Equations différentielles rencontrées en première année

Une équation différentielle, est une équation liant les différentes dérivées d'une fonction y. En physique, en première année, on s'intéressera tout particulièrement aux dérivées temporelles (dy/dt). Une équation différentielle est dite du ≪ premier ordre ≫ si elle ne contient que la dérivée première de y (y'). Elle est dite du ≪ second ordre ≫ si elle contient la dérivée seconde de y (y"), et ainsi de suite. Une équation différentielle est dite à coefficients constants si les coefficients devant y et ses dérivées sont constants (indépendants du temps). Une équation différentielle linéaire ne fait intervenir y et ses dérivées qu'à la puissance un. De cette façon, si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont deux solutions, alors $y_1(t)+y_2(t)$ est aussi solution. En physique, on ne s'intéressera qu'à des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

1 Equation différentielle du premier ordre

La forme canonique (forme standard utilisée en physique) d'une équation différentielle du premier ordre est :

$$\boxed{\frac{dy}{dt}+\frac{y}{\tau}=\frac{B}{\tau}}$$

avec τ, un temps caractéristique, et B/τ un second membre quelconque.

— On résout l'équation homogène, c'est l'équation sans seconde membre : $\frac{dy}{dt}+\frac{y}{\tau}=\frac{B}{\tau}=0$
Les solutions sont de la forme

$$y_H(t)=Ae^{-t/\tau}$$

où A est une constante que l'on déterminera avec la condition initiale en $t=0$.

— On cherche une solution particulière de l'équation avec seconde membre. La solution particulière a la même forme que le second membre. Ainsi, si B est une constante, alors on cherche une solution constante :

$$y_p=B$$

B correspond au régime permanent ou à la position d'équilibre.

La solution général de l'équation différentielle est la somme :

$$\boxed{y(t)=Ae^{-t/\tau}+B}$$

On détermine A en utilisant la condition initiale $y(t=0)=A+B$

2 Equation différentielle du deuxième ordre

La forme canonique d'une équation différentielle du deuxième ordre est :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}+\omega^2y=\omega^2y_{eq}}$$

avec Q, le facteur de qualité, ω_0 la pulsation propre et y_{eq} un second membre correspondant à l'équilibre.
On commence par résoudre l'équation homogène sans second membre : $\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}+\omega^2y=0$.
On définit l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle par $r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$
On cherche les solutions r associées à cette équation du second degré.
Elles dépendent du signe du discriminant $\Delta=\frac{\omega_0^2}{Q}-4\omega_0^2=\omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)$

— Si $\Delta>0$ ou $Q<\frac{1}{2}$: régime apériodique, on a deux racines réelles distinctes

$$r_{1,2}=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont alors :

$$\boxed{y(t)=Ae^{r_1t}+Be^{r_2t}}$$

avec A et B des constante.

— Si $\Delta = 0$ ou $Q = \frac{1}{2}$: régime critique, on a une racine double

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\frac{1}{\tau}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont alors :

$$\boxed{y(t) = (A + Bt)e^{-t/\tau}}$$

avec A et B des constantes.

— Si $\Delta = 0$ ou $Q = \frac{1}{2}$: régime pseudo-périodique, on a deux racines imaginaires distinctes. En notant j le nombre complexe,

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

On note $r_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm \Omega t$ où $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ est la pseudo-pulsation des oscillations.
Les solutions de l'équation différentielle sont alors :

$$\boxed{y(t) = [A\cos(\Omega t + B\sin(\Omega t)]\, e^{-t/\tau}}$$

avec A et B des constantes.
Résolution de l'équation avec second membre :
En plus de la solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière de l'équation avec seconde membre. Dans le cas d'un second membre constant, la solution particulière correspond à y_{eq}. La solution particulière correspond au régime permanent ou à la position d'équilibre.

3 L'oscillateur harmonique

En physique, une équation est particulièrement importante :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y}$$

Les solutions de l'équation différentielle peuvent s'exprimer sous deux formes :

$$\boxed{y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = C(\cos(\omega_0 t) + \varphi) = 0}$$

où A, B, C et φ sont des constantes.
De même, on peut introduire un seconde membre.