thermiques.	68
IV Leçons sur le Magnétisme et l'Induction	
LP 19 — Conversion de puissance électromécanique.	71
LP 20 — Induction électromagnétique.	74
LP 21 — Résonance magnétique nucléaire.	77
V Leçons sur l'Électricité dans l'ARQS et l'Électronique	
LP 22 — Rétroaction et oscillations.	81
LP 23 — *Traitement analog. d'un signal élec. Étude spectrale..	87

VI Leçons sur les Ondes.

LP 24 — Ondes progressives, ondes stationnaires.	96
LP 25 — *Ondes acoustiques.	98
LP 26 — Propagation dans un milieu dispersif.	101
LP 27 — Propagation guidée des ondes.	103
LP 28 — Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques.	106
LP 29 — Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs.	109
LP 30 — *Prop. et appli. du rayonnement dipolaire électrique.	110

VII Leçons sur l'Optique Géométrique et Ondulatoire

LP 31 — Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat.	115
LP 32 — Interférences à deux ondes en optique.	119
LP 33 — Interféromètres à division d'amplitude.	121
LP 34 — Diffraction de Fraunhofer.	123
LP 35 — Diffraction par des struct. pér. dans diff. dom. de la phys.	126

VIII Leçons sur la Physique de la Matière

LP 36 — Absorption et émission de la lumière.	131
LP 37 — Aspects corpusculaires du rayonnement. Notion de photon.	134
LP 38 — Aspects ondulatoires de la matière. Notion de fonct° d'onde.	137
LP 39 — Confinement de l'électron et quantification de l'énergie.	139
LP 40 — Effet tunnel (Agreg 2014, Note 14/20).	142
LP 40 — Effet tunnel.	145
LP 41 — Fusion, fission.	148
LP 42 — Oscillateurs à 2 degrés de lib. en méca. classique et en méca. quantique.	152
LP 43 — La molécule : stabilité, énergie.	155
LP 44 — Capacités thermiques : descript°, interprétat° μ scopiques.	157
LP 45 — Paramagnétisme, ferromag. : approximat° du champ moyen.	160
LP 46 — Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques.	164
LP 47 — Mécanismes de la conduction électrique dans les solides.	167

IX Leçons de Physique Générale

LP 48 — Phénomènes de résonance dans diff. dom. de la physique.	172
LP 49 — Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités.	176
Annexe A — Les sources lumineuses.	179

1. J'ai préparé ces plans de leçons au sein de la prépa agrég de Toulouse au cours de l'année 2013/2014. Pour toutes questions ou erreurs, contactez-moi svp : legolas1038@hotmail.com.

LP 0 — Rapport du Jury 2013 sur l'épreuve orale de Leçon de physique

Déroulement de l'épreuve

Cette épreuve consiste en la présentation d'une leçon de cinquante minutes, dont le sujet a été tiré au sort par le candidat parmi une liste qui figure dans le rapport du jury de l'année précédente. A l'issue de la présentation, le jury s'entretient avec le candidat pendant une durée maximale de vingt minutes. Cet entretien permet au jury d'interroger le candidat sur ses choix didactiques et pédagogiques, d'aborder les points de la leçon qui seraient restés imprécis ou obscurs, et enfin de sonder l'assise et la profondeur de ses connaissances.

Le candidat dispose de quatre heures pour préparer sa leçon. Au cours de cette préparation, il a accès à l'ensemble des documents de la bibliothèque du concours. Cette bibliothèque possède de très nombreux ouvrages, de tous niveaux, dont la liste est disponible en ligne sur le site <http://agregation-physique.org/>. Le candidat bénéficie également durant cette préparation du soutien du personnel technique pour la mise en place du matériel expérimental souhaité pour illustrer la leçon. Les expériences sont préparées et réalisées conformément aux instructions du candidat ; cependant, leur présentation devant le jury s'effectue sous la seule responsabilité du candidat et en l'absence de technicien.

Un ordinateur et un vidéoprojecteur sont disponibles dans chaque salle. Le candidat peut ainsi projeter des documents tirés d'une base de données (schémas descriptifs, animations, photographies...) et classés par thèmes. Les logiciels usuels (Word, Excel, Maple...) sont installés sur les ordinateurs. Le candidat dispose également d'un rétroprojecteur ; il doit apporter lui-même ses transparents et feutres.

Quelques remarques d'ordre général

La leçon à l'oral de l'agrégation

La leçon est une épreuve permettant au jury d'évaluer les capacités du candidat à transmettre un message clair et cohérent qui s'appuie sur des connaissances maîtrisées. Il ne s'agit donc pas de tenter d'éblouir le jury en exposant rapidement une vaste étendue de connaissances sur le sujet présenté, mais de se placer dans une situation d'enseignement devant un public d'étudiants qui découvrirait pour la première fois le sujet de la leçon.

L'intitulé des leçons en impose bien évidemment le sujet, même si c'est de façon assez large. Tout développement hors sujet, même correctement traité, est mal perçu par le jury, qui considère que le candidat n'a pas compris le sujet ou qu'il a tenté de le contourner.

Une leçon s'inscrit dans une progression pédagogique. Si certaines leçons sont des leçons d'introduction de concepts nouveaux, d'autres donnent l'occasion d'un approfondissement de certaines notions. Le candidat doit donc préciser dès le début de sa leçon le

niveau auquel il se place (classes préparatoires, première année, seconde année ou troisième année de licence), les pré-requis nécessaires et les objectifs de la leçon. Il aura aussi à cœur de faire ressortir clairement quelques messages forts de sa leçon.

Certaines leçons concernent des domaines tellement vastes qu'il est impossible d'être exhaustif : des choix sont à faire, qui doivent être précisés et justifiés (cette remarque ne concerne évidemment pas les sujets dont l'intitulé comporte la conjonction « et », qui impose donc l'étude de tous les aspects énoncés). Dans tous les cas, le candidat ne doit pas se limiter, dans un exposé purement descriptif, à commenter des résultats. Le jury attend aussi que ces résultats soient établis.

Les attentes du jury

La leçon est par essence une épreuve destinée à évaluer les capacités à enseigner. Il est donc préférable d'exposer des concepts simples, bien maîtrisés et bien illustrés, que se lancer dans des développements trop complexes, qui ne sauraient de toute façon susciter l'admiration du jury. Le candidat doit toujours considérer qu'il se place de fait dans une situation d'enseignement devant un public d'étudiants.

Le jury est particulièrement sensible à la précision, à la rigueur, à l'honnêteté intellectuelle des candidats et à la logique du développement de la leçon. Les différentes grandeurs et notions doivent être présentées avec soin et, le cas échéant, illustrées par des valeurs numériques pertinentes, faisant référence à des conditions expérimentales bien définies. Les limites de validité des modèles présentés doivent toujours être clairement explicitées. Le jury est sensible à l'utilisation de l'analyse dimensionnelle et à la discussion d'ordres de grandeur. Les conventions d'orientation et les signes des différentes grandeurs doivent être discutés avec soin, au besoin grâce à un schéma explicite, qui permet souvent de lever bien des ambiguïtés. C'est en particulier dans les domaines de l'induction électromagnétique ou de la thermodynamique que les candidats se révèlent parfois trop négligents ou imprécis, ce que le jury est enclin à sanctionner. De façon plus générale, on comprendra que le jury puisse être contrarié par le manque de rigueur que révèle l'absence de définition des systèmes sur lesquels le candidat est amené à raisonner, les erreurs d'homogénéité, les égalités de grandeurs scalaires et vectorielles, ou encore l'absence d'unités dans l'écriture des valeurs numériques.

Le candidat peut avoir recours, pour illustrer sa leçon, à un ensemble de documents, extraits des ouvrages de la bibliothèque et numérisés. L'utilisation de ces diapositives permet de gagner du temps. Il faut néanmoins veiller à la concordance des notations de la diapositive et de l'exposé écrit au tableau, ou, à défaut, il convient d'explicitement les correspondances éventuelles. Cependant, si l'utilisation d'une diapositive permet de projeter un schéma complexe, il importe aussi que le candidat révèle son aptitude à tracer un graphe ou un schéma simple de façon soignée. Cela peut lui donner l'occasion, par exemple, d'analyser le comportement asymptotique de telle ou telle grandeur, et par là

même d'apporter du sens à son exposé.

Les démonstrations des résultats importants sont attendues. Pour autant, établir une relation particulière ne saurait être une fin en soi. Il est crucial de dégager son sens physique. Le candidat peut à cet effet commenter l'influence des différentes grandeurs physiques impliquées, analyser un comportement asymptotique, illustrer le résultat par une représentation graphique, une évaluation d'ordre de grandeur... Dans le même ordre d'idée, il semble important au jury, lorsque le candidat fait référence à une expérience historique, qu'il précise dans quel but cette expérience fut réalisée et quelles en furent les conclusions.

Le jury invite les candidats, au cours de leur année de préparation, à s'interroger afin de prendre du recul et de donner un sens physique aux différentes relations. De même, il est important de savoir dégager la généralité des concepts présentés. Par exemple, lorsque la notion de facteur de qualité est présentée, il est opportun de mentionner son importance dans d'autres domaines de la physique. De même, la notion de quantification peut être abordée dans différents contextes.

L'ensemble des leçons permet d'aborder les grandes étapes de l'élaboration des connaissances en physique. Il est regrettable à cet égard de constater que les candidats ignorent les noms des physiciens associés aux notions qu'ils présentent, peuvent avoir une idée très imprécise de la chronologie des différentes avancées, ou qu'ils se trompent parfois d'un siècle quant à la date d'une découverte ou de l'élaboration d'une théorie.

Plusieurs leçons exigent de présenter des calculs. Nous recommandons au candidat d'en motiver la nécessité et d'en présenter l'objectif avant de les mener. Les systèmes concernés doivent être clairement circonscrits. De même, les hypothèses qui encadrent ces calculs doivent absolument être explicitées (cela constitue d'ailleurs une partie du travail que le candidat est invité à faire lors de son année de préparation). Dans de rares cas, la présentation exhaustive de la suite des calculs au tableau peut être trop longue relativement au temps imparti : le candidat peut alors avoir recours à des transparents. Toutefois, le jury souhaite d'une part avoir le temps de lire chaque ligne du transparent et d'autre part que le gain de temps correspondant soit consacré à une interprétation ou des commentaires physiques des résultats. Naturellement, il n'est pas raisonnable de mener tous les calculs sous forme de transparents. Les calculs ne doivent pas servir de refuge pour « gagner » du temps. De plus, ils peuvent dans certains cas être évités grâce à des arguments dimensionnels. Rappelons une fois encore que la priorité doit être donnée à l'interprétation physique : il faut « faire parler » les équations !

Les illustrations expérimentales

Les illustrations expérimentales sont vivement encouragées. Dans la plupart des cas, il est recommandé de présenter un schéma clair et annoté de son expérience soit au tableau, soit sur transparent. Présentée dans une démarche inductive ou déductive, l'expérience doit être interprétée avec soin et exploitée au maximum.

Il n'est pas nécessaire de multiplier ces expériences mais il est indispensable de bien

les utiliser. Si le choix est fait de mettre en place une expérience pendant le temps de préparation, il faut non seulement la mettre en oeuvre effectivement pendant la leçon, mais aussi l'analyser et non pas simplement la considérer comme une illustration de la théorie. Il faut également être en mesure de répondre aux questions relatives au montage expérimental et sur le matériel utilisé. Ces remarques s'appliquent également à la présentation d'expériences historiques.

Quelques remarques sur la forme

De nombreux candidats choisissent de laisser le plan au tableau ou de l'écrire à l'avance. Il ne s'agit pas d'une demande du jury, cela n'est pas du tout indispensable, en particulier lorsque le plan occupe la moitié de l'espace disponible. Cependant, il est essentiel que ce plan apparaisse clairement au cours de la présentation et il faut toujours réécrire le titre ou le label des paragraphes afin de permettre au jury de suivre.

Le candidat doit se soucier de la lisibilité de son exposé : clarté de l'écriture (au tableau ou sur les transparents), des schémas explicatifs, taille raisonnable des caractères, gestion rationnelle du tableau. Un transparent fugitivement exposé, un tableau trop tôt effacé sont mal perçus. Le jury apprécie peu les prestations dans lesquelles le candidat, le dos trop souvent tourné vers le jury, recopie ses notes au tableau. De même, le jury est particulièrement sensible au dynamisme, et à l'enthousiasme avec lesquels un candidat délivrera son message, et qui traduira son goût pour les sciences physiques.

Enfin, le jury déconseille fortement l'utilisation de « flex-cam » pour projeter directement les pages d'un ouvrage.

L'entretien

Au cours de l'entretien, le jury pose différents types de questions. Il peut être amené à demander des éclaircissements sur certains développements de la leçon ou à prolonger à un niveau plus avancé certains points de la leçon. Le candidat peut naturellement appuyer ses réponses sur ses connaissances à tous les niveaux d'enseignement.

Leçons de physique pour la session 2014

Pour la session 2014, le jury a souhaité modifier l'intitulé de certaines leçons.

Les mots clés « *Exemples* » et « *Applications* » ont disparu des intitulés. Cela ne traduit pas une volonté du jury d'aller vers une plus grande conceptualisation. Bien au contraire, pour chaque leçon, les candidats doivent ancrer leur exposé dans le réel et l'illustrer par des exemples pertinents. Toutefois, il convient de ne pas multiplier les exemples à l'excès, au risque de transformer la leçon en catalogue ou en inventaire. L'étude de quelques exemples bien maîtrisés et exploités permet souvent d'introduire ou d'illustrer plus clairement certains concepts que ne le ferait un développement théorique désincarné.

D'autres intitulés ont été simplifiés. Même s'il n'existe pas de leçon type à l'aune de laquelle le jury évaluerait toute prestation, les candidats veilleront à faire des choix cohé-

rents et à développer les points qui leur paraissent essentiels pour traiter le sujet proposé.

Les commentaires qui suivent précisent les attentes du jury pour certains intitulés nouveaux, et font référence à la numérotation des leçons pour la session 2014. Les remarques précédentes portant sur les leçons de la session 2013 restent bien sûr d'actualité.

Première partie

Leçons de Mécanique Newtonienne et Relativiste

LP 1 — Contact entre deux solides. Frottement.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 16/10/2013 par *Mégane Rodriguez-Jubault* et corrigée par *P. Labastie*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Contact entre deux solides. Frottement de glissement. Applications au glissement et au roulement*.

Rapports du Jury

☞ (2012) – “Les candidats sont invités à réfléchir sur la notion de contact ponctuel et à la réalité microscopique de ce contact. Il peut être intéressant d'illustrer et discuter la différence entre coefficients de frottement statique et dynamique.”

☞ (2010, 2009) – “Il importe de distinguer le cas du contact ponctuel et celui du contact étendu sur une surface. La distinction de nature entre les deux lois de Coulomb : condition nécessaire de non glissement et loi du frottement de glissement, n'est pas suffisamment dégagée. Les phénomènes d'hystérésis associés au frottement solide sont oubliés.”

☞ (2008) – “L'approche énergétique du contact doit être développée. Le roulement est trop rarement abordé. Il convient de s'interroger sur les passages entre les différents régimes de glissement et de non glissement ¹.”

☞ (2007) – “L'approche énergétique du contact doit être développée ². Le roulement est trop rarement abordé.”

☞ (2006) – “L'approche énergétique du contact doit être développée et une description microscopique peut être esquissée.”

☞ (2005) – “Il serait pertinent d'étudier les aspects énergétiques et de décrire l'exemple d'un mouvement où intervient du roulement avec glissement et sans glissement.”

☞ (2004) – “Le candidat doit être en mesure de faire la mise en équation des expériences qu'il présente. L'aspect cinématique du glissement est souvent abordé avec insuffisamment de soin. Des confusions persistent entre absence de glissement et absence de mouvement ainsi qu'entre absence de glissement et absence de frottement. L'étude d'un mouvement de roulement constitue une illustration intéressante.”

☞ (2002) – “L'énoncé des lois de Coulomb relatives au frottement de glissement est souvent incomplet ³. Il faut éviter la confusion entre puissance des actions subies par un des solides en contact, et puissance totale des actions de contact. L'origine microscopique des actions de frottement mérite d'être évoquée.”

☞ (2000) – “Les différents référentiels utilisés doivent être précisés avec soin. Les aspects énergétiques doivent être abordés. L'origine microscopique des forces de frottement mérite d'être évoquée.”

☞ (1999) – “Il faut préciser les référentiels et distinguer le mouvement du point d'un solide au voisinage du contact du mouvement du point de contact. Les candidats limitent leur exposé au frottement de glissement ; les mouvements de roulement (ou de pivotement) ne sont pas interdits. L'aspect microscopique est rarement abordé.”

1. Un exemple simple consiste à considérer le cas d'un verre d'eau (ou d'une assiette) posé sur une feuille, l'ensemble reposant sur une table. On tire alors d'un coup sec la feuille, et on peut se poser la question de savoir à quelle condition le verre (ou l'assiette) reste immobile sur la table. On consultera avec profit l'excellent ouvrage de François Graner intitulé *Petits problèmes de physique* aux éditions Springer, et le sujet du concours commun Mines-Ponts 2001 seconde épreuve, qui aborde de façon générale la notion de secousse en physique.

2. La question est abordée dans l'ouvrage de H. Gié et de J.P. Sarmant, *Mécanique* deuxième année aux éditions Tec & Doc.

3. Un énoncé complet est par exemple disponible p. 188 du cours de S. Olivier, H. Gié et J.P. Sarmant, *Physique spé PC*,PC* aux éditions Tec & Doc.

☞ (1998) – “Les candidats sont invités à ne pas restreindre leurs exemples à des mouvements de translation. Il est rappelé que la loi d'Amontons, à savoir que la force de friction ne dépend que de la charge et non de l'aire du contact, est au moins aussi importante que les lois de Coulomb ⁴.”

☞ (1996) – “Il convient de préciser que, si un mouvement de pivotement (resp. de roulement) est possible autour d'un axe, le moment de pivotement (resp. de roulement) est nul, si on néglige les frottements de pivotement (resp. de roulement).”

Plan

1 Contacts entre deux solides

1.1 Les différents types de contacts

1.2 Modèle macroscopique : modélisation des actions de contact

1.3 Origine microscopique des forces de contact

1.4 Phénomènes de pivotement et de roulement

1.5 Vitesse de glissement

2 Les lois du frottement solide

2.1 Phénomènes d'adhérence et de frottement

2.2 Lois phénoménologiques

2.3 Approche géométrique des lois

2.4 Approche énergétique

3 Applications

3.1 Marche à pied

3.2 Cas du roulement sans glissement : roue motrice

Introduction

1 Contacts entre deux solides

1.1 Les différents types de contacts

1.2 Modèle macroscopique : modélisation des actions de contact

1.3 Origine microscopique des forces de contact

1.4 Phénomènes de pivotement et de roulement

1.5 Vitesse de glissement

4. Sur les modèles de contact entre deux solides, on pourra consulter l'ouvrage de Jacques Duran, *Sables, poudres et grains : Introduction à la physique des milieux granulaires* aux éditions Eyrolles ; ou encore mieux, l'article de Tristan Baumberger intitulé *Contact Dynamics and friction at a solid-solid interface : material versus statistical aspects* qui explique simplement les modèles de Greenwood et Tabor.

2 Les lois du frottement solide

2.1 Phénomènes d'adhérence et de frottement

2.2 Lois phénoménologiques

2.3 Approche géométrique des lois

2.4 Approche énergétique

3 Applications

3.1 Marche à pied

3.2 Cas du roulement sans glissement : roue motrice

Remarques

☞ C'est vraiment une leçon de physique, avec des lois phénoménologiques. Ce sont des phénomènes très complexes d'un point de vue microscopique mais on arrive à le traiter avec des modèles simples.

☞ Insister sur le fait que le contact ponctuel est un modèle & message à faire passer : phénomènes très complexes que l'on peut traiter avec des modèles simples.

☞ Noter $\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2}$ et non \mathbf{R} . C'est plus important de souligner ceci que de définir trop précisément la vitesse de glissement.

☞ L'exemple de la craie ne néglige pas les phénomènes de pivotement et de roulement. On pourrait prendre une balle pour avoir un contact ponctuel.

☞ Pour les phénomènes d'hystérésis : il faut une force plus grande pour mettre en solide le mouvement que pour l'arrêter. Idée de régime transitoire (cf ABS, freinage des avions...)

☞ On peut se contenter du cône d'adhérence car le cône de frottement ne sert à rien. Il sera alors appelé cône de frottement. Le terme d'adhérence est à enlever.

☞ Pour le solide sur le plan incliné, on pourrait faire trois schémas : 1) plan peu incliné et \mathbf{R} dans le cône 2) cas limite 3) plan très incliné et \mathbf{R} hors du cône.

☞ Pour la roue motrice, on pourrait montrer que la force de frottement a un travail moteur. Approche énergétique. Cette partie est à mieux intégrer au plan.

☞ Autres : démarrage en montée...! Exemples vis et échelle : trop dangereux!

Questions

➔ Une craie qui roule sans glisser sur une table finit par s'arrêter, pourquoi ?

➔ Pour illustrer l'intérêt de la notion de cône de glissement, justifier que le filet d'une vis à bois est plus incliné que celui d'une vis à métal.

➔ Que peut-on dire de la puissance totale des actions de contact ? Est-ce toujours vrai pour un sous système du système d'étude ? Illustrer sur un exemple simple.

➔ Comment évolue le coefficient de friction dynamique avec la vitesse de

glissement ? Tracer sommairement son évolution et la justifier.

➔ Donner une image simple du coefficient de friction à l'échelle microscopique.

➔ Discuter et commenter la notion de contact ponctuel.

➔ En quoi consiste la physique de la lubrification ? Comment l'illustrer simple à l'aide d'une table et d'une feuille de papier ?

➔ Quel lien faites vous entre friction et son ⁵ ?

➔ Qu'est-ce que le phénomène de "stick-slip" ? Où le rencontre-t-on ?

➔ Y a-t-il une différence entre le coefficient de frottement μ de glissement dans le cas où $v_g = 0$ et $v_g \neq 0$ ⁶ ? Citer des applications du phénomène d'arc-boutement ⁷ ? Quel est le coefficient de frottement le plus élevé : statique ou dynamique ? Au niveau microscopique, ayant parlé des irrégularités des surfaces de contact rendant complexe la modélisation des phénomènes, on m'a demandé à quelle échelle il s'agissait de raisonner. Ayant parlé de l'utilisation de couche lubrifiante pour limiter les frottements, on m'a demandé de préciser. Question sur le cas d'une roue en rotation sur un plan horizontal : je n'ai pas su où le jury voulait en venir.

5. à ce sujet, on pourra consulter l'article intitulé crissement et grincements dans l'ouvrage d'I. Berkes : *la physique de tous les jours*.

6. une très belle illustration de la différence entre les coefficients statique et dynamique est donnée par l'expérience de la règle platte (due à Sommerfeld) qu'on trouvera détaillée, par exemple, p. 219 du cours de S.Olivier, H. Gié et J.P. Sarmant, Physique spé PC*,PC aux éditions Tec & Doc.

7. un cas simple est discuté p. 79 du cours de mécanique deuxième année de H. Gié et J.P. Sarmant aux éditions Tec & Doc, et l'application répandue au cas des vis dans le classique cours de Bertin, Faroux et Renault paru aux éditions Dunod.

LP 2 — Caractère non galiléen du référentiel terrestre.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 09/10/2013 par *Maxime Bordoux* et corrigée par *P. Labastie*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Caractère non galiléen du référentiel terrestre. Conséquences..*

Rapports du Jury

☞ (2011) – “Il est important de dégager le cas où l'on peut négliger le caractère non galiléen d'un référentiel.”

☞ (2010, 2009) – “Les illustrations peuvent également concerner la mécanique des fluides¹. Il est avantageux de supposer connues les lois de composition des vitesses et des accélérations accompagnant un changement de référentiel.”

☞ (2008, 2007, 2006) – “Comme dans toute leçon de mécanique, il est primordial de définir correctement les référentiels. Les définitions de pesanteur et de verticale sont souvent confuses. Il est essentiel d'estimer les ordres de grandeur des différents termes². Cette leçon n'est ni une leçon de cinématique, ni une leçon sur les référentiels non galiléens.”

☞ (2002) – “ Des éléments concrets sont à fournir sur les conséquences du caractère non-galiléen du référentiel terrestre. On peut évoquer les notions de masse gravitationnelle et de masse inerte. Il peut être intéressant de montrer que les effets de la force d'inertie de Coriolis résultent simplement d'un changement de référentiel³ ”

☞ (2001) – “ Il faut prendre le temps de présenter avec précision les référentiels, et réfléchir au concept d'étoiles fixes⁴.”

☞ (1999) – “ La différence entre jour sidéral et jour solaire est souvent ignorée⁵. Des exemples moins classiques que la déviation vers l'Est ou le pendule de Foucault peuvent être développés, comme par exemple la circulation atmosphérique ou le repérage des courants marins par altimétrie⁶. La mise en évidence de la rotation de la Terre par interférométrie optique peut aussi être abordée.”

☞ (1998) – “ Dans le cas des interactions gravitationnelles entre corps étendus, la résultante des forces s'exerçant sur l'un deux n'est pas en général égale à sa masse, multipliée par le champ gravitationnel en son centre d'inertie... sauf si le corps considéré est de symétrie sphérique⁷. Si la précession des équinoxes ne doit pas être systématiquement traitée, il est cependant conseillé d'en connaître l'existence et l'origine.”

☞ (1997) – “ On peut considérer comme acquises les lois fondamentales de la mécanique dans un référentiel non galiléen. La distinction entre jour sidéral et jour solaire moyen n'est

1. à ce sujet on pourra consulter avec profit l'ouvrage de Mécanique de P. Brasselet de 1ère année aux éditions PUF, ainsi que l'épreuve A du concours de l'agrégation, 1999 disponible par exemple dans le volume d'annales corrigées de Paul Bourdet aux éditions DUNOD.

2. Sur ces deux points, on consultera avec profit l'ouvrage intitulé *La physique par la pratique* de B. Portelli et J. Barthes.

3. On consultera avec profit l'ouvrage de Pascal Brasselet aux éditions PUF à ce sujet.

4. Sur ce point, on pourra consulter l'ouvrage de H. Gié et J.P. Sarment aux éditions H & K.

5. Sur ce point, on consultera l'ouvrage de P. Brasselet ou le collectif H-Prépa de mécanique de première année.

6. Sur ce point on pourra consulter l'incontournable ouvrage de P. Brasselet, intitulé Mécanique MPSI-PCSI, paru aux éditions PUF.

7. Sur ce point, on composera sur l'épreuve A tombée à l'agrégation de physique en 1999.

toujours pas sue!” ”

Plan

1 Référentiels et principe fondamentale de la dynamique

1.1 Les référentiels

1.2 Principe fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre

2 Les marées

2.1 Ordre de grandeur

2.2 Marées océaniques

3 Non sphéricité de la terre

4 Le poids et le champ de pesanteur

5 Les effets de la force de Coriolis

5.1 Ordre de grandeur

5.2 Déviation vers l'est

5.3 Mouvements horizontaux : le pendule de Foucault

1 Référentiels et principe fondamentale de la dynamique

1.1 Les référentiels

1.2 Principe fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre

2 Les marées

2.1 Ordre de grandeur

2.2 Marées océaniques

3 Non sphéricité de la terre

4 Le poids et le champ de pesanteur

Ici on calcule la contribution de l'accélération d'inertie d'entraînement sur la valeur de la pesanteur g que l'on a expérimentalement. Elle est petite mais présente !

5 Les effets de la force de Coriolis

Avec Coriolis on sait que le référentiel terrestre n'est le référentiel du centre de l'Univers. On sait que la terre est en mouvement.

5.1 Ordre de grandeur

5.2 Déviation vers l'est

5.3 Mouvements horizontaux : le pendule de Foucault

Questions

- ➔ Avez-vous lu l'article paru dans le BUP 850 de janvier 2003 par Jean Savardière et intitulé : les preuves expérimentales des mouvements de la terre ?
- ➔ Pourquoi constate-t-on une variation de g avec la latitude ?
- ➔ Quel lien faites-vous entre jour sidéral et jour solaire (Rapport 1997) ?
- ➔ La vitesse de rotation de la terre reste-t-elle constante lors du parcours de sa trajectoire au tour du soleil ?
- ➔ Proposer une interprétation de la déviation vers l'Est en vous plaçant dans le référentiel géocentrique [Consulter *La physique par la pratique*].
- ➔ Quelles expériences pourraient venir illustrer cette leçon ?
- ➔ Y a-t-il précession du vecteur rotation de la terre ? Si oui, sur quelle échelle de temps ?
- ➔ Est-il vrai que la force de Coriolis est responsable du sens de rotation de l'écoulement de l'eau dans un lavabo ? Estimer un ordre de grandeur de son effet face à celui des forces d'inertie⁸.

8. Sur ce sujet, on pourra consulter l'ouvrage de M. Fermigier intitulé Hydrodynamique physique. Problèmes résolus avec rappels de cours. paru chez Dunod.

LP 3 — Approximation gyroscopique. Effets dans les domaines macroscopique et microscopique.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 09/04/2014 par *Victor Fontan* et corrigée par *P. Labastie*.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012, 2011) – “Les candidats ignorent trop souvent les principes de fonctionnement et les performances des gyroscopes modernes.”

☞ (2010, 2009) – “Les hypothèses de l’approximation sont très rarement énoncées clairement et encore plus rarement vérifiées dans le traitement des applications. L’équation de précession est un concept utile.”

☞ (2008) – “ Une illustration expérimentale aide à faire passer le message de cette leçon. Il faut prévoir assez de temps pour traiter le domaine microscopique. Le lien avec l’approche quantique peut être évoqué en évitant de *sombrer* dans le détail des calculs. Il est rappelé que le moment cinétique et le vecteur rotation ne sont *a priori* pas colinéaires.”

☞ (2007) – “ Une illustration expérimentale aide à faire passer le message de cette leçon. Il faut prévoir assez de temps pour traiter le domaine microscopique. Le lien avec l’approche quantique peut être évoqué en évitant de *sombrer* dans le détail des calculs.”

☞ (2006) – “ Une illustration expérimentale aide à la compréhension de cette leçon. Un temps suffisant doit être consacré au domaine microscopique. Les équations d’évolution du moment magnétique en présence d’un champ magnétique tournant doivent être clairement établies dans le repère tournant. Les conditions de résonance et les applications de la résonance magnétique doivent être discutées. Le lien avec l’approche quantique peut être évoqué mais il faut éviter de *sombrer* dans le détail des calculs.”

☞ (2005) – “La réalisation d’expériences est toujours appréciée dans cette leçon, surtout si elles sont mises clairement en relation avec les résultats théoriques. Comme dans toute leçon de mécanique, les référentiels doivent être correctement définis. La notion de référentiel barycentrique, quand elle est introduite, est souvent confuse. Le temps imparti au domaine microscopique est trop court.”

☞ (2004) – “Cette leçon peut et doit être illustrée par des expériences pertinentes. Il faut veiller à consacrer un temps suffisant à l’étude du domaine microscopique.”

☞ (2002) – “Les applications citées ou les expériences présentées pour illustrer la notion de couple gyroscopique sont souvent très mal comprises. L’aspect *paradoxal* peut être évoqué¹. Pour la résonance magnétique nucléaire, il faut décrire soigneusement le dispositif, dégager l’origine physique du mot *résonance* et préciser la nature du signal détecté. Le magnétisme atomique ne peut pas être limité au magnétisme orbital.”

☞ (2001) – “Les conditions de validité de l’approximation gyroscopique sont rarement exposées avec précision. Une expérience bien exploitée doit être présentée. Les applications dans le domaine microscopique doivent être exposées de façon crédible.”

☞ (2000) – “Cette leçon doit comporter une illustration expérimentale. Les applications dans le domaine microscopique doivent être présentées de façon crédible, en particulier la R.M.N., pour laquelle une interprétation quantique peut être donnée² ”

1. Cet aspect est particulièrement bien traité dans l’ouvrage de mécanique de Sivoukhine, aux éditions Mir.

2. Les notions d’échos de spin et de RMN sont particulièrement bien traités dans l’excellent ouvrage de Robin Kaiser, intitulé *Petits problèmes de physique* et paru aux éditions Springer, collection scopos.

☞ (1999) – “ Un effort de pédagogie semble indispensable pour bien présenter la RMN pour laquelle une interprétation quantique est bienvenue.”

☞ (1998) – “Il convient que ne soient sacrifiées ni les applications macroscopiques - par méconnaissance du sujet -, ni les applications microscopiques - par manque de temps. Dans l’approximation gyroscopique, il est important de souligner à la fois le caractère constant du module du moment cinétique et celui de sa projection sur la direction d’action de la force appliquée.”

☞ (1997) – “Montrer l’unité de la leçon ; l’aspect microscopique (incluant en particulier la résonance magnétique nucléaire et ses applications médicales) est trop souvent négligé. Les gyroscopes employés pour l’illustration expérimentale du sujet sont souvent sous-utilisés et ne sont pas lancés suffisamment fort pour qu’effectivement l’approximation gyroscopique soit valable ! ”

Bibliographie

[1] Faroux, *Mécanique 2*. Dunod, 1997.

Plan

1 Approximation gyroscopique

2 Effets dans les domaines macroscopiques

3 Effets dans les domaines microscopiques

3.1 RMN

1 Approximation gyroscopique

cf. [1] p.208.

2 Effets dans les domaines macroscopiques

3 Effets dans les domaines microscopiques

3.1 RMN

L’approximation gyroscopique ici provient du fait que l’on considère que la vitesse de précession de l’électron sur son orbite est très inférieure à la vitesse de rotation de l’électron autour du noyau. Ce qui fait que l’on peut assimiler le moment magnétique au moment cinétique de l’électron (lié par le facteur gyromagnétique).

Questions pour faire réfléchir

➔ Pour illustrer cette leçon, vous souhaitez présenter une toupie. Comment mesurer sa vitesse de rotation simplement, devant le jury ?

➔ à quelle condition la formulation de l’approximation gyroscopique porte-t-elle sur les vitesse de rotation et non sur les moments d’inertie ?

- ➔ D'où vient le mot *nutaton*, qui apparaît entre autre dans l'expression *angle de nutation* ?
- ➔ Pourriez-vous discuter les conditions de validité de l'approximation gyroscopique pour la roue d'un vélo ? Et pour celle d'une moto³ ?
- ➔ Où se situe exactement l'approximation gyroscopique dans l'exemple de la RMN ? ($B_1 \ll B_0$). Quelle différence faites vous entre IRM et RMN ?
- ➔ Quel est le lien entre le principe de Le Chatelier et le fonctionnement d'un gyroscope ?
- ➔ Qu'est-ce que la précession de Larmor ?
- ➔ Avez-vous lu l'article paru dans le BUP 587, page 85 et intitulé *Aspects modernes des gyroscopes* ?

3. On consultera avec profit l'ouvrage intitulé *La physique par la pratique* de B. Portelli et J. Barthes.

LP 4 — Lois de conservation en dynamique des systèmes.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 09/10/2013 par *Anaëlle Contensaux* et corrigée par *P. Labastie*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Exemples d'utilisation des lois de conservation en dynamique des systèmes*.

Rapports du Jury

☞ (2010, 2009) – “Le titre est général. Les lois de conservation sont à illustrer absolument et la physique est génèreuse en exemples variés. Les exemples les plus pertinents sont ceux où les deux corps sont de masses comparables¹. Il est très maladroit d'insister sur des illustrations où justement (le système étudié n'étant par exemple pas isolé), il n'y a pas de conservation simple.”

☞ (2008) – “Il existe d'autres exemples que les interactions newtoniennes. La distinction entre le mouvement d'ensemble et le mouvement barycentrique est fondamentale ”

☞ (2007) – “L'introduction de la particule fictive ne se fait pas au hasard ! Il faut montrer l'équivalence du problème réel avec ce modèle.”

☞ (2006) – “Le passage du système à deux corps à la particule fictive constitue le point clé de la leçon. La confrontation du modèle aux résultats expérimentaux est nécessaire (en astronomie ou en spectroscopie de l'atome d'hydrogène par exemple). Il est à noter que les trajectoires fermées ne sont pas possibles pour tout type de potentiel central² ”

☞ (2005) – “Les lois de conservation doivent être bien dégagées et bien utilisées. L'intérêt du référentiel barycentrique et de la particule fictive doit être souligné.”

☞ (2004) – “Très souvent, l'intérêt du référentiel barycentrique n'est pas bien dégagé. Rappelons qu'il faut être capable de prouver que moment cinétique et énergie cinétique se réduisent à ceux de la particule fictive dans ce référentiel.”

☞ (2003) – “On ne doit pas se complaire dans les calculs en fournissant un catalogue de vecteurs constants.”

☞ (2001) – “Le candidat peut justifier la forme des trajectoires dans un champ newtonien, mais il ne doit pas utiliser les formules de Binet.”

☞ (2009) – “Les applications peuvent ne pas être restreintes au potentiel en $1/r$.”

☞ (1999) – “Bien mettre en évidence la notion d'intégrale première du mouvement.”

☞ (1998) – “Il convient de préciser correctement les hypothèses faites : il n'existe pas que des forces ”centrales” dans la nature (interaction dipolaire par exemple), la loi de l'action et de la réaction ne s'applique pas automatiquement (cas des forces magnétiques)... enfin, il est erroné d'affirmer que toutes les trajectoires résultant de l'interaction entre deux corps sont des courbes fermées, et encore plus que ce sont des coniques.”

☞ (1997) – “Justifier les hypothèses de la réduction au cas de deux corps ponctuels et des forces centrales ; pour déduire de la conservation du moment cinétique le caractère plan des trajectoires, il est inutile d'invoquer le fait que r et v sont perpendiculaires au moment cinétique L . L'argument r perpendiculaire à L suffit. Il est par ailleurs préférable d'insister sur les lois de Kepler plutôt que sur les formules de Binet.”

1. Le titre de la leçon était alors le suivant : *Utilisation des lois de conservation dans le problème à deux corps. Applications*.

2. Sur le théorème de Bertrand, qui stipule que parmi tous les mouvements à accélération centrale d'énergie potentielle attractive uniquement fonction de la distance : $U(r) = \alpha/r^n$ avec $\alpha n > 0$, seuls deux d'entre eux ont une trajectoire fermée : le mouvement de Képler à potentiel newtonien : $n = 1$ et le mouvement elliptique harmonique à potentiel harmonique : $n = 2$; on pourra consulter avec profit l'article de Claude Terrien paru dans le BUP de juin 1995, volume 89.

☞ (1996) – “L'introduction, dès le début de la leçon, du mouvement d'une particule fictive ne fait souvent qu'embrouiller l'exposé ; il suffit de montrer que l'expression des lois de la mécanique dans le référentiel barycentrique fait apparaître la masse réduite, et conduit à une équation différentielle (qu'il est inutile d'interpréter) pour le vecteur position relative r . Il faut montrer comment interviennent les lois de conservation, au moins pour la quantité de mouvement, le moment cinétique et l'énergie mécanique.”

Plan

1 Conservation de la quantité de mouvement

1.1 Loi de la dynamique de Newton

1.2 Exemple du tuyau d'arrosage

1.3 Exemple : la fusée

2 Conservation du moment cinétique

2.1 TMC

2.2 Conservation du TMC

2.3 Exemple de la patineuse

3 Conservation de l'énergie

3.1 Différents types

3.2 Le pendule simple

4 Force gravitationnelle de Newton

4.1 Force centrale

4.2 Loi des aires et profil énergétique

4.3 Lois de Kepler

Introduction

Ne pas faire catalogue.

Penser aux messages à retenir en sortant.

Faire une application avec un solide pour faire la conservation du moment cinétique.

1 Conservation de la quantité de mouvement

1.1 Loi de la dynamique de Newton

1.2 Exemple du tuyau d'arrosage

Mauvais exemple car le système est pas pseudo-isolé.

1.3 Exemple : la fusée

2 Conservation du moment cinétique

2.1 TMC

2.2 Conservation du TMC

2.3 Exemple de la patineuse

3 Conservation de l'énergie

3.1 Différents types

3.2 Le pendule simple

4 Force gravitationnelle de Newton

4.1 Force centrale

4.2 Loi des aires et profil énergétique

4.3 Lois de Kepler

Questions

- ➔ Que devient le problème à deux corps dans le cadre de la relativité restreinte ? Et en mécanique quantique ?
- ➔ La troisième loi de Kepler est-elle exacte³ ?
- ➔ Qu'appelle-t-on le vecteur de Runge-Lenz ? Pouvez-vous en donner une application simple ?
- ➔ Avez-vous lu l'article d'Hubert Gié intitulé Le moment cinétique à travers l'Univers et paru dans le BUP 712 de mars 1989 ?
- ➔ Comment l'astronome Le Verrier a-t-il "inventé" Neptune au XIX^{ème} siècle ?

3. pour répondre à cette question, on pourra lire attentivement les pages 239-240 de l'ouvrage de Mécanique de P. Brasselet aux éditions PUF.

LP 5 — Cinématique relativiste.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 19/02/2014 par *Anaëlle Contensaux* et corrigée par *G. Soucail*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Principes de la cinématique relativiste. Conséquences.*

Rapports du Jury

☞ (2013,2012, 2011) – “Cette leçon exige une grande rigueur dans l'exposé tant sur les notions fondamentales de relativité restreinte que sur les référentiels en jeu. Elle invite les candidats à faire preuve d'une grande pédagogie pour présenter des notions a priori non intuitives et faire ressortir les limites de l'approche classique.”

☞ (2013) – “ Un exposé clair des notions d'invariant relativiste et de composition des vitesses et de ses propriétés est incontournable dans cette leçon. La réciprocity des effets de dilatation des durées et de contraction des longueurs doit être soulignée.”

☞ (2012) – “ Un exposé clair de la notion de composition des vitesses et de ses propriétés est incontournable dans cette leçon. Les notions de dilatation du temps et contraction des longueurs doivent être discutées.”

☞ (2011) – “ Un exposé clair de la notion de composition des vitesses et de ses propriétés est incontournable dans cette leçon.”

☞ (2010,2009) – “Il n'entre pas dans le cadre de cette leçon de démontrer la transformation de Lorentz-Poincaré. La notion d'évènement est un outil central.”

☞ (2008, 2007) – “Les principes de la relativité restreinte doivent être énoncés de manière complète et précise. Les notions de durée ou de longueur propres ne prennent tout leur sens qu'en envisageant les phénomènes de contraction et dilatation. La description d'expériences ou d'applications mettant en jeu ces notions permet de rendre le contenu de cette leçon plus concret ¹.”

☞ (2006) – “Les bases de la cinématique relativiste ne sont pas toujours bien comprises. La notion de durée propre et les phénomènes de contraction-dilatation doivent être abordés avec un soin tout particulier. Il ne faut pas se contenter de présenter cette leçon de manière théorique et laisser une bonne place aux applications.”

☞ (2005) – “La notion d'évènement est cruciale. Les mesures des durées et longueurs “impropres” restent souvent mystérieuses.”

☞ (2002) – “Il est souhaitable de consacrer une partie de l'exposé aux fondements de la cinématique relativiste, en prenant soin d'utiliser un vocabulaire rigoureux. Un voyage interplanétaire effectué à la vitesse de $0.97 \cdot c$ ne peut constituer une illustration concrète du phénomène de dilatation des durées... Les applications réalistes, pour lesquelles les observations expérimentales réelles s'interprètent grâce aux résultats de la cinématique relativiste, sont à rechercher. Les définitions de la longueur propre et de la durée propre doivent être énoncées nettement. La notion d'évènement doit être précisée.”

☞ (2001) – “Il faut utiliser avec méthode la notion d'évènement pour aborder les phénomènes de dilatation des durées et de contraction des longueurs. Il convient d'illustrer cette leçon par des exemples concrets.”

☞ (2000) – “Cette leçon est en général trop formelle. Il convient de donner des exemples concrets de dilatation des temps, de contraction des longueurs, de simultanéité, de causalité, etc.”

1. Jusqu'en 2007, le titre de la leçon était le suivant : *Principes de la cinématique relativiste. Durée propre. Longueur propre.*

☞ (1999) – “Si les notions de temps propre et de longueur propre sont en général bien comprises, il en est souvent pas de même pour la relativité de la simultanéité d'un évènement. Ici comme dans d'autres leçons, la donnée d'ordres de grandeur et des considérations qualitatives permettent d'éviter la sècheresse d'une leçon trop formelle.”

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

→ **Agrégation 2008 - Note : 04/20 :**

Questions et commentaires du jury : notion de perte de simultanéité? (Il m'a été reproché de ne pas en avoir parlé). Pouvez-vous ré-expliquer l'expérience de Michelson-Morley? Quelles sont les contraintes que doit vérifier une transformation? En particulier celle de Lorentz? (notion de causalité). Pouvez-vous ré-expliquer l'effet Doppler-Fizeau?

→ **Agrégation 2008 - Note : 16/20 :**

Questions et commentaires du jury : questions sur les postulats : homogénéité de l'espace-temps, isotropie de l'espace sont-elles spécifiques à la relativité restreinte? La causalité est-elle un postulat ou une conséquence? L'invariance des forces est-elle un postulat de la physique? La relativité restreinte intervient-elle au quotidien ou seulement dans des expériences de physique à grande échelle et/ou hautes énergies?

→ **Agrégation 2010 - Note : 05/20 :**

Questions et commentaires du jury : à l'issue de ma leçon, on m'a demandé quelques précisions sur mes signes, notamment dans l'expression du champ électrique dans un autre référentiel d'inertie. On m'a demandé quelques informations sur l'expérience de Morley et Michelson (déplacement des franges attendu, taille des bras) ainsi que des exemples (autres que la désintégration muonique et la modification du temps de parcours du TGV Paris-Lyon) où la dilatation du temps pouvait avoir des effets observables. On est restés longtemps sur la perte de simultanéité, car j'étais passé assez vite sur sa démonstration. Cette question a constitué l'essentiel de l'entretien, ce qui a laissé assez peu de temps pour d'autres questions. Pour finir, on m'a demandé d'expliquer ce qui se passait en réalité, et de lever le “paradoxe” apparent de la relativité restreinte.

Commentaires personnels : c'est une leçon difficile, car elle ne comporte qu'assez peu de physique intuitive et doit introduire la relativité restreinte à des étudiants qui n'en ont jamais entendu parler. Il faut donc être TRÈS propre sur les définitions (notamment celle d'un changement de référentiel, d'un évènement...) et les différents objets manipulés (en particulier, les différents référentiels). Maîtriser les bases de la relativité restreinte n'est malheureusement pas suffisant pour bien aborder cette leçon, il faut faire un vrai effort pour enlever toutes les ambiguïtés de son exposé, et c'est malheureusement ce qui m'a fait défaut le jour J. En ce qui concerne le plan, le jury avait bien accepté le mien, mais proposait d'introduire assez rapidement le formalisme consacré, typiquement en deuxième partie, alors que je l'avais placé en troisième partie, après avoir donné les conséquences immédiates du principe de relativité universelle en deuxième partie.

LP 6 — Dynamique relativiste.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 19/02/2014 par *Mégane Rodriguez* et corrigée par *G. Soucail*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Dynamique relativiste. Exemples.*

Rapports du Jury

☞ (2010) – “La forme plus complexe des lois de la dynamique peuvent rendre les exemples choisis très techniques. Il convient de choisir des illustrations simples où les effets relativistes apparaissent rapidement. L'étude des collisions peut bien évidemment entrer dans le cadre de cette leçon. Ne pas oublier que les lois de conservation sont également un outil de découverte de particules nouvelles, indétectables directement.”

☞ (2009) – “Ne pas oublier que les lois de conservation sont également un outil de découverte de particules nouvelles, indétectables directement¹. Pour les leçons “Dynamique relativiste. Exemples” et “Exemples d'utilisation des lois de conservation en dynamique des systèmes”, le jury attend que le candidat choisisse un nombre d'exemples limité, mais qu'il les analyse en profondeur.”

☞ (2008) – “L'intérêt du référentiel barycentrique n'est pas toujours maîtrisé. Les candidats sont encouragés à diversifier les exemples traités.”

☞ (2007) – “L'intérêt du référentiel barycentrique n'est pas souvent bien dégagé. Les candidats sont encouragés à diversifier les exemples traités.”

☞ (2006) – “L'intérêt du référentiel barycentrique n'est pas souvent bien dégagé. Les candidats sont encouragés à diversifier les exemples traités (et ne pas hésiter à les choisir dans la physique des particules).”

☞ (2005) – “L'intérêt du référentiel barycentrique dans l'évaluation du seuil de réaction n'apparaît pas toujours clairement. Des exemples contemporains sont appréciés.”

☞ (2004) – “Le référentiel du centre de masse est toujours introduit, mais l'intérêt qu'il présente n'est pas suffisamment souligné, en particulier dans la détermination du seuil énergétique d'une collision inélastique. Il faut savoir faire la différence entre *invariance* et *conservation*. Comme le titre l'indique, il faut chercher à illustrer la leçon par des exemples empruntés à la physique des particules. La diffusion de Rutherford ne constitue pas une bonne illustration de cette leçon par exemple.”

☞ (2003) – “L'étude des collisions doit être menée en utilisant au mieux la notion de quadri-vecteur. Il est souvent inutile de projeter la relation de conservation de la quantité de mouvement (par exemple pour étudier l'effet Compton). L'énergie de seuil est une notion importante qu'il est nécessaire de présenter ; le candidat doit être en mesure d'expliquer pourquoi il s'intéresse à la situation où tous les produits de réaction sont immobiles dans le référentiel du centre de masse. En outre, des exemples plus actuels que la création de paires proton/anti-proton peuvent être envisagés.”

☞ (2002) – “Il faut moderniser les exemples présentés, en exploitant des connaissances actualisées de la physique des particules. Trop souvent, la leçon présentée déborde de calculs compliqués, qui sont inutilisés par la suite et qui empêchent le candidat de consacrer un temps suffisant à l'étude des noyaux et des particules élémentaires.”

☞ (2001) – “Il faut bien distinguer les lois de conservation : énergie, quantité de mouvement et les lois d'invariance par changement de référentiel galiléen. La notion de seuil énergétique d'une collision inélastique doit être abordée. L'effet Compton ne constitue pas une application à l'étude des noyaux ou des particules élémentaires. L'exposé ne doit pas se limiter aux calculs

mais doit comporter des exemples variés de collisions et de dispositifs expérimentaux récents ; à ce propos la chambre à fils mérite d'être citée. La définition générale de la section efficace doit être connue des candidats.”

☞ (2000) – “Comme le titre l'indique, les applications sont importantes. L'effet Compton ne constitue pas une application à l'étude des noyaux ou des particules élémentaires. Le candidat doit s'efforcer de varier les exemples.”

☞ (1999) – “Quelques connaissances sur la physique des particules et les accélérateurs contemporains ne sont pas superflues. Il existe des exemples de collisions relativistes plus récents et significatifs que l'effet Compton ou la stabilité des noyaux atomiques.”

☞ (1998) – “Les candidats connaissent les lois de conservation (impulsion et énergie) au cours des chocs, parfois les invariances par changement de référentiel. Cependant, les deux notions sont très souvent confondues. L'intérêt du référentiel barycentrique, parfois sa définition et ses conditions d'existence, sont par contre mal connus.”

☞ (1997) – “Cette leçon est souvent l'occasion de confusion entre la cinématique et la physique des collisions. On peut mentionner que l'utilisation des lois de conservation ne suffit pas forcément à déterminer tous les paramètres d'une collision. On peut évoquer la notion de section efficace de collision et l'intérêt de la physique des particules.”

Questions pour faire réfléchir

- Pourquoi fait-on des collisions de particules ? (Répondre en deux phrases.)
- Quel est l'intérêt d'un collisionneur de particules sur l'envoi direct de particules sur une cible fixe ?
- Qu'est-ce qu'une chambre à brouillard ?
- Qui est Georges Charpak, et quelle a été sa contribution dans le domaine ?

1. Le titre de la leçon était alors le suivant : *Collisions en relativité restreinte : application à l'étude des particules élémentaires.*

Deuxième partie

Leçons de Mécanique des fluides

LP 7 — Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 13/11/2013 par *Florent Leveque* et corrigée par *M. Rieutord*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux. Nombre de Reynolds. Exemples simples.*

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012, 2011) – “L'exemple de l'écoulement de Poiseuille cylindrique n'est pas celui dont les conclusions sont les plus riches. Les candidats doivent avoir réfléchi aux différents mécanismes de dissipation qui peuvent avoir lieu dans un fluide.”

☞ (2010, 2009) – “Il importe de mettre clairement en évidence le caractère diffusif des forces de viscosité. Dans l'illustration expérimentale de l'écoulement de Couette plan, il faut s'interroger (il faut s'assurer que l'on atteint) si l'on est en régime permanent.”

☞ (2008) – “La signification physique du nombre de Reynolds est ici centrale.”

☞ (2006) – “Les notions d'écoulement tourbillonnaire et d'écoulement turbulent sont souvent mal assimilées. Les conditions d'applications de l'équation de Navier-Stokes sont ignorées.”

☞ (2005) – “La relation entre la valeur du nombre de Reynolds et la nature de l'écoulement sont mal dégagées. Il y a souvent confusion entre tourbillon et turbulence. Les conditions d'application de l'équation de Navier-Stokes sont ignorées.”

☞ (2001) – “Il est souhaitable de présenter un modèle microscopique simple de la viscosité¹. Il est utile de noter que le nombre de Reynolds s'interprète comme le rapport de deux temps caractéristiques de transport par diffusion et convection. La notion de couche limite peut être évoquée. On peut également présenter des écoulements autour d'obstacles.”

☞ (2000) – “L'interprétation microscopique des forces de viscosité est souvent sacrifiée.”

☞ (1999) – “La leçon doit permettre de montrer la compétition entre transfert convectif et transfert diffusif de quantité de mouvement. Il serait intéressant de faire apparaître le parallèle avec d'autres phénomènes de transport.”

☞ (1998) – “Cette leçon doit permettre de mieux comprendre la notion d'écoulement parfait et ses limites. L'illustration expérimentale ne saurait se limiter à regarder tomber une bille dans un tube rempli de glycérine. Comme pour la leçon intitulée *étude d'un phénomène de transport : conduction thermique ou diffusion de particules, au choix. Applications*, l'exposé doit faire apparaître la notion de *transport par les molécules* et donc donner une place au concept de *libre parcours moyen* et aux ordres de grandeur associés. Par ailleurs, une étude énergétique serait la bienvenue ; sur des cas simples il est en effet facile d'exprimer la puissance volumique des forces de viscosité intérieures au fluide.”

Bibliographie

[1] Faroux, *Mécanique des fluides et ondes mécaniques*. Dunod, 1999.

[2] CAP Prépa Physique PC-PC*, 2^{ème} année. Pearson, 2010.

[3] Guyon, Hulin et Petit, *Hydrodynamique Physique*. CNRS éditions, 3^{ème} édition.

Plan

1 Notion de viscosité

1.1 Observations ([1] p.21)

1.2 Force visqueuse ([1] p.23 + [2] p.258)

1. Un modèle simple est présenté dans l'ouvrage de E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit paru aux éditions EDP/CNRS.

1.3 Diffusion de quantité de mouvement ([2] p.268 + [1] p.25)

1.4 Interprétation microscopique pour les gaz ([2] p.285 + [3] p.68)

2 Écoulements visqueux

2.1 Équation de Navier-Stokes ([2] p.259)

2.2 Exemple : écoulement de Poiseuille cylindrique (Exo. [2] p.288)

2.3 Application : viscosimètre de poiseuille

3 Nombre de Reynolds

3.1 Définition ([2] p.273,279 + [1] p.29 + [3] p.74)

3.2 Nature de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds ([2] p.279)

3.2.1 Faits expérimentaux ([2] p.280)

3.2.2 Traînée en fonction du nombre de Reynolds ([2] p.281 + [1] p.27)

Introduction

Quel est l'origine des effets de viscosité dans un écoulement.

Comment prendre en compte les effets visqueux dans l'équation d'Euler.

Comment quantifier leur importance.

On considère que l'on a déjà vu l'équation d'Euler (1755).

1 Notion de viscosité

1.1 Observations ([1] p.21)

► **Expérience** : On montre des images d'expériences mettant en jeu la viscosité.

On décrit les cas où on voit le fluide être dans un régime **laminaire** : écoulement de l'eau dans une rivière calme loin du bord ; ou dans un régime **turbulent** : jet d'eau violent.

Écoulement stable (laminaire) = certaine homogénéité locale de la vitesse du fluide. La quantité importante est la quantité de mouvement.

Les forces de viscosité assurent le transfert de quantité de mouvement.

1.2 Force visqueuse ([1] p.23 + [2] p.258)

Dans le cas simple d'écoulement d'un fluide entre deux plans dont l'un est mobile, on écrit la loi de Newton.

Notion de contrainte. Apparition de η . Donner des ordres de grandeur et les unités.

Généralisation à des forces volumiques s'appliquant sur tout le volume de la particule de fluide : $\vec{f}_v = \eta \Delta \vec{v}$.

On a une diffusion de quantité de mouvement, on va faire apparaître un coefficient de diffusion.

1.3 Diffusion de quantité de mouvement ([2] p.268 + [1] p.25)

On écrit que $d\vec{p}/dt = \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{p}$ c'est une équation de diffusion.

On pose le coefficient de diffusion cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho}$.

On estime une longueur caractéristique de diffusion : couche limite au-delà de laquelle la diffusion n'a pas d'influence.

1.4 Interprétation microscopique pour les gaz ([2] p.285 + [3] p.68)

On fait un bilan sur une tranche de fluide. Comme pour le cas des gaz parfait, on choisit une distribution des vitesses uniformes.

On trouve une expression pour $\eta = \frac{1}{3} \rho \ell v_{th}$ qui ne dépend que des propriétés du fluide.

On décrit l'influence de la température pour les gaz $\eta \propto \sqrt{T}$. Ordre de grandeur pour les gaz. Par contre pour un liquide la viscosité diminue avec la température selon une loi similaire à loi d'Arrhénius : $\eta \propto \exp \frac{E_a}{k_B T}$.

Transition : On va pouvoir utiliser ces résultats pour décrire l'écoulement d'un fluide visqueux.

2 Écoulements visqueux

2.1 Équation de Navier-Stokes ([2] p.259)

On rajoute un terme à l'équation d'Euler.
Conditions aux limites : $\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{paroi}$.

2.2 Exemple : écoulement de Poiseuille cylindrique (Exo. [2] p.288)

Écoulement d'un fluide dans un tuyau cylindrique dont le profil de vitesse est donné par : $\vec{v} = v(r) \vec{e}_z$ donc symétrie de révolution.

Le problème se simplifie de par sa géométrie et on a :

$$D_v = \frac{m}{\rho t}, \quad D_v = \frac{\pi d^4 \Delta P}{128 \eta L} \quad \text{et} \quad R_e = \frac{4 \rho D_v}{\pi d \eta}$$

2.3 Application : viscosimètre de poiseuille

Connaissant le débit, la différence de pression, la longueur du tuyau et son diamètre on peut remonter à η .

On a étudié des cas où la géométrie était simple mais dans les cas compliqués on utilise un nombre adimensionné nous permettant de conclure sur l'effet de la viscosité.

3 Nombre de Reynolds

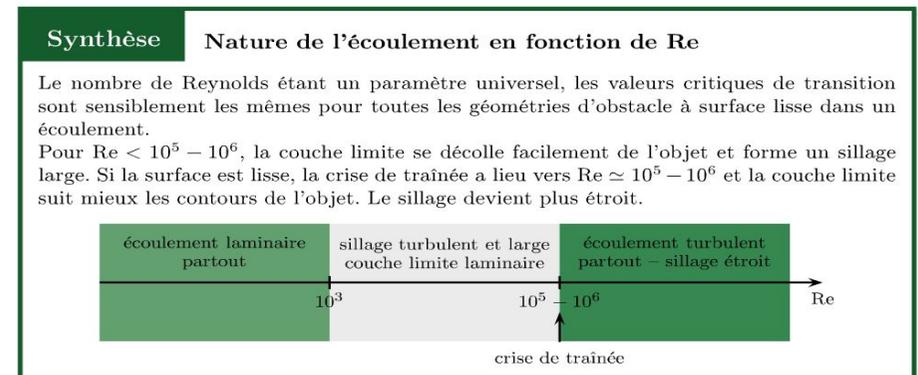
3.1 Définition ([2] p.273,279 + [1] p.29 + [3] p.74)

On définit le nombre de Reynolds. Puis on le relie au temps caractéristique de diffusion et de convection.

On relie la couche limite au nombre de Reynolds. On montre l'importance de ce nombre dans l'étude d'un écoulement.

3.2 Nature de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds ([2] p.279)

3.2.1 Faits expérimentaux ([2] p.280)



3.2.2 Traînée en fonction du nombre de Reynolds ([2] p.281 + [1] p.27)

On décrit l'évolution du coefficient de traînée pour un bille en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide.

On montre qu'il est inversement proportionnelle au coefficient de Reynolds.

Questions

- ➔ Comment pourriez-vous discuter les aspects énergétiques de la viscosité ?
- ➔ Quelle est la dépendance de la viscosité d'un fluide avec la température ?
- ➔ Donnez l'ordre de grandeur de trois viscosités de produits de la vie courante, présentant différents ordres de grandeurs.
- ➔ Qu'est-ce qu'un fluide non-newtonien ? Donner des exemples de la vie de tous les jours.
- ➔ Quelles expériences pourraient venir illustrer cette leçon ?
- ➔ Tous les fluides étant réels, quel est l'intérêt d'étudier le cas d'un fluide parfait ?

- ➔ Quelle différence faites-vous entre écoulement incompressible et fluide incompressible ?
- ➔ Qu'est-ce que l'approximation de lubrification ?

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ Agrégation 2011 - Note : 18/20 :

Questions et commentaires du jury : Existe-t-il une viscosité autre que celle pour les écoulements incompressibles ? Quel est son nom ? Démontrez la relation $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Ils sont revenus sur les calculs pour l'écoulement de Poiseuille cylindrique et notamment la question des conditions aux limites. Dépendance de la viscosité avec la pression pour les gaz ? Notion de couche limite, comment trouve-t-on l'expression de la dimension caractéristique ? Vous avez parlé d'écoulement incompressible, qu'en est-il de l'air ? Si dans l'écoulement de Poiseuille on a un fluide pesant, que se passe-t-il ?? (dépendance du champ de pression en r et θ). Soit un cycliste se déplaçant à 10 m/s dans l'air ou un nageur se déplaçant à 1m/s dans l'eau ; le Reynolds vaut 10^6 typiquement donc la viscosité peut être négligée ; pourquoi c'est fatigant ?

Pour la dernière question, on voit que l'écoulement n'est pas symétrique par rapport au nageur (cf. paradoxe de d'Alembert) il faut donc que le nageur contre la pression dynamique égale à $\rho v_0^2/2$ (cf. théorème de Bernoulli avec point d'arrêt) qui s'applique sur sa face avant et pas sur sa face arrière. A l'arrière il y a formation de tourbillon dans la couche limite ce qui diminue la pression.

LP 8 — Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 06/11/2013 par *Joévin Giboudot* et corrigée par *M. Rieutord*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide ; validité. Relation de Bernoulli ; limites et applications.*

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012, 2011) – “La notion de viscosité peut être supposée acquise. L'essentiel de l'exposé doit porter sur les fluides newtoniens : le cas des fluides non newtoniens, s'il peut être brièvement mentionné ou présenté, ne doit pas prendre trop de temps et faire perdre de vue le message principal.”

☞ (2010, 2009, 2008) – “Il est difficile de bien dégager la physique du modèle de l'écoulement parfait et de ses limites sans faire appel à la notion de viscosité que l'on pourra supposer connue. Les conditions aux limites imposées à un fluide s'écoulant autour d'un obstacle solide doivent être justifiées. L'interprétation énergétique de la relation de Bernoulli est très mal connue.”

☞ (2007, 2006, 2005) – “Il est difficile de bien dégager la physique du modèle de l'écoulement parfait et ses limites sans faire appel à la notion de viscosité. Les différences entre fluide parfait et écoulement parfait et entre fluide incompressible et écoulement incompressible sont parfois méconnues. L'approche énergétique de la relation de Bernoulli est souvent ignorée.”

☞ (2003) – “L'équation d'Euler ne constitue pas le sujet central de la leçon et ne doit pas prendre une place excessive. Diverses expressions du théorème de Bernoulli peuvent être présentées. Il est plus intéressant de présenter des illustrations concrètes ou des applications pratiques que d'exposer une longue suite de formulations.”

Bibliographie

- [1] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.
- [2] Guyon, Hulin et Petit, *Hydrodynamique Physique*. CNRS éditions, 3^{ème} édition.
- [3] Brébec, *Mécanique des fluides 2^{ème} année PC-PC*-PSI-PSI**. Hprépa, 2004.
- [4] *Physique Tout-en-un PSI-PSI**, *J'intègre*. Dunod.

Prérequis

- ♥ Cinématique des fluides.
- ♥ Équation de Navier-Stokes ; viscosité, nombre de Reynolds.

Plan

1 Écoulement parfait d'un fluide

- 1.1 Définitions
- 1.2 Validité du modèle ; nombre de Reynolds
- 1.3 Équations d'Euler et conditions aux limites
- 1.4 Effet Coanda

2 Théorème de Bernoulli

- 2.1 Démonstration

2.2 Approche énergétique

2.3 Application de la relation de Bernoulli : Tube de Pitot

3 Interaction avec un obstacle ; limites d'application

3.1 Paradoxe de d'Alembert

3.2 Couche limite

Introduction

On s'est intéressé dans la leçon précédente à l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible et newtonien. Nous sommes arrivés à l'écriture du principe fondamentale de la dynamique pour une particule fluide : l'équation de Navier-Stokes.

Dans cette leçon nous allons nous intéresser au cas d'écoulement où l'on peut négliger les phénomènes de diffusion (viscosité, diffusion thermique) par rapport à ceux de convection.

Nous verrons dans une première partie la définition d'un écoulement parfait et la répercussion d'un tel écoulement sur l'équation de Navier-Stokes¹.

Puis, à la suite de nouvelles hypothèses nous écrirons une relation simple de l'écoulement qui traduit la conservation de l'énergie d'une particule fluide : la relation de Bernoulli.

Finalement Nous étudierons les limites d'applications de ce modèle.

Remarque :

- ▷ On étudiera dans la leçon que des fluides Newtoniens et des écoulements incompressibles.
- ▷ On adopte une approche non chronologique (Navier-Stokes (1830) → Euler (1755) → Bernoulli (1738)). On construit petit à petit un modèle simple qui nous permet de résoudre l'équation de Navier-Stokes pour un certain type d'écoulement.

1 Écoulement parfait d'un fluide ([1] p.291)

1.1 Définitions

Définition : *Un fluide parfait est un fluide dont la viscosité est rigoureusement nulle : $\eta = 0$.*

L'Helium IV à une température inférieure à 2.17 K est le seul fluide parfait que l'on connaisse. Donc l'étude des fluides parfait a un intérêt très limité.

1. On rappelle que l'équation de Navier-Stokes s'écrit : $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \vec{f}_{\text{ext}} + \eta \Delta \vec{v}$

Définition : Un **écoulement parfait** est un écoulement dans lequel on peut y **négliger** les phénomènes de diffusion (viscosité, diffusion thermique).

On voit que l'on a implication **Fluide parfait** \implies **Écoulement parfait**, mais que l'implication inverse n'est pas toujours vérifiée au même titre qu'un écoulement incompressible n'implique pas toujours que le fluide soit incompressible.

Transition : On va voir que le nombre de Reynolds est l'outil approprié pour savoir si l'écoulement peut être considéré comme parfait.

1.2 Validité du modèle; nombre de Reynolds ([2] p.74)

Pour considérer que l'écoulement est parfait d'après la définition, il faut comparer les temps caractéristiques de la diffusion et de la convection dans l'écoulement. On montre que :

$$\frac{\text{temps caractéristique de diffusion}}{\text{temps caractéristique de convection}} \approx \frac{L^2/\nu}{L/U} = \frac{UL}{\nu} = R_e$$

avec U la vitesse caractéristique de l'écoulement, L distance caractéristique de l'écoulement, $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ la viscosité cinématique (coefficient de diffusion de quantité de mouvement) et R_e le nombre de Reynolds (sans unités).

On voit bien que plus R_e est grand et plus les phénomènes de diffusion sont négligeables à l'échelle L de l'étude de l'écoulement.

Ordres de grandeur :

- * Voiture à $U \sim 100$ km/h ; $L \sim 3$ m ; $\nu_{\text{air}} = 1.1 \cdot 10^{-5}$ m²/s $\implies R_e \sim 10^7$
- * Balle de ping-pong + sèche-cheveux : $U \sim 10$ m/s ; $L \sim 4$ cm $\implies R_e \sim 10^4$
- * Bille dans la glycérine : $U \sim 10$ m/s ; $L \sim 1$ cm ; $\nu_{\text{gly}} \sim 1.1 \cdot 10^{-3}$ m²/s $\implies R_e \sim 10$

Remarque ([1] p.278) : Un nombre de Reynolds grand signifie que la viscosité est négligeable dans l'écoulement, à l'échelle L choisie pour calculer le nombre de Reynolds. En revanche, la viscosité n'est jamais négligeable dans la couche limite, qui est la zone responsable des frottements ressentis par les solides en mouvement dans les fluides.

Synthèse ([1] p.292) : Un écoulement réel de fluide visqueux peut être considéré comme parfait sous deux conditions.

1. Le nombre de Reynolds doit être assez grand pour que la viscosité soit négligeable hors des couches limites.
2. L'approximation n'a de sens que hors des couches limites.

Transition : On va voir comment se simplifie l'équation de Navier et Stokes dans le cadre de ce modèle.

1.3 Équations d'Euler et conditions aux limites

Dans la zone où l'écoulement peut être considéré comme parfait, on peut négliger le terme $\eta \Delta \vec{v}$ dans l'équation de Navier-Stokes. Le système que l'on étudie est restreint aux hypothèses suivantes :

Hypothèses :

- * Référentiel galiléen
- * Écoulement parfait et incompressible.
- * On ne considère que la pesanteur comme force extérieure

On peut alors écrire l'équation d'Euler :

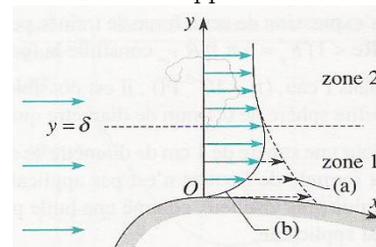
$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g}$$

$\frac{D}{Dt}$ est l'opérateur dérivé particulaire qui peut s'exprimer de différentes manières. $-\vec{\nabla}P$ est la résultante **volumique** des actions de pression qui s'exerce sur la particule de fluide. $\rho \vec{g}$ est la résultante **volumique** des actions de la pesanteur.

L'équation d'Euler est une équation vectorielle dont les inconnues sont les trois composantes de la vitesse, le champ de pression et la masse volumique. Pour résoudre un problème de mécanique de fluide, on utilise cette équation + l'équation de conservation de la masse (+ écoulement parfait est isentropique, cf. [1] p.295) et des conditions aux limites sur l'écoulement. On s'intéresse ici aux conditions aux limites pour un écoulement en présence d'un **obstacle solide immobile**.

Conditions aux limites ([3] p.61) :

- pas de pénétration du fluide dans le solide : $\vec{v}_{\text{fluide}} \cdot \vec{n}_{\text{solide}} = 0$, où \vec{n} est le vecteur unitaire normal à la surface du solide
- de plus pour un fluide réel ($\eta \neq 0$) sur la paroi : $\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{solide}} = \vec{0}$ car le solide est supposé fixe ici.



Doc. 13. La différence est importante entre les deux profils de vitesse (attention : les dimensions linéaires sont fortement augmentées suivant y). (a) : profil qui existerait avec un fluide parfait ; (b) : profil réel.

Cette deuxième condition est directement liée à la viscosité du fluide réel, puisqu'on postule que la vitesse du fluide au niveau de la paroi est celle de la paroi. Donc la paroi transmet sa vitesse au fluide par le biais de forces de viscosité.

Le fluide adhère à la paroi et son écoulement est perturbé à cause de la viscosité dans une couche que l'on appelle la couche limite.

On suppose la couche limite infiniment fine dans la suite et on reviendra sur des

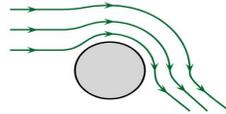
ordres de grandeur de sa taille dans la dernière section.

Remarques : On aura également des conditions aux limites sur la pression.

Transition : On va tout de suite voir une application de l'équation de d'Euler ; la compréhension de l'effet Coanda.

1.4 Effet Coanda ([1] p.297)

Lorsqu'un solide convexe est placé contre un jet de fluide, les lignes de courant s'incurvent et le jet a tendance à longer le solide : c'est l'**effet Coanda**.



► **Expérience :** On plonge une balle de ping-pong dans un jet d'air. En inclinant le jet par rapport à la verticale, on arrive à maintenir la balle en lévitation.

Sur une échelle assez petite, la pesanteur joue un rôle négligeable devant l'effet du solide convexe sur la géométrie des lignes de courant.

On écrit l'accélération particulaire dans le repère de Frenet :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{Dv}{Dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n \right] = -\vec{\nabla} P$$

On projette cette équation sur $\vec{e}_r = -\vec{e}_n$:

$$\rho \frac{v^2}{R} = \frac{\partial P}{\partial r} > 0.$$

La pression vers le centre de courbure des lignes de courant est plus faible qu'en périphérie :

$$\implies P_1 < P_0$$

Donc on a une composante de la résultante des actions de pressions \vec{R} qui est dirigée de telle manière que la balle de ping-pong peut **léviter**².

Transition : Il n'en reste pas moins que l'équation d'Euler est une équation difficile à résoudre. En ajoutant des hypothèses sur l'écoulement, on va parvenir à une relation plus facile à résoudre : la relation de Bernoulli.

2 Théorème de Bernoulli ([1] p.302)

A quelques approximations près, de nombreux écoulements peuvent être considérés comme parfaits, stationnaires et incompressibles. Citons par exemple :

- l'écoulement d'eau dans une canalisation de grand diamètre

2. On retrouve ces effets pour une aile d'avion, on a un phénomène de portance.

- l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion en vol subsonique à vitesse constante, décrit dans le référentiel de l'aile d'avion.

Ce type d'écoulement obéit au théorème de Bernoulli, qui est d'une grande utilité en mécanique des fluides.

2.1 Démonstration

On va établir le théorème de Bernoulli sous certaines hypothèses.

Hypothèses :

- * Référentiel galiléen
- * Écoulement parfait et incompressible.
- * On ne considère que la pesanteur comme force extérieure

En développant la dérivé particulaire, on obtient alors l'équation suivante :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \rho \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}$$

Hypothèses supplémentaires :

- * L'axe des z est vertical ascendant et g est uniforme $\implies \vec{g} = -\vec{\nabla}(gz)$
- * Écoulement permanent $\implies \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$.
- * Le fluide est incompressible³ $\implies \rho$ est uniforme et on peut la rentrer dans les gradients.

☞ L'hypothèse d'incompressibilité est valable si le nombre de Mach $= \frac{v}{c} = v\sqrt{\rho\chi}$ est petit devant 1. Donc si la vitesse du fluide est plus petite que la vitesse du son dans le fluide.

En passant tous les termes du même côté de l'équation, on obtient alors :

$$\rho(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \vec{\nabla} \left(\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho gz \right) = \vec{0} \quad (8.1)$$

On peut alors traiter deux cas : celui d'un écoulement irrotationnel et celui d'une ligne de courant.

Écoulement irrotationnel

Un écoulement irrotationnel est caractérisé par $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$ en **tout point de l'espace**. Ce qui implique que si on intègre la relation (8.1) entre deux points quelconques

3. Attention, un écoulement incompressible implique juste que $\frac{D\rho}{Dt} = 0 \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. L'incompressibilité d'un écoulement ne signifie pas nécessairement que la masse volumique est uniforme. Le contre-exemple est celui du vent. Il s'agit d'un écoulement horizontal approximativement incompressible : la masse volumique est constante le long d'une ligne de courant horizontale, mais elle décroît lorsque l'altitude croît. Pour une démonstration générale du théorème de Bernoulli, il ne faut pas faire entrer la masse volumique à l'intérieur des gradients, ce que nous ne cherchons pas à faire ici.

de l'écoulement :

$$\int_A^B \vec{\nabla} \left(\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z \right) \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B d \left(\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z \right) = cte$$

Dans **tout le fluide**, on a alors :

$$C = \rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z = cte$$

où la quantité C est appelé la charge de l'écoulement. C'est le théorème de Bernoulli appliqué au cas des écoulements parfait, incompressible et irrotationnel.

☞ Les écoulements irrotationnels sont importants car la vorticité se conserve. Si elle est égale à $\vec{0}$ au départ, elle reste nulle pendant le mouvement. Si $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{v} = \vec{\nabla} \phi$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \iff \Delta \phi = 0$ avec ϕ le potentiel de l'écoulement.

☞ Théorème de Kelvin ([2] p.295) : la circulation sur un contour fermé, dont chaque point se déplace avec la vitesse qu'a le fluide en ce point, reste constante si $\eta = 0, \rho = cte$ et si les forces extérieures dérivent d'un potentiel. Physiquement, le théorème de Kelvin exprime la conservation du moment cinétique pour un fluide parfait. Si à $t=0$ la circulation du champ des vitesses est nulle alors elle sera nulle tout le temps en l'absence de frottements (viscosité). La viscosité entraîne de la perte de moment cinétique.

Sur une ligne de courant

On intègre cette fois l'équation (8.1) sur **une ligne de courant** entre A et B. Par définition d'une ligne de courant, on a $d\vec{\ell}$ parallèle à \vec{v} où $d\vec{\ell}$ est un élément de longueur infinitésimale pris sur un ligne de courant.

On a alors :

$$(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

En intégrant sur **une ligne de courant**, on a alors :

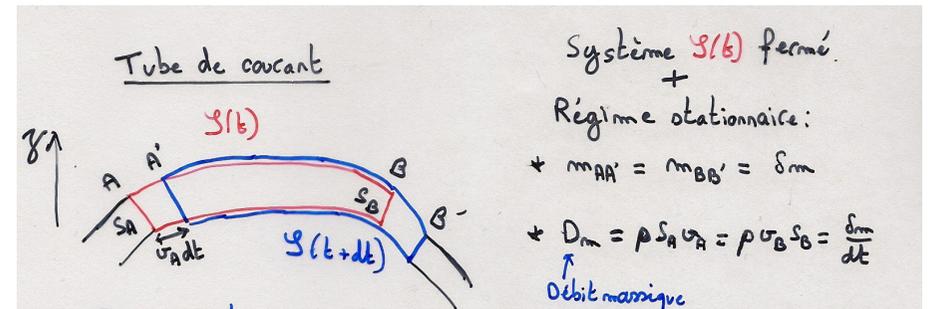
$$C = \rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z = cte$$

On remarque que le premier terme de cette équation n'est autre que l'énergie cinétique volumique de la particule de fluide et que tous les autres termes de la charge sont également homogènes à une énergie volumique.

Transition : On va voir que la relation de Bernoulli est en fait une traduction de la conservation de l'énergie totale de la particule de fluide.

2.2 Approche énergétique ([4] p.495)

On va faire un bilan d'énergie sur un tube de courant. On considère un système fermé.



 nergie cinétique

L'énergie cinétique est une grandeur additive, on peut donc faire la somme des différentes contributions du tube de courant.

$$\text{A l'instant } t : E_c(t) = E_{c,AA'} + E_{c,A'B} = \frac{1}{2} \delta m v_A^2 + E_{c,A'B}$$

$$\text{A l'instant } t + dt : E_c(t + dt) = E_{c,BB'} + E_{c,A'B} = \frac{1}{2} \delta m v_B^2 + E_{c,A'B}$$

Si on effectue la différence de ces deux termes on obtient :

$$dE_c = \frac{1}{2} \delta m (v_B^2 - v_A^2) \implies \frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} D_m (v_B^2 - v_A^2)$$

On peut faire le même calcul pour l'énergie potentielle.

 nergie potentielle

On ne considère que l'énergie potentielle de pesanteur. C'est également une grandeur additive et on peut donc faire la même décomposition que l'on a faite précédemment. On obtient alors :

$$dE_p = \delta m g (z_B - z_A) \implies \frac{dE_p}{dt} = D_m g (z_B - z_A)$$

Travail et puissance des forces de pression extérieures

Les actions de pressions sont des forces non conservatives. Si on fait un bilan des travaux des forces de pression sur le tube de courant, on obtient :

$$\delta W_{ext}^{n.c} = \vec{F}_A \cdot d\vec{\ell}_A + \vec{F}_B \cdot d\vec{\ell}_B$$

Les actions de pression sont définies comme $d\vec{F} = P(M) dS \vec{n}$ où \vec{n} est la normale à la surface dirigée du fluide extérieur vers le système. On a alors :

$$\delta W_{ext}^{n.c} = P_A S_A v_A dt - P_B S_B v_B dt$$

Ce qui implique que la puissance des actions de pressions s'écrit :

$$\mathcal{P}_{ext}^{n.c} = P_A S_A v_A - P_B S_B v_B = \frac{D_m}{\rho} (P_A - P_B)$$

Le théorème de l'énergie mécanique ($dE = d(E_c + E_p) = \delta W_{ext}^{n.c} + \delta W_{int}^{n.c}$) nous donne finalement, en regroupant tous les termes du même signe de l'égalité :

$$D_m \left[\left(\frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{P_B}{\rho} \right) - \left(\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{P_A}{\rho} \right) \right] = \mathcal{P}_{int}^{n.c}$$

Pour un écoulement parfait, incompressible et permanent, le théorème de Bernoulli nous dit que la puissance des forces intérieures est nulle !

La relation de Bernoulli traduit la **conservation de l'énergie totale** de la **particule fluide** en l'absence d'autres forces non conservatives extérieures autres que celle de pression et d'actions intérieures. Si il existe d'autres forces conservatives il faut les rajouter à l'expression de la charge.

D'un point de vue thermodynamique :

L'approximation d'écoulement parfait consiste également à négliger les échanges thermiques au sein du fluide. En négligeant ainsi la diffusion thermique et la diffusion de quantité de mouvement (viscosité), on supprime tout phénomène irréversible dans l'écoulement. Les écoulements parfaits sont donc réversibles au sens thermodynamique. Une particule de fluide garde donc une entropie constante au cours de son mouvement. L'écoulement est dit **isentropique** : $\frac{Ds}{Dt} = 0$.

Transition : Bien que reposant sur l'approximation restrictive d'écoulement parfait, stationnaire et incompressible, le théorème de Bernoulli permet d'expliquer qualitativement de nombreux phénomènes physiques courants.

2.3 Application de la relation de Bernoulli : Tube de Pitot ([1] p.309)

☞ Il vaut mieux présenter le Tube de Pitot et ne pas présenter l'effet Venturi trop classique au goût du correcteur.

☞ On peut faire une expérience avec un tube de Pitot et mesurer la vitesse d'un jet d'air par une mesure de différence de pression.

Le tube de Pitot est un système destiné à mesurer la vitesse d'un avion *par rapport à l'air ambiant*. Le tube est fixé le long du fuselage de l'avion, hors de la couche limite de manière à être dans la zone d'écoulement parfait du fluide.

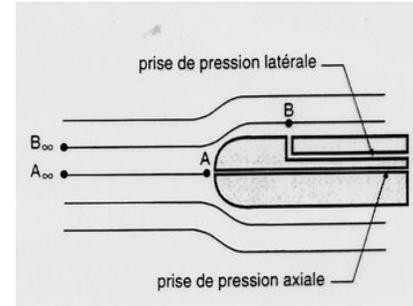
Le principe de la mesure de vitesse à l'aide du tube de Pitot est de remonter à la vitesse de l'écoulement à partir de la mesure de différence de pression entre deux points de l'écoulement.

On étudie un écoulement dont les hypothèses sont les suivantes.

Hypothèses :

- * Référentiel galiléen
- * Écoulement parfait, incompressible et stationnaire
- * On effectue notre étude sur des lignes de courant

* On néglige la pesanteur ($z_B - z_A$ très petit devant les autres termes)



On considère qu'aux points A_∞ et B_∞ (loin de l'obstacle) le fluide a la même vitesse $v_{A_\infty} = v_{B_\infty} = v_0$ et la même pression $P_{A_\infty} = P_{B_\infty} = P_0$.

Le point A est appelé un point d'arrêt car la vitesse de l'écoulement en ce point est nulle : $\vec{v}_A = \vec{0}$.

On va appliquer deux fois le théorème de Bernoulli :

- Entre A_∞ et A :

$$\frac{\rho}{2} v_{A_\infty}^2 + P_{A_\infty} = \frac{\rho}{2} v_A^2 + P_A = P_A \quad (8.2)$$

- Entre B_∞ et B :

$$\frac{\rho}{2} v_{B_\infty}^2 + P_{B_\infty} = \frac{\rho}{2} v_B^2 + P_B \quad (8.3)$$

En effectuant la différence de ces deux termes on trouve que :

$$P_A - P_B = \frac{\rho}{2} v_0^2 \implies v_0 = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} \quad (8.4)$$

En utilisant un manomètre, on peut avoir accès à la vitesse de l'écoulement du fluide.

Remarques :

1. La pression mesurée par le capteur B est indépendante de la vitesse de l'écoulement de l'air. En effet l'équation (8.3) donne $P_B = P_{B_\infty}$ qui est la pression de l'air ambiant à l'altitude de l'avion (« pression statique »). L'équation (8.4) montre que la cavité A ressent, en plus de la pression statique P_B , la pression dynamique $\rho v_0^2/2$ due à l'impact du fluide sur le point A. La cavité A est appelée « prise de pression dynamique ».
2. Une autre couche limite (autre que celle de l'avion) se développe le long du tube de Pitot. En toute rigueur le point B de l'étude est donc un peu à l'extérieur de la cavité, hors de la couche limite pour travailler dans l'hypothèse de l'écoulement parfait. Mais on montre (cf. [1] p.309) que le champ de pression local obéit à la statique des fluides et donc que la pression dans la cavité B est la même que la pression au point B hors de la couche limite.
3. On voit dans (8.4) que la différence de pression dépend de la masse volumique du fluide, or la masse volumique de l'air dépend de l'altitude. En utilisant un capteur thermométrique on peut remonter à la valeur de ρ et donc avoir accès à v_0 pour toute altitude.

Le tube de Pitot est un instrument vital pour un avion. En effet la connaissance de la vitesse de l'avion par rapport à l'air est fondamentale pour la sécurité : un avion doit voler entre une vitesse minimale (vitesse de décrochage) et maximale (déformation ou rupture de la structure de l'avion).

Transition : on a vu à travers cette exemple que le modèle de l'écoulement parfait n'était valable que sous certaines conditions. On va voir que ce modèle apporte des contradictions et que l'on peut donner un ordre de grandeur de la couche limite de l'écoulement lors de l'interaction avec un obstacle.

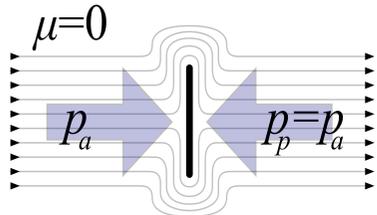
3 Interaction avec un obstacle ; limites d'application

On va voir dans cette dernière partie quels sont les problèmes dans l'interprétation de certains phénomènes liés au modèle de l'écoulement parfait.

3.1 Paradoxe de d'Alembert

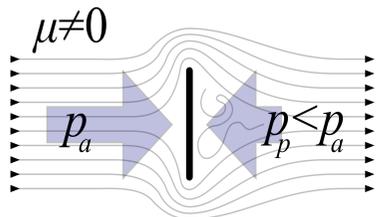
Considérons un solide animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme dans un fluide parfait incompressible au repos à l'infini, ou, par un changement de référentiel, un solide immobile dans le fluide ayant pour vitesse V à l'infini. Le mouvement étant supposé permanent, la pression p est donnée par la formule de Bernoulli : il n'y a pas de résistance à l'avancement du solide dans le fluide.

Si on a un écoulement avec un fluide assimilé comme parfait ($\eta \equiv \mu = 0$), comme sur la figure du dessus, alors la pression avant le solide est égale à la pression après le solide.



Les lignes de champ contournent le solide et le longent ce qui implique une différence de pression nulle de chaque côté du solide.

Il n'y a donc pas de résistance à l'avancement du solide dans le fluide : **contraire à l'expérience quotidienne des frottements**, d'où le paradoxe.



Par contre on voit sur la figure du dessous (cas d'un fluide réel $\mu \neq 0$) que les lignes de courant se décolent de la paroi du solide et forment des tourbillons. On a alors une différence de pression entre l'avant et l'après du solide.

Comme on l'a vu avec le tube de Pitot, sur le dessin du dessus la face avant du solide va prendre en plus une pression dynamique proportionnelle à $\rho v_0^2/2$, ce qui contribue bien à freiner le solide.

Remarque : Ce paradoxe est lié à la réversibilité du mouvement du fluide. Dans les écoulements réels, des phénomènes irréversibles apparaissent, tels que la formation d'une surface de discontinuité (sillage) à l'arrière du solide. L'origine de telles irréversibilités est

la viscosité, même faible, des fluides réels. On a vu en thermodynamique que la diffusion était source d'irréversibilité des transformations.

Transition : On peut revenir sur la notion de couche limite puisqu'on le voit sur le dessin du dessous, on a une certaine couche de fluide à proximité du solide qui ne suit pas le même écoulement que loin du solide.

3.2 Couche limite ([1] p.269 et p.278)

La **couche limite** est la couche d'un écoulement, au voisinage d'une paroi solide, dans laquelle la présence de la paroi influe notablement sur l'écoulement par viscosité.

En revenant sur la figure du **Doc.13** de la partie 1.3, on peut remonter à l'expression de l'épaisseur δ de la couche limite.

On considère une distribution du champ des vitesses de la forme : $\vec{v} = v_x(y, t) \vec{e}_x$. On a une invariance par translation selon x du problème si on considère le solide comme une plaque infiniment longue. Ce qui implique alors que $P = P(y)$. En projetant sur x l'équation de Navier-Stokes, on peut écrire que :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot \vec{e}_x = -\vec{\nabla} P \cdot \vec{e}_x + \rho \vec{g} \cdot \vec{e}_x + \eta \Delta \vec{v} \cdot \vec{e}_x$$

On obtient alors après simplification de tous les termes nuls :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Au bout d'un temps τ la couche de fluide à l'altitude δ est affectée par le mouvement de la plaque. En utilisant les grandeurs caractéristiques du problème, on peut écrire :

$$\frac{U}{\tau} \sim \frac{\eta}{\rho \delta^2} \implies \delta \sim \sqrt{\nu \tau} \quad \text{et avec } \tau \sim \frac{L}{U}$$

on a finalement que l'épaisseur de la couche limite s'écrit :

$$\delta \sim \frac{L}{Re}$$

On voit bien que plus le nombre de Reynolds est grand et plus la couche limite est petite et négligeable. Ce qui est bien cohérent avec le fait que les phénomènes de viscosité sont négligeables pour un nombre de Reynolds élevé.

Ordres de grandeur :

- * Voiture à $U \sim 100$ km/h ; $L \sim 3$ m ; $Re \sim 10^7 \implies \delta \sim 1$ mm
- * Balle de ping-pong + sèche-cheveux : $U \sim 10$ m/s ; $L \sim 4$ cm ; $Re \sim 10^4 \implies \delta \sim 0.5$ mm
- * Bille dans la glycérine : $U \sim 10$ m/s ; $L \sim 1$ cm ; $Re \sim 10 \implies \delta \sim 3$ mm

Remarques :

1. On voit pour le 3^{ème} exemple que la taille de la couche limite n'est plus négligeable par rapport à la dimension de l'objet.
2. Pour le cas de la voiture, la couche limite se voit par ses effets car une voiture se salit par dépôt de poussières malgré la vitesse du vent relatif au roulage. Cela vient de la très faible vitesse du vent au voisinage de la paroi.

La couche limite implique des pertes d'énergies par diffusion et en particulier l'apparition d'une traînée caractérisée par un coefficient de traînée C_x (écoulement selon x) qui va être de l'ordre de grandeur de l'unité.

Conclusion

→ On a vu que la simplification de l'équation d'Euler en négligeant les termes de viscosité conduisent à l'**équation d'Euler**.

→ D'autres hypothèses (écoulement permanent) nous permettent de résoudre l'équation d'Euler, en trouvant une relation simple entre la pression, la vitesse et l'altitude : la **relation de Bernoulli**.

→ Par contre, le modèle de l'écoulement parfait reste un modèle et donc possède des limites : **paradoxe de D'Alembert** et notion de **couche limite**.

Ouverture : Parfois on a un décollement de la couche limite ce qui conduit à une augmentation du coefficient de traînée et donc une force de traînée plus importante. D'où la nécessité de faire des objets profilés (cf. [2] p.492) pour éviter le décollement de la couche limite. Les aspérités sur une balle de golf permettent d'arriver à ce que l'on appelle la crise de traînée et alors on a une chute du coefficient de traînée ce qui permet à la balle d'effectuer une distance plus grande à vitesse égale qu'avec une balle sans aspérités.

Questions du correcteur

→ **Est-ce que ρ uniforme \implies fluide incompressible ?**

Non, cf. remarque dans la section 2.1

→ **Un superfluide est-il vraiment parfait ? Si on fait tourner un fluide parfait dans un récipient, le mouvement va-t-il continuer indéfiniment ?**

Non, on va avoir des effets quantiques qui vont apparaître entre la paroi et le fluide. On va avoir un couplage des états quantiques de la paroi et du fluide.

→ **Qu'est la définition d'une contrainte ?**

C'est l'ensemble des forces surfaciques s'exerçant sur un élément (particule fluide) d'un milieu continu. Ces forces peuvent être normales à la surface (forces de pression ou viscosité) ou tangentielles (viscosité de cisaillement par exemple).

→ **Quand peut-on faire l'hypothèse de l'incompressibilité d'un fluide ?**

Il faut que la vitesse de l'écoulement soit subsonique, ou de manière équivalente que le nombre de Mach $M = v/c$ soit faible ($M < 0.3$), avec v la vitesse de l'objet par rapport au fluide et c la vitesse du son dans le fluide.

→ **Qu'est ce qu'un fluide Newtonien ?**

La contrainte est une fonction linéaire du gradient de la vitesse (cisaillement). Ce sont des fluides où les particules sont dans un état proche de celui qu'elles ont à l'équilibre thermodynamique. En fait le temps de relaxation de ces fluides est bien plus court que les temps caractéristiques de l'écoulement.

Questions pour faire réfléchir

→ **Quelle distinction convient-il de faire entre fluide (in)compressible et écoulement (in)compressible ?**

→ **Quel est le lien entre le théorème de Bernoulli et le premier principe de la thermodynamique⁴ ?**

→ **Lors de l'écoulement d'un fluide parfait, quelles sont les forces susceptibles de travailler ?**

→ **Donner un ordre de grandeur de la pression mise en jeu dans une trompe à vide du type de celle que vous utilisez en chimie.**

→ **Souffler sur un cristalliseur rempli d'eau. Donner un ordre de grandeur de la profondeur de la petite cuvette qui se forme.**

→ **A propos du célèbre jet d'eau de Genève, un dépliant touristique affirme que sa hauteur de 140 m au dessus du lac est obtenue grâce à une expulsion de l'eau des pompes à une vitesse de 200 km/h sous une pression de 16 kg/cm². Ces chiffres sont-ils cohérents ?**

→ **Que dit le théorème de Kelvin ?**

Remarques du correcteur

☞ Le niveau générale de la leçon est trop faible. On reste sur sa faim.

☞ Il ne fallait pas traiter les leçons dans l'ordre. Cette leçon doit être considérée comme une «première» leçon de mécanique des fluides. Dans ce cadre, la viscosité ne vient qu'à

4. On consultera avec profit la composition de physique (sujet A, partie VI) du concours de l'agrégation 2006

la la fin de la leçon pour ouvrir sur la leçon traitant de ce sujet.⁵

☞ La notion de contrainte à plus d'intérêt quand on parle de fluide visqueux donc ne pas l'utiliser ici.

☞ Prendre en compte plutôt l'ordre historique pour faire la leçon. Il faut construire l'équation d'Euler pas à pas et l'équation de Bernoulli en est une conséquence.

☞ Parler du fait que pour les écoulements irrotationnels, la vorticité se conserve ce qui est une conséquence de la conservation du moment cinétique. D'où l'importance des écoulements irrotationnels.

Plan proposé par le correcteur

Introduction

On a vu :

→ Le milieu continu

→ La conservation de la masse

→ Element de cinématique : $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \dots$

On fait de la dynamique.

Hypothèse : Les particules fluides évoluent isentropiquement et leurs interactions sont uniquement dues à P

1.  quation du mouvement

1.1. Hypothèses

1.2. Force volumique de pression

$$-\vec{\nabla}P$$

1.3.  quation d'Euler

1.4. Rappel de l'équation de la conservation de la masse

Pas de démo.

1.5.  quation de l'entropie

$$\frac{Ds}{Dt} = 0$$

5. Cette remarque ne me semble pas juste, cf. section sur les retours des années précédentes à l'ENS de Lyon et le rapport du jury 2003. Je pense que ce plan peut fonctionner et que celui du correcteur est trop long (et trop compliqué pour moi). Après c'est à chacun de décider. Et comme dirai un certain Monsieur M. *nul ne peut se prévaloir de sa propre turpitude.*

2. Loix de conservation associées

2.1. Théorème de Bernoulli avec l'enthalpie

2.2. Relation pour un gaz parfait (St Vernant)

Sur une ligne de courant.

2.3. Importance des variations de ρ

Incompressibilité $\iff M_a \ll 1$. Avec M_a le nombre de Mach.

2.4. Applications

Limites de l'effet Venturi : Vaporisation.

Faire uniquement le tube de Pitot.

3.  coulements irrotationnels

3.1. Définition et importance

On a $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = cte$.

Donc $\iint (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} = cte$

3.2. Théorème de Bernoulli

Il peut être instationnaire : $\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}P = \vec{\nabla}\Psi \equiv \text{barotrope } P = P(\rho)$. Avec $\Psi = \int \frac{dP}{\rho}$

3.3. Applications

→ Vortex de Rankine → Effet Magnus

4. Limite du modèle réel

4.1. Pourquoi l'écoulement est parfait

Loi de conservation ($E_{\text{méca}}$ et Moment cinétique) des particules de fluides

4.2. Les fluides réels

Dans la réalité les particules de fluides frottent les unes contre les autres.

Frottement contrôlé par un paramètre : R_e .

Couches limites.

Conclusion

Les écoulements parfaits représentent bien les premiers effets de la dynamique des fluides (pression).

Force de traînée : $\frac{1}{2}\rho v^2 \times \text{Section} \times C_x$ avec C_x le coefficient de traînée de l'ordre de 1.

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

→ **Agrégation 2010 - Note : 14/20 :**

Questions et commentaires du jury : comment qualifier l'écoulement loin d'une aile d'avion ? à quoi ressemble la couche limite autour d'une aile profilée ? C'est quoi le décollement de la couche limite ? Quelle équation peut-on donner pour le vecteur tourbillon ? Sur l'effet venturi : dans l'exemple présenté (tuyère), la ligne de courant choisie pour la démonstration est horizontale, qu'est-ce que ça change si l'écoulement est vertical ?

Commentaires personnels : j'ai présenté le même plan que celui présenté pendant l'année⁶ Les techniciens ont monté toutes les manip sans problème. Je n'ai eu le temps de traiter qu'une application (effet venturi) et sur les questions ils m'ont demandé d'expliquer ce que je comptais faire comme autre application puisque j'avais sorti la soufflerie : j'ai répondu qu'il s'agissait du tube de pitot et ils m'ont demandé de donner des éléments théoriques au tableau.

6. NdR : A peu près le même que j'ai présenté à Toulouse.

LP 9 — Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 05/05/2014 par *Victor Fontan* et corrigée par *M. Rieutord*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides : applications*.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012) – “Le lien avec les potentiels thermodynamiques n’est pas souvent maîtrisé. Il est important de dégager clairement l’origine microscopique de la tension superficielle.”

☞ (2012) – “Le jury constate que trop souvent les candidats présentent des schémas où la représentation des interactions remet en cause la stabilité mécanique de l’interface.”

☞ (2011) – “Le lien avec les potentiels thermodynamiques n’est pas souvent maîtrisé. Il est important de dégager clairement l’origine microscopique du phénomène.”

☞ (2010, 2009) – “La force de tension superficielle est très mal décrite et comprise ; cette notion permet pourtant d’interpréter de nombreux résultats de façon simple et concrète. L’étude énergétique de l’interface doit s’appuyer sur une thermodynamique rigoureuse, où les systèmes et transformations étudiés sont définis avec une grande précision.”

Bibliographie

[1] de Gennes, *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2005.

[2] Guyon, Hulin et Petit, *Hydrodynamique Physique*. CNRS éditions, 3^{ème} édition.

Plan

1 Tension superficielle

1.1 Approche microscopique ([1] p.12)

1.2 Énergie superficielle et force capillaire ([1] p.14 + [2] p.30)

1.3 Loi de Laplace ([1] p.16)

1.4 Exemples pratiques

1.4.1 Formation d’un jet ([1] p.18)

1.4.2 Effet Marangoni : tensioactif ([1] p.15)

2 Contact à trois phases : mouillage

2.1 Enjeux et type de mouillage ([1] p.24 + [2] p.34)

2.2 Loi de Young Dupré ([1] p.25)

2.3 Tension critique et traitement de surface ([1] p.27-31)

3 Capillarité et pesanteur

3.1 Longueur capillaire et équation d’une surface libre ([1] p.38)

3.2 Ménisque et longueur capillaire ([1] p.48)

3.3 Loi du Jurin ([1] p.52 + [2] p.40)

3.4 Ondes capillaires et de gravité ([1] p.99-111)

Introduction ([1] p.7)

Définir ce qu’on appelle la capillarité, la tension superficielle, la tension interfaciale...

Enjeux industriels très important + phénomènes quotidiens de la tension superficielle et du mouillage.

On utilisera avec profits les vidéos issus de [1] disponible dans la banque d’image (*Mécanique des fluides* → *Divers* → *Vidéo* : ...) soit pour montrer les expériences soit pour appuyer les propos tenus.

1 Tension superficielle

1.1 Approche microscopique ([1] p.12)

► **Expérience Vidéo film de savon percé :** Mise en évidence expérimentale de la tension superficielle avec un film savonneux et un tige mobile.

Les molécules situés à proximité de la surface libre ressentent des interactions de VdW plus faible avec la vapeur les surplombant. Ce déficit d’énergie d’interaction du fluide se traduit par une minimisation de la surface du liquide avec la vapeur.

☞ *La sphère, qui possède une courbure moyenne constante non-nulle, n’est pas une surface minimale au sens restrictif du terme. Elle vérifie cependant une autre propriété de minimisation : elle est la surface d’aire minimale enfermant un volume donné.*

Transition : On cherche à décrire de manière énergétique cette tension.

1.2 Énergie superficielle et force capillaire ([1] p.14 + [2] p.30)

Retour sur l’expérience de la barre, le travail nécessaire à déplacer la barre correspond à : $\delta W = F dx = 2\gamma l dx$.

$\vec{\gamma}$ est une force par unité de longueur normale à la tige, dans le plan de la surface, et dirigée vers le liquide.

γ correspond également à l’énergie à fournir pour augmenter la surface d’une unité : $\delta W = \gamma d\mathcal{A}$.

On donne des ordres de grandeurs de γ .

Comme la tension superficielle cherche à minimiser la surface d’interaction entre deux fluides, on montre pourquoi les petites gouttes disparaissent au profit des grandes : $V_1 + V_2 = \frac{8}{3}\pi R^3 \implies R_g = 2^{1/3}R$ donc si on compare la surface de deux gouttes, on a $S_n = 4\pi(2^{1/3}R)^2 \approx 6.5\pi R^2$ qui est inférieure à la surface de deux gouttes $S = S_1 + S_2 = 8\pi R^2$.

Transition : On va montrer ce raisonnement par un calcul sur la différence de pression à l’interface.

1.3 Loi de Laplace ([1] p.16)

On relie la différence de pression à une interface en fonction de la courbure de la surface.

On démontre la loi de Laplace (1805) pour une goutte d'huile dans de l'eau : $\Delta p = p_h - p_e = \frac{2\gamma_{he}}{R}$ avec R le rayon de la goutte.

On voit alors que la pression dans les petites gouttes est plus grande ce qui les rend plus instables thermodynamiquement.

Donc dans un émulsion les petites gouttes disparaissent au profit des grandes.

Transition : On montre d'autres exemples de la tension superficielle

1.4 Exemples pratiques

1.4.1 Formation d'un jet ([1] p.18)

On montre pourquoi lorsqu'on ouvre un robinet, on voit un jet d'eau se fragmenter en gouttelettes (il minimise son énergie de surface).

1.4.2 Effet Marangoni : tensioactif ([1] p.15)

► **Expérience :** On disperse du poivre à la surface de l'eau. On vient tremper un objet pointu dont le pic est imbibé de savon (tensioactif). Les grains de poivre s'écartent de la zone où il y a du savon. Si maintenant on rajoute du poivre à l'endroit où il y a du savon, il coule, donc le poivre est plus dense que l'eau et initialement la tension superficielle l'empêche de couler.

Le savon qui est un tensioactif diminue la tension superficielle de l'eau. On a alors des zones dans lesquelles l'énergie n'est plus minimale puisque la tension de surface s'est abaissée ce sont les zones où il y a le savon.

Par contre près des bords la tension de surface est toujours maximale et donc l'énergie minimale. Il se produit alors un courant de diffusion vers les zones d'énergie minimale, les particules de poivre sont donc amenés par ce courant vers les bords.

Transition : On comprend que la présence d'impuretés transforme radicalement les propriétés de la tension superficielle d'un milieu. C'est pourquoi nous allons étudier le mouillage.

2 Contact à trois phases : mouillage

2.1 Enjeux et type de mouillage ([1] p.24 + [2] p.34)

On donne les enjeux de rendre une surface initialement hydrophobe hydrophile et inversement.

On définit le paramètre d'étalement S et les types de mouillage en fonction de l'angle de contact.

Transition : On va chercher à écrire le lien mathématique entre le paramètre d'étalement et l'angle de contact dans le cas d'une goutte à l'**équilibre mécanique**.

2.2 Loi de Young Dupré ([1] p.25)

On fait un bilan des forces capillaires sur la ligne de contact, on utilise alors les tensions superficielles (force par unité de longueur). On obtient : $S = \gamma(\cos \theta - 1)$.

Transition : On définit une tension critique de surface pour un solide en-dessous de laquelle il y a mouillage total.

2.3 Tension critique et traitement de surface ([1] p.27-31)

On trace la courbe donnant la tension critique de surface en fonction de $\cos \theta$.

On donne des ordg de γ_C pour différents matériaux.

Transition : Pour l'instant on a négligé l'effet de la pesanteur de notre étude. On va voir dans cette dernière partie comment elle intervient dans les phénomènes.

3 Capillarité et pesanteur

3.1 Longueur capillaire et équation d'une surface libre ([1] p.38)

On définit la longueur capillaire κ^{-1} . Cette longueur est une échelle de longueur au-delà de laquelle la gravité devient importante.

On l'estime en comparant la pression de Laplace γ/κ^{-1} à la pression hydrostatique $\rho g \kappa^{-1}$ lorsqu'on plonge à une profondeur κ^{-1} dans un liquide de densité ρ soumis au champ de gravité g terrestre.

$$\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \approx 2 \text{ mm}$$

On résout l'équation de la surface libre en fonction de la distance par rapport au mur. On trouve une décroissance exponentielle assez loin du mur dont la longueur caractéristique est la longueur capillaire κ^{-1} .

3.2 Ménisque et longueur capillaire ([1] p.48)

D'une façon générale, la taille caractéristique d'un ménisque est soit la longueur capillaire si l'échelle ℓ du récipient est supérieur à κ^{-1} , soit ℓ dans le cas contraire.

Transition : Étudions alors l'ascension d'un liquide dans un tube capillaire lorsque la dimension du tube est petite devant la longueur capillaire.

3.3 Loi du Jurin ([1] p.52 + [2] p.40)

► **Expérience Vidéo : Loi de Jurin dans différents capillaires :** On fait l'expérience de la montée de l'eau dans un capillaire.

Si le liquide est mouillant, il effectue une ascension dans le tube. Si il est non mouillant la surface libre dans le tube est inférieur au niveau extérieur.

On résonne sur une colonne de fluide mouillant en équilibre dans un tube capillaire. On en déduit la loi de Jurin : qui nous donne l'expression de l'ascension h du liquide dans le tube $h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r}$.

On fait un calcul d'ordre de grandeur et on vérifie que la longueur capillaire est bien inférieur au rayon du tube.

On ne peut pas faire de jet dû à la capillarité. Si on essaye de prendre un tube de même rayon que précédemment mais de hauteur H inférieur à h , le liquide atteindra le sommet du tube puis le ménisque prendra la forme qui équilibre la différence de pression hydrostatique $-\rho g H$ avec le bain. De même si on essaye de réduire infiniment le rayon du capillaire, la pression devient telle qu'elle atteint la pression de vapeur saturante et le liquide s'évapore.

3.4 Ondes capillaires et de gravité ([1] p.99-111)

Si temps on parle des ondes capillaires et des ondes de gravités et dans quels cas l'une domine par rapport à l'autre.

On peut parler également de l'instabilité de Rayleigh-Taylor (formation de goutte sur la partie haute d'un frigidaire) ou l'instabilité de Plateau-Rayleigh (chapelet de gouttes sur une fibre).

Questions pour faire réfléchir

- ➔ Qu'est-ce que le phénomène de capillarité ? Quelle en est l'origine physique ? Comment définit-on la tension superficielle ? à quelle fonction thermodynamique la tension de surface est-elle reliée ? Comment la tension de surface évolue-t-elle avec la température ? Justifier vos réponses.
- ➔ Donner l'ordre de grandeur de la tension de surface de l'eau, de l'éthanol et d'une eau savonneuse.
- ➔ Décrire deux ou trois techniques de mesures de la tension superficielle d'un liquide. Pourquoi utilise-t-on suivant les cas l'une ou l'autre de ces techniques ?
- ➔ Quels effets désigne-t-on sous le vocable " Effets Marangoni" ?
- ➔ Qu'est-ce que l'instabilité de Rayleigh-Plateau¹ ? où peut-on rencontrer cette instabilité dans la vie de tous les jours ?
- ➔ Quelles sont les expériences qui pourraient venir illustrer cette leçon² ?
- ➔ Que se passe-t-il si on dépose une goutte d'eau sur un substrat déformable ?

1. Cette instabilité est abordée de façon originale dans l'ouvrage de M. Fermigier intitulé *Hydrodynamique physique. Problèmes résolus avec rappels de cours.* paru chez Dunod.

2. En plus des expériences qu'on pourra choisir de présenter, on pourra illustrer certaines parties de la leçon en utilisant le CD Rom vendu avec l'ouvrage de P.G. de Gennes, F. Brochard et D. Quéré intitulé *Gouttes, bulles, perles et ondes* paru aux éditions Belin, collection Echelles.

La réponse est donnée en dessous : de l'origami capillaire³ ! Ces jolies photos sont là pour vous rappeler que les effets capillaires sont souvent en compétition avec un autre effet : gravité, viscosité, élasticité,...

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ Agrégation 2010 - Note : 08/20 :

Questions et commentaires du jury : comment peut-on définir la tension superficielle simplement ? Ils ont aussi posé des questions sur le paramètre d'étalement, le lien entre fluide mouillant/non mouillant et tension superficielle. Sur la démonstration de la loi de Laplace, je me suis compliquée la vie en ne supposant pas l'équilibre thermique.

Commentaires personnels : la préparation s'est bien passée, les techniciens et profs préparateurs aux petits soins. Le membre du jury que je suis allée voir aux résultats m'a dit que ça avait été moyen, que ce n'était pas la cata mais que ce n'était pas transcendant, qu'il aurait fallu donner plus d'exemples simples.

3. Pour ceux que ce sujet intéresse, un article récent sur le sujet est disponible gratuitement à l'adresse suivante : <http://www.pmmh.espci.fr/benoit/publi/Py07b.pdf>

Troisième partie

Leçons de Thermodynamique et de Physique Statistique

LP 10 — Gaz parfait, gaz réels.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 11/12/2013 par *Aurélie Condomines* et corrigée par *M. Rieutord*.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012) – “Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de collision à l'échelle moléculaire et prendre du recul vis-à-vis du modèle des sphères dures. Le calcul de la pression cinétique doit être fait avec soin. Il faut préciser à quel moment intervient la moyenne statistique des grandeurs microscopiques ¹.”

☞ (2010) – “Le théorème d'équipartition de l'énergie est un théorème limite dont il faut bien connaître les conditions de validité (voir aussi LP50). Le calcul de la pression cinétique nécessite de choisir une distribution des vitesses, qui peut être simple mais qui doit être cohérente.”

☞ (2008) – “Les notions de moyennes, de valeurs quadratiques moyennes ainsi que l'exploitation des hypothèses formulées pour l'étude du gaz parfait sur l'évaluation de ces grandeurs sont très souvent mal introduites, voire mal comprises.”

☞ (2005) – “Les notions de température cinétique et de température thermodynamique doivent être clairement dégagées.”

☞ (2004) – “Le candidat doit maîtriser les ordres de grandeur des valeurs des grandeurs introduites : densité particulaire ; nombre de collisions par unité de temps, de surface ; vitesse quadratique moyenne ; longueur d'onde de Broglie associée à une entité... et savoir les utiliser de manière pertinente au cours de l'exposé. La notion de gaz parfait polyatomique doit être abordée ².”

☞ (2002) – “Cette leçon nécessite d'avoir bien réfléchi à la logique de la démarche adoptée. On ne doit pas se limiter au seul cas du gaz monoatomique. L'interprétation cinétique de la notion de température est souvent confuse, en particulier dans le cas des gaz parfaits polyatomiques. Les conditions d'utilisation ou d'application du théorème de l'équipartition de l'énergie et la définition légale de la température doivent être connues ³.”

☞ (2001) – “Dans cette leçon, on doit aussi étendre l'étude aux gaz parfaits polyatomiques. La notion de libre parcours moyen doit être mieux soulignée et il convient de donner les ordres de grandeurs des quantités utilisées.”

☞ (2000) – “Dans cette leçon, il faut évidemment distinguer les caractéristiques générales d'un gaz parfait de celles d'un gaz parfait monoatomique. La loi de distribution des vitesses de Maxwell doit être citée et commentée. Enfin, dans le calcul de la pression, est-il vraiment nécessaire de séparer les deux phases d'adsorption et de désorption ⁴ ? ”

☞ (1999) – “Les limites du modèle sont souvent mal comprises (notion de libre parcours moyen par exemple). Le lien entre le modèle du gaz parfait et les gaz réels doit être détaillé.”

☞ (1998) – “Il est suggéré aux candidats de faire ressortir le fait que la pression est une grandeur macroscopique nécessitant pour être définie que l'on procède à une moyenne sur un grand nombre de chocs élémentaires. Beaucoup de candidats définissent le gaz parfait comme un modèle où “... aucune interaction ne s'exerce entre les molécules...”, alors que le rôle des collisions y est essentiel. La notion de libre parcours moyen doit être introduite [NB : ce

1. La leçon en 2012 s'intitulait : *Modèle du gaz parfait*.

2. Pour toutes ces questions, il est pertinent d'aller lire les compléments du cours de Physique Statistique de R. Diu, C. Guthmann, D. Lederer et B. Roulet paru aux éditions Hermann.

3. Jusqu'en 2003, le titre de la leçon était le suivant : *Modèle du gaz parfait. Interprétations cinétiques de la pression et de la température. Limitations du modèle*.

4. On pourra revoir ces notions en composant sur le sujet d'agrégation de 1996, épreuve A.

n'est pas une limitation du modèle]. L'exposé des limitations se résume trop souvent à l'énoncé de l'équation d'état de Van der Waals, alors que les effets quantiques ne sont que rarement mentionnés, de même que les rôles respectifs des interactions répulsives et attractives selon la valeur de la température.”

☞ (1997) – “Avant de se lancer dans le calcul de la pression cinétique, il est nécessaire de discuter qualitativement les phénomènes à l'échelle microscopique.”

Bibliographie

[1] Faroux, Renault, *Thermodynamique*. j'intègre DUNOD, 1997.

[2] Garing, *Les 1001 questions de la physique en prépa Physique, PCSI*. Ellipses, 2013.

[3] Latour, *Leçons de thermodynamique*. Ellipses, 1997.

[4] *CAP Prépa Physique MPSI-PCSI-PTSI*, 1^{ère} année. Pearson, 2009.

[5] Taillet, *Dictionnaire de physique*. de Boeck, 3^{ème} édition 2013.

Prérequis

♥ Bases de la thermodynamique : pression, température, énergie interne, équilibre thermique.

Plan

1 Introduction expérimentale et modèle du gaz parfait

1.1 Lois expérimentales historiques ([1] p.40)

1.2 Modèle du gaz parfait

2 Théorie cinétique des gaz

2.1 Hypothèses de la théorie statistique ([1] p.24)

2.2 Pression cinétique ([1] p.27)

2.3 Température cinétique et absolue et équation d'état ([1] p.31 et [4] p.652 et [3])

3 Approche énergétique, monoatomicité et polyatomicité

3.1 Énergie interne et capacité calorifique d'un GPM ([1] p.32)

3.2 Théorème d'équipartition ([1] p.35)

3.3 Gel des degrés de liberté pour un gaz diatomique ([1] p.37)

4 Amélioration du modèle : gaz réel ([3] p.31 et [1] p.51)

4.1 L'interaction répulsive : le covolume

4.2 L'interaction attractive : pression interne

4.3 Amélioration de l'équation d'état des gaz parfait

4.4 Énergie interne

Introduction

Avec un modèle simpliste utilisant une description microscopique, on cherche à retrouver les grandeurs macroscopiques déjà vu au lycée : pression et température.

On verra que le modèle du gaz parfait est simpliste dans le sens ou seulement 2,3 grandeurs permettent de décrire complètement le système et retrouve les bons ordres de

grandeurs des observations expérimentales.

On justifiera par des ordres de grandeurs les hypothèses du modèle (cf. [2] p.471 ; [3] et [4] p.652).

1 Introduction expérimentale et modèle du gaz parfait

1.1 Lois expérimentales historiques ([1] p.40)

Loi de Boyle-Mariotte (1670) : $PV = \text{cte}$ (à T et n fixés).

Loi Gay-Lussac : à p cst le volume d'un gaz est proportionnelle à sa température absolue.

Loi de Charles : à V cste la pression du gaz est proportionnelle à sa température absolue.

Si un gaz obéit aux deux dernières lois alors il est dit **parfait**.

On va construire un modèle nous permettant de retrouver le comportement de ces gaz.

1.2 Modèle du gaz parfait

On construit un **modèle**. Molécules = particules classiques (par opposition à quantique), de dimension négligeable devant la distance inter-molécules, interaction par contact entre molécules et par contact avec les parois assurant la thermalisation.

Il est important d'opposer les hypothèses du modèle du GP et celles de la théorie cinétique, qui est l'outil d'étude du modèle.

Hypothèses à justifier par des ordres de grandeurs au cours de la leçon : on considère les particules **ponctuelles ou sphères dures** (la distance d séparant les molécules est très grandes devant la taille des molécules), classiques (comparer d à λ_{dB} au cours de la leçon) et non relativistes (comparer u à c) ; l'énergie potentielle d'interaction est nulle en dehors des collisions (les interactions à distance entre les molécules sont négligées et les interactions intermoléculaires se réduisent à des chocs ponctuels) ; les collisions sont élastiques entre les molécules mais pas avec la paroi (thermalisation) ;

2 Théorie cinétique des gaz

2.1 Hypothèses de la théorie statistique ([1] p.24)

Dans le gaz règne un chaos moléculaire : mouvement incessant et désordonné. O.d.g du libre parcours moyen $\ell \approx 1/(\sigma n)$.

Homogénéité de la densité moléculaire.

Homogénéité de la distribution des vitesses.

Isotropie de la distribution des vitesses.

Vitesse quadratique moyenne et énergie cinétique totale du gaz.

☞ *Quel que soit le gaz parfait, monoatomique, diatomique, idéal ou non, la vitesse quadratique moyenne n'est déterminée que par l'énergie cinétique liée au 3 degrés du*

mouvement de translation, on a toujours $\frac{1}{2}Mu^2 = \frac{3}{2}RT$ et donc une même équation d'état macro. $PV = nRT$. En revanche pour l'énergie interne c'est différent (énergie de rotation, vibration,...)

2.2 Pression cinétique ([1] p.27)

On définit très proprement le système étudié et surtout l'utilisation des moyennes statistiques sur des grandeurs microscopiques.

On insiste sur le fait que la loi de distribution des vitesses est la même quand les molécules arrivent sur la paroi et quand elles partent de la paroi sous la condition que le système est à l'**équilibre thermique**.

2.3 Température cinétique et absolue et équation d'état ([1] p.31 et [4] p.652 et [3])

On définit la température cinétique (issue d'un modèle théorique) et on la compare à la température absolue. On appelle température absolue une mesure expérimentale de la température qui prend le zéro absolu des températures comme origine.

Les gaz parfaits permettent de définir une échelle de température (extrapolation du diagramme d'Amagat PV en fonction de P qui converge vers un point unique quand $P \rightarrow 0$ indépendamment de la **nature du gaz**. Cette limite constitue une grandeur thermométrique permettant de définir une température. On utilise $\lim_{P \rightarrow 0} PV$ comme mesure de température dite absolue (ou température des gaz parfaits) et exprimée en K. L'échelle est alors fixée par l'écart de température entre un mélange eau-glace et eau bouillante à 1 atm. Par contre le thermostat de référence est fixé par le point triple de l'eau dont la pression est facilement maintenue à une valeur fixe $T_R = 273,16K$ (cf.[2] p.498).

On calcule un o.d.g. de la vitesse quadratique des molécules ([4] Test 31.3) et on justifie l'approche classique (non relativiste $v \ll c$ et non quantique $\lambda \sim \frac{h}{\sqrt{2k_B T m}} \ll d$) choisie.

On calcule un o.d.g. de la densité particulaire et on justifie le choix de modéliser le système par des particules ponctuelles.

☞ *La température cinétique est en lien avec le fait que $\langle e_c \rangle_A = \langle e_c \rangle_B$ c'est-à-dire que $\langle e_c \rangle$, l'énergie cinétique moyenne par molécule est la même quelle que soit la molécule (petite ou grosse). Ceci conduit à la notion capitale de température cinétique (cf. [3] p.14).*

On définit la notion d'équation d'état : *relation entre plusieurs des variables thermodynamiques qui décrivent les propriétés d'un système à l'équilibre, et dont l'existence traduit la non indépendance de ces variables. Il s'agit d'une équation constitutive qui ne peut pas être déduite des lois de la thd. et qui s'obtient expérimentalement ou à l'aide d'une modélisation microscopique plus fondamentale.* On écrit celle issue de la modélisation du gaz parfait et on remarque la concordance avec l'expérience d'où la force du modèle du gaz parfait.

3 Approche énergétique, monoatomicité et polyatomicité

3.1 Énergie interne et capacité calorifique d'un GPM ([1] p.32)

On définit l'énergie interne et la capacité calorifique d'un GPM. Ces deux grandeurs ne dépendent que de la température.

On peut généraliser avec le th. de l'équipartition de l'énergie.

3.2 Théorème d'équipartition ([1] p.35)

On écrit le th. de l'équipartition de l'énergie. Pour chaque terme quadratique (sinon valeur moyenne nulle) dans l'énergie, ou autrement défini pour chaque degré de liberté d'un système on associe une énergie thermique égale à $\frac{1}{2}k_B T$.

☞ *L'équipartition de l'énergie, malgré sa grande généralité, est un résultat valable sous certaines hypothèses (ergodicité, équilibre thermodynamique) et dans certaines limites (effets quantiques négligeables).*

Transition : Pour un gaz diatomique on devrait trouver 6 degrés de liberté (3 translation + 3 rotations) mais c'est contraire à ce que l'on observe expérimentalement.

3.3 Gel des degrés de liberté pour un gaz diatomique ([1] p.37)

Le théorème de l'équipartition de l'énergie reste valable tant la longueur d'onde de Broglie reste très inférieure à la distance moyenne entre les particules.

On explique la divergence des résultats théoriques et des résultats expérimentaux grâce à la mécanique quantique et aux gels de degré de liberté en fonction de la température.

Transition : Qu'est-ce qui n'est pas parfait dans les gaz réels.

4 Amélioration du modèle : gaz réel ([3] p.31 et [1] p.51)

En perfectionnant l'équation d'état pour tenir compte des interactions moléculaires, nous obtiendrons une meilleure approche des propriétés des gaz réels.

À de grandes distances, les forces moléculaires (i.e. les forces d'interactions ne conduisant pas à la formation de composés chimiques) sont des forces d'attraction qu'on appelle forces de Van der Waals. C'est un effet de polarisation électrique (en $1/r^7$).

4.1 L'interaction répulsive : le covolume

Les molécules sont non ponctuelles donc le volume accessible au gaz est plus petit que dans le cas du gaz parfait :

$$V \rightarrow V - b$$

b est le **covolume** et est proportionnelle au volume des N molécules du gaz.

On peut calculer l'o.d.g. de $b \approx 3m^3/mol$ et le comparer à la distance entre chaque molécules dans l'eau et dans l'air.

4.2 L'interaction attractive : pression interne

Une molécule proche de la paroi perçoit des force attractives de VdW que dans une direction (celle opposée à la paroi) ce qui a donc un effet de diminution de la pression sur la paroi.

$$(\text{pression du gaz parfait}) - P = \bar{\omega}$$

$\bar{\omega}$ est la **pression interne** qui est proportionnelle à a/V^2 où a est une constante ($a \approx 10^{-1} - 10^{-3} J.m^3.mol^{-2}$).

☞ *On néglige ici, l'action attractif des parois sur les molécules qui tendrait à augmenter la pression sur la paroi.*

4.3 Amélioration de l'équation d'état des gaz parfait

En effectuant ces corrections on arrive à l'équation d'état de Van der Waals :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = Nk_B T$$

☞ *Il n'existe pas que le modèle de Van der Waals pour décrire les gaz réels. Il existe également l'équation d'état de Clausius (cf. [5] p.250) ou l'équation de Dieterici (cf. [1] p.65). Pour les gaz denses, l'équation de VdW n'est plus vérifiée quantitativement mais donne une description qualitative valable.*

4.4 Énergie interne

L'énergie interne devient une fonction de T et de V : $U(T, V) = C_V T - \frac{a}{V}$. Les forces étant attractives, la contribution correspondant à l'énergie interne est négative et tend vers zéro lorsque le volume devient très grand. U augmente donc avec V , à T constant.

Deux tests expérimentaux particuliers mettent en évidence les écarts des propriétés des gaz réels par rapport à celle des gaz parfaits ; ce sont les détentes de Joule-Gay-Lussac (la diminution de la température (sauf pour l'hydrogène) lors de la détente pour les gaz réels prouvent que les interactions sont attractives) et de Joule-Thomson (permet de remonter à des informations sur a et b).

Conclusion

- Avec un modèle simple sur des grandeurs microscopiques on retrouve les résultats expérimentaux macroscopiques avec une assez bonne précision.
- **Problème** : Le gaz parfait reste un gaz indépendamment de sa température (pas de changement de phase).
- On introduit alors le gaz de Van der Waals qui est une amélioration du modèle.

Questions et Remarques du correcteur

→ Quelle est la chaleur latente d'un GP ?

Nulle, il n'y pas de transition de phase dans le modèle du gaz parfait.

→ Mise en défaut du modèle de VdW ?

b n'est pas toujours constant, il dépend en réalité de la température, il diminue quand T augmente.

Questions pour faire réfléchir

- énoncer et démontrer le théorème d'équipartition de l'énergie. Quelles sont les conditions d'application de ce théorème ?
- énoncer le théorème du Viriel relatif à l'expression de l'énergie cinétique moyenne d'un ensemble de N particules ponctuelles en fonction des forces intérieures et extérieures subies par ces diverses particules. Comment se transforme cette expression dans le cas d'un gaz parfait ? En déduire l'expression de la pression cinétique.
- Donner un ordre de grandeur du nombre de particules dans la pièce où vous vous trouvez actuellement ($2,5 \cdot 10^{25}/m^3$). Quelle est leur vitesse typique ($500m/s$) ? Leur libre parcours moyen ($0,1\mu m$) ? Leur coefficient d'auto-diffusion ?
- Quelle est la signification physique de la loi de répartition des vitesses dite de Maxwell-Boltzmann ? Comment pourriez-vous la faire comprendre à des étudiants ?
- Que savez-vous des gaz parfaits quantiques ?
- Quel lien faites-vous entre le rayonnement du corps noir et le gaz parfait ⁵ ?

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

→ Agrégation 2008 - Note : 19/20 :

Questions et commentaires du jury : retour sur les hypothèses du gaz parfait (pertinence du caractère ponctuel des particules du gaz si on considère des collisions élastiques entre particules). Ordre de grandeur du dt intervenant dans le calcul de la pression cinétique pour estimer le nombre de chocs par unité de temps ? ($dt \approx 0,1ns$ donc nombre

de choc = $1/dt \approx 10^{10}$ chocs/s) Le modèle du gaz parfait est-il valable hors équilibre ? Non, il faut que l'équilibre thermique soit atteint pour calcul la pression cinétique. Quelle est l'origine du théorème d'équipartition ? Comment estimer les températures de gel (des degrés de liberté) ? Pourquoi le dernier degré de rotation d'une molécule diatomique ne rentre pas en compte dans le calcul du théorème d'équipartition ? (Car la température de dégel du degré de rotation propre est très élevé car son moment d'inertie est quasiment nul selon cet axe (cf.[1] p.37).

→ Agrégation 2008 - Note : 07/20 :

Questions et commentaires du jury : questions de mécanique quantique sur la quantification des états de vibrations des molécules diatomiques (Cf le rapport de jury de 2004.).

5. Sur ce point, on pourra lire le chapitre 4 du cours de Physique Quantique I de Paris VI de Claude Aslangul, disponible à l'adresse suivante : <http://www.librecours.org>.

LP 11 — Premier principe de la thermodynamique.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 11/12/2013 par *Pauline Dujardin* et corrigée par *M. Rieutord*. Il n'existait pas de leçon similaire en 2013 (mais elle a existé cf.[3]). Par contre 3 leçons de thermodynamique ont été supprimés pour la session 2014 : **LP12** *Fonctions d'état caractéristiques d'un système à l'équilibre thermodynamique. Identités thermodynamiques. Applications ; LP14* *Thermodynamique des phénomènes irréversibles* et **LP17** *Notion d'état microscopique. Interprétation statistique de l'entropie. Exemples.*

Programme PCSI 2013

Notions et contenus	Capacités exigibles
3. Premier principe. Bilans d'énergie Premier principe de la thermodynamique : $\Delta U + \Delta E_c = Q + W$	Définir un système fermé et établir pour ce système un bilan énergétique faisant intervenir travail W et transfert thermique Q . Exploiter l'extensivité de l'énergie interne. Distinguer le statut de la variation de l'énergie interne du statut des termes d'échange. Calculer le transfert thermique Q sur un chemin donné connaissant le travail W et la variation de l'énergie interne ΔU . Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure d'une grandeur thermodynamique énergétique (capacité thermique, enthalpie de fusion...).
Enthalpie d'un système. Capacité thermique à pression constante dans le cas du gaz parfait et d'une phase condensée incompressible et indilatable.	Exprimer l'enthalpie $H_m(T)$ du gaz parfait à partir de l'énergie interne. Comprendre pourquoi l'enthalpie H_m d'une phase condensée peu compressible et peu dilatable peut être considérée comme une fonction de l'unique variable T . Exprimer le premier principe sous forme de bilan d'enthalpie dans le cas d'une transformation monobare avec équilibre mécanique dans l'état initial et dans l'état final. Connaître l'ordre de grandeur de la capacité thermique massique de l'eau liquide.
Enthalpie associée à une transition de phase : enthalpie de fusion, enthalpie de vaporisation, enthalpie de sublimation.	Exploiter l'extensivité de l'enthalpie et réaliser des bilans énergétiques en prenant en compte des transitions de phases.

Bibliographie

- [1] Garing, *Les 1001 questions de la physique en prépa Physique, PCSI*. Ellipses, 2013.
- [2] *CAP Prépa Physique MPSI-PCSI-PTSI*, 1^{ère} année. Pearson, 2009.
- [3] Latour, *Leçons de thermodynamique*. Ellipses, 1997.
- [4] Taillet, *Dictionnaire de physique*. de Boeck, 3^{ème} édition 2013.

Plan

1 Qu'est-ce que la thermodynamique ?

- 1.1 Mécanique et thermodynamique ([2] Exo 33.1 p.712)
- 1.2 Définitions de la thermodynamique ([1] p.494 et [3] p.46)
- 1.3 Applications de la thermodynamique

2 Le premier principe

- 2.1 Définition de l'énergie interne d'un système ([2] p.681-683)
- 2.2 Équivalence chaleur-travail : construction du premier principe
- 2.3 Expression du premier principe et conservation de l'énergie

3 Exemples d'application

- 3.1 Retour sur l'expérience introductive armé du 1^{er} principe ([2] Exo 33.1 p.712)
- 3.2 Détente de Joule et Gay-Lussac ou Joule-Thomson ([2] p.696)
- 3.3 Calorimétrie à volume constant ([2] p.701)

Introduction

On cherche à décrire les échanges d'énergie avec un système et l'extérieur ce que la mécanique ne fait qu'en surface.

On définit dans un premier temps le vocabulaire de la thermodynamique (états d'équilibre, variable d'état,...).

Puis on cherchera à construire le premier principe en détaillant tous les termes qui interviennent (chaleur, énergie interne, énergie cinétique macroscopique et travail).

Finalement on cherchera à démontrer des applications du premier principe sur des expériences simples.

1 Qu'est-ce que la thermodynamique ?

1.1 Mécanique et thermodynamique ([2] Exo 33.1 p.712)

► **Expérience :** On pousse un solide indéformable sur une table à vitesse constante sur une longueur L . On constate un échauffement de la table et du cube.

Le travail exercé par la table sur le cube est non nul, il est égale à l'opposé du travail de l'opérateur sur le cube. Par contre le travail du cube sur la table est nul car la table est immobile dans le référentiel du laboratoire ($W = F \cdot dl = 0$ car $dl = 0$).

L'énergie mécanique qui a quitté le cube n'a pas été donnée à la table sous forme d'énergie mécanique. Cela est typique des phénomènes dissipatifs d'énergie mécanique. Pour avoir une vision complète des échanges énergétiques, le théorème de l'énergie cinétique est insuffisant : il faut utiliser de nouvelles grandeurs définie dans le cadre de la thermodynamique (ici l'énergie interne).

1.2 Définitions de la thermodynamique ([1] p.494 et [3] p.46)

La thermodynamique est la science des échanges d'énergie. Elle étudie ces échanges entre des états d'équilibres macroscopiques.

Un système isolé est dit à l'**équilibre thermodynamique** lorsque son état macroscopique n'évolue pas spontanément au cours du temps.

Les systèmes étudiés possèdent une nombre infini de degrés de liberté \implies on utilise des **variables thermodynamiques** qui caractérise l'état macro. d'un système donné et qui par sa modification en décrit l'évolution. L'expérience permet de déterminer le nombre nécessaire et suffisant de paramètres pour décrire l'état du système : ce sont les **variables d'états indépendantes**.

Il existe des variables **extensives** qui nous permettent de sommer les contributions d'éléments différentiels.

Un système sera caractérisé à l'équilibre par une **fonction d'état** (U,H,S,...) qui dépend des variables d'états. Les fonctions d'états ne vont pas dépendre de l'histoire de la transformation mais uniquement des états initiaux et finaux dans lesquels le système se trouve à la suite de la transformation.

On va donc introduire des nouvelles fonctions pour permettre de traduire ces échanges d'énergie, notamment la fonction d'état énergie interne que l'on a déjà vu dans la théorie cinétique du gaz parfait et qui traduisait l'agitation thermique donc relié au concept de température.

1.3 Applications de la thermodynamique

La thermodynamique nous permet de faire des bilans d'énergie entre des états d'équilibre.

Elle nous permet de quantifier les échanges d'énergie entre un système et l'univers.

Elle permet de comprendre et d'améliorer le fonctionnement des machines thermiques (PAC, frigo, moteur).

Elle repose sur des principes, donc non démontrables qui pour l'instant semble être toujours en accord avec l'expérience (découverte théorique du neutrino par Pauli).

2 Le premier principe

2.1 Définition de l'énergie interne d'un système ([2] p.681-683)

Énergie cinétique totale du système (grandeur extensive) = énergie cinétique macro. (E_c) + énergie cinétique micro (agitation thermique, e_c). Le terme micro ne dépend

pas du référentiel d'étude car il est défini dans le référentiel barycentrique des particules mésoscopiques. Ce terme n'est jamais pris en compte dans les problèmes de pure mécanique.

On **postule** que toutes les interactions entre constituants élémentaires dérivent d'une énergie potentielle. On définit l'énergie potentielle interne e_p comme la somme des énergies potentielles de toutes les interactions entre les constituants microscopiques du système. Elle est indépendante du référentiel d'étude d'après le postulat que nous avons fait.

On définit alors l'énergie interne d'un système comme la somme de son énergie cinétique microscopique (agitation thermique) et de son énergie potentielle interne :

$$U \stackrel{\text{déf}}{=} e_c + e_p$$

Elle est indépendante du référentiel d'étude.

Elle est extensive dans le cas où on néglige les interactions à distances (en $1/r^7$) entre deux sous-systèmes devant les autres composantes de l'énergie.

C'est une fonction d'état et donc elle est définie à tout instant que le système soit à l'équilibre ou pas.

2.2 Équivalence chaleur-travail : construction du premier principe

Expérience de Joule (1845) permet de conclure sur l'équivalence travail-chaleur dont l'unité est celle de l'énergie le Joule! Abandon de l'idée d'une fluide calorifique s'écoulant des zones chaudes vers les zones froides.

Le transfert d'énergie ne s'effectue pas que par l'intermédiaire d'un travail macroscopique.

On a alors deux contributions à la variation d'énergie totale d'un système fermé : le travail et le transfert thermique (chaleur). On postule le premier principe de la thermodynamique.

*A tout système, on associe une grandeur notée U (fonction d'état et approximativement extensive). Pour un système **fermé**, la variation de U au cours d'une évolution infinitésimale se met sous la forme*

$$dU + dE_c = \delta W + \delta Q$$

*δQ et δW étant les quantités de chaleur et de travail **reçues** par le système de la part de l'extérieur pendant l'évolution.*

Il fait intervenir les notations d et δ . Le d s'applique au fonction d'état qui ne dépendent que de l'état du système. δ s'applique à des grandeurs qui ne sont pas des fonctions d'états, elles dépendent du chemin (de l'évolution) suivi par le système.

Forme intégrale du premier principe dans lequel Q et W n'ont pas des bornes mais des chemins alors que E_c et U ont des bornes d'intégration classiques (cf. [1] p.478).

2.3 Expression du premier principe et conservation de l'énergie

Ce principe traduit la conservation de l'énergie totale de l'Univers qui est un postulat auquel les physiciens tiennent beaucoup.

Ce principe nous permet lors de l'étude de machines thermiques cycliques de dégager très facilement la contribution du travail et du transfert thermique.

$$[U + E_c]_A^A = 0 = W + Q$$

Dans le cas simple d'un gaz parfait que l'on comprime à l'aide d'un piston, on peut écrire que, ici, le travail se résume au seul travail des actions de pression et qu'il peut s'écrire : $\delta W = -P_0 dV$. On notera bien que la pression qui intervient dans l'expression est celle de l'extérieure. Si la transformation est monobare (la pression extérieure est constante) et quasi-statique (la transformation s'effectue de manière à ce que la pression à chaque instant ait le temps d'être la même partout dans le système (il faut par exemple que la vitesse du mouvement du piston soit très petite à la célérité des ondes de pression dans le gaz)) alors on a $P = P_0$ à chaque instant et on peut écrire $\delta W = -P_0 dV = -PdV$.

3 Exemples d'application

3.1 Retour sur l'expérience introductive armée du 1^{er} principe ([2] Exo 33.1 p.712)

On applique le premier principe au système solide + table. On a $\Delta E_c = 0$ car le solide a une vitesse constante et la table est immobile. $Q = 0$ car on estime que l'on a poussé assez rapidement pour que les échanges thermiques avec l'air ambiant n'aient pas le temps de se faire.

Il reste $\Delta U = W_{op}$, ce qui signifie que l'action de l'opérateur a servi à faire augmenter l'énergie interne de l'ensemble cube + table. Cela se manifeste par un échauffement (chaque morceau élémentaire de solide uniforme en température vérifie $dU = C_v dT$).

3.2 Détente de Joule et Gay-Lussac ou Joule-Thomson ([2] p.696)

Détente de Joule-Gay-Lussac :

Si un gaz ne subit pas de modification de sa température lors de la détente alors il est **parfait**. Sinon il est réel.

La légère diminution de la température permet de prouver que les interactions entre les molécules des gaz sont attractives.

Détente de Joule-Thomson : Fait intervenir naturellement l'enthalpie. C'est une détente isenthalpique.

3.3 Calorimétrie à volume constant ([2] p.701)

On choisit de travailler avec le jeu de variables (T, V). Dans ce cas $dU = C_v dT = \delta Q_V$.

Connaissant la capacité thermique de l'eau, en utilisant le premier principe on remonte à la capacité thermique d'un solide.

Conclusion

- Utilité de l'enthalpie pour les changements d'états où on travaille à p constant.
- Le premier principe ne permet pas de comprendre le sens d'évolution d'une transformation : utilité du deuxième principe de la thd qui stipule le sens des transformations!

LP 12 — Évolution et condition d'équilibre d'un syst. thermodynamique fermé.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 22/01/2014 par *Mégane Rodriguez* et corrigée par *M. Rieutord*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Évolution et condition d'équilibre d'un système thermodynamique fermé. Potentiels thermodynamiques. Exemples*. Les leçons de thermodynamique **LP12 Fonctions d'état caractéristiques d'un système à l'équilibre thermodynamique. Identités thermodynamiques. Applications** et **LP14 Thermodynamique des phénomènes irréversibles** ont été supprimées pour la session 2014.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012, 2011) – “Nous ne saurions que trop insister sur l'importance d'écrire systématiquement les variables et paramètres des fonctions thermodynamiques introduites au cours de la leçon. Si l'analogie avec la mécanique peut se justifier, nous invitons les candidats à bien identifier le message qu'ils souhaitent transmettre. Bien que ne faisant pas partie de la leçon, les candidats doivent réfléchir à l'interprétation statistique des potentiels thermodynamiques, et, en particulier, à leur lien avec la fonction de partition.”

☞ (2011) – “Les potentiels thermodynamiques sont des outils puissants dont l'illustration ne doit pas se réduire au cas d'un corps pur en contact avec un thermostat.”

☞ (2010) – “L'analogie entre la notion de potentiel thermodynamique et celle d'énergie potentielle en mécanique, bien qu'importante, ne doit pas être poussée trop loin ”

☞ (2008, 2007) – “Il faut bien distinguer les paramètres extérieurs dont la valeur fixée détermine le potentiel thermodynamique adapté à la recherche de l'équilibre et les variables internes dont les variations permettent au système d'atteindre l'équilibre. Les exemples d'application sont indispensables.”

☞ (2006) – “Le jury invite les candidats à bien distinguer les paramètres extérieurs fixés qui déterminent le potentiel thermodynamique adapté à la recherche de l'équilibre et les variables internes libres de fluctuer pour permettre au système d'atteindre l'équilibre.”

☞ (2003) – “Cette leçon permet d'introduire la notion de travail récupérable. Il est nécessaire de présenter un exemple montrant clairement que l'on peut éventuellement récupérer du travail lors d'une transformation si celle-ci est bien conduite. Les fonctions d'état F et G ne sont pas simplement des cas particuliers de fonctions F^* et G^* ; elles ont un intérêt thermodynamique propre et ne doivent pas être confondues avec les potentiels thermodynamiques.¹ ”

☞ (2002) – “L'intérêt des potentiels thermodynamiques doit être dégagé sur des exemples autres que ceux dont on ne déduit que des banalités. Parler de travail récupérable est une bonne chose, mais il est préférable de savoir comment on le récupère! ”

☞ (2001) – “Il faut éviter un exposé trop formel; les exemples présentés doivent avoir un réel intérêt physique. Les candidats doivent réfléchir à la distinction entre potentiels thermodynamiques et fonctions F et G .”

☞ (1999) – “ Une réflexion plus approfondie sur les limites de l'analogie avec la mécanique serait bienvenue. Par ailleurs cette leçon est souvent trop formelle. Des exemples doivent être pris pour illustrer la notion de travail récupérable. Il serait bon de ne pas se limiter au cas des gaz parfaits. Discuter des exemples de métastabilité.”

☞ (1998) – “Les exemples choisis ne doivent pas systématiquement concerner les fonctions F et G , mais les potentiels F^* et G^* . Par ailleurs, lorsqu'on discute du caractère extrémal (ou minimal) d'une quantité, il faut toujours préciser par rapport à quelle variable on effectue cette recherche d'extremum. Cette dernière remarque s'applique également à la leçon 46 sur le principe de Fermat.”

☞ (1997) – “Les exemples proposés sont souvent trop élémentaires. Il convient de ne pas se limiter à des détente de gaz parfaits, d'éviter d'établir un catalogue formel de tous les cas possibles obtenus en fixant les variables thermodynamiques deux à deux et de chercher des applications dans des situations hors d'équilibre intéressantes en chimie ou en métallurgie, par exemple : phénomènes de nucléation, de décomposition... Rappelons enfin qu'il ne faut pas confondre potentiel thermodynamique et fonction

thermodynamique. En particulier l'entropie définie comme une fonction thermodynamique de l'énergie interne et du volume n'est plus susceptible d'évoluer dès lors que ces deux variables sont fixées! ”

☞ (1996) – “La leçon permet d'introduire et d'utiliser les potentiels thermodynamiques $F^* = U - T_0S$ et $G^* = U - T_0S + P_0V$, et non pas seulement les fonctions caractéristiques F et G . Les contraintes imposées aux systèmes étudiés doivent être réalistes. Il est par exemple sans intérêt de faire une étude théorique d'un système évoluant à entropie constante s'il est impossible de donner un exemple concret d'une telle évolution. Certains candidats ont appliqué les résultats de cette leçon à l'étude d'une évolution isotherme et isobare d'un système siège d'une réaction chimique. Ils n'ont malheureusement pas utilisé, en général, le bon critère. Le sens d'évolution dépend en effet du signe de $\Delta_r G$ et non de celui de $\Delta_r G^0(T)$. En particulier, pour connaître le signe de $\Delta_r G$, il est nécessaire de préciser, en plus de la température, les valeurs d'autres paramètres intensifs tels que les fractions molaires des différentes espèces chimiques...”

Bibliographie

- [1] Faroux, Renault, *Thermodynamique*. j'intègre DUNOD, 1997.
- [2] Oliver et Gié, *Thermodynamique 1^{ère} et 2^{ème} année*. Tec & Doc, 1996.
- [3] Latour, *Leçons de thermodynamique*. Ellipses, 1997.
- [4] Garing, *Les 1001 questions de la physique en prépa Physique, PC-PC**. Ellipses, 2006.
- [5] Choimet, *Thermodynamique PC-PSI*. Précis Bréal, 2004.

Prérequis

- ♥ Critère d'évolution d'un système **isolé**, $\Delta S > 0$.

Plan

1 Évolution monotherme ([1] p.215 + [4] p.531))

- 1.1 Condition d'équilibre. Potentiel thermodynamique F^* ([1] p.215)
- 1.2 Travail maximal récupérable ([1] p.216)
- 1.3 Exemple : détente isotherme d'un gaz parfait ([1] p.217)

2 Évolution monotherme et monobare ([1] p.218 + [4] p.531)

- 2.1 Condition d'équilibre. Potentiel thermodynamique G^* ([1] p.218)
- 2.2 Travail maximal récupérable ([1] p.219 + [2] p.336)
- 2.3 Exemple ([1] p.219)
- 2.4 Cas des évolutions isothermes et isobares : enthalpie libre ([1] p.220, [2] p.336 et [4] p.532)

3 Applications

- 3.1 Corps pur en équilibre sous deux phases : formule de Clapeyron ([1] p.223)
 - 3.1.1 Enthalpie libre d'un fluide homogène
 - 3.1.2 Condition d'équilibre pour un corps pur sous deux phases
 - 3.1.3 Formule de Clapeyron ([1] p.223 et [2] p.345)
- 3.2 Condition d'équilibre d'une bulle de savon : Loi de Laplace ([4] p.547 + p.550 pour A.N.)
- 3.3 Nucléation dans un gaz sous-refroidi ([5] p.61)

1. Le titre de cette leçon était alors *évolution et condition d'équilibre des systèmes thermodynamiques - potentiels thermodynamiques*.

Introduction ([1] p.215 et [2] P.331)

Peut-on trouver, dans l'ensemble des exemples vus jusqu'à présent dans le cours de thd, une fonction d'état permettant de décrire (et même prévoir) l'évolution d'un système thermodynamique? Nous savons que toutes les positions d'équilibre en mécanique correspondent à des minimum d'énergie potentielle (cf.[2] p.331). Qu'en est-il en thermodynamique?

Le sens d'évolution et le critère d'équilibre sont donnés par des fonctions :

- des paramètres du système (U, S, \dots)
 - des paramètres du milieu extérieur (P_0, T_0);
- ce sont les **potentiels thermodynamiques**.

Notations : On prendra soin dans cette leçon de bien différencier les variables et les fonctions ou potentiel auxquelles on fait référence, ex :

- P_0 (ou P_e) désigne la pression extérieure (c'est celle qui intervient dans le travail des forces extérieurs de pression $\delta W = -P_0 dV$) et P la pression du système (qui n'est pas forcément déterminée car non uniforme, car déséquilibré). C'est **seulement** dans le cas d'une transformation isobare (monobare + quasi-statique) que l'on a $P = P_0$.

- T_0 (ou T_e) désigne la température extérieure (c'est celle qui intervient dans le second principe $dS = \frac{\delta Q}{T_0} + \delta S_c$ et T est la température du système (idem que pour la pression).

Dans le cas d'une transformation isotherme (monotherme + quasi-statique) on a $T = T_0$.

- le symbole * s'applique au fonction dépendant à la fois des paramètres extérieurs et des paramètres intérieurs. Ex. : $G^* = U - T_0 S + P_0 V$ est définie pour les évolutions monotherme et monobare : c'est un potentiel thermodynamique. $G = U - TS - PV$ est la fonction d'état enthalpie libre qui ne dépend que des variables internes.

Définition ([4] p.531) : On appelle potentiel thermodynamique d'un système soumis à un certain nombre de contraintes extérieures, toute fonction qui décroît au cours de l'évolution spontanée du système, l'équilibre thd correspondant à son minimum.

On va chercher au cours de cette leçon quels sont les potentiels thermodynamiques associés à des transformations particulières dans le cas de système **fermé**.

1 Évolution monotherme ([1] p.215 + [4] p.531))

On considère le cas d'une évolution d'un système en contact avec un thermostat à la température T_0 .

1.1 Condition d'équilibre. Potentiel thermodynamique F^* ([1] p.215)

On utilise les deux principes de la thermo. On considère dans un premier temps que le système n'échange **aucun travail** avec l'extérieur : $W = 0$. On a donc $\Delta U = Q$ et le second principe nous donne $\Delta S \geq Q/T_0$, donc on a

$$\Delta U - T_0 \Delta S \leq 0$$

En introduisant la fonction $F^* = U - T_0 S$ qui dépend de l'état du système (U et S) et de la température de son environnement (T_0), on obtient :

$$\Delta F^* \leq 0$$

F^* est minimal à l'équilibre si $W = 0$. Donc F^* correspond bien à la définition d'un potentiel thermodynamique dans le cadre d'une évolution monotherme sans échange de travail avec l'extérieur. En écrivant dF^* , on voit que la propriété F^* minimale impose : $T = T_0$ ce qui correspond bien à la condition d'équilibre thermique.

La connaissance de cette fonction lors d'une telle évolution nous permet de ne pas perdre de l'information sur le système au cours de l'évolution (cf. [4] p.522).

Pour un système **isolé** ($\delta Q = 0$), le second principe donnait S maximale donc le potentiel thermodynamique associé était $-S$ appelé la *négentropie*.

Le système évolue alors jusqu'à ce que la fonction F^* soit minimale (par rapport à la variable T) et lorsque F^* est minimale on sait que le système est à l'équilibre. Prenons en compte maintenant le travail dans notre étude.

1.2 Travail maximal récupérable ([1] p.216)

On ajoute cette fois l'échange de travail : $\Delta U = Q + W$. On a alors $\Delta U - T_0 \Delta S \leq W$. On s'intéresse au travail récupérable, c'est-à-dire au travail fourni par le système donc $-W$. La condition est alors :

$$-W \leq -\Delta F^*$$

Pour une transformation $1 \rightarrow 2$: $-W_1^2 \leq F_1^* - F_2^*$. Ainsi le travail que le système est capable de fournir à l'extérieur est inférieur à la diminution de la fonction F^* .

Il lui est égal pour une transformation réversible et est alors maximal :

$$\text{Travail maximale récupérable} = -W_{max} = -\Delta F^*$$

☞ Il est tout à fait possible que la fonction F^* **augmente** au cours d'une évolution : il suffit pour cela que le système **reçoive** du travail.

On applique ces résultats à un exemple.

1.3 Exemple : détente isotherme d'un gaz parfait ([1] p.217)

On considère la détente isotherme $T_i = T_0$ d'un gaz parfait initialement à la pression P_i supérieure à la pression externe P_0 . Quel travail maximum peut-on récupérer lors de cette détente?

En utilisant $dF^* = (T - T_0)dS - PdV = -PdV$ et en intégrant pour obtenir ΔF^* , on obtient finalement :

$$-W_{max} = -\Delta F^* = nRT_0 \ln \frac{P_i}{P_0}$$

La transformation étant isotherme, l'énergie interne du gaz parfait n'a pas changé. L'énergie récupérée sous forme de travail provient alors de l'extérieur par transfert thermique

($\Delta U = 0 = Q + W \implies Q = -W$). Cette quantité de chaleur fournie par l'extérieur au gaz a été intégralement transformée en travail mécanique.

Dans le travail fourni, on ne peut pas récupérer tout le travail car à l'intérieur de W_{max} se cache le travail effectué par le système contre les forces extérieures de pression : $P_0 \Delta V = nRT_0(1 - P_0/P_i)$.

Seul la différence est en fait réellement utilisable : $-W_{rec} = -W_{max} - P_0 \Delta V$.

Pour ne pas se confronter à ce problème de travail réellement récupérable, il est souhaitable de reprendre l'étude précédente pour des transformations monobares.

2 Évolution monotherme et monobare ([1] p.218 + [4] p.531)

Ces évolutions sont intéressantes car elles se rapprochent des situations courantes, à savoir un système évoluant avec l'atmosphère qui est, sur une échelle de temps grande devant la plupart des évolutions rencontrées, un pressostat et un thermostat.

On va voir que cette fois le potentiel associé à une telle étude est celui défini par $G^* = U - T_0 S + P_0 V$.

2.1 Condition d'équilibre. Potentiel thermodynamique G^* ([1] p.218)

La situation étudiée correspond à un système siège d'une réaction chimique s'effectuant à l'air libre. La température T et la pression P peuvent varier et même ne pas être clairement définies, alors que la température T_0 et la pression P_0 de l'extérieur restent constantes.

On suppose ici qu'aucun travail autre que celui des forces de pression externe n'est fourni au système. D'après les principes on a $\Delta U = Q - P_0 \Delta V$ et $\Delta S \geq \frac{Q}{T_0}$ soit $\Delta U - T_0 \Delta S + P_0 \Delta V \leq 0$.

La fonction G^* précédemment introduite correspond bien à la définition d'un potentiel thermodynamique (minima par rapport aux variables T et P) :

$$G^* = U - T_0 S + P_0 V \implies \Delta G^* \leq 0$$

De même que précédemment, en écrivant $dG^* = 0$ à l'équilibre ; on retrouve bien les conditions d'équilibres thermique $T = T_0$ et mécanique $P = P_0$.

On peut alors exprimer le travail maximal récupérable pour une telle évolution.

2.2 Travail maximal récupérable ([1] p.219 + [2] p.336)

On trouve que le travail maximale récupérable s'écrit :

$$-W_{r,max} \leq -\Delta G^* = G_I^* - G_F^*$$

La diminution² $G_I^* - G_F^*$ de la fonction $G^* = U + P_0 V - T_0 S$ est égale au travail maximum des forces autres que les forces de pression, récupérable au cours d'une évolution monotherme et monobare. Le travail récupéré est maximum si l'évolution est réversible.

On donne le nom d'énergie utilisable à la fonction G^* .

2.3 Exemple ([1] p.219)

On calcule le travail maximal récupérable lorsqu'une barre de métal (aluminium) porté initialement à la température $T_i = 100^\circ C$ et laissée à l'air ambiant. On trouve que $-W_{r,max} = 7370J$.

Pour récupérer entièrement ce travail, il faut relier la barre de métal à une machine thermique effectuant des cycles infinitésimaux et réversibles comme un fluide en contact avec une source chaude (le solide), une source froide (l'atmosphère) et qui reçoit un travail δW .

2.4 Cas des évolutions isothermes et isobares : enthalpie libre ([1] p.220, [2] p.336 et [4] p.532)

Si dans l'état initial et dans l'état final, le système est *en équilibre* avec le thermostat (T_0) et l'atmosphère extérieure (P_0), alors on a $P = P_I = P_F = P_0$ et $T = T_I = T_F = T_0$.

On définit alors une nouvelle fonction d'état extensive du système appelé **enthalpie libre** et qui ne dépend que des paramètres internes du système :

$$G = U + PV - TS = H - TS$$

Cette fonction permet d'exprimer le critère d'évolution du système sans aucune référence apparente aux contraintes extérieures (on n'oubliera tout de même pas les conditions évoqués ci-dessus sur les températures et pression finales et initiales).

Lors d'une évolution spontanée isotherme et isobare, l'enthalpie libre G ne peut que décroître et l'état d'équilibre correspond à un minimum de cette fonction.

On a la même condition sur F l'énergie libre lors d'une évolution isotherme et isochore.

3 Applications

3.1 Corps pur en équilibre sous deux phases : formule de Clapeyron ([1] p.223)

3.1.1 Enthalpie libre d'un fluide homogène

On a $dG = -SdT + VdP$ donc (T, P) est le jeu naturel de variable pour G . De plus G est une grandeur extensive et T, P sont des grandeurs intensives. Il en résulte que G est simplement proportionnelle au nombre de moles n :

$$G(T, P, n) = ng(T, P)$$

2. Il ne faut pas en conclure que la fonction G^* ne peut jamais augmenter : elle peut augmenter si $W_r > 0$ c'est-à-dire si le système reçoit du travail ; cela se produit notamment dans un électrolyseur.

où $g(T, P) = G(T, P, 1)$ désigne l'enthalpie libre molaire.

3.1.2 Condition d'équilibre pour un corps pur sous deux phases

Propriété d'additivité de G nous donne $G = n_1 g_1 + n_2 g_2$.

Si $g_1 \neq g_2$ la condition G minimale indique que l'équilibre du système est obtenu lorsque toutes les moles sont dans la phase d'enthalpie libre la plus faible. Il n'y a donc qu'une seule phase stable et pas de coexistence.

Si $g_1 = g_2$ alors $dG = (g_1 - g_2)dn_1 = 0$ quel que soit dn_1 (car $N = cte = n_1 + n_2 \rightarrow dN = 0 = dn_1 + dn_2$).

Pour l'équilibre liquide-vapeur, la courbe de vaporisation a donc pour équation :

$$g_\ell(P, T) = g_v(P, T)$$

3.1.3 Formule de Clapeyron ([1] p.223 et [2] p.345)

On a $dg = -sdT + vdP$ où les fonctions en minuscules sont des grandeurs molaires. Le critère d'équilibre sur les différentielles de $g_i(P, T)$ nous donne

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial T}\right)_P + \left(\frac{\partial g_1}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{dT} = \left(\frac{\partial g_2}{\partial T}\right)_P + \left(\frac{\partial g_2}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{dT}$$

On en déduit :

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} \quad \text{avec} \quad s_i = -\left(\frac{\partial g_i}{\partial T}\right)_P \quad \text{et} \quad v_i = \left(\frac{\partial g_i}{\partial P}\right)_T$$

c'est la formule de Clapeyron, très importante, car elle ne repose que sur les principes sans faire appel à aucune approximation. Il n'y a donc **aucune restriction** à apporter à son domaine de validité.

Pour les conséquences de la formule de Clapeyron cf. [2] p.345. Résultats conforme à l'expérience.

3.2 Condition d'équilibre d'une bulle de savon : Loi de Laplace ([4] p.547 + p.550 pour A.N.)

On étudie l'équilibre d'une bulle de savon dans l'air (2 interfaces air-liquide). Donc à P_0 et T_0 fixés, le potentiel thermodynamique adapté à cette étude est G^* qui s'écrit par extensivité, pour l'ensemble air emprisonné et membrane :

$$G^* = (U + U_M) - T_0(S + S_M) + P_0(V + V_M)$$

en écrivant la différentielle, en supposant la membrane incompressible (liquide incompressible), en utilisant l'identité thd pour l'air emprisonné et pour la membrane, et écrivant l'équilibre $dG^* = 0$ ce qui implique que les dérivées partielles de G^* s'annulent pour chacune des variables. On trouve alors :

$$T = T_M = T_0 \quad \text{et} \quad P = P_0 + \frac{4\sigma}{R}$$

ce qui nous donne la loi de Laplace pour 2 interfaces identiques air-liquide donc de même tension superficielle $\sigma \approx 76 \text{ mN/m}$. Avec $R \approx 1 \text{ cm}$, on a $\Delta P = P - P_0 \approx 30 \text{ Pa}$.

3.3 Nucléation dans un gaz sous-refroidi ([5] p.61)

On étudie la formation d'une goutte de liquide (germe) dans un gaz étant à une température en-dessous de sa température de liquéfaction (sous-refroidi).

Questions pour faire réfléchir

➔ Pourquoi toute la matière n'est-elle pas solide, i.e. pourquoi existe-il des corps purs gazeux ou liquides à température ambiante ?

L'énergie potentielle globale d'interaction e_p entre les molécules est probablement minimale pour le réseau cristallin, mais le potentiel thermodynamique est l'énergie libre $F = U - TS$. Il convient de tenir compte dans U de l'énergie cinétique microscopique e_c ; avec $e_{c, solide} < e_{c, gaz}$ ce terme joue en faveur du solide. Mais l'entropie du gaz est très supérieure à l'entropie du solide et c'est le terme $-TS$ qui explique que le minimum de F soit atteint pour l'état gazeux. Ce terme s'évanouit à basse température et dans ce cas, on a $F \approx U \approx e_p + e_c$ minimale pour le solide.

➔ Concrètement comment récupère-t-on le travail potentiellement récupérable mis en évidence dans cette leçon ? Par exemple, considérer deux morceaux d'un même métal portés à des températures différentes T_1 et $T_2 < T_1$. Quel est le travail maximum récupérable à l'aide de ces deux morceaux et comment le récupère-t-on concrètement ?

cf. Tec & Doc PC-PC* Olivier Exercice résolu B. p.314

➔ Comment traduire la stabilité d'un équilibre de façon formelle ? Quelles conséquences fortes pouvez-vous en déduire ?

➔ $dG^* < 0$: est-ce un critère d'évolution nécessaire et suffisant ?

non il faut que l'évolution soit monobare et monotherme et qu'il n'y ait pas de travail autre que celui des actions de pression externe.

➔ Quelle est l'origine de l'expression "travail utile" ?

cf. DGLR Thermo p.194, autrefois on écrivait $U = F + TS$ le premier terme seul est «libre» lorsqu'il s'agit d'extraire du travail de ce système dans un processus monotherme.

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ Agrégation 2009 - Note : 05/20 :

Questions et commentaires du jury : ils sont revenus sur ce que j'avais dit pendant la leçon puis ont posé différentes questions sur les bases de la thermo : définition d'une variable d'état, différence entre U, V, N et T. Quelle différence entre équilibre monotherme, isotherme, et équilibre avec un thermostat ?

➔ Agrégation 2009 - Note : 14/20 :

Questions et commentaires du jury : est-ce que la fonction d'état donne toute l'info tout le temps sur le système thermodynamique étudié³ ? En mécanique, on peut avoir l'énergie comme constante et un mouvement oscillant, est ce que c'est possible en thermodynamique ? Donner un exemple concret d'un système physique d'un solide chaud dont on veut récupérer un travail ? En math comment calcule-t-on le minimum d'une fonction dépendant de plusieurs variables ? F^* est définie tout le temps ; est ce que c'est le cas de U et S (même hors équilibre) ? Quelles sont les variables naturelles de F ?

3. sur ce point, on consultera l'ouvrage de thermodynamique de H. Callen.

LP 13 — Application des deux premiers principes de la thermodynamique au fonctionnement des machines thermiques.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 15/01/2014 par *Pauline Dujardin* et corrigée par *M. Rieutord*.

Rapports du Jury

☞ (2010, 2009) – “Les applications ne se limitent pas au moteur de Stirling et doivent rester concrètes.”

☞ (2008, 2007) – “Les candidats ne peuvent se contenter de traiter le fonctionnement de machines théoriques, mais doivent développer un exemple de machine réelle.”

☞ (2006) – “Les candidats ne doivent pas se limiter à l’étude du fonctionnement de machines théoriques, mais doivent développer en détail un exemple de machine réelle.”

☞ (2004) – “Le candidat peut parfaitement présenter des machines thermiques cycliques où le fluide caloporteur subit des changements d’états.”

☞ (2003) – “ Au delà de l’exposé classique que l’on trouve toujours, il faut discuter les causes d’irréversibilité : s’agit-il de frottements mécaniques ou de problèmes de diffusion thermique ? Par ailleurs, les moteurs réversibles ont forcément un fonctionnement lent : comment peut on alors récupérer de la puissance avec une telle machine thermique ? Il est intéressant d’évoquer également la nature des fluides subissant les cycles. Pourquoi certaines machines utilisent-elles des fluides subissant des changements d’état ? ”

☞ (1999) – “La leçon doit notamment relever les différentes causes d’irréversibilité des transformations étudiées, par ailleurs, contrairement aux pièces mobiles des machines, le fluide en écoulement n’a pas nécessairement un comportement cyclique.”

☞ (1998) – “La leçon ne doit pas se borner à un exercice académique : les candidats doivent étudier un cas de machine réelle, expliquer la modélisation qui conduit à un cycle simplifié, comprendre les sources d’irréversibilités diverses. Une transformation monotherme ne peut être réversible si le système reçoit de l’énergie d’une source de chaleur alors que sa température n’est pas celle de la source.”

Bibliographie

- [1] Oliver et Gié, *Thermodynamique 1^{ère} et 2^{ème} année*. Tec & Doc, 1996.
- [2] *CAP Prépa Physique MPSI-PCSI-PTSI*, 1^{ère} année. Pearson, 2009.
- [3] Garing, *Les 1001 questions de la physique en prépa Physique, PC-PC**. Ellipses, 2006.
- [4] Latour, *Leçons de thermodynamique*. Ellipses, 1997.
- [5] Martin, *Le réfrigérateur*. BUP n°832, Mars 2001.

Plan

1 Les machines thermiques

1.1 Définitions

1.2 Machines monothermes

1.3 Ce que permet le 2nd principe pour les machines dithermes

1.4 Rendement/Efficacité - Théorème de Carnot ([1] p.275 + [3] + [4])

2 Étude d’un moteur : le cycle de Beau de Rochas ([2] p.754)

2.1 Principe de fonctionnement, étapes du cycle

2.2 Calcul du rendement

3 Le réfrigérateur à compresseur ([5] + [2] p.792)

3.1 Présentation, choix du fluide frigorigène

3.2 Construction du cycle dans le diagramme PV

3.3 Bilan énergétique

Introduction

C’est la leçon où on applique des concepts très théoriques de la thermodynamique (premier et second principe) à des cas concrets de la vie quotidienne (moteur à combustion, réfrigérateur). Donc il faut passer plus de temps sur les exemples concrets (sections 2 et 3) que sur la section théorique (section 1).

Les machines thermiques se sont développées au cours de la révolutions industrielles du début du XIX^e siècle ([4]) avant d’avoir les notions théoriques. Notre approche sera différente.

1 Les machines thermiques

1.1 Définitions

3 types de machines thermiques : moteurs, dispositif de chauffage et ceux de refroidissement.

Le système en général est un fluide dont l’évolution correspond à un système fermé. On va étudier principalement des évolutions cycliques.

1.2 Machines monothermes

On introduit le schéma d’une machine monotherme, ici un banal radiateur électrique. On oriente les échanges d’énergies de manière à ne travailler qu’avec des **grandeurs positives** (bien plus simple pour les inégalités). Le système (carcasse du radiateur) fonctionne en récepteur.

Peut-on avoir un moteur monotherme cyclique ? **non : énoncé de Kelvin**.

Pour les moteurs thermiques, il faut au moins deux sources de chaleur.

1.3 Ce que permet le 2nd principe pour les machines dithermes

Inégalité de Carnot-Clausius et diagramme de Raveau. Distinguer moteurs/récepteurs.

1.4 Rendement/Efficacité - Théorème de Carnot ([1] p.275 + [3] + [4])

On peut toujours parler d'efficacité e car on peut toujours définir : $e / e_{\text{carnot}} < 1$ comme pour un rendement.

On a e (ou η) = $\frac{\text{grandeur valorisée}}{\text{grandeur coûteuse}}$.

Il faut des ordres de grandeurs pour les différentes efficacités et les comparer au rendement maximal de Carnot pour des fonctionnements réversibles !

- Moteur : $e = \frac{W}{Q_c} \leq 1 - \frac{T_f}{T_c}$. Q_c est obtenue par chauffage, combustion ou en exploitant les changements d'états (grande quantité d'énergie libérée)
- PAC : $e = \frac{Q_c}{W} \leq \frac{T_c}{T_c - T_f}$. On peut avoir $e > 1$ c'est mieux qu'un chauffage électrique ou 1 J de chaleur correspond à 1 Joule électrique consommé. En plus crédits d'impôts.
- Réfrigérateur : $e = \frac{Q_f}{W} \leq \frac{T_f}{T_c - T_f}$

Théorème de Carnot : *le rendement ou l'efficacité d'une machine thermique diatherme est borné par le rendement de Carnot obtenu pour un fonctionnement réversible. Ce rendement maximal ne dépend que des températures de la source froide et de la source chaude.*

Transition : On étudie des machines réelles, de la vie courante !

2 Étude d'un moteur : le cycle de Beau de Rochas ([2] p.754)

2.1 Principe de fonctionnement, étapes du cycle

On détaille les 4 étapes du cycle.

2.2 Calcul du rendement

On écrit rapidement la formule du rendement qui fait apparaître le rapport volumétrique $a = V_{\text{max}}/V_{\text{min}}$ et γ en rapport avec le mélange air-essence :

$$\eta = 1 - a^{1-\gamma} \approx 51\% < e_C = 91\%$$

La cylindrée d'un véhicule est le nombre de cylindre multiplié par le volume d'un cylindre.

3 Le réfrigérateur à compresseur ([5] + [2] p.792)

Il existe des réfrigérateurs à absorption.

3.1 Présentation, choix du fluide frigorigène

Un compresseur, un détendeur, 2 échangeurs de chaleur.

Fluide frigorigène R-134a (1,1,1,2-tétrafluoroéthane) qui ne pollue pas l'atmosphère, le fréon n'est plus utilisé depuis les années 80. On exploite ces changements d'états (vaporisation et condensation).

Lorsque le fluide se vaporise il a besoin de chaleur qu'il prélève au local à refroidir. Il faut donc que la vaporisation s'effectue à une température inférieure à celle du local (-10°C), on choisit -15°C et donc une pression de 1.64 bar.

Il faut également que le fluide est une forte chaleur latente de vaporisation $\approx 215.9\text{kJ/kg}$ (à 1 atm et $T_{eb} = -26.6^\circ\text{C}$). Pour l'eau elle vaut $\approx 225\text{kJ/kg}$ (à 1 atm et 100°C). Mais l'eau n'est pas liquide à -15°C .

3.2 Construction du cycle dans le diagramme PV

Décrire le cycle. Justifier les hypothèses faites à l'aide d'ODG.

3.3 Bilan énergétique

A l'aide du diagramme de Mollier (cf. BUP), on remonte à l'efficacité du réfrigérateur $e = 5.64$. On compare à $e_C = 6.45$.

Conclusion

Rendement machines thermiques bornés (machine réversible de Carnot dont le rendement peut être inférieur à 1!).

Moteur permette tout de même de développer des puissances bien supérieur à celle de l'homme ($\sim 300\text{W}$) ou de la traction animale ($\sim 736\text{ W} = 1\text{ cheval-vapeur} = 1\text{ horse-power}$).

Questions pour faire réfléchir

➔ énoncer le théorème de Carnot. Qu'y a-t-il de remarquable à cet énoncé ? Pourquoi le cycle de Carnot n'est-il pas utilisé en pratique ?

Le cycle est très plat, ce qui indique qu'il faut travailler avec des gros volumes ce qui est très encombrant

➔ Soit un moteur de voiture dans lequel la pression haute est de l'ordre de quelques dizaines de bars, et le volume des cylindres de l'ordre de 1 L. évaluer la puissance du moteur en kW [épreuve A, 2006].

➔ Quel est l'intérêt d'une machine mettant en jeu des changements d'état face à une machine fonctionnant sans ?

1 kg d'eau prélève 4.18 kJ d'énergie pour passer de 20°C à 21°C . Par contre 1 kg d'eau prélève 225kJ pour passer en phase vapeur.

➔ Il fait chaud, c'est l'été et je décide d'ouvrir mon frigo pour refroidir ma cuisine. Est-ce une bonne idée ?

Non, la chaleur prélevé à la pièce et redistribuer à la pièce par l'échangeur situé à l'arrière du frigo. En plus le frigo relâche plus de chaleur qu'il n'en prélève, donc on chauffe la pièce.

➔ Qu'est-ce qu'un diagramme de Raveau ? Comment l'obtient-on ? le lit-on ? Faire apparaître l'ensemble des machines thermiques que vous connaissez sur un tel diagramme.

➔ Pourquoi les moteurs électriques ont-ils de bien meilleurs rendements

que les moteurs thermiques ? Ils sont aussi moins polluants, moins bruyants, et pourtant, ils ne sont encore que peu utilisés dans l'industrie automobile ; pourquoi ?

Rendement théorique maximale pour un moteur électrique est de 1 alors que pour machine thermique $\eta_{max} = \eta_C < 1$. Par contre il est difficile de stocker l'énergie électrique (batterie très lourde).

➔ Dans une centrale nucléaire délivrant une puissance électrique $P = 1 \text{ GW}$, la température du coeur est $T_{coeur} = 330^\circ\text{C}$. Quel rendement maximal peut-on envisager ? En pratique, il est de l'ordre de 33%. Calculer la puissance thermique perdue. Déduire de cette question l'intérêt de la cogénération [épreuve A, 2006].

Cogénération : production simultanée de deux énergies différentes dans le même processus (ex : chaleur + électrique).

LP 14 — Étude thermodynamique d'un système constitué par un corps pur sous plusieurs phases.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 22/01/2014 par *Anaëlle Contensaux* et corrigée par *M. Rieutord*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Étude thermodynamique d'un système constitué par un corps pur sous plusieurs phases. Exemples.*

Rapports du Jury

☞ (2010) – “Les potentiels thermodynamiques ne servent pas seulement à prédire l'équilibre, mais aussi à prévoir le sens d'évolution d'un système diphasé hors équilibre et à interpréter le diagramme des états.”

☞ (2009) – “Les potentiels thermodynamiques ne servent pas seulement à prédire l'équilibre, mais aussi à prévoir le sens d'évolution d'un système diphasé hors équilibre.”

☞ (2008, 2007) – “Il s'agit bien d'une étude thermodynamique fondée sur l'utilisation des potentiels thermodynamiques, et non d'une étude descriptive des changements d'état¹. Il importe de comprendre l'intérêt de l'enthalpie libre pour cette leçon.”

☞ (2006) – “Il s'agit bien d'une étude thermodynamique fondée sur l'utilisation des potentiels thermodynamiques et non d'une étude descriptive des changements d'état.”

☞ (2005) – “Cette leçon est parfois confondue avec une étude descriptive des changements d'état.”

☞ (2000) – “Rappelons que les ordres de grandeur usuels, ainsi que des applications à la vie courante, constituent une partie incontournable de cette leçon.”

☞ (1998) – “Cette leçon est souvent traitée de façon trop abstraite : les ordres de grandeurs élémentaires valeurs caractéristiques des pressions et des températures, des chaleurs latentes de vaporisation ou de solidification sont ignorés de même que leurs liens avec les interactions et les processus microscopiques : interactions attractives, compétition ordre/désordre... Les observations quotidiennes ne doivent pas être passées sous silence : transpiration, phénomènes météorologiques, ustensiles de cuisson...”

Bibliographie

- [1] *CAP Prépa Physique MPSI-PCSI-PTSI*, 1^{ère} année. Pearson, 2009.
- [2] Oliver et Gié, *Thermodynamique 1^{ère} et 2^{ème} année*. Tec & Doc, 1996.
- [3] Latour, *Leçons de thermodynamique*. Ellipses, 1997.
- [4] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.

Plan

1 Équilibre et évolution des phases d'un corps pur

- 1.1 Rappels ([1])
- 1.2 Conditions d'évolution ou d'équilibre ([2])
- 1.3 Enthalpie de changement d'état ([3])

2 Diagrammes de phases

- 2.1 Formule de Clapeyron ([4] p.421)
- 2.2 Diagramme (P,T) de l'eau ([2] p.243 + [3] p.157)

1. Ce point est essentiel ; on consultera avec profit l'ouvrage de P. Papon intitulé *Thermodynamique des états de la matière*, paru chez Hermann.

2.3 Diagramme (P,V) ([2] p.246-248)

3 Application et particularité

3.1 La lyophilisation ([3] p.157)

3.2 Retard à la transition de phase

Introduction

Comment se servir des potentiels thermodynamiques pour décrire les changements d'états observés quotidiennement.

Outils puissants : les diagrammes thermodynamiques (P,V), (P,T).

Applications et observations quotidiennes.

1 Équilibre et évolution des phases d'un corps pur

1.1 Rappels ([1])

Définition d'un corps pur, des phases, des états de la matière (s,l,v + variétés allotropiques + ferro/parra).

Variance pour connaître le nombre de paramètres accessibles.

1.2 Conditions d'évolution ou d'équilibre ([2])

Description du système : variables externes, variables internes. Choix du potentiel thermo. Conditions sur g_1 et g_2 .

1.3 Enthalpie de changement d'état ([3])

Définir, interprétation en transfert thermique, lien à la variation d'entropie. Donner des ODG : beaucoup d'énergie mise en jeu !

2 Diagrammes de phases

2.1 Formule de Clapeyron ([4] p.421)

Démonstration de la formule de Clapeyron.

► **Expérience [3] p.164** : Bouillant de Franklin

2.2 Diagramme (P,T) de l'eau ([2] p.243 + [3] p.157)

Description, pression de vapeur saturante, point triple, point critique, 2 chemins possible pour $V \rightarrow L$.

Application quotidienne : la cocotte minute, la lyophilisation (retour plus tard), évaporation du linge.

2.3 Diagramme (P,V) ([2] p.246-248)

Isotherme d'Andrews, courbe de rosée et d'ébullition.
Application au stockage des fluides.

3 Application et particularité

3.1 La lyophilisation ([3] p.157)

On revient en détail sur la lyophilisation.
On utilise les changements de phases.

3.2 Retard à la transition de phase

► **Expérience** : On plonge un tube d'eau dans un milieu contenant des glaçons + gros sel. Sans perturbation l'eau dans le tube descend à une température de -15°C à la pression atmosphérique : **retard à la solidification**. Si perturbation (choc génère une onde acoustique) dans le tube : solidification immédiate.

Conclusion

Autre application : la machine frigorifique.

Ouverture sur des transitions de phases de type différentes : transition avec chaleur latente (Ehrenfest : premier ordre car $S = \frac{\partial}{\partial T}$ est discontinue); sans chaleur latente (du second ordre) par exemple c'est le cas de la transition ferromagnétique, de la transition superfluide et de la condensation de Bose-Einstein.

Questions pour faire réfléchir

- ➔ Pourquoi le temps de cuisson est-il réduit dans un autocuiseur (ou cocotte minute) sachant que la pression y atteint 2 atm ?
- ➔ Comment expliquer qu'on refroidisse sa soupe en soufflant dessus ?
On chasse la vapeur d'eau saturé, ce qui laisse place à de l'air plus sec, l'évaporation est alors plus favorisée et donc prélève de la chaleur au système (la soupe).
- ➔ L'été quand il fait chaud, on utilise des brumisateurs pour rafraîchir l'air ; expliquer comment.
- ➔ Pourriez-vous expliquer le principe de la lyophilisation des aliments ?
- ➔ Comment fonctionne "l'oiseau buveur"² ?
- ➔ Qu'est-ce que l'effet de Foehn ? Où le rencontre-t-on ?
phénomène météorologique créé par la rencontre de la circulation atmosphérique et du relief quand un vent dominant rencontre une chaîne montagneuse. L'air incident sur la montagne est froid, et celui qui passe de l'autre côté de la montagne est chaud.
- ➔ Quelles sont les expériences qui pourraient vous permettre d'illustrer cette leçon ?
- ➔ Que savez-vous de la théorie de Landau des transitions de phase ?

2. On consultera avec profit le sujet de Physique I du concours Centrale-Supélec de l'année 2001.

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ **Agrégation 2009 - Note : 13/20** :

Questions et commentaires du jury : les techniciens ont monté et réalisé entièrement toutes les manip. Tous les livres et le matériel souhaités étaient disponibles. Le technicien m'a demandé de quelle préparation je venais pour m'amener mon matériel. La préparation s'est très bien passée. Quelques questions : quelles est la propriété fondamentale d'un potentiel thermodynamique autre que minimal à l'équilibre? (*de dépendre de variables internes et externes*) Quand est-ce que l'oiseau buveur va s'arrêter de boire? Un état métastable est il un état instable?

LP 15 — Étude statistique d'un système en contact avec un thermostat. Probabilité canonique.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 29/01/2014 par *Joévin Giboudot* et corrigée par *M. Rieutord*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Étude statistique d'un système en contact avec un thermostat. Probabilité canonique. Applications*. La leçon de thermodynamique **LP17** *Notion d'état microscopique. Interprétation statistique de l'entropie. Exemples*, a été supprimée pour la session 2014.

Rapports du Jury

☞ (2012) – “Le jury invite les candidats à définir proprement le cadre statistique dans lequel ils se placent, et les variables pertinentes associées¹.”

☞ (2010) – “On peut introduire les statistiques quantiques à l'occasion de cette leçon, et s'intéresser à la limite classique.”

☞ (2008) – “Les conditions d'utilisation du facteur de Boltzmann doivent être précisées. L'atmosphère en équilibre isotherme n'est qu'un exemple parmi d'autres permettant d'introduire le facteur de Boltzmann².”

☞ (2007) – “Les conditions d'utilisation du facteur de Boltzmann doivent être précisées. L'atmosphère en équilibre isotherme est un exemple parmi d'autres permettant d'introduire le facteur de Boltzmann. Il n'est pas le seul et le jury souhaite laisser davantage de liberté aux candidats. Dans la liste 2008, le titre de la leçon correspondante est modifié dans ce sens³.”

☞ (2006) – “Les conditions d'utilisation du facteur de Boltzmann doivent être précisées.”

☞ (2005) – “Curieusement, la valeur numérique de la constante de Boltzmann n'est pas connue. D'une manière générale, les leçons présentées pèchent par manque d'ordres de grandeur des énergies mises en jeu.”

☞ (1998) – “Un point important concerne le choix des variables qui doivent être utilisées pour définir l'espace des phases. Si l'on souhaite traiter le cas des systèmes macroscopiques ce qui permet d'introduire l'énergie libre il est extrêmement important de bien distinguer ce cas de celui des systèmes microscopiques indépendants.”

Bibliographie

- [1] Diep, *Physique Statistique*. ellipses, 2006.
- [2] Diu, *Physique Statistique*. Hermann, 2001.
- [3] Belorizky *Introduction à la mécanique statistique*. Pug, 1992.

1. La leçon s'intitulait en 2012 : *Introduction au facteur de Boltzmann à partir d'un exemple au choix*.

2. Titre 2008 : *Introduction au facteur de Boltzmann à partir d'un exemple au choix. Applications*.

3. Titre 2007 : *Modèle de l'atmosphère terrestre en équilibre isotherme. Introduction au facteur de Boltzmann. Applications*.

Prérequis

- ♥ Ensemble micro-canonique.
- ♥ Thermodynamique.

Plan

1 Ensemble canonique et probabilité de Boltzmann

- 1.1 La situation canonique ([2] p.255)
- 1.2 Probabilité d'un état microscopique ([2] p.257)
- 1.3 L'énergie caractéristique $k_B T$ ([2] p.261)

2 Propriétés d'un système en contact avec un thermostat

- 2.1 Fonction de partition ([1] p.67 et [2] p.267)
- 2.2 Grandeurs physique fondamentales ([1] p.68)
 - 2.2.1 Énergie moyenne et capacité calorifique
 - 2.2.2 Entropie canonique
 - 2.2.3 Énergie libre et grandeurs dérivées

3 Applications

- 3.1 Systèmes à 2 niveaux d'énergie ([3] p.130)
- 3.2 Gaz parfait monoatomique classique ([1] p.74)

Introduction

La physique statistique est une branche de la physique dont le principal initiateur a été le physicien autrichien Ludwig Boltzmann dans le milieu du XIX^e siècle

Il a cherché à décrire la matière au niveau **microscopique** et fait l'hypothèse qu'elle était constituée d'atomes, dont le nombre était très grand (cf. Avogadro 1810).

On savait que pour décrire complètement l'état d'une particule, il suffit de connaître les 3 coordonnées de sa position et les 3 coordonnées de son impulsion.

On se pose alors la question : **Peut-on décrire complètement un système de 10^{23} particules grâce aux ordinateurs ?**

On peut faire un rapide calcul : en considérant qu'une coordonnée est codée sur 1 octet et qu'un disque dur de 1To (= 10^{12} octets) occupe un volume physique de 100 cm^3 , on trouve qu'il faudrait un espace de $1/10$ de km^3 pour entasser les disques durs comportant les données.

Une description parfaite d'un système à l'échelle microscopique est impossible. Boltzmann qui n'avait pas besoin d'ordinateur pour comprendre cela va utiliser les statistiques et les probabilités. Il stipule que tous les micro-états (ou état microscopique) accessibles à un système **isolé** et à l'**équilibre** sont **équiprobables** (description dite **microcanonique**).

L'étude de telle système dans la vie courant est assez rare et c'est pourquoi dans cette leçon, on s'intéressera à l'étude d'un système en contact avec un thermostat (description dite **canonique**).

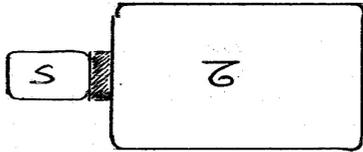
Cette leçon se place dans la continuité d'un cours de physique statistique dans lequel on a déjà vu l'ensemble microcanonique qui je le rappelle étudie des système **isolé**. On va dans une première partie définir le cadre de l'étude canonique d'un système. Puis utiliser ce cadre pour écrire l'expression des grandeurs physiques fondamentales associées à cet ensemble (comme l'énergie moyenne). Finalement on démontrera toute la puissance de la physique statistique par des applications qui nous permettront de retrouver des comportements expérimentaux que la thermodynamique ne pouvait pas forcément expliquer (cf. Température de Curie).

1 Ensemble canonique et probabilité de Boltzmann

1.1 La situation canonique ([2] p.255)

L'ensemble canonique est un ensemble statistique qui concerne l'évolution d'un système en contact avec un thermostat, donc possédant une énergie susceptible de varier à la différence de l'étude dans l'ensemble **micro-canonique**.

Considérons un système \mathcal{S} , en **contact thermique** avec un autre système $\overline{\mathcal{T}}$ (le thermostat) beaucoup plus gros que lui.



\mathcal{S} : système étudié fermé, $N_{\mathcal{S}}$ particules

$\overline{\mathcal{T}}$ thermostat, avec $N_{\overline{\mathcal{T}}} \gg N_{\mathcal{S}}$.

Le système composé par le système \mathcal{S} et $\overline{\mathcal{T}}$ ($\mathcal{S} \cup \overline{\mathcal{T}}$) est un système **isolé** et à l'**équilibre**, donc son énergie E_{tot} est **fixée**. On a alors :

$$E_{tot} = E + E_{\overline{\mathcal{T}}}$$

où E est l'énergie de \mathcal{S} et $E_{\overline{\mathcal{T}}}$ est l'énergie de $\overline{\mathcal{T}}$. Le système $\overline{\mathcal{T}}$ étant beaucoup plus gros que \mathcal{S} , l'énergie E est toujours beaucoup plus petite que $E_{\overline{\mathcal{T}}}$: $E \ll E_{\overline{\mathcal{T}}}$.

L'énergie E peut alors fluctuer tout en restant négligeable devant $E_{\overline{\mathcal{T}}}$. De même, les échanges de chaleur peuvent modifier l'état du système \mathcal{S} sans que l'état macroscopique de $\overline{\mathcal{T}}$ soit pratiquement affecté. $\overline{\mathcal{T}}$ joue alors vis-à-vis de \mathcal{S} le rôle de **réservoir d'énergie** ou de **thermostat** ; à l'équilibre thermique, on dit que le système \mathcal{S} se trouve dans la **situation canonique**.

Transition : On a vu que dans l'ensemble micro-canonique la **réalisation d'un état macroscopique** était liée au **micro-état le plus probable**. On va donc chercher à écrire la probabilité d'un état microscopique dans l'ensemble canonique.

1.2 Probabilité d'un état microscopique ([2] p.257)

On désigne par (ℓ) l'état microscopique (ou micro-état) d'énergie E_{ℓ} du système \mathcal{S} et par (L) l'état microscopique d'énergie $E_{\overline{\mathcal{T}}}$ du thermostat $\overline{\mathcal{T}}$. Un état macroscopique quelconque de $\mathcal{S} \cup \overline{\mathcal{T}}$ est caractérisé par la donnée de (ℓ) et (L) soit (ℓ, L) et de l'énergie de l'état définie par :

$$E_{(\ell, L)} = E_{tot} = E_{\ell} + E_{\overline{\mathcal{T}}}. \quad (15.1)$$

On cherche à écrire la distribution de probabilité d'un tel état. On utilise alors le postulat fondamental de la mécanique statistique que l'on a défini dans l'ensemble micro-canonique.

Postulat fondamental de la mécanique statistique : *tous les états microscopiques accessibles d'un système isolé à l'équilibre (macroscopique) ont la même probabilité.*

Remarques :

1. Autrement dit, si on considère un dé à 6 faces et qu'on lance le dé alors on a la même probabilité de réaliser le micro-état *le dé affiche 5* ou le micro-état *le dé affiche 4*. Tous les micro-états accessibles ont une probabilité égale à $\frac{1}{6}$ de se réaliser.
2. *Accessibles* signifie qui sont compatibles avec les contraintes extérieurs (par exemple ici E_{tot} est fixée car le système total est isolé). Dans l'analogie avec le dé, le micro-état *le dé affiche 7* n'est pas un état accessible.

Le système global $\mathcal{S} \cup \overline{\mathcal{T}}$ étant **isolé** et à l'**équilibre**, on peut appliquer ce postulat pour écrire la probabilité \mathcal{P}_{ℓ} pour que le système \mathcal{S} se trouve dans l'état (ℓ) particulier, quelque soit l'état du thermostat ⁴.

Cela revient à compter les états microscopiques accessibles du système global qui possèdent cette caractéristique. Puis de diviser ce nombre par le nombre total d'états accessibles Ω_{tot} de manière à normaliser la probabilité.

On cherche un état (ℓ) particulier du système \mathcal{S} donc cela revient à fixer un état (ℓ) de \mathcal{S} et en particulier à fixer l'énergie E_{ℓ} de cet état. Comme l'on cherche le nombre total d'états (ℓ, L) compatibles avec ces contraintes et que l'on vient de fixer l'état du système \mathcal{S} , ce nombre est égale au nombres d'états L du thermostat ayant une énergie, d'après la relation (15.1), égale à $E_{\overline{\mathcal{T}}} = E_{tot} - E_{\ell}$.

Finalement, la probabilité \mathcal{P}_{ℓ} pour que le système \mathcal{S} se trouve dans l'état (ℓ) particulier s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\ell} = \frac{\Omega_{\overline{\mathcal{T}}}(E_{\overline{\mathcal{T}}} = E_{tot} - E_{\ell})}{\Omega_{tot}} \quad (15.2)$$

Remarques :

4. En fait l'état du thermostat doit être compatible avec la relation (15.1), mais il existe plusieurs état accessibles au thermostat validant cette relation, d'où la remarque *quelque soit l'état du thermostat*.

1. Le terme du numérateur se lit : *nombre de micro-états accessibles du thermostat qui ont une énergie $E_{\overline{\mathcal{V}}} = E_{tot} - E_{\ell}$*
2. Le dénominateur se lit : *nombre total de micro-états accessibles au système global.*
3. Par analogie avec le dé, la probabilité que le micro-état *le dé affiche 4* se réalise est égale au nombre de micro-état réalisant cet état (donc ici 1 micro-état réalise l'affichage d'un 4) divisé par le nombre total de micro-état accessible au dé (ici 6 puisqu'il y a 6 faces). On retrouve bien $\mathcal{P}_4 = 1/6$.
4. L'exemple précédent, montre bien que le dénominateur est une constante indépendante de l'état (ℓ) fixé.

D'après la dernière remarque on peut alors réécrire la probabilité \mathcal{P}_{ℓ} comme :

$$\mathcal{P}_{\ell} = C \cdot \Omega_{\overline{\mathcal{V}}}(E_{\overline{\mathcal{V}}} = E_{tot} - E_{\ell}) \quad \text{avec } C \text{ une constante.}$$

Or, par définition (cf. **ensemble microcanonique**) l'entropie statistique microcanonique⁵ du thermostat $S_{\overline{\mathcal{V}}}^*$ est reliée à $\Omega_{\overline{\mathcal{V}}}$ par :

$$S_{\overline{\mathcal{V}}}^* \equiv k_B \ln \Omega_{\overline{\mathcal{V}}}$$

où k_B est la constante de Boltzmann = $1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K. L'entropie s'exprime donc en J/K.

$$\text{Donc } \mathcal{P}_{\ell} = C \cdot \exp\left(\frac{1}{k_B} S_{\overline{\mathcal{V}}}^*(E_{\overline{\mathcal{V}}} = E_{tot} - E_{\ell})\right).$$

Pour expliciter un peu plus cette probabilité on va alors se servir des conditions initiales de l'ensemble canonique, à savoir que l'énergie du système \mathcal{S} est petite par rapport à l'énergie du thermostat et donc par rapport à l'énergie totale. L'énergie d'un état (ℓ) du système \mathcal{S} satisfait alors à : $E_{\ell} \ll E_{tot}$.

On peut alors faire un développement limité au premier ordre⁶ de l'entropie autour de la valeur E_{tot} :

$$\begin{aligned} S_{\overline{\mathcal{V}}}^*(E_{\overline{\mathcal{V}}} = E_{tot} - E_{\ell}) &\approx S_{\overline{\mathcal{V}}}^*(E_{tot}) - E_{\ell} \left(\frac{\partial S_{\overline{\mathcal{V}}}^*}{\partial E_{\overline{\mathcal{V}}}} \right)_{E_{\overline{\mathcal{V}}}=E_{tot}} + \dots \\ &\approx S_{\overline{\mathcal{V}}}^*(E_{tot}) - \frac{E_{\ell}}{T} \end{aligned}$$

Remarques :

1. Par définition (cf. ensemble microcanonique), on a $\frac{\partial S_{\overline{\mathcal{V}}}^*}{\partial E_{\overline{\mathcal{V}}}} = \frac{1}{T_{\overline{\mathcal{V}}}}$. Le système $\overline{\mathcal{V}}$ étant un thermostat, il fixe la température du système global et du système \mathcal{S} , donc on a $T_{\overline{\mathcal{V}}} = T_{\mathcal{S}} = T$.

5. Rien ne nous empêche ici d'écrire, l'entropie microcanonique alors qu'on travaille dans l'ensemble canonique. Il faut juste savoir quelle expression on utilise de l'entropie. D'où la présence d'une (*) pour le préciser.

6. L'entropie apparaissant dans une exponentielle, il faut faire attention à l'ordre auquel on limite le développement limité. Pour une justification précise de se limiter à l'ordre 1 cf. [2] note 6 p.259. Le terme d'ordre 1 est de l'ordre de $N_{\mathcal{S}}$ alors que le terme d'ordre 2 est de l'ordre de $N^2/N_{\overline{\mathcal{V}}} \ll 1$.

2. $S_{\overline{\mathcal{V}}}^*(E_{tot})$ est une constante.

D'après la dernière remarque, on peut réécrire la probabilité comme :

$$\mathcal{P}_{\ell} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_{\ell}}{k_B T}} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_{\ell}} \quad (15.3)$$

où l'on a introduit le facteur $\beta = 1/(k_B T)$ homogène à l'inverse d'une énergie et la fonction de partition

$$Z = \sum_{(\ell)} e^{-\beta E_{\ell}}$$

qui sont deux grandeurs qui facilitent grandement les calculs comme on le verra par la suite. Z se détermine par normalisation de la distribution de probabilité : $\sum_{(\ell)} \mathcal{P}_{\ell} = 1$.

☞ Le facteur $e^{-\beta E_{\ell}}$ s'appelle le **facteur de Boltzmann** (cf. ancienne leçon). On remarque que la probabilité diminue très rapidement avec l'énergie car le rayon de la surface de l'hypersphère des états accessibles (donc le nombre de micro-état accessibles) au système dans l'espace des phases augmente comme l'énergie à la puissance $\frac{N}{2}$ (dans des cas particuliers), donc plus l'énergie est élevée plus le nombre d'états accessibles est grand et donc plus la probabilité est faible.

La formule (15.3) caractérise la **distribution canonique** : elle donne la probabilité des divers états microscopiques (ℓ) d'un système en équilibre thermique avec un thermostat qui le maintient à la température T . Elle a été déduite du **postulat fondamental (microcanonique)** énoncé plus tôt.

Transition : On voit que cette probabilité ne dépend que de l'énergie du système étudié et de la température. On va voir l'influence de T sur l'état du système.

1.3 L'énergie caractéristique $k_B T$ ([2] p.261)

Dans la distribution canonique (15.3) intervient le produit $k_B T$ de la constante de Boltzmann par la température canonique imposée au système. Ce produit a les dimensions d'une énergie. Ainsi, à chaque température T est associée une **énergie caractéristique** $k_B T$.

Dû à la faiblesse de la valeur de k_B cette énergie est pratiquement toujours d'un **ordre de grandeur microscopique** :

$$\text{Ordre de grandeur : } \begin{cases} k_B T \approx 1 \text{ eV} & \iff & T \approx 12000 \text{ K} \\ k_B T \approx \frac{1}{40} \text{ eV} & \iff & T \approx 300 \text{ K} \end{cases}$$

La valeur de l'énergie caractéristique est **fixée par le thermostat**, c'est-à-dire imposée de l'**extérieur** au système, dont elle influence fortement les propriétés.

Prenons deux états microscopiques différents du système \mathcal{S} , l'état (ℓ) d'énergie E_ℓ et l'état (ℓ') d'énergie $E_{\ell'}$. On choisit $E_{\ell'} > E_\ell$. Établissons le rapport des probabilités de ces deux états d'après la relation (15.3) :

$$\frac{\mathcal{P}_{\ell'}}{\mathcal{P}_\ell} = e^{-\frac{(E_{\ell'} - E_\ell)}{k_B T}}$$

- Si $k_B T \gg (E_{\ell'} - E_\ell)$ les deux états ont des probabilités semblables.
- Si $k_B T \ll (E_{\ell'} - E_\ell)$ les deux états ont des probabilités très différentes et le micro-état (ℓ') à une probabilité qui tend vers 0.

On voit à travers cet exemple que le comportement d'un même système peut donc changer de façon radicale suivant la valeur de l'énergie $k_B T$ imposée par le thermostat.

Exemple :

Soit un gaz monoatomique tel que l'hélium ou le néon. A température ordinaire ($T \approx 300K$), les atomes constituant ce gaz ont une probabilité quasiment nulle de se trouver dans un état excité. En effet l'énergie d'excitation étant égale à la différence d'énergie entre le premier niveau excité E_1 et le niveau fondamental E_0 , cette énergie est de l'ordre de $E_1 - E_0 \approx 1$ eV. Alors $k_B T$ vaut seulement 1/40 d'eV à la température ordinaire.

$$k_B T \approx \frac{1}{40} \text{ eV} \ll 1 \text{ eV} \approx E_1 - E_0$$

Le premier niveau excité (ℓ') n'est alors quasiment pas peuplé d'électrons car sa probabilité est très faible. L'atome reste dans son état fondamental, on dit que les degrés de liberté électroniques sont **gelés**.

Au contraire, les états excités, y compris ceux dans lesquels l'atome est dissocié, jouent un rôle important lorsque la température atteint ou dépasse quelques milliers de degrés, comme par exemple dans les étoiles.

Transition : On vient de poser le cadre de l'étude de l'ensemble canonique et on va maintenant s'intéresser aux propriétés liées à cet ensemble.

2 Propriétés d'un système en contact avec un thermostat

2.1 Fonction de partition ([1] p.67 et [2] p.267)

La fonction de partition Z que nous avons introduite pour normaliser les probabilités \mathcal{P}_ℓ est une "constante" en ce sens qu'elle est indépendante de l'état (ℓ) fixé car on somme sur **tous** les états (ℓ). Elle est par contre fonction de la **température T** , et des autres paramètres extérieurs imposés au système. Par exemple pour un gaz pur, Z sera fonction de la température T , du volume V et du nombre de molécules N .

$$Z \equiv Z(T, V, N) = Z(\beta, V, N)$$

La fonction de partition est une grandeur **sans dimension**.

En fonction de l'étude que l'on fait, on peut écrire la fonction de partition de différentes manières :

- on somme sur tous les états microscopiques (ℓ) même si certains ont la même valeur d'énergie :

$$Z = \sum_{(\ell)} e^{-\beta E_\ell}$$

- on somme cette fois sur tous les niveaux d'énergies en prenant en compte la dégénérescence $g(E)$ de chaque niveau :

$$Z = \sum_{(E_\ell)} g(E_\ell) e^{-\beta E_\ell}$$

En effet, il peut y avoir un nombre $g(E_\ell)$ d'états microscopique possédant la même énergie E_ℓ .

- Si le spectre en énergie est continu ou si les niveaux sont tellement proches les uns des autres qu'ils apparaissent comme continus au niveau macroscopique, la somme discrète est remplacée par une intégrale dans laquelle on fait intervenir la densité d'état $\rho(E)$:

$$Z = \int_{E_0}^{+\infty} \rho(E) e^{-\beta E} dE$$

avec E_0 l'énergie minimale du système (état fondamental).

- Dans l'espace des phases classiques à $3N + 3N = 6N$ dimensions formé par les coordonnées $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$, la fonction de partition s'écrit comme le volume total de l'espace des phases accessible par le système divisé par le volume élémentaire d'une cellule h^{3N} de cet espace :

$$Z = \frac{1}{h^{3N}} \int_V d\vec{r}_1 \int_V d\vec{r}_2 \cdots \int_V d\vec{r}_N \int d\vec{p}_1 \int d\vec{p}_2 \cdots \int d\vec{p}_N e^{-\beta E} \quad (15.4)$$

pour être cohérent avec la mécanique quantique (principe d'incertitude d'Heisenberg), h est en fait la constante de Planck = $6.63 \cdot 10^{-34}$ J.s qui a la dimension d'une **action**.

☞ La fonction de partition reflète le nombre d'états accessibles au système.

On va maintenant chercher à écrire les grandeurs physiques fondamentales de l'ensemble canonique en fonction de la fonction de partition.

2.2 Grandeurs physique fondamentales ([1] p.68)

2.2.1 Énergie moyenne et capacité calorifique

- On écrit l'énergie interne U comme la valeur moyenne des états microscopiques⁷ d'énergie E :

$$\begin{aligned} U \equiv \bar{E}(T, V, N) &= \sum_{(\ell)} \mathcal{P}_\ell E_\ell = \sum_{(\ell)} E_\ell \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\ell} \\ &= -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\sum_{(\ell)} e^{-\beta E_\ell} \right] = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \end{aligned}$$

Finalement on trouve que :

$$\boxed{\bar{E}(T, V, N) = - \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{V, N}}$$

- De même, par définition la capacité calorifique du système s'écrit :

$$\begin{aligned} C_V &= \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \right)_{V, N} = \frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{V, N} \\ &= -\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} \frac{d\beta}{dT} \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\beta \frac{\partial}{\partial \beta} = -T \frac{\partial}{\partial T}$. Finalement on trouve que :

$$\boxed{C_V = \frac{1}{k_B T^2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}}$$

Application :

On peut montrer assez facilement en faisant le calcul que :

$$C_V = \frac{1}{k_B T^2} \left[\frac{Z''}{Z} - \left(\frac{Z'}{Z} \right)^2 \right] = \frac{1}{k_B T^2} \underbrace{\left[\overline{E^2} - (\bar{E})^2 \right]}_{\text{variance de l'énergie}}$$

où le ' signifie dérivé par rapport à β .

La capacité calorifique à volume constant en thermodynamique caractérise la réponse d'un système à une modification de sa température. En mécanique statistique, elle correspond aux **fluctuations de l'énergie** du système autour de sa valeur moyenne (la plus probable), c'est-à-dire autour de sa valeur d'**équilibre**. Donc lorsqu'un système a une capacité calorifique grande, soit cela signifie que le système possède peu de niveaux d'énergie mais qui sont très dispersés autour de la valeur moyenne, soit beaucoup de niveaux mais très resserrés autour de la valeur moyenne. C'est les deux explications possibles liées à l'ambiguïté de la définition de la variance statistique.

7. L'expression de la valeur moyenne n'est autre que la somme de tous les niveaux d'énergie pondérés par la distribution de probabilité de trouver le système dans chaque niveau d'énergie.

2.2.2 Entropie canonique

On essaye d'exprimer l'entropie statistique dans l'ensemble canonique. On repart alors de la définition statistique de l'entropie :

$$\boxed{S \equiv -k_B \sum_{(\ell)} \mathcal{P}_\ell \ln \mathcal{P}_\ell}$$

Remarques :

- Comme on a $0 < \mathcal{P}_\ell < 1$ par définition des probabilités, l'entropie statistique est bien positive (comme en thermodynamique).
- S est une grandeur additive.
- Si pour un micro-état (ℓ) donné, la probabilité vaut 1 alors toutes les autres probabilités sont nulles et on a une **connaissance parfaite** du système \implies l'**entropie est minimale** et vaut 0.
- Si tous les micro-états accessibles sont **équiprobables** ($\mathcal{P}_\ell = 1/\Omega$) alors on a un **manque d'information maximal** sur le système \implies l'entropie est maximale et vaut $S = k_B \ln \Omega$.

En remplaçant dans cette définition, la probabilité \mathcal{P}_ℓ de trouver le système dans l'état (ℓ) définie par la relation (15.3), on a

$$\begin{aligned} S &= -k_B \sum_{(\ell)} \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\ell} [-\beta \ell - \ln Z] \\ &= \frac{1}{T} \left[\sum_{(\ell)} \mathcal{P}_\ell E_\ell \right] + k_B \frac{\ln Z}{Z} \left[\sum_{(\ell)} e^{-\beta E_\ell} \right] \end{aligned}$$

Le premier terme entre crochet est par définition égale à \bar{E} et le deuxième à Z , il vient :

$$\boxed{S = \frac{\bar{E}}{T} + k_B \ln Z}$$

qui est la définition de l'entropie statistique **canonique**. Elle a une expression différente en fonction de l'ensemble dans lequel on travaille.

2.2.3 Énergie libre et grandeurs dérivées

On définit l'énergie libre statistique comme $F = -k_B T \ln Z$. On retrouve alors que :

$$F = \bar{E} - TS$$

à savoir la même expression qu'en thermodynamique. On peut alors définir

- une pression canonique : $p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, N}$

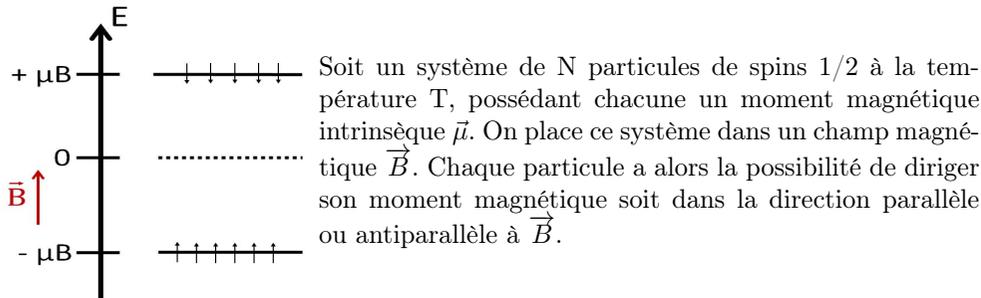
- un potentiel chimique canonique : $\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V}$

On peut montrer que l'étude du sens de l'évolution d'un système à la suite d'une perturbation est retranscrite par la connaissance de l'énergie libre comme le potentiel F en thermodynamique (cf. **Partie retirée**).

Transition : on a vu que la fonction de partition jouait un rôle primordial dans l'écriture de toutes les grandeurs physiques associés à l'ensemble canonique. On va maintenant calculer cette fonction de partition et confronter les résultats de la physique statistique à ceux des milieux magnétique et de la thermodynamique.

3 Applications

3.1 Systèmes à 2 niveaux d'énergie ([3] p.130)



Chaque particule possède alors deux états microscopiques accessibles *état +* et *état -* qui ont respectivement les énergies $E_+ = +\mu B$ et $E_- = -\mu B$. La fonction de partition canonique z d'une particule avec un spin s'écrit alors :

$$z = \sum_{(\ell)} e^{-\beta E_{\ell}} = e^{-\beta \mu B} + e^{+\beta \mu B} = 2 \cosh(\beta \mu B)$$

On considère les particules **indépendantes** (pas d'influence des spins entre eux), **identiques** mais **discernables**. La fonction de partition totale s'écrit :

$$Z = z^N = [2 \cosh(\beta \mu B)]^N$$

La valeur moyenne de l'énergie s'écrit :

$$\bar{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N \mu B \tanh(\beta \mu B)$$

Deux cas :

- Si $T \rightarrow 0$ (ou si B est grand) on a $(\beta \mu B \gg 1)$ et donc $\bar{E} \rightarrow -N \mu B$. Les N particules se situent sur le niveau de plus basse énergie égale à $-\mu B$. Tous les spins sont donc parallèles à \vec{B} .

- Si $T \gg 1$ (ou si B est faible) on a $(\beta \mu B \ll 1)$ et donc $\bar{E} \approx -N \beta (\mu B)^2 \rightarrow 0$. L'énergie moyenne du système étant nulle, la moitié des particules occupent le niveau d'énergie $-\mu B$ et l'autre moitié le niveau d'énergie $+\mu B$. La moitié des spins sont parallèles au champ B , l'autre antiparallèle. Au mieux le deuxième niveau possède la moitié des particules (cf. Laser et pompage optique : système à 3 niveaux).

Le moment magnétique résultant dans la direction de \vec{B} est égal à N fois le moment magnétique moyen $\bar{\mu}$ d'une particule :

$$M = N \cdot \bar{\mu} = N \cdot \sum_{(\ell)} \mu_{\ell} \frac{1}{z} e^{-\beta E_{\ell}} = \frac{N}{z} \cdot (\mu e^{+\beta \mu B} - \mu e^{-\beta \mu B}) = N \mu \tanh(\beta \mu B)$$

On retrouve que l'énergie interne est égale à : $U = \bar{E} = -\mathcal{M}B$.

Soit n le nombre de spins par unité de volume. L'aimantation (A/m) moyenne noté M_z dans la direction de \vec{B} s'écrit avec $n = \frac{N}{V}$:

$$M_z = \frac{\mathcal{M}}{V} = n \mu \tanh(\beta \mu B)$$

On définit alors la susceptibilité magnétique χ_m (qui est sans dimension) par :

$$M_z = \chi_m H = \chi_m \frac{B}{\mu_0}$$

A hautes températures $(\beta \mu B \ll 1)$, ou autrement dit lorsque l'énergie magnétique des particules μB est très inférieur à l'énergie thermique $k_B T$, on peut faire un développement limité de \tanh et écrire que :

$$M_z \approx n \beta \mu^2 B$$

On en déduit que la susceptibilité magnétique s'écrit

$$\chi_m = \mu_0 \frac{n \mu^2}{k_B T} = f\left(\frac{1}{T}\right)$$

C'est la **loi de Curie** établie expérimentalement par P. Curie en 1895.

3.2 Gaz parfait monoatomique classique ([1] p.74)

On cherche dans cette partie à retrouver les relations liées au gaz parfait monoatomique en thermodynamique dans le cadre de l'ensemble canonique de la physique statistique.

On considère un ensemble de N particules de masse m sans interaction mutuelle pouvant se déplacer librement dans un volume V . On suppose ces N particules **identiques**

et **indiscernables**. Ce gaz parfait rentre alors dans l'approximation dite de *Maxwell-Boltzmann*, ce qui nous conduit à l'expression de sa fonction de partition :

$$Z = \frac{z^N}{N!}$$

où z est la fonction de partition d'une particule.

Remarques :

1. Il y a N particules dans le gaz, la fonction de partition totale doit donc être la multiplication de la fonction de partition d'une particule. Dans l'analogie avec le dé, si maintenant on a deux dé et que l'on cherche la probabilité que le micro-état soit *le premier dé affiche 4 et le second 5* alors elle est égale à $\mathcal{P}_{(4;5)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.
2. On considère les particules indiscernables, ce qui signifie que plusieurs micro-états peuvent correspondre au même macro-état. Si on essaye de répartir 3 boules numérotés de 1 à 3 sur deux niveaux d'énergie, alors le macro-état *il y a une boule sur le niveau 1 et deux boules sur le niveau 2* peut être réalisé par 3 micro-états *Boule 1 sur niveau 1 ; Boule 2 sur niveau 1 ; Boule 3 sur niveau 1* (les autres boules étant réparties sur l'autre niveau). Si maintenant ces boules sont indiscernables, il n'y aura alors plus qu'un seul micro-état qui réalise le macro-état *1 boule sur le niveau 1*. Pour éviter le multiple comptage d'état microscopique dans le calcul de la fonction de partition de particules **indiscernables**, on divise par $N!$ (cf. [1] p.73).

La situation dans laquelle on s'est placé nous permet de calculer facilement la fonction de partition totale du gaz parfait. Il suffit dans un premier temps de calculer la fonction de partition pour une particule du gaz. On se place naturellement dans un espace (spatial et impulsionnel) à 3 dimensions. L'espace des phases à alors une dimension égale à 6. D'après (15.4), on écrit que le nombre totale d'états accessibles au système dans l'espace des phases est :

$$z = \frac{1}{h^3} \int_V d\vec{r} \int d\vec{p} e^{-\beta \mathcal{H}(\vec{p})} \quad (15.5)$$

Le hamiltonien d'une particule de gaz parfait supposé sans interaction s'écrit : $\mathcal{H}(\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$. On peut alors effectuer l'intégrale sur le volume spatial et il reste à calculer l'intégrale sur le volume des impulsions. Dans l'espace des phases les impulsions sont considérés comme des coordonnées ordinaires, les bornes d'intégration sont donc l'infini.

$$\begin{aligned} z &= \frac{V}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x e^{-\frac{\beta p_x^2}{2m}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y e^{-\frac{\beta p_y^2}{2m}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z e^{-\frac{\beta p_z^2}{2m}} \\ &= \frac{V}{h^3} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dp_i e^{-\frac{\beta p_i^2}{2m}} \right]^3 \\ &= \frac{V}{h^3} \left[\frac{2m\pi}{\beta} \right]^{3/2} \end{aligned}$$

où on a utilisé l'intégrale de Gauss entre la 2^{ème} et la 3^{ème} ligne. Finalement il vient :

$$z = \frac{V}{h^3} \left[\frac{2m\pi}{\beta} \right]^{3/2} \implies Z = \frac{V^N}{h^{3N}} \left[\frac{2m\pi}{\beta} \right]^{3N/2}$$

On peut alors calculer grâce aux relations de la section 2.2, les grandeurs physiques canoniques du gaz parfait :

- l'énergie moyenne du gaz :

$$\bar{E} = - \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{V,N} = \frac{3N}{2} \cdot \frac{1}{\beta} = \boxed{\frac{3}{2} N k_B T = \bar{E}}$$

- la capacité calorifique du gaz :

$$C_V = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \right)_{V,N} = \frac{3}{2} N k_B$$

on remarque que si $N = \mathcal{N}_A$ alors $C_V = \frac{3}{2} R$.

- la pression canonique

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N} = \frac{\partial (k_B T \ln Z)}{\partial V} = \frac{N k_B T}{V} \implies \boxed{pV = N k_B T}$$

☞ On voit que la constante de Planck pouvait être omise dans le calcul de la fonction de partition puisqu'elle n'apparaît logiquement dans aucun résultat de l'étude classique du gaz parfait. Cependant si on l'enlève, la fonction de partition possède alors une dimension.

On voit qu'à partir d'argument statistique sur la distribution des états microscopiques du système, on retrouve les relations macroscopiques de la thermodynamique sur l'exemple du gaz parfait. La mécanique statistique qui est une branche de la physique survenue plus tardivement que la thermodynamique est une théorie plus générale que la thermodynamique et englobe les résultats de cette dernière.

Conclusion

On a vu que l'ensemble canonique correspondait à l'étude d'un système fermé en contact avec un thermostat beaucoup plus grand que lui et qui impose sa température au système (ex : bain d'eau thermostaté). En fonction de la température du thermostat, le système sera dans un certain état.

Puis on a vu que la grandeur capitale de cette étude était la **fonction de partition** qui pouvait s'écrire de différentes manières. Toutes les grandeurs physiques fondamentales peuvent s'écrire en fonction de Z .

Finalement on a appliqué l'étude de cet ensemble au cas des matériaux paramagnétiques pour expliquer la loi de Curie et d'un gaz parfait classique pour remonter à son équation d'état.

L'ensemble canonique permet de combler des blancs laissés par la thermodynamique classique comme notamment l'étude des transitions de phase. Mais également d'expliquer la conductivité ou la stabilité des étoiles.

Il existe un autre ensemble qui permet de décrire des systèmes encore plus généraux, l'ensemble **grand-canonique** qui cette fois est un système **ouvert**, permettant également l'échange de particules avec l'extérieur. Mélangé à de la mécanique quantique, on peut écrire les distributions respectives pour un gaz de fermions (distribution de Fermi-Dirac) ou de bosons (distribution de Bose-Einstein). On peut alors expliquer pourquoi les naines blanches ne s'effondrent-t-elles pas sous le poids de leur propre gravité (le système grand canonique n'est pas une obligation pour décrire ça).

Questions du correcteur

➔ Pourquoi les naines blanches ne s'effondrent-elles pas sur elle-même ?

C'est dû à la pression de dégénérescence des fermions constituant la naine blanche. Deux fermions ne pouvant se retrouver dans le même état quantique, on ne peut pas les empiler comme avec les bosons. Ce phénomène conduit à une pression de dégénérescence (de Fermi) qui vient contrecarrer la pression dû à la force gravitationnel crée par l'étoile elle-même.

➔ L'atmosphère est-il le meilleur exemple pratique pour parler d'un système canonique ?

Non, il y a trop de fluctuations de température. Par contre un bain d'eau correspond au critère de l'ensemble canonique. L'eau possède une grande valeur de capacité calorifique ce qui lui confie un pouvoir de thermostat puissant.

➔ A quel genre de système s'apparente la partie 3.1 ? Pourquoi peut-on prendre des particules discernables dans ce cas là ?

Ce système reproduit le comportement des milieux paramagnétiques qui peuvent s'aimanter en présence d'un champ magnétique. On considère les particules discernables car c'est un solide et elles sont bien localisées (cf. domaine de Weiss).

➔ Est-ce que la condition $N_{\overline{\mathcal{C}}} \gg N_S$ est vraiment importante pour la description de l'ensemble canonique ?

Non, ce qui compte c'est qu'il existe un grand nombre d'états accessibles pour le système $\overline{\mathcal{C}}$. Cela dit, la condition sur le nombre de particules nous permet de limiter le développement limité à l'ordre 1 (cf. [2] note 6 p.259).

Remarques du correcteur

➔ Bon plan mais passer du temps sur les applications. On peut faire la loi de Dulong et Petit par exemple.

➔ Pas d'expériences possibles sur la leçon.

➔ Comme on pose que c'est pas la première leçon de physique statistique vu par les élèves il vaut mieux faire l'application du système à deux niveaux en premier car on a déjà étudié le gaz parfait dans un premier cours.

Questions pour faire réfléchir

➔ Quelles sont les conditions d'application du théorème d'équipartition de l'énergie ?

➔ Qu'est-ce que la notion de température caractéristique d'un système thermodynamique ?

➔ Connaissez-vous la théorie de Debye des solutions aqueuses⁸ ?

➔ Quel est le lien entre cette leçon et celle sur les potentiels thermodynamiques⁹ ?

Partie retirée

Pour cause de temps, il vaut mieux retiré cette partie qui venait à la suite de la démo des grandeurs physiques fondamentales.

Évolution spontanée d'un système ([2] p.275)

Comme on l'a vu dans la leçon sur l'évolution d'un système thermodynamique, il existe des outils particuliers qui nous permettent, à travers une condition sur leur extremum, de décrire le sens d'évolution du système : ce sont les **potentiels**. On cherche à montrer que dans notre cas, la définition de l'énergie libre précédente nous ramène à l'étude d'un potentiel thermodynamique.

On peut montrer que l'évolution spontanée d'un système en situation canonique après la modification d'une contrainte extérieure (V, N, \dots) s'accompagne d'une diminution de F . L'équilibre, suite à la perturbation, sera atteint lorsque F sera minimale.

8. Cet exemple faisant apparaître un facteur de Boltzmann est traité de façon simple dans l'ouvrage de C.Garing intitulé *Ondes électromagnétiques* aux éditions Ellipses, ainsi que dans l'excellent ouvrage de B. Cabane et S. Hénon, *Liquides, solutions, dispersions, émulsions, gels* paru chez Belin, dans la collection échelles.

9. cette question est posée par rapport au titre 2012 de la leçon.

Pour cela, on calcule l'entropie microcanonique du système global $\mathcal{S} \cup \overline{\mathcal{V}}$ isolé et on l'exprime en fonction de l'énergie libre F de \mathcal{S} . En effet, l'étude de l'ensemble microcanonique nous a montré qu'un système isolé évolue spontanément dans le sens qui accroît son entropie microcanonique et que le **nouvel état d'équilibre** est atteint lorsque cette entropie est **maximale**.

Soient $S_{\overline{\mathcal{V}}}$ et S les entropies microcanoniques du thermostat et du système, (L) et (ℓ) leurs états microscopiques. La probabilité de l'état microscopique définie par (ℓ) et (L) est :

$$\mathcal{P}_{\ell,L} = \mathcal{P}_{\ell} \cdot \mathcal{P}_L \approx \mathcal{P}_{\ell}(E_{\ell}) \cdot \mathcal{P}_L^*(E_L = E_{tot} - E_{\ell})$$

Remarques :

1. L'énergie du système global est simplement la somme des énergies du système \mathcal{S} et du thermostat $\overline{\mathcal{V}}$, et tout état microscopique possible du système global est caractérisé par la donnée des états microscopiques respectifs de \mathcal{S} et $\overline{\mathcal{V}}$.
2. Comme le système $\overline{\mathcal{V}}$ est très grand, on peut le considérer comme isolé et alors écrire la probabilité qu'il se trouve dans (L) comme la probabilité microcanonique qu'il se trouve dans l'état (L) . Le thermostat est toujours à l'équilibre microcanonique à une énergie $E_L = E_{tot} - E_{\ell}$.

Par définition, l'entropie statistique associée à la distribution $\mathcal{P}_{\ell,L}$ vaut

$$S_{tot} = -k_B \sum_{(\ell,L)} \mathcal{P}_{\ell,L} \ln \mathcal{P}_{\ell,L}$$

en utilisant les deux relations précédentes et le fait que $\sum_{(L)} \mathcal{P}_L^* = 1$, on écrit que :

$$S_{tot} = S + \sum_{(\ell)} \mathcal{P}_{\ell} S_{\overline{\mathcal{V}}}^*(E_{\overline{\mathcal{V}}} = E_{tot} - E_{\ell})$$

En effectuant un développement limité à l'ordre 1 de l'entropie microcanonique comme précédemment, on obtient :

$$S_{tot} = S_{\overline{\mathcal{V}}}^*(E_{tot}) + S - \frac{\overline{E}}{T} = \underbrace{S_{\overline{\mathcal{V}}}^*(E_{tot})}_{\text{constante}} - \frac{F}{T}$$

Comme on sait que l'entropie totale du système ne fait qu'augmenter jusqu'à atteindre son état d'équilibre et qu'elle est définie positive on a alors :

$$\boxed{S_{tot} \geq 0 \quad \implies \quad F \leq 0}$$

dans une évolution spontanée. L'augmentation de S_{tot} signifie donc que l'énergie libre F du système doit diminuer : **l'évolution spontanée d'un système maintenu en contact avec un thermostat s'accompagne d'une diminution de F** . L'équilibre est atteint quand S_{tot} est maximale, c'est-à-dire quand F est minimal.

LP 16 — Rayonnement d'équilibre thermique. Corps noir.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 07/05/2014 par *Joévin Giboudot* et corrigée par *M. Rieutord*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Rayonnement d'équilibre thermique. Corps noir. Application(s)*. La leçon s'intitulait en 2012 : *Rayonnement d'équilibre thermique. Corps noir. Application aux transferts thermiques radiatifs*.

Rapports du Jury

☞ (2010) – “L'intérêt de la notion de corps noir, et son lien avec celle de rayonnement d'équilibre, doivent apparaître clairement. Des bilans radiatifs dans des situations concrètes permettent alors de mettre en oeuvre cette notion. Les lois de base du rayonnement thermique sont établies en situation d'équilibre ; il convient de s'interroger sur la validité de leur application à des situations hors-équilibre.”

☞ (2009) – “L'intérêt de la notion de corps noir, et son lien avec celle de rayonnement d'équilibre, doivent apparaître clairement. Des bilans radiatifs dans des situations concrètes permettent alors de mettre en oeuvre cette notion.”

☞ (2008) – “La leçon doit permettre d'aborder la notion de transfert thermique radiatif et d'en présenter des applications. La démonstration de la loi de Planck n'est pas le centre de la leçon.”

☞ (2004, 2003) – “Le candidat doit savoir faire la différence entre le champ de rayonnement d'équilibre et le corps noir. L'effet de serre ne constitue pas l'unique application à envisager pour ce sujet, et les valeurs numériques obtenues avec des modèles élémentaires de cet effet doivent être présentées avec beaucoup d'esprit critique.”

☞ (2002) – “Cette leçon a donné lieu cette année à des illustrations intéressantes et démonstratives : mise en évidence du transfert thermique par rayonnement, principe du pyromètre à disparition de filament,... Nous incitons les futurs candidats à continuer dans ce sens. Par ailleurs, le fait que cette leçon exclut la démonstration de la loi de Planck n'autorise pas les candidats à ignorer la physique sous-jacente.”

☞ (2001) – “Il convient de distinguer le “champ de rayonnement d'équilibre” du “corps noir”. Il faut maîtriser parfaitement les unités des nombreuses grandeurs énergétiques qui interviennent dans cette leçon. Les applications présentées doivent être pertinentes.”

☞ (1999) – “Cette leçon n'est pas une simple introduction à la formule de Planck mais doit être illustrée de bilans radiatifs sur des exemples concrets et d'applications.”

☞ (1998) – “Le caractère fondamental et universel des concepts dégagés à l'occasion de cette leçon doit être mieux souligné par les candidats. Il s'agit d'équilibre thermodynamique entre matière et rayonnement et il est justifié de se poser la question de savoir pourquoi un corps noir n'émet pas un spectre de raies...”

☞ (1997) – “Le lien entre propriétés d'absorption et d'émission d'un corps est trop souvent ignoré. On peut aussi évoquer l'approche d'Einstein.”

Bibliographie

[1] Aslangul, *Mécanique quantique 1*. de Boeck, 2007.

Disponible en ligne ici : <http://www.physique.ens-cachan.fr/old/pagregp/enseignement/quantique/PhysQuantiqueLicence1.pdf>

[2] Oliver et Gié, *Thermodynamique 1^{ère} et 2^{ème} année*. Tec & Doc, 1996.

[3] Brébec, *Thermodynamique 2^{ème} année*. HPrépa, 2004.

Plan

1 Le rayonnement d'équilibre thermique

1.1 Origine du rayonnement et interaction avec la matière ([2] p.460)

1.2 Transparence, opacité et fenêtre spectral ([2] p.460)

1.3 Rayonnement d'équilibre radiatif et thermodynamique ([1] p.84)

2 Loi de Planck et conséquences

2.1 Historique ([2] p.473)

2.2 Loi du déplacement de Wien ([2] p.465)

2.3 Flux total. Loi de Stefan-Boltzmann

2.3.1 Lien entre u_λ et $\varphi_{p,\lambda}$ ([3] p.85)

2.3.2 Flux hémisphérique total ([2] p.467)

3 Le corps noir

3.1 Définitions ([1] p.85 + [2] p.468)

3.2 Propriétés du corps noir à l'ERT ([2] p.469)

3.3 Réalisation pratique ([1] p.85 + [2] p.472)

3.4 Propriétés du corps noir à l'ETL ([2] p.470)

4 Applications

4.1 La pyrométrie à disparition de filament ([3] p.91)

4.2 L'effet de serre

4.2.1 Modèle sans atmosphère ([3] p.92)

4.2.2 Modèle avec atmosphère ([3] p.98)

Introduction

➤ **Expérience :** Thermocouple conjugué avec une lampe quartz-iode par une lentille. Si on ne brasse pas l'air et que l'on place une distance assez grande entre la lampe et le capteur, on peut alors négliger les phénomènes de conduction et de diffusion thermique (que l'on connaît déjà). On voit alors que lorsqu'on allume la lampe la température sur le capteur augmente, bien qu'il n'y ait pas de transfert thermique par conduction et diffusion.

Plus quotidiennement, la notion de rayonnement et son lien avec le transfert d'énergie nous est familière ne serait-ce qu'à travers le **rayonnement** solaire qui émis par l'étoile arrive jusqu'à nous et nous chauffe.

On sait également que lorsqu'un métal est travaillé dans une forge, sa couleur évolue avec la température. On va chercher à décrire dans cette leçon ces différentes observations et étudier le rayonnement d'équilibre thermique.

Nous chercherons à décrire un rayonnement à l'équilibre radiatif et thermodynamique avec l'environnement dans lequel il se trouve. Puis nous chercherons à quantifier l'énergie de ce rayonnement en fonction de sa "couleur" (longueur d'onde ou fréquence) et de

sa température. Nous étudierons enfin un concept très utile le corps noir. Bien qu'idéal ce concept se rapproche de nombreuses observations expérimentales. Finalement, nous verrons deux applications (la pyrométrie et l'effet de serre) de cette étude.

1 Le rayonnement d'équilibre thermique

1.1 Origine du rayonnement et interaction avec la matière ([2] p.460)

L'exemple du rayonnement solaire permet de dégager certaines caractéristiques du rayonnement thermique

- Transfert thermique à distance.
- Transfert thermique sans milieu matériel (se propage dans le vide interstellaire et intergalactique).
- Transfert thermique immédiat à notre échelle (quand on passe à l'ombre, on sent instantanément la diminution de température).

Ces caractéristiques laissent penser que ce transfert s'effectue par la propagation des ondes électromagnétiques (y compris la lumière) dont l'une des principales caractéristiques est la **fréquence** d'oscillation de l'onde (ou sa longueur d'onde, car on ne traite que des milieux non dispersifs).

Les ondes EM interagissent avec la matière. Pour décrire ces interactions on va définir les différents phénomènes et les flux surfaciques associés.

Ces flux correspondent à la puissance transportée par chaque type de phénomène par unité de surface du corps considéré, donc en W/m^2 . Pour la commodité des bilans tous les flux seront comptés **positivement**. Cela revient à prendre le vecteur unitaire \vec{n} normal à l'élément de surface toujours dans le sens du flux considéré (vers l'extérieur pour les flux sortants, vers l'intérieur pour les flux entrants).

Prenons par exemple une vitre et un flux incident φ_i . A ce flux qui rencontre le corps on peut associer :

- un flux **réfléchi** et **diffusé** : φ_r
- un flux **absorbé** : φ_a . L'énergie du rayonnement est converti en énergie interne.
- un flux **émis** : φ_e . Ce flux émis a pour origine l'accélération (due au fluctuation thermique) de particules chargés qui émettent donc un rayonnement EM en surface du corps. On a un transfert d'énergie interne (agitation thermique) en énergie de rayonnement.

La conservation de l'énergie exige que :

$$\varphi_i = \varphi_a + \varphi_r$$

On définira également un flux surfacique **partant** φ_p tel que :

$$\varphi_p = \varphi_e + \varphi_r$$

Ces deux relations commandent les échanges énergétiques traduisant l'interaction entre matière et rayonnement dans les conditions indiquées.

Le flux surfacique **radiatif** φ^R qui exprime le bilan entre flux partant et flux incident est défini par :

$$\varphi^R = \varphi_p - \varphi_i = \varphi_e - \varphi_a$$

Ce flux est algébrique, il peut être négatif si l'absorption est plus importante que l'émission.

1.2 Transparence, opacité et fenêtre spectral ([2] p.460)

La répartition énergétique des flux va dépendre du corps considéré :

- si le corps est totalement **transparent** alors le rayonnement n'est ni absorbé, ni réfléchi (ou diffusé).
- si le corps est totalement **opaque** alors le rayonnement est totalement absorbé ou/et réfléchi (ou diffusé).

En réalité aucun corps n'est parfaitement transparent ou opaque à tout intervalle de fréquence ou longueur d'onde.

Exemples : le corps humain est transparent aux rayons X (utilité en médecine) et opaque au visible.

le verre est transparent au visible et opaque aux IR (effet de serre cf. après) et UV (pas de bronzage derrière une vitre).

Pour être encore plus précis sur ces notions, on voit que la notion de **profondeur de pénétration** du rayonnement incident est important. En effet une vitre de face est transparente dans le visible mais elle ne l'est plus sur la tranche.

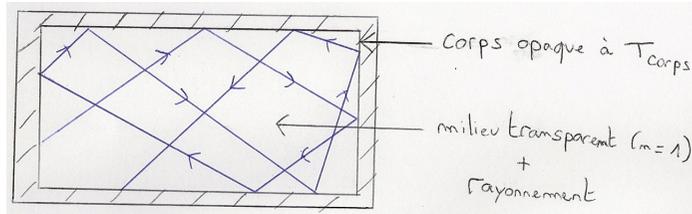
On retiendra que l'opacité et la transparence sont des notions à associer à des intervalles spectraux et à une profondeur de pénétration.

On voit donc qu'il va être très bénéfique de s'intéresser au caractéristique du rayonnement en fonction de la longueur d'onde ou de la fréquence. Les flux surfaciques spectraux sont alors définis par :

$$d\varphi_i = \varphi_{i,\nu} d\nu = \varphi_{i,\lambda} |d\lambda| \quad (c = \lambda \nu)$$

Dans la suite, on considère des corps opaques (partiellement au moins) séparés par des milieux totalement transparents d'indice de réfraction égale à 1. On s'intéresse alors au cas de rayonnement d'équilibre radiatif et thermodynamique.

1.3 Rayonnement d'équilibre radiatif et thermodynamique ([1] p.84)



• Pour que l'équilibre thermodynamique s'établisse dans la boîte, il faut impérativement que de la matière soit présente. On fait l'analogie avec les atomes du gaz parfait qui se thermalise par l'intermédiaire des chocs avec les parois.

Ici les échanges d'énergies entre le rayonnement et les atomes de la paroi permettent d'atteindre un équilibre thermodynamique pour le système constitué par **la paroi + le rayonnement**.

L'équilibre une fois atteint, implique que $T_{corps} = T_{ray} = \text{cst}$.

• A l'équilibre thermodynamique $T_{corps} = \text{cst}$ et donc $\varphi_a = \varphi_e$. Car sinon on aurait une variation de l'énergie interne et donc de la température.

D'après la définition du flux radiatif, on a alors $\varphi^R = 0$ et donc $\varphi_i = \varphi_p$. C'est ce que l'on appelle **l'équilibre radiatif**.

L'équilibre thermodynamique implique l'équilibre radiatif mais la réciproque n'est pas forcément vrai.

• A l'instar du gaz parfait, dans lequel on cherche la distribution des vitesses des atomes du gaz parfait, on va chercher la répartition en fréquence (couleur) de la densité spectrale d'énergie du rayonnement (à température fixée) : $u_\nu(\nu, T)$ dans le cas d'un rayonnement à l'équilibre radiatif et thermodynamique (**ERT**). Cette densité spectrale d'énergie est liée à la densité volumique d'énergie du rayonnement u (en J/m^3) par :

$$du = u_\lambda(\lambda, T) d\lambda = u_\nu(\nu, T) d\nu$$

Transition : On va montrer les grandes lignes historiques de la dérivation de l'expression de cette densité spectrale d'énergie ainsi que son lien avec les flux surfaciques incident (et donc partant) dans le cadre de l'ERT.

2 Loi de Planck et conséquences

2.1 Historique ([2] p.473)

- 1894 : Wien expérimentalement : $u_\nu(\nu, T) = f\left(\frac{\nu}{T}\right) \cdot \nu^3$. Avec f une fonction **universelle**.

- 1896 : Il précise, et donne : $u_\nu(\nu, T) = \alpha \nu^3 \exp(-\beta \nu/T)$. Bon accord à HF mais mauvais à BF (Infrarouge).
- 1900 : Rayleigh et Jeans, indépendamment, montre par un raisonnement alliant électromagnétisme et mécanique statistique que : $u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} k_B T$. Marche en IR mais prévoit que l'énergie volumique du champ est infinie (l'intégrale sur toutes les fréquences est infinie) : **catastrophe ultraviolette**.
- 1900 : Planck raccorde les deux extrémités du spectre :

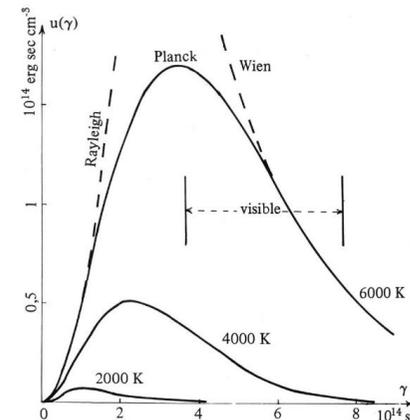
$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Remarques :

1. Cette formule pour le rayonnement thermique reproduit magnifiquement tous les résultats expérimentaux et d'ailleurs la confrontation précise permet de mesurer la constante de Planck.
2. c'est une fonction universelle : ne dépend que de ν et de T et pas de la structure du corps.
3. on voit apparaître des constantes universelles de la physique : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ (équilibre thermique), $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ (mécanique quantique), c (électromagnétisme). C'est Planck qui introduit les deux premières constantes pour la première fois et nomme k_B la constante de Boltzmann.
4. Pour $h\nu/k_B T \gg 1$ on retrouve Wien (catastrophe UV résolue), et pour $h\nu/k_B T \ll 1$ on retrouve Rayleigh-Jeans : les effets quantiques tendent à s'effacer à haute température.

Tout rayonnement à l'ERT (équilibre radiatif et thermodynamique) possède cette densité spectrale d'énergie.

Enfin, on peut noter que pour établir cette loi, Planck a dû faire l'hypothèse que les échanges d'énergie entre la matière et le rayonnement sont **quantifiés** : paquet d'énergie échangée $h\nu$ (naissance de la mécanique quantique).



On peut tracer cette fonction pour différentes températures en fonction de la longueur d'onde cette fois.

Comme ici, on voit que la courbe passe par un **unique maximum** et on retiendra que 98% de la puissance émise est comprise dans l'intervalle :

$$0.5\lambda_{max} < \lambda < 8\lambda_{max}$$

On va maintenant chercher à déterminer ce maximum.

2.2 Loi du déplacement de Wien ([2] p.465)

La loi dite du déplacement de Wien indique que pour une température T la densité spectrale d'énergie est maximale pour une longueur d'onde λ_{max} . On cherche alors ce maximum.

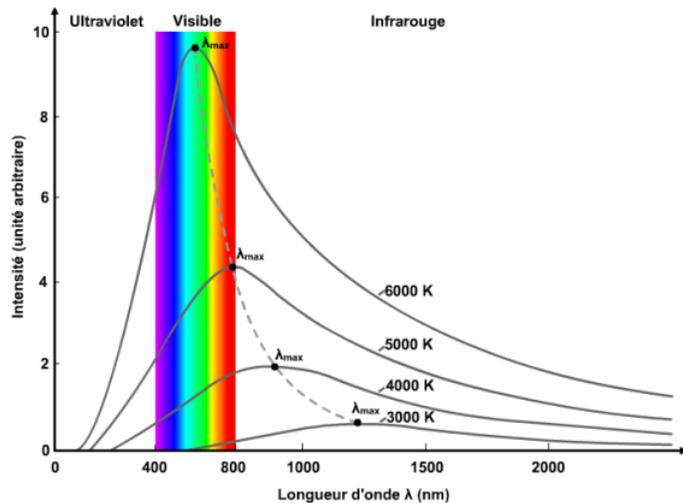
On passe en longueur d'onde pour que ce soit plus représentable optiquement parlant : $u = u_\lambda d\lambda = u_\nu d\nu$ ce qui implique d'après $c = \lambda\nu$ que $u_\lambda = u_\nu \frac{\nu^2}{c}$. En cherchant un extremum non nul de cette fonction on trouve :

$$\left. \frac{du_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda_{max}} = 0 \implies \lambda_{max} \cdot T \approx 2897,8 \mu m \cdot K$$

Ordres de grandeurs (bien que l'on ne soit pas rigoureusement à l'ERT) :

- Pour $T \approx 300K$, on a $\lambda_{max} \approx 10\mu m$, ce qui correspond à l'infrarouge. On comprend l'utilité des caméras nocturnes sensibles à l'infrarouge pour détecter des corps humain.
- Pour $\lambda_{max} \approx 600nm$, correspondant au milieu du spectre visible, on a $T \approx 5000K$. C'est l'ordre de grandeur de la température superficielle du soleil. On reviendra sur cet exemple et l'ERT.

On voit que la loi de Wien indique que le spectre se "déplace" vers les courtes longueurs d'onde lorsque la température croît. On comprend alors bien ce qu'il se passe pour un métal chauffé au blanc. Plus la température augmente plus le spectre englobe une partie du visible.



Au début le rayonnement se situe dans l'IR, puis dans le rouge (cf. Bételgeuse, constellation d'Orion, $T \approx 3600K$), et puis il vient englober une partie du spectre visible qui par superposition donne une couleur blanche. Finalement la dernière couleur perçue par l'oeil pour un corps chauffé est bleu-violet (cf. Rigel constellation d'Orion $T \approx 10\,000K$).

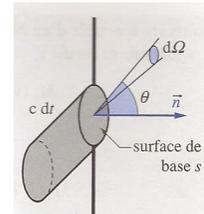
On cherche maintenant à connaître le lien entre la température d'un corps à l'ERT et le flux surfacique partant de ce corps

2.3 Flux total. Loi de Stefan-Boltzmann

La loi de Stefan, trouvé expérimentalement en 1879, caractérise les flux surfaciques partant par un corps à l'ERT. On cherche alors à sommer sur toutes les longueurs d'onde l'expression du flux surfacique. Il faut alors trouver le lien entre u_λ et $\varphi_{p,\lambda}$.

2.3.1 Lien entre u_λ et $\varphi_{p,\lambda}$ ([3] p.85)

On cherche la relation entre la densité volumique spectrale d'énergie et le flux surfacique spectral. Pour cela on détermine l'énergie reçue par un élément de paroi de l'enceinte d'aire s dans la bande de longueur d'onde $d\lambda$ pendant l'intervalle de temps dt . On la compare alors à l'énergie partante $dE = \varphi_{p,\lambda} d\lambda s dt$ (en J).



L'énergie incidente sur la paroi se propageant à la célérité c provient d'un cylindre de volume $c dt s \cos \theta$. Elle vaut alors :

$$u_\lambda d\lambda c dt s \cos \theta$$

Or il ne faut considérer dans un premier temps que la fraction rayonnée dans l'angle solide $d\Omega$. Ce rayonnement isotrope se repartit sur une sphère d'angle solide 4π .

La fraction d'énergie à prendre en compte est donc égale : $u_\lambda d\lambda c dt s \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi}$. Elle correspond à l'énergie incidente dans l'angle solide $d\Omega$.

Nous déduisons l'énergie rayonnée dE en intégrant dans toutes les directions du demi-espace extérieur à la paroi :

$$dE = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} u_\lambda d\lambda c dt s \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{c}{4} u_\lambda d\lambda$$

Par identification, on trouve alors que :

$$d\varphi_{p,\lambda} = \frac{c}{4} u_\lambda d\lambda$$

2.3.2 Flux hémisphérique total ([2] p.467)

On cherche alors le flux total $\varphi_0 = \varphi_i = \varphi_p$ (puisque le rayonnement est à l'ERT) :

$$\varphi_0 = \varphi_p = \int d\varphi_{p,\lambda} = \int_0^\infty \frac{c u_\lambda}{4} d\lambda$$

L'intégrale purement mathématique nous donne le résultat :

$$\varphi_0 = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4$$

avec σ la constante universelle non fondamentale de Stefan-Boltzmann égale à $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4$.

La loi de Stefan est capitale dans toutes les questions relatives au rayonnement thermique. Elle marque l'importance de la température qui intervient à la puissance 4.

Finalement, pour les flux surfaciques hémisphériques du rayonnement à l'ERT, on peut écrire :

$$\varphi_i = \varphi_p = \varphi_0 = \sigma T^4$$

Il est remarquable que le rayonnement thermique d'équilibre soit décrit par des fonctions **universelles** indépendantes de la nature des corps opaques présents, ne dépendant que de la température et s'exprimant à l'aide des constantes fondamentales : h, k_B et c . (Attention k_B n'est pas vraiment une constante fondamentale).

La nature spécifique des corps intervient, par contre, dans les expressions des flux émis φ_e et absorbé φ_a qui dépendent en général, non seulement de la température, mais aussi de la nature du corps. Nous allons considérer à cet égard un cas important : celui du **corps noir**.

3 Le corps noir

3.1 Définitions ([1] p.85 + [2] p.468)

Le corps noir est défini comme un absorbeur intégral sur la totalité du spectre : *tout rayonnement incident est absorbé quel que soit sa longueur d'onde et quelle que soit sa direction incidente*. Ainsi, par définition :

$$\varphi_i^{CN} = \varphi_a^{CN} \quad (\varphi_r = 0)$$

pour tout intervalle spectrale $[\lambda, \lambda + d\lambda]$.

C'est un **concept idéal**, les corps n'absorbent que pour certains domaines spectraux.

Un bon absorbeur a une large fenêtre d'absorption centrée sur le λ_{max} du rayonnement à absorber.

Exemple : le verre peut être considéré comme totalement absorbant pour le rayonnement thermique d'origine terrestre (propriété utilisée dans les serres).

Enfin la relation $\varphi_r = 0$ implique que $\varphi_p^{CN} = \varphi_e^{CN}$. Le flux partant d'un corps noir est totalement d'origine émissive : il n'y a pas de contribution due au rayonnement réfléchi ou diffusé.

Si le corps noir est à l'équilibre thermodynamique alors le rayonnement issu d'un corps noir est le rayonnement thermique décrit ci-dessus. C'est ce cas que l'on va étudier.

3.2 Propriétés du corps noir à l'ERT ([2] p.469)

Pour un corps noir à l'équilibre radiatif, on a : $\varphi_p^{CN} = \varphi_i^{CN} \stackrel{CN}{=} \varphi_a^{CN} = \varphi_e^{CN}$. On ne peut alors considérer qu'un seul flux surfacique.

Si de plus on est l'équilibre thermodynamique à la température T alors les flux obéissent à la loi de Planck et aux lois qui en découlent, en particulier :

$$\varphi_p^{CN} = \varphi_i^{CN} = \varphi_a^{CN} = \varphi_e^{CN} = \sigma T^4$$

Remarques :

1. Ces relations sont satisfaites à l'ERT pour un corps opaque **quelconque** seulement pour les flux **incidents** et **partant**, mais pas pour les flux émis ou absorbés sauf précisément pour le corps noir à l'ERT.
2. Les flux émis et absorbés font intervenir la nature particulière des corps concernés puisque ce sont les atomes qui sont à l'origine de l'émission et de l'absorption. En revanche le rayonnement émis par un corps noir ne dépend que de la température et en rien de sa nature. Pour cette raison on parle **du** corps noir, sous entendant par là que sa nature n'intervient pas.

3.3 Réalisation pratique ([1] p.85 + [2] p.472)

Intéressons-nous concrètement à la réalisation pratique d'un corps noir de manière à effectuer une étude détaillée de l'équilibre du rayonnement.



Enceinte noire, piège à rayonnement.

On construit une enceinte rigide ($W_{ext} = 0$), maintenue à une température donnée T et percée d'une très petite ouverture.

Tout rayonnement entrant est alors complètement absorbé. L'ouverture se comporte comme un corps noir, on a construit une **pastille** de corps noir.

Le rayonnement absorbé par les parois et réémis puis ré-absorbé par ces mêmes parois de manière à assurer l'équilibre.

Remarques :

1. Si on place un spectrographe au niveau de la petite ouverture, on obtiendrait un spectre identique à celui donné par la loi de Planck.
2. On peut négliger l'influence de la perturbation du rayonnement entrant et sortant de l'enceinte sur l'équilibre.

3. On peut considérer que la cavité est vide ou non, l'important ce qu'il n'y ait pas plusieurs éléments absorbants à différentes fréquences, car cela empêcherait l'équilibre thermodynamique de s'installer.

Transition : Ce type de modèle est très restrictif car le rayonnement ne sort quasiment pas de l'enceinte ce qui est embêtant pour une source de rayonnement comme le soleil. Comment peut-on alors généraliser l'étude précédente à des cavités ouvertes ?

3.4 Propriétés du corps noir à l'ETL ([2] p.470)

On considère en fait que seules les couches superficielles du corps sont à l'équilibre à la température T d'où le nom d'équilibre thermodynamique local. Cette hypothèse est moins restrictive que l'ERT.

Seules les couches superficielles sont responsables de l'émission (et donc du flux partant) : en effet le rayonnement émis par les couches inférieures (émis à des températures qui peuvent être différentes) est absorbé par les couches supérieures (hypothèse du corps noir).

On admet qu'à l'ETL le rayonnement émis (uniquement) vérifie les lois de Planck, Wien et Stefan.

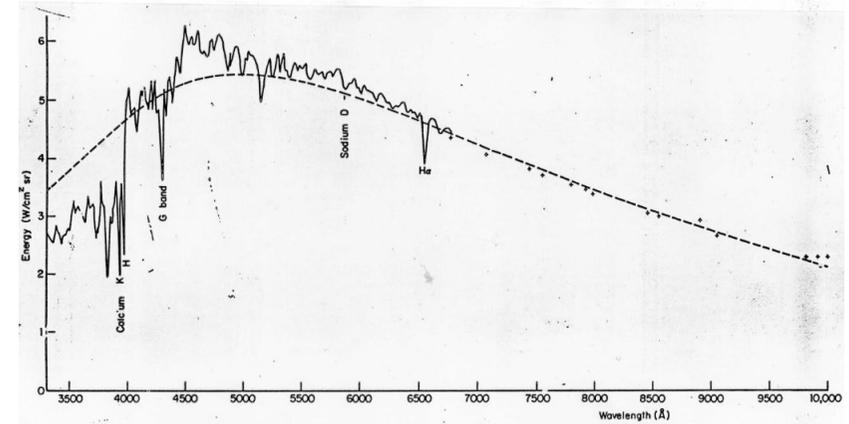
$$\varphi_e^{CN} = \sigma T^4$$

Par exemple pour le Soleil, l'étude du rayonnement qu'il émet montre qu'il est voisin de celui d'un corps noir de température de l'ordre de 6000°C .

La couche superficielle responsable de l'émission est appelée **photosphère** (épaisseur de l'ordre de 500 km sachant que $R_{\text{soleil}} \approx 700\,000\text{ km}$). Sa température d'équilibre local est voisine de cette valeur.

Quant aux rayonnements émis par les couches profondes du soleil (dont la température est beaucoup plus élevée, de l'ordre de 10^7 K) ils sont totalement absorbés par la photosphère.

On voit sur la figure dessus faisant apparaître les raies d'absorption dues aux éléments présents dans l'atmosphère solaire que le spectre observé se superpose relativement à celui du corps noir.



Dernière remarque que l'on peut faire sur le corps noir, c'est que d'après la loi de Kirchhoff qui stipule qu'un corps **émet** d'autant plus qu'il est meilleur absorbeur, le corps noir est alors l'émetteur maximal. On définit alors la notion de corps gris caractérisé par leur coefficient moyen d'émissivité ϵ tel que :

$$\varphi_e \leq \varphi_e^{CN} = \sigma T^4 \quad \text{ou} \quad \varphi_e = \epsilon \sigma T^4$$

avec $0 < \epsilon < 1$. O.d.g : $\epsilon_{\text{bois}} = 0.96$; $\epsilon_{\text{graphite}} = 0.94$ et $\epsilon_{\text{métaux}} \approx 0.25$

C'est la possibilité d'étendre la loi de Planck et les lois qui lui sont associées à des situations de non équilibre thermodynamique qui a fait tout l'intérêt du concept de corps noir.

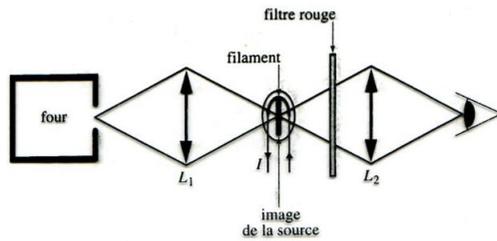
Transition : On va voir deux applications : une pratique et une théorique.

4 Applications

4.1 La pyrométrie à disparition de filament ([3] p.91)

On appelle **pyromètre** un appareil qui permet la mesure des températures élevées.

Dans le cas de pyromètre à disparition du filament, on superpose l'image de la source à étudier avec celle du filament incandescent d'une lampe étalon à l'aide de lentilles ; un filtre placé sur le faisceau permet de sélectionner un domaine de longueurs d'onde particulier (en général le rouge).



On règle alors l'intensité du courant qui traverse le filament de manière à ce qu'il ne se distingue plus du fond lumineux de l'image de la source : dans ces conditions, source et filament ont même flux surfaciques d'émission en lumière rouge.

On procède alors à un étalonnage au préalable du courant circulant dans le filament pour des corps dont la température est connue. Si on accepte l'hypothèse que les rayonnements des différents corps sont proches de celui du **corps noir** de même température alors on remonte directement à la température du corps recherchée.

Ces mesures sont réalisables dans le domaine 700°C - 3000°C avec une précision pouvant descendre jusqu'à quelques degrés.

4.2 L'effet de serre

4.2.1 Modèle sans atmosphère ([3] p.92)

On considère que la Terre (T) et le Soleil (S) se comporte comme des corps noirs sphériques à l'équilibre radiatif et thermodynamique de température respectif T_T et T_S . Cela signifie qu'on néglige l'albédo puisqu'aucun rayonnement n'est réfléchi. On cherche à calculer T_T dans le cadre de cette modélisation.

La puissance totale émise par le soleil s'écrit $\mathcal{P}_{tot,S} = \sigma T_S^4 4\pi R^2$.

Le rayonnement intercepté par la terre situé à une distance d est un disque de rayon r . Le rayonnement émis par le soleil se repartit sur une sphère qui a pour rayon d lorsqu'elle arrive sur Terre. La puissance reçue par la terre est alors égale à :

$$\mathcal{P}_{re\grave{c}ue,T} = \mathcal{P}_{tot,S} \cdot \text{fraction du ray. intercepté} = \sigma T_S^4 4\pi R^2 \cdot \frac{\pi r^2}{4\pi d^2} = 1.68 \cdot 10^{17} W$$

Si on calcule le flux réémis par la terre (hypothèse du corps noir) par unité de surface, on trouve que :

$$\varphi_{e,T} = \frac{\mathcal{P}_{re\grave{c}ue,T}}{4\pi r^2} = 330 W/m^2$$

☞ Le flux réellement incident sur Terre avec un capteur est de l'ordre de 4 fois le résultat précédent (1360 W/m²). En effet la Terre ne reçoit le flux solaire que sur un disque d'aire πr^2 , par contre on considère qu'elle réémet ce flux incident dans toutes les directions et donc sur une sphère de $4\pi r^2$, d'où le facteur 4. Les résultats concordent bien, il faut juste savoir ce que l'on calcule).

Comme on a supposé que la Terre était en équilibre radiatif et thermodynamique, on a $\varphi_{i,T} = \varphi_{e,T} = \sigma T_T^4$. D'où la température moyenne de la terre :

$$T_T = 275K = 2^\circ C$$

La valeur moyenne admise est de l'ordre de 15°C. Notre valeur calculée à l'aide du modèle très simpliste nous permet de retrouver le bon ordre de grandeur. Si on prend en compte l'albédo de la terre ($A_T = 0.30$), on trouve une valeur plus petite qui est 251 K.

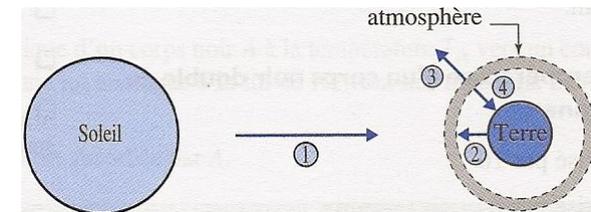
Le modèle omet un facteur essentiel que l'on va maintenant prendre en compte c'est le rôle de l'**atmosphère**.

4.2.2 Modèle avec atmosphère ([3] p.98)

Nous améliorons le modèle en prenant en compte l'atmosphère qui constitue un écran d'épaisseur faible par rapport au rayon terrestre. Le modèle simplifié utilise les hypothèses suivantes :

- l'atmosphère rayonne sensiblement la fraction $\beta = 90\%$ de l'énergie que rayonnerait un corps noir de même température moyenne T_a ;
- l'atmosphère absorbe une fraction $\alpha = 50\%$ et la terre une fraction $1 - \alpha$ du rayonnement solaire ;
- la terre absorbe la totalité du rayonnement de l'atmosphère vers la Terre et l'atmosphère absorbe une fraction β du rayonnement terrestre. Soit T'_T la température d'équilibre thermique de la Terre.

On représente le modèle sur un schéma



On effectue des bilans thermiques séparément pour l'atmosphère et pour la Terre (que nous supposons chacune en équilibre thermodynamique).

• Atmosphère

$$\underbrace{\alpha \sigma T_S^4 (4\pi R^2) \frac{\pi r^2}{4\pi d^2}}_{(1) \text{ absorption du rayonnement solaire}} + \underbrace{\beta (\sigma T_T^4) 4\pi r^2}_{(2) \text{ absorption du rayonnement terrestre}} = \underbrace{2\beta \sigma T_a^4 4\pi r^2}_{(3) + (4) \text{ puissance rayonnée par l'atmosphère}}$$

• Terre

$$\underbrace{(1 - \alpha) \sigma T_S^4 (4\pi R^2) \frac{\pi r^2}{4\pi d^2}}_{(1) \text{ absorption du rayonnement solaire}} + \underbrace{\beta \sigma T_a^4 4\pi r^2}_{(4) \text{ puissance rayonnée par l'atmosphère vers la Terre}} = \underbrace{\sigma T_T^4 4\pi r^2}_{(2) \text{ puissance rayonnée par la Terre}}$$

En utilisant les résultats précédents et en isolant T_T' , on trouve que :

$$T_T' = \left(\frac{2 - \alpha}{2 - \beta} \right)^{\frac{1}{4}} T_T = 297 \text{ K} = 24 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Le modèle reste simplifié (corps noir, albédo négligé,...) mais montre que la présence de l'atmosphère augmente la température de la surface de la Terre. On voit que l'atmosphère est plus transparente au rayonnement solaire qu'au rayonnement terrestre ici considéré. C'est ce que l'on appelle **l'effet de serre** (le verre est transparent au visible mais opaque à l'IR).

Conclusion

→ On a vu qu'un rayonnement à l'équilibre radiatif et thermodynamique avec un corps à la température T avait une densité spectrale d'énergie donnée par la loi de Planck **indépendante** des propriétés des corps. Cette loi permet d'expliquer les nombreuses observations quotidiennes (fer chauffé au rouge, couleur des étoiles,...). Mais seulement les rayonnements incident et partant suivent cette loi.

→ On a alors créé un concept : le corps noir qui est un absorbeur parfait de rayonnement pour toute longueur d'onde. Avec ce concept, on a accès au rayonnement idéal **émis** par un corps et ce rayonnement idéal se rapproche de celui de nombreux corps observés dans la nature (soleil, filament de tungstène, CMB,...). Il est également universel, c'est-à-dire indépendant des propriétés du corps autre que sa température.

→ Finalement on a appliqué cette étude à la mesure de température élevée et au calcul de la température d'équilibre terrestre.

→ En guise d'ouverture, on a vu dans cette leçon que la puissance rayonnée par le soleil était maximale dans la fenêtre spectrale du visible, on peut se demander pourquoi les bédouins s'habillent-ils en noir dans le désert alors qu'un matériau noir est un mauvais réflecteur de lumière visible? On répondra à cette question dans la prochaine leçon ou on fera des bilans thermiques en prenant en compte tous les phénomènes de transferts thermiques.

Questions pour faire réfléchir

→ Pourquoi le Soleil nous apparaît-il comme un disque, alors que c'est en fait une boule lumineuse ?

→ Connaissez-vous d'autres utilisations des corps noirs ou des corps absorbants, notamment dans l'industrie ?

→ Quelle grandeur, en dehors de la densité spectrale d'énergie, permet de caractériser le rayonnement du corps noir ?

→ Que savez-vous des propriétés des photons ?

C'est un boson de spin 1, vecteur de l'interaction électromagnétique. Leur potentiel chimique est nul.

(A noter qu'il existe un tutorat sur cette leçon disponible à l'adresse suivante : http://www.crpp-bordeaux.cnrs.fr/~divoux/L20_Tutorat_Divoux.pdf)

Remarques et questions du correcteur

→ Pourquoi les bédouins s'habillent-ils en noir dans le désert alors que le noir est un absorbeur totale dans le domaine du visible ?

Ce qui importe pour ne pas avoir chaud au Soleil, c'est l'aération entre les vêtements et la peau. C'est donc le phénomène de convection qui domine sur celui de rayonnement. La convection permet d'évacuer la chaleur émise par la transpiration plus rapidement que le rayonnement n'en apporte. Par contre si les vêtements sont collés contre la peau, il vaut mieux s'habiller en blanc. Pour des expériences montrant les comparaisons de transfert thermique, cf. http://www.dailymotion.com/video/xyw3my_em62-vaut-il-mieux-s-habiller-en-blanc-ou-en-noir-avec

→ Qu'est ce que le CMB ?

Le Cosmic Microwave Background (CMB) ou Fond Diffus Cosmologique ou rayonnement du corps noir) 3K est la plus belle preuve du modèle standard de la cosmologie. Lorsque l'Univers était plus contracté et donc plus chaud, la température était assez grande pour empêcher les électrons de se lier aux noyaux. Les photons ne se propageaient pas librement et interagissaient sans cesse avec la matière ionisée. A cause de l'expansion de l'Univers, l'Univers se refroidit et a atteint une température permettant la recombinaison des électrons et des noyaux, laissant les photons se propager librement. Ces photons se propagent librement depuis cette date (300 000 après le Big-Bang) et représente un cas parfait de corps noir : Système isolé (Univers), à l'équilibre thermodynamique. La preuve expérimentale de ce rayonnement a été découverte par Penzias et Wilson en 1964. Ce rayonnement qui emplit tout l'espace est très important car il nous permet d'avoir des informations, en étudiant ces anisotropies, sur la nucléosynthèse primordiale, à savoir la formation des premiers noyaux dans l'Univers et la disparité entre matière et antimatière.

→ Quelle est la différence entre équilibre thermique et thermodynamique ?

L'équilibre thermique correspond juste à une égalité des températures entre les systèmes considérés en équilibre. L'équilibre thermodynamique est un équilibre à la fois thermique, mécanique et chimique. Un rayonnement à l'équilibre thermodynamique est un rayonnement de corps noir.

☞ Contrairement à ce que l'on peut lire dans la littérature, tout système à l'équilibre thermodynamique émet un rayonnement de corps noir. cf Correction.

➔ **k_B est-elle une constante fondamentale ?**

Non k_B n'est pas rangée au rang des constantes fondamentales. Elle est liée à une énergie par $E = k_B T$ et elle permet juste de préciser l'échelle de température et pas de la fixer comme le fait h la constante de Planck.

➔ **Qu'est ce que la profondeur optique ?**

La profondeur optique d'un matériau correspond au libre parcours moyen des photons avant d'être absorbé. Pour un rayonnement incident I_0 sur un milieu alors l'intensité I du rayonnement à une certaine profondeur s'écrit : $I = I_0 \exp -\tau$ où τ est la profondeur optique. Plus elle est grande plus le milieu est absorbant.

➔ **Pourquoi le Soleil peut-il être considéré comme un corps noir ?**

Comme pour la cavité, la fraction de rayonnement émis est très largement inférieure au rayonnement à l'intérieur de la cavité.

Remarques issues du correcteur :

« ☞ Sur votre leçon plus particulièrement, le plan que vous avez choisi se défend tout à fait : on dira qu'il présente le point de vue "expérimental" : par une série d'expériences on s'approche peu à peu du concept de corps noir, caractéristique de la situation idéale de l'équilibre thermodynamique.

1) des corps en eq thermique semble émettre un spectre universel indépendamment de leur nature

2) historiquement cela a conduit Planck à sa fonction

3) on retrouve cette fonction en faisant l'analyse statistique d'un ensemble de photons (bosons) en équilibre avec un thermostat (la matière avec laquelle ils interagissent). On ne le fait pas dans cette leçon mais on dit qu'on la fait lors que cours de phystat. La nature de la matière n'a pas d'importance.

4) Cela amène à définir le concept de corps noir qui a les propriétés suivantes...

5) le fait qu'on observe des corps noirs montre que la perte de photons (ceux qu'on observe) n'a pas un effet dramatique sur les conditions physiques d'équilibre stricte nécessaire à la situation thermodyn.

Donc le corps noir idéal est aussi une bonne approximation de situations non-idéales. D'ailleurs les astronomes s'en servent allègrement. Exemples.

6) d'ailleurs on peut généraliser cela avec l'introduction de l'émissivité. Exemples.

Le plan ci-dessus est plutôt inductif et ressemble à ce que vous avez choisi. Le plan que je propose est plutôt déductif. »

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ **Agrégation 2008 - Note : 08/20 :**

Questions et commentaires du jury : qu'est-ce que la loi de Wien ? la loi de Rayleigh-Jeans ?

LP 17 — Phénomènes de transport.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 01/04/2014 par *Florent Leveque* et corrigée par *M. Rieutord*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Exemple de phénomène de transport. Illustration(s)*. La leçon s'intitulait en 2012 : *Phénomènes de/transport. Illustration(s)*.

Rapports du Jury

- ☞ (2013) – “Le candidat développera sa leçon à partir d'un exemple de son choix.”
- ☞ (2010) – “Le jury a regretté de ne pas avoir vu d'illustration expérimentale, même simple, des transferts thermiques. Les expériences de mise en évidence de la diffusion de particules doivent être réalisées dans des conditions où le phénomène de convection n'est pas dominant. à propos du nouveau titre : il s'agit de dégager les caractéristiques fondamentales des phénomènes de transport et de les illustrer dans différents domaines de la physique.”
- ☞ (2009) – “Le jury a regretté de ne pas avoir vu d'illustration expérimentale, même simple, des transferts thermiques. Les expériences de mise en évidence de la diffusion de particules doivent être réalisées dans des conditions où le phénomène de convection n'est pas dominant ¹.”
- ☞ (2008, 2007) – “L'aspect microscopique doit être abordé.”
- ☞ (2006) – “ Un modèle microscopique doit être présenté.”
- ☞ (2001) – “Les propriétés générales d'un phénomène de transport par diffusion doivent être dégagées. Pour illustrer l'irréversibilité du phénomène, un calcul d'entropie créée peut être effectué dans un cas simple, notamment pour la conduction thermique.”
- ☞ (2000) – “L'irréversibilité du phénomène doit être clairement dégagée : le calcul de l'entropie créée peut être effectué dans un cas simple, notamment pour la conduction thermique.”
- ☞ (1999) – “Prendre le temps de discuter qualitativement l'évolution caractéristique d'un phénomène diffusif permet et d'évaluer les bilans d'entropie sur un exemple simple. Une discussion physique sur le mode opératoire doit permettre de préciser si C_p ou C_v intervient dans l'équation de diffusion.”
- ☞ (1997) – “Les expériences de diffusion de particules dans un fluide libre ne sont pas convaincantes à cause de la convection. On peut utiliser un milieu poreux (papier buvard) ou un gel polymérique et citer les applications en chromatographie.”
- ☞ (1996) – “ À propos de la diffusion de la matière (loi de Fick), il faut distinguer nettement transport convectif et transport diffusif.”

Bibliographie

- [1] Oliver et Gié, *Thermodynamique 1^{ère} et 2^{ème} année*. Tec & Doc, 1996.
- [2] Olivier S., *Physique PC-PC**. Tec & Doc, 2009.
- [3] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.

Plan

- 1 Les phénomènes de transport thermique ([2] p.353 + [1] p.375)
 - 1.1 La convection
 - 1.2 Le rayonnement thermique
 - 1.3 La diffusion (conduction) thermique

1. Le titre de la leçon était alors : *étude d'un phénomène de transport : conduction thermique ou diffusion de particules. Applications*.

1.4 Bilan ([2] p.354)

2 État de déséquilibre du système

- 2.1 Origine des phénomènes de transport ([1] p.189 Chap.4)
- 2.2 Notion d'équilibre thermodynamique local ([2] p.355)
- 2.3 Bilan d'énergie local ([3] p.403)

3 Loi de Fourier et équation de la chaleur ([1] p.382 + [2] p.357)

- 3.1 Loi de Fourier
- 3.2 Équation de la chaleur
- 3.3 Comparaison des phénomènes de transports ([2] p.364)

4 Applications

- 4.1 Résistance thermique ([3] p.412)
- 4.2 Double vitrage ([2] p.367)

1 Les phénomènes de transport thermique ([2] p.353 + [1] p.375)

On ne s'intéresse dans un premier temps qu'aux phénomènes de transports thermique mais on donnera les analogies avec d'autres phénomènes de transports dans une deuxième partie.

On prend l'exemple du feu de bois.

1.1 La convection

Dans l'exemple du feu de bois, l'air chaud plus léger que l'air froid s'élève. On a de la convection naturelle ou forcée (advection).

► **Expérience** : Deux paires d'erlenmeyers. Chaque paire contient un erlen avec de l'eau chaude (+ colorant) et un avec de l'eau froide. Dans un cas on place l'erlen chaud au-dessus et dans l'autre cas l'erlen chaud en-dessous. On voit qu'on a un mouvement de la chaleur dans le cas où l'erlen chaud est en bas : **convection**.

Transport macroscopique de matière.

1.2 Le rayonnement thermique

Dans l'exemple du feu de bois, les particules de suie (combustion incomplète), riche en carbone, sous l'effet de la haute température rayonne dans le visible, d'où la couleur des flammes.

► **Expérience** : Thermocouple conjugué avec une lampe quartz-iode par une lentille. Si on ne brasse pas l'air et que l'on place une distance assez grande entre la lampe et le capteur, on peut alors négliger les phénomènes de conduction et de diffusion thermique

(que l'on connaît déjà). On voit alors que lorsqu'on allume la lampe la température sur le capteur augmente, bien qu'il n'y ait pas de transfert thermique par conduction et diffusion.

1.3 La diffusion (conduction) thermique

Dans l'exemple du feu de bois, un tisonnier (immobile macroscopiquement) posé dans la cheminée devient chaud au bout d'un temps relativement long.

► **Expérience** : Conductisque. On verra une interprétation plus quantitative au cours de la leçon.

On parle du modèle microscopique (cf. banque d'image) : aucun déplac. macro, mais au niveau microscopique il y a de l'agitation thermique qui se transmet de proche en proche.

1.4 Bilan ([2] p.354)

Bilan entre les différents phénomènes de transports thermiques pour différents milieux supports. (vide, solide, fluide).

Transition : Dans la suite on étudie que la diffusion thermique mais on verra que les résultats trouvés sont en fait généraux pour d'autres phénomènes de transport.

2 État de déséquilibre du système

2.1 Origine des phénomènes de transport ([1] p.189 Chap.4)

Inhomogénéité d'une grandeur dans le système.

Création d'un flux pour homogénéiser la grandeur : processus irréversible (création d'entropie)

Exemple deux systèmes à T_1 et T_2 en contact thermique (sans travail) alors $dS = dS_1 + dS_2 = \delta S_c = dU_2 \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \geq 0$.

Si $T_1 > T_2$ alors $dU_2 > 0$ et le transfert s'effectue de 1 vers 2 (zone chaude vers zone froide).

2.2 Notion d'équilibre thermodynamique local ([2] p.355)

La thermodynamique ne traite que les situations d'équilibre : ici le système n'est pas à l'équilibre.

On pose la notion d'équilibre thermodynamique local : chaque particule mésoscopique de volume $d\tau$ est à chaque instant infiniment près d'un état d'équi. thd, on peut alors définir la température $T(M,t)$, l'énergie interne $U(M,t)$. À la différence de la thermo classique, ces grandeurs dépendent de la position d'où l'appellation **local**.

Pour avoir cet état d'équilibre thermodynamique local, il faut que le libre parcours moyen des particules soit petit devant la longueur caractéristique de diffusion, car sinon il n'y a pas de thermalisation. Ogd $lpm \approx 10^{-7}$ m.

2.3 Bilan d'énergie local ([3] p.403)

On néglige la convection ($E_c = 0$ dans le premier principe) et le rayonnement.

Vecteur densité de flux de chaleur : $\delta^2 Q = \mathbf{j}_Q \cdot d\mathbf{S} dt = -div \mathbf{j}_Q d\tau dt$

Bilan local d'énergie (en absence de convection) : $\frac{\partial u}{\partial t} + div \mathbf{j}_Q = \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + div \mathbf{j}_Q = \mathcal{P}_{vol}$.

☞ *Puissance dissipé est propor. à la surface d'où les ailettes sur les ventilateurs de processeur.*

3 Loi de Fourier et équation de la chaleur ([1] p.382 + [2] p.357)

3.1 Loi de Fourier

Équation phénoménologique, linéaire, instantanée et de modération.

Valable pour des faibles gradient de température et si λ indépendant de la position et de la température.

Odg de λ .

3.2 Équation de la chaleur

On pose l'équation de la chaleur. Irréversibilité : équation non invariante par renversement du temps.

On définit une échelle de temps et de longueur caractéristiques permettant de représenter le phénomène : $L = \sqrt{D t}$.

3.3 Comparaison des phénomènes de transports ([2] p.364)

Inhomogénéité d'une grandeur intensive : température, particules, potentiel électrique.

Transport d'une grandeur extensive : énergie interne, nombre de particules, charge électrique.

Loi phénoménologique traduisant le retour à l'équilibre : Fourier, Fick, Ohm.

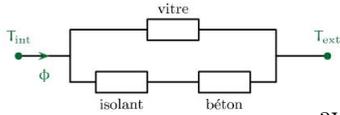
4 Applications

4.1 Résistance thermique ([3] p.412)

Analogie avec la loi d'Ohm : $T_1 - T_2 = R_{th} \phi$. Avec $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$ dépendant de e (épaisseur du milieu), de λ (conductivité du milieu) et de la surface S .

On applique ces définitions au cas d'un bâtiment constitué d'une vitre, d'un isolant et de béton.

On peut trouver une expression du flux tel que :



$$\phi = \frac{T_e - T_i}{R_{th}}$$

avec R_{th} les résistances thermiques de chaque couches

4.2 Double vitrage ([2] p.367)

$$R_{th} = R_{vitre} \left(\frac{2}{3} + \frac{\lambda_{vitre}}{3\lambda_{vide}} \right)$$

Plus la résistance est grande plus le flux thermique est petit et donc moins les pertes sont importantes.

Questions pour faire réfléchir

- ➔ Donner un ordre de grandeur de coefficient de diffusion de particules dans un gaz, dans un liquide, dans un solide. En pratique comment mesure-t-on un coefficient de diffusion ? Donner un exemple concret.
- ➔ Donner un ordre de grandeur de la conductivité thermique d'un gaz, d'un matériau type bois ou plastique et enfin d'un métal. Remarque sur le dernier exemple ?
- ➔ Avez-vous déjà ouvert l'ouvrage de M. Lagues et A. Lesne, intitulé *Invariances d'échelle : Des changements d'états à la turbulence*. paru aux éditions Belin, collection échelles ? (Au sujet de la diffusion de particules).
- ➔ Qu'est-ce que l'équation de Langevin ?
- ➔ Comment évolue le coefficient de diffusion de particules avec la température ?
- ➔ Quelles sont les conditions d'application de la loi de Fick ?
- ➔ Quelle est la différence entre un mouvement diffusif, un mouvement sous-diffusif et un mouvement sur-diffusif ?
- ➔ Qu'appelle-t-on "problème de sortie de Kramers" ? En connaissez vous des applications ?
- ➔ Définir la notion de résistance thermique. Justifier alors, par un ordre de grandeur simple, l'intérêt des doubles vitrages.

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ Agrégation 2010 - Note : 14/20 :

Questions et commentaires du jury : quelles sont les conditions pour pouvoir définir un équilibre thermodynamique local ? Quelle condition doit vérifier le lpm pour que l'approximation linéaire soit valable dans votre modèle microscopique ? (*J'avais présenté le modèle de Drude-Sommerfeld du Aschcroft (p.7) pour la conduction thermique des métaux*) à quoi est due la thermalisation des électrons après chaque choc dans les solides ? (*Là j'ai "dévoilé mes parties génitales" pour leur parler d'interactions électrons-phonons*) Est-ce que le concept de résistance thermique est généralisable à tous les phénomènes de

transport, quelle est son analogue dans les écoulements visqueux ?

Commentaires personnels : sur cette leçon, je vous conseille la conduction thermique, muni d'un bon modèle microscopique. Une super application en régime variable est présentée dans l'ouvrage intitulé "La physique par la pratique", sur les dinosaures sphériques.

LP 18 — Flux conductifs, convectifs, radiatifs, bilans thermiques.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 14/04/2014 par *Aurélié Condomines* et corrigée par *M. Rieutord*. La leçon créée pour la session 2013 s'intitulait : *Flux conductifs, convectifs, radiatifs. Exemples de bilan thermique en régime stationnaire.* .

Rapports du Jury

☞ (2013) – “Nouvelle leçon en 2013.”

Bibliographie

- [1] Faroux, Renault, *Thermodynamique*. j'intègre DUNOD, 1997.
- [2] Oliver et Gié, *Thermodynamique 1^{ère} et 2^{ème} année*. Tec & Doc, 1996.
- [3] Brébec, *Thermodynamique 2^{ème} année*. HPrépa, 2004.
- [4] Taine, *Transferts thermiques*. Dunod, 2008.
- [5] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.

Plan

1 Transferts thermiques et flux ([1] p.355 + [2] p.376))

- 1.1 Flux conductif
- 1.2 Flux radiatif
- 1.3 Flux convectif

2 Compétition entre transfert

- 2.1 Convection vs. Conduction ([2] p.402 + [4] p.67)
- 2.2 Conduction vs. Radiation

3 Bilans thermiques

- 3.1 Bilan en régime stationnaire ([1] p.378)
- 3.2 Résistance thermique ([1] p.378 + [5] p.412)
- 3.3 Bilan radiatif de la terre
 - 3.3.1 Modèle sans atmosphère ([3] p.92)
 - 3.3.2 Modèle avec atmosphère ([3] p.98)

Introduction ([1] p.354)

On va chercher à étudier les 3 modes de transfert thermique et surtout leur comparaison.

On a déjà étudié la diffusion (conduction) et le rayonnement thermique donc on rappellera juste les choses importantes.

On va illustrer expérimentalement les transferts thermiques.

Définition d'un transfert thermique. Définition du flux thermique : $\phi_e = \iint_S \mathbf{j}_Q \cdot \mathbf{n} dS$ avec ϕ_e en W.

On va considérer que les systèmes sont dans un état d'équilibre thermodynamique local (on peut définir une température localement).

1 Transferts thermiques et flux ([1] p.355 + [2] p.376))

1.1 Flux conductif

► **Expérience :** Conductiscope.

Rappeler la loi de Fourier et l'équation de la chaleur.

Associer un temps et une grandeur caractéristique.

1.2 Flux radiatif

Rappeler la loi de Stefan-Boltzmann

1.3 Flux convectif

► **Expérience :** Deux paires d'erlenmeyers. Chaque paire contient un erlen avec de l'eau chaude (+ colorant) et un avec de l'eau froide. Dans un cas on place l'erlen chaud au-dessus et dans l'autre cas l'erlen chaud en-dessous. On voit qu'on a un mouvement de la chaleur dans le cas où l'erlen chaud est en bas : **convection**.

2 Compétition entre transfert

2.1 Convection vs. Conduction ([2] p.402 + [4] p.67)

Flux conducto-convectif.

On exprime les temps caractéristiques des phénomènes de convection et conducto-convectif.

On fait apparaître le nombre de Biot : $B_i \approx \frac{\tau_{cond}}{\tau_{cc}}$.

On peut revenir sur l'expérience avec les erlens et montrer que la conduction est largement dominé par la convection.

2.2 Conduction vs. Radiation

► **Expérience :** Lampe et thermocouple conjugué par une lentille. On peut négliger la conduction et la convection : le rayonnement l'emporte.

On montre que le temps de propagation du rayonnement est instantané à notre échelle.

Ordre de grandeur très simplifié du flux de puissance pour la lampe. On considère la lampe à une température $T_1 \approx 3000K$: $\varphi_{rad} = \sigma T_1^4 \approx 4.6MW/m^2$; on considère l'air proche de la lampe à une température $T_2 = 350K$ et vers le capteur $T_3 = 300K$:

$$\varphi_{diff} = j_Q = -\lambda \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} \approx 0.02 \cdot \frac{350 - 300}{2} = 0.5W/m^2.$$

On a

$$\tau_{diff} \gg \tau_{ray} \quad \text{et} \quad \varphi_{diff} \ll \varphi_{rad}$$

3 Bilans thermiques

3.1 Bilan en régime stationnaire ([1] p.378)

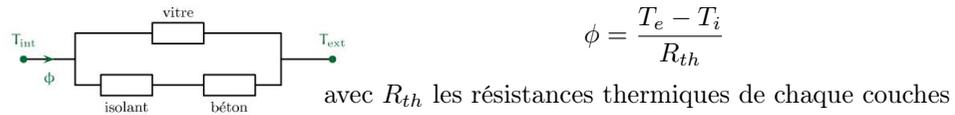
On effectue le bilan thermique d'un système en régime permanent.

3.2 Résistance thermique ([1] p.378 + [5] p.412)

On définit les résistances thermiques pour tous les transferts thermiques linéarisés.

On applique ces définitions au cas d'un bâtiment constitué d'une vitre, d'un isolant et de béton.

Dans tous les cas, si les régimes sont linéaires, on peut trouver une expression du flux tel que :



$$\phi = \frac{T_e - T_i}{R_{th}}$$

3.3 Bilan radiatif de la terre

3.3.1 Modèle sans atmosphère ([3] p.92)

3.3.2 Modèle avec atmosphère ([3] p.98)

Quatrième partie

Leçons sur le Magnétisme et l'Induction

LP 19 — Conversion de puissance électromécanique.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 22/04/2014 par *Anaëlle Contensaux* et corrigée par *J. Dedieu*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Conversion de puissance électromécanique. Exemples et applications*.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012) – “Dans ces deux leçons, le plus grand soin dans la définition des orientations et des conventions de signe s'impose. Les applications doivent occuper une place significative dans la présentation. Pour la leçon 23, il n'est pas nécessaire de traiter en détail les deux types d'induction. Pour la leçon 22, ce ne sont pas les machines de technologie complexe qui illustrent le mieux les idées en jeu. Les notions de base sur l'induction sont supposées connues.”

☞ (2011) – “Dans cette leçon, le plus grand soin dans la définition des orientations et des conventions de signe s'impose. Les applications doivent occuper une place significative dans la présentation. Il n'est pas nécessaire de traiter en détail les deux types d'induction.”

☞ (2010, 2009) – “Dans ces deux leçons, le plus grand soin dans la définition des orientations et des conventions de signe s'impose. Les applications doivent occuper une place significative dans la présentation.”

☞ (2008) – “Cette leçon nécessite une bonne connaissance des machines présentées et de leurs applications.”

☞ (2007) – “Cette leçon nécessite une bonne connaissance des machines présentées.”

☞ (2006) – “Les principes élémentaires de l'induction ne sont pas correctement utilisés dans cette leçon qui nécessite un minimum de connaissance de la technologie des machines.”

☞ (2005) – “Il ne faut pas confondre force de Lorentz sur un porteur de charge et force de Laplace sur un conducteur. Toutes les grandeurs introduites doivent être algébriques ou vectorielles, ce qui nécessite de préciser les orientations et les bases de projection. Il ne faut pas limiter les applications au seul haut-parleur.”

☞ (2004) – “La conversion de puissance a donné lieu à des exposés purement descriptifs. Nous attendons *une attitude de physicien*, c'est-à-dire une justification des modèles simples proposés pour les machines à courant continu, par exemple avec les conditions d'algébrisation des grandeurs électriques et mécaniques introduites.”

☞ (2001) – “L'algébrisation des grandeurs doit être très soignée, il faut réserver du temps à l'étude des moteurs¹.”

☞ (2000) – “Il est anormal que certains candidats ne réservent que quelques minutes en fin de leçon aux moteurs, alors que ceux-ci figurent explicitement dans le titre de la leçon.”

☞ (1999) – “Les candidats doivent pouvoir donner le principe des moteurs électriques des différents types (à champ tournant, unipolaires, universels) ainsi que celui des générateurs électriques à courant continu ou alternatif. Il faut être particulièrement attentif aux signes dans cette leçon et ne pas omettre de mentionner des ordres de grandeur.”

☞ (1998) – “Il est essentiel de montrer l'importance des termes de couplage entre équation *mécanique* et équation *électrique*. Dans le bilan d'énergie global, il faut faire ressortir le rôle du champ magnétique et expliquer l'origine du bilan auxiliaire $P_{\text{Laplace}} + P_{\text{Iem}} = 0$. Il est bon de se souvenir que l'objectif principal d'un haut-parleur n'est pas de produire de la chaleur et de rappeler au cours de la leçon, l'origine physique de la *force de frottement* qui apparaît dans l'équation mécanique, et qui est liée au rayonnement d'ondes acoustiques.”

1. Le titre de la leçon était alors *Exemples de couplage électromécanique : haut-parleur électrodynamique, moteurs... Bilans énergétiques. (PC, PSI ou Ier CU)*.

☞ (1997) – “Dans les bilans énergétiques, deux approches sont possibles : raisonner sur le circuit mobile seulement ou sur le système constitué du circuit et des sources de B. Dans le premier cas, un fait important est que le travail des forces de Laplace extérieures subies par le circuit mobile augmenté du travail de la force électromotrice d'induction dans ce circuit et dû à son déplacement seulement, est nul ; cela provient de la nullité du travail des forces de Lorentz au niveau microscopique. Une illustration expérimentale des exemples traités, haut-parleur ou moteur, s'impose.”

Bibliographie

- [1] Brenders, *Électrotechnique, Conversion de puissance PSI*. Bréal, 2004.
- [2] Brébec, *Électronique PSI*. Hachette, 2004.
- [3] Vigouroux, *Actualisation des connaissances sur les moteurs électriques*. BUP n°846, Juillet 2002.
- [4] Garing, *Les 1001 questions de la physique en prépa, PSI-PSI**. Ellipses, 2006.

Plan

1 La conversion de puissance électromécanique

- 1.1 Forces de Lorentz, force de Laplace, bilans de puissance ([1] p.122)
- 1.2 Conversion Électrique → Mécanique : rails de Laplace ([1] p.124)
- 1.3 Conversion Mécanique → Électrique : Fém aux bornes d'un circuit ([1] p.125)

2 La machine à courant continu ([1] p.127 + [2] p.291)

- 2.1 Structure et principe de fonctionnement
- 2.2 Équations en régime permanent
- 2.3 Modes de fonctionnement d'une machine ([1] p.131)
 - 2.3.1 Fonctionnement moteur ou générateur
 - 2.3.2 Point de fonctionnement ([1] p.133 + [2] p.296)
- 2.4 Bilan des puissances ([1] p.135 + [2] p.292)

3 Machines à champ tournant ([2] p.310)

- 3.1 Production d'un champ tournant ([4] p.498)
- 3.2 Machine synchrone
- 3.3 Machine asynchrone

Introduction

On sait que des particules chargées subissent des forces en présence de champ magnétique ou électrique. On peut donc se servir de ce déplacement de charges pour créer de la puissance mécanique (fonctionnement **moteur** d'une machine) ou inversement on peut déplacer des charges de manière à créer des champs électriques (fonctionnement **génératrice** d'une machine).

Conversion électrique - mécanique :

- haut-parleur : utilisé pour écouter de la musique qui convertit l'énergie électrique reçue en énergie de vibration mécanique de la membrane qui ensuite exerce une succession de compression de l'air, responsable du son,
- système de ventilation d'une voiture (la batterie fournit une énergie électrique qui est convertit en un mouvement de rotation du moteur à pales, permettant de faire circuler un courant d'air)
- mixeur dans la cuisine (énergie électrique ? énergie de rotation du hacheur)
- sèche cheveux dans la salle de bain (énergie électrique ? énergie de rotation des pales, pareil que ventilation)

Conversion mécanique - électrique :

- dynamo d'un vélo : qq Watt (l'énergie mécanique de rotation des roues est convertie en énergie électrique pour alimenter une ampoule de signalisation) historiquement ancienne : 1870
- éolienne : 800 W à 800kW
- centrale électrique : qq GW

Pour tous les ordres de grandeur sur la puissance des différentes machines on consultera le BUP [3].

1 La conversion de puissance électromécanique

1.1 Forces de Lorentz, force de Laplace, bilans de puissance ([1] p.122)

Les notions de base de l'induction sont supposés connues, on passe donc rapidement sur les rappels d'électromagnétisme.

On fait un bilan de puissance, on a : $P_e + P_m = 0$ ce qui traduit la conversion d'énergie électrique en énergie mécanique (P_m) et réciproquement (P_e).

1.2 Conversion Électrique → Mécanique : rails de Laplace ([1] p.124)

► **Expérience [1] p.124** : On montre que la source de tension continu crée un énergie électrique qui est transformée en énergie mécanique observable par le déplacement du conducteur.

On écrit le modèle électrique équivalent du système en prenant soin aux signes. On prendra la convention d'avoir la fém E positive et dans le même sens que U et ici dans le sens inverse de i puisque la machine fonctionne en moteur.

1.3 Conversion Mécanique → Électrique : Fém aux bornes d'un circuit ([1] p.125)

► **Expérience [1] p.125** : Soit on déplace le conducteur précédent mécaniquement et on remplace l'alimentation par un galvanomètre soit on déplace une bobine dans un aimant et on relève le courant circulant dans celle-ci.

On écrit le modèle électrique équivalent en prenant soin aux signes (cf. [1] p.126). Ici la fém est dans le même sens que le courant puisque la machine fonctionne en générateur.

On calcul un ordre de grandeur des puissances mécaniques développée ici : $P_m \approx P_e = e \cdot i \approx qq W$.

Transition : On va décrire le fonctionnement d'une machine à courant continu réel.

2 La machine à courant continu ([1] p.127 + [2] p.291)

Premier TGV Paris-Lyon fonctionnait avec une MCC. Mais maintenant elles ne sont plus utilisés dans les gros appareils.

2.1 Structure et principe de fonctionnement

Stator : inducteur \vec{B} .

Rotor :

- l'induit. Attention au bobinage de l'induit (cf. [2] p.291)
- le collecteur : Le moteur à courant continu, est une machine, dont l'enroulement de l'induit, est connecté à un réseau à courant continu, par l'intermédiaire, d'un convertisseur mécanique de fréquence. Pour simplifier la construction du convertisseur de fréquence, la machine doit être réalisée suivant la configuration inverse. L'enroulement d'excitation alimenté en courant continu, est porté par le stator et l'enroulement d'induit qui est lors de la rotation, le siège d'une force électromotrice induite alternative, est logé au rotor. Ceci permet de réaliser le convertisseur de fréquence, sous la forme d'un collecteur tournant aux lames duquel sont connectées les extrémités des sections de l'enroulement d'induit, et d'un système de balais fixes en contact avec les lames du collecteur.
- les balais : pour faire une liaison entre l'enroulement de l'induit et l'alimentation du moteur, on se sert des balais. Ces derniers sont disposés de manière à frotter sur le collecteur en mouvement de rotation. Ils sont logés dans des portes balais.

On détaille le principe de mis en mouvement du rotor par force de Laplace.

2.2 Équations en régime permanent

On écrit la relation entre le couple électromagnétique et le courant circulant dans l'induit.

Puis la relation entre la fém d'induction et la vitesse de rotation.

On voit alors que l'on peut commander la machine, à savoir à la vitesse de rotation par la tension imposée à l'induit.

2.3 Modes de fonctionnement d'une machine ([1] p.131)

2.3.1 Fonctionnement moteur ou générateur

On montre les quatre quadrants de fonctionnement de la MCC.
On étudie les équations avec une charge.

2.3.2 Point de fonctionnement ([1] p.133 + [2] p.296)

On détermine le point de fonctionnement d'une MCC en traçant la courbe $C = f(\Omega)$.

2.4 Bilan des puissances ([1] p.135 + [2] p.292)

On fait un arbre de puissance et on décrit les pertes.
On feuillette le matériau pour limiter les pertes par courants de Foucault.

☞ *Si on veut faire fonctionner la machine en génératrice et qu'elle fournisse un courant continu, il faut habilement utiliser un redresseur mécanique. C'est un ensemble de bagues (autant de bagues qu'il n'y a de pôles magnétiques) qui s'alternent en même temps que la variation de flux devant les pôles ce qui fait que le courant circule toujours dans le même sens.*

☞ *On peut faire ce que l'on appelle un **moteur universel** (par exemple sèche-cheveux MCC alimenté en alternatif). C'est-à-dire un moteur pouvant être alimenté en continu ou en alternatif. On met l'inducteur en série avec l'induit (bobine). L'inducteur fait varier le sens du champ étant parcourue par un courant alternatif. L'induit (bobine tournante) est parcouru par le même courant et donc on a une variation de i dans le temps. La force de Laplace $d\vec{F} = i_{\text{induit}} d\vec{l} \times \vec{B}_{\text{inducteur}}$ ne change pas de sens car i_{induit} et $\vec{B}_{\text{inducteur}}$ change de sens en même temps.*

3 Machines à champ tournant ([2] p.310)

3.1 Production d'un champ tournant ([4] p.498)

On place 4 bobines à 90° les unes des autres dans lesquels on fait circuler un courant déphasé de $\pi/2$.

3.2 Machine synchrone

Une machine synchrone est conçue sur l'interaction entre un champ tournant et un aimant (norme constante).

Elle est essentiellement utilisée en générateur.

3.3 Machine asynchrone

Le stator est identique à une machine synchrone.

Une machine asynchrone est conçue sur l'interaction entre un champ magnétique tournant et un circuit fermé sans source.

On la met plus facilement en oeuvre et elle est plus robuste.

Conclusion

Image de la banque d'images : *Propriétés générales des moteurs électriques*

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

→ **Agrégation 2010 - Note : 12/20 :**

Questions et commentaires du jury : ils m'ont posé de nombreuses questions sur les conventions générateur/récepteur et le sens du courant. Est-ce que l'on peut créer une MCC avec une moitié où existe un champ magnétique radial et une moitié avec un champ nul? Dessiner les lignes de champs dans la MCC. La force de Lorentz est-elle valable dans un référentiel non galiléen? Différence moteur synchrone/asynchrone? Applications?

→ **Agrégation 2011 - Note : 12/20 :**

Questions et commentaires du jury : question sur les conventions d'orientation (est-ce que le signe de la fém ou du courant dépend de l'orientation? Est-ce que ça change quelques chose à la physique? Comment calculer la fém autrement qu'à partir du champ électromoteur? (Loi de Faraday) Que représente le point de fonctionnement du moteur? Pourquoi on utilise des matériaux ferromagnétiques? (Canalisation des lignes de champs) Laquelle de leurs caractéristiques leur donne cette propriété? (grande perméabilité magnétique)

Commentaires personnels : j'étais vraiment catastrophée quand j'ai tiré cette leçon. Comme je n'étais pas à l'aise sur le sujet, j'ai pris beaucoup de temps en préparation pour refaire les calculs pour montrer la conversion elec/méca et retrouver comment fonctionne le moteur à courant continu. Comme j'ai vu que j'avais peu de choses à dire j'ai pris le parti de laisser tomber les machines tournantes, de parler plus lentement que d'habitude, de faire les schémas au tableau plutôt que sur transparent. Mais du coup c'était trop lent et je n'ai pas eu le temps de finir (je me suis arrêté au point de fonctionnement du moteur sans traiter le rendement...), mais peut-être qu'au final le fait de prendre le temps de poser la convention et au tableau a compensé le reste.

LP 20 — Induction électromagnétique.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 20/11/2013 par *Maxime Bordoux* et corrigée par *B. Lamine*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Induction électromagnétique. Applications*.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012, 2011, 2010) – “Dans ces deux leçons, le plus grand soin dans la définition des orientations et des conventions de signe s'impose. Les applications doivent occuper une place significative dans la présentation. Pour la leçon n°23, il n'est pas nécessaire de traiter en détail les deux types d'induction. Pour la leçon n°22, ce ne sont pas les machines de technologie complexe qui illustrent le mieux les idées en jeu. Les notions de base sur l'induction sont supposées connues.”

☞ (2009) – “Dans cette leçon, le plus grand soin dans la définition des orientations et des conventions de signe s'impose. Les applications doivent occuper une place significative dans la présentation. Ce ne sont pas les machines de technologie complexe qui illustrent le mieux la leçon¹. L'actuelle leçon "*Induction électromagnétique : circuit mobile dans un champ magnétique permanent, circuit fixe dans un champ variable. Applications*" s'intitule désormais "*Induction électromagnétique. Applications*", laissant ainsi plus de liberté au candidat pour la présentation et l'analyse des phénomènes d'induction. Compte tenu du temps imparti, des choix restent à faire : le jury tiendra compte de leur pertinence...”

☞ (2008, 2007) – “Il faut poser des conventions précises et s'y tenir tout au long de la leçon. En outre, il est impératif de faire le lien entre f.e.m. et courants induits.”

☞ (2006) – “Cette leçon est consacrée à un phénomène particulièrement important, tant du point de vue de la physique fondamentale que de celui des applications technologiques. Le sujet ne doit donc pas être traité de manière trop formelle et un temps suffisant doit être consacré aux applications.”

☞ (2005) – “Il faut orienter les circuits filiformes et ne pas s'y limiter : les applications mettant en jeu des courants volumiques induits sont particulièrement appréciées.”

☞ (2001) – “Il n'est pas possible de traiter cette leçon de manière satisfaisante sans préciser la notion de force électromotrice. L'algèbrisation doit être très soignée, y compris lors de l'étude des applications.”

☞ (1999) – “Cette leçon reste difficile pour les candidats. Préciser les notations algébriques. Introduire des illustrations expérimentales. Les moteurs doivent au moins être mentionnés comme application, ainsi que les transformateurs.”

☞ (1998) – “Il convient de faire apparaître explicitement la notion de champ électromoteur, de préciser son lien avec la force électromotrice et de justifier comment cette dernière quantité s'insère naturellement dans les lois habituelles de l'électrocinétique.”

☞ (1997) – “Il est important de définir la notion de force électromotrice avant de l'utiliser. Par ailleurs, il ne faut pas confondre force électromotrice et différence de potentiel.”

Bibliographie

- [1] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.
- [2] Faroux, *Electromagnétisme 2*. Dunod, 1998
- [3] Perez, *Physique MPSI-PCSI-PTSI*. Pearson, 2013.

1. Le titre de la leçon était alors le suivant : *Induction électromagnétique : circuit mobile dans un champ magnétique permanent, circuit fixe dans un champ variable. Applications*.

- [4] Garing, *Les 1001 questions de la physique en prépa Physique, PC-PC**. Ellipses, 2006.
- [5] Ray, *La physique par les objets quotidiens*. Belin, 2012.

Plan

1 Le phénomène d'induction

- 1.1 Loi de Faraday ([3] p.591 + [2] p.324)
- 1.2 Loi de modération de Lenz et convention de signe ([3] p.594 + [1] p.533)

2 Expression de la force électromotrice

- 2.1 Définition ([2] p.324)
- 2.2 Cas de Lorentz
 - 2.2.1 Conducteur mobile et fem de Lorentz ([1] p.542)
 - 2.2.2 Applications au rails de Laplace : principe des générateurs ([1] p.542 + [3] p.613)
- 2.3 Cas de Neumann

3 Auto-induction et induction mutuelle

- 3.1 Inductance et auto-inductance ([1] p.534 + [2] p.337)
- 3.2 Inductance mutuelle ([1] p.534 + [2] p.335)
- 3.3 Aspects énergétiques ([1] p.536)
- 3.4 Application aux transformateurs ([3] p.608 + [2] p.340)

4 Application des courants de Foucault

- 4.1 Explication ([1] p.548)
- 4.2 Retour sur l'expérience ([3] p.594)
- 4.3 Autres applications : plaques à induction ([4] + [5] p.74)

Introduction

➤ **Expérience** : Expérience d'Oersted : boussole à côté d'un fil parcouru par un courant. La boussole change d'orientation. Ceci est la base de la naissance d'électromagnétisme.

Rappel des lois de Maxwell en régime stationnaire. Dans cette leçon on ne se place plus en régime stationnaire mais l'on va se placer dans l'ARQS.

1 Le phénomène d'induction

1.1 Loi de Faraday ([3] p.591 + [2] p.324)

➤ **Expérience** : On met en évidence la loi de Faraday en déplaçant un aimant rapidement ou lentement dans une bobine. Puis on l'orientant perpendiculairement à la bobine. On met en évidence de cette façon l'induction est lié à une variation (\pm lent ou \pm rapide) et à un produit scalaire (orientation parallèle ou perpendiculaire).

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}$$

Analogie circuit électrique. Si il est fermé on a un courant induit, si il est ouvert on a juste la fem.

Plutôt que de dire que c'est la "variation du flux qui met en mouvement les électrons", dire que si les électrons se mettent en mouvement, c'est qu'il existe un champ électrique ressenti par les électrons. Ce champ est appelé le champ électromoteur, et est relié au flux via Faraday.

Il faut définir les approximations sous-jacentes à la loi de Faraday et préciser la convention de la fem e avec la convention permettant de calculer le flux.

Il faut rappeler que le flux de B est conservatif, donc ça ne dépend pas de la surface. Dire que ça a déjà été vu dans un cours précédent sur la magnétostatique, et que ça reste vrai en régime variable.

Transition : On interprète le signe $-$ de la loi de Faraday par la loi de Lenz.

1.2 Loi de modulation de Lenz et convention de signe ([3] p.594 + [1] p.533)

► **Expérience [3] p.594 :** On fait l'expérience de la bille aimantée qui tombe dans un tube en cuivre et qui est ralentie car un champ magnétique s'opposant à la cause qui lui a donné naissance est créée.

On définit l'orientation d'un circuit par l'orientation arbitraire choisi pour le courant qui nous permet de définir l'orientation du vecteur surface par la règle de la main droite enroulée.

On définit l'effet modérateur de la loi de Lenz.

2 Expression de la force électromotrice

2.1 Définition ([2] p.324)

On définit la fem comme le travail des forces motrices ramené à une unité de charge :

$$e = \frac{W}{q} = \frac{1}{q} \oint_{\mathcal{C}} \vec{F}_m \cdot d\vec{l}$$

2.2 Cas de Lorentz

2.2.1 Conducteur mobile et fem de Lorentz ([1] p.542)

On applique la force de Lorentz sur un morceau de conducteur mobile dans un champ magnétique statique.

On en déduit le champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v}_e(M, t) \times \vec{B}(M)$ et la fem $e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$.

Il faut mentionner l'effet sur les protons, tu ne considère que l'effet sur les électrons.

Mentionner à ce niveau-là que le champ v vectoriel B est le champ électrique vu dans le référentiel en mouvement (cad celui vu par les électrons dans le référentiel en mouvement).

2.2.2 Applications aux rails de Laplace : principe des générateurs ([1] p.542 + [3] p.613)

► **Expérience :** On montre l'expérience des rails de Laplace et on calcule les puissances échangées.

Conversion **électromécanique** !

2.3 Cas de Neumann

Circuit filiforme fixe et indéformable dans champ B variable. On écrit le champ électromoteur $\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et la fem $e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$.

Démontrer Maxwell-Faraday et dire que c'est cela la formule **générale** de l'induction. Noter la différence avec le cas statique (ARQS).

Transition : un courant variable qui parcourt un circuit crée alors un champ magnétique qui a son tour peut créer un courant induit dans le circuit : c'est l'auto-induction. On va voir ces caractéristiques dans le cas de l'induction dite de Neumann.

3 Auto-induction et induction mutuelle

3.1 Inductance et auto-inductance ([1] p.534 + [2] p.337)

On définit le flux propre.

On fait le lien entre le flux et le courant i (loi de Biot et Savart).

On définit le coefficient d'auto-induction L toujours positif.

3.2 Inductance mutuelle ([1] p.534 + [2] p.335)

On définit le coefficient d'inductance mutuelle pour deux bobines proches. On ne démontre pas l'égalité des coefficients d'inductance mutuelle qui provient de grandeur purement géométrique relative aux deux circuits donc : $M_{21} = M_{12} = M$.

3.3 Aspects énergétiques ([1] p.536)

En faisant attention aux conventions de signes on montre l'énergie magnétique accumulée en fonction du couplage et donc du coefficient d'inductance mutuelle entre deux circuits.

3.4 Application aux transformateurs ([3] p.608 + [2] p.340)

On applique ces résultats au cas des transformateurs qui permettent d'abaisser ou d'élever une tension alternatif, utile pour le transport de l'électricité.

Transition : Si on touche le matériau ferro on sent qu'il a chauffé, on a donc dissipé de l'énergie sous forme thermique. C'est dû en partie aux courants de Foucault qui sont ici gênant mais c'est pas toujours le cas.

4 Application des courants de Foucault

4.1 Explication ([1] p.548)

On décrit les courants se créant dans un conducteur du à un champ magnétique variable.

4.2 Retour sur l'expérience ([3] p.594)

On revient sur l'expérience de la bille aimantée qui tombe dans le tube de cuivre.

4.3 Autres applications : plaques à induction ([4] + [5] p.74)

Une bobine est placée sous la plaque. On place un **conducteur** sur la plaque et on fait circuler un courant alternatif dans la bobine. On a création de courant induit dit courant de Foucault dans le conducteur (casserole). Par effet Joule ces courants de Foucault **volumiques** transmettent de l'énergie thermique au contenant.

$$\mathcal{P}_{\text{foucault}} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E}^2 \propto \gamma \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)^2 = \gamma \omega^2 B^2, \text{ donc proportionnelle à la fréquence carré.}$$

Il faut faire circuler un courant à hautes fréquences dans les plaques à induction (20 kHz).

Effet gênant dans les microprocesseurs dont on veut qu'ils calculent à la plus grande fréquence possible. Plus cette fréquence est élevée, plus le microprocesseur peut exécuter à un rythme élevé les instructions de base des programmes. Si la fréquence est trop grande, la chaleur à dissipée est trop grande (malgré pate thermique + ventilateur). On préfère utiliser des doubles coeurs.

Conclusion

Écrire les autres équations de Maxwell en conclusion et dire que maintenant le seul bout qui manque est celui du terme de déplacement dans Maxwell-Ampère, qui donnera naissance au phénomène de propagation (des ondes EM).

Questions pour faire réfléchir

➔ Quelles sont les conditions d'utilisation de la loi de Faraday ?

ARQS

➔ Quel lien faites-vous entre induction et relativité restreinte ?

➔ Rappeler la dépendance des courants de Foucault avec la fréquence du champ. Conséquences ?

➔ A-t-on besoin d'être en circuit fermé pour voir apparaître un phénomène d'induction ?

Non la fém est alors une différence de potentiel en circuit ouvert. Par contre les courants induits ne circulent que si le circuit est fermé.

➔ Donner le principe de fonctionnement d'un galvanomètre.

On branche en série le galvanomètre qui contient un aimant qui va être dévié en fonction de

l'intensité du circuit et donc du champ magnétique créée par ce courant.

➔ Pourquoi le transport de l'électricité sous haute tension limite-t-il les pertes par effet Joule ?

Les pertes par effet Joule s'écrivent en fonction de la grandeur physique relevant, à savoir l'intensité. Donc on a $\mathcal{P}_{\text{joule}} = R I^2$. Or $\mathcal{P}_{\text{fournie}} = U I$. Donc si on veut $\mathcal{P}_{\text{fournie}}$ égale en réduisant le courant pour réduire $\mathcal{P}_{\text{joule}}$, il faut augmenter U .

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ Agrégation 2008 - Note : 08/20 :

Questions et commentaires du jury : intérêt du noyau de magnétique dans le transformateur ? Le jury attendait comme réponse : augmenter l'intensité du champ magnétique pour un même courant I circulant dans l'inducteur. J'ai montré l'égalité des coefficients de mutuelle induction entre 2 circuits, ils m'ont demandé le nom de ce théorème.

Commentaires personnels : j'ai oublié de commencer par traiter la loi d'Ohm pour mettre en évidence l'équivalence entre intégrale du champ électromoteur et différence de potentiel et ils ont bien insisté sur ce point. La notion de force électromotrice ne peut vraiment pas être considérée comme un prérequis (Cf les rapports des années 1997, 1998, 2001 et 2008.). En manipulation j'ai demandé un transformateur démontable, une mise en évidence simple de l'induction avec 2 bobines et un aimant permanent, et enfin la chute d'aimants dans un tube pour les courants de Foucault. La préparation s'est bien passée et je n'ai pas manqué de temps. En revanche l'exposé en lui-même ne s'est pas très bien passé : je n'ai vraiment pas su expliquer ce sujet avec concision et clarté.

➔ Agrégation 2008 - Note : 04/20 :

Questions et commentaires du jury : questions sur les conventions de signe et d'orientation (Cf les rapports des années 1999, 2001, 2007, 2008... sans commentaire!.)

Commentaires du jury après la proclamation des résultats : manque de rigueur, calculs faux, bonnes illustrations expérimentales. Mauvaise leçon.

➔ Agrégation 2008 - Note : 10/20 :

Commentaires personnels : on m'a reproché de ne pas avoir parlé de conversion électromécanique (Cf le rapport de 1999.).

LP 21 — Résonance magnétique nucléaire.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 12/03/2014 par *Mathilde Pollet* et corrigée par *R. Carles*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Résonance magnétique. Exemples et applications*.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012, 2011) – “Le jury souhaiterait que le terme de résonance soit dûment justifié sans oublier une discussion du facteur de qualité.”

☞ (2010) – “Il ne faut pas occulter les aspects pratiques : production des champs magnétiques, détection de la résonance.”

☞ (2009) – “Dans la leçon “Résonance Magnétique. Exemples et applications”, le traitement pourra être classique ou quantique.”

Bibliographie

- [1] Décorps, *Imagerie de résonance magnétique*. CNRS Editions, 2011.
- [2] Cagnac, *Physique Atomique Tome 1*. Dunod, 2^{ème} édition.
- [3] Pérez, *Quantique*. de Boeck, 2013.
- [4] Feynman, *Électromagnétisme 2*. Dunod, 2013.
- [5] Pietryk, *Panorama de la physique*. Belin, 2007.

Plan

1 Principe de la résonance magnétique nucléaire

- 1.1 Découverte de la RMN ([1] p.2)
- 1.2 Influence d'un champ magnétique stationnaire B_0 ([1] p.5 + [2] p.241 + [3] p.407-413)
- 1.3 Ajout d'un champ tournant B_1 ([2] p.257 + [4] p.293)
- 1.4 Phénomènes de relaxation et facteur de qualité ([1] p.15 + [2] p.242 + 260)

2 Aspects expérimentaux

- 2.1 Production d'un champ tournant ([2] p.265)
- 2.2 Détection du phénomène : Méthode de Rabi ([4] p.294 p.301)
- 2.3 Détection radioélectrique ([2] p.266)

3 Applications

- 3.1 L'Imagerie par Résonance Magnétique ([5] p.108)
- 3.2 La RMN en chimie

Introduction ([5] p.108)

Vie courante : Passer une IRM, spectre RMN en chimie.

1 Principe de la résonance magnétique nucléaire

1.1 Découverte de la RMN ([1] p.2)

Origine de la RMN : propriétés magnétiques des noyaux.

Les noyaux possèdent des spins (grandeur quantique) auxquels on associe un moment cinétique de spin. On peut lui faire correspondre un moment magnétique (expérience de Stern et Gerlach 1922). On appelle ce moment cinétique du noyau, le **moment magnétique nucléaire**.

Tous les noyaux ne peuvent pas faire de RMN ; il faut que leur moment magnétique nucléaire ne soit pas nul ($I=0$ si A et Z sont pairs).

Beaucoup de Prix Nobel donc sujet très important en physique.

Transition : dans un examen de RMN on a la présence d'un champ magnétique B_0 important, quel est son intérêt ?

1.2 Influence d'un champ magnétique stationnaire B_0 ([1] p.5 + [2] p.241 + [3] p.407-413)

On cherche la réaction d'un moment magnétique d'un proton soumis à un champ B_0 uniforme.

Colinéarité entre moment cinétique de spin L et moment magnétique μ : $\vec{\mu} = \gamma \vec{L}$ avec γ le coefficient gyromagnétique (qui fait intervenir le facteur de Landé pour les protons).

En utilisant le TMC, et en remplaçant L on arrive à

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \vec{\omega}_0 \times \vec{\mu} \quad \text{avec} \quad \vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0$$

On a un mouvement de précession du moment magnétique autour du champ B_0 .

Application numérique : pour $B_0 = 1T$ on a $f_0 = \omega_0/2\pi \approx 43 \text{ MHz}$ (radiofréquence) c'est la fréquence de Larmor.

Énergie mise en jeu : $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$. Deux états d'énergie parallèle ou anti-parallèle. $\Delta E = E_{1/2} - E_{-1/2} = \hbar\omega_0 \approx 10^{-26} \text{ J} \sim 10^{-7} \text{ eV}$, donc très petit par rapport à l'énergie thermique à température ambiante 26 meV. Donc les niveaux sont pratiquement également peuplés (le niveau plus stable est un peu plus peuplé).

D'un point de vue quantique, on a un système à 2 niveaux. Si on envoie un rayonnement d'une certaine fréquence (énergie), on a des oscillations entre ces deux niveaux que l'on peut observer. Mais l'énergie thermique "cache" ces transitions.

Cependant si on étudie un milieu dense, on définit l'aimantation macroscopique M qui correspond à N fois le moment magnétique microscopique d'un proton (avec N très grand correspondant au nombre de proton dans le milieu). Ces effets peuvent alors être observable.

Le nombre de transition est proportionnel à la population du niveau de départ. Comme les niveaux sont également peuplés, le nombre de transitions du haut vers le bas et du bas vers le haut se compensent et donc l'effet est très peu observable et la RMN serait une spectroscopie **très peu sensible si on utilisait un seul champ !**

Transition : le magnétisme nucléaire est 10^6 fois plus faible que celui électronique ([3] p.408 et [4] p.301). On va donc utiliser la résonance pour observer le magnétisme nucléaire.

1.3 Ajout d'un champ tournant B_1 ([2] p.257 + [4] p.293)

On applique à l'échantillon étudié, un très faible champ B_1 tournant à la fréquence ω autour de B_0 .

En se plaçant dans le référentiel tournant, on arrive à :

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'}$$

$$= (\vec{\omega}_1 - \delta\vec{\omega}) \times \vec{M}$$

avec $\delta\vec{\omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_0$.

On étudie les cas en fonction des valeurs de ω et ω_0 . On a résonance lorsque $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0$ alors l'aimantation change radicalement de direction.

☞ D'un point de vue quantique l'orientation du vecteur aimantation M_z ne peut prendre que deux valeurs quantifiées (système à deux niveaux), alors qu'en mécanique classique elle peut prendre des valeurs continues. La vraie description du phénomène étant quantique, le saut effectuée par le vecteur aimantation est très brusque.

Transition : dans les phénomènes de résonance, on définit un facteur de qualité propre à l'acuité de la résonance et qui est lié à l'amortissement du système : ce sont les phénomènes de relaxation.

1.4 Phénomènes de relaxation et facteur de qualité ([1] p.15 + [2] p.242 + 260)

Lorsqu'on écarte le vecteur aimantation de sa position d'équilibre, il va tendre à reprendre cette position au bout d'un certain temps.

On a un processus de relaxation aléatoire donc on peut écrire que $M(t) \propto \exp -t/\tau$ avec τ le temps de relaxation.

On a des ordres totalement différents en fonction du matériau étudié (solide qq ms, eau pure qq s, gaz hélium 3 plusieurs heures).

Savoir qu'il existe deux temps de relaxation : un pour la composante longitudinale de M_z selon B_0 et un pour les composantes transverses M_x et M_y .

Les équations de Bloch nous permettent de prendre en compte ces processus de relaxation.

On définit un **facteur de qualité**, tel que : $Q = \frac{\omega_0}{\delta\omega}$. Donc plus on veut une résonance aiguë (meilleure sera la résolution) plus il faut que ω_0 soit grand donc B_0 grand.

La largeur de la courbe de résonance est proportionnelle au temps de relaxation. Donc plus les temps de relaxation sont longs, donc moins les moments magnétiques sont perturbés et plus les mesures seront précises.

2 Aspects expérimentaux

2.1 Production d'un champ tournant ([2] p.265)

On fait parcourir un courant alternatif dans une bobine dont l'axe de la bobine est perpendiculaire au champ B_0 . Le champ créé peut être décomposé en deux composantes.

Transition : on s'intéresse à la détection du phénomène.

2.2 Détection du phénomène : Méthode de Rabi ([4] p.294 p.301)

On fait parcourir des atomes neutres à travers 3 aimants. Le premier, identique à l'exp. de Stern et Gerlach, permet de séparer les atomes ayant des composantes up et down de spin.

Le deuxième possède un champ statique plus un champ oscillant. Dans un premier temps il ne perturbe pas la trajectoire des atomes qui continuent en ligne droite.

Le troisième est l'inverse du premier, il inverse les sens de séparation des spins up et down.

Les atomes répondant à certaines trajectoires sélectionnées par des fentes arrivent finalement dans un détecteur.

Si la fréquence du champ oscillant est bien choisie, on observera une diminution d'atomes arrivant sur le détecteur puisque le champ oscillant permet de changer la direction du spin et alors à la traversée du troisième aimant les particules subiront des trajectoires différentes qui ne leur permettront plus de passer à travers la dernière fente.

On remonte de cette manière à la valeur du facteur de Landé g en observant la diminution du courant du détecteur pour une certaine fréquence du champ oscillant.

2.3 Détection radioélectrique ([2] p.266)

Le moment magnétique tournant crée un flux magnétique qui peut être converti en fém à l'intérieur d'une bobine. On place cette bobine dans le plan perpendiculaire au champ B_0 et orienté de manière perpendiculaire à la bobine créant le champ tournant. De cette manière le champ tournant ne vient pas perturber la détection dans la deuxième bobine.

Cette méthode de détection est toutefois plus utilisée pour faire de la détection paramagnétique **électronique** et non nucléaire mais elle permet de comprendre le principe de détection.

3 Applications

3.1 L'Imagerie par Résonance Magnétique ([5] p.108)

On utilise un champ B_0 non uniforme selon la direction x dans un premier temps. Si on place un échantillon contenant des protons dans ce champ magnétique alors la résonance des moments magnétiques des protons selon x ne s'effectuera que lorsque le champ magnétique B_0 correspondra à la valeur $B_0 = \omega/\gamma = \omega_0/\gamma$ pour une valeur du champ tournant ω fixé. L'intensité de la résonance permet alors de connaître la quantité de proton dans l'échantillon.

En faisant varier ω lentement, on construit petit à petit le profil de résonance selon x . On fait de même dans les directions y et z et on a une image 3D.

3.2 La RMN en chimie

Principe de l'utilisation de la RMN en chimie.

RMN du proton ou de l'oxygène.

En fonction de l'environnement du proton, la résonance s'effectue à une certaine fréquence du champ tournant (radiofréquence). Si on balaye en fréquence l'échantillon, en fonction de l'intensité des pics et de la valeur de la fréquence de résonance, on peut en déduire l'environnement chimique du proton.

La présence d'un cortège électronique accentue ou diminue la fréquence de résonance : c'est le phénomène de **déblindage**.

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

→ Agrégation 2010 - Note : 08/20 :

→ Agrégation 2010 - Note : 14/20 :

Questions et commentaires du jury : comment pourrait-on retrouver le rapport gyromagnétique (au moins en ordre de grandeur) du proton que j'avais fourni ? Qu'est-ce qui qualifie une résonance, outre la fréquence de résonance ? Et ça permet de faire justement de la RMN de façon précise ? (*bande passante, facteur de qualité*) Et ici, facteur de qualité élevée ou non ? Justifier (*temps de relaxation "élevés", donc grand facteur de qualité*). Comment on fait le champ B tournant ? (*2 bobines perpendiculaires*) Et en fait, un seul B suffit pour la RMN. Expliquer. Comment on détecte la résonance ? (*induction dans une bobine réceptrice*). Pourquoi un pic en RMN est multiple (plusieurs pics très rapprochés) ? Combien de pics ? ça sert à quoi en RMN d'avoir des forts B ? Est-ce que la formule de la précession peut s'expliquer simplement à l'aide d'une formule bien connue de dérivation de vecteur ? (*dérivation en changeant de repère, le vecteur qui précède est alors fixe dans le repère tournant*). La RMN se voit en chimie en PCSI, comment on l'explique alors simplement à ces élèves ? (*modèle à 2 niveaux d'énergie*).

Cinquième partie

Leçons sur l'Électricité dans l'ARQS et l'Électronique

LP 22 — Rétroaction et oscillations.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 25/09/2013 par *Anaëlle Contensaux* et corrigée par *H. Leymarie*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Rétroaction et oscillations. Exemples en physique*.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012, 2011) – “Le jury n’attend pas une présentation générale et abstraite de la notion de système bouclé.”

☞ (2012, 2011) – “Il estime indispensable de s’appuyer sur au moins un exemple concret et détaillé avec soin ”

☞ (2010, 2009) – “L’étude est clarifiée si elle s’appuie dès le départ sur un exemple concret. Les notions de système linéaire et de fonction de transfert doivent être précisément définies.”

☞ (2008, 2007) – “Il y a souvent confusion entre système bouclé et contre-réaction. La stabilité des systèmes bouclés est mal comprise.”

☞ (2007, 2006) – “Le bouclage ne se limite pas uniquement à une fonction d’asservissement. Le lien entre les réponses temporelle et fréquentielle est un aspect important.”

☞ (2005) – “Cette leçon doit être préparée avec soin avant le concours. L’intérêt du bouclage ne doit pas apparaître uniquement comme une fonction d’asservissement assurant la stabilité d’un système. Notamment, un oscillateur auto entretenu constitue un exemple de système électronique bouclé.”

☞ (2003) – “Cette leçon ne doit pas se limiter à la manipulation (même si elle est menée avec virtuosité par un expert en théorie du signal) des transformées de Laplace. Le jury souhaite voir un exposé de niveau raisonnable mettant en évidence les effets du bouclage ainsi que l’existence de problèmes de stabilité. Cette leçon doit comporter des illustrations expérimentales. Le titre de cette leçon est modifié pour la session 2004 du concours. Il s’agit de laisser davantage de liberté dans le choix des applications.”

☞ (2000) – “Ces leçons sont souvent présentées de façon beaucoup trop formelle¹ ”

☞ (1999) – “On évitera les développements par trop formels et on cherchera à illustrer la leçon par des exemples.”

☞ (1998) – “Les aspects formels de la leçon doivent rapidement céder le pas, au cours de l’exposé, à des exemples concrets. Les candidats doivent faire l’effort d’explicitier sur ceux-ci ce à quoi correspondent les signaux d’entrée et de sortie, le signal de rétroaction, le signal différentiel. Il est insuffisant de se cantonner à la présentation de montages amplificateurs à amplificateurs opérationnels. Il faut en particulier dégager les chgts qualitatifs que peut introduire le bouclage, notamment l’apparition d’oscillations ou la stabilisation d’une chaîne directe instable.”

Bibliographie

[1] Granjon, *Automatique*. Dunod, 2010.

[2] Précis, *Électronique PSI*. Bréal, 2005.

[3] Pérez, *Électronique - Fondements et applications*. Dunod, 2012

[4] Duffait, *Expériences d’électronique*. Bréal, 1999.

[5] More, *Transmission de signaux*. Tec & Doc, 1999.

1. Le titre de la leçon était alors le suivant : *Systèmes bouclés. Transmittance. Stabilité. Application aux asservissements*.

Plan

1 Les systèmes bouclés

1.1 Définitions et intérêts ([1] p.90 + [2] p.194)

1.2 Systèmes linéaires et fonction de transfert ([1] p.92 et [2] p.199)

1.3 Le problème de la stabilité ([1] p.93) et des performances

2 Propriétés de la rétroaction négative : l’AO non inverseur ([2] p.207 et [4] p.88))

2.1 Présentation ([2] p.207) et fonction de transfert

2.2 Gain et bande passante

2.3 Stabilité ([2] p.205)

2.4 Précision ([1] p.128)

2.5 Rapidité ([1] p.131 + [2] p.209)

2.6 Sensibilité ([2] p.202)

3 Oscillations. Cas d’une rétroaction positive

3.1 Définitions des oscillations ([3] p.460)

3.2 Modélisation avec schéma-bloc ([2] p.237)

3.3 Exemple de rétroaction positive : l’oscillateur à pont de Wien ([2] p.242)

3.3.1 Schéma et caractéristiques

3.3.2 Importance du facteur de qualité ([5] p.27)

Introduction

On étudie les systèmes bouclés. On va en étudier deux sortes.

Les systèmes possédant une rétroaction négative (ou contre réaction) et qui sont stables. Ce sont des systèmes de régulation (asservissement, ex : position, vitesse, température,...).

Les systèmes possédant une rétroaction positive (ou réaction) et qui sont instables. L’instabilité de ces systèmes est recherché pour créer des oscillateurs (pont de Wien pour tester un ampli, quartz pour montre,...).

On va étudier les caractéristiques de tel système : stabilité, rapidité, précision. On verra que ces caractéristiques ne sont pas toujours indépendantes (ex : produit gain-bande passante est constant).

1 Les systèmes bouclés

On prend un exemple concret de système bouclé, à savoir ici un système d’asservissement (ou de régulation) donc contre réactionné (cas particulier des systèmes bouclés) mais largement utilisé dans la vie courant (climatiseur, radiateur, régulateur de vitesse,...)

1.1 Définitions et intérêts ([1] p.90 + [2] p.194)

Inconvénients de la commande en boucle ouverte : radiateur chauffant non bouclé.

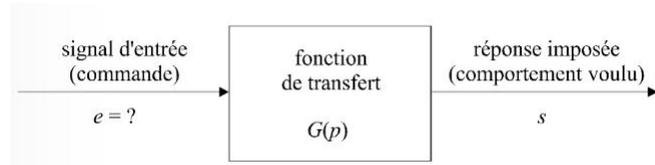


Fig. 22.1: Problématique générale de la commande des systèmes.

Si on connaît la température initial de la pièce 10°C et que l'on veut chauffer jusqu'à atteindre 20°C (**température de consigne**), on peut connaître la puissance que le radiateur doit délivrer pour arriver à cette température de la pièce et donc chauffer pendant un temps t . Par contre on ne peut pas prévoir le passage d'un nuage (ou d'autres problèmes) et la chute de la température de la pièce.

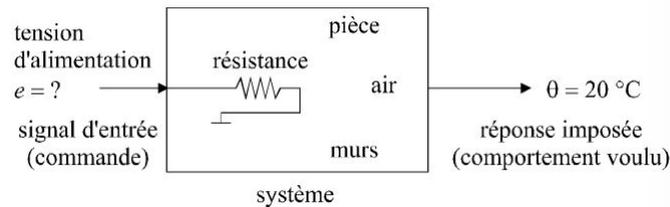


Fig. 22.2: Modélisation d'un système de chauffage

Alors la température finale sera inférieure à la valeur de consigne attendue.

Il faut boucler le système. Définitions du principe de la commande en boucle fermé et des principaux composants de la boucle : **chaîne directe** constituée par un *actionneur* et un *ampli de puissance*; **la chaîne de retour** constituée par un *capteur*, et le **comparateur** (Attention en boucle ouverte le comparateur ne fait pas parti de la boucle).

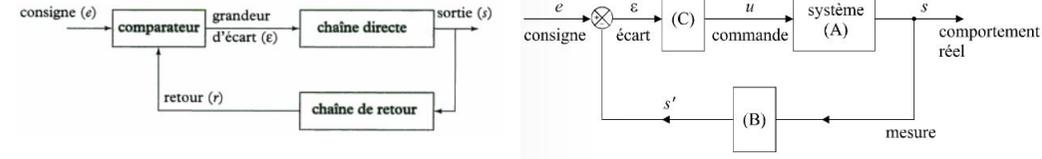


Fig. 22.3: Structure générale d'un système bouclé.

Fig. 22.4: Schéma général d'une boucle de régulation.

Moyennant une hypothèses sur la caractéristique des systèmes utilisés, on va voir que l'on peut utiliser la théorie des systèmes linéaires.

1.2 Systèmes linéaires et fonction de transfert ([1] p.92 et [2] p.199)

Rappel : Les systèmes linéaires et invariant temporellement vérifient ces deux propriétés :

- **Linéarité :** si $e(t) \xrightarrow{S} s(t)$ alors $e(t) = e_1(t) + e_2(t) \xrightarrow{S} s_1(t) + s_2(t) = s(t)$
- **Invariance temporelle :** si $e(t) \xrightarrow{S} s(t)$ alors $e(t - \tau) \xrightarrow{S} s(t - \tau)$

En faisant l'hypothèse que tous les systèmes et dispositifs impliqués dans la boucle soient linéaires, il nous est possible d'utiliser le formalisme laplacien pour établir un modèle de fonctionnement liant l'entrée du système bouclé (le signal de consigne) à sa sortie (la grandeur physique à réguler).

La figure propose le schéma général d'une boucle de régulation dans ce formalisme : il nous faut considérer, pour chaque signal, sa transformée de Laplace, et pour chaque élément du système, sa fonction de transfert.

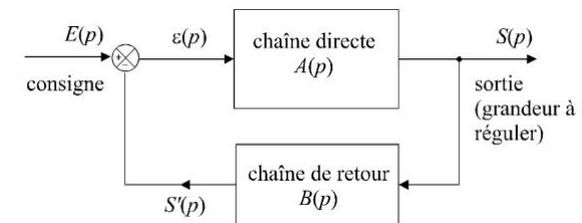


Fig. 22.5: Modèle d'une boucle de régulation

On définit alors la fonction de transfert en boucle fermé :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 \pm A(p)B(p)}$$

où le signe + s'applique à l'exemple précédent (asservissement donc comparateur est un soustracteur) et le signe - au système à réaction positive (le comparateur est un additionneur).

On peut démontrer que l'étude de la stabilité revient à étudier la fonction de transfert en boucle ouverte, c'est-à-dire qu'on ne reboucle pas et que la sortie $S(p)$ est située en $S'(p)$. On a alors :

$$H_{BO}(p) = A(p)B(p)$$

La connaissance des fonctions de transfert d'un système nous permet de prévoir le signal électrique de sortie lors du passage du signal d'entrée dans le système. On sait qu'elle s'exprime comme une fonction ne dépendant que de la fréquence d'où l'intérêt de travailler dans l'espace de Laplace.

1.3 Le problème de la stabilité ([1] p.93) et des performances

Le signal de sortie converge-t-il effectivement vers une valeur finie ou est-il susceptible de diverger ou d'osciller ?

Ce problème est crucial dans les systèmes bouclés, compte tenu que le signal de sortie est réinjecté à l'entrée du système. Dans ces conditions, la boucle peut effectivement se comporter comme prévu, c'est-à-dire évoluer vers un état où la grandeur à réguler se rapproche de la valeur de consigne, ce qui correspond au fonctionnement idéal tel que vu dans la première section dans le cas d'un système de chauffage, ce que nous considérerons comme un fonctionnement stable; mais elle peut également s'emballer, avec pour conséquence une non-convergence du signal de sortie, comportement que nous qualifierons d'instable.

Il est évident qu'il est nécessaire, lors de la conception d'une boucle de régulation, de lui assurer à tout prix un comportement stable, ce que nous allons étudier, entre autres propriétés, dans la prochaine partie. On va chercher à quantifier les caractéristiques et les performances de système bouclés dont certaines sont résumées sur le graphe suivant :

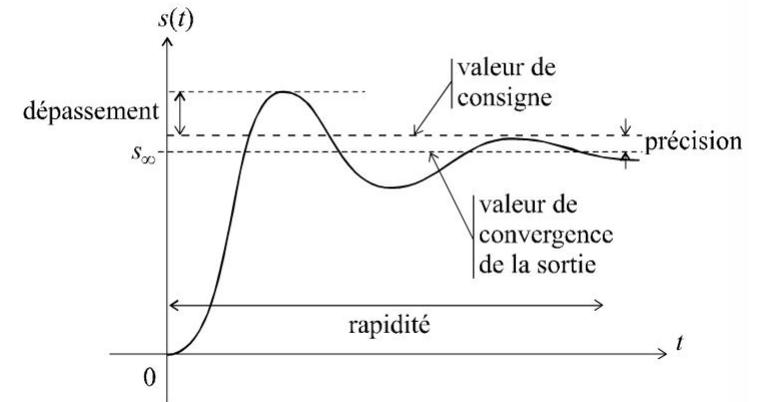


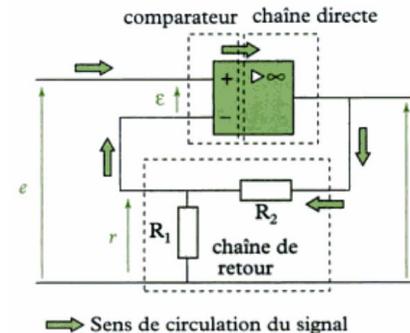
Fig. 22.6: Réponse d'un système à une consigne en échelon.

On veut que le système rejoigne rapidement, précisément sa valeur de consigne sans avoir un dépassement trop important (chauffage montant à 23°C inutile).

2 Propriétés de la rétroaction négative : l'AO non inverseur ([2] p.207 et [4] p.88))

2.1 Présentation ([2] p.207) et fonction de transfert

On étudie l'AO non inverseur de gain statique $\mu_0 \approx 10^5$. Cette AO est un filtre passe-bas de faible pulsation de coupure $\omega_{AO} \approx 50$ rad/s.



- La chaîne directe ($A(p) = \frac{\mu_0}{1 + p/\omega_0}$) est constituée par l'AO qui joue le rôle d'ampli de puissance et de comparateur linéaire.

- La chaîne de retour ($B(p) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$) est constituée des 2 résistances R_1 et R_2 ; c'est un diviseur de tension de la sortie s .

- La consigne est la tension d'entrée e .

On montre que la fonction de transfert du système bouclé s'écrit :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{\frac{\mu_0}{1 + \frac{p}{\omega_0}}}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \frac{1}{p}} = \frac{\mu_0}{\omega_{AO} \left(1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2} \right)}$$

Ce qui donne en complexe :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}, \text{ avec } H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}} \text{ et } \omega_0 = \omega_{AO} \left(1 + \frac{\mu_0 R_1}{R_1 + R_2}\right)$$

2.2 Gain et bande passante

Avec les données constructeurs, on voit que le produit

$$\mu_0 \cdot \omega_{AO} = H_0 \cdot \omega_0 = \text{constante}$$

. Si on veut avoir un filtre moins sélectif, on aura une amplification moins grande.

L'introduction d'une **contre réaction** dans un système constitué d'une chaîne directe du premier ordre et d'un retour réel permet **d'augmenter la bande passante** du système mais au détriment de l'amplification.

On peut moduler le gain H_0 en fonction des valeurs des résistances.

2.3 Stabilité ([2] p.205)

On peut vérifier rapidement la stabilité de l'AO :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \epsilon = e - Bs \\ (2) s = A\epsilon \end{array} \right\} \text{d'où si } \left. \begin{array}{l} s \nearrow \xrightarrow{(1)} \epsilon \searrow \xrightarrow{(2)} s \searrow \\ s \searrow \xrightarrow{(1)} \epsilon \nearrow \xrightarrow{(2)} s \nearrow \end{array} \right\} \text{système stable}$$

De manière plus générale, un système linéaire est stable si les pôles de sa fonction de transfert sont à **parties réelles négatives**². Comme la fonction de transfert d'un système bouclé s'écrit :

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

recherche la stabilité d'un système bouclé revient à rechercher les parties réelles du dénominateur $1 + H_{BO}(p) = 0$ d'où l'intérêt d'utiliser la fonction de transfert à boucle ouverte qui est nettement plus simple.

On utilise le critère du revers pour définir la stabilité d'un système : il faut qu'en parcourant le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le sens des ω croissants, on laisse toujours le point critique C à gauche.

2. Cela évite d'avoir des solutions avec des exponentielles qui divergent.

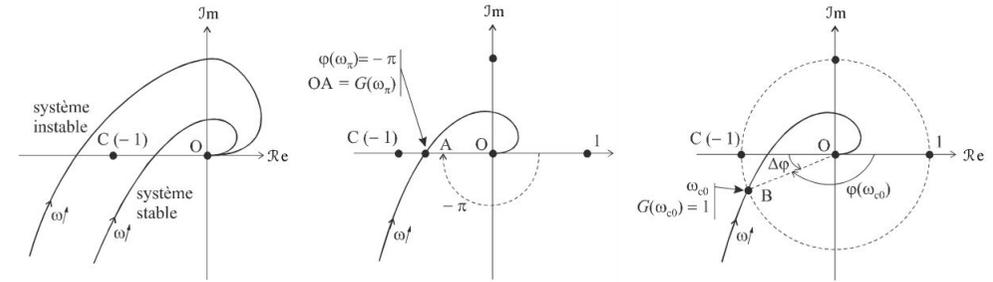


Fig. 22.7: (g) : critère du revers; (c) : marge de gain; (d) : marge de phase.

On peut définir la **marge de gain** M_G et la **marge de phase** M_φ permettant d'apprécier l'écart par rapport à la possibilité d'oscillations sinusoïdales. De la condition $\underline{H}_{BO}(j\omega) = -1$, on définit :

$$\mathbf{M}_G = 0 - G(\omega_\pi) = -G(\omega_\pi), \text{ où } G(\omega_\pi) = 20 \log |\underline{H}_{BO}(j\omega_\pi)|$$

si $\mathbf{M}_G > 0$ le système est stable, et si $\mathbf{M}_G < 0$ le système est instable.

$$\mathbf{M}_\varphi = \pi + \arg(\underline{H}_{BO}(j\omega_1)) \text{ avec } \omega_1 \text{ tel que } |\underline{H}_{BO}(j\omega_1)| = 1$$

si $\mathbf{M}_\varphi > 0$ le système est stable, et si $\mathbf{M}_\varphi < 0$ le système est instable.

2.4 Précision ([1] p.128)

On s'attend que le signal de sortie converge vers une valeur finie la plus proche possible de la consigne. Plus la valeur de convergence de la sortie sera proche de la valeur de consigne, plus le système sera précis.

On cherche à quantifier l'erreur statique (significatif de la précision) et voir le lien avec le gain.

On définit l'erreur statique (définie une fois le régime permanent atteint) du système en boucle fermée, par le paramètre ϵ_s défini par ($e(t)$ est un échelon dont la TL est $1/p$) :

$$\epsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} (s(t) - e(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} p[S(p) - E(p)]$$

d'après la théorème de la valeur finale.

On trouve alors que

$$\epsilon_s = \frac{1}{1 + \mu_0}$$

Ainsi, plus un système est précis, ($\epsilon_s \rightarrow 0$) plus le gain statique du système doit être important. Donc on a un compromis entre fort gain, bonne précision et large bande passante à trouver.

2.5 Rapidité ([1] p.131 + [2] p.209)

On calcule le temps de réponse à 5% du système bouclé t_{SB} et de la chaîne directe t_{AO} . On a pour un système d'ordre 1 :

$$t_{AO} = \frac{3}{\omega_{AO}} \approx 60 \text{ ms} \quad \text{et} \quad t_{SB} = \frac{3}{\omega_0} \approx 30 \mu\text{s}$$

on voit que le système bouclé à un temps de réponse bien plus court que le système ouvert. Ce temps de réponse est inversement proportionnelle à la pulsation de coupure. Il faut encore faire un compromis entre les paramètres : bande passante, temps de réponse, gain, précision.

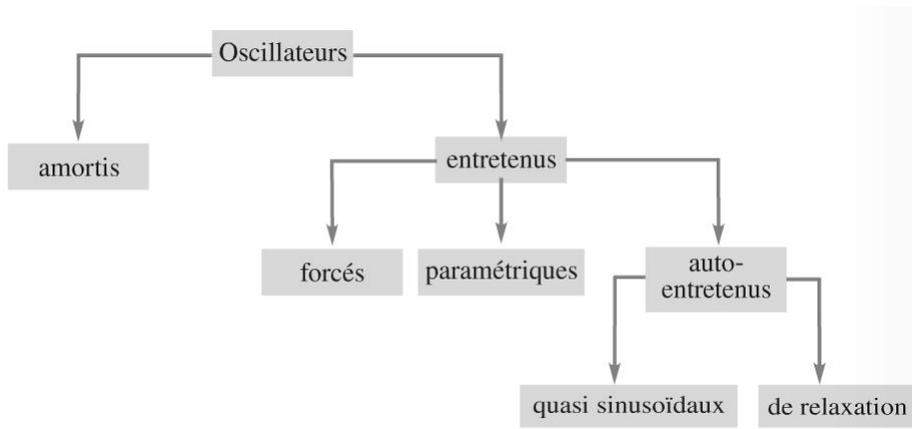
2.6 Sensibilité ([2] p.202)

On peut faire cette partie si temps.

3 Oscillations. Cas d'une rétroaction positive

Les oscillateurs permettent de créer des signaux sinusoïdaux purs utile dans la mise en forme, la transmission et la détection d'information et également dans la fabrication de compteur dont l'application première est la fabrication d'horloge à quartz.

3.1 Définitions des oscillations ([3] p.460)



On appelle **oscillateur** auto-entretenu un générateur qui délivre un signal périodique :

- en l'absence de signal d'entrée périodique extérieur à l'oscillateur ;
- en étant alimenté par une source d'énergie continue.

On va étudier les oscillateurs auto-entretenus quasi-sinusoïdaux. Ces oscillateurs nécessitent :

- une instabilité d'un système linéaire comme source d'oscillation
- un filtre pour pouvoir ajuster la fréquence du signal voulu
- une amplification (composants résistifs dans le circuit) par l'intermédiaire d'un composant actif : l'A.O.

3.2 Modélisation avec schéma-bloc ([2] p.237)

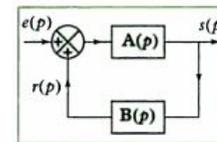
Pour un système à réaction positive, on a les fonctions de transferts suivantes :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 - A(p)B(p)} \quad \text{et} \quad H_{BO}(p) = A(p)B(p)$$

Pour avoir un oscillateur, il faut que l'entrée soit nulle ($E(p) = 0$) d'après la définition. En régime harmonique ($p \rightarrow j\omega$) cela correspond à la **condition de Barkhausen** : $\underline{A} \cdot \underline{B} = 1$. Cette condition peut se séparer en deux :

$$|\underline{A}| \cdot |\underline{B}| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(\underline{A}) + \arg(\underline{B}) = 0$$

On peut vérifier rapidement la stabilité du système :



$$\left. \begin{array}{l} (1) \epsilon = e + Bs \\ (2) s = A\epsilon \end{array} \right\} \text{d'où si} \quad \begin{array}{l} s \nearrow \xrightarrow{(2)} \epsilon \nearrow \xrightarrow{(1)} s \nearrow \\ s \searrow \xrightarrow{(2)} \epsilon \searrow \xrightarrow{(1)} s \searrow \end{array}$$

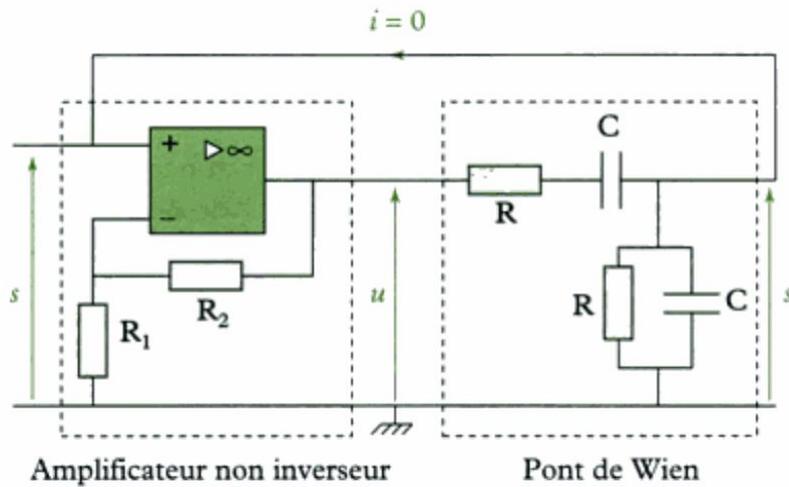
donc le système est bien instable.

Pour les rétroactions négatives, on discutait de la stabilité $AB \rightarrow -1$ et pour les rétroactions positives (déjà instable) on discute des oscillations $AB \rightarrow 1$.

3.3 Exemple de rétroaction positive : l'oscillateur à pont de Wien ([2] p.242)

3.3.1 Schéma et caractéristiques

But de l'oscillateur : créer des signaux quasi-sinusoïdaux très pur qui se mesure par le taux de distorsion (à définir). **Application** : tester des ampli audio pour mesurer la distorsion qu'ils peuvent engendrer à la sortie.



Il comporte une chaîne directe (étage amplificateur) et une chaîne de retour (filtre pont de Wien).

Le filtre du deuxième ordre conduit à avoir un $B_0 = 1/3$. On montre que les conditions de Barkhausen correspondent alors à $A_0 \geq 3$ et donc $R_2 = 2R_1$. On a alors un signal quasi-sinusoïdale de pulsation $\omega_0 = 1/RC$.

La principale caractéristique d'un oscillateur et son facteur de qualité qui est ici de : $Q = \frac{1}{3}$ ce qui n'est pas élevé.

3.3.2 Importance du facteur de qualité ([5] p.27)

Objectif : Le but est de montrer l'utilité d'un grand facteur de qualité sur la dérive de la valeur de la fréquence dans le temps.

On peut le mesurer grâce au tracé de la phase sur le diagramme de Bode. D'après les conditions de Barkhausen

$$\arg(\underline{A}) + \arg(\underline{B}) = 0 \iff \theta + \varphi = 0 \iff d\theta + d\varphi = 0$$

avec $d\theta$ la perturbation en phase qui peut provenir d'une variation de l'alimentation ou du vieillissement d'un composant dans l'AO.

Après calcul à partir de la fonction de transfert en boucle fermée d'un filtre du second ordre (cf. Notice Cachan *oscillateur à quartz*) :

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{\frac{d\theta}{d\omega}} = \frac{-1}{\frac{d\varphi}{d\omega}} = \frac{\omega_0}{2Q}$$

on voit qu'il faut une valeur de Q élevée pour que la dérive en fréquence de l'oscillateur soit petite, donc une grande stabilité. Et $\frac{d\varphi}{d\omega}$ correspond à la pente de la phase autour de

ω_0 sur le diagramme de Bode : plus elle est élevée (donc phase proche des asymptotes) mieux c'est. Car plus la résonance est aigüe plus la phase proche de la résonance chute rapidement.

Conclusion

- Intérêt des rétroactions négatives : modulation du gain, modulation de la bande passante.
- Intérêt des rétroactions positives : générer des oscillateurs.
- Autres exemples en dehors de l'électronique : Fabry-Pérot ou optique adaptative (cf. [4] p.447)

Remarques et Questions du correcteur

→ Autres types d'asservissements ?

de température (dispositif Peltier permet de refroidir à l'aide d'un pont de Wheatstone); en optique (Fabry-Pérot); en mécanique (vitesse, position); en biologie (l'insuline).

→ Quelle est la différence entre un système de régulation et d'asservissement ?

L'asservissement est un système **suiveur** contrairement à la régulation qui permet juste de s'affranchir des perturbations.

→ Sur les schémas blocs, les fonctions dépendent toujours de p peuvent-elles dépendre du temps ?

Non, les fonctions, dans le cadre des systèmes linéaires, comme l'AO rebouclé sont exprimés dans l'espace de Laplace donc dépendent de p uniquement.

→ Caractéristiques de l'AO LM741.

Inventé en 1970, fréquence de coupure faible, impédance d'entrée faible, courant de sortie maximum délivré faible. Maintenant les TL071, TL081,... présentent plus d'avantages. Mais le LM741 est historique.

→ Quels sont les avantages de reboucler un AO ?

Fonctionnement linéaire si contre-réaction, modulation du gain et de la bande passante. Si on effectue une réaction positive, alors $V_s = \pm V_{sat}$ ce qui nous permet d'avoir des valeurs de consignes pour des basculements. En contre-réaction, le gain ne dépend plus des paramètres de l'AO mais uniquement des résistances, ce qui est avantageux si on est obligé de changer le composant, on garde les mêmes valeurs pour le signal de sortie !

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

→ Agrégation 2008 - Note : 09/20 :

Questions et commentaires du jury : expliquer le critère de stabilité. Un système instable est-il toujours un oscillateur ? Si non, sous quelle(s) condition(s) l'est-il ?

Commentaires personnels : les techniciens et le prof préparateur ont été très gentils et disponibles : ils ont monté un Van der Pol et l'asservissement en position très bien. J'ai passé cette leçon le dimanche après midi (12h40). Je ne maîtrisais pas du tout le sujet, et en était consciente : je n'ai jamais eu de cours là dessus, et les livres ne traitent pas le sujet comme le jury l'attend. Du coup, j'avais travaillé avec ce que j'avais pu dans l'année, en lui consacrant un temps qui me semble raisonnable pour une unique leçon (10 à 20h), mais je savais quand j'ai tiré mon sujet, que j'étais juste capable de parler (j'avais construit un plan avec un contenu incontournable, et en évitant au maximum ce que je n'avais pas compris), mais incapable de résister aux questions. Je pense aussi que du coup, ma présentation manquait à la fois de rigueur et de pédagogie. Je n'ai par contre pas eu de problème pour gérer ma préparation.

→ **Agrégation 2008 - Note : 16/20 :**

Questions et commentaires du jury : quelle est la caractéristique principale des systèmes bouclés ? Produit gain * BP = cste (j'ai donné l'exemple simple de l'ampli non inverseur). Système bouclé dans une montre à quartz ? Qu'est-ce qui limite l'amplitude des oscillations dans l'oscillateur à pont de Wien ? Effets non linéaires. D'où viennent les non linéarités ? L'AO (transistors de l'AO). Que se passe-t-il si on modifie la valeur de la résistance variable dans l'oscillateur à pont de Wien ? Déformation du signal, on s'éloigne des oscillations quasi sinusoïdales. Qu'est-ce qui caractérise un oscillateur ? Son facteur de qualité. Que vaut-il pour l'oscillateur à pont de Wien ? (1/3). Un système linéaire continu et stationnaire n'est qu'une modélisation, les systèmes réels ne satisfont pas rigoureusement tous ces critères. Ils m'ont également demandé de préciser les critères de stabilité, pourquoi il est nécessaire de prendre des marges en pratique et l'intérêt de Nyquist (prévision du comportement en boucle fermée à partir de l'étude en boucle ouverte). Déf. de la transmittance en boucle ouverte : plutôt utiliser grandeur de sortie sur grandeur d'entrée que grandeur de sortie sur grandeur de différence. Au niveau des expériences, j'ai présenté uniquement l'oscill. à pont de Wien, je n'ai pas sorti de moteur.

LP 23 — Traitement analogique d'un signal électrique. Étude spectrale.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 02/10/2013 par *Joévin Giboudot* et corrigée par *H. Leymarie*. Les remarques faites par la correctrice ont été écrites dans le compte rendu en italique précédées du symbole ☞.

Rapports du Jury

☞ (2010) – “L’analyse de Fourier est centrale dans cette leçon, et les oscilloscopes numériques permettent de la mettre en oeuvre très facilement. Il est tout à fait possible d’étudier des systèmes non linéaires.”

☞ (2008) – “Il convient d’éviter de se limiter à la présentation d’un catalogue d’opérations. Pour 2009¹, le titre de la leçon est modifié afin d’introduire la possibilité d’opérations non linéaires.”

☞ (2007) – “La fonction de transfert doit être correctement définie. Le lien entre les réponses temporelle et fréquentielle est un aspect important. Les seuls signaux envisagés sont analogiques et la conversation analogique/numérique est exclue. Cela est clairement précisé dans le libellé 2008.”

☞ (2006) – “L’étude spectrale doit être soigneusement présentée. Une bonne place doit être consacrée aux applications.”

☞ (2005) – “Cette leçon ne saurait se limiter à l’étude des filtres du premier ordre. Le jury attend la définition d’un filtre et de ses caractéristiques ainsi que l’exploitation pratique de ces dernières.”

☞ (2004) – “Il faut expliquer avec soin ce qu’est un filtre et la signification de ses caractéristiques (ordre, type, ...).”

☞ (2003) – “Cette leçon qui doit être illustrée expérimentalement ne doit pas se réduire à l’étude du comportement d’un circuit soumis à un signal sinusoïdal. Le jury souhaite voir comment le filtrage transforme un signal électrique quelconque. Ceci suppose une analyse spectrale (fréquences) du signal d’entrée et du signal de sortie. Le candidat doit pouvoir montrer le lien entre la forme du diagramme de Bode du circuit, le comportement de celui-ci (intégrateur, dérivateur ...) et les propriétés de l’équation différentielle associée. Une autre remarque s’impose : il n’est pas correct de définir un déphasage à partir d’une tangente ou d’un Arctangente : la fonction argument d’un nombre complexe en revanche correspond bien à la grandeur recherchée.”

Bibliographie

- [1] *CAP Prépa Physique MPSI-PCSI-PTSI*, 1^{ère} année. Pearson, 2009.
- [2] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.
- [3] Brenders P., *Électronique PSI*. Bréal, les nouveaux précis, 2005.
- [4] Duffait, *Expériences d’électronique*. Bréal, 1999.

Prérequis

- ♥ Analyse de Fourier.

Plan

1. Le titre de la leçon était alors : *Traitement analogique d'un signal électrique. Étude spectrale. Filtrage linéaire. Exemples et applications.*

1 Analyse temporelle et fréquentielle d'un SLIT

- 1.1 Définition d'un système linéaire à invariance temporelle
- 1.2 Étude temporelle d'un système linéaire
- 1.3 Fonction de transfert harmonique

2 Application d'un SLIT : filtrage

- 2.1 Définition d'un filtre
- 2.2 Diagramme de Bode
- 2.3 Filtre du 2nd ordre : circuit RLC (passe-bande)
- 2.4 Étude spectrale du filtrage d'un créneau
- 2.5 Généralisation

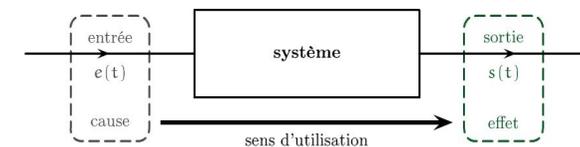
3 Traitement non-linéaire d'un signal analogique

- 3.1 Action d'un système non linéaire
- 3.2 Voltmètre TRMS
- 3.3 Détection synchrone

Introduction

→ Une grandeur analogique c’est une grandeur qui dépend continuellement d’une variable, en général le temps. Ex : $u(t)$, $i(t)$. Dans cette leçon nous n’étudierons que des signaux analogiques et pas numériques (échantillonnés = valeurs discrètes).

→ On s’intéresse à caractériser des systèmes (linéaire à invariance temporelle principalement) en étudiant le signal de sortie $s(t)$ par rapport au signal d’entrée $e(t)$.



Exemple expérimentale [2] p.45 et p.60 : On envoie un signal créneau en entrée d’un circuit RLC et on observe aux bornes de la résistance en sortie, le signal obtenu. Si on a choisi correctement la fréquence propre ($f_0 = 2\pi/\sqrt{LC}$) du filtre passe-bande comme une fréquence multiple impaire du signal créneau (par exemple $f_0 = 3f$) alors on obtient un sinus en sortie.

→ Nous allons étudier les filtres, ce sont des systèmes qui transforment le spectre du signal d’entrée. On (le système que l’on a choisi) effectue alors un **traitement analogique** d’un signal électrique.

1 Analyse temporelle et fréquentielle d'un SLIT

1.1 Définition d'un système linéaire à invariance temporelle

Les signaux électrique analogique sont des signaux qui sont dépendant continument du temps. On les oppose aux signaux numérique qui eux sont des fonctions discrètes du temps.

On distingue deux grands types de signaux électrique : les signaux **périodiques** et ceux **non périodiques**.

Un signal $e(t)$ est défini comme périodique si :

$$e(t) = e(t + T) \quad \forall T$$

où T est la période du signal en secondes. Elle est égale à $T = 1/f = 2\pi/\omega$ où f et ω sont respectivement la fréquence et la pulsation.

Dans cet exposé on restreint notre étude aux signaux périodiques dont le traitement, comme on le verra par la suite, est plus abordable dans le cadre de la leçon.

On va étudier principalement des systèmes linéaires et invariant temporellement, ce qui signifie que les signaux qui rentrent dans le système vérifie ces propriétés :

- **Linéarité** : si $e(t) \xrightarrow{S} s(t)$ alors $e(t) = e_1(t) + e_2(t) \xrightarrow{S} s_1(t) + s_2(t) = s(t)$
- **Invariance temporelle** : si $e(t) \xrightarrow{S} s(t)$ alors $e(t - \tau) \xrightarrow{S} s(t - \tau)$

Nous allons voir que la linéarité permet de simplifier le problème une fois de plus !

1.2 Étude temporelle d'un système linéaire ([2] Chap. 1)

On a vu lors de l'étude temporelle des circuits linéaires que l'équation reliant les signaux d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ pour ces systèmes pouvaient être modélisés par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. La forme générale de ces équations est :

$$a_0 s(t) + \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = b_0 e(t) + \sum_{\ell=1}^m b_\ell \frac{d^\ell e(t)}{dt^\ell}$$

L'ordre du système est défini par la valeur de l'indice n , en général on étudie que des systèmes où $n \leq 2$ comme on le verra dans 2.5. Les coefficients a_k et b_ℓ sont constants de par l'invariance temporelle du système.

Par exemple l'étude d'un circuit RC dont la sortie est la mesure de la tension aux bornes du condensateur et l'entrée correspond à un échelon de tension conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec } \tau = RC$$

dont la solution d'après la linéarité de l'équation est une somme d'un régime permanent et d'un régime transitoire qui tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini lorsque le système

est **stable**. Pour des systèmes du 1^{er} et du 2nd le système est stable si tous les coefficients de l'équation différentielles sont de même signe ².

La solution de l'équation nous donne l'évolution du signal de sortie $s(t) = u_C(t)$ dans le domaine **temporelle**. On a alors étudier la **réponse indicielle** car le signal d'entrée est un signal échelon. On voit apparaître ici une caractéristique du système lors de l'étude temporelle, à savoir le temps τ caractéristique du régime transitoire.

On sait que l'analyse de Fourier est un outil puissant pour analyser la réponse d'un systèmes linéaire lorsque le signal d'entrée est un signal périodique. En effet tout fonction périodique peut se décomposer en somme infinie de fonction sinus et cosinus (cf. Décomposition d'un signal créneau sur la diapositive : **Décomposition en série de Fourier d'un créneau**).

Le système étant linéaire, la somme de solutions est encore solution de l'équation différentielle. Donc on a tout intérêt d'étudier la réponse du système à une **excitation sinusoïdale**.

L'utilisation d'une excitation sinusoïdale et d'un système linéaire permet facilement de passer en complexe pour faciliter les calculs comme on va le voir. Cette fois l'étude se situera dans le domaine **fréquentielle**.

1.3 Fonction de transfert harmonique ([2] Chap. 2)

On étudie la réponse d'un SLIT (système linéaire à invariance temporelle) à une excitation sinusoïdale du type $e(t) = E \sin(\omega t + \varphi_e)$. On voit alors que pour de telles systèmes, il est très convenant de passer dans une représentation complexe des différentes grandeurs car on va alors pouvoir simplifier l'équation différentielle générale des SLIT.

On pose alors $\underline{e}(t) = E(\omega)e^{j(\omega t + \varphi_e)} = \underline{E}(j\omega)e^{j\omega t}$ avec $\Re(\underline{e}(t)) = e(t)$. On voit alors qu'une dérivée par rapport au temps correspond maintenant à une simple multiplication du signal par le facteur $j\omega$. De par la linéarité du système, on peut chercher des solutions du type $\underline{s}(t) = S(\omega)e^{j(\omega t + \varphi_s)} = \underline{S}(j\omega)e^{j\omega t}$.

On en déduit alors la nouvelle équation par laquelle le système est régi :

$$\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k \underline{s}(t) = \sum_{\ell=0}^m b_\ell (j\omega)^\ell \underline{e}(t)$$

En exprimant les expressions de $\underline{s}(t)$ et de $\underline{e}(t)$ et en simplifiant par les termes exponentielles dépendant du temps, il reste :

$$\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k \underline{S}(j\omega) = \sum_{\ell=0}^m b_\ell (j\omega)^\ell \underline{E}(j\omega)$$

2. Plus généralement, un système linéaire est stable si et seulement si les racines du polynômes caractéristique de son équation différentielle sont toutes à partie réelle strictement négative. C'est le **critère de Routh**.

On voit que l'on passe à une simple équation polynomiale. On peut introduire la fonction de transfert harmonique $\underline{H}(j\omega)$ qui caractérise entièrement le système et qui est définie par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)} = \frac{\sum_{\ell=0}^m b_{\ell} (j\omega)^{\ell}}{\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

avec $H(\omega)$ le module (ou **gain**) et $\varphi(\omega) = \varphi_s - \varphi_e$ le **déphasage** entre la sortie et l'entrée³. L'indice n est l'**ordre** du système.

☞ Il ne faut pas définir la fonction de transfert comme le rapport de $\underline{s}(t)$ et de $\underline{e}(t)$ car la dépendance temporelle rend la compréhension plus difficile.

Cette fonction de transfert harmonique ne dépend que de la pulsation ω , elle a donc tout son sens dans le domaine fréquentiel !

La connaissance de cette fonction nous permet de connaître le traitement que va subir le signal électrique d'entrée lors du passage dans le système. On va alors chercher à exprimer l'expression du gain $G(\omega)$ et celle de la phase $\varphi(\omega)$.

On va voir alors qu'un SLIT va "perturber" le signal d'entrée et que l'étude fréquentielle permet très facilement de caractériser cette "perturbation".

2 Application d'un SLIT : filtrage

2.1 Définition d'un filtre

On a

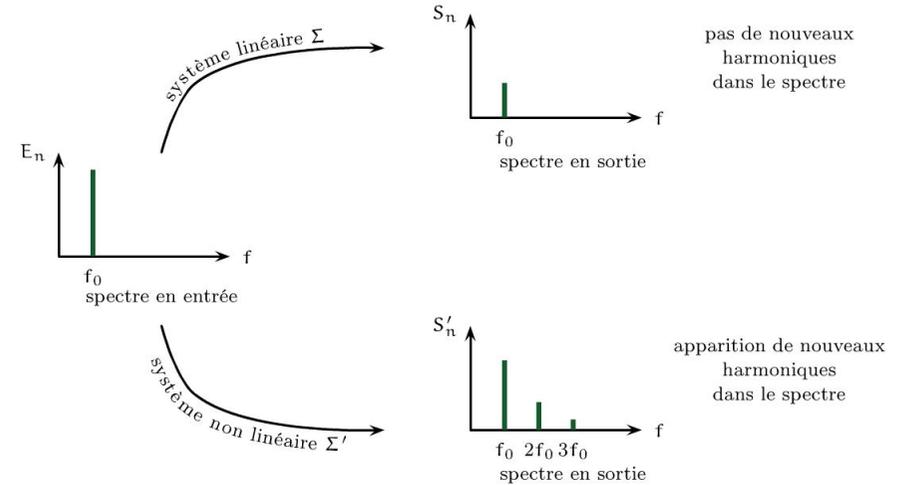
$$\underline{H}(j\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

On voit que si $G(\omega) > 1$ ($G(\omega) < 1$) on a amplification (atténuation) pour une certaine valeur de la pulsation ω .

Définition : Un filtre linéaire est un système linéaire qui atténue ($G < 1$) certaines fréquences d'un signal d'entrée et en laisse passer d'autres (parfois en les amplifiant $G > 1$).

Conséquence : le spectre du signal de sortie ne peut pas contenir plus d'harmoniques que le signal d'entrée.

3. En général, on prend comme origine des phases la phase d'entrée, donc $\varphi_e = 0$.



Expérimentalement on va mesurer point par point les tensions et le déphasage pour tracer le **diagramme de Bode** qui correspond à une représentation de la fonction de transfert harmonique $\underline{H}(j\omega)$. On peut également utiliser la réponse indicielle pour obtenir le diagramme de Bode en étudiant le régime transitoire du système lorsqu'il est soumis à un échelon de tension à une pulsation donnée (cf. **MP 33 : Régimes transitoires**).

2.2 Diagramme de Bode

On trace deux courbes pour le diagramme de Bode. L'une est la courbe de gain en fonction de la pulsation :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| = 20 \log G(\omega)$$

On définit souvent la pulsation réduite du système x définie comme le rapport de la pulsation ω du signal d'entrée sur la pulsation propre du système ω_0 . On a alors :

$$G_{dB}(x) = 20 \log |\underline{H}(x)| = 20 \log G(x)$$

Cette courbe nous renseigne sur l'amplification, l'atténuation ou la non-activité du système par rapport au signal d'entrée en fonction de la pulsation.

On trace également la courbe de phase en fonction de la pulsation définie comme :

$$\varphi(x) = \arg(\underline{H}(jx))$$

Elle nous renseigne sur le déphasage qu'il existe à une pulsation donnée entre le signal d'entrée et le signal de sortie.

Remarques :

1. Il est très intéressant parfois de tracer $G(x)$ au lieu de $G_{dB}(x)$ car on va pouvoir superposer cette courbe à celle du spectre du signal d'entrée et voir rapidement le **filtrage fréquentiel** effectué par le système.
2. Pour tracer ces diagrammes il est judicieux de faire une **étude asymptotique** au préalable de la fonction de transfert.

On définit également la ou les pulsations de coupures ω_c tel que :

$$\boxed{|\underline{H}(j\omega_c)| = G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}}$$

Le facteur $1/\sqrt{2}$ fait penser aux définitions de l'intensité et de la tension efficace. C'est pour les mêmes raisons que l'on a défini de cette façon les pulsations de coupure. La puissance étant proportionnelle au carré de l'amplitude, elle est alors réduite de moitié pour $\omega = \omega_c$.

En dB, on a $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB,max} - 3dB$.

Cette pulsation de coupure permet de définir la **bande passante** d'un filtre.

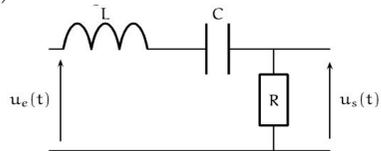
Pour les filtres du premier ordre la pulsation de coupure est égale à la pulsation propre du système. On a alors la condition $\omega_c \cdot \tau = 1$ pour ces systèmes. On voit que les domaines **temporelle** et **fréquentielle** sont reliés. D'après cette condition il n'est pas possible d'avoir un filtre avec une petite bande passante (ω_c petit) et un temps de réponse court (τ petit).

On va maintenant appliquer toutes ces définitions à un exemple pratique : le circuit RLC.

☞ On a pas le temps de traiter un circuit du 1^{er} ordre et un circuit du 2^{eme}, il vaut mieux alors ne traiter qu'un système du deuxième ordre, moins classique et moins ennuyante pour le jury qu'un circuit RC.

2.3 Filtre du 2nd ordre : circuit RLC (passe-bande) ([2] p.45)

On étudie la réponse d'un circuit RLC à une excitation sinusoïdale du type $u_e(t) = E \sin \omega t$.



On montre que l'équation différentielle du système grâce à la loi des mailles s'écrit :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2}(t) + \frac{R}{L} \frac{du_s}{dt}(t) + \frac{1}{LC} u_s(t) = \frac{R}{L} \frac{du_e}{dt}(t)$$

On peut alors écrire l'équation canonique sous la forme :

$$\frac{d^2 s}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt}(t) + \omega_0^2 s(t) = \frac{\omega_0}{Q} \frac{de}{dt}(t)$$

où a posé $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ la pulsation propre du système, et $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$ le facteur de qualité du système.

On a donc affaire à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et à second membre variable. Grâce à la linéarité du système⁴ on passe en complexe pour résoudre plus simplement l'équation différentielle.

On peut soit utiliser les impédances complexes et écrire un pont diviseur de tension pour écrire la fonction de transfert soit remplacer $s(t)$ et $e(t)$ par leurs expressions complexes.

On va utiliser la deuxième méthode plus fastidieuse mais plus visuelle :

$$(j\omega)^2 \cdot \underline{S} + (j\omega) \cdot \frac{\omega_0}{Q} \underline{S} + \omega_0^2 \underline{S} = (j\omega) \cdot \frac{\omega_0}{Q} \underline{E}$$

où on a directement simplifier les termes $e^{j\omega t}$. On peut alors écrire la fonction de transfert harmonique. En posant $x = \omega/\omega_0$ la pulsation réduite, la forme canonique de la fonction de transfert s'écrit :

$$\boxed{\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} = \frac{j \frac{x}{Q} H_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}}$$

avec ici H_0 le gain maximum (en $x = 1$) qui ici vaut 1. La dernière forme est la vraie forme canonique mais la première est plus simple pour les calculs.

On constate que le changement $x \mapsto \frac{1}{x}$ ne fait que changer le signe de la partie imaginaire de \underline{H} . Sur l'échelle logarithmique du diagramme de Bode, cela se traduit par deux symétries :

- ▷ La courbe de gain en décibel est symétrique par rapport à l'axe vertical $\omega = \omega_0$;
- ▷ La courbe de phase est symétrique par rapport au point $(\omega_0, 0)$

Formalisme général

On pose $H_0 = 1$. On prend le module de la fonction de transfert harmonique, ce qui conduit à l'expression du gain :

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

On constate qu'il est maximal pour $x = 1$, sans aucune condition sur la valeur du facteur de qualité Q .

On peut aussi écrire l'expression de la phase comme :

$$\varphi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = -\arctan \left[Q \left(x - \frac{1}{x} \right) \right]$$

4. On a utilisé ici que des dipôles linéaires c'est-à-dire possédant une relation linéaire entre u et i ou une équation différentielle linéaire reliant u et i .

Comportement asymptotique

On étudie alors le comportement asymptotique de la fonction de transfert en restant en complexe plutôt que d'étudier séparément le gain et la phase. On effectue alors le développement en considérant que jx est un réel le temps du développement. Cette technique est légitime mathématiquement⁵. On pourra alors écrire rapidement l'expression de l'asymptote pour le gain ainsi que pour la phase :

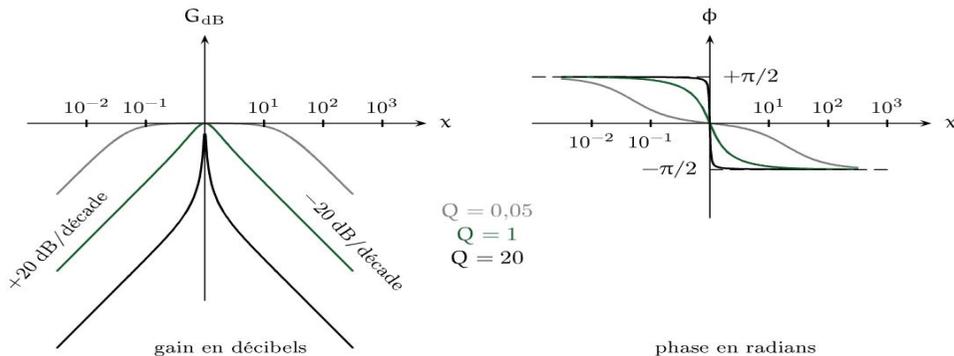
- ◇ Si $x \ll 1$, on a $\underline{H} \rightarrow \frac{jx}{Q}$, donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log x - 20 \log Q$ et $\varphi \rightarrow +\frac{\pi}{2}$;
- ◇ Si $x \gg 1$, on a $\underline{H} \rightarrow \frac{-j}{xQ}$, donc $G_{dB} \rightarrow -20 \log x - 20 \log Q$ et $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$;
- ◇ Si $x = 1$, on a $\underline{H} = 1$, donc $G_{dB} = 0$ et $\varphi = 0$.

Remarques :

1. Une pente de ± 20 dB/décade pour le gain est caractéristique d'un système du premier ordre, mais ici on a deux asymptotes symétrique par rapport à l'axe des ordonnées de ± 20 dB/décade, ce qui correspond bien à un filtre du 2^{ème} ordre.
2. On voit que l'étude asymptotique en complexe est très puissante car elle permet automatiquement de connaître la valeur du déphasage si la fonction asymptotique est purement réelle ou imaginaire et positive ou négative.

► **Expérience** : On vérifie expérimentalement à l'aide du circuit introductif le comportement asymptotique de la phase et du gain et donc de notre modélisation du problème.

Le diagramme de Bode présente l'allure donnée par les figures ci-dessous :



Les asymptotes sont d'autant plus basses que Q est grand. Par ailleurs, la position du maximum du gain est indépendante de Q . Par conséquent, le pic de résonance est d'autant plus haut que le facteur de qualité Q est grand. On calcule maintenant la bande passante comme on l'a définie précédemment.

5. Cela repose sur le fait que la fonction $\epsilon \mapsto (1 + \epsilon)^\alpha$ est développable en série entière sur \mathbb{C} avec un rayon de convergence de 1. Le développement est donc faisable tant que le module de ϵ est très inférieur à 1 (cf. [2] p.31).

Calcul de la bande passante

Le gain s'écrit $G = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 (x - 1/x)^2}}$ et $G_{max} = 1$ pour $x = 1$. Par définition les

pulsations réduites de coupure, notés x_c , vérifient $G(x_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$, soit $Q^2 (x_c - 1/x_c)^2 = 1$, ou encore $x_c^2 \pm \frac{x_c}{Q} - 1 = 0$. On obtient alors 4 racines mais seules celles positives sont intéressantes physiquement. On a alors :

$$x_b = \frac{\omega_b}{\omega_0} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} < 1 \quad \text{et} \quad x_h = \frac{\omega_h}{\omega_0} = \frac{+1 + \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} > 1$$

La bande passante est alors définie comme l'intervalle $\omega_h - \omega_b = \frac{\omega_0}{Q}$. On note en général :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Synthèse : *Le pic de résonance d'un filtre passe-bande d'ordre 2 est centré sur ω_0 . Sa largeur est proportionnelle à $\frac{1}{Q}$ et sa hauteur à Q . Plus le facteur de qualité est grand plus le pic de résonance est haut et étroit.*

Cette notion de largeur de bande passante est essentielle en analyse du signal, en effet pour prélever un signal de pulsation donnée noyé dans un ensemble de signaux, il faut être capable d'isoler sa pulsation et donc de disposer d'un filtre passe-bande très sélectif. C'est ce type de dispositif que l'on trouve dans les postes de radio : le facteur de qualité est élevé et la fréquence de résonance est ajustable.

2.4 Étude spectrale du filtrage d'un créneau ([2] Chap.3)

On étudie le filtrage effectué par le système lorsque l'on envoie un signal périodique en entrée non harmonique tel un signal créneau. On a vu que l'on pouvait décomposer le créneau en série de Fourier, donc en somme d'excitation sinusoïdale $e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin n\omega t$. De part la linéarité du système on peut écrire que la réponse est :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n\omega) \cdot \sin(n\omega t + \varphi(n\omega))$$

avec toujours la fonction de transfert harmonique $\underline{H}(j\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$.

Chaque fonction sinus provenant de la décomposition est "pondéré" par la fonction de transfert prise à la valeur de la pulsation du sinus étudié, c'est-à-dire à la pulsation de l'harmonique.

On se retrouve bien à étudier une par une des entrées mono-harmoniques comme pour l'étude précédente.

On superpose alors le spectre du signal analogique électrique périodique (ici un créneau de pulsation ω) à la courbe de gain calculée précédemment pour le filtre passe-bande (de pulsation propre $\omega_0 = 3\omega$). On choisit d'abord un facteur de qualité élevé donc un filtre sélectif.

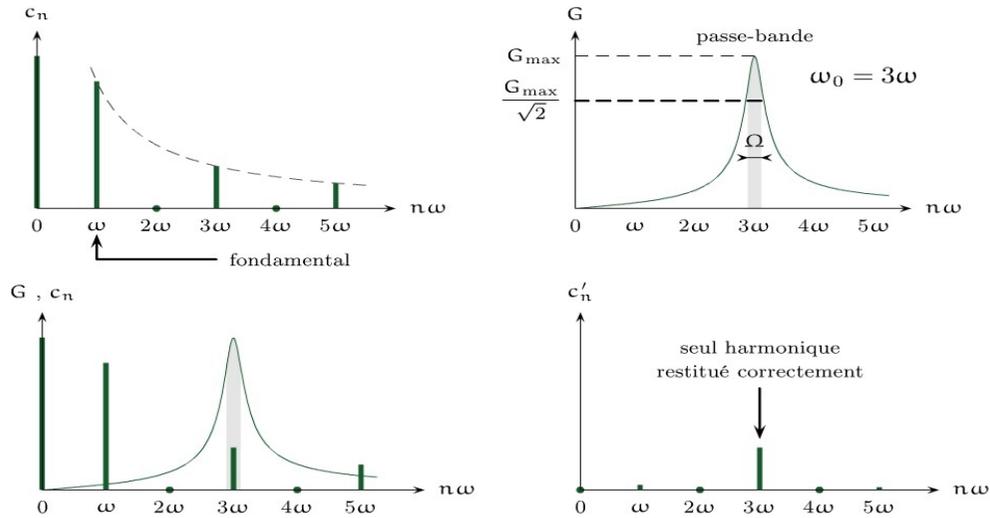


Fig. 23.1: Filtrage d'un créneau par un passe-bande très sélectif.

On voit bien qu'une seule harmonique sur le spectre de sortie, ce qui nous permet de comprendre l'expérience introductive.

On peut rapidement étudier la sélectivité du filtre en fonction du facteur de qualité.

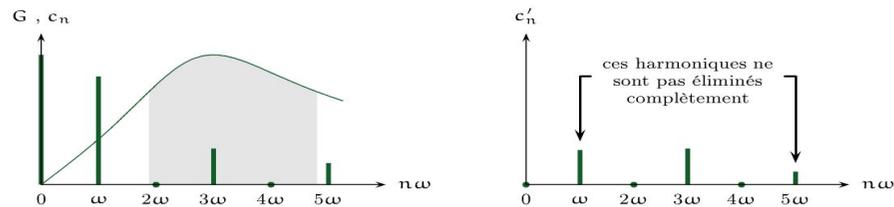


Fig. 23.2: Filtrage d'un créneau par un passe-bande peu sélectif.

On peut comparer visuellement les résultats du filtrage avec deux valeurs très différentes du facteur de qualité : les courbes de la figure 23.3 ont été tracées pour $Q = 1$ et $Q = 40$.

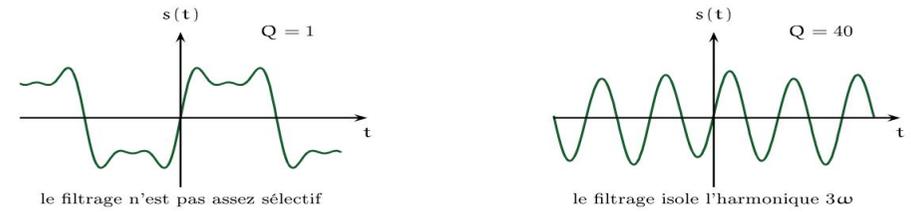


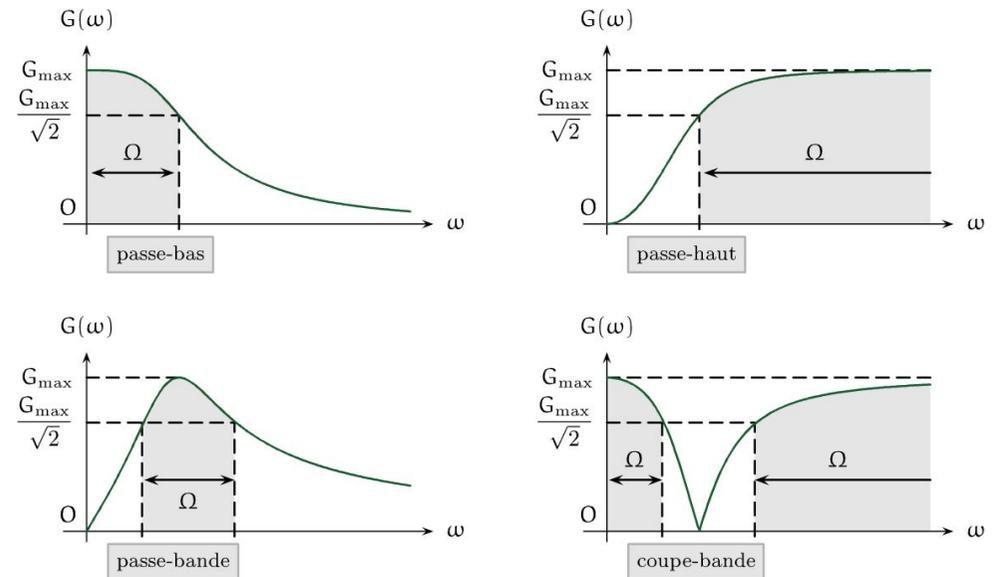
Fig. 23.3: Comparaison de deux filtrages.

2.5 Généralisation

On a étudié qu'un filtre d'ordre 2. En étudiant les filtres d'ordre 1 on peut généraliser l'étude d'un filtre d'un ordre supérieur à 2. En effet la fonction de transfert peut **toujours** s'écrire comme une combinaison de fonction de transfert d'ordre 1 et d'ordre 2. Les expressions des gains et de phase s'ajoutent alors :

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 \implies G_{dB} = G_{dB,1} + G_{dB,2} \quad \text{et} \quad \arg \underline{H} = \arg \underline{H}_1 + \arg \underline{H}_2$$

Il existe quatre types de filtres, qui sont représentés ici en fonction de leur gain (pas en dB, donc pas d'asymptotes) :



Applications des filtres :

- *Filtre passe-bas (dérivateur)* : Ils servent à éliminer les parties du signal hors de la bande passante utile, qui pourraient générer des distorsions (intermodulation,

Crénelage) par la suite. Pour le signal audio, le passe-bas atténue les aigües et amplifie les basses. Une alimentation en courant continu est un filtre passe-bas qui élimine les restes d'ondulation du redresseur.

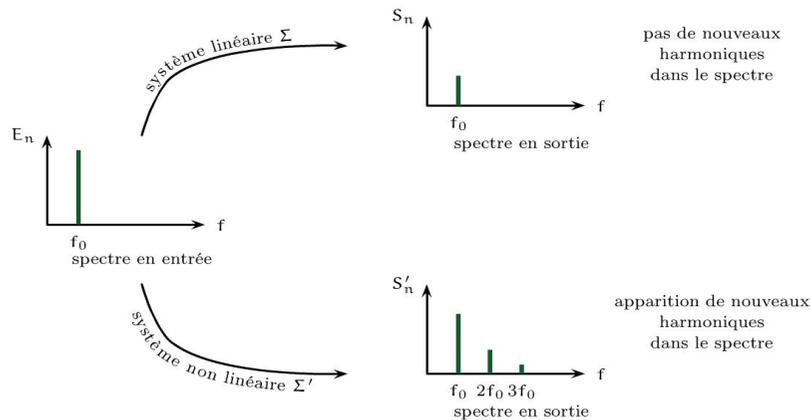
- **Filtre passe-haut (intégrateur) :** Dans le traitement de l'image, le dérivateur accentue le contour. Pour le signal audio, c'est un atténuateur de graves et un amplificateur d'aigües. Des filtres passe-haut éliminent la composante continue du signal. Ce qui est très utile avant les haut-parleurs sinon, en présence de la composante continue, la membrane viendrait se figer contre la paroi.
- **Filtre passe-bande :** Sélection de fréquence précise pour la radio ou la télévision. Le filtre est placé dans le récepteur après l'antenne (cf. bande de Carlson).
- **Filtre coupe-bande :** Le distorsiomètre fonctionne sur le principe d'un filtre rejeeteur de bande. Puisqu'il cherche à comparer la valeur efficace des harmoniques seules sur la valeur de toutes les fréquences du spectre.

Transition : On se pose la question de savoir comment le signal est transmis lorsque le système n'est plus linéaire.

3 Traitement non-linéaire d'un signal analogique

☞ Il faut traiter à fond un exemple de système non-linéaire. Plusieurs choix sont proposés dans cette section.

3.1 Action d'un système non linéaire ([3] p.17)



Un système non linéaire va augmenter le nombre d'harmoniques du spectre du signal d'entrée. Nous allons traiter un exemple de système non-linéaire.

☞ La fonction de transfert d'un système n'est défini que pour les **systèmes li-**

néaires! On ne parle pas non plus de filtrage pour les systèmes non-linéaires mais plutôt de **traitement analogique**.

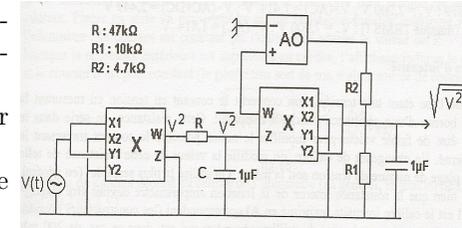
3.2 Voltmètre TRMS ([4] p.277)

Le principe d'un voltmètre analogique TRMS (*True Root Mean Square*) fonctionne sur un comportement non linéaire. On cherche à obtenir la valeur de la tension efficace :

$$V_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v_e^2(t) dt} = \sqrt{\langle v_e^2(t) \rangle}$$

A l'aide de composant non linéaire (un multiplieur) on multiplie la tension d'entrée par elle-même.

Puis avec un filtre passe-bas, on effectue la valeur moyenne du signal à la sortie du multiplieur. Finalement à l'aide d'un extracteur de racine carré on obtient la valeur efficace de la tension.



Le filtre passe-bas coupe les hautes pulsations et ne conserve que la pulsation correspondant à la composante continu du signal si ça fréquence de coupure est basse.

☞ Une plaquette est toute montée au laboratoire. Donc se référer à la notice.

3.3 Détection synchrone ([4] p.219)

Supposons que nous souhaitions mesurer l'amplitude A_x d'un signal sinusoïdal (le signal contenant l'information) : $v_x(t) = A_x \cos \omega_x t$ mais que ce signal soit superposé à un signal de "bruit" $v_b(t)$ dont la valeur efficace est (très) supérieur à celle de v_x .

On va alors faire une démodulation synchrone en réalisant un changement de fréquence sur les signaux qui ramène les fréquences utiles au voisinage de la fréquence nulle. Il suffit ensuite d'appliquer un filtre passe-bas à très faible bande passante pour pouvoir ne sélectionner que la composante continue du signal.

On multiplie le signal total (bruit + information) $v_t(t) = v_x(t) + v_b(t)$ par un signal de référence de même fréquence que v_x , en phase avec lui et de grande amplitude A_y : $v_y(t) = A_y \cos \omega_x t$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} v_s(t) &= kv_t \cdot v_y = k(A_x \cos \omega_x t + v_b) \cdot A_y \cos \omega_x t \\ &= k \left(\frac{A_x A_y}{2} + \frac{A_x A_y}{2} \cos 2\omega_x t + A_y v_b \cdot \cos \omega_x t \right) \end{aligned}$$

Cette tension est appliqué à un filtre passe bas qui peut se réduire à une filtre passe-bas RC de pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{RC} \ll \omega_x$. A la sortie de ce filtre on récupère la composante continue : $k \frac{A_y A_x}{2}$ proportionnelle à la grandeur à mesurer et on élimine le

terme de pulsation $2\omega_x$. Quant au “bruit” on n’en retient que les composantes fréquentielles, situées sensiblement dans l’intervalle $[\omega_x - \omega_c; \omega_x + \omega_c]$ qui après multiplication par $\cos \omega_x t$ se retrouvent dans la bande passante du filtre passe-bas.

Ce système est donc équivalent à un filtre passe bande de pulsation centrale ω_x (donc automatiquement adapté au signal) et de bande passante $2\omega_c = 2/RC$. Son facteur de qualité est $Q = \omega_x/\Delta\omega = \omega_x/2\omega_c = RC\omega_x/2$.

☞ *Une plaquette est également montée.*

☞ *On peut également étudier un signal de sortie saturée par un AO recevant un signal d’entrée sinusoïdale (cf. [3] p.17). Les discontinuités étant brutales comme dans le cas du signal créneau, on aura alors beaucoup d’harmoniques supplémentaires d’amplitude non négligeable : phénomène de Gibbs.*

Conclusion

→ On peut parler du filtrage en optique : la strioscopie. On peut à l’aide de certain diaphragmes couper les fréquences spatiales hautes et donc ne laisser passer que la composante continu de l’image (la forme globale). Ou on peut couper les basses fréquences spatiales et ne laisser passer que les détails correspondant aux hautes fréquences spatiales (tramage de période petite). L’analogie n’est pas parfaite puisqu’en électricité, le système doit respecter le principe de causalité et on ne peut pas avoir de fréquences temporelles négatives, alors qu’en optique on peut avoir des fréquences spatiales négatives.

→ On peut également parler des filtres actifs. C’est-à-dire qui utilise des composants actifs comme les A.O. Ces dipôles possèdent une caractéristique qui ne passent pas par l’origine.

Questions

- ↳ Citer des applications des filtres analogiques.
- ↳ Comment fonctionne une radio ?
- ↳ Quel est le critère de stabilité pour un système linéaire à invariance temporelle ?
- ↳ Pourquoi ne pas traiter des systèmes d’ordre supérieur à 2 ?

Sixième partie
Leçons sur les Ondes.

LP 24 — Ondes progressives, ondes stationnaires.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 09/04/2014 par *Pauline Dujardin* et corrigée par *G. Fruit*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Exemples de phénomènes de propagation unidimensionnels. Ondes progressives, ondes stationnaires. Aspects énergétiques.*

Rapports du Jury

☞ (2013) – “Cette leçon peut être l’occasion d’introduire le modèle limite de l’onde plane progressive harmonique et de la comparer éventuellement à l’onde sphérique.”

☞ (2009, 2010) – “Il est important de savoir justifier la forme générale d’une onde progressive et d’une onde stationnaire. Si la notion d’impédance est utilisée, il faut préciser pour quel type d’onde elle s’applique.”

☞ (2008) – “Les notions d’impédance sont rarement maîtrisées. Un milieu unidimensionnel peut aussi être dispersif alors que les candidats n’envisagent trop souvent que des signaux monochromatiques.”

☞ (2007) – “Les notions d’impédance sont rarement maîtrisées. Un phénomène de propagation unidimensionnelle peut éventuellement être dispersif.”

☞ (2006) – “Pour éviter de répéter de lourds calculs, il est recommandé de développer les analogies entre les différents exemples. Il faut également consacrer du temps à des notions plus concrètes ainsi qu’à l’aspect énergétique, souvent sacrifié.”

☞ (2005) – “ Une onde stationnaire n’est pas forcément résonante.”

☞ (1999) – “Les notions d’onde progressive, d’onde stationnaire, doivent être illustrées par des exemples avec des ondes mécaniques ou électromagnétiques. On veillera à distinguer l’onde stationnaire de l’onde stationnaire résonante dans un système fermé.”

Bibliographie

- [1] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.
- [2] Brébec, *Ondes*, 2^{ème} année. Hachette, Hprépa, 2004.
- [3] Olivier S., *Physique PC-PC**. Tec & Doc, 2009.
- [4] Garing, *Ondes mécaniques et diffusion*. ellipses, 1998.
- [5] Faroux, *Mécanique des fluides et ondes mécaniques*. Dunod, 1999.

Plan

1 Équation de propagation ([1] p.559 + [3] p.587)

- 1.1 Modélisation d’une corde vibrante
- 1.2 Équation de d’Alembert
- 1.3 Analogies avec d’autres phénomènes de propagation ([2] p.61)

2 Solutions de l’équation de d’Alembert ([1] p.565 + [2] p.32)

- 2.1 Solution générale
- 2.2 Ondes progressives et notion d’impédance
- 2.3 Une base de solution particulière : les OPPH
- 2.4 Ondes stationnaires

3 Aspects énergétiques

- 3.1 Ondes progressives et vitesse de propagation de l’énergie ([2] p.64)
- 3.2 Ondes stationnaires ([1] p.581)

Introduction

- Idée du phénomène de propagation : vaguelette à la surface de l’eau ou ola dans un stade.
- étude unidimensionnelle
- Définition d’une onde [1]. Dégager quelles grandeurs se propagent.
- études d’ondes régies par l’équation de d’Alembert, sans phénomènes dissipatifs

1 Équation de propagation ([1] p.559 + [3] p.587)

1.1 Modélisation d’une corde vibrante

Raideur et poids négligé.

1.2 Équation de d’Alembert

Hypothèses de faible déformation.

1.3 Analogies avec d’autres phénomènes de propagation ([2] p.61)

Analogie électromécanique.

2 Solutions de l’équation de d’Alembert ([1] p.565 + [2] p.32)

2.1 Solution générale

2.2 Ondes progressives et notion d’impédance

2.3 Une base de solution particulière : les OPPH

On utilise la linéarité de l’équation de propagation et la simplicité de l’onde plane.

2.4 Ondes stationnaires

➤ **Expérience** : Corde de Melde.

3 Aspects énergétiques

3.1 Ondes progressives et vitesse de propagation de l’énergie ([2] p.64)

On définit la propagation d’énergie dans le cas d’un câble coaxial.

3.2 Ondes stationnaires ([1] p.581)

On applique au cas de la corde de Melde

Questions pour faire réfléchir

- Quelles sont les expériences qui pourraient illustrer cette leçon ? Les animations Maple ?
- Quelles sont les causes de dissipation d'une onde sonore ?
- Dites tout ce que vous savez sur les solitons.
- Est-ce que l'équation de la chaleur est une équation de propagation ?
- Où est répartie l'énergie dans une onde stationnaire ?
- Quel est l'effet du poids sur la corde de Melde ?
- Quel est l'intérêt des modes propres d'une onde stationnaire, par exemple dans le domaine acoustique ?

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

→ Agrégation 2013 - Note : 07/20

Commentaires personnels : J'avais prévu de présenter le plan suivant : Intro : introduction historique sur la vibration des cordes observée par Pythagore, mise en équation par d'Alembert bien plus tard, etc.

- 1. Exemples de phénomènes de propagation unidimensionnels. 1.1. Vibration transverse d'une corde. 1.2. Propagation dans un câble coaxial. 1.3. Analogies, équations de couplage.

- 2. Propagation 2.1 Solution de l'équation de d'Alembert, influence des conditions initiales. 2.2. Équations de couplage et impédance, conditions aux limites. 2.3 Aspects énergétiques.

- 3. Ondes stationnaires. 3.1 Forme des solutions. 3.2. Résolution. 3.3 Aspects énergétiques.

J'ai perdu trop de temps à présenter les deux exemples du début et aux 50 minutes j'ai du m'arrêter à mon §2.2. Ce qui fait que je n'ai parlé ni des aspects énergétiques ni des ondes stationnaires, soit des 2/3 du sujet. Je conseille de passer l'une des mise en équation à la trappe et simplement en donner le résultat, à moins d'être très rapide. J'ai essayé d'être proche de l'expérimental pour présenter les hypothèses (corde tendue, ARQS, etc.) : j'avais la corde de Melde avec pot vibrant + câble coaxial + corde à sauter attachée à un radiateur ; je crois que ça a été apprécié.

Questions et commentaires du jury : Les questions qui m'ont ensuite été posées ont essentiellement eu pour objectif de faire le point sur ce que j'aurai voulu présenter.

LP 25 — Ondes acoustiques.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 16/04/2014 par *Joévin Giboudot* et corrigée par *G. Fruit*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Ondes acoustiques dans les fluides.*

Rapports du Jury

☞ (2013) – “Le candidat est libre d'étudier les ondes acoustiques dans un fluide ou un solide élastique.”

☞ (2012, 2011) – “Cette leçon peut être l'occasion d'introduire le modèle limite de l'onde plane progressive harmonique et de la comparer éventuellement à l'onde sphérique.”

☞ (2009) – “L'aspect énergétique est trop souvent négligé. L'approximation acoustique est souvent mal dégagée. Pour 2009, le terme *sonore* est remplacé par le terme *acoustique* pour indiquer qu'on peut s'intéresser à des signaux non audibles par l'homme¹.”

☞ (2008) – “Cette leçon peut être l'occasion d'introduire le modèle limite de l'onde plane progressive harmonique et de la comparer éventuellement à l'onde sphérique.”

☞ (2007) – “L'aspect énergétique est trop souvent négligé. On remarquera que les ondes sonores ne sont pas toutes planes progressives et harmoniques.”

☞ (2001) – “L'aspect énergétique est souvent mal maîtrisé.”

☞ (1999) – “Est-il vraiment indispensable de se placer d'emblée dans le cadre formel de la mécanique des fluides? Un modèle unidimensionnel et scalaire n'est pas sans intérêt pédagogique². Le développement de l'aspect énergétique doit faire apparaître une densité d'énergie et un vecteur de propagation³.”

Bibliographie

[1] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.

[2] Olivier S., *Physique PC-PC**. Tec & Doc, 2009.

[3] Garing C., *Les 1001 questions de la physique en prépa, PC-PC**. Ellipses, 2006.

Plan

1 Propagation d'une onde acoustique dans un fluide

1.1 Description et modélisation ; approximation acoustique ([1] p.586)

1.2 Mise en équation et linéarisation ([1] p.586)

1.3 Équation de d'Alembert pour la surpression ([1] p.587 + [2] p.617)

1.4 Célérité dans un gaz parfait ([1] p.589)

2 Solution de l'équation de propagation

2.1 Ondes planes progressives harmoniques ([1] p.590)

2.2 Relation entre p_1 et v_1 ([1] p.592)

3 Aspects énergétiques

3.1 Bilan d'énergie ([2] p.622)

3.2 Cas de l'OPPH ([1] p.597)

1. Le titre de la leçon en 2008 était le suivant : Ondes sonores dans les fluides.
2. Une telle démarche est particulièrement bien présentée dans l'ouvrage de C. Garing intitulé *Ondes mécaniques et diffusion.*, aux éditions ellipses.

3. Le titre de la leçon était alors le suivant : Ondes sonores dans les fluides. Approximation acoustique. Aspect énergétique. (PC ou 1er CU).

3.3 Intensité et niveau sonore ([1] p.597)

4 Réflexion et transmission entre 2 milieux

4.1 Cadre de l'étude ([1] p.599)

4.2 Conditions de continuité ([1] p.600)

4.3 Coefficients de réflexion et de transmission ([1] p.599)

4.4 Adaptation d'impédance ([1] p.603 Test 20.3 + [3] Q64 p.23)

Introduction

On continue l'étude de la physique des ondes avec les ondes acoustiques (ici dans les fluides).

► **Expérience :** GBF + HP + Micro + Oscilloscope. On voit un phénomène périodique associé au son qui sort du HP. Et la fréquence est liée à la hauteur du son. Elle est également liée à la fréquence de vibration de la membrane du HP qui fait vibrer une couche d'air et créer une onde de surpression.

Le son (onde acoustique) nécessite un milieu élastique pour se propager à la différence de la lumière (exp. possible : cloche à vide + réveil).

1 Propagation d'une onde acoustique dans un fluide

1.1 Description et modélisation ; approximation acoustique ([1] p.586)

On pose la description eulérienne des champs dû à la perturbation. Puis on introduit l'approximation acoustique (la condition d'infiniment petit du premier ordre se situe sur des termes adimensionnés (par exemple $p_1/p_0 \ll 1$ et non $p_1 \ll 1$).

1.2 Mise en équation et linéarisation ([1] p.586)

On écrit les équations nous servant à dériver l'équation de propagation pour la surpression, à savoir les équations d'Euler, de conservation de la masse et d'évolution isentropique, toutes linéarisés à l'ordre 1.

Pour l'évolution isentropique, il faut juste remarquer que χ_s correspond à la pente de μ en fonction de p :

$$\text{Pente} \Rightarrow \text{approximation locale} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_s = \mu_0 \chi_s \implies \mu_1 \approx (\mu_0 \chi_s) p_1$$

1.3 Équation de d'Alembert pour la surpression ([1] p.587 + [2] p.617)

On trouve alors l'équation de d'Alembert pour la surpression. Pour l'équation de propagation du champ des vitesses il faut que l'écoulement soit irrotationnel ($\vec{r} \otimes \text{ot} \vec{r} \otimes \vec{v} = \vec{j} \text{r} \text{div} \vec{v} - \Delta \vec{v}$)

1.4 Célérité dans un gaz parfait ([1] p.589)

On calcul, grâce au modèle construit, la célérité d'une onde acoustique dans un gaz parfait. On compare à $c_{acier} = 4000\text{m/s} > c_{eau} = 1500\text{m/s} > c_{air} = 340\text{m/s}$.

Newton, évolution isotherme ne trouvait pas la bonne valeur. Laplace trouve la bonne valeur mais pas pour la bonne raison (il pensait que l'évolution était adiabatique car les échanges thermiques n'avaient pas le temps de se faire).

Vérification de l'approximation adiabatique, plus simple ici car on a la valeur de la vitesse : $f \ll 10^9$ Hz.

2 Solution de l'équation de propagation

2.1 Ondes planes progressives harmoniques ([1] p.590)

On recherche des solutions en OPPH car dans tuyau l'onde est plane et parce que l'analyse de Fourier nous permet de décomposer toute solution en somme de fonction harmonique.

On compare cette solution avec l'onde sphérique (amplitude et surface d'onde).

On passe en complexe car équation de propagation linéaire mais pour les grandeurs énergétiques il faut repasser en notation réelle.

2.2 Relation entre p_1 et v_1 ([1] p.592)

Caractère longitudinal de l'onde : $\vec{v}_1 // \vec{u}$ avec \vec{u} la direction de propagation de l'onde.

On définit l'impédance acoustique $Z_a = \frac{p_1}{v_1} = \mu_0 c$ qui est une caractéristique du milieu et de la surface du milieu car pour un tuyau ouvert l'impédance de l'air est nulle car la surface est infinie. Donc pour l'étude de système où la section varie on définit $Z_a = \frac{p_1}{v_1 S}$ et on voit apparaître le débit volumique.

Analogie rapide avec l'électricité (concept type force/ concept type vitesse).

Pour une onde se propageant selon $-\vec{u}$ alors $Z_a = -\mu_0 c$.

La valeur de l'impédance acoustique est valable pour des ondes non planes (cf. [1] Test 20.1 p.594) et non harmoniques (analyse de Fourier)

3 Aspects énergétiques

3.1 Bilan d'énergie ([2] p.622)

Onde acoustique : onde de vitesse (énergie cinétique : déplacement des particules) + onde de pression (énergie potentielle : travail des forces de pression).

On calcul le puissance échangée à travers une surface S :

$$\mathcal{P} = \iint_S p_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{d}S = \iint_S \vec{H} \cdot \vec{d}S$$

avec \vec{H} le vecteur densité de flux de puissance sonore (ou courant énergétique) en W/m^2 .

On écrit $\text{div}(p_1 \vec{v}_1)$ et on définit l'énergie volumique comme $e = e_c + e_p = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2}\chi_s p_1^2$. Et donc on a

$$\text{div} \vec{H} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \rightarrow \text{Conservation de l'énergie}$$

3.2 Cas de l'OPPH ([1] p.597)

On a $p_1 = \mu_0 c v_1$ avec $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}$. Cela implique que $e = 2e_c = 2e_p$ on a équipartition de l'énergie. Et $\vec{H} = \frac{p_1^2}{\mu_0 c} \vec{u} = \frac{p_1^2}{Z_a} \vec{u}$.

Relation vraie pour toute onde plane **progressive** non nécessairement harmonique. Pour une onde stationnaire cette relation n'est plus valable.

3.3 Intensité et niveau sonore ([1] p.597)

On définit l'intensité sonore (ou acoustique) $I = \langle ||\vec{H}|| \rangle$ en W/m^2 . Et donc avec l'OPPH on a $I = \frac{p_{1m}^2}{2Z_a}$.

Niveau sonore : $I_{dB} = 10 \log I/I_0$ avec $I_0 = 10^{-12} \text{W/m}^2$ le seuil limite de perception pour une fréquence de 1kHz.

Échelle logarithmique car l'oreille est un capteur logarithmique et on le seuil de douleur est de 1W/m^2 donc on a 12 décades de sensibilité.

Pour un niveau sonore de 120dB à une fréquence de 1kHz, on vérifie l'**approximation acoustique** par des ordres de grandeurs $p_{1m} \approx 30 \text{Pa} \ll p_0$ et $v_{1m} \approx 0,1 \text{m/s} \ll c$.

4 Réflexion et transmission entre 2 milieux

Faire cette partie sur transparent. En allant vite sur la section 1 et 3 pour avoir du temps pour justifier les conditions de continuité et faire des ordres de grandeurs.

4.1 Cadre de l'étude ([1] p.599)

On considère une onde incidente et réfléchié dans le milieu 1 caractérisé par Z_1 et une onde transmise dans le milieu 2 (Z_2). Les deux milieux sont séparés par un dioptré acoustique de surface constante S .

4.2 Conditions de continuité ([1] p.600)

On a conservation du débit volumique donc ici de la composante normale de la vitesse (car section constante). Donc $v_1(0, t) = v_2(0, t)$.

Continuité de la pression (PFD sur une tranche de fluide dont on fait tendre l'épaisseur et donc la masse vers 0) : $p_1(0, t) = p_2(0, t)$.

4.3 Coefficients de réflexion et de transmission ([1] p.599)

On définit les coefficients de réflexion et de transmission **à l'endroit** où se produit la réflexion et la transmission ($x=0$).

On a $r + t \neq 1$ mais $R + T = 1$. C'est donc bien les coefficients en énergie qui relatent la conservation de l'énergie sonore à l'interface.

4.4 Adaptation d'impédance ([1] p.603 Test 20.3 + [3] Q64 p.23)

- $Z_1 = Z_2 \rightarrow R = 0, T = 1$ pas d'onde réfléchi. Les impédances acoustiques des 2 milieux sont adaptés.
- $R = 1, T = 0$ si $Z_2 = 0$ (tuyau ouvert) ou $Z_2 = \infty$ solide parfaitement rigide. On a une réflexion totale. C'est ce que l'on recherche dans les tuyaux sonores car on va avoir création d'ondes stationnaires résonantes.
- Interface air/eau : $T \approx 0,11\%$. Sous l'eau on entend pas les sons extérieurs.
- Interface air/verre : $T \approx 0,0017\%$. Vitre = double interface donc T^2 très petit. Double vitrage 4 interfaces T^4 encore plus petit. Bonne isolation thermique et phonique.

Application : échographie.

Conclusion

Prochaine leçon on traitera de l'absorption et de la dispersion des ondes dans les milieux ce que l'on a négligé ici.

Questions et Remarques du correcteur

☞ Les ordres de grandeur sont bien choisis. Il faut absolument justifier l'évolution isentropique (adiabatique) et l'approximation acoustique.

➔ Justifier le fait que l'on peut négliger la viscosité du fluide dans l'équation d'Euler. Quelles sont les conséquences si elle n'était pas négligé ?

cf. [2] p.630. Si on a de la viscosité alors on a dissipation de l'énergie et donc une absorption de l'énergie par le milieu.

➔ Citer des ondes transversales ? Peut-on avoir une onde EM longitudinales ?

Les ondes électromagnétiques sont des ondes transversales. Dans un guide d'onde monoconducteur (un seul conducteur) on peut avoir une composante du champ longitudinales : si E est longitudinale alors B est transversale et réciproquement. On a donc une onde qui est mélange de longitudinale et transversale.

➔ Démontrez que $e_p = \frac{1}{2} \chi_s p_1^2$

On part de $\delta W = -pdV = -(p_0 + p_1)dV$ puis on relie dV à $d\mu$ et $d\mu$ à dP par χ_s . En intégrant le travail total on a le terme en $p_0 \cdot p_1$ qui sera nulle car $\langle p_1 \rangle = 0$ et par contre le terme en p_1^2 qui sera non nulle et qui donnera le résultat attendu. On exprime finalement le travail en fonction de l'énergie potentiel volumique : $W = \frac{m}{\mu_0} \cdot (-e_p)$.

➔ Pourquoi est-ce qu'on entend quand même derrière une vitre ? Et pourquoi on entend plus grave ?

En fait l'onde de pression arrivant sur la vitre mais en vibration à la fois la vitre et le support ce qui permet de transmettre une plus grande partie de l'onde. Il n'y a pas que l'interface qui vibre. La vitre filtre les hautes fréquences.

☞ On peut montrer que $\vec{H} = e \vec{c}$. Mais il y a déjà beaucoup de choses à dire dans la leçon.

☞ Plus insister sur la validité des formules pour le type d'onde : progressives/stationnaire, harmonique/non harmoniques, sphérique/plane.

Questions pour faire réfléchir

➔ Que démontre l'expérience de la cloche à vide à l'intérieur de laquelle sonne un réveil qu'on ne peut entendre de l'extérieur ?

On constate que la lumière n'a pas besoin d'un milieu matériel pour se propager alors qu'une onde sonore si. On peut également entendre que le son est plus aigu avec la cloche donc la cloche filtre les basses fréquences.

➔ Quelles sont les causes de l'atténuation d'une onde sonore lors de sa propagation ?

➔ Quel est le plus petit déplacement d'air auquel le tympan soit sensible ?

➔ À quoi sert la notion d'impédance acoustique et comment peut-on réaliser une adaptation d'impédance ?

➔ Deux sources indépendantes d'intensité sonore 60 dB émettent chacune simultanément ; quel est en décibels, l'intensité sonore résultante ?

[3] p.23 Q59. Les deux sources sont incohérentes, donc on somme les intensités.

➔ Comment avec un haut-parleur et un microphone peut-on simplement mesurer la vitesse des ondes sonores ? Quel domaine de fréquence est-il conseillé d'utiliser ?

[3] p.28 Q79. On mesure plusieurs longueurs d'onde en reculant le microphone et connaissant la fréquence de l'onde émise par le HP on remonte à la célérité de l'onde.

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ Agrégation 2010 - Note : 14/20 :

Questions et commentaires du jury : ordre grandeur de la vitesse du son dans un solide ? Comment fonctionne l'émetteur à ultrason utilisé (celui du dural) ? Par analogie avec un autre domaine de la physique, démontrer l'expression du Poynting des ondes acoustiques. Quelle est la polarisation associée aux ondes longitudinales (par analogie avec l'électromagnétisme) ?

LP 26 — Propagation dans un milieu dispersif.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 29/01/2014 par *Aurélié Condomines* et corrigée par *G. Fruit*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Propagation dans un milieu dispersif : vitesse de phase, vitesse de groupe. Paquets d'ondes planes et évolution. Exemples.*

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012) – “Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.”

☞ (2010, 2009) – “Il convient de ne pas consacrer trop de temps à présenter les circonstances (rares), où la vitesse de groupe ne s'interprète pas comme vitesse de transport de l'énergie.”

☞ (2008, 2007) – “Les candidats ont à leur disposition une petite animation qui permet d'illustrer les notions délicates que sont la vitesse de phase et la vitesse de groupe.”

☞ (2001) – “La notion de paquet d'ondes ne se réduit pas à la superposition de deux ondes. Lorsqu'ils décrivent un paquet d'onde beaucoup de candidats oublient que k et ω sont reliés par la relation de dispersion. Il faut bien sûr s'intéresser aux déformations du paquet d'onde.”

☞ (2000) – “ Une superposition d'un nombre fini d'harmoniques ne permet en aucun cas de définir un paquet d'onde, puisque le phénomène reste périodique. Elle ne peut que constituer un intermédiaire avant le passage à la limite continue, qui doit être étudiée avec soin. Lorsqu'ils décrivent un paquet d'onde tridimensionnel, beaucoup de candidats oublient que k_x , k_y , k_z et ω sont reliés par la relation de dispersion.”

☞ (1999) – “Ne pas se limiter, pour la construction d'un paquet d'onde à la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de fréquences voisines. La déformation du paquet d'onde est rarement envisagée. Des exemples doivent être pris dans les ondes mécaniques et les ondes électromagnétiques par exemple dans la propagation d'information sur fibre optique.”

☞ (1998) – “ Un *battement* n'est pas un *paquet d'ondes*. Le choix d'une représentation de Fourier *spatiale* ou *temporelle* pour représenter un paquet d'ondes dépend de la nature du problème de propagation étudié. Le concept de vitesse de groupe n'a de sens que si le phénomène de propagation étudié est associé à une relation de dispersion. La vitesse de groupe n'est pas toujours la *vitesse de propagation de l'énergie*. ”

☞ (1997) – “Le phénomène d'étalement du paquet d'ondes n'apparaît qu'à l'ordre deux du développement du vecteur d'onde en fonction de la pulsation.”

☞ (1996) – “ Avant de s'intéresser à la vitesse de groupe, il faut introduire le problème que pose la relation $\omega(k)$, en ce qui concerne la propagation dans un milieu dispersif¹. ”

Bibliographie

[1] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.

[2] Olivier S., *Physique PC-PC**. Tec & Doc, 2009.

Plan

1 Étude d'un exemple de milieu dispersif ([1] p.641 + [2] p.675)

1.1 Chaîne infinie de pendules couplés

1.2 Solutions harmoniques et relation de dispersion

1.3 Dispersion et absorption

1. Le titre de la leçon était alors : *Paquets d'ondes planes. Propagation dans un milieu dispersif ; vitesse de phase, vitesse de groupe. Exemples. (P ou 1er CU).*

1.4 Régimes limites

2 Propagation dispersive d'une onde non harmonique ([1] p.648)

2.1 Paquets d'onde, vitesse de groupe

2.2 Étalement du paquet d'onde

3 Application à la propagation d'une onde acoustique dans un pavillon ([1] p.671 + [2] p.691)

3.1 Position du problème

3.2 Mise en équation

3.3 Relation de dispersion

3.4 Rôle du cornet

Introduction

Qu'est-ce qu'un milieu dispersif ? Est-il toujours dispersif ? Comment cela se répercute-t-il sur la propagation d'une onde.

OPPH vs. Paquets d'onde.

1 Étude d'un exemple de milieu dispersif ([1] p.641 + [2] p.675)

1.1 Chaîne infinie de pendules couplés

1.2 Solutions harmoniques et relation de dispersion

1.3 Dispersion et absorption

1.4 Régimes limites

2 Propagation dispersive d'une onde non harmonique ([1] p.648)

2.1 Paquets d'onde, vitesse de groupe

2.2 Étalement du paquet d'onde

3 Application à la propagation d'une onde acoustique dans un pavillon ([1] p.671 + [2] p.691)

3.1 Position du problème

3.2 Mise en équation

3.3 Relation de dispersion

3.4 Rôle du cornet

Questions pour faire réfléchir

- ➔ à quelle condition un problème de propagation admet-il une relation de dispersion ?
- ➔ Les vitesses de phase et de groupe sont-elles mesurables expérimentalement ? Si oui, comment ?
- ➔ Les ondes électromagnétiques dans un Plasma sont-elles toujours transverses ?
- ➔ Un paquet d'onde s'étale-t-il toujours ?
- ➔ Connaissez-vous (ou savez-vous retrouver rapidement) la vitesse de la houle en eau peu profonde ? Conséquences simples² ?
- ➔ Connaissez-vous des cas pour lesquels ω est réel et k complexe ? Et des cas pour lesquels ω est complexe et k réel ?
- ➔ Quelle expérience simple pourriez-vous faire à l'aide d'un simple câble coaxial ?
- ➔ Qu'appelle-t-on dispersion normale ? anormale³ ?

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ Agrégation 2009 - Note : 07/20 :

Questions et commentaires du jury : comment mesurer expérimentalement la vitesse de phase et la vitesse de groupe ? Quand on envoie à l'aide d'un GBF via un haut parleur un signal d'une fréquence que mesure-t-on, la vitesse de phase ou la vitesse de groupe ? Et si on frappe dans les mains ? L'air est-il un milieu dispersif pour les ondes sonores ? Dans le cadre d'un concert que se passe-t-il, qu'entendons-nous si on est tout près, à un mètre, ou à un kilomètre ? Comment démontre-t-on l'expression de la vitesse de phase ? Idem pour la vitesse de groupe ; ne pas faire la démo, mais donner le principe physique qui permet de la faire. Air vraiment pas dispersif pour les ondes électromagnétiques ? Signification du temps caractéristique dans la relation de dispersion du conducteur ? Cas où k imaginaire pur, quel type d'onde obtient-on ? Est-ce un problème que la vitesse de phase soit supérieure à la vitesse de la lumière ? Quelle loi permet d'écrire la première équation pour le cornet acoustique ?

Commentaires personnels : pour cette leçon, ils m'ont dit que le contrat n'avait pas été respecté dans la mesure où je n'avais pas clairement énoncé ce que signifiait PHYSIQUEMENT la vitesse de phase et la vitesse de groupe, et que mes réponses à leurs questions concernant ces deux notions n'ont fait que les conforter dans le fait que je ne maîtrisais pas ces notions. Ils m'ont dit également que le plan convenait mais qu'il fallait que j'ajoute une description physique et que j'approfondisse plus les notions de vitesse de phase et vitesse de groupe, l'exemple pris en acoustique leur a plu. Par contre ils ont regretté que je ne fasse rien des expressions des vitesses de phase et de groupe que je calculais, c'est-à-dire qu'il ne fallait pas donner leur expression et ne rien en dire.

2. On pourra par exemple, composer sur la partie B de l'épreuve A de l'agrégation, millésime 1999.

3. On pourra se plonger avec profit dans les thèmes d'étude proposés par J. Barthes et B. Portelli, ouvrage : *La physique par la pratique*, éditions H&K.

LP 27 — Propagation guidée des ondes.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 04/06/2014 par *Mathilde Pollet* et corrigée par *G. Fruit*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Propagation guidée. Exemples et applications*.

Rapports du Jury

☞ (2012) – “Les notions de modes et de fréquence de coupure doivent être exposées. On peut envisager d'autres ondes que les ondes électromagnétiques.”

☞ (2010) – “La propagation guidée ne concerne pas les seules ondes électromagnétiques ou optiques. Il faut insister sur les conditions aux limites introduites par le dispositif de guidage.”

☞ (2009) – “La propagation guidée ne concerne pas les seules ondes électromagnétiques ou optiques.”

☞ (2007) – “Il s'agit d'une nouvelle leçon consacrée à la propagation guidée des ondes et à ses applications, importantes dans le domaine des télécommunications par exemple.”

Bibliographie

- [1] Brébec, *Ondes, 2^{ème} année*. Hachette, Hprépa, 2004.
- [2] Faroux, Renault, *Électromagnétisme 2*. Dunod, 1998.

Plan

1 Onde guidée entre deux plaques ([1] p.225)

- 1.1 Mise en équation
- 1.2 Mode TEM
- 1.3 Modes TE
- 1.4 Onde dans un guide d'onde rectangulaire

2 Câble coaxial

- 2.1 Présentation
- 2.2 Propagation
- 2.3 Adaptation d'impédance
- 2.4 Pertes dans le câble

3 Fibre optique

- 3.1 Présentation
- 3.2 Fibres optiques à saut d'indice
- 3.3 Fibres à gradient d'indice
- 3.4 Utilisations

1 Onde guidée entre deux plaques ([1] p.225)

- 1.1 Mise en équation
- 1.2 Mode TEM
- 1.3 Modes TE

1.4 Onde dans un guide d'onde rectangulaire

2 Câble coaxial

- 2.1 Présentation
- 2.2 Propagation
- 2.3 Adaptation d'impédance
- 2.4 Pertes dans le câble

3 Fibre optique

- 3.1 Présentation
- 3.2 Fibres optiques à saut d'indice
- 3.3 Fibres à gradient d'indice
- 3.4 Utilisations

Questions et remarques du correcteur

➤ Réexpliquer la condition d'interférences constructives.

➤ Qu'est-ce qu'on appelle un fibre monomode ? En quoi elle améliore la propagation ?

Un seul mode peut se propager. Si on a qu'un seul mode, on a pas de dispersion modale. Attention si fibre monomode, l'ouverture de la fibre va être de la taille de la longueur d'onde et donc il faut revenir à une description ondulatoire.

➤ Qu'est-ce que la dispersion chromatique ?

Deux ondes de fréquence différentes ne se propage pas à la même vitesse. Dans un guide multimode, la dispersion modale est prédominante. La dispersion du guidage évolue en sens inverse de la dispersion chromatique, donc dans une fibre monomode on peut compenser ces dispersions.

➤ Pourquoi vous avez dit on utilise des fils à basses fréquences et un câble coaxial à hautes fréquences ?

Effet de peau à haute fréquence ? ? ?

➤ On cherche une solution en onde plane progressive harmonique pour les deux plans métalliques parallèles, trouve-t-on une solution en onde plane ?

→ Quelle est l'influence d'un guide sur la propagation d'une onde ?

Deux choses importantes dans le guidage :

- dispersion (k et ω ne sont plus liées par une relation linéaire)
- introduction de mode propre dû à la quantification de la fréquence.
- introduction de fréquence de coupure sur la propagation, lorsque $\omega < \omega_c$ ($k^2 < 0$) on a plus de propagation (atténuation exponentielle). Il faut faire apparaître nettement cela dans la leçon.

Si on a un guide d'onde, en l'absence de charge à l'intérieur, on a pas d'extremum du potentiel $\Delta V = 0$ (donc pas de courbure), donc $\text{div } E = 0$.

Questions pour faire réfléchir

→ Comment fonctionne un câble coaxial ?

→ Quelle différence entre la propagation d'une onde dans un espace libre et dans un espace confiné ?

→ Qu'est-ce que la pulsation plasma ? Connaissez-vous sa valeur dans le cas de l'ionosphère ?

→ Quelle est la relation de dispersion pour les ondes susceptible de se propager dans un guide d'onde comme celui disponible dans la collection. Définir ce qu'on appelle un mode TE_{mn} . Comment justifier que dans le montage dont vous disposez, seul le mode TE_{10} se propage ?

→ Quelles différences faites-vous entre fibres optiques à saut d'indice et fibres à gradient d'indice ?

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

→ Agrégation 2009 - Note : 16/20 :

Questions et commentaires du jury : autres domaines de la physique dans lesquels on retrouve de la propagation guidée ? Pertes par effet Joule dans le câble coaxial ? Nom de la gaine entourant le câble coaxial ? Comment expliquer simplement à un élève de seconde que les pertes par effet Joule augmentent avec la résistance, alors qu'ils connaissent la relation $P = U^2/R$? Dans le guide d'ondes assimilé à un conducteur parfait, pourquoi $B_{int} = 0$? Dans le câble coaxial, comment obtenir un ordre de grandeur de L,C,G ? (connaissant U et I). Avantages de la fibre à gradient d'indice par rapport à celle à saut d'indice ? Fréquence de coupure du câble coaxial, questions sur les modes TE et TM. Ordre de grandeur de la vitesse de propagation dans un câble coaxial ? Si on réalise une manip reliant un GBF (sinusoïde) à un câble coaxial de 80 m et qu'on regarde en sortie à l'oscillo, avec différents bouchons ($Z = 50, Z = \infty$) qu'est-ce qu'on voit¹ ?

Commentaires personnels : j'avais basé la leçon sur un découpage en domaines de fréquences utilisées (I. Du fil au câble coaxial II. Guide d'onde (creux) III. Fibres optiques). Je n'ai pas eu le temps de passer plus de 5 min sur les fibres, ce qui était un peu prévu si on veut bien traiter le I. et le II². J'ai sorti le guide d'ondes comme expérience.

1. à noter que cette expérience peut facilement être réalisée au labo et constitue une jolie discussion de la notion d'impédance.

2. Ce commentaire n'engage que son auteur. Il est tout à fait possible -et c'est tout à fait conseillé-

→ Agrégation 2010 - Note : 10/20 :

Questions et commentaires du jury : pour le câble coaxial, vous avez dit vous placer dans l'ARQS, pourtant vous parlez de propagation. N'est-ce pas contradictoire ? Justifiez la forme de l'onde prise pour le guide d'onde rectangulaire. Pourquoi parle-t-on de fibres multi-modes ? Est ce qu'on peut dire que l'impédance caractéristique traduit la résistance du câble ? Exprimez la vitesse de propagation en fonction des données du problème. Que remarque-t-on (on retrouve l'indice du milieu). Quel est l'ordre de grandeur sur le câble utilisé de l'âme et de la gaine ? Commentaires du jury : Vous n'aviez pas tout compris dans cette leçon, néanmoins la première partie vous a sauvé par sa rigueur.

Commentaires personnels : plan : câble coaxial, guide d'onde rectangulaire, fibre optique. Manips : Montrer en branchant un câble coaxial et deux fils sur chacune des bornes de l'oscilloscope que l'effet antenne est bien plus important avec les deux fils (de l'intérêt du câble coaxial). Montrer que la lumière est conduite par le bout de plastique tordu. J'ai fait une première partie très propre, très prépa, avec de jolis calculs. Mais ça m'a pris 30 min. Les deux dernières parties ont donc été traitées trop rapidement. L'existence de plusieurs modes m'a complètement échappé, je n'ai compris ce que c'était qu'au moment des questions.

→ Agrégation 2011 - Note : 06/20 :

Questions et commentaires du jury : Quelle structure a le champ ELM dans une fibre optique à saut d'indice ? Discuter des ondes évanescentes. Vous avez présenté une condition de guidage issue de l'optique géométrique (réflexion totale), que devient cette condition dans un modèle ELM ? Vous avez mesuré une vitesse de propagation dans un câble coaxial, pourquoi cette vitesse est-elle inférieure à la vitesse des ondes ELM dans le vide ? Vous êtes allé un peu vite sur la structure des champs dans le câble coaxial, pouvez-vous expliquer en détail comment déterminer la direction des champs ? Pouvez-vous donner les grandes étapes du calcul de la fréquence de coupure d'un mode (non fondamental) dans un câble coaxial ? Quelle est l'origine physique de cette fréquence de coupure ? Dans le guide d'onde rectangulaire (hyperfréquence), vous vous êtes intéressé à un mode transverse électrique. Existe-t-il d'autres solutions, et dans ce cas, donner les directions du champ E et du champ B ? Vous avez parlé de polarisation, l'onde incidente est-elle toujours polarisée ? Comment traite-t-on alors le problème ? Comme j'avais fait, le jury trouve bien de traiter un modèle ELM du fil infini pour déboucher sur le coax. Il partirait par contre du guide d'onde rectangulaire pour faire émerger le plus tôt possible la notion de quantification, sur laquelle il faut impérativement insister à plusieurs reprises (il m'a été lourdement reproché de ne pas assez insister dessus). C'est un des piliers de la leçon. Le second étant la notion de fréquence de coupure. On m'a reproché avec insistance d'avoir pris du temps pour traiter le modèle électrocinétique du câble coaxial, au détriment d'un modèle ELM clair, plus intéressant, plus physique. Je suis passé trop vite dessus. Le traitement général n'est pas envisageable dans une leçon, mais le jury aurait souhaité la détermination de la structure du fondamental dans le câble et toutes les petites discussions physiques qui en découlent. De même, le jury m'a reproché la pertinence de traiter en optique géométrique la fibre optique dans cette leçon. Il préfère qu'on donne la structure des champs dans la fibre et des discussions sur l'existence d'ondes évanescentes sur les bords. En résumé, le jury préfère voir moins de choses traitées, mais veut des modèles ELM. Il a tout de même aimé les ordres de grandeurs que j'ai réalisés, l'histoire racontée était acceptable (aller des grandes longueurs d'ondes aux petites), et la discussion sur l'étalement du paquet d'onde dans une fibre optique.

de passer plus de 5 minutes sur les fibres optiques. On consultera à ce sujet l'excellent ouvrage de Luc Detwiler : *Qu'est-ce que l'optique géométrique* ainsi que le sujet du concours d'entrée de l'Ens Ulm, section 1997.

→ **Agrégation 2012 - Note : 09/20 :**

Questions et commentaires du jury : guide d'onde monomode : ça sert à quoi ? Comment le résout-on (approche géométrique ou ondulatoire ?). Onde évanescente : que pouvez vous en dire ? Autre type de dispositifs à gradient d'indice ? Comment procède-t-on en pratique pour transporter de l'information ?

→ **Agrégation 2013 - Note : 15/20 :**

Questions et commentaires du jury : J'avais présenté le plan préparé pendant l'année en mettant plus l'accent sur les structures des champs. On m'a demandé de rappeler l'équation de conservation de la charge et celle de Maxwell-Gauss (j'avais inversé les deux), l'équation de conservation de l'énergie ainsi que le sens physique du vecteur de Poynting. On m'a demandé quelles analogies on pouvait faire entre la trajectoire des rayons lumineux dans la fibre optique et la décomposition en deux ondes planes dans le guide d'onde. Ensuite le niveau s'est assez brutalement élevé et un des membres du jury m'a posé pas mal de question sur des analogies entre la leçon et la mécanique quantique : donner la relation de dispersion pour un électron en propagation libre. Exemple du confinement de l'électron qui implique de la quantification (comme pour le guide). Le fait que la vitesse de groupe soit inférieure à c implique-t-il que le photon a une masse ? (Il voulait que je lui parle de la théorie de Broca . . .) et enfin connaissez vous l'effet Casimir et pouvez vous l'interpréter ?

LP 28 — Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le /2014 par et corrigée par . La leçon s'intitulait en 2013 : *Dispersion et absorption d'une onde électromagnétique plane dans un milieu diélectrique. Modélisation microscopique.*

Rapports du Jury

☞ (2010, 2009) – “Les conventions adoptées doivent être précisées avant toute discussion sur la partie imaginaire du vecteur d'onde.”

☞ (2006) – “Il y a souvent confusion entre absorption et atténuation.”

☞ (2001) – “Dans un diélectrique, l'équation de propagation ne peut être écrite sans précaution : en général la permittivité ϵ_r dépend de la fréquence et est complexe. Le modèle de l'électron élastiquement lié ne peut être utilisé sans en discuter les limitations. Les aspects quantiques de l'interaction entre l'onde électromagnétique et la matière peuvent être évoqués.”

☞ (2000) – “Dans un diélectrique, l'équation de propagation ne peut être écrite sans précaution : en général la permittivité ϵ_r , dépend de la fréquence et est complexe. Le modèle de l'électron élastiquement lié ne peut être utilisé sans en discuter les limitations.”

☞ (1999) – “Le modèle de l'électron élastiquement lié n'est pas toujours bien compris. Il est trop souvent assimilé au rayon vecteur noyau-électron, le lien entre le terme de rappel et la force électrostatique n'est pas fait et l'origine du terme de frottement fluide n'est pas interprétée.”

☞ (1998) – “Cette leçon mérite une discussion physique des phénomènes de dispersion et d'absorption, supportée par des modèles de milieux matériels. Il est parfaitement inutile et contreproductif de s'enfermer dans de longs calculs formels sur les parties réelle et imaginaire de l'indice de réfraction.”

☞ (1997) – “Il est parfois utile de distinguer les raies de résonance des autres raies optiques¹.”

Bibliographie

[1] BFR, *Électromagnétisme 4*. Dunod, 1996, 3^{ème} édition.

[2] Pérez, *Electromagnétisme*. Dunod, 4^{ème} édition.

[3] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.

Plan

1 Présentation ([1] p.12 + [3] p.653)

1.1 Grandeurs moyennes ([1] p.12)

1.2 Équation de Maxwell ([1])

1.3 Susceptibilité électrique ([1])

2 Modélisation (microscopique) d'un milieu diélectrique

2.1 Modèle de Drude-Lorentz ou modèle de l'électron élastiquement lié ([2] p.539 + [3] p.658)

2.2 Autres polarisations ([2] p.544 + [1] p.89 + [3] p.656)

3 Dispersion, absorption

3.1 Relation de dispersion ([1] p.201 + [3] p.662)

3.2 Indice complexe ([2] p.548 + [3] p.663)

1. Le titre de la leçon était alors : *Dispersion et absorption d'une onde électromagnétique plane dans un milieu diélectrique. Modélisation microscopique. (PC)*.

3.3 Application : Loi de Cauchy ([1] p.205)

Introduction

➤ **Expérience** : On disperse la lumière blanche à l'aide d'un PVD. On expliquera pourquoi la lumière est déviée en fonction de sa longueur d'onde.

➤ **Expérience** : On fait passer des ondes centimètres dans un cuve rempli d'eau. On constate que l'eau absorbe ces ondes. Pour bien montrer l'absorption il faut faire varier la distance. Il faut dire Beer-Lambert.

On a vu les conducteurs dans lesquels les charges pouvaient se déplacer librement. Et maintenant on va voir les diélectriques dans lesquels on a des charges liés.

1 Présentation ([1] p.12 + [3] p.653)

1.1 Grandeurs moyennes ([1] p.12)

Les champs microscopiques $\rho_{micro}(\vec{r}, t)$, $\vec{e}(\vec{r}, t)$ et $\vec{b}(\vec{r}, t)$ varient sur des distances de l'ordre atomique. Donc on moyenne ces champs.

$\vec{E} = \langle \vec{e}(\vec{r}, t) \rangle_{R=10nm}$ pareil pour la densité de charges.

1.2 Équation de Maxwell ([1])

Polarisation de l'atome sous l'effet d'un champ électrique.

On introduit le vecteur polarisation $\vec{P} = \frac{\sum_i \delta \vec{p}_i(\vec{r}, t)}{\delta \tau}$.

Puis on introduit la densité de courant de charges liés $\vec{j}_{lie}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Il n'y a pas de déplacement réel de charges.

On trouve alors l'expression de la densité volumique de charges liés $\rho_{lie} = -div \vec{P}$.

On introduit le vecteur déplacement électrique \vec{D} et on réécrit les équations des Maxwell dans ces conditions (milieux non magnétiques).

1.3 Susceptibilité électrique ([1])

Montrer le produit de convolution en réel pour justifier le passage dans l'espace de Fourier.

On définit un milieu LHI.

➤ **Quel est le lien général dans un milieu linéaire entre \vec{P} et \vec{E} ?**

Si χ est un tenseur alors le milieu est anisotrope et on a de la biréfringence qui apparaît. Si on suppose le milieu homogène (ne dépend que de $r - r'$), stationnaire ($t - t'$) et isotrope (χ n'est pas un tenseur) : $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \iint \chi(\vec{r} - \vec{r}'; t - t') \vec{E}(\vec{r}'; t') dt' d\vec{r}'$. La loca-

lité spatiale amène $\chi(\vec{r} - \vec{r}'; t - t') = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \chi(t - t')$. Donc on arrive à $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi(t - t') \vec{E}(\vec{r}; t') dt'$.

➔ **Comment on justifie le passage à l'espace de Fourier ? (cf. question)**

Dans l'espace réel, on a un produit de convolution qui se simplifie dans l'espace de Fourier.

On introduit le tenseur susceptibilité diélectrique : $\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$.

On définit \vec{D} en définissant le paramètre ϵ : $\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$.

2 Modélisation (microscopique) d'un milieu diélectrique

Microscopique car on regarde au niveau de l'atome, de la molécule, de l'ion.

2.1 Modèle de Drude-Lorentz ou modèle de l'électron élastiquement lié ([2] p.539 + [3] p.658)

Modèle phénoménologique (il faudrait faire la théorie quantique pour avoir le modèle théorique) qui retranscrit bien les observations.

Hypothèses :

- Atomes à un électron.
- L'électron est dans un puits de potentiel carré (soumis à une force élastique $-k \vec{r}$).
- Force de frottement fluide dû à la perte par rayonnement. $-\frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt}$ où τ est le temps de relaxation.

➔ **Pourquoi la force de frottement fluide est pas nulle si la vitesse de l'électron est uniforme ?**

On pose le PDF et on cherche des solutions en complexes. On trouve le lien entre \vec{r} et \vec{E} . Puis on peut exprimer $\vec{P} = -ne \vec{r}$ en fonction de \vec{E} et connaître $\chi(\omega)$.

- Si $\omega \rightarrow 0$ $\chi(\omega) \rightarrow \chi(0)$
- Si $\omega \rightarrow \infty$ $\chi(\omega) \rightarrow 0$

avec $\omega_0 = 10^{15}$ rad/s calculé pour le verre, c'est une fréquence UV et donc on voit que les UV ne traversent pas une vitre.

2.2 Autres polarisations ([2] p.544 + [1] p.89 + [3] p.656)

Polarisation ionique :

$\omega_0 = 10^{12}$ rad/s ce sont les infrarouges. On utilise pour les spectres IR.

Polarisation d'orientation :

Exemple sur les molécules d'eau avec $\omega_0 = 10^{10}$ rad/s ce sont les ondes centimétriques. Retour sur l'expérience d'intro et on comprend pourquoi les ondes centimétriques sont absorbées par l'eau.

3 Dispersion, absorption

3.1 Relation de dispersion ([1] p.201 + [3] p.662)

En prenant une onde plane pour le champ \vec{E} et en le rentrant dans l'équation de Maxwell en écrivant $\text{rot rot } \vec{E}$, on trouve la relation de dispersion sur \vec{k}

3.2 Indice complexe ([2] p.548 + [3] p.663)

On relie $\vec{k} = n k_0 \vec{u}$ à l'indice. On définit $n^2 = \epsilon_r$ avec $n = n' + in''$.

On rentre la valeur de n dans l'expression de l'onde plane et on met en évidence les deux termes : atténuation et propagation.

On définit la vitesse de phase v_ϕ et on la relie à n' . On voit que n' dépend de λ donc on comprend l'expérience introductive.

On définit l'indice d'extinction n'' que l'on relie $\chi(\omega)$.

3.3 Application : Loi de Cauchy ([1] p.205)

On a $n = A + B/\lambda^2$ et on peut retrouver ceci.

Questions

➔ **Comment évolue l'angle de déviation avec la longueur d'onde pour le prisme ?**

➔ **Comment sont générées les ondes centimétriques ? Pourquoi l'émetteur à une forme de cornet ?**

Électron accélérée (diode Gunn). Adaptation d'impédance, extraire le rayonnement de la source.

➔ **Est-ce que les équations de Maxwell sont valables pour les champs microscopiques ?**

Elles sont le plus vrai pour les champs microscopiques. Nous on nivelle.

➔ **Qu'est-ce qui passe si on nivelle sur plus de 10 nm ?**

Il faut niveler sur une taille minimale qui est la longueur atomique et sur une taille maximale qui est la longueur d'onde du rayonnement.

➔ **Quelle est la différence entre diélectrique et un conducteur ? Comment ça se manifeste dans les équations ?**

Dans un diélectrique il n'y a pas de charges libres. Pour un diélectrique on a $\chi(\omega) = \frac{\chi(0)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau}$. Pour les conducteurs on a pas de pulsation ω_0 le couplage est lâche donc pas de pulsation de résonance.

➔ **Qu'est ce que le τ ?**

Le τ dans les diélectriques est lié aux pertes par rayonnement. Alors que dans les conducteurs c'est une force de frottement lié aux chocs (mais attention c'est image est fausse mais c'est pour se représenter)

➔ **Qu'est-ce que la M.Q. modifie par rapport au modèle de Drude-Lorentz ? Comment est modifié en $\chi(\omega)$?**

Pas de trajectoire en M.Q. De plus quand on fait un calcul quantique par l'équation de Schrödinger d'un électron soumis à un potentiel, on trouve une correction de $\chi(\omega)$ par f proche de 1 qui s'appelle force de l'oscillateur.

➔ **Pourquoi on peut écrire $\text{div } \vec{E} = 0$?**

Parce que dans le modèle développé on peut sortir le $\epsilon(\omega)$ du div. (à la base on a $\text{div } D = 0$).

➔ **Quelle est la relation entre n' , n'' et ϵ_r ? Quand est-ce qu'on a absorption ?**

$n^2 = \epsilon_r = \epsilon_r' + i\epsilon_r''$. Quand la partie imaginaire de ϵ_r donc ϵ_r'' est non nulle on a de l'absorption. En fait on a $\text{div}(j \cdot E)$ qui est proportionnelle à la partie imaginaire de ϵ_r donc on a de l'absorption.

☞ *On peut faire un transparent avec l'étude énergétique pour voir le lien entre $\text{div } j \cdot E$ et ϵ_r'' .*

➔ **Jusqu'à quelle vitesse on peut ralentir la lumière ?**

On peut la ralentir jusqu'à quelque cm/s en jouant sur la dispersion anormale. Il suffit de faire varier n très abruptement en fonction de ω . En fait on a une relation du type $v_g = \frac{v_\phi}{1 + \frac{\omega}{c} v_\phi \frac{dn}{d\omega}}$.

Si $dn/d\omega < 0$ alors on est dans la dispersion anormale et on peut avoir $v_g > c$ (c'est juste le sommet du paquet d'onde qui se rapproche rapidement de la pointe mais la pointe ne va pas plus vite que c). Si $dn/d\omega > 0$ alors peut ralentir v_g jusqu'à des cm/s.

➔ **Est-ce qu'on peut avoir n'' négatif ? Dans quelles situations ?**

Oui, dans les laser dans les milieux amplificateurs. Car χ'' est lié à la différence d'électrons sur le niveau excité et ceux sur le fondamental. Lors d'une inversion de population χ'' devient négatif.

Remarques

Si on veut passer plus de temps sur les concepts des ondes EM dans les milieux diélectrique (III), on peut poser les équations de Maxwell en prérequis.

Recentrez la leçon sur les ondes.

Faire le calcul de la susceptibilité.

Peut être enlevé le calcul de $\rho = -\text{div}P$, mais pas sur.

Il faut bien définir un milieu linéaire, homogène, isotrope.

Il faut aller plus lentement sur la construction du potentiel harmonique. Notamment le potentiel en C/r^2 d'après la conservation du moment cinétique, avec $C = r^2\omega$ la constante des aires. Ensuite on fait un développement harmonique (proche de la cuvette).

Dans le schéma sur χ on a bosse assez large pour l'absorption. C'est les molécules d'eau que l'on excite qui vont chauffer le reste des aliments.

Mentionner qu'on peut avoir un n'' négatif.

Questions pour faire réfléchir

➔ **Donner les ingrédients du modèle de Thomson de l'électron élastiquement lié. Justifier soigneusement votre démarche, ainsi que chacun des termes introduits.**

➔ **Qu'est-ce que la formule de Cauchy ?**

➔ **Avez-vous déjà ouvert l'excellent ouvrage de L. Dettwiller intitulé *Qu'est-ce que l'optique géométrique ; fondement et application*. paru aux éditions Dunod ?**

➔ **Quelle serait l'apport d'une démarche semi-classique dans cette leçon (On lira avec grand profit le chapitre Sources atomiques de rayonnement du cours de J.-M. Raimond disponible à l'adresse suivante : <http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/electromagnetisme.htm>) ?**

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ **Agrégation 2013 - Note : 05/20 :**

Questions et commentaires du jury : Questions sur une expérience que j'avais présenté pour mettre en évidence la polarisation d'un diélectrique (à l'aide du condensateur d'Aepinus et de l'électroscope), mais qui est trop dure à interpréter à mon avis. La surface englobant l'élément $d\tau$ que j'avais introduite pour définir la densité volumique dipolaire est elle matérielle ? Pourquoi les charges s'arrêtent à cette frontière ? Et d'autres questions dont je ne me souviens plus...

LP 29 — Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 22/05/2014 par *Maxime Bordoux* et corrigée par *B. Lamine*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Effet de peau. Comportement d'une onde électromagnétique à la surface d'un conducteur.*

Rapports du Jury

☞ (2010) – “Il faut s'interroger sur la dépendance en fréquence de la conductivité. L'étude peut également être menée en haute fréquence.”

☞ (2001) – “Il faut bien caractériser le métal parfait comme limite du métal réel¹.”

☞ (1997) – “Le jury attend que les candidats sachent exprimer le facteur de réflexion d'un métal réel et soient capables d'expliquer la couleur orangée du cuivre.”

Bibliographie

[1] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.

[2] BFR, *Électromagnétisme 4*. Dunod, 1996, 3^{ème} édition.

[3] Mauras, *Électromagnétisme*, 2^{ème} année. PUF, 1999.

Plan

1 Modélisation d'un conducteur

1.1 Modèle de Drude

1.2 Neutralité des conducteurs ([3] p.145)

1.3 Relation de dispersion

2 Comportement à basses fréquences

2.1 Effet de peau

2.2 Aspects énergétiques

2.3 Conséquences

3 Comportement à hautes fréquences

3.1 Pulsation plasma

3.2 Bilan

3.3 Conséquences

1 Modélisation d'un conducteur

1.1 Modèle de Drude

1.2 Neutralité des conducteurs ([3] p.145)

D'après l'équation de conservation de la charge et la loi de Maxwell-Gauss, on remonte à une solution de l'évolution de la densité volumique de charges en fonction du temps et à son temps caractéristiques de retour à l'équilibre.

1. Le titre de la leçon était alors le suivant : *Effet de peau. Réflexion des ondes électromagnétiques planes à la surface d'un milieu conducteur.*

1.3 Relation de dispersion

2 Comportement à basses fréquences

2.1 Effet de peau

2.2 Aspects énergétiques

2.3 Conséquences

3 Comportement à hautes fréquences

3.1 Pulsation plasma

3.2 Bilan

3.3 Conséquences

Conclusion

Questions pour faire réfléchir

➔ Qu'est-ce que la fréquence Plasma ? En donner une interprétation qualitative. Comment expliquer qu'une fine feuille d'or soit jaune en réflexion et verte en transmission ?

➔ Comment concrètement construit-on le modèle du conducteur parfait ?

➔ Dans quel domaine de fréquence s'applique le modèle de Drude ? Le modèle de Drude permet-il d'expliquer les couleurs du cuivre ? [Rapport 1997]

➔ Ordre de grandeur du libre parcours moyen d'un électron dans un métal ?

LP 30 — Propriétés et applications du rayonnement dipolaire électrique.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 11/06/2014 par *Joévin Giboudot* et corrigée par *B. Lamine*.

Rapports du Jury

☞ (2013) – “Certains candidats utilisent un modèle faisant intervenir une charge électrique variable, ce qui ne semble pas très réaliste.”

☞ (2010, 2009) – “La polarisation de l’onde émise n’est pas toujours présentée. L’accent doit être mis sur l’interprétation physique des propriétés du rayonnement dipolaire électrique.”

☞ (2008, 2007) – “Le calcul des champs rayonnés doit être présenté de manière synthétique, en dégageant clairement les approximations successives nécessaires. La discussion des relations obtenues et la présentation d’applications sont essentielles¹.”

☞ (2006) – “L’essentiel ne consiste pas ici à calculer de façon détaillée les champs rayonnés.”

☞ (2004) – “Il faut s’attacher à dégager les hypothèses nécessaires à l’établissement de l’expression du champ électromagnétique créé par le dipôle dans la zone de rayonnement. La polarisation de l’onde rayonnée doit être décrite et l’étude des antennes peut constituer une application de cette leçon.”

☞ (2001) – “Dans cette leçon, il faut éviter les calculs lourds, insister sur les approximations et bien souligner les simplifications qui en découlent. L’aspect énergétique est important. L’application aux antennes doit être connue.”

☞ (1999) – “L’aspect énergétique doit être discuté ainsi que l’effet du rayonnement sur le mouvement du dipôle. Par ailleurs les candidats doivent avoir réfléchi sur le fait qu’un milieu homogène ne diffuse pas. Le rayonnement des dipôles induits par l’onde incidente ne contribue dans ce cas qu’à la propagation.”

☞ (1998) – “Une explication qualitative de la décroissance des potentiels en $1/r$, alors que, dans ce cas, les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} décroissent également en $1/r$, serait la bienvenue.”

Bibliographie

[1] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.

[2] Faroux, Renault, *Électromagnétisme 2*. Dunod, 1998.

Plan

1 Rayonnement d’un dipôle électrique oscillant

1.1 Cadre de l’étude ([1] p.677)

1.2 Approximations ([1] p.678)

1.3 Calculs des champs ([1] p.679 + [2] p.239)

2 Propriétés du rayonnement dipolaire dans la zone de rayonnement

2.1 Caractéristiques des champs ([1] p.681)

2.2 Aspect énergétique du rayonnement ([1] p.681)

2.3 Dipôle oscillante : dipôle de Hertz ([1] p.683)

3 Applications aux antennes

3.1 Lien entre courant et moment dipolaire dans un petit conducteur ([1] p.683)

3.2 Vérification des approximations pour une antenne réelle ([1] p.685)

3.3 Champ rayonné par une antenne de grande taille ([1] p.685)

4 Diffusion Rayleigh

4.1 Modèle de l’électron élastiquement lié ([1] p.688)

4.2 Diffusion et couleur du ciel ([1] p.693)

4.3 Polarisation ([1] p.693 + fin du livre)

Introduction

On place cette leçon à la suite d’un cours sur les ondes électromagnétiques dans le vide et dans les diélectriques. On a déjà vu également le modèle de l’électron élastiquement lié.

► **Expérience [1] p.688 :** On envoie une onde plane issue d’une lampe quartz-iodé sur une cuve contenant de l’eau, en sortie on observe rien de particulier. Par contre si on rajoute quelques gouttes de **lait entier** on observe une légère teinte bleutée de l’eau dans la cuve et on observe bien sur l’écran une couleur rouge sur la lumière sortant de la cuve. Cette leçon permettra de comprendre cette expérience.

On va chercher à comprendre les sources des champs EM : comment sont créés les champs EM et on en verra des applications.

1 Rayonnement d’un dipôle électrique oscillant

1.1 Cadre de l’étude ([1] p.677)

On va chercher à exprimer le potentiel vecteur d’une distribution de charges dans un domaine \mathcal{D} dont la charge totale est nulle mais composé de particules se déplaçant et donc créant des courants. Pour trouver une forme “propagatrice” du potentiel vecteur, on travaille dans la jauge de Lorentz. On peut alors écrire $\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$. La solution pour des particules **non relativistes** (sinon potentiel de Liénard et Wiechert, cf. [2] p.233) est :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{D}} d\tau \frac{\vec{j}(P, t - \frac{PM}{c})}{|\vec{PM}|} \xrightarrow{\text{Discrete}} \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i \in \mathcal{D}} \frac{q_i \vec{v}_i(P_i, t - \frac{|\vec{P}_i M|}{c})}{|\vec{P}_i M|}$$

Ces ont des potentiels dit **retardés** car il tienne compte du temps de propagation de l’information des sources jusqu’au point d’observation.

On passe à la discrétisation des charges car le calcul est plus commode. On ne s’intéresse qu’au potentiel vecteur car il nous permettra d’écrire les champs \vec{B} et \vec{E} .

Cette expression du potentiel est générale mais difficilement exploitable car il faut estimer le retard de chaque charges (sources) présentes dans la distribution. On va faire

1. On pourra consulter avec profit le cours d’électromagnétisme de J.M. Raimond, disponible à l’adresse suivante : <http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/electromagnetisme.htm>

des approximations qui comme on le verra par la suite nous permettent de créer un modèle qui explique quand même bien des observations.

1.2 Approximations ([1] p.678)

On fait deux approximations :

- **Approximation dipolaire** : on observe à des distances tels que $a \ll r$ où a est la taille caractéristique de la distribution.
- **ARQS des sources** : on considère que le retard de chaque source est le même.

On a alors : $t - \frac{|P_i \vec{M}|}{c} \approx t - \frac{r}{c} = t'$ et $|\vec{P}_i \vec{M}| \approx r$. En faisant intervenir le moment dipolaire de la distribution de charges on arrive à :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{p}}(t')}{r}$$

Moyennant ces approximations, on va pouvoir calculer les champs.

1.3 Calculs des champs ([1] p.679 + [2] p.239))

On considère un dipôle dirigé dans la direction z et qui reste dans cette direction. On ne perd pas de généralités car on peut sommer linéairement les contributions d'autres dipôles orientés dans d'autres directions.

Faire le calcul sur transparent du champ $\vec{B}(M, t) = r \vec{\partial} \vec{A}(M, t)$ en coordonnées cylindriques. Dire que pour trouver \vec{E} il est plus simple d'utiliser Maxwell-Ampère et de l'intégrer (plutôt que d'intégrer Maxwell-Faraday où il faut inverser le rot de E).

Revenir au tableau : On va étudier que la zone de rayonnement ou de champ lointain : $a \ll cT (= \lambda) \ll r$. cT correspond à la distance parcourue par l'information sur la durée T (pour un phénomène périodique cela correspond à la longueur d'onde). Cette approximation nous permet de supprimer des termes dans les expressions des champs. On obtient :

$$\vec{B}(M, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi cr} \ddot{\vec{p}}(t') \sin \theta \vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \vec{E}(M, t) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \ddot{\vec{p}}(t') \sin \theta \vec{e}_\theta$$

On va étudier les propriétés de ce rayonnement.

2 Propriétés du rayonnement dipolaire dans la zone de rayonnement

2.1 Caractéristiques des champs ([1] p.681)

On écrit au tableau, les différentes propriétés des champs (décroissance lente, anisotropie, structure locale d'onde plane,...). Le plus important : une charge accélérée rayonne de l'énergie (conversion de son énergie mécanique en énergie de rayonnement). Il faut également parler ici de la polarisation rectiligne des champs qui nous servira dans l'interprétation de l'expérience introductive.

On rappelle que le rayonnement dipolaire a des applications industrielles (antennes), on s'intéresse donc à l'aspect énergétique.

2.2 Aspect énergétique du rayonnement ([1] p.681)

On écrit le vecteur de Poynting (valable quel que soit le type d'onde (plane ou non)) et on remplace l'expression des champs trouvés précédemment.

On intègre cette puissance sur une sphère ou on exprime la puissance par angle solide ce qui nous amène sur le diagramme de rayonnement : $d\mathcal{P}^{ray} = \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = \Pi r^2 d\Omega \implies \frac{d\mathcal{P}^{ray}}{d\Omega} \propto \sin^2 \theta$ car $\Pi \propto \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$.

On trace le diagramme de rayonnement qui correspond à la puissance rayonné par angle solide.

On est resté général sur l'expression du moment dipolaire de la distribution. On va utiliser une distribution qui intervient fréquemment dans des situations physiques.

2.3 Dipôle oscillante : dipôle de Hertz ([1] p.683)

On prend le cas d'un doublet de charges oscillants tel que $\vec{p}(t') = qN\vec{P}(t') = qa \cos \omega t' \vec{e}_z$.

On écrit la puissance moyenne rayonné par le doublet sur une période. On remarque qu'un doublet émet un rayonnement d'autant plus fort qu'il oscille rapidement et que la pulsation intervient à la **puissance 4**.

Les propriétés fondamentales du rayonnement dipolaire ayant été établies, voyons comment elles s'appliquent de façon concrète et, dans cette optique, intéressons-nous aux antennes.

3 Applications aux antennes

Les antennes sont des conducteurs (ou système de conducteur) au sein duquel un courant variable est présent et qui génère, à grande distance, un rayonnement EM.

3.1 Lien entre courant et moment dipolaire dans un petit conducteur ([1] p.683)

On écrit que pour un conducteur de longueur l (petite devant $\lambda = cT$ donc ARQS respecté, on a \vec{j} constant sur l'élément, le courant est le même partout) et de section S , on a $\vec{j} = \frac{\sum_i q_i \vec{v}_i}{lS} = \frac{\dot{\vec{p}}}{lS}$. Or $I = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = \frac{\dot{p}}{l}$. Et donc au final

$$\ddot{\vec{p}}(t') = l\dot{I}(t') = l \frac{dI}{dt'}(t')$$

C'est la variation temporelle de l'intensité qui crée un rayonnement EM dans une antenne. L'

A I et ω fixés, on remarque que si on veut une \mathcal{P}^{ray} grande il faut un l grand. D'où la nécessité de moduler les fréquences pour la radio et éviter de construire des antennes de 3km.

On s'intéresse maintenant au cas d'une antenne réelle.

3.2 Vérification des approximations pour une antenne réelle ([1] p.685)

On a trouvé que pour un système dans l'approximation dipolaire électrique on a $\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sin\theta \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \vec{e}_\theta$. Mais dans le cas d'une antenne réelle $l \approx 1m$ les approximations du modèle sont elles respectées ?

- On a $l \ll r$ si on observe à longue distance, donc **Approximation dipolaire** vérifiée.
- Par contre $l \ll \lambda = cT$ n'est pas respecté car on montre que la puissance optimale transmise par un générateur à une antenne est lorsque $l = n\lambda/2$ donc $\lambda \sim l$. On a un résonance d'antenne car on excite l'antenne selon ses fréquences propres. L'ARQS n'est plus respecté pour une antenne réelle.

On a vu que notre modèle était respecté pour les petits conducteurs. Pour trouver le champ rayonné par une antenne réelle, il suffit de considérer l'antenne comme une somme de petits conducteurs et de sommer les contributions de chacun.

3.3 Champ rayonné par une antenne de grande taille ([1] p.685)

On passe en complexe et on cherche un courant en forme d'onde stationnaire tel que : $I(z, t') = f(z) \exp i\omega t'$ où $f(z)$ définit la répartition spatiale du courant dans l'antenne (typiquement un sinus puisque par les conditions aux limites $I(+l/2) = I(-l/2) = 0$). Le champ infinitésimal crée par un bout d'antenne est :

$$d\vec{E}(M, t) \approx \frac{(i\omega) \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\vec{PM}|} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{|\vec{PM}|}{c} \right) \right] dz f(z) \vec{e}_\theta$$

On se place dans la zone de rayonnement $|\vec{OM}| \gg |\vec{OP}|$ et on garde un terme supplémentaire dans le développement pour la phase : $|\vec{PM}| \approx r - z \cos\theta$. On sort alors de l'approximation que les retards sont tous les mêmes pour tous les conducteurs. On a alors :

$$d\vec{E}(M, t) \approx \exp i\omega t' \frac{(i\omega) \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} dz f(z) \exp \left(iz \frac{\omega \cos\theta}{c} \right) \vec{e}_\theta$$

Pour avoir le champ \vec{E} on somme toutes les contributions : $\vec{E}(M, t) = \int d\vec{E}$. Finalement on arrive au résultat

$$\vec{E}(M, t) \approx r^{\gg l} \exp \left(i\omega t' + i \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sin\theta}{2\epsilon_0 c r \lambda} \underbrace{\int_{-l/2}^{+l/2} dz f(z) \exp \left(i2\pi \frac{z}{\lambda} \cos\theta \right)}_{\text{Facteur de structure}} \vec{e}_\theta$$

Le champ électrique rayonné par l'antenne s'écrit comme le produit d'un terme dépendant uniquement de la position du point par un terme relié à la structure des courants dans l'antenne. Ce dernier terme est le terme de structure de l'antenne.

- Ce facteur de structure intervient en diffraction, on remarque notamment qu'il correspond à la transformée de Fourier spatiale de l'intensité dans l'antenne.
- Chaque petit élément de l'antenne émet une onde qui va interférer avec les ondes émises par les petits éléments voisins qui auront un retard : cf. Principe de Huygens-Fresnel.
- On peut avoir des interférences constructives ou destructives en fonction du facteur de structure choisi et de la disposition des antennes entre elles. On peut alors réaliser des réseaux d'antennes qui font des interférences destructives dans toutes les directions et des interférences constructives dans une direction privilégiée. On améliore la **directivité** de l'antenne et donc la transmission de l'information si le récepteur est à un endroit précis.

On applique cette fois la théorie au cas de l'interaction de la matière avec un rayonnement.

4 Diffusion Rayleigh

4.1 Modèle de l'électron élastiquement lié ([1] p.688)

On fait cette partie sur transparent en allant vite puisqu'on l'a mis dans les prérequis. On écrit le PDF sur le nuage électronique et on en tire l'expression du moment dipolaire en fonction du champ électrique en complexe.

$$\vec{p}_\omega = \left(\frac{Z^2 e^2}{m\omega_0^2} \right) \frac{\vec{E}_\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{i}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

On s'intéresse au cas des pulsations optiques $\omega \approx 10^{15} \text{ rad/s}$ et dans le cas d'un atome d'oxygène on a $\omega_0 \approx 10^{17} \text{ rad/s}$. Donc on a :

$$\omega \ll \omega_0$$

c'est le **régime de Rayleigh**. On peut alors simplifier l'expression précédente :

$$\vec{p}_\omega = \left(\frac{Z^2 e^2}{m\omega_0^2} \right) \vec{E}_\omega \implies \vec{p}(t) = \left(\frac{Z^2 e^2}{m\omega_0^2} \right) \vec{E}_\omega \cos \omega t$$

On peut alors écrire la puissance moyenne rayonnée par les nuages électroniques.

- L'émission d'un rayonnement EM est faite par le nuage électronique sous l'excitation d'un champ électrique sinusoïdale.
- On trouve que la puissance rayonnée est proportionnelle à la puissance 4 de la pulsation du champ exciteur. Donc on voit que la puissance rayonnée pour le bleu est 16 fois plus grande que pour le rouge ($\omega_b \approx 2\omega_r$).

4.2 Diffusion et couleur du ciel ([1] p.693)

On suppose que le spectre du soleil est plat : $E_0(\omega) = E_0 = cte$.

Lorsque le soleil est au zénith il traverse une faible couche d'atmosphère et n'a pas le temps d'épurer son rayonnement donc on l'observe blanc (ou jaune). Par contre si on regarde le ciel à côté du soleil, le rayonnement émis par le Soleil est absorbé par les dipôles de l'atmosphère (nuage électronique du diazote et du dioxygène) et diffusé principalement dans le bleu (pour les courtes distances).

Par contre au coucher de Soleil, l'épaisseur d'atmosphère traversée est très grande et le rayonnement issu du soleil s'est épurer en bleu et il ne reste que les faibles pulsations : le rouge. Avec la réfraction c'est ce qui explique la couleur rouge du soleil lorsqu'il se couche.

On revient sur l'expérience introductive et on l'explique.

4.3 Polarisation ([1] p.693 + fin du livre)

De même on observe un rayonnement diffusé par les molécules de lait (dipôle) qui est polarisé. D'après les formules du champ électrique en zone de rayonnement lorsqu'on regarde perpendiculaire à la cuve l'angle $\theta = \pi/2$ et donc $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_z$.

Le rayonnement incident (onde plane) arrive sur des dipôles orientés selon l'axe verticale qui émettent un rayonnement perpendiculairement à cette direction, donc horizontale et dans notre direction d'observation. On observe bien un rayonnement dans notre direction. Le champ électrique de ce rayonnement est dirigé selon l'axe verticale donc la lumière est partiellement polarisée rectilignement selon cette direction ce que l'on montre en plaçant deux polariseurs à côté, l'un vertical et l'autre horizontal. Le vertical montre un maximum d'éclairement alors que l'horizontal un minimum.

La polarisation rectiligne du rayonnement diffusé est directement la conséquence de l'anisotropie de ce dernier.

Questions et remarques du correcteur

☞ *Bon plan qui correspond aux attentes du jury. Note > 10.*

☞ *bien définir le potentiel vecteur et les approximations effectuées.*

➔ **Redémontrer l'expression de ω_0 dans le modèle de l'électron élastiquement lié.**

Théorème de Gauss $E_{int}r^2 = \frac{4/3\pi r^3 \rho}{\epsilon_0}$ donc $E_{int} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$ donc force de coulomb du type $F = qE = -kr$.

➔ **Comment faire des antennes qui émettent un rayonnement très dirigé ?**

cf. image de la banque de données : Diagrammes de rayonnement de différentes antennes dans Électromagnétisme -> Champs électromagnétiques et lignes de champs.

Questions pour faire réfléchir

➔ **Quel est l'intérêt d'une antenne ? Qu'est-ce qui fixe sa directivité ?**

➔ **Les antennes qu'on utilise en pratique sont-elles des dipôles ? Si non, pourquoi ?**

➔ **Et votre téléphone portable, à quel fréquence fonctionne-t-il ? Conséquence ?**

➔ **Dans l'expérience de diffusion de la lumière par une suspension colloïdale, où sont les dipôles rayonnants ?**

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ **Agrégation 2008 - Note : 15/20 :**

Commentaires personnels : on m'a demandé de re-commenter la forme des expressions des champs **E** et **B** (cf. rapport 1998); on a beaucoup parlé de la structure de l'onde. On a fini par la diffusion Rayleigh, et envisagé le cas du verre.

➔ **Agrégation 2012 - Note : 14/20 :**

Questions et commentaires du jury : Vous avez parlé de la jauge de Lorentz, pourquoi celle là ? Qu'est ce qui change si on considère une distribution de charges pas neutre ? Comment rendre des antennes très directives ? J'ai fait l'expérience de la polarisation par diffusion/coucher de Soleil avec un tube de Cachan très pratique : dans l'expérience, l'extinction n'est pas totale, pourquoi ? Pouvez-vous expliquer avec les mains pourquoi la puissance rayonnée dépend de l'accélération et pas de la vitesse par exemple ? (*par changement de référentiel on pourrait l'annuler.*) Modèle de l'électron élastiquement lié : vous avez pris une force de frottements type Stokes : quelle en est l'origine ? est-ce que l'expression est adaptée au phénomène ? Je me suis trompée dans le calcul de la puissance rayonnée : pouvez-vous nous rappeler l'expression de l'élément d'intégration ?

Septième partie

Leçons sur l'Optique Géométrique et Ondulatoire

LP 31 — Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 26/05/2014 par *Anaëlle Contensaux* et corrigée par *R. Mathevet*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat. Exemples.*

Rapports du Jury

☞ (2013) – “La leçon doit illustrer ce que le principe de Fermat apporte de plus que les lois de la réfraction et de la réflexion.”

☞ (2010) – “Le caractère “variationnel” du principe de Fermat doit clairement ressortir. Cette leçon peut être l'occasion d'introduire le théorème de Malus. à propos du nouveau titre : présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de Fermat. Exemples.”

☞ (2009) – “Le caractère “variationnel” du principe de Fermat doit clairement ressortir ¹.”

☞ (2008) – “L'intérêt de l'introduction de la notion de chemin optique est central dans cette leçon.”

☞ (2005) – “La notion de rayon lumineux reste imprécise. L'expression mathématique du principe de Fermat mettant en avant l'expression de l'infiniment petit du premier ordre mis en jeu est souvent ignorée. Par ailleurs, l'interprétation du stigmatisme est une application intéressante du principe de Fermat ².”

☞ (2000) – “Cette leçon nécessite d'avoir réfléchi au lien existant entre la notion de rayon lumineux et l'optique ondulatoire ³.”

☞ (1999) – “Pour que cette leçon soit complète et afin de faire correctement le lien avec le théorème de Malus il est nécessaire de savoir relier chemin optique et phase d'une onde et de comprendre à la lumière de la théorie ondulatoire la concentration de l'énergie sur un rayon lumineux. On peut discuter sans calcul comment le principe de Fermat fonctionne dans la formation des images.”

☞ (1996) – “Il est bon d'expliquer comment on est conduit à ne rechercher les courbes de chemin optique stationnaire que parmi les lignes brisées, et de souligner que le principe de Fermat ne fait que sélectionner les trajectoires possibles pour la lumière - sans préciser comment la répartition du flux s'effectue entre elles.”

Bibliographie

[1] Latour, *Leçons d'optique et de mécanique quantique*. Ellipses, 2000.

[2] CAP Prépa Physique MPSI-PCSI-PTSI, 1^{ère} année. Pearson, 2009.

[3] CAP Prépa Physique PC-PC*, 2^{ème} année. Pearson, 2010.

Plan

1 Le principe de Fermat

1.1 Notion de rayon lumineux

1.2 Chemin optique

1. Le titre de la leçon était alors le suivant : *Notion de rayon lumineux. Principe de Fermat. Conséquences et applications.*

2. Sur ce thème, on consultera avec profit l'ouvrage de B. Portelli et J. Barthes intitulé *La Physique par la pratique* paru aux éditions H&K

3. Le titre de la leçon était alors le suivant : *Notion de rayon lumineux. Principe de Fermat. Conséquences.* (Ier CU).

1.3 Le principe de Fermat

2 Les lois de l'optique géométrique

2.1 Propagation de la lumière

2.1.1 Propagation rectiligne

2.1.2 Principe du retour inverse

2.2 Loi de Snell-Descartes ([2] p.566)

2.2.1 Lois de réflexion

2.2.2 Lois de la réfraction

3 Applications

3.1 Équation des rayons lumineux (Analogie mécanique) ([1] p.19)

3.2 Mirage

3.3 Fibres optiques

3.3.1 Fibre à saut d'indice

3.3.2 Fibre à gradient d'indice

3.4 Stigmatisme ([3] p.720)

4 Vers l'optique ondulatoire

4.1 Surface d'onde ([3] p.715)

4.2 Théorème de Malus

Introduction

Optique géométrique en principe découle des équations de Maxwell avec conditions aux limites : mais trop compliqué.

On modélise pour obtenir des choses plus simples qui décrivent bien les phénomènes observés : principe de Huygens-Fresnel, principe de Fermat. Dans cette leçon on ne s'intéresse qu'au deuxième.

On va voir qu'il est plus fructueux que les simples lois de Snell-Descartes (surface d'onde, théorème de Malus).

On place cette leçon à la suite d'un cours sur l'électromagnétisme dans lequel on a déjà vu le vecteur de Poynting.

1 Le principe de Fermat

1.1 Notion de rayon lumineux

Les rayons lumineux sont indépendants les uns des autres.

Ils correspondent à la direction de propagations de l'énergie. **Limite du modèle :** On ne s'intéresse pas par contre à la quantité d'énergie véhiculé par ces rayons.

On ne peut pas isoler **un** rayon lumineux. On ne s'intéresse dans cette leçon pas à ce qui passe aux limites de l'image géométrique d'un objet. On ne s'intéresse pas aux dimensions d'objets dont leur longueur caractéristique est proche ou inférieure de celle du rayonnement étudié (longueur d'onde).

1.2 Chemin optique

On introduit la notion de chemin empruntable par la lumière entre deux points A et B.

On introduit l'abscisse curviligne s qui est orientée par rapport à une origine. Soit A est à gauche et B à sa droite. Si on choisit l'origine en A alors s est définie orienté (positive) de A vers B ; par contre si on choisit l'origine en B alors s est orienté (positive) de droite à gauche.

On fait disparaître le temps du modèle, on ne veut pas s'intéresser à des particules. On multiplie par c pour le faire disparaître et on obtient une théorie qui n'est plus que **géométrique**. Ici on définit l'indice optique.

Il nous faut un principe nous permettant de sélectionner le véritable chemin emprunté par la lumière parmi tous ceux hypothétiques.

1.3 Le principe de Fermat

C'est un principe **variationnel**. On étudie les variations du chemin optique.

Le principe de Fermat historiquement dit : **minimal** (lié avec le temps de parcours), mais nous on utilise stationnaire (minimal, maximal, point-selle). Attention c'est différent de extrémal (minimal ou maximal).

Le chemin est stationnaire **au premier ordre par rapport aux chemins infiniment voisins considérés**.

On garde sous le coude l'exemple d'un chemin maximale : miroir sphérique dont la courbure est plus petite que celle d'un miroir ellipsoïde dont les points A et B seraient les foyers.

On va voir que les lois de l'optique géométrique découlent assez bien de se principe.

2 Les lois de l'optique géométrique

2.1 Propagation de la lumière

2.1.1 Propagation rectiligne

Dans un milieu **homogène**, n est indépendant de s donc on voit que le trajet rendant minimale le chemin optique est la ligne droite.

2.1.2 Principe du retour inverse

Dans **tous les milieux**, on a

$$L_{AB} = \int_A^B n(s)ds = \int_B^A n(s)(-ds) = \int_B^A n(s')ds' = L_{BA}$$

En considérant que $ds' = -ds$ est l'élément de coordonnée curviligne de B vers A, on peut alors écrire $L_{AB} = L_{BA}$.

Dans le cas de l'étude d'un système optique, cela signifie que l'on pourra étudier la propagation de la lumière et le trajet des rayons lumineux sans se soucier du sens de propagation.

Le retour inverse n'est vrai que pour les milieux isotropes. Ils ne marchent pas pour une diode laser ([1] p.8). Pour les diodes optiques, si on met un champ magnétique on casse l'isotropie, on casse la symétrie du milieu

2.2 Loi de Snell-Descartes ([2] p.566)

2.2.1 Lois de réflexion

On déroule les **deux** lois de la réflexion de Snell-Descartes.

2.2.2 Lois de la réfraction

Puis les **deux** lois de la réfraction.

On définit le cas particulier de la réflexion totale.

► **Expérience** : On montre l'expérience de la bouteille percée dans laquelle on fait passer un rayon lumineux issu d'un laser qui reste piégé dans le tube d'eau s'écoulant. Le faisceau à l'intérieur du tube répond aux conditions de réflexion totale. C'est le principe des fibres optiques comme on le verra dans la partie suivante.

3 Applications

3.1 Équation des rayons lumineux (Analogie mécanique) ([1] p.19)

On fait la démo sur transparent et on conclut par une analogie mécanique que la lumière est dévié vers les forts indices (ou gradient positif).

Faire l'analogie mécanique qui est fructueuse.

3.2 Mirage

► **Expérience** : On met de l'eau avec du sucre dans un cuve et on laisse passer un faisceau laser sur la partie haute de la solution. On observe une déflexion vers les gradients d'indice.

On en déduit la formation des mirages par exemple ceux du désert.

3.3 Fibres optiques

3.3.1 Fibre à saut d'indice

On étudie la fibre à saut d'indice et on définit l'ouverture numérique, importante pour l'adaptation de la source à la fibre..

3.3.2 Fibre à gradient d'indice

Pour ne pas avoir de dispersion modale on utilise une fibre à gradient d'indice : analogie avec une lentille plus épaisse au milieu que sur les bords.

3.4 Stigmatisme ([3] p.720)

Un système optique est rigoureusement stigmatique pour un couple de points (A, A') si le chemin optique (AA') est indépendant du rayon lumineux particulier choisi pour aller de A à A' , c'est-à-dire $(AA') = cte$

4 Vers l'optique ondulatoire

4.1 Surface d'onde ([3] p.715)

Une surface d'onde relative à une source ponctuelle O est l'ensemble des points M tels que les chemins optiques (OM) calculés le long de rayons lumineux soient identiques. On fait le lien avec la phase d'une onde électromagnétique.

4.2 Théorème de Malus

Les rayons d'un faisceau continu issu d'une même source (ponctuelle) sont orthogonaux aux surfaces d'ondes.

Ainsi notre traitement naïf avec l'optique géométrique permet de trouver les surfaces équiphasées orthogonales aux rayons lumineux. Nous pouvons alors trouver des différences de marche pour des trajets différents et comprendre les phénomènes d'interférences.

Conclusion

Ouverture : Équation de l'Eikonale. Principe variationnel Feynman.

Le grand physicien Richard Feynman s'interroge. Dans un milieu homogène, la lumière va en ligne droite parce que c'est le chemin le plus court. Mais comment fait-elle pour savoir que c'est le plus court, a-t-elle essayé tous les autres ?

Questions et remarques du correcteur

➔ **Qu'est-ce qu'une surface d'onde ?**

Lieux des plans équiphasés des solutions de l'équation de Helmholtz décrivant l'évolution spatiale des solutions en ondes progressives (sphérique ou plane).

➔ **Quel est l'avantage du principe de Fermat, par rapport aux lois de Snell Descartes ?**

Il permet d'étudier le stigmatisme, très important lors de l'étude de la formation des images.

➔ **Est-il possible d'isoler un rayon lumineux ?**

Non, à cause de la diffraction. Fermat exige que la lumière puisse emprunter beaucoup de chemins. Or, quand on diminue l'ouverture du diaphragme, la lumière est restreinte. Feynman affirme que la lumière emprunte tous les chemins, et que la résultante de cette lumière est la somme des interférences que subit la lumière sur tous ces chemins. Pour certains chemins, à un petit déplacement de lumière correspondra une grande variation de la phase, ce qui donnera un effet nul. Les autres chemins, (ceux qui contribuent à l'amplitude lumineuse constatée), correspondent à des interférences en phase où la phase varie peu : elle est dite stationnaire. Il est possible d'isoler un rayon lumineux en diminuant le diamètre d'un diaphragme qui ne couperait que des chemins pour lesquels la phase varie très vite pour un petit déplacement du rayon.

➔ **Quand a été prouvé le caractère ondulatoire de la lumière ?**

Fentes d'Young : 1801

➔ **Expliquer que le grad n soit dirigé du chaud vers le froid dans le désert ?**

La formule de Clausius-Mossotti établit le lien entre l'indice et la concentration du milieu en molécules. Plus un milieu est concentré, plus les interactions entre dipôles induits et lumière sont importantes, plus l'indice est grand. Un gradient d'indice est proportionnel à un gradient de concentration. Dans le désert, le sol chaud implique un milieu moins dense (qui monte) donc avec moins de molécules, donc un indice moins élevé. Inversement quand on monte en altitude, il y a plus de molécules et donc un plus grand indice. Le grad n est dirigé vers le haut.

➔ **Intérêt des fibres optiques ? Pourquoi ne pas réfléchir la lumière avec des miroirs ?**

Une source lumineuse envoie des impulsions $(0;1)$ traduisant une information, de manière incidente à une fibre optique. Pour perdre le moins d'information, on a intérêt à adapter la source à la fibre en réduisant leur distance. En réalité, on place une lentille qui est chargée de concentrer les rayons incidents informatifs sur la fibre avec un angle maximal égal à l'ouverture numérique. L'ON est importante pour le choix de cette lentille pour limiter la perte d'information.

➔ **Que veut dire le terme variationnelle dans principe variationnelle de Fermat ?**

Une approche différentielle consiste à construire la trajectoire du rayon lumineux point par point, comme Descartes. Une approche variationnelle consiste à considérer l'ensemble des trajectoires possibles puis de sélectionner la bonne.

Questions pour faire réfléchir

➔ **Expliquer de façon simple le principe d'un mirage [Consulter *La Physique part la pratique*].**

➔ **Avez-vous lu l'article de P. Bousquet et C. Viossat sur la propagation de**

la lumière dans les fibres optiques, paru dans le BUP n° 692 ?

→ Qu'est-ce que l'eikonale ?

C'est l'équivalent du PFD pour l'indice du milieu. Il traduit l'évolution spatiale de l'indice en fonction du rayon de courbure.

→ Quelles sont les différents types de fibre optique que vous connaissez⁴ ?

Une fibre optique est constituée par un cœur d'indice n_1 et une gaine d'indice n_2 . On distingue :

- les FMEI : fibres multimodales à échelon d'indice, le cœur et la gaine sont séparés par un dioptre cylindrique,
- les FMGI : fibres multimodales à gradient d'indice, le dioptre entre le cœur et la gaine n'existe plus et l'indice n_1 varie jusqu'à n_2
- les fibres unimodales

→ Avez-vous déjà ouvert l'excellent ouvrage de L. Dettwiller intitulé *Qu'est-ce que l'optique géométrique ; fondement et application*. paru aux éditions Dunod ?

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

→ Agrégation 2010 - Note : 09/20 :

Questions et commentaires du jury : ils sont revenus sur les surfaces d'onde, en demandant si la forme était toujours simple, par exemple sphérique. Comment expliquer alors les surfaces d'onde aux formes "bizarres" rencontrées en astrophysique pour lesquelles l'optique adaptative est nécessaire ?... Ensuite ils m'ont demandé si on pouvait redémontrer et expliquer le phénomène de mirage avec d'autres lois que celles que j'avais utilisées. Pour le phénomène des mirages, pourquoi voit-on aussi la "vraie" image ? Et quand est-ce que l'on considère que l'indice optique est introduit dans le cours ? (*j'avais marqué en prérequis notamment l'optique vue jusqu'en TS spé comprise... je pensais que c'était dedans...*).

Commentaires personnels : les techniciens sont supers et pour les leçons il n'y a vraiment qu'à leur demander la manip qu'on veut et ils la montent et la testent pour nous... ! Par contre il peut être pas mal d'utiliser l'ordi pendant l'année plutôt que les transparents photocopiés puisque le jour J tous les documents numériques sont sur l'ordi...

→ Agrégation 2012 - Note : 20/20 :

Commentaires personnels : J'ai eu tout le temps qu'il me fallait. L'écran blanc pour projeter devait être baissé devant le tableau, ce qui gênait un peu. La technicienne est allée chercher tout ce dont j'avais besoin et a tout installé seule (cuve avec gradient de concentration de sel, fibre en plastique avec laser). La présentation s'est bien passée, pas d'incident technique notable, et pour le temps, j'avais visé correctement. Le jury est

4. On composera avec profit sur le sujet du concours d'entrée de l'ENS, section PC 1997 partie 1, disponible par exemple dans le recueil des problèmes de physique posés au concours d'entrée des écoles normales supérieures, collection Ellipses.

resté insondable pendant la présentation et il n'y avait pas d'auditeur.

Questions du jury :

- Quelle équation vérifie la phase de l'onde en électromagnétisme ? Développer un peu en lien avec la fin de la leçon (lien avec l'optique ondulatoire)
- Le principe du retour inverse est-il toujours valable ? Des lasers existent tels que, si on met un miroir en sortie, la lumière ne rentre pas dans le laser : commenter. Qu'est-ce qui caractérise le photon ? A-t-on tenu compte de son spin ? Revenir à la question initiale. (J'avais d'abord proposé un effet type couche antireflet, mais il voulait un effet lié à la polarisation et je n'ai pas compris son explication...)
- A propos de l'analogie entre mécanique et optique (que j'avais traitée : cf la physique par la pratique), comment obtient-on des équations classiques à partir de l'optique ondulatoire ? Et en mécanique quantique ? Qu'est-ce qu'une approche semi-classique ? Développer un peu.
- Quel autre type d'optique que géométrique et ondulatoire ? Spécificités de l'optique quantique ? Peut-on imaginer une optique atomique ?
- Quand on traite l'optique ondulatoire en cours, on calcule aussi des chemins optiques : en quoi est-ce que cela pourrait perturber les élèves ? Quelle réponse apporter ?
- Que répondre à un élève qui demande comment la lumière fait pour choisir le « bon » chemin ?
- En dehors des problèmes de polarisation, y a-t-il des situations dont le principe de Fermat ne rend pas compte ?
- Y a-t-il des démonstrations des lois de Descartes ne faisant pas référence à un aspect ondulatoire ? Qu'est-ce que la construction de Huygens ? Peut-on démontrer les lois de Descartes à partir des équations de Maxwell.

Commentaires du jury : Je ne suis pas allé discuter longtemps avec le jury, mais je pense que l'analogie optique/mécanique a beaucoup plu (un des membres l'a qualifiée de « fructueuse » au cours des questions). Il me semble que si l'on veut parler de l'équation des rayons lumineux, plutôt que de la démontrer, il est plus intéressant de développer cette analogie qui permet d'interpréter beaucoup de phénomènes « avec les mains » (manip cuve à gradient de concentration, et j'ai traité de la sorte la fibre à gradient d'indice).

LP 32 — Interférences à deux ondes en optique.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 23/10/2013 par *Victor Fontan* et corrigée par *R. Mathevet*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Obtention d'interférences à deux ondes en optique. Notion de cohérence.*

Rapports du Jury

☞ (2010, 2009) – “Il faut réfléchir à l'opération de moyenne réalisée par le détecteur et il est bon de connaître quelques ordres de grandeurs à ce sujet.”

☞ (2005) – “Dans cette leçon doivent apparaître les problèmes liés aux détecteurs (moyennes quadratiques) et aux sources (processus d'émission et nature des ondes émises), conduisant à la nécessité d'utiliser des montages interférométriques pour obtenir un terme de corrélation.”

☞ (2003) – “Cette leçon doit être illustrée expérimentalement, le candidat devant être en mesure de montrer clairement les effets de cohérence spatiale ou temporelle de la source.”

☞ (2002) – “On ne doit pas se polariser d'emblée sur les dispositifs à division d'amplitude qui constituent la réponse au problème de perte de contraste par élargissement de la source.”

☞ (2001) – “L'illustration expérimentale de la notion de cohérence est indispensable.”

☞ (1999) – “La notion de cohérence n'est pas un point annexe mais un point central de cette leçon.”

☞ (1998) – “Dans cette leçon difficile, la première partie relative à l'obtention des interférences à deux ondes doit être traitée soigneusement, même si elle paraît simple. La partie *notion de cohérence* doit faire l'objet d'une approche pragmatique, en évitant de présenter systématiquement un facteur de visibilité comme une transformée de Fourier. En particulier, il est important de faire comprendre pourquoi les résultats ne sont pas identiques avec une source quasi-ponctuelle et avec une source étendue.”

Bibliographie

- [1] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.
- [2] Garing C., *Les 1001 questions de la physique en prépa, PC-PC**. Ellipses, 2006.
- [3] Duffait, *Expériences d'Optique (Agrégation)*. Bréal, 1994.
- [4] Latour, *Leçons d'optique et de mécanique quantique*. Ellipses, 2000.

Plan

1 Interférences à deux ondes lumineuses

- 1.1 Description ondulatoire de la lumière et détecteur
- 1.2 Superposition de deux ondes : terme d'interférence
- 1.3 Conditions d'obtention : Modèle des trains d'onde

2 Figures d'interférences et dispositifs interférentiels

- 2.1 Figures d'interférences
 - 2.1.1 Observation perpendiculaire au plan des sources
 - 2.1.2 Observation parallèlement au plan des sources
- 2.2 Dispositifs interférentiels

3 Notion de cohérence

- 3.1 Cohérence temporelle
- 3.2 Cohérence spatiale

Introduction

► **Expérience [3] p.52 + [4] p.77 :** On montre le paradoxe de l'optique : lumière + lumière = obscurité à l'aide des miroirs de Fresnel. On montre qu'en élargissant la fente source le phénomène disparaît (notion de cohérence spatiale : source ponctuelle nécessaire). On peut montrer l'exp avec un laser et un lumière blanche et voir qu'avec la lumière blanche on a pas d'interférences (notion de cohérence temporelle : monochromaticité de la source nécessaire)

On va faire un **modèle** qui permet de rendre compte de ces expériences comme historiquement (Maxwell (1865) bien après Young (1807), Fresnel-Huygens (1815)).

On répond aux questions : Que se passe-t-il lorsque qu'on ajoute deux ondes lumineuses ? Quelles sont les conditions pour obtenir des interférences ? Comment expérimentalement peut-on en obtenir ? Pourquoi on en observe rarement dans la vie de tous les jours ?

1 Interférences à deux ondes lumineuses

1.1 Description ondulatoire de la lumière et détecteur

Amener le terme d'interférence général et dire que l'optique c'est un domaine de hautes fréquences ($\sim 10^{14}$ Hz) par rapport aux meilleurs capteurs (oeil 25 Hz ; photodiode 10^9 Hz) et donc que le terme en cosinus dont l'argument est $(\omega_1 + \omega_2)t + \dots$ est nul puisque on moyenne sur beaucoup de périodes.

Nos détecteurs optiques sont **quadratiques**. En acoustique le microphone piézo est sensible à l'amplitude (différence de pression) mais l'oreille est quadratique (sensible à l'intensité) .

1.2 Superposition de deux ondes : terme d'interférence

On va négliger la diminution de l'amplitude avec la distance car sur une distance de λ (taille de l'interfrange) l'amplitude est constante.

On écrit la somme des amplitudes des deux ondes et on calcul l'intensité résultante générale.

1.3 Conditions d'obtention : Modèle des trains d'onde

Polarisations identiques, d'où on passe au modèle scalaire. Transformer le terme d'interférences pour faire sortir les conditions. Obtenir la formule des interférences à 2 ondes.

Bien faire ressortir la cohérence comme condition d'observation d'interférences. A priori on superpose les champs, mais si ondes non cohérentes il suffit de superposer des amplitudes. Interprétation avec les trains d'onde.

Caractère aléatoire de l'émission. On espère que le modèle simplifié des trains d'onde

capte l'essence du phénomène.

Définition de la longueur de cohérence temporelle l_t . Ordre de grandeur (cf. [2]) : QI $0.1\mu\text{m}$, Na 0.1mm , laser 50m .

Donc pour voir les interférences, il faut que les deux sources soient issues du même train d'onde \implies on crée deux sources secondaires à partir d'une source primaire.

2 Figures d'interférences et dispositifs interférentiels

2.1 Figures d'interférences

2.1.1 Observation perpendiculaire au plan des sources

On observe des franges. Expression de l'interfrange.

2.1.2 Observation parallèlement au plan des sources

De part la symétrie de révolution du problème on doit observer des anneaux.

Dans la réalité les sources ne sont ni ponctuelles ni monochromatiques et on un déphasage à l'origine aléatoire.

2.2 Dispositifs interférentiels

Deux types de dispositifs : division du front d'onde et division d'amplitude.

On reprend le dispositif des miroirs de Fresnel et on montre le champ d'interférences. Avantage : on observe un plus grand nombre de frange et pas besoin de la diffraction pour expliquer ce qu'il se passe. On évoque les trous de Young (1807, caractère ondulatoire de la lumière).

OU

Spectre avec l'interféromètre de Michelson en lame d'air.

Transition : Dans la vraie vie les sources ne sont ni ponctuelles ni monochromatiques, on va donc avoir des problèmes de cohérence entre les ondes.

3 Notion de cohérence

3.1 Cohérence temporelle

Pour l'instant on ne s'intéresse pas à l'aspect non ponctuelle de la source mais uniquement à l'aspect non monochromatiques de la source. Retour sur miroirs de Fresnel de l'intro

3.2 Cohérence spatiale

Pour le calcul on peut passer rapidement par la TF d'une fonction porte à savoir un sinus cardinal. Sinon regarder CAP Prépa PC, ils font un calcul très rapide.

Conclusion

→ Ne pas conclure (résumer) par $I \neq I_1 + I_2$, il faut noter l'importance de la cohérence qui souligne la différence avec les autres domaines de la physique où on a des interférences (acoustiques). C'est un problème de détecteur quadratique, de hautes fréquences des ondes optiques et des processus aléatoires d'émission du rayonnement.

→ L'ouverture de la conclusion fait référence à une progression, donc plutôt que de traiter les dispositifs interférentiels dans cette leçon en parler en ouverture en disant on va traiter dans le leçon suivant les interféromètres à division d'amplitude.

→ Parler des utilités des interférences : contrôle de surface de miroir des télescopes et spectroscopie.

Remarques

☞ Ne pas confondre éclairement et intensité. Éclairement en W/m^2 et intensité en W/sr . L'éclairement caractérise ce qui est reçue alors que l'intensité caractérise ce qui est émis : une lampe est intense, la table d'une salle de cours est bien éclairée.

☞ Avoir un vocabulaire précis.

☞ S'entraîner à décrire le schéma du Michelson sur transparent. Parler de constructions **d'images successives** et pas de symétriques du miroir.

☞ Attention aux trous de Young qui ne s'explique que par la diffraction, donc phénomène supplémentaire plus compliqué.

☞ Il serait judicieux de faire une mesure quantitative.

☞ Il faut dire que l'on se place dans le cas où les ondes sont polarisés perpendiculairement au plan du tableau. Dans la réalité ça peut être différents cf. agreg et DS optique sur l'expérience de Fresnel Arago.

Questions

→ Comment définit-on l'intensité lumineuse ? Faire le lien avec l'électromagnétisme et donner son unité. Pour observer des interférences, doit-on nécessairement considérer deux ondes de la même longueur d'onde ? Peut-on avoir des problèmes de cohérence spatiale avec le Michelson ?

→ Que représente le temps de cohérence dans le modèle de l'électron élastiquement lié ?

→ Quelles sont les conditions de validité du modèle scalaire ? Que se passe-t-il suivant que l'onde est, ou n'est pas polarisée ?

→ Quelles sont les expériences que vous pourriez monter pour illustrer cette leçon ?

→ Quelle précaution faut-il prendre si vous souhaitez présenter l'expérience des fentes d'Young ?

→ Comment réalise-t-on concrètement l'étalonnage d'un laser ?

→ Qu'est-ce que le temps de cohérence d'un laser ? Donnez en un ordre de grandeur pour un laser He-Ne d'enseignement usuel.

→ Expliquer simplement le théorème de Wiener-Kintchine.

LP 33 — Interféromètres à division d'amplitude.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 16/10/2013 par *Mathilde Pollet* et corrigée par *R. Mathevet*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Interféromètres à division d'amplitude. Applications.*

Rapports du Jury

☞ (2010, 2009) – “Le calcul des différences de marche doit être effectué aussi simplement que possible, en exploitant au maximum les “déplissements” de rayons. L'influence de l'extension spatiale de la source sur la figure d'interférences est au coeur de la leçon.”

☞ (2008) – “Il est indispensable de développer des applications.”

☞ (2005) – “Le Michelson n'est souvent utilisé qu'en lame d'air. Les problèmes de localisation et les détails expérimentaux sont rarement présents, tout comme les applications. On peut, pour cette leçon, admettre que les dispositifs par division du front d'onde ont déjà été étudiés auparavant, ce qui permet au candidat d'entrer tout de suite dans le vif du sujet de la division d'amplitude et de son intérêt.”

☞ (2004) – “Si le jury souhaite naturellement une solide illustration expérimentale de la leçon, il ne faut pas la transformer en une succession d'observations purement qualitatives. Cette leçon doit être l'occasion pour le candidat de montrer qu'il sait conduire l'analyse théorique du phénomène expérimental montré.”

☞ (2001) – “Il faut prendre le temps de justifier la nature du lieu de localisation et réfléchir à l'intérêt de l'utilisation des interféromètres à division d'amplitude. Si l'interféromètre de Fabry-Pérot est abordé, une présentation expérimentale est vivement souhaitable.”

☞ (1999) – “Dans cette leçon aussi la notion de cohérence, spatiale et temporelle, est centrale et doit être abordée.”

☞ (1998) – “La motivation des dispositifs étudiés dans cette leçon est l'obtention d'interférences avec une source étendue et conventionnelle, donc spatialement incohérente. L'intérêt des interféromètres à division d'amplitude sur ceux qui utilisent la division du front d'onde doit clairement ressortir de l'exposé. Compte tenu de l'importance expérimentale de ces appareils il est inutile de perdre du temps à l'étude exhaustive des lames d'indice n dans l'air, qu'elles soient à faces parallèles ou non, et souhaitable de développer quelques applications des interféromètres étudiés.”

☞ (1997) – “Il faut savoir expliquer pourquoi on n'étudie les interférences qu'avec deux rayons incidents confondus : les intersections des émergents correspondants forment le lieu de localisation où les interférences subsistent usuellement quand la source est étendue. Le jury attire aussi l'attention des candidats sur la simplicité démonstrative et l'intérêt pédagogique des franges obtenues à partir d'un séparateur de faisceau laser.”

Bibliographie

- [1] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.
- [2] Garing C., *Les 1001 questions de la physique en prépa, PC-PC**. Ellipses, 2006.
- [3] Duffait, *Expériences d'Optique (Agrégation)*. Bréal, 1994.
- [4] Latour, *Leçons d'optique et de mécanique quantique*. Ellipses, 2000.

Prérequis

- ♥ Interférence à deux ondes. Interféromètre à division du front d'onde.

Plan

1 Source étendue et localisation des interférences

1.1 Interféromètre de Michelson :Présentation du dispositif

2 Anneaux d'égaux inclinaisons : lame d'air

2.1 Construction du schéma équivalent

2.2 Calcul de la différence de marche pour une source à l'infini.

2.3 Localisation des interférences

2.4 Spectroscopie : Détermination de l'écart du doublet du sodium

3 Franges d'égaux épaisseur : coin d'air

3.1 Schéma équivalent

3.2 Expression de la différence de marche

3.3 Localisation des interférences

3.4 Application : Usinage des miroirs

Introduction

On va montrer théoriquement et expérimentalement quels sont les avantages d'un interféromètre à division d'amplitude. Pour des raisons de temps on n'étudiera en détail que l'interféromètre de Michelson.

1 Source étendue et localisation des interférences

Problème avec les interféromètres à division du front d'onde : grande luminosité \implies perte de contraste car longueur de cohérence spatiale.

Franges avec fentes de Young = non localisées. Partout sur le champ d'interférences.

Dégager l'intérêt de la division d'amplitude : elle permet le non-brouillage. Énoncé du théorème de localisation : $\Delta\delta(M) = n(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{SS}'$.

Division du front d'onde : $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \perp \mathbf{SS}'$.

Division d'amplitude : $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \mathbf{0}$. On élargit la source : figure plus lumineuse au prix de la localisation.

On a plus de problème de cohérence spatiale.

1.1 Interféromètre de Michelson :Présentation du dispositif

Faire un transparent avec des couleurs différentes pour les rayons dans chaque bras.

Expliquer le rôle de la compensatrice et d'un éventuel déphasage de π dû à une réflexion vitreuse, laissé le suspens pour le coin d'air et voir si ce déphasage est compensé en fonction de la couleur de la frange central.

2 Anneaux d'égaux inclinaisons : lame d'air

2.1 Construction du schéma équivalent

2.2 Calcul de la différence de marche pour une source à l'infini.

On reconnaît l'étude d'un cas abordé dans la leçon sur les interférences à 2 ondes.

2.3 Localisation des interférences

► **Expérience** : On montre à l'aide d'un diaphragme que plus il est fermé plus les interférences sont localisés proche du Michelson, plus on ouvre plus il faut reculer l'écran (jusqu'à l'infini) mais plus on a de lumière.

→ A distance finie : brouillage des interférences.

→ A distance infinie : franges nettes, franges localisées à l'infini.

► **Expérience** : On montre aussi l'influence de l'inclinaison des rayons incidents sur le nombre d'anneaux visibles sur l'écran. On voit que les anneaux sont de plus en plus resserrés (dépendance du rayon en \sqrt{x})

2.4 Spectroscopie : Détermination de l'écart du doublet du sodium

► **Expérience [3] p.76** : On mesure en live l'écart du doublet du sodium connaissant le $\bar{\lambda}$ du doublet. On peut estimer le pouvoir de résolution du Michelson : $R \approx \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx 1000$.

► **Expérience** : On peut mesurer grossièrement la longueur de cohérence d'une lampe à vapeur de Mercure ($\sim 4\text{cm}$). On translate le miroir jusqu'à observer un blanc d'ordre supérieur. On ajoute un filtre de couleur vert et on fait réapparaître les interférences : plus $\Delta\nu$ est grand plus la longueur de cohérence est petite.

3 Franges d'égaux épaisseur : coin d'air

3.1 Schéma équivalent

On ne détaille pas la construction géométrique des sources puisque c'est la même que celle de la lame d'air.

Finalement tout se passe comme si les miroirs étaient séparés d'un angle θ

3.2 Expression de la différence de marche

3.3 Localisation des interférences

Localisation sur le coin d'air, donc on doit faire l'image des miroirs à l'aide d'une lentille de courte focale pour avoir un bon grandissement.

3.4 Application : Usinage des miroirs

► **Expérience [3] p.89 et [1] p.783** : On intercale une lame couvre-objet de microscope et on observe les franges sur la lame. On a une précision sur la planéité de l'ordre de

Conclusion

→ Autre application : Traitement antireflet des surface (cf. [4] p.92)

→ Autre dispositif : interféromètre de Fabry-Pérot = interférences à ondes multiples dans une lame d'air. Grande finesse des anneaux. Application à la cavité laser et au filtre interférentiel.

Remarques

☞ *Problématique* : avec des sources multiples on a pas d'interférences mais parfois si (bulles de savon).

☞ *But* : ne pas vérifier le théorème de localisation mais l'amener.

Questions

➤ Préciser la notion de cohérence spatiale. Comparer le cas des interféromètres à division d'amplitude à celui des interféromètres à division du front d'onde.

➤ Comparer la taille des anneaux obtenus avec un interféromètre de Michelson, et avec un interféromètre de Fabry-Pérot? Quelle est l'utilité de l'interféromètre de Fabry-Pérot par rapport à celui de Michelson?

➤ Considérons un Michelson en lame d'air, éclairer en incidence normale par un laser. Dans le cas d'une interférence destructive, l'intensité observée est nulle. où est passée l'énergie?

➤ Quel est le rôle de la compensatrice dans l'interféromètre de Michelson? Qu'est-ce qui définit la largeur du champ d'interférence en lame d'air? Et en coin d'air?

Compenser la différence de marche due à la traversé supplémentaire d'une lame de verre par une onde suivant un des bras. L'inclinaison maximale des rayons incidents. La taille des miroirs.

➤ énoncer le théorème de localisation?

➤ Qu'est-ce que VIRGO?

LP 34 — Diffraction de Fraunhofer.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 04/10/2013 par *Amélie Mézy* et corrigée par *R. Mathevet*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Diffraction de Fraunhofer. Applications*.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012, 2011) – “Les conditions de l'approximation de Fraunhofer doivent être clairement énoncées. Pour autant, elles ne constituent pas le coeur de la leçon.”

☞ (2010, 2009) – “Les phases associées aux amplitudes doivent être traitées avec soin.”

☞ (2008, 2007, 2006) – “Le principe de Huygens-Fresnel doit être exposé clairement, sans débordements mathématiques excessifs. Il faut expliquer pourquoi la diffraction de Fraunhofer est pertinente dans la formation des images.”

☞ (2005) – “Rappelons que la diffraction de Fraunhofer accompagne l'image géométrique d'une source initiale et que l'écriture du principe de Huygens-Fresnel dans le cas de l'approximation de Fraunhofer doit être rigoureuse. Les applications ne doivent pas se limiter au trou circulaire et à la fente fine. Dans ce dernier cas, il faut justifier le calcul qui est mené.”

☞ (2004) – “Les conditions de l'approximation de Fraunhofer doivent être précisées et discutées.”

☞ (2001) – “Les conditions de Fraunhofer doivent être clairement exposées. Il faut éviter les calculs trop lourds et valoriser les applications. Notons que le pouvoir séparateur de la lunette astronomique n'est pas le seul exemple d'application.”

☞ (1999) – “Le principe de Huygens-Fresnel doit être expliqué puis appliqué à l'approximation de Fraunhofer dont on discutera les limites.”

☞ (1998) – “Les approximations qui permettent de passer de la diffraction de Fresnel à celle de Fraunhofer ne doivent pas accaparer la moitié du temps de l'exposé. Il est en revanche conseillé de présenter des applications, ce qui est trop souvent négligé par les candidats.”

Bibliographie

[1] Taillet, *Optique physique*. de Boeck, 2006.

[2] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.

[3] Sextant, *Optique expérimentale*. Herman, Editeurs des sciences et des arts, 1997.

Plan

1 Le principe de Huygens-Fresnel

1.1 Le principe

1.2 Équation de d'Alembert et de Helmholtz

1.3 Définition de la transmittance

2 Diffraction de Fraunhofer

2.1 Diffraction à l'infini ([1] p.129)

2.2 Expression

2.3 Fréquences spatiales ([3] p.126 + [2] p.846)

3 Applications

3.1 Fente rectangulaire ([2] p.839)

3.2 Tâche d'Airy et pouvoir séparateur ([1] p.148)

3.3 Filtrage en éclairage cohérent ([2] p.847)

3.3.1 Montage 4f

3.3.2 Filtre

3.3.3 Expérience d'Abbe

Introduction

➤ **Expérience :** On fait l'image d'une fente triangulaire, on observe l'image géométrique qui définit des zones de pénombres et de lumières très distinctes. Puis on intercale une fente très fine.

Apparition de zone ombragées : éparpillement de la lumière. On a une zone de transition entre la partie éclairée et la partie noire.

L'optique géométrique ne rend pas compte intégralement de l'image observée lorsqu'on limite la propagation de l'onde.

On place les mots-clés dans l'intro qui seront dans les phrases de transition des différentes parties.

1 Le principe de Huygens-Fresnel

1.1 Le principe

On écrit sur un transparent la définition du principe de HF. Chaque mot important sur le transparent est retranscrit petit à petit en langage mathématique sur le tableau.

1.2 Équation de d'Alembert et de Helmholtz

Équation linéaire de d'Alembert linéaire, c'est pour ça qu'on étudie des ondes monochromatiques.

1.3 Définition de la transmittance

On définit la transmittance $t(P) = s(P_{aval})/s(P_{amont})$.

Pour résumer on réécrit la forme générale et opératoire du principe de Huygens-Fresnel avec toutes les grandeurs introduites mais sans faire apparaître les coordonnées.

Transition : On a défini la forme opératoire, maintenant on remplace P par ses coordonnées car l'équation précédemment écrite est intrinsèque.

2 Diffraction de Fraunhofer

2.1 Diffraction à l'infini ([1] p.129)

On justifie l'approximation de l'ordre 2 dans l'exponentielle et seulement de l'ordre 0 à l'extérieur de l'exponentielle.

On obtient :

$$s(M) = K e^{ik(OM)} \iint s(P) e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{OP}} d^2P$$

On va alors introduire les coordonnées.

2.2 Expression

L'expression ressemble à une TF mais on contourne la présentation de la TF en posant les fréquences spatiales.

$$s(X, Y) = K' s_0 \iint dx dy t(x, y) e^{-i \frac{k_0}{f} (Xx + Yy)}$$

2.3 Fréquences spatiales ([3] p.126 + [2] p.846)

On justifie après avoir montré l'exemple d'un réseau périodique, que les fréquences spatiales u et v sont bien le bon objet à introduire : $u = \frac{X}{\lambda f}$ et $v = \frac{Y}{\lambda f}$.

3 Applications

3.1 Fente rectangulaire ([2] p.839)

On revient au calcul de la figure de diffraction d'une fente. On fait le calcul en définissant le sinc car il y a que ici qu'on en parle.

3.2 Tâche d'Airy et pouvoir séparateur ([1] p.148)

Retour à la manip d'intro. On a pas besoin d'objet diffractant, les montures des lentilles sont déjà des objets diffractants.

On calcul un ordre de grandeur pour un télescope de la tâche de diffraction.

Transition : On a bien fait de faire la théorie de la diffraction car on la comprend tellement bien que l'on peut s'en servir : filtrage spatial (ce n'est pas qu'une contribution néfaste la diffraction)

3.3 Filtrage en éclairage cohérent ([2] p.847)

3.3.1 Montage 4f

Transparent du montage 4f.

Tramage.

3.3.2 Filtre

On peut faire disparaître le tramage en utilisant le filtrage. On laisse passer que les basses fréquences spatiales. Les hautes fréquences spatiales correspondent à des points très proche spatialement donc à un tramage qu'on supprime en filtrant dans l'espace de Fourier.

3.3.3 Expérience d'Abbe

Si on a le temps !

Conclusion

→ Dans le principe de HF dans les conditions de Fraunhofer, on peut établir une théorie simple de la diffraction.

→ La diffraction va s'observer au voisinage des ombres de l'optique géométrique.

Ouverture : La diffraction au point de convergence nécessite une approche plus poussée.

Questions

→ Quelles sont les applications que vous pourriez présenter, et qui vous permettrait de faire de belles expériences simultanément ?

→ Qu'est-ce qu'un laser épuré ? Comment le réaliser expérimentalement ?

→ Expliquer la notion d'apodisation ? Dans quel cas est employée cette méthode ?

→ Dans le principe d'Huygens-Fresnel, quelle est la contribution de Huygens et celle de Fresnel ?

→ Quel est le lien entre diffraction de Fraunhofer et transformation de Fourier ?

→ Quel lien faites-vous entre diffraction et formation des images mettant en jeu l'utilisation de lentilles¹ ?

→ Peut-on interpréter simplement la diffraction en terme de photons ?

→ Que peut-on dire de la figure de diffraction obtenue par N objets diffractants répartis de façon aléatoire dans un plan ?

→ Que savez-vous de la diffraction acousto-optique ?

→ Que savez-vous du filtrage en optique ? Donner des exemples.

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

→ Agrégation 2008 - Note : 06/20 :

Questions et commentaires du jury : lien entre polissage des miroirs et diffraction ? Conséquence d'une translation de la fente ? Faites une figure. Que se passe-t-il en incidence non normale ?

→ Agrégation 2009 - Note : 06/20 :

Questions et commentaires du jury : questions sur le paramètre angulaire que j'avais introduit au début pour la diffraction. Les examinateurs sont revenus 5 minutes sur une formule qui n'était plus écrite au tableau, parce que j'avais intégré sur les coordonnées de l'écran au lieu des coordonnées de la pupille diffractante. Retour sur le

1. Sur ce point on pourra tirer profit de la lecture du chapitre 5 du livre de Joseph Goodman, *Introduction to Fourier optics*, édition Mc Graw et Hill.

principe d'Huygens Fresnel (apparemment dire qu'on fait la somme des amplitudes des ondes des sources secondaires c'est pas assez, il faut dire que les ondes interfèrent, même si ça revient au même). Le pouvoir de résolution d'un réseau, est-ce que c'est vraiment le produit de l'ordre et du nombre de traits éclairés? Fraunhofer, c'est pour n'importe quelle onde incidente? Comment retrouver la forme de la figure de diffraction par un rectangle sans calcul (et bien sûr sans dire que c'est une TF)?

LP 35 — Diffraction par des structures périodiques dans différents domaines de la physique.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 22/04/2014 par *Mégane Rodriguez* et corrigée par *R. Mathevet*.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012) – “Cette leçon donne souvent l’occasion de présenter les travaux de Bragg ; malheureusement, les ordres de grandeur ne sont pas toujours maîtrisés.”

☞ (2010, 209) – “La notion de facteur de forme peut être introduite sur un exemple simple. L’influence du nombre d’éléments diffractants doit être discutée.”

☞ (2007) – “Le jury souhaite que la diffraction d’ondes autres que les ondes électromagnétiques soit envisagée. C’est pourquoi l’intitulé 2008 précise dans différents domaines de la physique ¹.”

☞ (2005) – “On peut admettre que l’expression mathématique du principe de Huygens-Fresnel est acquise, ainsi que son application au cas d’une ouverture unique, plus particulièrement d’une fente fine.”

☞ (2004) – “Il faut veiller au bon équilibre de l’exposé : il est inutile de faire l’étude de la diffraction de Fraunhofer qui doit être supposée connue et il est souhaitable de consacrer plus de cinq minutes à l’étude de la diffraction des rayons X par les cristaux par exemple.”

☞ (2003) – “La leçon ne peut pas se limiter à une étude du réseau plan en optique. Il faut donc pouvoir dégager les idées importantes assez rapidement pour pouvoir passer à l’étude d’autres domaines.”

☞ (2002) – “Cette leçon doit être illustrée expérimentalement de manière efficace. Le pouvoir de résolution d’un réseau est toujours présenté, mais la détermination de son expression théorique pose systématiquement des problèmes aux candidats.”

☞ (1999) – “L’influence des différentes dimensions : largeur de fente, pas du réseau, largeur du réseau couverte par l’onde incidente, doit être clairement dégagée ².”

☞ (1996) – “Le calcul de la différence de phase entre les ondes qui interfèrent doit être justifié avec soin. Il faut également expliquer le calcul de l’amplitude diffractée lorsqu’on prend en compte la largeur finie des “traits du réseau”.”

Bibliographie

[1] Pérez, *Optique, Fondements et applications*. Dunod, 7^{ème} édition.

[2] Kittel, *Physique de l’état solide*. Dunod, 8^{ème} édition.

[3] Cagnac, *Physique Atomique Tome 1*. Dunod, 2^{ème} édition.

Plan

1 Réseau mince en optique ([1] p.352)

1.1 Rappels : diffraction par un réseau

1.2 Relation fondamentale des réseaux en transmission

1. Le titre de la leçon était alors le suivant : *Diffraction par des structures périodiques dans différents domaines spectraux*.

2. Le titre de la leçon était alors le suivant : *Réseaux plans en optique. 1er CU*.

1.3 Dispersion angulaire et spectroscopie

2 Diffraction d’une onde par un cristal ([2] p.29)

2.1 Structure cristalline

2.2 Conditions de diffraction

2.3 Loi de Bragg

2.4 Applications

2.4.1 Analyse spectrale de rayon X

2.4.2 Cristallographie aux rayons X

3 Diffraction d’ondes matérielles ([3] p.201)

3.1 Diffraction d’électrons

3.2 Diffraction de neutrons

Introduction

On va montrer que les phénomènes de diffraction par des structures périodiques sont universelles, dans le sens où les équations obtenues sont indépendantes des diffuseurs (électrons, neutrons,...) mais juste de la structure périodique.

► **Expérience** : On montre la figure de diffraction d’un laser par un réseau. On fait remarquer qu’il existe des directions particulières d’éparpillement de la lumière (ordre d’interférence)

1 Réseau mince en optique ([1] p.352)

1.1 Rappels : diffraction par un réseau

On écrit les grandes lignes qui nous permettent d’écrire l’éclairement de l’onde diffractée :

$$\mathcal{E} = \psi\psi^* = N^2 \underbrace{\epsilon^2 \text{sinc}^2(\pi u \epsilon)}_{\text{Facteur de forme}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin(N\pi u a)}{N \sin(\pi u a)} \right)^2}_{\text{Facteur de structure}}$$

où le facteur de structure prend en compte les N motifs, et le facteur de forme qui correspond à la diffraction d’un motif.

On en déduit et on le montre expérimentalement avec l’exp. introductive :

- Éparpillement de la lumière autour de l’image géométrique de la source.
- On a des directions privilégiées.
- Si on fait varier le nombre de traits du réseau, on modifie l’espacement entre les groupes.

- Si on éclaire pas tout le réseau, l'intensité diminue.
- On mesure la position des pics et on remonte à la périodicité de la formule trouvée.

On fait bien passer les rôles de la diffraction (éparpillement de la lumière là où l'optique géométrique ne le prévoit pas) et des interférences constructives qui donnent naissance au phénomène.

1.2 Relation fondamentale des réseaux en transmission

On utilise la notion d'interférences constructives pour dériver la formule des réseaux à 1D.

$$\text{A 1D : } a(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda, \quad \text{à 3D : } \Delta\vec{k} \cdot \vec{a} = 2\pi m$$

où

On généralise à 3D, en introduisant un vecteur dans le sens du pas du réseau $\vec{a} = a\vec{e}_x$, et le vecteur d'interférence : $\Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0$.

La forme vectorielle est plus puissante car elle est indépendante de l'orientation.

On remarque la dépendance de l'angle diffracté en fonction de la longueur d'onde.

1.3 Dispersion angulaire et spectroscopie

► **Expérience** : On remplace le laser par une lampe à vapeur de mercure dont on fait l'image à travers le condenseur sur la fente source de manière à éclairer le plus possible de trait du réseau.

- On voit encore apparaître les groupes mais cette fois avec des couleurs.
- Le rouge est plus dévié que le bleu.
- Pic central le plus brillant mais pas de dispersion angulaire.

On utilise des réseaux à échelottes pour améliorer l'éclairement d'un ordre.

2 Diffraction d'une onde par un cristal ([2] p.29)

2.1 Structure cristalline

On définit proprement la structure cristalline, le réseau, le réseau réciproque, l'invariance par translation du réseau et donc de la **densité électronique** $n(\vec{r})$. On peut introduire le modulateur acousto-optique pour comprendre la périodicité de l'indice.

On force un peu le passage pour l'introduction du réseau réciproque $\vec{G} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + v_3\vec{b}_3$, mais on verra que c'était une bonne chose de l'introduire.

2.2 Conditions de diffraction

L'amplitude de l'onde diffracté est proportionnelle à la densité électronique qui s'exprime comme une décomposition en série de Fourier.

On trouve alors que lorsque $\Delta\vec{k} = \vec{G}$, l'amplitude de l'onde diffracté est non nulle. Si cette condition n'est pas remplie alors l'amplitude de l'onde est négligeable quand $\Delta\vec{k}$ diffère de façon significative de tout vecteur du réseau réciproque (car on intègre une

exponentielle, donc une fonction oscillante qui oscille très rapidement donc à une valeur moyenne nulle).

$$\text{On a alors la condition de diffraction : } 2\vec{k} \cdot \vec{G} = G^2.$$

Cette forme générale nous permet de retrouver la loi de Bragg (1913), plus connue.

2.3 Loi de Bragg

On considère la distance $d(hkl)$ entre deux plans réticulaires parallèles et adjacents, normaux à la direction $\vec{G} = h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + l\vec{b}_3$. On montre alors que $d(hkl) = \frac{2\pi}{G}$.

Donc la condition de diffraction nous permet d'écrire que : $2d(hkl)\sin\theta = \lambda$ avec θ l'angle entre le faisceau incident et le plan du cristal. Plus généralement

$$2d\sin\theta = n\lambda$$

où d est la distance entre deux plans parallèles adjacents d'indices $h/n, k/n, l/n$.

On aurait pu également définir un facteur de structure \mathcal{S}_G correspondant à une cellule du cristal. Ce facteur est directement lié à l'amplitude de l'onde diffracté $F_G = N\mathcal{S}_G$, où N est le nombre de cellule du cristal.

Toute onde dont le vecteur \vec{k} mené à partir de l'origine a son extrémité sur la surface de la zone de Brillouin, sera diffracté par le cristal

2.4 Applications

On en profite pour donner des ordres de grandeurs (cf. Rapports 2013).

2.4.1 Analyse spectrale de rayon X

On montre la page 28 de [2]. On effectue un monochromateur de rayons X en ne sélectionnant que les longueurs d'onde compatibles avec les conditions d'interférences constructives.

2.4.2 Cristallographie aux rayons X

cf. Image agrégée : *Comparaison des réflexions X pour des poudres de KCl et de KBr.*

Connaissant les angles de Bragg on remonte à la distance entre des plans inter-réticulaires.

La diffraction ne s'applique pas uniquement aux photons, on peut également diffracter des ondes matérielles.

3 Diffraction d'ondes matérielles ([3] p.201)

3.1 Diffraction d'électrons

Expérience de Davidson et Germer : première diffraction d'électrons par un cristal (1927)

On écrit les deux équations (Bragg et de Broglie) pour des électrons non relativistes :

$$\lambda = d \cdot \sin 2\theta \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

► **Expérience** : On fait de la diffraction d'électrons pour remonter à la valeur de la distance entre les plans réticulaires. On fait une mesure rapide devant le jury de la taille d'un anneau en fonction de la tension accélératrice appliquée.

- On voit des anneaux de diffraction alors qu'on a des plans car on a des plans qui n'ont pas tous la même orientation, ce qui fait qu'on a une superposition de la figure de diffraction d'un nombre infini de plan et donc une symétrie de révolution. Normalement on devrait avoir une figure de diffraction contenant 6 points. La rotation de ces 6 points autour du centre nous permet d'obtenir un anneau.
- L'incertitude majeur provient ici de la largeur des anneaux qui provient de multiple facteurs qui sont principalement : la divergence du faisceau d'électrons et son écart à la non-monochromaticité et la taille des cristallites composant la poudre (le cristal ne peut plus être considéré comme infini).
- Ici on a choisit de nommer 2θ l'angle entre la normale et le rayon diffracté mais on aurait pu également l'appeler θ .
- Bien faire une régression affine et non linéaire sur Regressi car la courbe doit passer par l'origine.

Les électrons sont un moyen d'étude très utilisé, par exemple dans l'étude de surface des différentes couches d'un panneau solaire où l'étude d'un catalyseur.

Les électrons étant des particules chargés, ils interagissent fortement avec la matière. On ne les utilise que pour faire des études de surface. Pour sonder en profondeur la matière on utilise alors des neutrons qui ne sont pas chargés et qui peuvent pénétrer dans les milieux.

3.2 Diffraction de neutrons

On fait ralentir des neutrons rapides issus de réactions nucléaires, jusqu'à atteindre une distribution de vitesse tel un gaz parfait pour les neutrons. On parle de neutrons thermiques.

Calcul d'ordre de grandeur sur la longueur d'onde d'un neutron thermique. On compare à celle d'un électron. On trouve à peu près la même, ce qui permet de justifier l'utilisation de neutrons pour sonder la matière.

Choix du rayonnement

- **Diffusion** :
Rayons X : diffusion par interaction avec électrons de l'atome.
Neutrons : diffusion par interaction avec noyau de l'atome.
- **Atomes de Z voisins** :

Rayons X : ne permettent pas de distinguer les atomes de numéros atomiques voisins, si le cristal est formé d'atomes différents.

Neutrons : diffusion très inégale suivant le noyau.

- **Cristal de substance organique** :

Rayons X : beaucoup d'atomes d'hydrogène avec un seul électron qui ne diffuse pas assez.

Neutrons : interactions fortes avec les protons des nombreux atomes d'hydrogène donc diffusion forte.

- **Moment magnétique** : Le neutron possède un moment magnétique qui interagit avec les moments magnétiques des atomes. Si l'échantillon étudié présente un moment magnétique, le processus de diffusion est affecté et l'intensité des ondes diffractées ne sera pas la même dans toutes les directions. Ainsi, les neutrons sont un outil d'investigation privilégié pour les milieux magnétiques.
- **Pour les électrons**, comme on l'a vu précédemment, ils sont uniquement utilisés dans les études de surface.

Questions pour faire réfléchir

► **Qu'appelle-t-on facteur de forme et facteur de structure ? Donner des exemples simples pour illustrer ces deux notions. Quelles expériences pourraient venir illustrer votre propos ?**

► **Quel est l'intérêt du formalisme de Fourier dans cette leçon ?**

► **Qu'est-ce qu'un réseau de phase ? D'amplitude ? Comment fabrique-t-on un réseau ? De quoi dépend le pouvoir de résolution d'un réseau ? Quel est l'intérêt du réseau à échelottes ?**

► **En quoi l'échographie est-elle une application simple et pertinente à développer dans cette leçon (On consultera avec profit l'exercice Réseau acoustique, balayage, focalisation dans l'ouvrage de C. Garin, intitulé *Ondes mécaniques et diffusion*, paru chez Ellipses.) ?**

► **Qu'est-ce que la diffraction acousto-optique ? Quelle interprétation simple du régime de Raman-Nath peut-on faire en terme d'interaction photon/phonon ? Pourriez-vous faire une expérience pour illustrer votre propos (On consultera avec profit le polycopié de J.-F. Roch, *Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la diffraction acousto-optique*. Disponible à l'adresse suivante : <http://www.physique.enscachan.fr/pagregp/enseignement/optique/acousto-optique.pdf> ?**

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

→ **Agrégation 2009 - Note : 09/20** :

Questions et commentaires du jury : plusieurs questions pour repréciser des hypothèses de calcul exposées trop rapidement (par exemple pourquoi on fait un calcul unidimensionnel pour le réseau, à quelle approximation cela revient dans la direction verticale ?). Retour sur la figure de diffraction du réseau : pouvoir de résolution ? Comment déterminer le nombre de traits éclairés, le rapport a/e, etc. Matière condensée : qu'est-ce

qu'on sonde avec des neutrons? Quelle est la forme de la figure de diffraction? étude des biomacromolécules : c'est facile de faire des cristaux? Comment expliquer la couleur bleue du papillon "machin" ?

→ **Agrégation 2013 - Note : 11.5/20 :**

Questions et commentaires du jury : Pourquoi historiquement on a continué à utiliser des prismes alors que les réseaux existaient encore? Comment fabrique-t-on un réseau blazé? Réalisation précise d'un émetteur ultrasonore utilisé pour l'échographie? Dans quelle démarche épistémologique s'inscrit l'expérience de Davisson et Germer (diffraction d'électrons en 1925)?

Huitième partie

Leçons sur la Physique de la Matière

LP 36 — Absorption et émission de la lumière.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 27/11/2013 par *Victor Fontan* et corrigée par *R. Carles*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Absorption, émission spontanée ou induite du rayonnement. Caractéristiques et applications.*

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012, 2011) – “Trop souvent, il y a confusion entre les processus élémentaires pour un atome et un ensemble d'atomes. De même, le candidat doit préciser au cours de sa leçon le caractère monochromatique ou non du champ de rayonnement qu'il considère.”

☞ (2010) – “Le Laser n'est pas la seule application de cette leçon. Le Laser He-Ne n'est pas l'illustration la plus simple. Il est maladroit d'introduire les coefficients d'Einstein dans une situation de rayonnement parfaitement monochromatique. à propos du nouveau titre : Il s'agit de mettre en évidence les caractéristiques des émissions et absorptions et de présenter en détail une ou plusieurs applications.”

☞ (2009) – “Le Laser n'est pas la seule application de cette leçon. Le Laser He-Ne n'est pas l'illustration la plus simple¹.”

☞ (2004) – “Les coefficients d'Einstein ne doivent pas être évoqués dans le seul cas du rayonnement thermique.”

☞ (2002) – “Le laser ne doit pas être présenté de façon trop superficielle.”

☞ (2001) – “Cette leçon est souvent mal comprise ; les candidats auraient intérêt à étudier avec soin le fonctionnement schématique d'un laser.”

☞ (2000) – “Terminons ce rapport par une note expérimentale. A l'occasion de cette leçon (ainsi que de quelques autres), les candidats présentent souvent l'expérience de résonance optique, dans le sodium, de façon très maladroite : lorsqu'on éteint la première lampe spectrale, il ne faut pas s'attendre à voir la seconde illuminée un temps notablement supérieur à 10^{28} s !”

☞ (1999) – “Il est raisonnable d'envisager dans cette leçon une étude simple du laser.”

Bibliographie

[1] Pérez, *Quantique*. de Boeck, 2013.

[2] Cagnac, *Physique Atomique Tome 1*. Dunod, 2^{ème} édition.

[3] Latour, *Leçons d'optique et de mécanique quantique*. Ellipses, 2000.

[4] Dalibard, *Atomes et rayonnement, leçon inaugurale au Collège de France*. Fayard, 2013
Disponible en ligne : <http://books.openedition.org/cdf/3308>

Plan

1 Interaction spontanée matière-rayonnement

1.1 Émission spontanée ([1] p.484 + [2] p.93)

1.1.1 Mise en évidence ([1] p.484)

1.1.2 Analyse collisionnelle ([1] p.484)

1.1.3 Coefficient d'Einstein d'émission spontanée ([1] p.485)

1.1.4 Interprétation de A_{21} et probabilité de transition ([1] p.15)

1.2 Absorption de la lumière

1.2.1 Mise en évidence ([1] p.82)

1.2.2 Analyse collisionnelle ([1] p.82)

1.2.3 Coefficient d'Einstein et probabilité de transition ([1] p.487 + [2] p.87)

1.2.4 Étalement du phénomène sur l'échelle des fréquences ([2] p.89)

2 Émission induite et loi de Planck

2.1 Nécessité de l'émission induite ([1] p.489)

2.2 Émission induite ([1] p.489 + [2] p.100)

2.3 Importance relative des émissions induite et de l'émission spontanée ([1] p.490 + [2] p.103)

3 Applications

3.1 Spectroscopie optique

3.2 Le laser ([1] p.494 + [4])

3.2.1 Inversion de population

3.2.2 Cavité résonante

3.2.3 Propriétés et Applications du laser

Introduction

La leçon concerne la vie quotidienne. Pourquoi les objets sont colorés et ne sont pas blanc, noir ou gris ? Par exemple pourquoi une solution de permanganate de potassium nous apparaît violet (la transition d'absorption est dans le vert).

Loi de Planck donne le spectre d'émission d'un corps porté à une certaine température. Comment ce rayonnement est-il émis et quels sont les caractéristiques de l'interaction matière-rayonnement.

Le spectre de Planck ne dépend que de la température pas du matériau. Nous on s'intéresse à un spectre ne dépendant pas de la température mais de l'élément chimique (exemple : lampe à vapeur de sodium). On s'intéresse aux transitions électroniques qui ne dépendent quasiment pas de la température (l'effet Doppler et les chocs qui sont responsable en partie de l'élargissement de la raie dépendent de la température.)

Pour simplifier notre étude on ne va considérer que des systèmes à seulement **2 niveaux**, que le couplage entre la matière et le rayonnement est faible et finalement que les atomes n'interagissent pas entre eux.

1 Interaction spontanée matière-rayonnement

1.1 Émission spontanée ([1] p.484 + [2] p.93)

1.1.1 Mise en évidence ([1] p.484)

➤ **Expérience [1] p.484 :** On montre le spectre d'une lampe à vapeur de sodium. On va chercher à comprendre les caractéristiques du spectre "monochromatiques" (dans le visible) si on l'observe à faible résolution et bichromatique si on l'observe à haute résolution

1. Le titre de la leçon était alors le suivant : *Absorption, émission spontanée ou induite du rayonnement. Coefficients d'Einstein. Applications.*

1.1.2 Analyse collisionnelle ([1] p.484)

On calcul l'énergie du photon émis par **un atome** lors d'une émission spontanée en utilisant la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

On néglige l'effet de recul et on calcul un odg pour vérifier cette approximation. On en déduit la fréquence du rayonnement en fonction de la différence d'énergie entre les 2 niveaux.

☞ On considère que l'énergie du niveau excité est constante même en présence de rayonnement. Cohen-Tannoudji à montré en 1996 que l'énergie des niveaux variaient (vers le haut ou vers le bas) lorsqu'on applique un rayonnement à l'atome. On prend alors cette hypothèse pour la leçon : le couplage est faible entre la matière et le rayonnement (Haroche lui s'intéresse au couplage fort), les niveaux d'énergie sont constants.

1.1.3 Coefficient d'Einstein d'émission spontanée ([1] p.485)

On considère cette fois une population d'atome.

On écrit la probabilité d'émission en fonction du nombre d'atomes sur le niveau excité.

On fait apparaître le coefficient d'Einstein.

A_{21} est l'inverse d'une durée et correspond à la durée caractéristique de décroissance exponentielle de la population du niveau excité.

Calcul d'odg d'une durée de vie d'un niveau. En général qq ns mais pour l'hydrogène $2s \rightarrow 1s$ elle vaut 0.2s donc considérée comme interdite.

1.1.4 Interprétation de A_{21} et probabilité de transition ([1] p.15)

A_{21} correspond au taux de probabilité de transition spontanée entre le niveau excité et fondamentale.

Retour sur l'expérience en expliquant les deux fréquences observées dans le spectre.

1.2 Absorption de la lumière

1.2.1 Mise en évidence ([1] p.82)

► **Expérience [1] p.82** : On fait l'expérience de la résonance optique de 2 lampe à vapeur de sodium dont l'une est fraîchement éteinte.

1.2.2 Analyse collisionnelle ([1] p.82)

On fait le même calcul que pour l'émission spontanée dans le cas **d'un atome** en contact avec un photon donc monochromatique.

1.2.3 Coefficient d'Einstein et probabilité de transition ([1] p.487 + [2] p.87)

On considère un ensemble de N atomes.

On introduit la probabilité de transition qui fait intervenir le coefficient d'Einstein d'absorption pour un rayonnement monochromatique.

1.2.4 Étalement du phénomène sur l'échelle des fréquences ([2] p.89)

On discute des cas où le rayonnement n'est plus monochromatique dans quel cas on doit sommer toutes les contributions de chaque bande de fréquence.

2 Émission induite et loi de Planck

2.1 Nécessité de l'émission induite ([1] p.489)

On utilise une distribution de Boltzmann pour calculer les populations sur les différents niveaux des atomes. Il faut pour cela considérer que le système est en équilibre thermique (ce qui n'est pas le cas ici [2] p.103). Il faut également que les particules soit sans interaction donc indépendantes, indiscernables. Dans ce cas on utilise une statistique classique de Maxwell-Boltzmann.

On montre qu'en ne considérant que les deux processus précédemment décrit on ne retombe pas sur la loi de Planck.

Nécessité d'introduire un troisième mécanisme non spontanée.

2.2 Émission induite ([1] p.489 + [2] p.100)

Par réciprocité avec le phénomène d'absorption, on introduit l'émission induite.

On différencie les cas où le rayonnement incident est monochromatique ou polychromatique.

On trouve une statistique de Bose pour les photons car se sont des photons.

On donne alors les propriétés des deux photons émis : bosons donc même nombre quantique, même phase, même polarisation,...

Transition : Le rayonnement émis est donc cohérent pourquoi alors est-il si difficile de faire des interférences ?

2.3 Importance relative des émissions induite et de l'émission spontanée ([1] p.490 + [2] p.103)

On montre que pour la lumière (titre de la leçon), l'émission induite est caché par l'émission spontanée.

Attention à l'hypothèse d'équilibre thermique sous-jacente à l'utilisation de la statistique de Boltzmann qui est difficilement réalisable.

Calcul d'odg.

3 Applications

3.1 Spectroscopie optique

On a vu le lien entre transition caractéristique et fréquence du rayonnement.

On peut utiliser un spectre d'absorption en effectuant un balayage de fréquence pour caractériser un échantillon chimique.

Soit on le fait dans l'UV-Visible et on caractérise les transitions électroniques. Soit dans l'infrarouge (mais hors-sujet) et on caractérise les transitions vibrationnelle.

Le spectre est le code-barre des atomes.

3.2 Le laser ([1] p.494 + [4])

3.2.1 Inversion de population

On montre la nécessité de faire une inversion de population pour permettre de supplanter l'émission spontanée.

3.2.2 Cavité résonante

La cavité résonante permet d'amplifier un mode propre d'excitation de la vapeur auquel il va correspondre une fréquence donnée.

3.2.3 Propriétés et Applications du laser

Ils sont directifs, possèdent une forte densité spectrale de puissance, cohérent par rapport à une source spectrale et monochromatique.

On cite finalement les nombreuses applications des propriétés du laser : chirurgie, ralentissement d'atomes (dans ce cas les niveaux d'énergie varient avec la présence de rayonnement cf. [4]),...

Questions pour faire réfléchir

- ➔ Qu'est-ce qui caractérise un faisceau laser en terme de photons ?
- ➔ Définir la notion de section efficace.
- ➔ Donner des applications concrètes des lasers liées à leur spécificité. Détaillez en une.
- ➔ Avez-vous déjà ouvert l'ouvrage de A. Aspect et C. Fabre intitulé Introduction au lasers et à l'optique quantique aux éditions Ellipses ?

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ Agrégation 2009 - Note : 19/20 :

Questions et commentaires du jury : pourquoi avoir fait le spectre de la lampe au Hg ? Quelles conditions pour appliquer la statistique de Maxwell-Boltzmann ? Détailler les caractéristiques identiques du photon incident et du photon induit. Détailler les différentes probabilités du LASER à 3 niveaux. à quoi est due la largeur de la raie d'émission induite ? D'après III., peut-on faire léviter un trombone avec des faisceaux laser ?

➔ Agrégation 2013 - Note : 10/20 :

Questions et commentaires du jury : Pourquoi le photon émis par émission stimulée a même direction, même fréquence et même état de polarisation ? Lien entre largeur énergétique du niveau et temps de relaxation ? Au niveau spectral la largeur est-elle due seulement à la largeur énergétique non nulle du niveau ? Comment mesure-t-on des longueurs d'onde avec un appareil de lycée ? Vous avez parlé de refroidissement d'atomes et n'avez pas eu le temps de le traiter, vous pouvez détailler ? De même le rôle

de la cavité pour un laser ? Vous avez conclu sur les condensats de Bose-Einstein, vous pouvez définir ce que c'est ? Après la proclamation j'ai été les voir, il m'ont dit qu'ils ont bien aimé mon dynamisme mais qu'il manquait dans la leçon un peu de sens physique et surtout des applications, qui font partie du titre. Je n'avais traité que rapidement le laser à 3 niveaux car la première partie sur les coefficients d'Einstein m'avait pris trop de temps.

Commentaires personnels : Je conseille de s'organiser au mieux pour prendre 10 à 15 min avant l'arrivée du jury pour se poser, relire les notes, boire un coup et se concentrer sur la leçon.

➔ Agrégation 2013 - Note : 08/20 :

Questions et commentaires du jury : Comment décrire classiquement aux élèves de CPGE les 3 phénomènes d'interaction rayonnement-matière ? Comment le modéliser de manière quantique ? De quoi dépend la finesse de la cavité laser ?

Commentaires personnels : Les techniciens que j'ai eu ont toujours été très avenants, et très gentils. On m'a dit aussi que la sympathie que je transmettais dans mes oraux a été un atout pour mes résultats. Ne pas hésiter à demander de reformuler une question si elle ne semble pas bien comprise. Les membres du jury savent qu'au bout de 4 heures de préparation et 50 min de présentation, on n'est plus très au taquet.

➔ Agrégation 2013 - Note : 06/20 :

Je n'ai pas eu le temps de finir mon exposé : j'ai commencé par définir les trois comportements et faire les calculs sur les coefficient d'Einstein. J'ai eu uniquement le temps d'expliquer le principe du laser. Ma note s'explique par le fait que j'ai perdu beaucoup de temps au début, j'ai donc accéléré mon rythme de parole et donc perdu beaucoup en clarté, tout en m'embrouillant sur des détails comme les notations. Ce que j'en ai retenu c'est qu'il ne faut pas être trop ambitieux et surtout ne jamais se précipiter. Les questions que l'on m'a posé étaient (en tout cas je trouve) étonnamment dures par rapport à la qualité de ma prestation : le jury n'est pas revenu sur des détails de ma présentation mais m'a posé (en tout cas il me semble) des questions de haut niveau auxquelles je n'ai pas su répondre.

La note que j'ai eue est donc amplement méritée même si j'ai été très étonné par les questions qu'ils m'ont posé, m'attendant plutôt à des question de base où j'aurais dut réexpliquer les concepts.

Sinon pour les détails techniques, le technicien qui m'encadrait était très sympa et m'a monté le laser transparent avec SpidHR, sans que je perde trop de temps pour lui dire comment faire.

LP 37 — Aspects corpusculaires du rayonnement. Notion de photon.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 4/12/2013 par *Maxime Bordoux* et corrigée par *R. Carles*.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012, 2011) – “Le transfert de quantité de mouvement est souvent présenté par le biais de l’expérience de Compton, il peut également être illustré à l’aide d’applications modernes de l’interaction atome-rayonnement. Cette leçon peut éventuellement permettre de parler de la notion de superposition d’états. Le jury invite les candidats à réfléchir sur la physique à l’oeuvre à l’échelle de la longueur d’onde Compton.”

☞ (2011) – “ Au cours des questions, le jury a été surpris de constater que la notion de spin associée à un photon n’est pas toujours maîtrisée.”

☞ (2010, 2009) – “Les expériences réalisées à l’aide d’une cellule photoélectrique sont souvent mal comprises ou interprétées abusivement. Les candidats cernent souvent mal pourquoi la notion de photon s’est dégagée de l’effet photoélectrique et du corps noir.”

☞ (2008) – “Il ne faut pas oublier que le photon possède un moment cinétique. Les applications ne se limitent pas à l’effet Compton. Les récents développements dans le monde quantique constituent une mine d’applications pour cette leçon ”

☞ (2007) – “Cette partie importante de la physique quantique est mal couverte par les manuels usuels. Le photon a une énergie, une quantité de mouvement, mais aussi un moment cinétique. Les illustrations ne se limitent pas à l’effet photo-électrique et à l’effet Compton, et les récents développements de la physique quantique constituent une mine d’illustrations pour cette leçon : ralentissement d’atomes par la lumière¹, interférences avec des photons uniques, comportement de la lumière sur une lame semi-réfléchissante²...”

☞ (2006) – “Il ne faut pas oublier que le photon possède un moment cinétique. Les applications ne se limitent pas à l’effet Compton. Les récents développements dans le monde quantique constituent une mine d’applications pour cette leçon (refroidissement laser, optique et information quantiques,...).”

☞ (2005) – “Le photon possède aussi un moment cinétique. Cette leçon ne doit pas se limiter à l’effet Compton.”

☞ (2004) – “Des expériences doivent être décrites et modélisées en prenant soin de donner des ordres de grandeur. Les échanges de moment cinétique méritent d’être discutés.”

☞ (2003) – “Les interactions photon matière ne se limitent pas à l’effet photoélectrique et l’effet Compton. On peut aussi s’intéresser à la création de paires.”

☞ (1999) – “L’effet Compton n’est pas la seule manifestation de la quantité de mouvement du photon, on pourra aussi traiter l’effet de recul dans le rayonnement ? ou le ralentissement d’atomes par laser³.”

☞ (1997) – “Il faut comprendre que le photon garde les attributs d’un champ électromagnétique, en particulier (à propos de l’effet Compton) la capacité d’interagir avec des particules chargées. Il n’est pas interdit de parler du moment cinétique d’un photon et de sa relation avec la polarisation d’une onde.”

1. Sur ce thème, on pourra consulter l’ouvrage de R. Kaiser, intitulé : *Petits problèmes de Physique* paru chez Springer, collection Scopos ainsi que l’épreuve C de l’agrégation de Physique 2006.

2. Le titre de la leçon était alors le suivant : *Le photon : la particule et ses interactions avec la matière*.

3. Le titre de la leçon était alors : *Le photon. Énergie et quantité de mouvement. (1er CU)*.

Bibliographie

[1] Pérez, *Quantique*. de Boeck, 2013.

[2] Cagnac, *Physique Atomique Tome 1*. Dunod, 2^{ème} édition.

[3] Latour, *Leçons d’optique et de mécanique quantique*. Ellipses, 2000.

[4] Dalibard, *Atomes et rayonnement, leçon inaugurale au Collège de France*. Fayard, 2013.

<http://books.openedition.org/cdf/3308>.

[5] Feynman, *Mécanique quantique*. Dunod, 2000.

[6] Perez, *Physique MPSI-PCSI-PTSI*. Pearson, 2013.

Plan

1 Aspects énergétique : L’effet photoélectrique

1.1 Mise en évidence expérimentale ([1] p.46 + [2] p.5 + [3] p.124)

1.2 Les défauts de la théorie classique ([1] p.47 + [3] p.125)

1.3 Interprétation quantique ([1] p.47 + [2] p.14 + [3] p.126)

1.4 Application : cellule photovoltaïque et rendement quantique ([3] p.128 + Sextant p.84)

2 Quantité de mouvement

2.1 Effet Compton ([1] p.50)

2.1.1 Approche classique ([3] p.128)

2.1.2 L’effet Compton ([3] p.128)

2.1.3 L’interprétation théorique ([1] p.51 + [2] p.54 + [3] p.129)

2.2 Pression de radiation

2.2.1 Pression, Force et quantité de mouvement ([2] p.46 + [3] p.118)

2.2.2 Pression de radiation d’un laser ([1] p.53 + [2] p.46 + [3] p.120)

2.2.3 Application au refroidissement d’atome ([3] p.120 + [4])

3 Quantification du moment cinétique ([2] p.313 + [5] p.364-372)

4 Dualité onde-corpuscule ([6] p.92)

4.1 Lame semi-réfléchissante ([1] p.649 + [3] p.122,131 + [6] p.92)

4.2 Interférences à photons séparés ([2] p.187 + [6] p.100)

4.3 Trouble quantique : interféromètre de Mach-Zender ([3] p.122 + [6] p.94)

Introduction ([3] p.117)

Faire une approche historique du rayonnement.

On insiste sur le fait que la théorie ondulatoire de la lumière est très précise et décrit quasiment tous les phénomènes observés.

Cependant quelques phénomènes ne sont expliqués par la théorie ondulatoire : l’effet photoélectrique découvert par Hertz (1887), expliqué par Einstein (prix Nobel en 1921) puis vérifié par Millikan et la diffusion Compton.

Planck jette la première pierre en quantifiant les échanges d’énergie entre la matière et le rayonnement. Einstein va plus loin et postule que le rayonnement lui-même est quantifié.

1 Aspects énergétique : L'effet photoélectrique

1.1 Mise en évidence expérimentale ([1] p.46 + [2] p.5 + [3] p.124)

On décrit l'expérience de Hertz.

1.2 Les défauts de la théorie classique ([1] p.47 + [3] p.125)

On montre comment une théorie ondulatoire de la lumière ne permet pas d'expliquer les résultats expérimentaux de Millikan.

1.3 Interprétation quantique ([1] p.47 + [2] p.14 + [3] p.126)

On donne l'interprétation quantique en terme de quanta d'énergie.

L'effet photoélectrique des métaux nous prouve que les échanges d'énergie entre les ondes électromagnétiques, et la matière se font pas quantités minimales égales à $h\nu$.

On trace la Figure 2.7 de [1] p.48 (échelle d'énergie représentant l'énergie du photon, le travail de sortie et l'énergie cinétique de l'électron libéré) et on donne les travaux de sortie pour différents métaux.

1.4 Application : cellule photovoltaïque et rendement quantique ([3] p.128 + Sextant p.84)

On montre comment l'effet photoélectrique sur une cellule photovoltaïque constitué d'une jonction PN à base de Silicium permet de créer un courant.

On exprime le rendement quantique d'une cellule en exprimant le nombre d'électrons qui absorbent des photons sur le nombre de photons incidents ($\eta \sim 10\%$ actuellement).

2 Quantité de mouvement

2.1 Effet Compton ([1] p.50)

2.1.1 Approche classique ([3] p.128)

La théorie classique de diffusion d'un rayonnement incident par un atome prévoit que la fréquence du rayonnement reste inchangée : diffusion Rayleigh.

2.1.2 L'effet Compton ([3] p.128)

On introduit les observations expérimentales faite par Compton en 1923 (PNP en 1927) en irradiant du graphite par des rayons X.

On écrit la loi expérimentale trouvée : $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos \theta) = \Delta_c(1 - \cos \theta)$ avec $\Delta_c \sim 10^{-12}\text{m}$.

2.1.3 L'interprétation théorique ([1] p.51 + [2] p.54 + [3] p.129)

L'approche relativiste n'est pas obligatoire mais les calculs sont plus simples.

On utilise la conservation des composantes du 4-vecteur énergie-impulsion. On en déduit la loi expérimentale trouvée par Compton.

On décrit les types du rayonnement pour lesquels l'effet est observable (rayon X + rayon γ).

2.2 Pression de radiation

2.2.1 Pression, Force et quantité de mouvement ([2] p.46 + [3] p.118)

Attention à toute onde on peut associer une pression de radiation (pression acoustique, pression électromagnétique,...). La pression de radiation ne démontre pas que le rayonnement possède une quantité de mouvement. Pour cela il faut raisonner en terme de force et de conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé (rayonnement + paroi).

2.2.2 Pression de radiation d'un laser ([1] p.53 + [2] p.46 + [3] p.120)

On calcul la pression de radiation d'un laser sur un paroi.

2.2.3 Application au refroidissement d'atome ([3] p.120 + [4])

Un atome se propageant dans la direction d'un photon incident qu'il absorbe va perdre de la quantité de mouvement. Lorsqu'il réémet ce photon, il le fait équiprobablement dans toutes les directions. Donc en moyenne l'atome ralentit.

On peut citer l'effet Mössbauer. Quand on calcul l'énergie de transition entre deux niveaux nucléaire on néglige l'effet de recul lors de l'absorption du photon par le noyau. L'effet Mössbauer prend en compte cet effet de recul et on calcul la vitesse d'un noyau de fer qui permet d'absorber un photon. On remonte alors à l'énergie de la transition en s'affranchissant de l'énergie de recul.

3 Quantification du moment cinétique ([2] p.313 + [5] p.364-372)

Le photon possède également un spin qui est indépendant de sa fréquence, et qui est égal à 1, ce qui autorise a priori trois valeurs pour sa projection : -1, 0 et 1. La valeur 0 est cependant interdite par la théorie quantique des champs, du fait de la masse nulle du photon. L'amplitude du spin est $\sqrt{2}\hbar$ et la composante mesurée dans la direction de propagation, appelée hélicité, doit être $\pm\hbar$. Les deux hélicités possibles correspondent aux deux états possibles de polarisation circulaire du photon (horaire et anti-horaire). Comme en électromagnétisme classique, une polarisation linéaire correspond à une superposition de deux états d'hélicité opposée.

Ceci implique des règles quand à la désintégration d'un positronium (positron + électron) de moment cinétique nulle en deux photons.

On en déduit des règles de sélection entre niveaux atomiques lors d'émission de photons.

4 Dualité onde-corpuscule ([6] p.92)

4.1 lame semi-réfléchissante ([1] p.649 + [3] p.122,131 + [6] p.92)

On décrit l'expérience d'un rayonnement traversant une lame semi-réfléchissante dont des détecteurs (A et B) sont placés à 90° . Le rayonnement est produit par des atomes de calcium et on peut le moduler pour n'envoyer qu'un photon à la fois.

Les résultats nous donne que soit le photon est détecté dans A soit dans B mais pas dans les deux à la fois.

4.2 Interférences à photons séparés ([2] p.187 + [6] p.100)

Expérience des fentes d'Young.

On refait l'expérience avec des atomes qui envoient un seul photon et on observe la construction de la figure d'interférences.

4.3 Trouble quantique : interféromètre de Mach-Zender ([3] p.122 + [6] p.94)

Si l'interféromètre est réglé de manière à avoir une différence de marche nulle, un nombre de traversée de lame de verre différente et un nombre de réflexion vitreuse (ajout d'un déphasage de π) différentes alors un seul détecteur ne détecte des photons (interférences destructives sur l'autre) avec une statistique de $1/2$.

Si on bloque cette fois l'un des trajets, la probabilité de détecter des photons sur le détecteur précédent n'est plus que de $1/4$. Comment le photon sait-il, sans passer sur le chemin obstrué, que l'autre chemin est perturbé ?

Il faut raisonner en onde de probabilité et d'interférence de l'onde de probabilité du photon avec elle-même.

Conclusion ([3] p.121-131)

QUANTIQUE	
Particule	Onde
$E = \hbar \omega$	ω
$\vec{p} = \hbar \vec{k}$	\vec{k}
$\sigma = \hbar \pm$	\pm
\bar{n}	I

↑
nombre moyen de photons

RELATIVITÉ

Ouverture : Optique quantique permet de relier les deux aspects, l'un traite des interférences et de la diffraction et l'autre traite de l'effet photoélectrique et de la diffusion Compton

Questions pour faire réfléchir

- ➔ Quel est le moment cinétique d'un faisceau lumineux ? Et celui d'un photon ?
- ➔ Qu'est-ce que l'expérience de Behe ?
- ➔ Qu'est-ce que le refroidissement d'atome par laser ? Expliquez simplement.

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ Agrégation 2013 - Note : 11/20 :

Questions et commentaires du jury : Les questions ont porté sur la différence d'interprétation entre les effets que l'on observe et les effets que l'on pourrait déduire avec la théorie classique du champ électromagnétique, notamment via la force de Lorentz : la force de Lorentz est orthogonale à la direction de propagation alors que l'interprétation en terme de photons donne une force selon la propagation. On m'a également posé des questions sur la masse du photon. Comment on fait la démonstration en vrai ? (*je ne sais même pas si on peut la faire*) Quelle seraient les conséquences si le photon était massif ? (*limitation de la portée de l'interaction*). Quel est le rôle de la force de frottement dans l'existence d'un moment dans le modèle de l'électron élastiquement lié ? Quelle est son origine ? (*j'ai répondu que c'était dû à la perte d'énergie d'une particule chargée accélérée et que cela induisait un déphasage entre le champ \vec{E} polarisé circulairement et l'électron d'où un moment*). On m'a posé des questions sur l'effet Compton et sur l'aspect déterministe du calcul alors qu'a priori on a des ondes et des probabilités (*en fait dans le calcul on suppose l'angle de déviation θ*).

LP 38 — Aspects ondulatoires de la matière. Notion de fonction d'onde.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 05/02/2014 par *Florent Leveque* et corrigée par *R. Carles*.

Rapports du Jury

☞ (2010) – “Cette leçon peut être l’occasion d’introduire simplement l’équation de Schrödinger. La signification physique des différents termes de l’équation de Schrödinger n’est pas toujours connue. Le jury constate qu’un nombre significatif de candidats confondent équation aux valeurs propres et équation de Schrödinger. Enfin, les candidats sont invités à s’interroger sur les aspects dimensionnels de la fonction d’onde et sur sa signification physique précise.”

☞ (2009) – “La signification physique des différents termes de l’équation de Schrödinger n’est pas toujours connue. Le jury constate qu’un nombre significatif de candidats confondent équation aux valeurs propres et équation de Schrödinger. Enfin, les candidats sont invités à s’interroger sur les aspects dimensionnels de la fonction d’onde et sur sa signification physique précise.”

☞ (2008) – “La justification physique des relations de continuité aux interfaces est trop souvent éludée.”

Bibliographie

- [1] Cohen-Tannoudji, *Mécanique quantique I*. Hermann, 1998.
- [2] Basdevant, *Mécanique quantique*. Ellipses, 2002.
- [3] Messiah, *Mécanique quantique Tome 1*. Dunod, 1995.
- [4] Pérez, *Quantique*. de Boeck, 2013.
- [5] Perez, *Physique MPSI-PCSI-PTSI*. Pearson, 2013.
- [6] Latour, *Leçons d’optique et de mécanique quantique*. Ellipses, 2000.

Plan

1 Caractère ondulatoire de la matière

- 1.1 Hypothèse de de Broglie ([1] p.18,43)
- 1.2 Expérience de Davisson et Germer ([3] p.47 + [4] p.96 + [5] p.90)
- 1.3 Formule de Bragg ([4] p.97)

2 Description quantique ondulatoire de la matière

- 2.1 Expériences des fentes d’Young ([2] p.20 + [5] p.100)
- 2.2 Interprétation probabiliste ([4] p.103 + [5] p.97)
- 2.3 Introduction de la fonction d’onde ([2] p.35 + [1] p.19 + [3] p.105)

3 Dynamique de la fonction d’onde

- 3.1 Équation de Schrödinger ([1] p.19 + [2] p.38 + [6] p.181)
- 3.2 Paquets d’onde et relation d’incertitude ([1] p.22,27 + [2] p.41,45)
- 3.3 Équation de Schrödinger stationnaire ([1] p.32)

Introduction

Approche historique : Avant 1900, deux théories robustes pour décrire le rayonnement et la matière. Après Planck et Einstein rapproche ces deux descriptions : le photon

(comportement corpusculaire du rayonnement). de Broglie généralise cette double facette au cas de particules matérielles.

1 Caractère ondulatoire de la matière

1.1 Hypothèse de de Broglie ([1] p.18,43)

Message : On donne la relation de de Broglie.

On donne des ordg et on explique pourquoi le caractère ondulatoire de la matière est difficile à mettre en évidence : petitesse de \hbar .

1.2 Expérience de Davisson et Germer ([3] p.47 + [4] p.96 + [5] p.90)

On décrit l’expérience de diffraction des électrons sur du Nickel réalisé par Davisson et Germer en 1927.

1.3 Formule de Bragg ([4] p.97)

► **Expérience :** On réalise l’expérience et on remonte au paramètre de maille en mesurant le rayon des anneaux de diffraction.

2 Description quantique ondulatoire de la matière

2.1 Expériences des fentes d’Young ([2] p.20 + [5] p.100)

On rappelle rapidement l’expérience des fentes Young en optique où la figure d’interférences s’exprime comme le module carré de la somme des amplitudes du champ : $I_1 + I_2 \neq I_{\text{écran}}$.

Il se produit le même phénomène avec des particules de matière.

2.2 Interprétation probabiliste ([4] p.103 + [5] p.97)

On fait une interprétation probabiliste de l’expérience.

On perd la notion de trajectoire.

2.3 Introduction de la fonction d’onde ([2] p.35 + [1] p.19 + [3] p.105)

Message : Tout ce qu’on a dit avant ça nous permet d’introduire une fonction d’onde. On perd la notion de déterminisme.

Transition : On va chercher l’équation décrivant l’évolution de cette fonction d’onde.

3 Dynamique de la fonction d’onde

3.1 Équation de Schrödinger ([1] p.19 + [2] p.38 + [6] p.181)

Message : En dérivant une fois temporellement et deux fois spatialement la fonction d'onde, on arrive à l'équation de Schrödinger pour une particule dans le vide.

On généralise au cas d'une particule dans un potentiel.

3.2 Paquets d'onde et relation d'incertitude ([1] p.22,27 + [2] p.41,45)

On montre que la particule libre (onde plane) n'est pas physique et on étend la discussion au cas de paquets d'onde.

On en tire les inégalités d'Heisenberg.

3.3 Équation de Schrödinger stationnaire ([1] p.32)

On applique les résultats précédents au cas simple d'un système où le potentiel ne dépend pas du temps. On peut alors chercher des solutions en ondes stationnaires.

Questions pour faire réfléchir

➔ On pourra consulter avec profit le sujet du concours d'entrée des ENS Lyon-Cachan, session 2002, partie 1 sur l'expérience de Carnal et Mlynek (1991).

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ Agrégation 2009 - Note : 11/20 :

Questions et commentaires du jury : questions sur les inégalités d'Heisenberg, j'avais fait un paragraphe sur Heisenberg et les paramètres atomiques du Cohen que j'avais pas bien compris (à éviter...). Principe de correspondance, importance de la mesure en MQ, interférences atomiques : pourquoi n'ont-elles été obtenues que récemment ?

➔ Agrégation 2010 - Note : 08/20 :

Commentaires personnels : j'ai commencé par présenter les expériences historiques qui ont conduit à considérer l'aspect ondulatoire de la matière (interférences de neutrons notamment et expériences de Franck et Hertz). Le jury est revenu dessus. Je n'avais pas été assez clair sur la façon dont ces expériences illustraient l'aspect ondulatoire de la matière¹ (je suis allé trop vite). On a ensuite parlé de la notion de cohérence pour les ondes de matière. Ma deuxième partie concernait la fonction d'onde, l'équation de Schrödinger... Le jour des résultats, je suis allé voir le jury, on m'a dit qu'il aurait été bienvenu d'illustrer l'utilisation de l'équation de Schrödinger sur un exemple simple, ce

1. Le rapport 2010 contient le passage suivant : *Certaines leçons se prêtent bien à des approches historiques, par exemple en introduction à la mécanique quantique, même si, en l'occurrence, d'autres approches sont bien sur possibles. Le jury apprécie les approches historiques lorsqu'elles sont présentées avec soin, en respectant la chronologie des questionnements et des expériences présentées. De plus, les expériences historiques doivent être présentées très clairement pour dégager en quoi elles permettent de répondre (ou pas) à la question posée. Le jury est très sensible à la rigueur et à la cohérence des interprétations expérimentales.*

que je n'avais pas fait. J'ai terminé la leçon sur les inégalités de Heisenberg et je n'ai pas eu de questions particulières sur cette partie.

LP 39 — Confinement de l'électron et quantification de l'énergie.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 05/02/2014 par *Maxime Bordoux* et corrigée par *R. Carles*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Confinement de l'électron et quantification de l'énergie. Exemples*.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012, 2011) – “Dans le traitement de l'effet tunnel, les candidats perdent souvent trop de temps dans les calculs. Le jury invite les candidats à réfléchir à une présentation à la fois complète et concise sans oublier les commentaires physiques relatifs à la dérivation de la probabilité de transmission. Certains candidats choisissent d'aborder le cas de la désintégration alpha mais ne détaillent malheureusement pas le lien entre la probabilité de traversée d'une barrière et la durée de demi-vie de l'élément considéré. La justification des conditions aux limites est essentielle! Le microscope à effet tunnel peut être un bon exemple d'application s'il est analysé avec soin (hauteur de la barrière, origine de la résolution transverse,...).”

☞ (2010, 2009) – “ Une justification physique des conditions aux limites adoptées est attendue. Il faut s'interroger sur la définition du facteur de transmission de la barrière.”

☞ (2008) – “Le modèle de Bohr a maintenant une importance surtout historique. Il est évidemment possible de l'aborder mais il n'est pas un *passage obligé* pour aborder la quantification. L'interprétation des principaux résultats de la théorie quantique de l'atome d'hydrogène est primordiale.”

☞ (2007) – “Il s'agit du regroupement des leçons 42 et 43 de la liste de 2007 : *Puits de potentiel : exemples et applications en physique quantique* et *Confinement de l'électron et quantification de l'énergie dans les atomes*. La quantification des niveaux d'énergie des atomes est évidemment un exemple important, mais pas unique. Noter que le modèle de Bohr peut être évoqué, en raison de son importance historique ou heuristique, mais qu'il n'est pas du tout un passage obligé pour aborder la quantification.”

☞ (2005) – “Les notions de confinement et de discrétisation de l'énergie qui en découle doivent être dégagées. Le jury n'attend pas un exposé purement historique.”

☞ (2004) – “Le candidat ne doit ni se limiter à un exposé historique purement qualitatif, ni se lancer dans des calculs non maîtrisés. En particulier l'étude quantique de l'atome d'hydrogène n'est pas indispensable. Trop souvent l'interprétation des expériences présentées n'est pas comprise. La résolution analytique du puits de potentiel doit être présentée de façon synthétique pour réserver une durée suffisante aux applications.”

☞ (2003) – “Cette leçon n'est pas une leçon d'histoire des sciences. Le jury attend davantage qu'une présentation de l'atome de Bohr. Au delà du modèle simple, le candidat doit présenter les résultats de la mécanique quantique sans se placer à un niveau de second cycle universitaire.”

☞ (2000) – “Le modèle de Bohr ne peut être présenté sans en discuter les limitations. Ces leçons conduisent parfois à des calculs très lourds. Afin de les minimiser, on pourra traiter préférentiellement le puits de potentiel infini.”

☞ (1999) – “L'aspect historique peut être souligné mais l'étude quantique doit être abordée (sans pour autant développer les calculs) et illustrée d'exemples. Notons que la physique des hétérostructures à base de semiconducteurs offre des exemples simples de puits de potentiel que les candidats pourraient facilement traiter.”

☞ (1998) – “Si les détails des calculs peuvent être omis, les bases de ceux-ci, ainsi que la signification physique des conditions aux limites imposées au système doivent être explicitées. Par ailleurs, le jury attend la présentation d'applications significatives et bien comprises.”

Bibliographie

- [1] Pérez, *Quantique*. de Boeck, 2013.
- [2] Latour, *Leçons d'optique et de mécanique quantique*. Ellipses, 2000.
- [3] Basdevant, *Mécanique quantique*. Ellipses, 2002.
- [4] Basdevant, *Problèmes de Mécanique quantique*. Ellipses, 1996.
- [5] Basdevant, *12 leçons de mécanique quantique*. Vuibert, 2006.

Plan

1 Approche historique

2 Confinement à 1 dimension

2.1 Approche classique ([1] p.140,196 + [2] p.172)

2.2 Puits de potentiel infini ([1] p.198 + [2] p.172)

2.2.1 Mise en équation

2.2.2 Résultats

2.2.3 Commentaires

2.3 Puits de potentiel fini ([2] p.204 + [3] p.84)

2.3.1 Mise en équation

2.3.2 Résultats

2.3.3 Application : Laser à puits quantique ([1] p.211)

2.4 Oscillateur harmonique([1] p.228 + [3] p.80)

3 Confinement à 3 dimensions

3.1 Puits infini (boîte quantique) ([2] p.179)

3.2 Centres colorés dans les cristaux ioniques ([1] p.256 + [4] p.17)

3.3 L'atome d'hydrogène ([5] p.196 + [3] p.227)

1 Approche historique

On décrit l'approche historique nous conduisant à la quantification des niveaux d'énergie.

Pour montrer explicitement ce que l'on connaissait à l'époque je vous propose cette expérience.

► **Expérience** : Spectre d'une lampe à hydrogène + Ulice + Spid HR. **Spectre = code-barre** de l'élément chimique.

En 1885, Balmer établit empiriquement la formule donnant la valeur des longueurs d'onde observées dans le spectre de l'atome d'hydrogène. En 1888, le physicien Johannes Rydberg corrige la formule de Balmer pour donner la formule de Rydberg que l'on connaît :

$$\frac{1}{\lambda_{np}} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \quad (39.1)$$

où n et p sont des entiers positifs, λ_{np} la longueur d'onde de la radiation émise lors de la transition et R_H la constante de Rydberg qui vaut : $R_H = 109677.7 \text{ cm}^{-1}$ pour l'atome d'hydrogène.

Un peu plus tard, en 1900 Planck suppose que des oscillateurs mécaniques chargés, de fréquence ν , ne peuvent émettre ou absorber de l'énergie lumineuse que par quantités discrètes $E = h\nu$

Einstein, en 1905 utilise cette hypothèse pour expliquer l'effet photoélectrique, ce qui lui valu le prix Nobel en 1921. Avec toutes ces découvertes, on introduit le concept de *quantum de rayonnement*, appelé *photon*. Mais quand est-il de la matière ?

Après la découverte de l'électron par J.J. Thomson en 1897, ce dernier propose le modèle atomique de *plum-pudding* en 1904. Ce modèle décrit l'atome comme des électrons plongés dans une « soupe » de charge positive, comme des prunes (*plum* en anglais) dans un pudding.

Ce modèle fut invalidé en 1911 par l'expérience de la feuille d'or d'un de ses anciens étudiants, Ernest Rutherford. Rutherford propose alors un modèle planétaire où l'atome est constitué d'un noyau positif autour duquel tournent des électrons négatifs comme les planètes autour du Soleil. Entre le noyau - très petit par rapport à l'atome (environ 100 000 fois) - et ses électrons, un très grand vide existe.

Puis un grand pas sera franchi en 1913, Niels Bohr, en utilisant les résultats de Planck et de Rutherford, postule la quantification du moment cinétique de l'électron dans l'atome. Le pas est franchi ! Théoriquement la matière serait également assujettie à la quantification.

On cherche à expliquer la quantification des niveaux d'énergie, pour cela on fait l'analogie avec la mécanique pour une corde dont les deux extrémités sont fixes. On a alors des ondes stationnaires et donc des modes propres qui conduisent à des valeurs quantifiés de l'énergie et des fréquences.

C'est de par cette analogie que l'on va chercher à étudier des systèmes confinés dans un premier temps à 1 dimension.

2 Confinement à 1 dimension

2.1 Approche classique ([1] p.140,196 + [2] p.172)

Une particule classique évoluant dans un potentiel V ne sera libre que si son énergie totale E devient positive.

2.2 Puits de potentiel infini ([1] p.198 + [2] p.172)

2.2.1 Mise en équation

On résout l'équation de Schrödinger dans le cas d'un puits de potentiel infini.

On insiste sur la continuité de la fonction d'onde à la frontière qui correspond à la continuité de probabilité de présence de la particule (particule insécable).

Dans la zone de potentiel infini la fonction d'onde est nulle car on a $\frac{d^2\Psi}{dx^2} + E_p\Psi \sim E\Psi$

et comme la dérivée seconde est finie, E_p est infinie et on veut que E ne diverge pas, il faut nécessairement que $\Psi = 0$ dans les zones où $E_p = \infty$.

2.2.2 Résultats

On écrit les valeurs permises pour l'énergie. Le spectre est **quantifié** ! Apparition du premier nombre quantique n .

On donne les fonctions d'onde. On vient dessiner la fonction d'onde dans le puits et on décrit son comportement à proximité de la barrière.

2.2.3 Commentaires

On commente les résultats : Énergie du fondamental non nulle (expliqué par les relations d'indétermination d'Heisenberg) ; confinement \Rightarrow quantification ; parités des solutions (principe de Curie) ; énergie dépend de la largeur du puits (applications industrielles) ; ordre de grandeur des transitions pour différentes particules et lien avec la spectroscopie : on retrouve les bons ordres de grandeur.

2.3 Puits de potentiel fini ([2] p.204 + [3] p.84)

On étudie le cas d'un puits de potentiel carré plus réaliste (interaction forte de courte portée, laser à puits quantique).

2.3.1 Mise en équation

On pose les fonctions d'onde générale et on explique pourquoi physiquement on se doit d'éliminer certain termes.

2.3.2 Résultats

On montre le principe de la résolution graphique.

On a la possibilité d'avoir des états libres.

2.3.3 Application : Laser à puits quantique ([1] p.211)

On ajoute une couche fine d'un matériau semi-conducteur ce qui permet de créer un puits quantique pour les électrons et les trous. Lorsqu'on les met dans le puits ils vont se recombiner avec des trous et créer des photons.

La fréquence des photons est directement lié à la largeur du puits donc on peut choisir la couleur du rayonnement.

2.4 Oscillateur harmonique([1] p.228 + [3] p.80)

On s'intéresse au cas de l'o.h. qui apparaît constamment en physique.

On n'écrit pas le calcul, on donne le résultat du spectre énergétique : $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$

On montre l'existence d'un quantum d'énergie $E = \hbar\omega$. On relie le passage d'un électron à un niveau excité à l'absorption d'un photon d'énergie ΔE . Lien avec Planck et Einstein. Le rayonnement que peut absorber les parois est quantifiés. A l'échelle macroscopique (corps noir) le spectre est continu.

Le spectre d'émission n'a qu'une seule raie car la transition ne peut se faire qu'entre fonction paire et impaire : règle de sélection.

3 Confinement à 3 dimensions

3.1 Puits infini (boîte quantique) ([2] p.179)

On généralise au cas à 3 dimensions.

Le potentiel est à variables séparés, on peut le décomposer en somme.

On fait apparaître la dégénérescence des niveaux.

3.2 Centres colorés dans les cristaux ioniques ([1] p.256 + [4] p.17)

En bombardant un solide ionique de photon énergétique (X ou γ) on peut expulser un anion et laissez place à une lacune. Cette lacune étant entouré de cations positifs et très électronégative et peut piéger des électrons dans une **boîte quantique** (cela permet de restituer localement la neutralité du cristal).

On peut prévoir la couleur du photon absorbé connaissant le paramètre de maille (taille de la boîte quantique).

On retrouve le bon ordre de grandeur.

3.3 L'atome d'hydrogène ([5] p.196 + [3] p.227)

Problème à deux corps

On écrit la valeur de l'énergie.

On fait apparaître les 3 nombres quantiques dans l'écriture de la fonction d'onde.

On recalcule les ordres de grandeurs du rayon le plus probable et l'énergie du fondamentale pour comparer au modèle de Bohr.

Correction au modèle : structure fine (électron relativiste + couplage moment cinétique du spin et de l'orbite), structure hyperfine (raies à 21 cm de l'hydrogène) couplage spin nucléaire et moment cinétique de spin et orbital des électrons.

Conclusion

→ On a vu l'effet de confinement, il nous reste à voir **l'effet tunnel**. Ces deux phénomènes permettent d'expliquer quasiment tous les phénomènes quantiques.

Questions pour faire réfléchir

→ Quels sont les paramètres fixant les caractéristiques des raies : nombre, largeur, intensité ?

→ Qu'appelle-t-on structure fine ? hyperfine ? Quelle est la précision actuelle sur la constante de Rydberg ?

→ Qu'est-ce que le principe de Pauli, comment son application se traduit-elle entre les atomes ?

→ Qu'est-ce que l'effet Zeeman ?

→ Pouvez-vous expliquer simplement, les expériences de Stern et Gerlach ? de Franck et Hertz ?

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

→ Agrégation 2010 - Note : 17/20 :

Questions et commentaires du jury : retrouver la quantification du modèle de Bohr à partir de la relation de De Broglie ; détailler le calcul de la constante de normalisation de la fonction d'onde dans le puits de potentiel infini ; quels changements apporter si on tient compte de la masse finie du noyau ? Retrouver la distance moyenne entre électron et noyau pour l'orbitale $1s$; expliquer comment apparaît la quantification lors de "la résolution de l'atome d'hydrogène". Connaissez vous d'autres potentiels avec une quantification ? Expliquez la valeur limite de la série de Balmer, qu'est-ce qui se passe si le puits n'est plus infini ?

→ Agrégation 2012 - Note : 15/20 :

Questions et commentaires du jury : pouvait-on prévoir le fait que les solutions se répartissent en solutions paires et impaires ? Que se passe-t-il si le puits de potentiel n'est pas indépendant du temps ? Que se passe-t-il pour une particule dont l'énergie initiale est supérieure à celle du « haut » du puits ? Pouvait-on prévoir l'ordre de grandeur de l'énergie du premier niveau quantifié ? Est-ce que ces phénomènes sont purement quantiques ? Est-ce que le modèle d'un puits fini est bien adapté à l'atome d'hydrogène ?

Le jury m'a dit qu'il avait particulièrement apprécié la justification de la forme de la fonction d'onde aux limites du puits de potentiel, et il aimerait que l'on insiste sur deux choses : (i) le fait que la quantification sort « naturellement » avec les relations de Heisenberg (on fixe Δx , ça nous donne l'ordre de grandeur pour Δp et donc pour l'énergie quantifiée), et (ii) le fait que le traitement que l'on fait n'a rien de quantique en soi, puisque la quantification est quelque chose qui sort dès qu'on a des phénomènes ondulatoires (et donc les analogies avec la physique classique sont les bienvenues).

LP 40 — Effet tunnel (Agreg 2014, Note 14/20).

Avant-propos : Initialement mon plan faisait 4 parties : I) L'effet tunnel, II) Le microscope à effet tunnel, III) la désintégration alpha, IV) l'inversion de la molécule d'ammoniac. Vu qu'au bout de 3 heures de préparation j'en étais qu'au microscope à effet tunnel, j'ai décidé de ne présenter que ces deux parties là en prenant mon temps et en expliquant bien les étapes qui amènent à la probabilité de transmission (cf. Rapports du jury).

Par contre je pense ne pas avoir bien expliqué le microscope à effet tunnel, notamment le rôle de la tension U .

Je n'ai pas voulu faire l'expérience avec les blocs de paraffine et les ondes EM centimétriques car l'interprétation est difficile et je ne la maîtrisais pas. Encore une fois il ne faut pas présenter des choses que l'on ne maîtrise pas au moins un minimum. En effet, comme il nous l'a été rappelé, les jurys sont des spécialistes et ils sauront qu'on parle de quelque chose que l'on ne maîtrise pas du tout et ça coûte très cher *dixit* le président du jury.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012, 2011) – “Dans le traitement de l'effet tunnel, les candidats perdent souvent trop de temps dans les calculs. Le jury invite les candidats à réfléchir à une présentation à la fois complète et concise sans oublier les commentaires physiques relatifs à la dérivation de la probabilité de transmission. Certains candidats choisissent d'aborder le cas de la désintégration alpha mais ne détaillent malheureusement pas le lien entre la probabilité de traversée d'une barrière et la durée de demi-vie de l'élément considéré. La justification des conditions aux limites est essentielle! Le microscope à effet tunnel peut être un bon exemple d'application s'il est analysé avec soin (hauteur de la barrière, origine de la résolution transverse, ...).”

☞ (2010, 2009) – “ Une justification physique des conditions aux limites adoptées est attendue.”

☞ (2008) – “Ici encore la justification des relations de continuité aux interfaces est importante.”

☞ (2007) – “Il est important de justifier les relations de continuité de la fonction d'onde aux interfaces.”

☞ (2000) – “Ces leçons conduisent parfois à des calculs très lourds. Afin de les minimiser, dans cette leçon, on pourra utiliser des considérations de symétrie.”

☞ (1998) – “Si les détails des calculs peuvent être omis, les bases de ceux-ci, ainsi que la signification physique des conditions aux limites imposées au système doivent être explicitées. Par ailleurs, le jury attend la présentation d'applications significatives et bien comprises.”

☞ (1996) – “Il existe, pour l'effet tunnel, d'autres applications que la microscopie et l'émission α : il y en a aussi en physique de la matière condensée (les diodes tunnel, les super-réseaux, l'effet Josephson...).”

Bibliographie

[1] Pérez, *Quantique*. de Boeck, 2013.

[2] Basdevant, *Mécanique quantique*. Ellipses, 2002.

[3] Cohen-Tannoudji, *Mécanique quantique I*. Hermann, 1998.

[4] Leroy, *Le microscope à effet tunnel*. BUP n°699, Décembre 1987.

Plan

1 L'effet tunnel ([3])

1.1 Position du problème : la barrière de potentiel

1.2 Résolution de l'équation ([3])

1.3 Probabilité de transmission ([3])

2 Le microscope à effet tunnel ([1] et [4])

2.1 Présentation ([1] et [4])

2.2 Mise en équation ([1])

2.3 Microscope à balayage ([4])

2.4 Topographie ([4])

Introduction

On va essayer de chercher à comprendre si dans les films de science fiction, c'est vraiment possible de traverser un mur sous prétexte de la mécanique quantique.

1 L'effet tunnel ([3])

1.1 Position du problème : la barrière de potentiel

Dessin au tableau de la barrière de potentiel et description du problème (objet se situant dans la zone 1).

Traitement classique : si un skieur qui essaie de franchir une montagne a une énergie (purement cinétique par choix) supérieure à la barrière de potentiel alors il franchit la barrière.

Si par contre il a une énergie inférieure, il ne peut pas franchir la barrière car cela impliquerait qu'il ait une énergie cinétique négative dans la zone de la barrière $E = E_c + V_0 < V_0 \implies E_c < 0$ donc impossible.

Traitement quantique : on considère une particule incidente dans la zone I et on pose l'équation de Schrödinger pour résoudre le problème.

On passe à l'écriture stationnaire à 1D car le potentiel ne dépend pas du temps et ne dépend que de x .

1.2 Résolution de l'équation ([3])

On cherche des solutions stationnaires dans les trois zones.

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= A_1 \exp ik_1x + A'_1 \exp -ik_1x \\ \psi_{II}(x) &= A_2 \exp \rho_2x + A'_2 \exp -\rho_2x \\ \psi_{III}(x) &= A_3 \exp ik_1x + A'_3 \exp -ik_1x\end{aligned}$$

avec $k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et $\rho_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$.

Conditions sur les fonctions d'ondes :

- Particule provenant de $-\infty$ nous permet de supprimer le terme d'onde se déplaçant vers la gauche dans la zone 3 ($A'_3 = 0$).
- On a la continuité de la fonction d'onde aux interfaces ($x = 0$ et $x = L$) car on a conservation de l'objet quantique et donc conservation de la densité de probabilité $\rho = |\psi|^2$
- On a continuité de la dérivé première de la fonction d'onde car le potentiel n'est pas infini. On peut aussi dire que l'équation de conservation $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} = 0$ nous donne que $dJ/dx = 0$ puisqu'on est en régime stationnaire. Donc J est constant et il est relié à la dérivé première de la fonction d'onde.

On peut alors relier les différentes amplitudes des fonctions d'onde entre elles (je n'ai pas voulu détailler le calcul car trop calculatoire et inintéressant).

1.3 Probabilité de transmission ([3])

On donne l'expression générale de la probabilité de transmission.

Retour sur l'onde évanescence dans la zone II et sur la portée de cette onde, qui est à relier directement à la largeur de la barrière.

On se place dans le cas où $\rho_2 L \gg 1$ ce qui est souvent le cas dans les exemples physiques quantiques.

Ordre de grandeur :

On considère un skieur et une barrière de potentiel assimilée à une montagne. On calcule l'ordre de grandeur de la portée de l'onde évanescence et on déduit que la proba de transmission est nulle.

Un électron d'énergie 1 eV avec une barrière de potentiel de 2 eV et de largeur 1 angström. Probabilité de 0.78.

Par contre proton qui a une masse de 1838 fois la masse de l'électron pour les mêmes énergies à une proba de 10^{-4} . Donc le proton ne peut pas faire d'effet tunnel dans ces conditions.

On voit que cet effet est purement quantique et on va voir une application de cet effet.

2 Le microscope à effet tunnel ([1] et [4])

2.1 Présentation ([1] et [4])

Dessin du microscope comme dans le Pérez et on explique les éléments constituant le MET ainsi que les résultats expérimentaux trouvés sur la décroissance exponentielle du courant mesuré dans la pointe.

2.2 Mise en équation ([1])

On écrit le courant circulant dans la pointe en fonction de la probabilité de transmission.

On relie alors le courant tunnel à une exponentielle décroissante donc on comprend les observations expérimentales.

2.3 Microscope à balayage ([4])

On montre le principe de fonctionnement d'un balayage du microscope et les conditions pour avoir une bonne résolution (pointe à 1 atome). Asservissement du signal grâce à des quartz piézo.

2.4 Topographie ([4])

On l'utilise en topographie pour faire une cartographie de la surface des atomes. On travaille à U et I constant par asservissement de position.

On montre l'image du BUP montrant la surface reconstituée d'un cristal de silicium (je l'ai projeté à la flexcam).

Conclusion

J'ai insisté sur le fait que l'effet tunnel était un effet purement quantique.

J'ai mentionné qu'il y avait d'autres applications à l'effet tunnel, comme la compréhension de la désintégration α ainsi que l'inversion de la molécule d'ammoniac.

Questions et remarques du jury

➔ Réexpliquez les ordres de grandeurs calculés de la barrière de potentiel pour le skieur

Skieur de 100kg qui part avec une vitesse de 10m/s (sans frottement) et donc qui a une énergie cinétique de 5000 J et qui essaye de franchir une montagne haute de 10m et large de 10m. En prenant l'énergie potentielle nulle à l'endroit initial du skieur, la hauteur de la barrière de potentiel est donc $V_0 = mg\Delta z = 10\,000\text{J}$. On est bien dans le cas $E < V_0$. Finalement calcul de la portée de l'onde évanescence et de sa probabilité de transmission.

☞ Ils sont revenu sur la définition de la constante ρ_2 apparaissant dans les fonctions d'onde évanescences car j'avais fait une erreur que j'ai corrigé en écrivant \hbar^2 en dehors

de la racine carré.

➔ **Pouvez-vous réexpliquer le raisonnement du pourquoi le skieur ne passe pas effet tunnel la barrière de potentiel ?**

J'avais fait une discussion sur le fait que la constante de Planck était très petite et que comparé à la masse du skieur qui était grande le rapport des deux allait être très petit, alors que pour un électron ce n'était pas le cas. Mais ce raisonnement était bête car les ordres de grandeurs choisis pour la barrière de potentiel et l'énergie n'étaient pas les mêmes pour l'électron et pour le skieur. Ce qu'il fallait discuter c'était la portée de l'onde évanescence ($1/\rho_2$) par rapport à la largeur de la barrière comme c'est fait dans le Latour que j'ai bien évidemment oublié de prendre.

➔ **Comment aurait-on pu raisonner pour montrer que le caractère quantique du skieur n'est pas relevant ?**

Calcul de sa longueur d'onde de Broglie qui est de l'ordre de 10^{-40} dans ce cas-ci.

☞ *Ils sont également revenus sur les dessins du BUP sur la surface équipotentielle obtenue et que représentait cette équipotentielle.*

➔ **Pourquoi peut-on prendre des barrières de potentiels avec des discontinuités si franches, est-ce réaliste ? Connaissez-vous des phénomènes où le potentiel est bien retranscrit par cette modélisation**

J'ai juste répondu que c'était un modèle et qu'il faudrait comparer la variation de l'interaction avec une distance caractéristique mais je ne pas trouvé d'exemple concret se rapprochant à une barrière discontinue. Je pense qu'on peut citer le monde subatomique où l'interaction forte responsable de la cohésion des noyaux à une variation très brusque.

➔ **Pour justifier la condition aux limites sur la dérivée première de la fonction d'onde vous avez utilisé le fait que le courant de probabilité était constant car on était en régime stationnaire, est-ce toujours le cas ? Y-a-t-il un lien avec le potentiel ?**

Si le potentiel n'est pas infini, alors la dérivé de la fonction d'onde est continue.

➔ **Vous avez dit que pour l'effet tunnel l'énergie des électrons de conduction était leur énergie de Fermi E_F et que la barrière de potentiel était égale à $V_0 = E_F + W_s$, à quoi correspond le W_s ?**

C'est le travail d'extraction à fournir aux électrons pour leur permettre de s'échapper du métal auquel ils sont attachés (effet photoélectrique).

☞ *Ils m'ont demandé de compléter le schéma représentant le microscope (cf. BUP page 1270 première figure), je n'avais pas regardé la troisième figure et c'est ce qu'il me demandait de représenter au tableau, ce que je n'ai pas su faire.*

➔ **A quoi correspond le potentiel U appliqué et pourquoi prendre une valeur de 0.1V ?**

J'ai (mal) répondu qu'il permettait de diminuer la barrière de potentiel à franchir pour les élec-

trons. En fait le potentiel appliqué permet de rendre dissymétrique la barrière de potentiel à franchir et ainsi d'empêcher des électrons de la pointe de passer par effet tunnel vers la surface comme c'est bien décrit dans le BUP mais pas dans le Pérez il me semble.

➔ **Comment sait-on que ce que l'on voit sur l'image c'est des atomes ?**

J'ai répondu qu'il fallait déjà s'attendre un peu aux résultats que l'on cherchait et que c'était la variation de l'intensité du courant qui nous permettait de savoir que c'était des atomes en retrouvant la décroissance exponentielle du courant avec la distance entre la pointe et la surface. On peut aussi dire que l'atome est délimité par son nuage électronique qui est bien délimité.

➔ **En mécanique classique on dit aux élèves que l'énergie potentielle est définie à une constante près, est-ce qu'en mécanique c'est pareil et est-ce que les résultats que l'on trouve sont modifiés si on change l'origine des potentiels ?**

Non, ça ne modifie pas les résultats car on a une différence d'énergie qui apparaît dans la constante définie $\rho_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$ donc on peut modifier la valeur de l'origine des potentiels.

➔ **L'image de la surface des atomes de silicium, est-ce que c'est une photo ? Pour des élèves n'est-ce pas troublant de montrer cette image ?**

Non c'est une reproduction imagée des courants tunnel mesurés en fonction du positionnement de la pointe.

Conseils

Je conseille vraiment de réduire la taille de son plan comme je l'ai fait, plutôt que d'en présenter beaucoup sur le sujet et de ne pas avoir le temps de finir.

Cela permet d'avoir plus de temps pour comprendre ce que l'on va présenter et d'avoir plus de temps pour le présenter et ainsi montrer ses qualités d'enseignants.

Cela vous permettra également d'avoir un peu plus confiance dans votre présentation et ainsi vous détacher de vos notes ce que le jury apprécie.

Pendant l'année faites les calculs utiles (ex. : calcul de la probabilité de transmission même si on ne présente pas le calcul) pour les leçons (ce sont les mêmes que ceux présents dans les épreuves écrites), cela vous permettra de les faire sans vos notes le jour de l'oral et d'avoir moins peur des questions du jury.

LP 40 — Effet tunnel.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 12/03/2014 par *Aurélié Condomines* et corrigée par *R. Carles*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Effet tunnel. Applications*.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012, 2011) – “Dans le traitement de l'effet tunnel, les candidats perdent souvent trop de temps dans les calculs. Le jury invite les candidats à réfléchir à une présentation à la fois complète et concise sans oublier les commentaires physiques relatifs à la dérivation de la probabilité de transmission. Certains candidats choisissent d'aborder le cas de la désintégration alpha mais ne détaillent malheureusement pas le lien entre la probabilité de traversée d'une barrière et la durée de demi-vie de l'élément considéré. La justification des conditions aux limites est essentielle! Le microscope à effet tunnel peut être un bon exemple d'application s'il est analysé avec soin (hauteur de la barrière, origine de la résolution transverse, ...).”

☞ (2010, 2009) – “ Une justification physique des conditions aux limites adoptées est attendue.”

☞ (2008) – “Ici encore la justification des relations de continuité aux interfaces est importante.”

☞ (2007) – “Il est important de justifier les relations de continuité de la fonction d'onde aux interfaces.”

☞ (2000) – “Ces leçons conduisent parfois à des calculs très lourds. Afin de les minimiser, dans cette leçon, on pourra utiliser des considérations de symétrie.”

☞ (1998) – “Si les détails des calculs peuvent être omis, les bases de ceux-ci, ainsi que la signification physique des conditions aux limites imposées au système doivent être explicitées. Par ailleurs, le jury attend la présentation d'applications significatives et bien comprises.”

☞ (1996) – “Il existe, pour l'effet tunnel, d'autres applications que la microscopie et l'émission α : il y en a aussi en physique de la matière condensée (les diodes tunnel, les super-réseaux, l'effet Josephson...).”

Bibliographie

- [1] Pérez, *Quantique*. de Boeck, 2013.
- [2] Basdevant, *Mécanique quantique*. Ellipses, 2002.
- [3] Cohen-Tannoudji, *Mécanique quantique I*. Hermann, 1998.
- [4] Latour, *Leçons d'optique et de mécanique quantique*. Ellipses, 2000.
- [5] Leroy, *Le microscope à effet tunnel*. BUP n°699, Décembre 1987.
- [6] Matta, *L'effet tunnel : quelques applications*. BUP n°734, Mai 1991.

Plan

- 1 L'effet tunnel ([1] p.168 + [2] p.69 + [3] p.73 + [4] p.190)**
 - 1.1 Barrière de potentiel
 - 1.2 Probabilité de transmission ([4] p.190)
- 2 Microscope à effet tunnel ([1] p.178 + [5])**
- 3 Théorie de Gamow de la radioactivité α ([1] p.174 + [6])**
- 4 Molécule d'ammoniac ([1] p.176 + [2] p.92)**
 - 4.1 Modélisation de la molécule ([2] p.92)
 - 4.2 Fonctions d'onde ([2] p.93)

4.3 Phénomènes d'inversion

Introduction

Analogie mécanique : skieur si il n'a pas assez d'énergie, il ne pourra pas franchir la montagne correspondant à une certaine énergie potentielle. Si son énergie est inférieure à celle de la barrière de potentiel, il ne pourra pas franchir celle-ci.

En mécanique quantique c'est possible.

1 L'effet tunnel ([1] p.168 + [2] p.69 + [3] p.73 + [4] p.190)

1.1 Barrière de potentiel

On écrit le problème de la barrière de potentiel.

On recherche des solutions en ondes stationnaires car le potentiel ne dépend que de la coordonnée spatiale. Équation aux valeurs propres.

On étudie le cas : $E < V_0$. On cherche des ondes planes car l'équation de Schrödinger est linéaire et on peut décomposer toute onde en somme d'onde plane.

On écrit les solutions dans chaque zone. Analogie avec la physique des ondes pour les ondes réfléchies et incidentes.

Les relations de passage nous fournissent les conditions aux limites : continuité de la densité de probabilité (continuité de la fonction d'onde, particule insécable) et du courant de probabilité (dérivée de la fonction d'onde).

1.2 Probabilité de transmission ([4] p.190)

On passe l'étape de calcul et on donne la formule permettant d'écrire le rapport des amplitudes des ondes dans la zone 1 et 3.

On fait l'hypothèse de la barrière épaisse souvent confirmé expérimentalement. On simplifie alors le rapport. C'est le rapport de deux amplitudes de proba!

On élève au carré le rapport, cela nous donne la proba de transmission de la barrière :
$$T = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp -2\rho a$$

On voit que la transmission est nulle dans deux cas : barrière très large et barrière très haute.

On trace le module carré de la fonction d'onde en fonction des zones. On a un décroissance exponentielle dans la zone 3 sur une distance caractéristique $1/\rho$.

On calcul un ordre de grandeur de cette barrière pour le skieur et pour un électron. Pour le skieur la distance caractéristique de pénétration de l'onde évanescente est infiniment petite $1/\rho \sim 10^{-37}m$.

Pour l'électron la distance est de l'ordre de $1/\rho \sim 10^{-10}m$. Donc la transmission est appréciable si l'épaisseur de la barrière est de l'ordre de $a \sim 10^{-10}m$.

Message : On voit que l'effet tunnel intervient lorsque la portée de l'interaction et de l'ordre de grandeur de la largeur de la barrière.

2 Microscope à effet tunnel ([1] p.178 + [5])

On explique le principe d'un MET. Une pointe de tungstène vient très proche d'une surface que l'on cherche à étudier. On fait un vide pousser entre les deux.

On relie un microampèremètre au circuit qui nous indique la capture d'un électron par effet tunnel. En déplaçant latéralement le capteur et en observant les variations d'intensité, on remonte à la structure de la surface.

Un boucle d'asservissement nous permet de travailler à courant par effet tunnel constant lors du déplacement verticale accidentelle de la pointe. C'est-à-dire que l'on ne varie pas de hauteur et donc l'exponentielle décroissante n'a pas d'effet variable puisque a est constant.

Il y a aussi une proba de transmission de la pointe vers la surface mais la barrière est plus haute dans ce sens là.

On arrive à une résolution de l'ordre de 0.01 nm verticalement. Et latéralement 0.1 nm si la pointe ne comporte qu'un atome latéralement.

3 Théorie de Gamow de la radioactivité α ([1] p.174 + [6])

On montre l'allure du potentiel ressenti par la particule α dans le noyau : potentiel coulombien répulsif + interaction forte attractif (puis de potentiel).

On donne des ordres de grandeurs de la barrière de potentiel et de l'énergie des noyaux d'hélium. On montre que la désintégration ne peut se faire que par effet tunnel.

On donne la formule du facteur de transmission qui doit être adapté au cas d'une barrière de potentiel variable.

Ce facteur de transmission est inversement proportionnelle au temps de demi-vie.

On calcul alors l'odg du temps de demi-vie pour l'uranium 238 qui est très long.

4 Molécule d'ammoniac ([1] p.176 + [2] p.92)

4.1 Modélisation de la molécule ([2] p.92)

On montre les deux configurations de la molécule d'ammoniac.

On montre le puits de potentiel représentant le changement de configuration et on le modélise par un puits double carré.

4.2 Fonctions d'onde ([2] p.93)

On cherche des solutions stationnaires, donc équation aux valeurs propres. On résout cette équation avec les conditions aux limites comme précédemment.

On trouve alors les fonctions d'onde caractéristiques de ce puits.

Pour la zone centrale (barrière) on a une solution symétrique et antisymétrique.

On écrit les valeurs des énergies de l'état symétrique et antisymétrique.

4.3 Phénomènes d'inversion

Pour décrire l'état gauche ou l'état droite, il faut faire des combinaisons linéaires des états symétriques et antisymétriques. On a alors une fonction d'onde qui représente soit la configuration gauche soit la configuration droite.

On considère à l'instant initial, la particule à droite. On multiplie par $\exp -iEt/\hbar$ pour obtenir l'évolution temporelle de la particule :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_S(x) \exp -iE_S t/\hbar + \psi_A(x) \exp -iE_A t/\hbar)$$

En transformant l'expression on trouve la valeur du temps t qui permet d'exprimer la fonction d'onde qui ressemble à la fonction gauche.

On calcule alors la fréquence d'inversion de la configuration.

Conclusion

L'effet tunnel est un effet très courant en mécanique quantique. Une particule possédant une énergie inférieure à la hauteur de la barrière de potentiel peut tout de même la franchir. Résultats essentiel pour expliquer la radioactivité α , les battements quantiques de l'ammoniac, le MET...

C'est un effet profondément contre-intuitif d'un point de vue de la mécanique classique. Mais cet effet est directement issue du comportement ondulatoire de la matière.

Questions pour faire réfléchir

- ➔ Qu'est-ce que la notion de courant de probabilité ?
- ➔ Qu'est-ce que la théorie de Gamow de la désintégration ?? Tracer l'allure de la courbe expérimentale de la durée de vie des émetteurs ? en fonction de l'énergie.
- ➔ Qu'est-ce que l'effet Josephson ?
- ➔ Qu'est-ce que le microscope à effet Tunnel ? Peut-on observer toutes les surfaces à l'aide d'un tel microscope ?

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ Agrégation 2012 - Note : 18/20 :

Questions et commentaires du jury : Connaissez-vous des manifestations macroscopiques de phénomènes quantiques ? (*On m'a fait chercher des exemples jusqu'à ce que je mentionne la supraconductivité*). Sur le calcul de la probabilité de transmission : comment convaincre un élève que la probabilité de transmission est le rapport des coefficients des deux ondes planes ? (*Analogie avec la physique des ondes, il faudrait raisonner en terme de courant de probabilité*). Comment justifier physiquement la continuité de la dérivée première de la fonction d'onde ? Pourquoi chercher des solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire ? Comment peut-on interpréter l'effet tunnel avec les relations d'incertitude de Heisenberg temps-énergie ? Sur le microscope à effet tunnel : comment

se fait le déplacement de la pointe du microscope à effet tunnel? (*À courant constant ou à hauteur constante*). Comment faire si on n'a pas une surface conductrice? Sur la molécule d'ammoniac : comment répondre physiquement à la question d'un élève qui ne comprendrait pas pourquoi on a une fonction d'onde antisymétrique bien que le potentiel soit lui symétrique?

→ **Agrégation 2012 - Note : 15/20 :**

Questions et commentaires du jury : autre technique que le microscope à effet tunnel pour sonder les surfaces et qui n'utilise pas les propriétés électriques des métaux? Autre exemple où il y a autant d'écart d'ordres de grandeur j'avais présenté 1030 OG entre les temps de demie-vie de l'uranium et du polonium? Expliquer pourquoi on fait l'approximation de barrière épaisse pour découper un potentiel quelconque, alors qu'on les fait tendre vers une épaisseur nulle? Quelles conséquences si on considère un puits de potentiel au lieu d'une barrière de potentiel? Est-ce incohérent avec la mécanique classique? Dans la molécule de NH_3 , pourquoi la fonction d'onde n'est-elle pas symétrique alors que le potentiel l'est? Pourquoi la dérivée de la fonction d'onde est-elle continue aux bornes de la barrière de potentiel?

LP 41 — Fusion, fission.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 22/05/2014 par *Aurélié Condomines* et corrigée par *G. Soucail*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Le noyau : stabilité, énergie. Applications.*

Rapports du Jury

☞ (2013) – “Le nouvel intitulé de cette leçon doit inviter les candidats à réfléchir à la physique sous-jacente aux phénomènes de fusion et de fission nucléaires.”

☞ (2012) – “Le modèle de la goutte ne peut être simplement énoncé. Le candidat qui ferait le choix d'en parler doit commenter la physique inhérente à chaque terme du modèle. Cette leçon ne peut se réduire à un catalogue d'informations diverses et variées, mais les candidats doivent dégager du temps pour les applications.”

☞ (2011) – “Le modèle de la goutte ne peut être simplement énoncé. Le candidat qui ferait le choix d'en parler doit commenter la physique inhérente à chaque terme du modèle. Cette leçon ne peut se réduire à un catalogue d'informations diverses et variées.”

☞ (2010, 2009) – “L'énergie est un point central et les applications ne doivent pas être traitées trop rapidement en fin de leçon.”

☞ (2008) – “Les applications doivent être envisagées. Parmi elles, figure l'énergie nucléaire, qu'il paraît difficile de ne pas aborder.”

☞ (2007) – “ À l'heure actuelle, les problèmes énergétiques ont pris une telle importance qu'il paraît difficile de ne pas les évoquer. C'est pourquoi l'intitulé 2008 mentionne que les applications doivent être envisagées. Parmi elles, figure évidemment l'énergie nucléaire.”

☞ (2004) – “Ce nouveau sujet, introduit pour compléter les thèmes abordés à l'oral de l'agrégation, a donné lieu à des exposés souvent attractifs mais un peu trop qualitatifs et descriptifs. Les candidats doivent évidemment avoir des connaissances sur les techniques expérimentales qui permettent d'obtenir des informations sur la taille et la structure interne du noyau.”

Bibliographie

- [1] Spiro, Basdevant, *Énergie nucléaire*. En ligne sur interne et très bien !
- [2] Valentin, *Physique nucléaire*.
- [3] Matta, *L'effet tunnel : quelques applications*. BUP n°734, Mai 1991.
- [4] Pérez, *Quantique*. de Boeck, 2013.
- [5] Charles, *Energie nucléaire, Fission et fusion*. ellipses, 2007.

Plan

1 Le noyau

1.1 Structure

1.2 Énergie des noyaux, potentiel de Yukawa ([1] p.47 + [2] p.51)

1.3 Énergie de liaison par nucléon ([1] p.33)

2 La fission

2.1 Les réactions et les énergies mises en jeu ([1] p.185 + [5] p.26)

2.2 Mécanisme : Radioactivité α ([4] p.174 + [3] + [2] p.161)

2.3 Principe d'un réacteur ([1] p.208 + [2] p.215)

3 La fusion ([1] p.233 + [5] p.141)

3.1 Réaction et énergies

3.2 Mécanisme et difficulté

3.3 Applications

3.3.1 Réacteur à fusion

3.3.2 La fusion dans les étoiles ([5] p.142)

Introduction

En 1896 Becquerel découvre la radioactivité.
Énergie colossale dans le noyau.

1 Le noyau

1.1 Structure

Z : numéro atomique ; N : nombre de neutrons ; A : nombre de masse

$$A = Z + N$$

Rayon du noyau : 1 fm « rayon de l'atome 100 000 fm

Rayon des noyaux : $R = r_0 A^{1/3}$; Pour A = 20 on a R = 3.3 fm. Cette loi est empirique elle n'a rien à voir avec le potentiel de Yukawa.

Isotope : même Z.

Comment expliquer la stabilité ?

1.2 Énergie des noyaux, potentiel de Yukawa ([1] p.47 + [2] p.51)

Forces nucléaires (interaction forte) : modéliser par le potentiel de Yukawa (cf. image).

Interaction à très courte portée : $V(r) = g \frac{\hbar c}{r} \exp r/r_0$ avec $r_0 \approx 1.4$ fm. Si r_0 est très grand on retrouve le potentiel coulombien.

L'interaction forte est 1000 fois plus forte que l'interaction coulombienne.

Énergie totale :

$$M(A, Z)c^2 = Nm_N c^2 + Zm_p c^2 - B(A, Z)$$

où B est l'énergie de liaison, avec un signe moins pour travailler qu'avec des grandeurs positives.

☞ Attention à la vallée de la stabilité car dans cette leçon ce n'est plus important. Il ne faut peut-être pas en parler.

1.3 Énergie de liaison par nucléon ([1] p.33)

C'est le coeur de la leçon. Tout ce que l'on va dire par la suite découle de ce graphe.

On définit l'énergie de liaison par nucléon (cf. image) : $b(A, Z)$. Les éléments les plus stables se situent au maximum de la cloche de l'énergie de liaison $A \approx 50$.

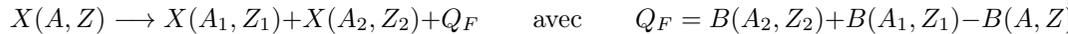
Ce qui se trouve à gauche va pouvoir fusionner pour atteindre une énergie de liaison plus haute. Ce qui se trouve à droite va pouvoir fissionner pour être plus stable.

Pour rompre une liaison covalente il faut fournir une énergie de l'ordre de l'eV. On voit que l'énergie de liaison est de l'ordre de grandeur de 1-10 MeV. Énergie colossale dans les noyaux.

2 La fission

2.1 Les réactions et les énergies mises en jeu ([1] p.185 + [5] p.26)

Un noyau se fissionne si il se fragmente spontanément en deux ou plusieurs produits.



Q_F est la différence des énergies de liaisons.

Pour $A = 240$, $B = 7,6$ MeV; pour $A=120$, $B=8.5$ MeV. On a $Q_F = 240 \cdot 8.5 - (120 \cdot 7.6) \cdot 2 = 240 \cdot (8.5 - 7.6) = 220 \text{ MeV}$. On peut récupérer beaucoup d'énergie.

Exemple d'une fission de l'uranium 236. Les produits lourds issus de la fission possèdent une énergie cinétique de l'ordre de 75 MeV, donc 10^7 m/s, il possède une libre parcours moyen de 10^{-6} m.

2.2 Mécanisme : Radioactivité α ([4] p.174 + [3] + [2] p.161)

Barrière de fission (de potentiel) pour permettre la réaction, odg : 6-7 eV.

On peut franchir la barrière par effet tunnel mais les masses sont grandes donc probabilité faible : c'est la fission spontanée.

On montre l'allure du potentiel ressenti par la particule α dans le noyau : potentiel coulombien répulsif + interaction forte attractif (puis de potentiel).

On donne des ordres de grandeurs de la barrière de potentiel et de l'énergie des noyaux d'hélium. On montre que la désintégration ne peut se faire que par effet tunnel.

On donne la formule du facteur de transmission qui doit être adapté au cas d'une barrière de potentiel variable.

Ce facteur de transmission est inversement proportionnelle au temps de demi-vie.

On calcul alors l'odg du temps de demi-vie pour l'uranium 238 qui est très long.

☞ Regarder le diagramme dans [1] sur l'effet tunnel avec le potentiel. Pour une fonction carré on a $P \propto e^{-2K\Delta}$ avec Δ la largeur de la barrière et $K = \sqrt{2m(E_c - E_\alpha)}/\hbar$.

☞ La radioactivité α ne se produit que sur des noyaux très lourds car la barrière de potentiel électrostatique est plus forte que l'interaction forte et permet la fission.

2.3 Principe d'un réacteur ([1] p.208 + [2] p.215)

REP : réacteur à eau pressurisée.

On veut de l'uranium 235 car l'uranium naturelle est plus de l'uranium 238.

La fission permet d'obtenir $7 \cdot 10^{13}$ J/kg, une combustion est de l'ordre de 10^7 J/kg.

☞ Il faut d'abord présenter la réaction en chaîne. La fission s'opère mieux quand la vitesse n'est pas trop rapide (temps de collision plus long donc plus de proba de réaliser la collision). Donc il faut ralentir les neutrons thermiques. Il faut modérer cette réaction en chaîne car on veut utiliser l'énergie à des fins civiles. Bien insister sur les deux circuits primaire et secondaire. Le primaire c'est un système fermé.

3 La fusion ([1] p.233 + [5] p.141)

3.1 Réaction et énergies



On voit que l'on peut fusionner jusqu'à arriver au fer qui est l'élément le plus stable.

Phénomène se produisant dans le Soleil : $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e + 0.42 \text{ MeV}$.

Sur Terre, on a $d + d \rightarrow 3^H e + n + 3.2 \text{ MeV}$ ou $d + t \rightarrow 4^H e + n + 17.5 \text{ MeV}$

☞ L'énergie nucléaire libérée est plus grande que pour la fission car la pente de la courbe d'énergie de liaison est plus grande à gauche.

3.2 Mécanisme et difficulté

Difficile de rapprocher les noyaux car on a une interaction coulombienne : franchissement d'une barrière de potentiel plus importante que celle de la fission.

$$E_p = \frac{Z_1 Z_2 q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

plus les noyaux sont chargés (ou lourds ce qui revient au même) plus la barrière de potentiel est élevée.

☞ Nécessité de travailler à haute température pour vaincre la barrière de potentiel (électrostatique). Dans le Soleil c'est bon mais dans les tokamaks c'est plus difficile.

☞ On injecte de l'énergie pour chauffer le plasma, mais on récupère plus d'énergie électrique que l'on en a rentré : critère de Lawson (cf. [1]). Les paramètres sont la section efficace, le temps de confinement,...

3.3 Applications

3.3.1 Réacteur à fusion

Tokamak.

Projet ITER (temps de confinement de l'ordre de la seconde).

On réalise la fusion par confinement magnétique par laser, ou à l'intérieur des étoiles (temps de confinement est "infini").

3.3.2 La fusion dans les étoiles ([5] p.142)

On parle de la formation des noyaux dans les étoiles qui produit de l'énergie : réaction exothermique.

La fusion du fer est endothermique, ce qui signifie que la fusion du fer va prendre de l'énergie au milieu, et non pas en fournir. Très vite (quelques secondes selon la masse de l'étoile), la gravitation va l'emporter, et le coeur va s'effondrer sur lui-même. La production d'énergie chute brutalement, et l'étoile n'est plus soutenue par la pression de radiation. Toute l'étoile s'effondre alors sur elle-même en implosant. La densité du coeur augmente, jusqu'à atteindre la densité des noyaux atomiques. Dès lors, elle ne peut plus augmenter. La matière qui arrive sur ce coeur lui rebondit dessus. Une onde de choc balaie alors l'étoile, du centre vers les couches externes et rallume la fusion dans ces mêmes couches.

C'est lors de cette explosion que tous les éléments plus lourds que le fer sont synthétisés selon deux processus, le processus R (addition rapide de neutrons) et le processus RP (addition rapide de protons). L'énergie cinétique de la périphérie du noyau effondré s'accroît brutalement, de façon désordonnée autour du noyau central ce qui conduit à de très nombreuses collisions produisant une quantité colossale d'énergie, l'étoile devient supernova qui va éjecter violemment dans l'espace, sous l'effet de l'onde de choc, les éléments lourds que l'étoile a synthétisée; durant cet effondrement, de nombreuses autres réactions de fusion et de fission partielle vont se produire et former les isotopes les plus lourds (comme le plomb, l'or, le platine, l'uranium, etc.) immédiatement avant d'être propulsés hors de l'étoile sous l'effet de l'onde de choc centrifuge. La masse totale de l'étoile joue un rôle critique dans la nature des éléments formés, à cause de la quantité de neutrons nécessaire à ces fusions et produits par les désintégrations secondaires.

Questions pour faire réfléchir

- ➔ Comment détecte-t-on l'existence des isotopes ?
- ➔ Comment mesurer le spin d'un noyau ?
- ➔ A propos de la vallée de la stabilité : pourquoi la courbe réelle s'éloigne-t-elle de l'équation $N = Z$?
- ➔ Qu'est-ce qui fixe la portée (courte) de l'interaction forte ?
Le terme r_0
- ➔ Pourquoi le bineutron ou l'hélium II n'existe-t-il pas ?
- ➔ Pourquoi le neutron est-il stable à l'intérieur d'un noyau alors qu'il se désintègre spontanément à l'état libre ?

Questions et Remarques du correcteur

Sur la fusion : comment les noyaux plus lourds que l'hydrogène, l'hélium, ont-ils été fabriqués ? *Dans les étoiles ! Il faut le mentionner. Dans les supernovae on fabrique des éléments plus lourds que le fer en faisant de la capture neutronique ce qui n'est pas de la fusion.*

Quels sont les différents types de désintégration ? *Il faut en parler*

Modèle de la goutte liquide ? *On utilise la notion de tension superficielle sur le noyau*

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ **Agrégation 2008 - Note : 15/20 :**

Questions et commentaires du jury : pourquoi découpe-t-on le modèle de la goutte liquide en la somme d'une contribution de volume et d'une contribution de surface ? Comment calcule-t-on le terme proportionnel à $Z(Z+1)$? Pourquoi la courbe B/A en fonction de A n'est elle pas "bien lisse" ?

➔ **Agrégation 2008 - Note : 16/20 :**

Questions et commentaires du jury : sur l'expérience de Rutherford : pourquoi cela invalide-t-il le modèle de Thomson ? Sur le calcul du terme correctif coulombien : pourquoi peut-on faire le calcul en ramenant la charge de l'infini, pourquoi ce calcul ne donne-t-il pas le bon résultat ?

➔ **Agrégation 2010 - Note : 06/20 :**

Questions et commentaires du jury : connaissait-on déjà le noyau d'hélium dans l'expérience de Rutherford ? (*je pense que oui c'est un noyau assez simple dont la connaissance est nécessaire pour décrire ensuite le noyau d'or*). Quel est le rôle des électrons ? (on n'en tient pas compte, on néglige les interactions avec les électrons). Pouvez-vous développer et donner une expression mathématique des forces nucléaires que vous avez présenté ? Ensuite ils ont décortiqué chaque terme de la formule de Weizsaecker que j'avais expliqué sur transparent. Retrouver la forme du terme électrostatique (avec la force de Coulomb). Expliquer le terme de surface (*j'ai fait un lien avec la force de tension superficielle et son origine*). Comment pouvait-on prévoir déjà qu'on allait récupérer une énorme quantité d'énergie avec la fission ? (*énergie de masse et formule d'Einstein*).

Commentaires personnels : première des choses, j'ai été un peu surpris qu'il n'y ait aucun livre de terminale S et même de vieux livres de terminale C et E dans lesquels j'avais trouvé plein d'applications, j'ai du chercher dans d'autres bouquins, et j'ai perdu un peu de temps du coup. Je n'ai pas eu le temps de traiter la fusion et les applications médicales ont été légèrement développées en conclusion. Ensuite, si j'ai un conseil à donner c'est vraiment de faire des choses simples qu'on maîtrise et j'ai senti que j'étais un

peu juste sur les forces nucléaires et le modèle de la goutte liquide et le jury l'a ressenti aussi.

→ **Agrégation 2011 - Note : 11/20 :**

Questions et commentaires du jury : Ils ont commencé par revenir sur ma définition de la section efficace et la section efficace différentielle (qui n'était pas bonne et que je n'ai pas réussi à donner juste, c'est principalement ce qui fait baisser ma note d'après les commentaires du jury). J'ai parlé d'utilisation en cosmologie des éléments lourds, d'où viennent-ils ? (j'avais dit que la fusion ne se faisait pas pour ces éléments, j'ai donc argumenté sur l'énergie sans doute suffisante dans une étoile...). La désintégration alpha, en parler plus ? (j'ai parlé de la théorie de Gamov, l'effet tunnel, l'existence présumée de la particule alpha, la forme du potentiel) Avec la donnée de l'énergie T de la particule, comment retrouver avec les mains le temps de demivie ? (1), j'ai bloqué...). Pourquoi le terme de volume est en A ? (j'ai mis du temps à comprendre qu'ils voulaient la justification de l'interaction à courte portée entre nucléons). Dans le terme d'asymétrie, on a des puits, pourquoi les nucléons ne sont pas tous au fond ? (ce sont des fermions) J'ai donné des ordres de grandeur d'énergie libérée pour un noyau/une liaison chimique et pour 1g de combustible/charbon, est-ce que ce sont les mêmes ? (techniquement, il ne doit y avoir qu'un nombre d'Avogadro entre les deux, et une masse molaire...) Pour la désintégration alpha, j'ai parlé d'énergie limite requise pour que ce soit possible ? (En fait, j'avais écrit la conservation de l'énergie pour avoir un alpha sans énergie cinétique derrière. c'est donc un minimum) Dans le terme d'asymétrie, j'ai dit que ΔE était proportionnel à $1/A$, pourquoi simplement ? (j'ai dit que c'était un calcul quantique de largeur de puits que je ne saurais pas refaire simplement comme ça...) Au niveau des proportions relatives d'un noyau, c'est 25% et 27% respectivement pour le Rubidium 87 et 86, c'est la signature de quoi ? Est-ce qu'on retrouverait la même chose sur une autre planète ? (j'ai répondu que oui parce que pour moi c'est caractéristique de l'interaction forte, après, je ne sais pas trop...) La vallée de stabilité, qu'est-ce que c'est exactement ? Ça veut dire qu'on ne peut pas être ailleurs ? (j'étais passée un peu vite et pas avec le meilleur transparent donc je suis revenue dessus en redéfinissant un noyau stable comme un noyau dont la demi-vie est bien supérieure à l'âge de l'Univers,...) Globalement ils ont aimé, j'ai été claire bien que rapide. Je pensais payer le fait d'être passée très vite sur les applications, apparemment, ce qui m'a surtout coûté cher c'est la section efficace que je n'ai pas su expliquer proprement.

Commentaires personnels : J'ai repris en gros le plan de l'année (en un peu moins détaillé) I) Présentation du noyau : 1) Introduction historique, 2) Cohésion, Energie de liaison II) Modélisation du noyau : 1) Modèle de la goutte liquide : a) hyp, b) Formule semi empirique, c) corrections quantiques, 2) Réussites et limites III) Instabilités des noyaux et utilisations : 1) Différents types de désintégrations (alpha et beta+/-, rapidement), 2) radioactivité naturelle et provoquée, 3) la fusion. J'étais à la bourre donc je comptais parler de la fusion comme ouverture en conclusion, ils m'ont coupée à 50min juste sur cette phrase.

LP 42 — Oscillateurs à deux degrés de liberté en mécanique classique et en mécanique quantique.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 12/02/2014 par *Amélie Mézy* et corrigée par *R. Carles*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Oscillateurs à deux degrés de liberté en mécanique classique : modes propres. Systèmes à deux niveaux d'énergie en physique quantique. Analogies et différences.*

Rapports du Jury

☞ (2010, 2009) – “Le phénomène de battement (comme son analogue quantique) est au coeur de la leçon.”

☞ (2005) – “La notion de mode propre doit être parfaitement maîtrisée.”

☞ (2002) – “Trop souvent les leçons privilégient la partie classique par rapport à la partie quantique. Différences et analogies sont rarement mises en lumière.”

☞ (2001) – “Dans la partie relevant de la mécanique classique, il n'est pas utile d'envisager le cas le plus général, l'important étant de dégager les effets physiques avec un minimum de calculs. Les aspects énergétiques méritent d'être considérés. Il faut réserver un temps suffisant pour traiter le point *analogie et différences.*”

☞ (2000) – “Dans la partie relevant de la mécanique classique, il n'est pas utile d'envisager le cas le plus général, l'important étant de dégager les effets physiques avec un minimum de calculs. Les aspects énergétiques méritent d'être considérés. Bien que couramment utilisé comme exemple de système quantique à deux niveaux, l'inversion de l'ammoniac est un exemple délicat, car le terme de couplage y est difficile à interpréter physiquement. On peut trouver d'autres systèmes à deux niveaux, plus simples à présenter.”

☞ (1999) – “Le choix du système quantique à traiter doit être bien réfléchi. Les candidats doivent être conscients que le couplage par effet tunnel est délicat à traiter. Il faut bien prendre le temps de dégager les analogies et les différences des systèmes classiques et quantiques.”

☞ (1997) – “La notion de mode propre doit être définie avec précision.”

Bibliographie

- [1] Gerl, *Systèmes à deux états*. BUP n°574, Mai 1975.
- [2] Faroux, *Mécanique des fluides et ondes mécaniques*. Dunod, 1999.
- [3] Quaranta, *Tome I : Mécanique*. Éditions Pierron, 2002.
- [4] Basdevant, *Mécanique quantique*. Ellipses, 2002.
- [5] Cohen-Tannoudji, *Mécanique quantique I*. Hermann, 1998.
- [6] Pérez, *Quantique*. de Boeck, 2013.

Plan

1 Exemple Classique : Oscillateurs couplés élastiquement ([1] + [2] p.133,141 + [3] p.87 + [6] p.292)

1.1 Présentation du système

1.2 Mise en équation

1.3 Modes propres et battements

1.4 Aspects énergétiques ([1])

2 Exemple Quantique : molécule d'ammoniac ([4] p.93,136 + [5] p.453 + [6] p.301)

2.1 Description du modèle ([5] p.453)

2.2 Barrière de potentiel infinie

2.3 Couplage par effet tunnel ([6] p.301)

2.4 Battements quantiques ([6] p.310)

3 Analogies et différences ([6] p.312)

3.1 Analogie ([6] p.312)

3.2 Différences ([6] p.313)

Introduction

Le coeur de la leçon se situe dans le fait que les déplacements (amplitude de probabilité) s'expriment comme des **combinaisons linéaires** des modes propres à cause de la linéarité des équations.

En choisissant le jeu adéquat de solution, c'est-à-dire une combinaison linéaire des déplacements des objets, on simplifie le problème et on se retrouve dans une situation générale, utilisable en classique comme en quantique.

1 Exemple Classique : Oscillateurs couplés élastiquement ([1] + [2] p.133,141 + [3] p.87 + [6] p.292)

1.1 Présentation du système

On fait une étude simple pour dégager les caractéristiques importantes du couplage de deux oscillateurs. On étudie deux oscillateurs harmoniques couplés par un ressort. Définition du couplage.

1.2 Mise en équation

On pose les équations du couplage. On cherche des solutions pour x_1 et x_2 à la même pulsation pour faire sortir les modes propres car les évolutions seront selon la même pulsation ce qui est la définition d'un mode propre.

On prend deux sous systèmes identiques (symétrique par permutation). On fait un changement de variable pour faire apparaître naturellement les fonctions symétrique et antisymétrique et faire apparaître les pulsations symétrique et antisymétrique.

On découple les solutions car pour un système linéaire, une combinaison linéaire de solution est encore solution du problème.

Le couplage entraîne la présence de deux pulsations alors que sans couplage on en avait qu'une seule. On dit que le couplage a levé la dégénérescence en pulsation des deux oscillateurs sans couplage.

1.3 Modes propres et battements

Les solutions s'obtiennent pour certaines conditions initiales.

Montrer les modes propres, commenter l'apparition ou non de k_0 dans les pulsations propres. Bien définir la notion de mode propre : mode harmonique stationnaire. Relever par TF les pulsations des modes propres.

Phénomène de battements à visualiser avec VidéoCom lorsque le couplage est **faible**. Faire la TF et montrer qu'on retrouve les pulsations des modes propres.

► **Expérience [3] p.90** : On s'appuie sur les pendules couplés pour montrer tous ces modes et les battements. On fait des TF pour voir qu'on a que les pulsations propres.

1.4 Aspects énergétiques ([1])

On montre que dans les modes symétriques et antisymétrique l'énergie mécanique est également partagé entre les deux pendules.

Pour les battements l'énergie ne reste plus également partagée entre les deux pendules.

Ainsi, à partir de l'instant initial où toute l'énergie est portée par le pendule 1, l'énergie est transférée progressivement au pendule 2 et, à l'instant t , le pendule 2 porte toute l'énergie. Ce phénomène de transfert de l'énergie entre les deux pendules traduit le phénomène de **battement** entre les modes propres symétrique et antisymétrique.

2 Exemple Quantique : molécule d'ammoniac ([4] p.93,136 + [5] p.453 + [6] p.301)

2.1 Description du modèle ([5] p.453)

Le cas de l'ammoniac possède deux configurations qui peuvent être atteinte par couplage par effet tunnel.

On a un double puits de potentiel qui symbolise les deux oscillateurs découplés précédemment.

2.2 Barrière de potentiel infinie

On traite dans un premier temps le cas de la barrière infinie.

La résolution de l'équation stationnaire de Schrödinger, nous conduit à deux solutions : particule dans le puits gauche et particule dans le puits droit.

On a un système possédant deux niveaux d'énergie correspondant à la vibration de la particule autour de sa position stable (fréquence de Bohr). On comparera la valeur d'énergie entre ces deux niveaux avec le cas du couplage.

Pour la suite des calculs il est commode de changer de base, on choisit alors de poser des états antisymétrique et symétrique. Avant la particule était soit à gauche soit à droite, maintenant par combinaison linéaire des états précédents on peut la trouver dans

l'un ou l'autre des deux puits de potentiel.

En fait lorsqu'on étudie le système du départ, le hamiltonien n'est pas diagonale. Alors que dans la base des états symétriques et antisymétrique il est directement diagonal. D'où l'intérêt de poser des combinaisons linéaires des solutions initiales pour se retrouver avec une matrice directement diagonale.

2.3 Couplage par effet tunnel ([6] p.301)

Pour décrire l'état gauche ou l'état droite, il faut faire des combinaisons linéaires des états symétriques et antisymétriques. On a alors une fonction d'onde qui représente soit la configuration gauche soit la configuration droite.

On considère à l'instant initial, la particule à droite. On multiplie par $\exp -iEt/\hbar$ pour obtenir l'évolution temporelle de la particule :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_S(x) \exp -iE_S t/\hbar + \psi_A(x) \exp -iE_A t/\hbar)$$

En transformant l'expression on trouve la valeur du temps t qui permet d'exprimer la fonction d'onde qui ressemble à la fonction gauche.

On calcule alors la fréquence d'inversion de la configuration.

On compare la différence d'énergie entre les deux niveaux lorsqu'il y a un couplage ou non.

2.4 Battements quantiques ([6] p.310)

On montre que la probabilité de détecter la molécule à gauche ou à droite évoluent avec un période de battement.

3 Analogies et différences ([6] p.312)

3.1 Analogie ([6] p.312)

En l'absence de couplage, les états localisés (en MQ la particule est soit à gauche soit à droite).

On a un phénomène de battements, dans le cas classique de l'énergie, dans le cas quantique de la probabilité de détection de l'objet.

3.2 Différences ([6] p.313)

PDF : dérivée seconde, fait apparaître les pulsations aux carré.

Schrödinger : dérivée première, fait apparaître directement les pulsations donc l'énergie.

Mécanique déterministe sur la position des masses.

Mécanique quantique, on a des amplitudes de probabilités de trouver l'objet.

Questions pour faire réfléchir

► Avez-vous lu l'article du BUP, paru en mai 1975 dans le numéro 574 et

intitulé : Systèmes à deux états ?

→ Qu'est-ce que l'effet Tunnel ?

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

→ Agrégation 2008 - Note : 11/20 :

Questions et commentaires du jury : pourquoi, au bout d'un certain temps, un système d'oscillateurs couplés se met dans le mode de vibration symétrique (oscillations en phase) ? En mécanique quantique, quelle est l'origine du couplage entre les deux puits ?

Commentaires personnels : j'ai choisi le système de 4 ressorts couplés, en en gardant 2 libres pour illustrer la leçon, c'était un point positif. Il semble important pour le jury de définir un mode propre comme une manière particulière qu'ont les oscillateurs de vibrer : elle est harmonique **et** on a une relation particulière entre les amplitudes des deux oscillateurs : par exemple " $a_2 = -a_1$ " pour le mode de vibration antisymétrique (Cf les rapports des années 1997 et 2005). Il faut bien insister, au fur et à mesure qu'on les rencontre, sur les analogies et différences entre les deux (Cf les rapports des années 1999, 2001 et 2002), et c'est pertinent de faire un tableau récapitulatif à la fin.

→ Agrégation 2010 - Note : 10/20 :

Questions et commentaires du jury : comment obtient-on le jeu d'équations différentielles pour les pendules ? Obtention de l'expression de l'énergie des pendules ? Est-ce que les modes propres en mécanique classique et les états propres en mécanique quantique représentent la même chose ? Quelles hypothèses pour pouvoir négliger le déplacement vertical des pendules ? Comment justifier l'approximation de Born-Oppenheimer ? Pourquoi chercher la solution sous forme de combinaisons linéaires des solutions des systèmes découplés ? Est-ce que c'est exact ? Définition d'un mode propre ? Influence du couplage dans les deux systèmes ? à quelle condition on observe des battements ? Comment fonctionne le logiciel videocom utilisé ?

Commentaires du jury : pas de gros défauts selon le jury mais quelques raccourcis un peu rapides (j'ai posé les solutions), pas assez de temps passé sur la dernière partie (analogies/différences, j'avais fait un transparent), il faut bien insister sur la notion de mode propre et bien exploiter dans la partie quantique les analogies avec la partie classique.

Commentaires personnels : j'ai commencé par perdre 20 min à retrouver le bup sur bupdoc (il faut vraiment apprendre les numéros...). En préparant la leçon pendant l'année j'avais beaucoup hésité à traiter H_2^+ ou le spin 1/2 et le doute est revenu pendant la préparation, ça m'a fait perdre un peu de temps. Le jury m'a collé sur ce sur quoi je savais ne pas être au point (expression de l'énergie, validité de Born-Oppenheimer, fonctionnement de videocom). Les techniciens m'ont monté la manip, réglé l'alignement des ressorts, cherché comment faire la FFT etc, j'ai pas perdu de temps sur les manips.

LP 43 — La molécule : stabilité, énergie.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 12/02/2014 par *Victor Fontan* et corrigée par *R. Carles*. La leçon s'intitulait en 2013 : *La molécule : stabilité, énergie. Applications.* A partir de la session 2013, la leçon : *Cohésion de la matière condensée.* qui s'intercalait entre celle-ci et la précédente a été supprimée.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012) – “Il faut clairement dégager l'origine de la stabilité de la liaison chimique. Cette leçon ne doit pas se réduire à une succession de calculs, on attend des ordres de grandeur et une discussion sur la physique du phénomène.”

☞ (2011) – “Il faut clairement dégager l'origine de la stabilité de la liaison chimique ”

☞ (2010) – “Dans le cas de la présentation des interactions de Van der Waals, la nature de ces interactions doit être précisée ainsi que l'origine de la dépendance en r .”

☞ (2009) – “La problématique abordée dans la leçon : “Cohésion de la matière de la molécule au solide. Aspects énergétiques” fait désormais l'objet de deux leçons distinctes : “La molécule : stabilité, énergie. Applications” et “Cohésion de la matière condensée”. Il s'agit ainsi de dégager du temps pour rendre les analyses moins superficielles et aborder d'avantage d'applications concrètes.”

Bibliographie

- [1] Atkins, *Chimie physique*. de Boeck, 4^{ème} édition.
- [2] Grécias, *Chimie PCSI 1^{ère} année*. Tec & Doc, 2003.
- [3] Grécias, *Chimie PC-PC* 2^{ème} année*. Tec & Doc, 2004.

Plan

1 L'ion moléculaire dihydrogène H_2^+

1.1 Présentation du système ([1] p.372-378 + [2] p.433)

1.2 Résolution par la méthode CLOA ([2] p.434 + [3] p.291)

1.2.1 Équation à résoudre

1.2.2 Énergies propres

1.2.3 États propres

1.2.4 Diagramme d'orbitales moléculaires

2 Molécules diatomiques

2.1 Molécules homonucléaires

2.1.1 Molécules de la première période (orbitales s) ([2] p.439)

2.1.2 Molécules de la seconde période ([2] p.441 + [3] p.294)

2.2 Molécules hétéronucléaires ([1] p.388)

2.3 Application expérimentale : la spectrophotométrie photoélectronique ([1] p.387 + [2] p.448)

3 Molécules polyatomiques

3.1 Méthode de Hückel ([1] p.395 + [3] p.298)

3.2 Cas du benzène ([1] p.400 + [3] p.305)

Introduction

Début de la chimie quantique environ 1927.

La stabilité des molécules ne peut pas s'expliquer classiquement : on doit utiliser la mécanique quantique.

Prérequis : on connaît la structure atomique.

On se demande comment va être modifier l'atome d'hydrogène lorsqu'on approche un proton.

1 L'ion moléculaire dihydrogène H_2^+

1.1 Présentation du système ([1] p.372-378 + [2] p.433)

Deux protons + 1 électrons.

On trace l'énergie potentielle en fonction de la distance entre les deux noyaux.

Approximation de Born-Oppenheimer : les noyaux sont très lourds et fixe. Donc R est fixe.

On écrit le hamiltonien du système et le potentiel qui comprend deux termes (attraction entre électrons et protons + répulsion entre protons).

Pour résoudre l'équation stationnaire, on utilise la linéarité de l'équation et donc la combinaison linéaire d'orbitales atomiques déjà connues.

1.2 Résolution par la méthode CLOA ([2] p.434 + [3] p.291)

On pose $\Psi = C_1\chi_1 + C_2\chi_2$.

1.2.1 Équation à résoudre

On pose les termes d'intégrales d'échange β , d'intégrale coulombienne α_i .

On isole la valeur de l'énergie en fonction des coefficients C_i et α_i, β . La symétrie du problème permet de simplifier les $\alpha_i = \alpha$

1.2.2 Énergies propres

On cherche à minimiser l'énergie donc les dérivées de E par rapport aux C_i doivent être nulles.

On arrive aux équations séculaires et finalement à deux valeurs d'énergie : une **stabilisante** et une **déstabilisante** par rapport au cas d'un électron autour d'un proton.

Deux orbitales atomiques donne deux orbitales moléculaires : une liante et une anti-liante.

1.2.3 États propres

Par normalisation de la fonction d'onde on trouve la valeur des coefficients C_i .

1.2.4 Diagramme d'orbitales moléculaires

On trace le diagramme énergétique de H_2^+ . On constate que l'orbitale déstabilisant est plus déstabilisante que l'orbitale liante n'est liante.

On trace les densités de probabilités avec et sans couplage pour montrer que dans le cas de l'orbitale liante, on a une proba de présence non nulle entre les noyaux de détecter l'électron ce qui favorise la cohésion de la molécule.

2 Molécules diatomiques

2.1 Molécules homonucléaires

On rappelle les règles de remplissage des orbitales : Hund, Pauli, Klechkowski.

2.1.1 Molécules de la première période (orbitales s) ([2] p.439)

On trace les diagrammes pour une molécule de H_2 et de He_2 . La molécule de dihydrogène ne peut pas exister car elle n'est pas stable (plus déstabilisante que stabilisante).

On donne des ordres de liaison et d'énergie de dissociation.

2.1.2 Molécules de la seconde période ([2] p.441 + [3] p.294)

On généralise aux orbitales s et p . On ne recouvre que les orbitales de même symétrie.

On montre le type de recouvrement en fonction des OA.

On montre les diagrammes pour O_2 (simple) et N_2 (corrélés). On calcule les indices de liaison pour des molécules.

On retrouve le paramagnétisme de O_2 (deux électrons célibataires) : **succès** de la théorie quantique.

2.2 Molécules hétéronucléaires ([1] p.388)

On recalcule le déterminant séculaire **sans** les approximations $\alpha_i = \alpha$.

On donne des ordres de grandeurs des énergies dans le cas de la molécule de HF dans le cas où le recouvrement est nul ($S=0$) ce qui est une approximation forte mais qui redonne les bons ordres de grandeur.

On écrit les fonctions d'onde : $\Psi_+ = 0.24\chi_H + 0.97\chi_F$ (pour Ψ_- les coefficients sont inversés). On voit alors que pour l'orbitale liante les électrons sont plus localisés vers le fluor : **présence d'un moment dipolaire**.

2.3 Application expérimentale : la spectrophotométrie photo-électronique ([1] p.387 + [2] p.448)

On mesure les énergies des orbitales par spectroscopie.

On montre un spectre et on voit apparaître les niveaux de vibration plus fins que ceux d'énergie moléculaire (ionisation de la molécule).

On peut mesurer R par spectroscopie micro-onde (30 cm à 1 mm) puisque en faisant tourner la molécule on remonte à R car le moment cinétique $L = 2\mu R$, donc le spectre énergétique de rotation nous donne les valeurs de R .

On peut mesurer k par infrarouge ($E \sim \hbar\omega$ avec $\omega^2 = k/\mu$). Le spectre de vibration nous donne la valeur de k .

Avec des eV, on fait de la spectro UV : énergie de transitions et de dissociation.

Avec des meV, on fait de la spectro IR : énergie de vibration, et si on connaît μ on peut mesurer k la rigidité de la molécule qui est liée à la finesse du puits de potentiel (plus le puits est fin plus k est grand)

3 Molécules polyatomiques

La méthode CLOA pour plus de deux noyaux nous invite à écrire : $\Psi_i = \sum_j C_{ij} \cdot \chi_j$. Pour simplifier la résolution, on utilise la méthode de Hückel.

3.1 Méthode de Hückel ([1] p.395 + [3] p.298)

On ne s'intéresse qu'au système π .

On pose les approximations du modèle : intégrale coulombienne toutes égales et valent α , conditions sur les intégrales de recouvrement.

3.2 Cas du benzène ([1] p.400 + [3] p.305)

On donne le déterminant séculaire.

On calcule l'énergie totale du système π de la molécule de benzène et on compare à l'énergie correspondant à 3 doubles liaisons π sur l'éthène.

On calcule alors l'énergie de stabilisation du benzène qui est assez grande $2\beta \approx -460 \text{ kJ/mol}$ comparée à l'énergie de stabilisation du butadiène (110 kJ/mol).

Conclusion

La délocalisation de l'électron sur l'ensemble du système correspond à une diminution de l'énergie : mode symétrique. On peut relier ceci aux inégalités d'Heisenberg : plus Δx est grand, plus $p^2/2m$ est petit et donc plus l'énergie est petite. On a toujours meilleur temps à délocaliser.

LP 44 — Capacités thermiques : description, interprétations microscopiques.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 15/01/2014 par *Amélie Mézy* et corrigée par *M. Rieutord*.

Rapports du Jury

☞ (2008, 2007, 2006) – “Elle ne doit pas se limiter à un long exposé de méthodes calorimétriques mais laisser une place importante aux modèles microscopiques. Les capacités thermiques sont définies à partir des dérivées partielles de l’entropie ou de l’énergie interne.”

Bibliographie

- [1] DGLR, *Thermodynamique*. Hermann, 2007.
- [2] Diu, *Physique Statistique*. Hermann, 2001.
- [3] Diep, *Physique Statistique*. ellipses, 2006.

Plan

1 Définitions et modèles simples (outils)

- 1.1 Définition des capacités thermiques ([1] p.78,86)
- 1.2 Outils de la physique statistique
 - 1.2.1 Fonction de partition, énergie interne et capacité calorifique ([3] p.67)
 - 1.2.2 Théorème de l’équipartition d’énergie ([3] p.76)

2 Capacités thermiques des gaz

- 2.1 Gaz parfait monoatomique ([2] p.304,753)
- 2.2 Gaz parfait diatomique ([2] p.329)
 - 2.2.1 Vibration ([2] p.334)
 - 2.2.2 Rotation ([2] p.339)
 - 2.2.3 Récapitulatif

3 Capacité thermique des solides ([1] p.292 + [2] p.378)

- 3.1 Le modèle d’Einstein ([2] p.379)
- 3.2 Le modèle de Debye ([2] p.382)

Introduction

C’est une leçon de thermodynamique **statistique**.

1 Définitions et modèles simples (outils)

1.1 Définition des capacités thermiques ([1] p.78,86)

On définit les capacités thermiques par rapport à l’entropie car on définit facilement la quantité de chaleur échangée d’un système avec l’extérieur lors d’une transformation réversible.

Plus commode de travailler à p constant d’où l’utilité de travailler avec la capacité calorifique à pression constante C_p .

On peut également définir les capacités calorifiques à partir de l’énergie interne.

Transition : Comment passer à une description microscopique ? On utilise la physique statistique dont on va rappeler les outils utiles pour la suite.

1.2 Outils de la physique statistique

1.2.1 Fonction de partition, énergie interne et capacité calorifique ([3] p.67)

On définit la fonction de partition dans l’ensemble canonique (échange de chaleur avec un thermostat) comme la somme de tous les états dans l’espace des phases.

On définit l’énergie interne moyenne, comme la somme d’énergie de tous les niveaux pondérés par leur probabilités. On fait apparaître alors la fonction de partition.

On en déduit alors l’expression de la capacité calorifique à volume constant.

On peut également montrer que

$$C_v = k_B \frac{\overline{E^2} - \overline{E}^2}{(k_B T)^2}$$

qui montre que C_v est reliée aux fluctuations d’énergie du système et donc contient de l’information sur la répartition de ses niveaux d’énergie :

- Lorsque T tend vers 0, l’énergie moyenne tend vers l’énergie du fondamental et $\overline{E^2} - \overline{E}^2$ tend vers 0 plus vite que $(k_B T)^2$, d’où $C_v \rightarrow 0$.

- Lorsque T tend vers $+\infty$ dans le cas d’un spectre d’énergie d’extension finie, les niveaux d’énergie sont peuplés de façon complètement aléatoire. Alors $\overline{E^2} - \overline{E}^2$ tend vers une constante et $C_v \rightarrow 0$ à cause du dénominateur $(k_B T)^2$.

1.2.2 Théorème de l’équipartition d’énergie ([3] p.76)

On démontre le théorème de l’équipartition de l’énergie.

Les conditions d’applications sont que chaque degré de liberté **classique** qui apparaissent **uniquement quadratiquement** dans le hamiltonien contribuent alors à 1/2 de l’énergie totale du système.

Transition : on va voir que ce théorème est particulièrement utile lors de l’étude des gaz parfait en fonction de la température.

2 Capacités thermiques des gaz

2.1 Gaz parfait monoatomique ([2] p.304,753)

On rappelle les résultats de la thermodynamique classique pour les capacités calorifiques C_v et C_p .

Chaque particule du gaz peut être traité indépendamment et le hamiltonien s'écrit comme la somme quadratique des impulsions. On peut en déduire l'énergie interne du gaz.

On en déduit la capacité calorifique du gaz parfait.

On donne la relation de Mayer en fonction des dérivés partielles par rapport à S .

On justifie l'approximation classique des particules par un ordre de grandeur de l'énergie de celle-ci dans un puits quantique infini à comparer avec l'énergie thermique.

2.2 Gaz parfait diatomique ([2] p.329)

On a des degrés de liberté interne supplémentaire : rotation + vibration. On a donc une nouvelle hamiltonien.

2.2.1 Vibration ([2] p.334)

Approximation de Born-Oppenheimer pour le calcul.

Potentiel approximativement parabolique : on se retrouve avec **oscillateur harmonique 1D**.

La MQ nous dit que l'énergie est : $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$.

On alors la fonction de partition et la contribution des vibrations à l'énergie moyenne.

On en déduit la capacité calorifique du gaz.

Il s'introduit de façon naturelle une **température caractéristique des vibrations**.

On donne des ordres de grandeur (500 à 6000 K) de cette température pour différents gaz.

Sur le graphe on montre que l'on retrouve bien le résultat de la capacité calorifique d'un oh à 1D.

2.2.2 Rotation ([2] p.339)

On prend en compte cette fois la rotation. On a encore un nouvel hamiltonien.

On introduit une température caractéristique de rotation. A températures ambiantes ces degrés ne sont jamais gelés. On peut donc oublier la quantification et appliquer l'équipartition.

On donne des ordres de grandeurs ($T \approx qqK$).

2.2.3 Récapitulatif

On trace le graphe récapitulatif du gel des degrés de liberté en fonction de la température.

3 Capacité thermique des solides ([1] p.292 + [2] p.378)

La loi de Dulong et Petit stipule qu'à **hautes températures** la capacité calorifique d'un solide est une constante universelle égale à $3Nk_B$.

A basse température cette loi n'est plus valable : il faut utiliser la **physique quantique**. Einstein propose son modèle.

3.1 Le modèle d'Einstein ([2] p.379)

On montre les grandes lignes du raisonnement. Notamment celui qui nous fait arriver à la fonction de partition au cube d'un oscillateur harmonique à 1D.

Einstein fait l'**approximation du champ moyen** et traite les particules du solide comme un système de particules indépendantes.

On retrouve la loi de Dulong et Petit à hautes températures.

Cependant bien que ce modèle prenne en compte les effets quantiques, il ne traduit pas encore les observations expérimentales observées à basse températures.

3.2 Le modèle de Debye ([2] p.382)

Les vibrations de chaque atome ne sont pas indépendantes mais collectives.

On a alors une onde qui se propage. On a une relation de dispersion et avec les conditions aux limites on a des modes de propagation.

A basse température, on a quantification des niveaux d'énergie et on va avoir un gel des degrés de liberté à basses températures.

Questions pour faire réfléchir

➤ Pourquoi a-t-il fallu un certain mérite à Dulong et Petit pour remarquer que la capacité thermique molaire des corps solides est constante ?

➤ Einstein propose dans son modèle de ne considérer que des oscillateurs harmoniques de même fréquence ω_E . Qu'est-ce qui justifie ce choix ? Comment appelle-t-on en général ce type de démarche ?

➤ Quelles sont les conditions d'application du théorème d'équipartition de l'énergie ?

➤ Considérons un gaz parfait constitué de molécules diatomiques rigides. On dénombre les degrés de liberté quadratiques associés à chaque molécule : il y a 3 degrés de liberté quadratiques associés à l'énergie cinétique de translation, mais seulement 2 associés à l'énergie cinétique de rotation. Pourquoi ?

➤ Interpréter au moins qualitativement le modèle de Debye en terme de phonons.

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➤ Agrégation 2008 - Note : 08/20 :

Questions et commentaires du jury : questions sur les définitions des capacités thermiques, ré-explications des méthodes de mesures, questions de "cultures générales" sur les capacités des gaz et des solides, éclaircissement sur le modèle d'Einstein (Cette leçon a déjà fait l'objet d'un tutorat disponible sur la page suivante : http://www.crpp-bordeaux.cnrs.fr/~divoux/L50_Tutorat_Divoux.pdf).

➤ Agrégation 2009 - Note : 11/20 :

Questions et commentaires du jury : question sur le modèle du gaz parfait, et

la notion de particules ponctuelles, passage par Van der Waals et le covolume. Autre question sur les limites quantiques du théorème d'équipartition. Questions sur les degrés de liberté dans les gaz parfaits polyatomiques : par exemple pourquoi deux degrés de liberté de rotation et seulement un seul de vibration ? Le Jury a trouvé le sujet très bien maîtrisé, mais pense que la leçon était trop ambitieuse. Question temps, ils n'ont pas reproché le déséquilibre entre les parties. Ce qui les a embêté, c'est que je suis allé trop vite sur les hypothèses pour le gaz parfait. En fait, ils auraient voulu voir moins de calculs ; un fait de A à Z, et j'aurai pu zapper les autres à condition de les poser très soigneusement.

LP 45 — Paramagnétisme, ferromagnétisme : approximation du champ moyen.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 14/05/2014 par *Amélie Mézy* et corrigée par *R. Battesti*.

Rapports du Jury

☞ (2013, 2012) – “Le moment magnétique, son image semi-classique et son ordre de grandeur doivent être maîtrisés. De même, le lien avec l’ordre de grandeur de l’aimantation d’un aimant doit être connu.”

☞ (2010, 2009) – “L’origine microscopique de l’interaction d’échange doit être discutée. L’influence de la température sur les propriétés magnétiques est au coeur de la leçon.”

☞ (2006) – “Il s’agit ici de présenter une interprétation microscopique du paramagnétisme et du ferromagnétisme.”

☞ (2001) – “Il convient de conserver du temps pour discuter du modèle du champ moyen lors de l’étude du ferromagnétisme¹.”

☞ (1999) – “On doit faire ressortir l’aspect phénoménologique du champ moyen. Cette leçon est une occasion de faire apparaître les propriétés essentielles d’une transition de phase.”

☞ (1997) – “L’expérience du clou chauffé au-dessus de la température de Curie n’est pas la seule illustration possible du ferromagnétisme. Il serait par exemple souhaitable que les candidats manipulent des ferrofluides et puissent citer des applications dans le domaine de l’enregistrement magnétique.”

Bibliographie

- [1] BFR, *Électromagnétisme 4*. Dunod, 1996, 3^{ème} édition.
- [2] Mauras, *Électromagnétisme, 2^{ème} année*. PUF, 1999.
- [3] Diu, *Physique Statistique*. Hermann, 2001.
- [4] Quaranta, *Tome IV : Électricité et appl.*. Éditions Pierron, 2004.
- [5] Faroux, Renault, *Thermodynamique*. j’intègre DUNOD, 1997.
- [6] Ray, *La physique par les objets quotidiens*. Belin, 2012.

Plan

1 Origine du magnétisme des substances

- 1.1 Le moment magnétique atomique ([1] p.146 + [2] p.252)
- 1.2 Origine du paramagnétisme ([2] p.253)
- 1.3 Origine du ferromagnétisme ([2] p.254 + [3] p.444)
- 1.4 Ordres de grandeur ([4])

2 Paramagnétisme de Curie

- 2.1 Loi de Curie ([3] p.311 + [5] p.261)
- 2.2 Application : la désaimantation adiabatique ([3] p.317 + [5] p.267)

3 Ferromagnétisme

- 3.1 Mise en évidence expérimentale ([3] p.445 + [4])
- 3.2 Aimantation spontanée dans l’approximation du champ moyen ([3] p.449 + [5] p.268)
- 3.3 La transition ferro/para à la température de Curie ([3] p.456 + [5] p.269)

1. Le titre de la leçon était alors le suivant : *Paramagnétisme. Approche du ferromagnétisme dans l’approximation du champ moyen. Température critique. (PC ou 1er CU)*.

3.4 Comparaison avec l’expérience ([3] p.466)

Introduction

Message : On va chercher à faire le lien entre les propriétés microscopiques et les observations macroscopiques du magnétisme des corps.

► **Expérience [4] :** On montre la température de Curie de la transition ferro/para du fer à l’aide d’un thermocouple. Le fer en-dessous d’une certaine température est attiré par l’aimant et au-dessus ne l’est plus (assez) $T = 770^\circ\text{C}$.

1 Origine du magnétisme des substances

1.1 Le moment magnétique atomique ([1] p.146 + [2] p.252)

On ne considère que le moment magnétique des électrons car particule 2000 fois moins lourdes que les particules du noyau.

Il a deux contributions au moment magnétique total : **orbital** et **spin**. L’importance relative des deux est donné par le facteur de Landé variant entre 1 et 2.

1.2 Origine du paramagnétisme ([2] p.253)

Nécessité de **porteurs de moments magnétiques permanents**.

1.3 Origine du ferromagnétisme ([2] p.254 + [3] p.444)

L’origine de l’interaction n’est pas classique mais **quantique** : interaction entre les spins des électrons des atomes.

1.4 Ordres de grandeur ([4])

On définit l’aimantation qui fait le lien entre le **microscopique** et le **macroscopique**.

On donne des ordres de grandeurs des aimantations en fonction des matériaux. On compare le paramagnétisme au ferromagnétisme.

2 Paramagnétisme de Curie

2.1 Loi de Curie ([3] p.311 + [5] p.261)

On considère des atomes indépendants car suffisamment éloignés les uns des autres. On prend un système simple à deux niveaux $J_z = 1/2$ ce qui est le cas de l’aluminium. On exprime les probas des atomes avec les spins vers le haut ou vers la bas. On discute des limites » ou « $k_B T$.

2.2 Application : la désaimantation adiabatique ([3] p.317 + [5] p.267)

On fait une transformation adiabatique réversible (entropie constante) en diminuant le champ B . On a

$$T_f = T_i \frac{B_f}{B_i}$$

On obtient des températures de l'ordre du mK pour des atomes et de l'ordre du μK pour des noyaux.

Il faut au préalable refroidir le système.

3 Ferromagnétisme

3.1 Mise en évidence expérimentale ([3] p.445 + [4])

➤ **Expérience [4] + [3] p.445** : On montre la température de Curie de la transition ferro/para du fer à l'aide d'un thermocouple. Le fer en-dessous d'une certaine température est attiré par l'aimant et au-dessus ne l'est plus (assez) $T = 770^\circ\text{C}$.

3.2 Aimantation spontanée dans l'approximation du champ moyen ([3] p.449 + [5] p.268)

On pose l'approximation du champ moyen pour permettre une description qualitative. Le site (i) reçoit un champ magnétique moyen dit **effectif** de la part de tous ses voisins.

On obtient une équation d'autocoherence.

3.3 La transition ferro/para à la température de Curie ([3] p.456 + [5] p.269)

On résout dans le cas d'un champ magnétique extérieur nul.

On montre les différentes solutions.

Puis on donne la solution dans le cas d'un champ extérieur différent de 0 et on en déduit la loi de Curie-Weiss :

$$\chi \equiv \lim_{B_0 \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial B_0} = \lim_{B_0 \rightarrow 0} \frac{M}{B_0} = \frac{N}{V} \left(\frac{g\mu_B}{2} \right)^2 \frac{1}{k(T - T_c)}$$

3.4 Comparaison avec l'expérience ([3] p.466)

On a négligé les fluctuations qui sont très importantes dans la région du point critique.

☞ *Application du ferromagnétisme au stockage des données ([6] p.100)*

Questions

➤ **Qu'est ce que J , il est du à quoi? Quelle est sa valeur?**

C'est le moment cinétique orbitale et de spin. Il vaut $1/2$.

☞ *Attention la fonction de Brillouin n'est pas parlante.*

➤ Paramagnétisme ?

On a un moment cinétique (orbitaire dû à la rotation de l'électron autour du noyau) et donc un moment magnétique (rapport gyromagnétique pour lié les deux). Pour simplifier on prend $J = S$ et donc $J = \pm 1/2$. C'est le cristal magnétique parfait que l'on met dans un champ magnétique extérieur. On cherche à calculer l'aimantation. L'énergie potentielle d'interaction est : $U = -\mu \cdot \mathbf{B}$ (on a donc deux niveaux). L'aimantation est une compétition entre l'énergie thermique et l'énergie potentielle d'interaction. On est dans l'ensemble canonique donc distrib de population en fonction de cet ensemble. Par exemple pour état haut : $\exp - / (\exp + + \exp -)$.

On arrive à une tanh. On a $M = N\mu_B \tanh(X)$ on arrive à une **saturation** (lorsque tous les spins sont alignés).

A champ nul l'aimantation est nul. On connaît d'autres corps qui sont déjà aimanté.

➤ Ferromagnétisme ?

Weiss suppose qu'il y a des domaines macroscopiques qui ont chacun une aimantation qui a une direction bien défini. On s'intéresse à un seul de ces domaines.

$\mathcal{E}_{ij} = -J_{ij} S_i S_j$ interaction du site i avec tous les sites j . Pourquoi on a un signe - ?
L'hamiltonien total pour un site i : $H_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{B} - J \sum_j \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j = -\vec{S}_i \cdot [g\mu_B \vec{B} + J \sum_j \vec{S}_j]$.
Pour le site tout se passe comme si il était soumis à $\vec{B}_{eff} = \vec{B}_0 + \frac{J}{g\mu_B} \sum_j \vec{S}_j$.

Le champ moyen permet de calculer le problème de l'interaction d'un site i avec les autres sites. On fait la moyenne : $\vec{M} = \frac{N}{V} g\mu_B \langle \vec{S}_i \rangle$ et on a $\vec{B}_{eff} = \vec{B}_0 + \lambda \vec{M}$,

les sites sont soumis à un champ effectif \vec{B}_{eff} uniforme (le même pour tous les sites). On retrouve alors le même calcul que pour le paramagnétique, sauf que les champs ont changés d'expression $M = M_s B_J(X)$.

➤ Retour sur la résolution graphique.

➤ Transition de phase

modèle assez grossier car on néglige les fluctuations, mais redonne les bons exposants critiques, par exemple aimantation $M \propto (T - T_c)^\beta$ où β est l'exposant critique et on retrouve bien la même valeur par l'expérience et par le modèle.

➤ Retour sur le terme d'interaction d'échange.

On a un signe - car on essaye de minimiser l'énergie d'échange donc il faut que \vec{S}_i et \vec{S}_j soit parallèles. Quand les spins sont anti-parallèles on a une énergie d'interaction coulombienne)

Para : Il faut qu'il y ait des moments magnétiques permanents sinon le matériau est diamagnétique. On a partout des matériaux diamagnétique car on a par la loi de Lenz une modération du à la rotation de l'électron. Par contre cet effet est masqué.

Ferro : on a une aimantation à champ nulle, au-delà d'une certaine température on perd le phénomène. On a des domaines qui ont chacun une aimantation bien définie. Pour calculer l'aimantation, on fait l'approximation du champ moyen. En faisant la moyenne, on lisse les fluctuations. Ensuite on résout graphiquement.

Il faut montrer la résolution graphique (au moins en champ nul). Si la température est trop grande, la pente devient trop grande et on a plus qu'une seule intersection. On alors plus d'aimantation spontanée.

On passe continûment d'une phase à l'autre ! Il n'y a pas coexistence des deux phases.

Faire le cas $\pm 1/2$ et pas faire Brillouin. Il faut très bien faire la résolution graphique au moins en champ nulle.

Ordre de grandeur moment magnétique de l'électron : $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9 \cdot 10^{-24} \text{ A.m}^2$.
L'aimantation c'est le moment magnétique par unité de volume.

➔ A quoi correspond g ?

Facteur de Landé, caractérise le couplage entre le moment cinétique orbital et le moment cinétique de spin.

➔ Pourquoi choisir l'axe de quantification suivant z ?

On a fait l'hypothèse $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$, c'est la direction privilégiée. Choisir la quantification selon un autre axe ne changerait pas la physique (heureusement !) mais compliquerait les calculs. Ce point est à évoquer dans la leçon.

➔ Paramagnétisme seulement dans les solides ?

Non, il existe aussi dans les liquides (le dioxygène liquide est paramagnétique) ou dans les ferrofluides, qui sont des suspensions colloïdales de particules ferromagnétiques qui confèrent au fluide des propriétés paramagnétiques. Au contraire, le ferromagnétisme n'existe que dans des matériaux à structure cristalline. Ce point est à évoquer dans la leçon.

➔ J_{ij} est-il toujours positif ?

Non. Son signe dépend de la structure cristalline exacte du matériau et n'est « pas simple » à intuitiver. L'argument qualitatif évoqué dans la leçon permet de comprendre l'origine quantique de l'interaction d'échange, mais donne $J_{ij} > 0$ tout le temps.

➔ Pourquoi néglige-t-on les interactions dipolaires entre moments dans l'origine microscopique du ferromagnétisme ? Ordre de grandeur de ces interactions ?

En ordre de grandeur, l'interaction dipolaire entre deux moments magnétiques de l'ordre du magnéton de Bohr situés à 10^{-10} m l'un de l'autre est de 10^{-23} J , alors que $kT_{amb} = 10^{-21} \text{ J}$. Un tel couplage serait donc détruit thermiquement, alors qu'on observe du ferromagnétisme à température ambiante. Le calcul de ces ordres de grandeur est à faire dans la leçon.

➔ D'après les modèles présentés dans la leçon, un ferromagnétique présente une aimantation spontanée. Pourtant, un clou de fer n'est spontanément pas aimanté. Pourquoi ?

Domaines de Weiss : l'aimantation spontanée existe, mais à une échelle intermédiaire. Au niveau macroscopique, elle est moyennée à zéro par un grand nombre de domaines.

➔ L'interaction d'échange est d'origine quantique, mais pourtant on traite les moments magnétiques classiquement et non pas quantiquement (i.e. avec des opérateurs). Pourquoi ?

On montre que lorsque le moment cinétique total est suffisamment grand, alors les résultats quantiques tendent vers ceux d'un modèle classique, ce qui légitime le traitement classique du modèle d'Heisenberg.

➔ Quelle différence entre les modèles d'Heisenberg et d'Ising ?

Dans le modèle d'Heisenberg, les moments magnétiques sont classiques et libres dans les trois dimensions de l'espace. Au contraire, dans le modèle d'Ising, les moments magnétiques sont contraints à être orientés selon un seul axe, disons z. En pratique on dit alors souvent que $S_z = \pm 1$, et $S_x = S_y = 0$. Cela n'a rien à voir avec la géométrie du réseau sous-jacente, qui peut être dans tous les cas 1d, 2d ou 3d.

Questions pour faire réfléchir

➔ Qu'est-ce que le phénomène de refroidissement par désaimantation adiabatique ?

➔ Qu'est-ce que la théorie de Brillouin ?

➔ Que dénote le vocable "Exposant critique" ?

➔ Est-ce que vous connaissez d'autres milieux magnétiques que ceux figurant dans le titre ?

➔ Quelles sont les expériences qui pourraient venir illustrer cette leçon ?

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ Agrégation 2010 - Note : 16/20 :

Questions et commentaires du jury : on m'a demandé de revenir sur l'approximation de champs moyen et de préciser de quelle moyenne il était question. Quelle est la grosse différence entre les matériaux ferromagnétiques et paramagnétiques ? J'ai parlé de la constante de couplage lors de l'étude du ferromagnétisme et je l'avais choisie positive pour le raisonnement. On m'a demandé l'origine de cette constante de couplage et son signe. Dans quel cas peut-elle être négative ? Donner des ordres de grandeurs des susceptibilités magnétiques. J'avais choisi la résolution graphique pour l'étude de l'aimantation induite des corps ferromagnétiques, on m'a demandé s'il était possible de faire autrement. D'autres petites questions ont porté sur la définition de l'énergie interne, de l'énergie libre, de différentes formules de Physique Statistique. On m'a questionné ensuite sur les domaines de Weiss. Pourquoi a-t-on besoin d'un microscope polarisant pour les observer ? Quels sont les propriétés optiques des milieux ferromagnétiques ?

Commentaires personnels : j'ai voulu réaliser deux expériences : l'observation des domaines de Weiss et la transition ferro/para. Je n'ai pas eu le temps de réaliser la seconde en live. Par contre, j'ai l'impression qu'ils ont aimé l'observation des domaines de Weiss. Les techniciens ont été supers !

LP 46 — Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 14/05/2014 par *Mégane Rodriguez* et corrigée par *R. Battesti*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques. Applications.*

Rapports du Jury

☞ (2013) – “Le moment magnétique, son image semi-classique et son ordre de grandeur doivent être maîtrisés. De même, le lien avec l'ordre de grandeur de l'aimantation d'un aimant doit être connu.”

☞ (2010, 2009) – “L'intérêt du champ H doit être clairement dégagé. L'obtention expérimentale du cycle d'hystérésis doit être analysée.”

☞ (2005) – “Les dispositifs expérimentaux utilisés au cours de cette leçon doivent être parfaitement maîtrisés. Il existe bien d'autres applications que le transformateur idéal.”

☞ (2001) – “Il faut consacrer du temps aux applications (stockage des données, transformateurs, électroaimants, ...) en justifiant l'adéquation du type de matériau ferromagnétique à la fonction visée¹.”

☞ (1999) – “Les intensités, les forces électromotrices et les flux doivent être donnés de manière algébrique. Les diverses sources de pertes doivent être mentionnées. Il est souhaitable de distinguer plus nettement les domaines d'application des ferro doux et des ferro durs (par exemple pourquoi une tête de lecture est-elle en ferro doux alors que le support d'enregistrement est en ferro dur ?).”

☞ (1998) – “Quelques notions sur les aimants permanents seraient les bienvenues. Par exemple : le point représentatif du matériau d'un aimant permanent se situe dans le deuxième (ou le quatrième) quadrant de son cycle d'hystérésis de jeux de variables (B, H) : pour obtenir un champ magnétique donné dans un entrefer de volume donné, le volume du matériau magnétique utilisé est minimal lorsque la quantité BH est maximale, l'aimantation n'ayant pas, alors, sa valeur rémanente.”

Bibliographie

- [1] BFR, *Électromagnétisme 4*. Dunod, 1996, 3^{ème} édition.
- [2] Quaranta, *Tome IV : Électricité et appl.*. Éditions Pierron, 2004.
- [3] Pérez, *Electromagnétisme*. Dunod, 4^{ème} édition.
- [4] Brenders, *Electrotechnique, Conversion de puissance PSI*. Bréal, 2004.
- [5] Ray, *La physique par les objets quotidiens*. Belin, 2012.

Plan

1 Présentation du ferromagnétisme

- 1.1 Mise en évidence ([3] p.488 + [1] p.172)
- 1.2 Nature des corps ferromagnétiques ([1] p.172 + [3] p.489)
- 1.3 Influence de la température ([3] p.489)
- 1.4 Équations et position du problème ([1] p.126)

2 Aimantation d'un corps ferro

- 2.1 Équations de Maxwell et géométrie torique ([1] p.118,135)

1. Le titre de la leçon était alors le suivant : *Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques : applications aux circuits magnétiques. (PC)*.

2.2 Courbe de première aimantation ([1] p.173 + [4] p.55)

2.3 Cycle d'hystérésis

2.3.1 Étude expérimentale ([2] p.491)

2.3.2 Interprétation microscopique ([1] p.176)

2.3.3 Aspects énergétique ([1] p.187 + [4] p.65)

2.4 Matériaux doux et durs ([1] p.182)

3 Applications

3.1 Le transformateur parfait ([3] p.505 + [4] p.13)

3.2 Le disque dur ([5] p.100)

1 Présentation du ferromagnétisme

Le ferromagnétisme résulte de l'interaction d'échange entre les moments magnétiques associées au moment cinétique des atomes (spins), et non pas directement à l'interaction dipolaire entre ces moments magnétiques.

1.1 Mise en évidence ([3] p.488 + [1] p.172)

► **Expérience [3] p.488 :** On place un morceau de fer (noyau) dans un solénoïde dans lequel circule un courant. On observe que le matériau devient aimanté.

Ordre de grandeur : aimantation 10^6 fois plus élevée pour le ferro que pour le diamagnétisme.

1.2 Nature des corps ferromagnétiques ([1] p.172 + [3] p.489)

Ne s'applique qu'à des corps condensés (liquide ou solide) contrairement au paramagnétisme et diamagnétisme. Il n'est donc pas une propriété atomique ou moléculaire.

1.3 Influence de la température ([3] p.489)

On donne la loi de Curie-Weiss.

► **Expérience [3] p.488 :** On montre la température de Curie de la transition ferro/para du fer à l'aide d'un thermocouple. Le fer en-dessous d'une certaine température est attiré par l'aimant et au-dessus ne l'est plus (assez) $T = 770^\circ C$.

On donne des ordres de grandeurs des températures de Curie pour différents matériaux.

1.4 Équations et position du problème ([1] p.126)

On donne les équations liant B et M et on dit que cette relation est linéaire pour le paramagnétisme et le diamagnétisme. Mais ce n'est plus le cas avec des matériaux ferromagnétiques d'où la difficulté de la résolution.

2 Aimantation d'un corps ferro

2.1 Équations de Maxwell et géométrie torique ([1] p.118,135)

On introduit la vecteur H excitation magnétique comme on a introduit le vecteur D déplacement électrique pour rendre compte des propriétés microscopiques de la matière et notamment on a vu dans la leçon précédente que l'on pouvait traduire les propriétés micro à l'échelle macro grâce au vecteur aimantation.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \Longrightarrow \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_l$$

On montre comment la géométrie torique simplifie l'étude des équations de Maxwell. On a un lien direct entre H et le courant i qui circule dans le circuit.

On va voir comment se passe la première aimantation d'un corps ferro et on va l'appliquer à une géométrie torique.

2.2 Courbe de première aimantation ([1] p.173 + [4] p.55)

► **Expérience [2]** : On montre l'expérience que l'on utilisera plus tard et comment on peut avoir l'aimantation.

On explique la courbe de première aimantation. On a trois zones sur la courbe linéaire, croissance rapide, saturation.

On revient sur l'expérience de la température de Curie et la valeur de l'aimantation de saturation en fonction de la température.

On donne des ordres de grandeur.

Transition : Comment se transforme cette courbe lorsqu'on diminue la valeur du champ d'excitation ?

2.3 Cycle d'hystérésis

2.3.1 Étude expérimentale ([2] p.491)

► **Expérience [2] p.491** : On fait le montage de [2] en prenant les valeurs des composants. On utilise une pince ampèremétrique pour connaître le courant circulant dans le primaire. On étudie un transfo constitué d'une bobine primaire de 1000 spires et une secondaire de 500 spires. Elles sont couplées par un matériau ferromagnétique doux feuilleté que l'on suppose être du Fer-Silicium à 4%.

- Le courant i_0 d'après le théorème d'Ampère appliqué sur une ligne de courant (longueur moyenne ℓ du matériau ferro) est proportionnelle à \vec{H} : $N_1 i_0 = \ell H$.
- La pince ampèremétrique nous permet de relever une tension proportionnelle au nombre de fils enlacés par la pince. Pour un fil enlacé on a 100mV/A. Donc si on prélève EA0 à la pince, on aura : $H = \frac{\ell}{N_1} \frac{EA0}{100 \cdot 10^{-3}}$.

- La tension de sortie de l'intégrateur est proportionnelle à \vec{B} d'après la loi de Lenz-Faraday intégrée : $B = EA_1 \cdot \frac{rC}{N_2 S}$, où S est la surface du flux magnétique qui se situe uniquement dans le matériau ferro, donc pas besoin de connaître la surface des bobines mais juste mesurer la section du matériau ferro.
- La fonction de transfert de l'intégrateur est $V_s = EA1 = -V_2 \frac{R}{r} \frac{1}{1 + j\omega RC}$. Pour que l'intégrateur fonctionne en intégrateur et non en amplificateur, il faut qu'à la fréquence de travail ($f = 50Hz$) on se situe dans la pente du diagramme de Bode, il faut alors que $V_s = EA1 \approx -\frac{V_2}{j\omega rC}$, donc on doit avoir $RC\omega \gg 1$ avec $\omega = 2\pi \cdot 50Hz$. On choisit donc R et C en fonction.
- La résistance r est présente pour empêcher qu'un courant trop important ne circule dans l'AO. Croyez-nous : elle est importante (R.I.P TL071)!

2.3.2 Interprétation microscopique ([1] p.176)

On explique les champs rémanents grâce aux domaines de Weiss (10 à 100 μm). Domaines dans lesquels un ordre s'est établi.

Les frontières prennent appui sur les **défauts cristallins**.

Transition : On a donc des pertes suite à l'augmentation de ces domaines.

2.3.3 Aspects énergétique ([1] p.187 + [4] p.65)

► **Expérience [2] p.492 et [4] p.65** : Pour mesurer les pertes fer, il faut connaître l'aire du cycle. Pour cela on l'imprime deux fois (il y a des imprimantes à St-Maur), on découpe le cycle et on le pèse. Puis on découpe un carré dont on connaît les valeurs associés de B et de H et on le pèse également. On connaît le facteur de conversion masse/unité d'aire.

On a pesé 3 carreaux ce qui correspondait à une aire étalon de $\mathcal{A}_{etalon} = 0.2 \cdot 100 J/m^3$. On a alors :

$$\mathcal{A}_{cycle} = \mathcal{A}_{etalon} \cdot \frac{M_{cycle}}{M_{etalon}} \approx 335 \pm 10 J/m^3$$

- On estime l'incertitude sur les masses pesées, en prenant une plus grosse incertitude sur M_{cycle} puisqu'on ne sait pas précisément où coupé : le trait est assez gros.
- Les pertes fer correspondent au pertes par hystérésis (pertes pour pousser les parois de Bloch) et aux pertes par courants de Foucault. **Le cycle prend en compte ces deux pertes**. Pour un matériau feuilleté, les pertes par courants de Foucault sont négligeables.
- Les pertes par courants de Foucault sont proportionnels au carré de la fréquence alors que les pertes par hystérésis sont proportionnels à la fréquence. Une étude à différentes fréquences pourrait séparer la contribution de ces deux pertes.

Finalement, on peut mesurer la puissance dissipée connaissant le volume du matériau ferromagnétique :

$$P_{fer} = \frac{\mathcal{A}_{cycle} \cdot V_{ferro}}{T} \approx 12.1 \pm 0.4 W$$

où T est la période d'un cycle donc $20 \text{ ms} = 1/50$.

Transition : ces pertes vont dépendre de la *douceur* du matériau ferro utilisée.

2.4 Matériaux doux et durs ([1] p.182)

On décrit les différences entre les matériaux par rapport au cycle d'hystérésis.

- Doux : $H_c < 100 \text{ A/m}$; cycle étroit donc pertes fer réduites; utilise en général fer au silicium (2% Si) sous forme de tôles dans les transformateurs pour minimiser les courants de Foucault.
- Dur : $H_c > 103 \text{ A/m}$; cycle large; magnétisme rémanent difficile à supprimer? aimants permanents; les plus simples sont les aciers (fer+carbone).

3 Applications

3.1 Le transformateur parfait ([3] p.505 + [4] p.13)

Description (carcasse ferro, bobinage,...)

Hypothèse du transfo parfait.

Rapport de transformation en fonction des courants et des tensions

Conséquence : ne marche qu'en régime variable.

Choix du matériau pour le transfo réel. Ordres de grandeurs.

3.2 Le disque dur ([5] p.100)

On explique le fonctionnement d'un disque dur. Le sens (haut ou bas) du vecteur aimantation sur chaque domaine du disque dur définit un 0 ou un 1.

Remarques et questions du correcteur

➔ **Qu'est-ce que le mumétal?**

C'est un matériau ferro possédant un μ_r très fort. On l'utilise pour faire le zéro de la sonde à effet Hall, car aucun champ magnétique ne peut pénétrer dans la zone entourée par le mumétal qui lui canalise toutes les lignes de champ en son sein.

Questions pour faire réfléchir

- ➔ **Qu'est-ce qui caractérise un corps ferromagnétique?**
- ➔ **Donner des applications concrètes des corps ferromagnétiques.**
- ➔ **Qu'est-ce que le phénomène de magnétorésistance géante? à quel nom associez-vous ce phénomène?**
- ➔ **Quel est l'intérêt des ferrites?**
- ➔ **Qu'est-ce que l'isolation galvanique?**

- ➔ **Comment fonctionnent les têtes de lecture des disques durs?**
- ➔ **Qu'est-ce que le paléomagnétisme?**

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ **Agrégation 2009 - Note : 11/20 :**

Questions et commentaires du jury : comment obtenir expérimentalement la courbe de première aimantation? Pourquoi dans le circuit intégrateur du transfo mettre une résistance en parallèle de la capacité? Comment avez-vous choisi le nombre de spires? Comment désaimanter un matériau magnétique? Comment s'interprète la température de Curie paramagnétique? Quelle est la différence entre les ferrimagnétiques et les ferromagnétiques ayant deux types d'atomes différents? Ordre de grandeur de l'aimantation rémanente du fer? L'évaluer sachant qu'on ne peut imposer un champ supérieur à 1 T? Citer d'autres phénomènes d'hystérésis. Disparition de l'aimantation pour $T > T_{sat}$. Comment T_{sat} est-elle reliée à M_{sat} ?

Commentaires personnels : les techniciens ont tout monté. Il y avait deux profs et deux techniciens au moment critique du montage de cycle d'hystérésis (2h pour le monter). Comme ils n'y arrivaient pas, ils ont utilisé la pince dont ils n'ont pas su m'expliquer le fonctionnement et sur laquelle je me suis faite piéger. Les techniciens et profs préparateurs sont sympas. Les membres du jury se sont systématiquement déplacés pour chaque expérience (domaine de Weiss, hystérésis, température de Curie).

➔ **Agrégation 2011 - Note : 13/20 :**

Questions et commentaires du jury : Comment calculer le champ magnétique créé par deux aimants permanents? Est-ce la somme des champs créés par les deux aimants? Pouvez-vous représenter le schéma de votre dispositif expérimental (celui permettant de tracer à l'oscillo le cycle d'hystérésis d'un tore de fer doux) au tableau? Comment obtenez-vous B et H? Que sont les domaines de Weiss? Comment expliquer leur répartition spatiale? Vous avez dit que les matériaux ferromagnétiques guident les lignes de champs, comment expliquer ce phénomène? Quelle caractéristique (μ_r , aimantation rémanente, champ coercitif) influe de manière prépondérante sur le guidage? Dans quel but avez-vous présenté l'expérience des domaines de Weiss?

Commentaires personnels : Juste après l'ouverture des sujets, on procède à un premier choix des livres que l'on va consulter. Il est bon d'avoir précédemment repéré l'emplacement des livres au cours des horaires de visite prévues à cet effet.

LP 47 — Mécanismes de la conduction électrique dans les solides.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 10/06/2014 par *Maxime Bordoux* et corrigée par *B. Lamine*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Mécanismes de la conduction électrique. Loi d'Ohm. Effet Hall. Applications.*

Rapports du Jury

☞ (2010, 2009) – “Dans cette leçon, il est important de bien distinguer les grandeurs microscopiques et les grandeurs moyennes.”

☞ (2008) – “La conduction électrique dans les semi-conducteurs est en général présentée de manière très approximative.”

☞ (2001) – “Si l'on utilise le modèle de Drude, on s'efforcera d'en préciser les limites. Une approche probabiliste peut être envisagée. La théorie quantique de la conduction peut être évoquée.”

☞ (2000) – “Adopter une approche hydrodynamique pour décrire la vitesse des porteurs conduit certains candidats à des erreurs. En outre, si l'on utilise le modèle de Drude, on s'efforcera d'en préciser les limites.”

☞ (1999) – “Beaucoup de progrès dans cette leçon où les remarques des rapports précédents sur la discussion des limitations du modèle de Drude ont été généralement prises en compte par les candidats. Il paraît indispensable de mentionner le phénomène de supraconductivité.”

☞ (1997) – “Il est inadmissible de laisser croire à des élèves que le modèle de Drude, si respectable et si utile soit-il, s'applique réellement aux métaux et de ne pas évoquer les limites du modèle imposées par la mécanique quantique et le principe de Pauli. La confusion entre force de Lorentz et force de Laplace n'est pas davantage admissible.”

☞ (1996) – “Trop peu de candidats réalisent que la relation $j = \rho v$ est une définition de la vitesse d'ensemble v , plutôt que de j . Par ailleurs, trop de candidats se figurent que le modèle de Drude est une description suffisante de la réalité microscopique.”

Bibliographie

[1] Aschcroft, *Physique des solides*.

[2] Pérez, *Electromagnétisme*.

[3] Guinier, *Propriétés électroniques des solides*. BUP n°550, 1972.

[4] CAP Prépa Physique MPSI-PCSI-PTSI, 1^{ère} année. Pearson, 2009.

Plan

1 Théorie classique de la conductivité

1.1 Hypothèses du modèle de Drude ([1] p.2-5)

1.2 Équation du mouvement ([1] p.12,18 + [2] p.110)

1.3 Conductivité et loi d'Ohm [1] p.19

2 Effet Hall ([1] p.13 + [4] p.508)

2.1 Dispositif

2.2 Tension de Hall

2.3 Application : la sonde à effet Hall

3 Théorie quantique des solides ([2] p.116)

3.1 Limite du modèle de Drude ([2] p.116 + [3] p.289)

3.2 Structure de bandes

3.3 Application à la photorésistance

Introduction

Nous avons vu la loi d'Ohm,...

On a vu la conduction des électrons dans un point de vue classique et l'utilité de la mécanique quantique par la suite.

1 Théorie classique de la conductivité

1.1 Hypothèses du modèle de Drude ([1] p.2-5)

On a une densité de l'ordre de 10^{29} particules/m³.

Hypothèses :

- Interactions des électrons avec les ions négligeables et avec les électrons non négligeable.
- Collision instantanée, vitesse aléatoire.
- Probabilité entre deux collisions est proportionnelle à $1/\tau$.
- Équilibre thermodynamique local. Tout de suite après le choc les électrons prennent la vitesse correspondant à la température à l'endroit du choc.

1.2 Équation du mouvement ([1] p.12,18 + [2] p.110)

Qté de mvt $p(t)$.

Collision avant $t + dt$: dt/τ .

Sans collision avant $t + dt$: $(1 - dt/\tau)$

On a $\vec{p}(t + dt) = \frac{dt}{\tau} \vec{p}_{aléatoire} + (1 - \frac{dt}{\tau}) \vec{F}(t) + \vec{p}(t)dt$.

On moyenne : $\langle \vec{p}(t + dt) \rangle = \vec{0} + (1 - \frac{dt}{\tau}) \langle \vec{p}(t) \rangle + \langle \vec{F}(t) \rangle dt$.

On a au final

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\vec{p}(t)}{\tau} + \vec{F}(t)$$

Si $\vec{F} = \vec{0}$, on a une équation du premier ordre pour \vec{p} , solution en exponentielle décroissante avec τ comme temps caractéristique.

On excite les électrons avec un champ sinusoïdal. Donc on cherche pour $p(t)$ une solution sinusoïdale à la même pulsation que le champ exciteur.

On trouve le lien entre p et E en complexe : $\vec{p}(\omega) = \frac{-e}{1/\tau - i\omega} \vec{E}(\omega)$.

Transition : On cherche le lien avec la conductivité du métal.

1.3 Conductivité et loi d'Ohm [1] p.19

En reliant j à v et donc à p , on écrit la loi d'Ohm local.

On définit la conductivité pour un champ statique.

En écrivant $\vec{F} = -e\vec{E}$ et $\vec{p} = m\vec{v}$ on a $\vec{v} = \mu\vec{E}$ avec $\mu = -\frac{e\tau}{m}$ la mobilité. Pour le cuivre $\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2.V^{-1}.s^{-1}$.

On définit la conductivité grâce à l'introduction de la densité de courant volumique. σ de la conductivité du cuivre.

On peut alors retrouver la loi d'Ohm locale, en assimilant le champ électrique à une différence de potentiel sur une distance L .

2 Effet Hall ([1] p.13 + [4] p.508)

2.1 Dispositif

On prend un matériau dans lequel la conduction électrique est due à des porteurs de charges.

On fait un schéma avec le champ magnétique, le courant électrique, l'accumulation de charges et la différence de potentiel qui se crée.

2.2 Tension de Hall

$$\vec{j} = -ne\vec{v} \text{ et on a } \vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B} = 1/n \vec{j} \times \vec{B}.$$

On déroule l'expression de la tension de Hall créée lors de l'application d'un champ B à proximité d'un semi-conducteur (ou d'un métal).

On en déduit la résistance de Hall (ou constante de Hall).

► **Expérience** : On montre la tension de Hall créée avec l'utilisation de métaux conducteurs comme une plaque d'argent dans l'entrefer d'un électroaimant. On peut remonter à la valeur de la tension de Hall qui est très petite.

2.3 Application : la sonde à effet Hall

On fait le calcul avec un semi-conducteur de la tension de Hall qui est bien plus importante.

3 Théorie quantique des solides ([2] p.116)

3.1 Limite du modèle de Drude ([2] p.116 + [3] p.289)

On pose l'égalité des énergies thermique et cinétique. On a $v_{th} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ et on définit $\ell = v_{th}\tau$ le libre parcours moyen. On trouve que le libre parcours moyen est de 1.2nm c'est dix fois la dimension atomique. Donc on aurait une collision tous les 10 atomes.

Ce n'est pas les collisions avec les ions qui sont responsables de la loi d'Ohm comme le prévoyait Drude d'après ces calculs.

Il faut faire appel à la mécanique quantique pour résoudre ces problèmes. Les électrons ne suivent pas la statistique de Maxwell-Boltzmann comme on l'a supposé mais suivent la distribution de Fermi-Dirac. De plus à cause de la forte densité des électrons il faut tenir compte également du principe de Pauli. Il est donc plus justifié de considérer l'électron comme une onde et non comme une particule.

3.2 Structure de bandes

Pour un atome isolé, on connaît la configuration électronique en terme de couches électroniques. L'addition d'un atome supplémentaire donne naissance à 2 niveaux d'énergie : une orbitale moléculaire liante et une orbitale moléculaire anti-liante. Si on ajoute de plus en plus d'atomes et qu'on tend vers un nombre d'atome de l'ordre du nombre d'Avogadro on obtient un continuum et ce qu'on va appeler des bandes. On explique la bande de valence et de conduction et on distingue deux cas. Si la bande de conduction est partiellement remplie (métaux) on a une grande conductivité. Si la bande de conduction est complètement remplie avec un gap électronique petit (semi-conducteur) ou grand (isolant) on a une plus faible conductivité.

Diagramme de isolant, semi-conducteur et conducteur en fonction de γ avec des ordres de grandeurs de n , de γ et μ pour le cuivre et le silicium.

3.3 Application à la photorésistance

Une photo résistance est un morceau de semi-conducteur dont la résistance varie en fonction de l'énergie lumineuse incidente. On peut s'en servir pour monter un détecteur de lumière (utilisé pour les éclairages publics).

Influence de paramètres sur la conductivité (Bonus)

Influence de la température

Pour les métaux (à n fixé) : si T augmente μ diminue et donc γ diminue.

► **Pourquoi μ diminue si c'est une constante indépendante de la température ?**

Pour les sc : si T augmente, n augmente et donc γ augmente. **Utilité pour les thermistances** croissance exponentielle de n en fonction de la température.

Influence des impuretés

Pour les métaux : diminue la mobilité.

Pour les sc : dopages.

Questions

➔ Probabilité uniforme ($1/\tau$) dans quels autres processus ?

radioactivité

➔ Quels composantes du champ magnétique on mesure ? Comment mesurer les trois composantes ?

Il faudrait trois plaquettes avec les bonnes orientations

➔ Pourquoi on utilise des semi-conducteurs plutôt que des conducteurs ?

On a une tension de Hall plus grande si n est petit.

➔ Équipartition de l'énergie ? Conditions de validité ?

Valable à chaque fois qu'on a un degré de liberté quadratique quand on est à l'équilibre. On associe $1/2k_B T$ d'énergie pour chacun des degrés de liberté quadratique. Par exemple un potentiel anharmonique (x^3) on a pas équipartition de l'énergie.

➔ Quelle est la statistique de Fermi-Dirac ?

On doit retrouver Boltzmann dans une certaine limite et celle de Bose-Einstein doit permettre la condensation donc n qui tend vers l'infini. Donc on a $n_{FD}/n_0 = \frac{1}{1 + e^{\frac{E}{k_B T}}}$. Il faut un signe

+ pour retrouver Boltzmann : $n_1/n_0 = e^{-\frac{E}{k_B T}}$. Savoir tracer n en fonction de E .

➔ Pourquoi on l'utilise ?

Parce que les électrons sont des fermions.

Remarques du correcteur

Il faut parler simplement de la supraconductivité.

On fait l'hypothèse que le pdf moyenné c'est le pdf et on enlève les moyennes. On a une force moyenne en $-mv/\tau$ qui remplace les collisions discrètes d'avant les moyennes.

Attention à bien définir l'énergie du niveau de Fermi, on peut pas dire c'est le dernier niveau occupé car sinon ça pourrait pas tomber dans la bande interdite. Donc vérifier tout ça.

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ Agrégation 2008 - Note : 17/20 :

Questions et commentaires du jury : vous avez dit que le champ E ne devait pas être "trop grand", ça veut dire quoi ? Quelle valeur ? Votre modèle de conduction

électrique avec des chocs : à quoi correspond votre temps τ ? Est-il directement transposable à votre exemple sur la conductivité des solutions chimiques ? Comment évolue la conductivité molaire ionique en fonction de la taille de l'ion ? Si on considérait les électrons dans le métal comme un gaz, comment peut-on évaluer leur vitesse ?

➔ Agrégation 2009 - Note : 13/20 :

Questions et commentaires du jury : essentiellement des questions sur la théorie des bandes et les semi-conducteurs : comportement de la conductivité en fonction de la température pour les métaux et les semiconducteurs. Que veut dire conduction par des trous.

➔ Agrégation 2009 - Note : 13/20 :

Questions et commentaires du jury :

- Quelle est la vitesse dans le modèle de Drude ? Il s'agit d'une vitesse moyenne d'ensemble (j'avais oublié de le préciser pendant la leçon). Et dans l'effet Hall ? Il s'agit aussi de la vitesse moyenne d'ensemble.
- Pour l'expérience sur l'effet Hall, avez-vous choisi délibérément une plaquette avec un semi-conducteur ou est-ce celle qu'on vous a apporté ? J'ai choisi un semi-conducteur car la tension Hall est inversement proportionnelle à la densité de porteurs ; il est donc bien plus facile d'observer l'effet Hall dans un semi-conducteur (même s'il est aussi possible de l'observer avec un conducteur).
- Les électrons subissent des collisions, avec quoi se produisent-elles dans un monocristal parfait ? Drude les avaient interprétées comme des collisions entre les électrons et les ions positifs du réseau ; il s'agit en fait de collisions entre les électrons et les phonons ; ce qui explique que la résistivité tend vers 0 quand la température tend vers 0 K car il n'y a plus de vibrations du réseau. (Dans le cas d'un cristal non parfait, il y a aussi des collisions avec les impuretés et les défauts du cristal).
- Comment peut-on mesurer le temps de relaxation τ ? On a $v = e \cdot \tau \cdot E / m$ d'où $\tau = mv / (e \cdot E)$. On peut mesurer v en mesurant l'intensité car $i = j \cdot S = neSv$ et E vaut U/L avec L la longueur du conducteur.
- Validité de la loi d'Ohm ? Valable en régime statique ou variable tant que la fréquence reste faible devant $1/\tau$.
- Est-il possible que j et E ne soit pas colinéaires ? Oui pour un matériau anisotrope. Qu'est ce qu'un matériau anisotrope ? Un matériau dont les propriétés dépendent de l'orientation (dans ce cas σ devient un tenseur).
- Peut-on provoquer l'anisotropie dans un matériau ? J'ai cité l'effet Faraday et l'effet Kerr pour citer une anisotropie créée respectivement par l'application un champ magnétique et un champ électrique et que l'on observe par leur conséquence sur la lumière (effet Faraday : angle de rotation du plan de polarisation proportionnel au champ magnétique ; effet Kerr : biréfringence proportionnelle au carré du champ électrique). Je n'ai pas cité (je pense que le jury y pensait peut-être) l'anisotropie provoquée par une contrainte mécanique.
- Dans le modèle des bandes présenté sur le carbone, quelle est l'hybridation des orbitales atomiques ? (J'ai présenté le modèle des bandes comme cela est présenté

dans "Introduction à l'électronique" de Donnini & Quaranta). J'ai parlé du carbone pour lequel à la distance interatomique du cristal on a création, pour N atomes ayant chacun 4 électrons de valence (2 dans une orbitale $2s$ et 2 dans les 3 orbitales $2p$), de 2 bandes de $4N$ niveaux d'énergie (une bande de valence et une bande de conduction séparées par une bande interdite) : les $4N$ niveaux de la bande de valence sont remplis et la bande de valence est vide : il s'agit dans ce cas de la structure du diamant (isolant) pour lequel on a une hybridation sp^3 (géométrie tétraogonale). Dans le cas du graphite, on aurait une hybridation sp^2 (le graphite est constitué de feuillets d'hexagones).

- Connaissez-vous l'ordre de grandeur de la magnétorésistance pour un conducteur ou un semi-conducteur ?
- Pouvez-vous donner un ordre de grandeur pour le gap du Si ? Pendant la leçon, j'avais donné la longueur d'onde minimale pour créer une paire électron-trou et j'avais dit que la largeur du gap était de l'ordre de grandeur ou un peu supérieure à kT à température ambiante ($1/40$ eV). Pour répondre à la question, j'ai calculé $E = h \cdot c / \lambda$ avec $\lambda = 1.1 \mu\text{m}$ soit E de l'ordre de l'eV.

Commentaires personnels : le technicien était très sympa. Il m'a monté les 2 manips. Le détecteur d'obscurité marchait nickel. Pour la manip pour l'effet Hall, le teslamètre (de Cachan) donnait des valeurs étranges. Il permettait de mesurer 2 composantes du champ magnétique mais même avec la notice, ce n'était pas très clair de savoir dans quel sens il fallait le positionner ; de plus, il était limité à des champs inférieurs à 100 mT alors que je montais bien plus haut (avec 5 A environ dans l'électroaimant, j'avais de l'ordre de 300 mT). Le technicien a finalement rapporté un autre teslamètre (de Lyon) qui a bien marché.

→ Agrégation 2013 - Note : 17/20 :

Questions et commentaires du jury : Est-il légitime de négliger les interactions électromagnétiques entre les particules dans un métal ? (avec nos connaissances actuelle non mais il faut utiliser la mécanique quantique.) Que faut-il utiliser en mécanique quantique, les électrons doivent ils être considérés comme des particules ? (non on utilise la dualité onde-corpuscule et on considère les électrons comme des ondes.) Vous avez négligé la force magnétique et vous avez dit qu'elle était 10^{10} fois inférieure à la force électrique, comment le justifiez-vous ? (On écrit la force de Lorentz et on considère que le champ vérifie la relation de dispersion d'une onde plane même si c'est pas très juste.) Il m'ont ensuite demandé de plutôt majorer le champ magnétique mais j'ai pas tout compris, peut-être que le Ashcroft apporte des précisions. Si on garde comme expression de la conductivité σ_0 (c'est à dire en régime permanent) et qu'on essaye de propager une onde dans un fil qu'est ce qui se passe ? Connaissez-vous un autre effet qui rentre en compte ? (Effet de peau, l'onde va se propager qu'à la surface du conducteur et donc la surface de propagation de l'onde sera plus faible et donc la résistance va augmenter.) Pouvez-vous nous parler de supraconducteur ? La loi d'Ohm est-elle encore valable ? (Un supraconducteur est caractérisé par une conductivité infinie donc la loi d'Ohm ne peut être valable car un champ minime conduirait à une densité de courant infinie) Connaissez-vous la loi équivalente pour les supraconducteurs ? (heu . . . non) Pour illustrer l'effet Hall, vous avez pris un conducteur long dans le sens du courant et étroit dans l'autre sens (un

rectangle quoi). Si on fait cela dans l'autre sens en prenant quelque chose de très long pour pas avoir d'accumulation de charges et très court dans le sens du courant pour que les électrons soit absorbés de suite, qu'est-ce qui se passe ? Quel est cet effet ? (Pas su répondre sur le coup) Vous avez parler de phénomènes quantiques pour la Loi d'Ohm et pour l'effet Hall avez-vous déjà entendu parler d'effet Hall quantique ? (heu . . . non) Il m'ont posé le problème classique des soudures de la sonde de Hall qui ne sont pas forcément en face, comment on fait ? (On fait deux mesures avec la plaque dans un sens puis dans l'autre ce qui élimine l'erreur due aux problèmes de soudure). Comment le constructeur fait-il pour corriger ce problème ? Vous avez un bouton réglage du zéro sur le dispositif, il sert à quoi ? (J'ai dit que ça déplaçait le contact pour le mettre en face mais c'était pas très malin et après réflexion je pense que ça ajoute une tension en série qui compense l'erreur et on fait le zéro comme ça.)

Ils ont regardé mes livres pendant la présentation et ont apparemment apprécié que j'utilise le BUP 550.

Neuvième partie

Leçons de Physique Générale

LP 48 — Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 02/10/2013 par *Pauline Dujardin* et corrigée par *R. Mathevet*.

Rapports du Jury

☞ (2010, 2009) – “L’analyse du seul circuit RLC est très insuffisante pour cette leçon. Le phénomène de résonance ne se limite pas aux oscillateurs à un degré de liberté.”

☞ (2008, 2007) – “Le jury regrette que les cavités résonnantes soient rarement présentées.”

☞ (2006) – “L’aspect énergétique de la résonance est ignoré la plupart du temps. Trop souvent, la notion même de résonance n’est liée qu’à l’existence d’un maximum d’amplitude. Les applications dans le domaine microscopique sont rarement abordées. ”

☞ (2004) – “ Une illustration souvent choisie est l’étude d’un dispositif mécanique comportant une masse suspendue à un ressort vertical excité à une extrémité. Cette expérience est bien choisie mais la mise en équation pose régulièrement des difficultés.”

☞ (2003) – “La leçon porte sur l’étude de phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique. Le candidat ne doit pas se limiter à l’électricité et à la mécanique. Il doit prendre soin de dégager les propriétés communes aux différents exemples présentés. Quel lien y a-t-il entre le circuit RLC et la résonance du sodium?...”

☞ (1998) – “Il est bien entendu nécessaire d’insister sur la généralité du phénomène de résonance en physique et de ne pas cantonner l’exposé à un domaine unique (mécanique ou électricité). Les relations entre le comportement des systèmes forcés et les propriétés des mêmes systèmes, libres, doivent être soulignées, de même que les aspects énergétiques des phénomènes de résonance¹”

Bibliographie

[1] *CAP Prépa Physique MPSI-PCSI-PTSI*, 1^{ère} année. Pearson, 2009.

[2] Gerl, *Systèmes à deux états*. BUP n°574, Mai 1975.

[3] Faroux, *Mécanique des fluides et ondes mécaniques*. Dunod, 1999.

[4] Quaranta, *Tome I : Mécanique*. Éditions Pierron, 2002.

[5] Pérez, *Quantique*. de Boeck, 2013.

Plan

1 Oscillateur à un degré de liberté

1.1 Le circuit RLC ([1] p.265)

1.2 Interaction matière rayonnement

1.3 Spectroscopie IR

1.4 Spectroscopie RMN

2 Oscillateurs mécaniques à 2 degrés de liberté ([2] + [3] p.133,141 + [4] p.87 + [5] p.292)

2.1 Présentation du système

2.2 Mise en équation

1. Le titre de la leçon était alors le suivant : *Phénomènes de résonance dans les systèmes linéaires. Exemples*.

2.3 Modes propres et battements

2.4 Aspects énergétiques ([2])

3 Oscillateurs à degrés de liberté infini

3.1 Nombre infini de degré de liberté

3.2 LASER : émission absorption

Introduction

La fréquence c’est le paramètre. Il y a résonance en amplitude ici, mais pas une résonance en puissance. Toutes les résonances en amplitude n’ont pas de ω_0 . Pour des systèmes du second ordre (oscillateurs), si l’amortissement est suffisamment faible, il présente des modes propres d’oscillations. On a résonance, lorsqu’on force le système à osciller selon l’une de ses fréquence propres.

IRM : résonance. Précession du moment magnétique. Levée de dégénérescence. On fait osciller le spin de l’électron. T.M.C ou mécanique quantique.

Micro-onde : excitation de la rotation de la molécule d’eau. Freinage lorsqu’on excite plusieurs degrés de liberté. Il y a que deux tailles de micro-onde car on sait que faire des impulsions de 15cm. donc on fait des multiples de 15cm en taille dans les deux sens pour faire résonner les molécules d’eau.

Résonance paramétrique, plus compliqué, on la considère comme une instabilité car elle augmente exponentiellement, elle est stabilisée que par les non-linéarités de du système.

Annnonce du plan : leçon de synthèse, on a pas forcément de lien entre les parties car on voit différentes domaines de la physique.

Transition : on voit le cas le plus simple qu’on a vu dans l’année.

Dans cette leçon on a pas besoin de redémontrer les équations.

1 Oscillateur à un degré de liberté

1.1 Le circuit RLC ([1] p.265)

On écrit la puissance moyenne : $\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \phi$.

On peut écrire alors la forme canonique de la puissance : $\langle P \rangle = \frac{P_{max}}{1 + Q^2(x - 1/x)^2}$.
C’est une lorentzienne.

On a également $\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{|Z|} \cos \phi$. Ici on a la définition de l'impédance qu'on en méca, en acoustique,...

On arrive à la forme réduite de la puissance, c'est sur elle qu'on travaille.

Remarque : Si $Q \gg 1$, pour trouver la bande passante, on pose $x = 1 + \epsilon$, il faut résoudre $Q^2(x - 1/x)^2 = 1$, on fait un d.l. pour arriver à $2\epsilon = 1/Q$.

C'est parce qu'il y a de la dissipation que le facteur de qualité n'est pas infini.

Transition : Le modèle de l'interaction matière rayonnement : modèle de Drude-Lorentz. On avait une lorentzienne précédemment

1.2 Interaction matière rayonnement

On se fout de la mise en équation!

Qu'est-ce que représente \vec{r} .

Réduction du problème à deux corps car on a 6 équation à 6 inconnues :

- 1°) le centre de masse à une traj rectiligne $M(t) = \vec{v}_0 t + R_0$.
- 2°) On prend la particule réduite : masse réduite .
- 3°) Conservation du moment cinétique : trajectoire plane ($z = 0$ pour tout t)
- 4°) $L = \vec{r}^u \vec{v} = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$. On peut intégrer, il reste alors plus qu'une inconnue r.
- 5°) Énergie totale = $E_{pot} + 1/2 \mu \dot{r}^2 + 1/2 \mu (r \dot{\theta})^2$. Le dernier terme est la force centrifuge si on remplace l'expression de $(r \dot{\theta})^2$.

On a alors une énergie potentielle effective qui possède un minimum. D'un point de vue classique, il existe un rayon d'équilibre de l'électron. Tout mouvement près d'une position d'équilibre est un mouvement harmonique : donc lorsqu'on applique un champ électrique, la position de l'électron vibre selon l'oscillateur harmonique (approximation parabolique = harmonique). **Tout mouvement autour d'une position d'équilibre est en première approximation harmonique.**

On peut cette approximation car le mouvement est de petite amplitude. Le mouvement est de petite amplitude car par l'absurde si les oscillations sont grandes, l'atome s'ioniserait. On peut aussi comparer le champ dans l'atome par rapport au champ extérieur : $E_{int} = \frac{13,6 \text{ Volt}}{a_0 = 0,53 \text{ angström}} = 22 \cdot 10^{10} \text{ V/m}$.

Savoir faire la réduction du problème à deux corps.

Le terme en $\frac{m}{\tau} \dot{x}$ est la réaction de rayonnement. L'électron est accéléré, donc il y a une puissance rayonné. Cette puissance est prop. à l'accélération au carré (pas à la vitesse car invariance par chgt de ref galiléen, et pas à l'accélération car ça peut pas être négatif).

L'énergie décroît, le moment cinétique n'est pas conservé. L'électron tombe sur le

proton : **l'atome classique est instable !**

Le modèle de Drude-Lorentz suppose que l'électron à une orbite r_0 fixé qui est instable mais on s'en moque. On a un temps de désexcitation τ de l'atome.

On a de la dissipation, c'est le lien avec la résonance.

On peut faire tout ça sur transparent mais très rapidement. On va retrouver ce qu'on a trouvé précédemment.

On envoie un champ électrique sur le milieu on observe une polarisation. A cette polarisation, on associe un courant $\vec{j} = \frac{\partial P}{\partial t}$. A ce courant on a une perte par effet Joule $\langle P_{joule} \rangle = \vec{j} \vec{e}$ c'est une puissance volumique. On retombe sur la forme canonique de la puissance avec $Q = \omega_0 \tau$. On voit le τ apparaître ici. Pour la lorentzienne, on trouve que la demi-largeur est égale à $1/\tau$: c'est la **largeur naturelle**. On a $\delta\omega = 2\pi\delta f$ avec $\delta f = 5 - 10 \text{ MHz}$ et $\tau = qq10 \text{ ns}$. C'est la largeur qu'aurait une raie sans effet doppler !

1.3 Spectroscopie IR

Cette fois c'est entre deux atomes. Le potentiel intra-atomique du modèle de Drude-Lorentz est valable aussi pour l'interaction entre les deux atomes, mais les termes sont beaucoup plus compliqués et les expressions des interactions sont différentes mais le schéma est le même.

Transition IR : mode de vibration de la molécule.

1.4 Spectroscopie RMN

On remplace le PDF par le TMC. On posant $\vec{m} u = \gamma L$.

On a $\frac{dL}{dt} = \vec{\mu} \times B$.

$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma B \vec{\mu} \times \vec{e}_z$ avec $\gamma B = \omega_0$ pulsation de Larmor.

Il y a résonance quand $\omega = \omega_0$ où ω est la pulsation du champ magnétique.

Ce n'est pas obligé de faire cette partie, parce qu'un peu éloigné. On peut le faire en conclusion.

Transition : Si on fait pas la RMN, on s'intéresse avec la spectro à des systèmes à deux degrés de liberté (molécules).

Transition : Le phénomène de résonance est défini pour un système général : il n'est pas limité à la résonance en électricité, mais existe dans tous les domaines de la physique, de la mécanique classique à la mécanique quantique en passant par l'optique. Un exemple simple d'oscillateur mécanique est le système masse-ressort à un degré de liberté. A partir

de celui-ci, on observe les mêmes types d'équation régissant l'évolution temporelle de la grandeur d'intérêt, et il est possible d'élaborer une analogie électro-mécanique. On en déduit que la résonance en intensité correspond à une résonance mécanique en vitesse (qui a les mêmes propriétés sur l'existence, le facteur de qualité, ...), et la résonance en tension correspond à une résonance en élongation. A partir de cette analogie, nous allons observer maintenant ce qui se passe si l'on augmente le nombre de degrés de liberté.

2 Oscillateurs mécaniques à 2 degrés de liberté ([2] + [3] p.133,141 + [4] p.87 + [5] p.292)

Deux masses liés par deux ressort chacune à un mur. Pour mettre en équation :

On résout en absence du couplage dans le premier temps c'est à dire dans le régime libre. Ca allège considérablement les calculs.

Ensuite on a le couplage.

On se sert de matrice pour des systèmes linéaires. On va diagonaliser la matrice, pour séparer les deux équations. On cherche alors les valeurs propres de la matrice. Ici les valeurs propres sont les fréquences propres donc on a résonance. On a également des vecteurs propres, ce sont des combinaisons qui vont bien.

Mode symétrique : le ressort ne joue pas de rôle car les deux masses oscille en phase.

Mode antisymétrique : oscillation en opposition de phase. Le ressort est plus tendu, la fréquence propre est donc plus forte.

Mode propre : toutes les oscillateurs oscillent à la même fréquence et amplitude/phase relative.

Tout ce que l'on vient de voir permet de justifier toute les systèmes avec un nb de degré de liberté fini.

2.1 Présentation du système

On fait une étude simple pour dégager les caractéristiques importantes du couplage de deux oscillateurs. On étudie deux oscillateurs harmoniques couplés par un ressort.

Définition du couplage.

2.2 Mise en équation

On pose les équations du couplage. On cherche des solutions pour x_1 et x_2 à la même pulsation pour faire sortir les modes propres car les évolutions seront selon la même pulsation ce qui est la définition d'un mode propre.

On prend deux sous systèmes identiques (symétrique par permutation). On fait un changement de variable pour faire apparaître naturellement les fonctions symétrique et antisymétrique et faire apparaître les pulsations symétrique et antisymétrique.

On découple les solutions car pour un système linéaire, une combinaison linéaire de solution est encore solution du problème.

Le couplage entraîne la présence de deux pulsations alors que sans couplage on en avait qu'une seule. On dit que le couplage a levé la dégénérescence en pulsation des deux oscillateurs sans couplage.

2.3 Modes propres et battements

Les solutions s'obtiennent pour certaines conditions initiales.

Montrer les modes propres, commenter l'apparition ou non de k_0 dans les pulsations propres. Bien définir la notion de mode propre : mode harmonique stationnaire. Relever par TF les pulsations des modes propres.

Phénomène de battements à visualiser avec VidéoCom lorsque le couplage est **faible**. Faire la TF et montrer qu'on retrouve les pulsations des modes propres.

► **Expérience [4] p.90** : On s'appuie sur les pendules couplés pour montrer tous ces modes et les battements. On fait des TF pour voir qu'on a que les pulsations propres.

2.4 Aspects énergétiques ([2])

On montre que dans les modes symétriques et antisymétrique l'énergie mécanique est également partagé entre les deux pendules.

Pour les battements l'énergie ne reste plus également partagée entre les deux pendules.

Ainsi, à partir de l'instant initial où toute l'énergie est portée par le pendule 1, l'énergie est transférée progressivement au pendule 2 et, à l'instant t , le pendule 2 porte toute l'énergie. Ce phénomène de transfert de l'énergie entre les deux pendules traduit le phénomène de **battement** entre les modes propres symétrique et antisymétrique.

Transition : On va chercher comment ça se passe pour n infini.

3 Oscillateurs à degrés de liberté infini

3.1 Nombre infini de degré de liberté

Chaîne infini d'oscillateur. N tend vers l'infini. On a une infinité de modes propres.

Soit le mode propre de fréquence ω . Alors $x_i(t) = x_i e^{j(\omega t + \phi_i)}$. Le système est invariant par translation car la chaîne est infinie. Donc les masses vibrent tous à la même amplitude : $\forall i x_i = x_0$ et on a $\phi_i - \phi_{i+1} = \delta\phi \Rightarrow \exists k/\delta\phi = k(\omega)a$.

Ce qui compte c'est de savoir quel est le déphasage qu'une masse à par rapport à sa voisine. La recherche des modes propres revient à trouver la relation $k(\omega)$ c'est la **relation de dispersion**.

Exemple : équation d'onde = équation de d'Alembert.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0$$

avec $psi = \psi_0 e^{i(kx - \omega t)}$ on trouve $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$.

On a pas résonance car infinité de fréquence propres.

Mais si on met des conditions aux limites (mur). Alors on a une **résonance d'onde stationnaire**. Corde de Melde : $L = p\lambda/2$, on a alors $\nu_p = p \left(\frac{c}{2L} \right)$.

On trouve $k_p(2L) = p2\pi$. Quand l'onde fait un tour de cavité elle est réfléchi sur le premier mur et sur le deuxième elle revient sur elle-même. Il faut qu'elle revienne en phase pour que les amplitudes s'annulent pas. Elle pris une phase : $2\pi 2L/\lambda$.

Transition : On peut généraliser : micro-onde = fabry-pérot.

3.2 LASER : émission absorption

Règle de quantification de Bohr : une onde dans une boite avec des conditions aux limites.

Puits de potentiel carré infini.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = (K + V)\psi$$

Équation de dispersion en MQ : $E = \hbar\omega = K = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$. Les modes propres c'est quand l'électron fait le tour de sa boite et revient sur lui-même. On a $k_p(2a) = p2\pi$ donc $k_p = p \frac{\pi}{a}$ et $E_p = p^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$.

On a un effet d'absorption entre deux niveaux lorsqu'on envoie une énergie correspondant à un mode propre.

Émission : Le niveau supérieur est instable : au bout d'un certain temps il se désexcite. On a τ = la durée de vie de l'état excité. On a $\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau} = \hbar\Delta\omega$. On trouve que $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ largeur naturelle.

Ne pas aller voir dans le COHEN car il prend les oscillations de Rabbi qui sont stables.

$n_2(t)$ population de l'état excité.

$dn = -n_2 \frac{dt}{\tau}$. On trouve que $n_2(t) = n_2(0)e^{-t/\tau}$. La population diminue. Quelle va être la puissance émise ?

$$P = \frac{dn_2}{dt} \hbar\omega_{12} = P_0 e^{-2t/\tau}$$

Le champ électrique émis ressemble à $E(t) = E_0 e^{-t/\tau} e^{j\omega t}$ donc oscillations amorties. Le spectre du champ est alors une lorentzienne centrée en ω_0 de demi-largeur $1/\tau$.

Questions pour faire réfléchir

➔ Avez-vous lu l'article paru dans le BUP 851 de février 2003 intitulé Expérience de Melde ?, par J.-P. Roux.

➔ A quoi est associée la résonance dans les systèmes bouclés ? En quoi est-ce contre-intuitif ?

➔ Quelle différence faites vous entre résonance en tension et en intensité dans un circuit RLC ?

➔ Qu'est-ce que la RMN ?

Question

➔ Qu'est-ce que l'angle ϕ sur le schéma de la résonance avec la cavité résonante ?

➔ Que représente la courbe avec la probabilité ? Que représente t ? La proba semble pouvoir dépasser 1 car $Proba \propto t^2$?

➔ Comment faire si il y a trois degrés de liberté ? car si il y a n degré de liberté, il y a n modes propres ? Comment traiter le spectre de vibration de la molécule d'ozone ?

➔ Modèle de l'électron élastiquement lié : qu'est ce que le terme de frottement visqueux ? Dans quoi est l'électron pour qu'il y ait un terme de frottement visqueux ? Dissipation d'énergie de la charge accélérée par rayonnement. D'où vient le terme $\omega_0^2 \tau^2$?

➔ Quel lien entre χ'' et la résonance ? Qui joue le rôle de courant ?

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

➔ Agrégation 2012 - Note : 15/20 :

Questions et commentaires du jury : À propos du Fabry-Pérot : comment améliorer un coefficient de réflexion ? À propos de la corde de Melde : physiquement, où se trouve la dissipation ? Citer d'autres types de dissipation, autre qu'en dérivée première. Influence des non-linéarités ? À quoi servent les résonances ? Comment les éviter ? Comment s'affranchir des résonances parasites des hauts parleurs ? Exemple de résonance en architecture ?

Commentaire du jury à la confession : leçon vivante et dynamique, c'est ce qui les a le plus marqué. Ils avaient vu d'autres candidats sur cette leçon qui avaient tous le même plan et moi j'avais une partie un peu différente sur la corde de Melde avec une étude en réflexions multiples pour comparer au Fabry-Perot : ils ont adoré. Ils ont trouvé que ça manquait un peu de sens physique parfois et que je n'ai pas trop bien répondu aux questions.

LP 49 — Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités.

Avant-propos : Cette leçon a été présentée le 07/05/2014 par *Florent Leveque* et corrigée par *N. Combe*. La leçon s'intitulait en 2013 : *Exemples d'effets de non linéarité sur le comportement d'un oscillateur*.

Rapports du Jury

☞ (2013) – “Les aspects non linéaires doivent être abordés dans cette leçon sans développement calculatoire excessif, en utilisant judicieusement la notion de portrait de phase. Une simulation numérique bien présentée peut enrichir cette leçon.”

☞ (2012, 2011) – “ Une simulation numérique bien présentée peut enrichir cette leçon.”

☞ (2010) – “L’analyse de l’anharmonicité des oscillations du pendule pesant ne constitue pas le coeur de la leçon. Différents effets des non linéarités doivent être présentés.”

☞ (2008, 2007) – “Le régime forcé des oscillateurs non linéaires est également envisageable.”

☞ (2003) – “La leçon ne doit pas se limiter à une résolution d’équations différentielles non linéaires. Une discussion des effets en liaison avec la forme de l’énergie potentielle peut être intéressante. La présentation d’un oscillateur de van der Pol précablé sur une plaquette reste trop souvent théorique. En quoi ce système est-il représentatif de problèmes usuels en électronique¹ ?”

☞ (2000) – “Celle leçon est parfois présentée de façon très abstraite. Par ailleurs on doit s’efforcer de varier les exemples, en tout cas de ne pas les limiter exclusivement à l’électronique².”

☞ (1999) – “La simple étude de la non-linéarité du pendule simple et du vase de Tantale ne peut suffire. Il faut dégager clairement, sur différents exemples, l’impact des non-linéarités sur (selon les cas) la période, l’amplitude des oscillations, voire la forme du signal, sa valeur moyenne.”

☞ (1997) – “Le jury regrette que certains candidats passent beaucoup de temps à traiter de l’effet relativement banal de certaines non-linéarités, comme l’influence de l’amplitude du mouvement sur la période d’oscillation d’un pendule, sans évoquer les phénomènes, beaucoup plus riches, d’instabilités ou de transition vers le chaos.”

Bibliographie

[1] *CAP Prépa Physique PC-PC**, 2^{ème} année. Pearson, 2010.

[2] Faroux, *Mécanique 1*. Dunod, 1996.

[3] Gibaud, *Etude des effets non linéaires observés sur les oscillations d’un pendule simple*. BUP n°891, Février 2007.

[4] Duffait, *Etude expérimentale des oscillateurs mécaniques*. BUP n°867 p.1307.

[5] Gié, *Le portrait de phase des oscillateurs*. BUP n°744, Mai 1992.

[6] Quaranta, *Tome I : Mécanique*. Éditions Pierron, 2002.

[7] Pérez, *Mécanique, Fondement et applications*. Dunod, 2001.

[8] Bergé, *L’ordre dans le chaos*. Hermann, 1988.

[9] Pietryk, *Panorama de la physique*. Belin, 2007.

Plan

1. à ce sujet on pourra travailler le thème d’étude 23 de B. Portelli et J. Barthes, dans l’ouvrage *La physique par la pratique* publié aux éditions H&K. On pourra aussi consulter les références associées.

2. Le titre était alors le suivant : *Exemples d’effets de non linéarité sur le comportement d’un oscillateur*. (MPSI ou 1er CU).

1 Oscillateur linéaire libre : le pendule simple

1.1 Mise en équation ([2] p.217 + [3])

1.2 Description du mouvement et Aspects énergétiques ([2] p.217)

1.3 Portait de phases ([2] p.217 + [5])

1.4 Amortissement ([4] + [5])

1.5 Linéarité et Non-linéarité

2 Oscillateur non-linéaire libre

2.1 Retour sur l’équation pendulaire ([2] p.249 + [3])

2.2 Développement perturbatif et harmoniques ([2] p.251 + [3])

2.3 Portrait de phases ([4], [5], [6] p.123,311)

2.4 Ouverture sur l’optique non linéaire : doublage de fréquence ([9] p.110)

3 Différents oscillateurs ([8] p.25)

3.1 Oscillateur entretenu : Van der Pol ([8] p.27)

3.2 Oscillateur paramétrique ([8] p.31)

3.3 Bifurcation : régulateur à boules ([7] p.334 + [8] p.39)

Introduction

➤ **Expérience** : On montre le spectre d’un pendule pesant et on va chercher à comprendre dans cette leçon ce qu’est le petit pic à coté du fondamental (3eme harmonique) et pourquoi il vaut 3 fois la fréquence du fondamental.

Définition de la linéarité ([1] p.117) : $e(t)$ excitation d’entrée, $s(t)$ réponse. Exemple concret. Les non-linéarités se traduisent en général. par la présence d’harmoniques dans le spectre du signal de sortie.

On traite dans un premier temps le cas d’un pendule simple ce qui nous permet de décrire le cadre de l’étude et de comprendre les phénomènes mis en jeu.

1 Oscillateur linéaire libre : le pendule simple

On va simuler le pendule simple par un pendule pesant bien que la masse de la tige ne soit pas négligeable devant celle de la masselotte. Ce système nous permet de faire l’acquisition simplement du degré de liberté de l’oscillateur. Les conclusions restent générales.

1.1 Mise en équation ([2] p.217 + [3])

On écrit l’équation du pendule simple et on fait l’approximation des petits angles.

1.2 Description du mouvement et Aspects énergétiques ([2] p.217)

On écrit la solution et on met en avant l’**isochronisme** des oscillations.

On développe l'énergie potentielle autour d'une position stable.

On écrit l'énergie mécanique du pendule libre $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2$

Comme le système est non dispersif (E_m se conserve), on voit qu'il va être intéressant de tracer un graphe en fonction de deux coordonnées du problème θ et $\dot{\theta}$.

1.3 Portait de phases ([2] p.217 + [5])

On écrit l'équation entre θ et $\dot{\theta}$. On trouve l'équation d'une ellipse. Puis on trace le portrait de phase de l'oscillateur.

► **Expérience [5]** : On trace également $\dot{\theta}$ en fonction de θ : on a des cercles dont le rayon correspond à l'amplitude des oscillations.

Transition : on va voir que ces portraits de phase sont des outils puissants pour faire apparaître les amortissements et les non linéarités

1.4 Amortissement ([4] + [5])

► **Expérience [4] + [5]** : On fait l'acquisition longue aux petits angles du pendule. On montre le portrait de phase qui met en évidence une spirale plutôt que des cercles.

L'énergie mécanique ne se conserve pas : on a des frottements.

1.5 Linéarité et Non-linéarité

► **Expérience [4] + [3]** : On montre le spectre de l'acquisition à petits angles et on montre la présence d'un fondamentale.

La TF nous donne un pic puisque le signal est sinusoïdale.

Mais on a fait une approximation pour trouver les solutions. On observe l'acquisition à grands angles et on voit la présence d'un harmonique de fréquence triple. C'est ce que l'on va étudier.

2 Oscillateur non-linéaire libre

2.1 Retour sur l'équation pendulaire ([2] p.249 + [3])

On réécrit l'équation pendulaire sans l'approximation aux petits angles.

On fait une description qualitative du mouvement en fonction de l'énergie du pendule.

2.2 Développement perturbatif et harmoniques ([2] p.251 + [3])

On fait le développement perturbatif en ne considérant que le terme d'ordre 3 dans le développement du sinus (fonction impaire donc terme pair nul).

On cherche des solutions en conséquences $\theta = \theta_0[\sin \omega t + \epsilon \sin 3\omega t]$.

On a la **perte de l'isochronisme** des oscillations.

► **Expérience [4] + [3]** : On va avoir présence d'un harmonique dans le spectre dont la fréquence sera trois fois celle du fondamental.

Transition : On montre la répercussion sur le portrait de phase.

2.3 Portrait de phases ([4], [5], [6] p.123,311)

► **Expérience [4] + [5] + [6] p.311 + p.123** : On montre le portrait de phase et sa forme particulière en oeil de chat ou ogive.

On commente les différents cas du portraits de phase.

2.4 Ouverture sur l'optique non linéaire : doublage de fréquence ([9] p.110)

L'optique non linéaire mérite d'être présentée dans le cadre de cette leçon au vu de son importance pratique pour la recherche fondamentale comme la recherche appliquée et l'industrie.

A ce titre, un exemple concret d'utilisation du doublage de fréquence optique est le pointeur laser vert, obtenu à 532 nm par doublage d'un cristal de Nd :YAG. Ainsi, le sigle YAG, s'il est présenté, doit être connu : Nd :YAG signifie Néodyme Yttrium Aluminium Garnet et la raie laser obtenue émet à 1064 nm, ce qui par doublage de fréquence donne la couleur verte à 532 nm (aucune longueur d'onde à 1060 nm n'est donc mise en jeu).

3 Différents oscillateurs ([8] p.25)

3.1 Oscillateur entretenu : Van der Pol ([8] p.27)

On écrit l'équation de Van der Pol $\ddot{\theta} - (\epsilon - \theta^2)\dot{\theta} + \theta = 0$

On a un cycle limite sur le portrait de phase vers lequel tendent toutes les trajectoires.

On décrit les portraits de phase associés aux cas $\epsilon \ll 1$ et $\epsilon \sim 1$.

3.2 Oscillateur paramétrique ([8] p.31)

Exemple concret : enfant sur balançoire qui modifie la taille du pendule périodiquement en étendant ces jambes.

Dans le cas de notre pendule il suffit de donner un mouvement périodique vertical au point de fixation du pendule : on a un oscillateur paramétrique (on pourrait également le placer dans un champ de pesanteur dépendant du temps).

On écrit l'équation dite de Mathieu d'un oscillateur paramétrique : $\ddot{\theta} + \omega_0^2[1 + H \cos(2\omega t)]\theta = 0$ où h est le paramètre de l'oscillateur.

On discute de la stabilité des solutions.

L'enfant sur la balançoire cherche des solutions instables qui lui permettent d'augmenter son amplitude. Pour cela il fournit de l'énergie au système périodiquement en étendant ces jambes.

3.3 Bifurcation : régulateur à boules ([7] p.334 + [8] p.39)

► **Expérience [7] p.334** : On montre avec un régulateur à boules (oscillateur entretenu) qu'en dessous d'une certaine fréquence de rotation il n'existe qu'une solution stable $\theta = 0$ mais qu'à partir d'une certaine fréquence ω_c critique, la solution $\theta = 0$ devient instable et on a dorénavant deux solution stables θ et $-\theta$.

- On peut remonter à la valeur de la pulsation de bifurcation ω_c .
- On obtient une bifurcation fourche. Enfin on obtient la demi-fourche. Pour tracer l'autre demi-fourche, il suffit de relever l'angle de l'autre boule en vis à vis de celle qu'on mesure. Si on mesure l'angle θ sur la première l'autre aura l'angle $-\theta$. On simule les deux positions stables (angles) vers lesquels un pendule simple pourrait se diriger si on mettait en rotation son axe propre (ficelle).
- On pourrait montrer que dans le cas d'une bifurcation fourche (on ajoute des masses sur un réglet à la verticale) la période des oscillations augmente (le réglet se met à osciller lorsqu'on le perturbe un tout petit peu) lorsqu'on se rapproche de ω_0 . Par exemple plus les masses que l'on pose sur le réglet se rapproche de la masse critique qui va faire tomber la règle plus les oscillations seront grandes avant qu'elle ne tombe. Ceci ne peut pas se montrer avec le régulateur à boules.

Conclusion

- Dans l'espace temporelle : on a perte d'isochronisme avec des non linéarités.
- Les non linéarités sont en lien avec la présence d'harmoniques dans l'espace de Fourier.

Questions pour faire réfléchir

- Donner un ordre de grandeur de l'angle à partir duquel le pendule simple ne peut plus être considéré comme isochrone à 1%.
- Qu'est-ce qu'un développement multiéchelle ?
- On trouve dans beaucoup d'ouvrages que ce sont les frottements qui saturent les résonances. Est-ce vrai ? Qu'elle est la contribution des non-linéarités ?
- Qu'est-ce que l'oscillateur de Duffing³ ?
- Qu'appelle-t-on transition vers le chaos d'un oscillateur ?
- Quel lien faites-vous entre non linéarité du comportement d'un oscillateur et la dilatation thermique des solides ?

Retour des années précédentes à l'ENS de Lyon

- Agrégation 2010 - Note : 10/20 :

Questions du jury : (I) Oscillations libres ; (1) Le pendule : le pendule que vous avez considéré a-t-il une particularité ? S'il était pesant cela changerait-il quelque chose ? Pourriez-vous nous donner une expression plus complète du développement de la période en fonction de l'angle ? *Sur les portraits de phase, j'avais tracé la dérivée en fonction de l'angle et j'avais parlé de portrait quasi circulaire, expliquer pourquoi ? (en fait ça donne l'équation d'une ellipse)* Qu'aurait-il fallu tracer pour avoir des cercles ? (2) Le ressort : Est-ce qu'on aurait pu trouver l'expression de la position d'équilibre autrement qu'en

3. On consultera avec profit l'ouvrage de M. Krob, intitulé *électronique expérimentale* aux éditions Ellipses.

résolvant l'équation différentielle ? Vous avez parlé de lien avec la dilatation thermique, est-ce que vous pourriez ré-expliquer (j'ai été un peu vite pendant la leçon). (II) Oscillations forcées : vous avez déclaré que la solution centrale est instable, vous pourriez expliquer pourquoi ? (J'ai pas trop su répondre et en vérifiant, même le Landau admet l'instabilité de cette solution). (III) Oscillations auto-entretenues ; (1) Vase de Tantale (*Qualitatif, je ne pensais pas le faire au début et comme finalement il me restait 5 min je l'ai rajouté à la fin*). (2) Van der Pol : à partir de l'équation différentielle de Van der Pol, comment expliqueriez-vous simplement pourquoi la non linéarité stabilise les oscillations ? C'est quoi en gros l'amplitude des oscillations (s_0) ? Plutôt plus petit ou plus grand ?

Commentaires du jury : aux dires du jury la leçon était plutôt bien, un peu trop mathématiques à leur goût, elle manquait de sens physique.

Commentaires personnels : les techniciens ont été très sympa, ils m'ont ramené un pendule un peu amoché du coup je ne sais pas si c'était ça ou synchronie mais l'acquisition était plutôt bruitée et du coup les portraits de phase était assez moches, pas du tout lisse, mais globalement démonstratifs donc je me suis dit que pour une leçon, ça suffirait bien. J'étais partie pour monter un Van der Pol, je me suis vite ravisée et du coup les techniciens m'ont ramené une boîte fermée de Montrouge avec deux molettes pour faire varier les résistances et un bouton pour court-circuiter le 1er condensateur.

Annexe A — Les sources lumineuses

1 Source thermiques

Elles ont un spectre continu (avec une intensité qui peut néanmoins dépendre de la longueur d'onde). Elles constituent une bonne approximation de la lumière blanche (spectre plat). Il en existe deux sortes :

1.1 Lampes à incandescence ordinaires

Le filament de tungstène est porté à une température d'environ 2800 K. Il est placé sous vide, ou dans une atmosphère gazeuse inerte, pour éviter toute oxydation. La répartition spectrale est à peu près celle d'un corps noir porté à la même température (avec donc une part importante du rayonnement dans l'infrarouge).

1.2 Les lampes à incandescence Quartz-Halogène (en particulier Quartz-Iode)

Le principe est le même que pour les lampes précédentes, mais l'ajout d'un gaz halogène à l'intérieur de l'ampoule augmente son temps de vie, en limitant la vaporisation du tungstène. Cela permet donc de porter le filament à une température plus élevée (3200 K), ce qui augmente l'intensité lumineuse et décale l'ensemble du spectre vers le visible.

2 Lampes spectrales

Ce sont des lampes à vapeurs atomiques, qui fournissent des spectres de raies. Ces lampes nécessitent un autotransformateur spécial. En effet, une haute tension est nécessaire pour établir une décharge entre les électrodes, les électrons accélérés excitant par collision les atomes (qui émettent alors de la lumière en se désexcitant).

Vous utiliserez fréquemment des lampes à vapeur de sodium (utilisant le doublet jaune du sodium, qui fournit aussi la lumière des réverbères) ou des lampes à vapeur de mercure (qui émettent plusieurs raies). Ces dernières peuvent être :

- soit basse pression (raies fines, luminance faible) ;
- soit haute pression (raies élargies, luminance élevée) : les lampes dites Philora, en particulier, montées dans un carter spécial qui contient leur transformateur.

Ces sources n'atteignent leur régime de fonctionnement permanent qu'après plusieurs minutes : il faut donc les **brancher en avance** et éviter de les éteindre, car elles ont besoin de refroidir avant d'être rallumées.

3 Lasers

Le laser le plus courant dans l'enseignement est le laser hélium-néon, d'une puissance de l'ordre du milliwatt. Son rayonnement est très monochromatique (longueur d'onde de 632,8 nm, rouge). La divergence du faisceau est très faible (avec une ouverture de l'ordre de 10^{-3} rad) et malgré sa faible puissance, **le faisceau est dangereux pour la rétine**.

On dispose aussi d'un laser hélium-néon vert (543 nm) et de diverses diodes laser, qu'on utilisera au cours de l'année.

4 Diode Électroluminescente

→ C'est lors de la recombinaison d'un électron et d'un trou dans un semi-conducteur qu'il y a émission d'un photon. En effet, la transition d'un électron entre la bande de conduction et la bande de valence peut se faire avec la conservation du vecteur d'onde \vec{k} . Elle est alors radiative (émissive) et elle s'accompagne de l'émission d'un photon. Dans une transition émissive, l'énergie du photon créé est donnée par la différence des niveaux d'énergie avant ($E_{>i}$) et après (E_f) la transition :

$$h\nu = E_i - E_f \text{ en (eV)}$$

Une diode électroluminescente est une jonction P-N qui doit être polarisée en sens direct lorsqu'on veut émettre de la lumière. La plupart des recombinaisons sont radiatives. La face émettrice de la LED est la zone P car c'est la plus radiative⁴.

5 Effet photoélectrique

→ Pourquoi l'effet électrique est la preuve de la quantification des niveaux d'énergie ?

→ Si les niveaux d'énergie n'étaient pas quantifiés alors en envoyant une intensité lumineuse inférieure à la valeur d'ionisation de l'atome, en attendant suffisamment longtemps on fournirait assez d'énergie pour ioniser l'atome. On peut faire l'analogie avec une balle qu'on remonte d'une falaise, pour remonter la balle on n'a pas besoin de la renvoyer d'un coup, on peut petit à petit en la poussant la remonter jusqu'en haut.

Or expérimentalement on observe pas ça. On observe que l'énergie des photons incidents doit être supérieur à une certaine valeur et qu'en augmentant l'intensité lumineuse (énergie des photons) on augmente pas l'énergie des électrons émis, mais juste leur nombre : ce qui signifie bien que les niveaux d'énergie sont quantifiés.

De plus on peut voir que l'interaction matière-rayonnement ne se fait que par paquets d'énergie : quanta. D'où la nécessité d'une vision corpusculaire de la lumière : quanta (grain) de lumière = photon. !